SUR LE PROBLÈME FONDAMENTAL DE LA THÉORIE DES FONCTIONS PERMUTABLES

THÈSE DE DOCTORAT,

SOUTENUE LE 4 MARS 1938
DEVANT LA FACULTÊ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE LETTONIE

PAR

ARVIDS LŪSIS

LATVIJAS ŪNIVERSITĀTE

RĪGĀ 1938

LATVIJAS ŪNIVERSITĀTES RAKSTI
ACTA UNIVERSITATIS LATVIENSIS

MATĒMATIKAS UN DABAS ZINĀTŅU FAKULTĀTES SERIJA III. 5.

Sur le problème fondamental de la théorie des fonctions permutables[1]

Par *A. Lūsis.*

TABLE DES MATIÈRES.

[1] Ce travail, composé *in extenso* en langue lettonne, était présenté en 1937 comme la thèse de doctorat à la Faculté des Sciences de l'Université de Lettonie. J'exprime aux M. M. *J. Pérès* et les examinateurs toute ma reconnaissance pour quelques renseignements concernant ce travail.

Introduction.

M. *Volterra* a fondé par ses Notes [20], [21] et [22][2] de 1910 et de 1911 la théorie de la composition et des fonctions permutables de première espèce, dont l'application systématique à la résolution des équations intégrales et intégro-différentielles est faite dans les monographies [23] et [24] du même auteur. Parmi les continuateurs qui étendent considérablement la théorie de M. *Volterra* il faut citer M. M. *Evans* et *Pérès*. Par les travaux [3], [4] et [5] de M. *Evans* est développée l'algèbre des fonctions permutables et par la Thèse [11] de M. *Pérès* — la théorie des fonctions permutables analytiques. M. *Volterra*, par son Mémoire fondamental [27] de 1916, a constitué l'analyse infinitésimale des fonctions permutables, en introduisant la notion générale de la fonction de composition. Puisque celle-ci est une forme particulière de la fonctionnelle, on peut rattacher la théorie des fonctions permutables à la théorie générale des fonctionnelles. Sous ce point de vue la théorie de la composition et des fonctions permutables de 1ière espèce est exposée dans les traités modernes [30] et [31] de M. M. *Volterra* et *Pérès*, ainsi que dans la monographie spéciale [28].

On trouve le sommaire des résultats sur la théorie mentionnée dans les rapports suivants: [2], [6], [17], [25].

Nous traiterons dans ce travail le *problème fondamental:* trouver et étudier toutes les fonctions continues $\varphi(x, y)$ qui sont permutables (de 1ière espèce) avec une fonction donnée $f(x, y)$, c.-à.-d. qui vérifient la relation intégrale

$$\int_y^x \varphi(x,s) f(s,y)\, ds = \int_y^x f(x,s)\, \varphi(s,y)\, ds$$

ou

$$\overset{*}{\varphi}\overset{*}{f} = \overset{*}{f}\overset{*}{\varphi}.$$

Tout d'abord ce problème est étudié dans les Notes fondamentales [21] et [22] de *M. Volterra* où la fonction donnée $f(x,y)$ est supposée du premier ou du second ordre. Le cas général d'une fonction donnée d'ordre entier positif $n > 2$ est traité, sous les hypothèses des fonctions analytiques, dans la Thèse [11] de *M. Pérès*. Je suis revenu sur le problème fondamental dans mes publications [9] et [10] qui servent de base pour ce travail.

---

[2] Ici et plus bas les numéros, figurant entre crochets, renvoient à l'Index bibliographique, placé à la fin du travail.

Je résume mes résultats et mes compléments principaux exposés dans ce travail. Pour appliquer une méthode uniforme et nouvelle à la résolution du problème fondamental j'expose (Chapitre I, § 4), comme dans mes publications [9] et [10], la détermination du symbole $\overset{*}{f}{}^{-1}$ d'inversion de la composition dans le cas général d'une fonction $f(x,y)$ d'ordre entier positif n et de forme canonique. L'expression obtenue du symbole $\overset{*}{f}{}^{-1}$ est appliquée dans le Chapitre II à la réduction du problème fondamental. On obtient un nouveau type d'équation intégro-différentielle qu'on peut remplacer, dans le cas général, par l'équation intégrale équivalente.

Par application des fonctions du groupe du cycle fermé et des transformations qui mettent une fonction donnée sous forme canonique, je détermine (§ 5, nos 4 et 5) une classe spéciale des fonctions, permutables avec une fonction du premier ordre ou, en général, d'ordre n qui se réduit respectivement sous la forme canonique à l'unité ou à $\overset{*}{1}{}^{n}$.

Dans le cas d'une fonction donnée $f(x, y)$ du premier ou du second ordre je résous (§ 6 et § 7) le problème fondamental en le réduisant, par l'introduction d'une inconnue auxiliaire

$$\psi(x,y) = \int_y^x \varphi(x,s) f(s,y)\, ds = \int_y^x f(x,s)\, \varphi(s,y)\, ds$$

et son expression

$$\psi(x,y) = \int_0^{x-y} \lambda(\xi) K(\xi;\, x,y)\, d\xi \qquad [\lambda = \lambda(x-y)],$$

à la résolution de l'équation intégrale qui caractérise la fonction $K(\xi;\, x,y)$. Le cas d'une fonction donnée du premier ordre (§ 6) est complété par la précision des formules de la solution. En complétant les indications générales dues à M. *Volterra* dans sa Note [22], je donne (§ 7) la résolution complète du problème fondamental dans le cas d'une fonction du second ordre et je constate que dans ce cas toutes les fonctions permutables $\varphi(x,y)$ peuvent être exprimées par la formule de M. *Volterra*

$$\varphi(x,\, y) = \lambda(x-y) + \int_0^{x-y} \lambda(\xi)\, \Phi(\xi;\, x,\, y)\, d\xi.$$

Donc, toutes les propriétés des fonctions $\varphi(x, y)$ qui réposent sur cette formule sont les mêmes que celles des fonctions permutables avec une fonction du premier ordre. Dans les deux cas précédents sont aussi établies les équations fonctionnelles nouvelles qui caractérisent les fonctions $K(\xi;\ x,\ y)$ et $\Phi(\xi;\ x,\ y)$.

Dans le cas général d'une fonction $f(x, y)$ d'ordre entier positif $n > 2$ j'annonce (§ 8) la possibilité de réduire l'équation intégro-différentielle du problème à l'équation intégrale équivalente et j'étudie le cas particulier d'une fonction du groupe du cycle fermé.

Par application des transformations de *M. Pérès*

$$\Omega(\lambda) = (\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\alpha})\,\overset{*}{\lambda}\,(\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\beta}) \qquad [(\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\alpha})(\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\beta}) = (\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\beta})(\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\alpha}) = \overset{*}{1}{}^0]$$

et de la condition

$$f(x, y) = \Omega(\overset{*}{1}{}^n)$$

que doit vérifier la fonction $f(x, y)$ d'ordre n et du type spéciale

$$f(x, y) = \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} + (x-y)^{2n}\omega(x, y),$$

je forme (Chap. III, § 10, n⁰ 1) les équations intégro-différentielles qui caractérisent les fonctions $\alpha(x, y)$ et $\beta(x, y)$. Les équations précédentes généralisent celles que M. *Pérès* a établies pour la fonction du premier ordre. Vient de suite (§ 10, n⁰ 2) la généralisation de l'autre méthode, due à M. *Pérès*, par laquelle on emploie l'équation intégrale qui caractérise la fonction génératrice $\Phi(\xi;\ x, y)$ des transformations. À la fin du travail les transformations de M. *Pérès* sont appliquées à la résolution de l'équation intégrale binome et sont aussi annoncées les propriétés caractéristiques du groupe des fonctions permutables.

Dans mon travail ultérieur [8] j'ai envisagé la théorie des fonctions permutables en vue des applications aux équations intégrales et j'ai pris, comme ici, le domaine d'existence tel que

$$(A) \qquad a \leqslant y \leqslant x \leqslant b\,.$$

Puisque ce domaine diffère de celui-ci, pris dans mes publications [9] et [10] et dans les travaux fondamentaux de M. M. *Volterra* et *Pérès*, il faut modifier convenablement toutes les formules employées. C'est pourquoi une partie de ce travail (§§ 1—3, § 9) est consacrée à l'explication de ces formules ainsi que des notions et des propriétés de la composition et des fonctions permutables, nécessaires pour la suite.

CHAPITRE I.

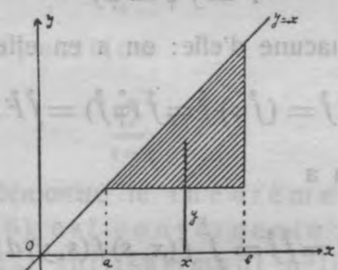
Quelques propriétés générales de la composition et de la permutabilité.

§ 1. Composition et permutabilité de première espèce. Symbole $\overset{*}{1}{}^{0}$.

1. Dans la suite les fonctions envisagées de deux variables réelles x et y seront supposées continues dans un domaine tel que

$$(A) \qquad a \leqslant y \leqslant x \leqslant b\,,$$

et ces fonctions admettent les dérivées partielles, continues dans le domaine (A) jusqu'à l'ordre déterminé. Ce domaine peut être représenté par le triangle marqué sur la figure.



2. M. *Volterra* a nommé l'opération

$$(1) \qquad \overset{*}{f}\overset{*}{\varphi} = \int_{y}^{x} f(x,s)\,\varphi(s,y)\,ds$$

composition de première espèce des deux fonctions $f(x,y)$ et $\varphi(x,y)$. Celles-ci seront dites composantes et le résultat de l'opération

$$F(x,y) = \overset{*}{f}\overset{*}{\varphi}$$

sera leur résultante (produit de composition). Si les composantes sont les fonctions continues dans le domaine (A), leur résultante sera continue dans le même domaine. Comme il s'agit ici toujours de la composition de première espèce, cette notion est nommée plus brèvement: la composition.

La composition est distributive

$$\overset{*}{f}(\overset{*}{\varphi}+\overset{*}{\psi}) = \overset{*}{f}\overset{*}{\varphi}+\overset{*}{f}\overset{*}{\psi}\,, \qquad (\overset{*}{\varphi}+\overset{*}{\psi})\overset{*}{f} = \overset{*}{\varphi}\overset{*}{f}+\overset{*}{\psi}\overset{*}{f}$$

et associative

$$(\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi})\overset{*}{\psi}=\overset{*}{f}(\overset{*}{\varphi}\overset{*}{\psi}),$$

mais elle n'est pas en général commutative.

3. Si la composition de deux fonctions $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ est commutative, c.-à-d.

$$\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi}=\overset{*}{\varphi}\overset{*}{f} \quad \text{ou} \quad \int_y^x f(x, s)\varphi(s, y)\,ds=\int_y^x \varphi(x, s)f(s, y)\,ds, \tag{2}$$

les fonctions $f(x,y)$ et $\varphi(x,y)$ sont dites permutables (de première espèce); leur résultante

$$F=\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi}=\overset{*}{\varphi}\overset{*}{f}$$

est permutable avec chacune d'elle: on a en effet, par exemple,

$$\overset{*}{F}\overset{*}{f}=(\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi})\overset{*}{f}=\overset{*}{f}(\overset{*}{\varphi}\overset{*}{f})=\overset{*}{f}\overset{*}{F}.$$

Lorsque $\varphi=f$, on a

$$\overset{*}{f}{}^2=\overset{*}{f}\overset{*}{f}=\int_y^x f(x, s)f(s, y)\,ds$$

et en général les puissances entières de composition

$$\overset{*}{f}{}^3=\overset{*}{f}{}^2\overset{*}{f}=\overset{*}{f}\overset{*}{f}{}^2, \ldots, \quad \overset{*}{f}{}^n=\overset{*}{f}{}^{n-1}\overset{*}{f}.$$

Pour ces puissances il est facile à établir la règle de composition suivante

$$\overset{*}{f}{}^m\overset{*}{f}{}^n=\overset{*}{f}{}^n\overset{*}{f}{}^m=\overset{*}{f}{}^{m+n} \tag{3}$$

$(m, n$ — entier positif).

Dans le cas particulier où $f=1$ on obtient les puissances de composition de l'unité

$$\overset{*}{1}{}^2=\frac{x-y}{1!},\quad \overset{*}{1}{}^3=\frac{(x-y)^2}{2!},\ldots,\quad \overset{*}{1}{}^n=\frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!}=\frac{(x-y)^{n-1}}{\Gamma(n)} \tag{4}$$

où $\Gamma(n)$ est la fonction eulerienne.

Si dans chaque membre d'un polynome algébrique à coefficients constants

$$P(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k z^k \tag{5}$$

on remplace la puissance ordinaire z^k de la variable z par la puissance de composition $\overset{*}{f}{}^k$ d'une fonction $f(x, y)$, on obtient un polynome de composition

$$P(\overset{*}{f}) = \sum_{k=1}^{n} a_k \overset{*}{f}{}^k \tag{5'}$$

qui obéit aux mêmes règles de calcul formelles que le polynome algébrique correspondant. Lorsque $n \longrightarrow \infty$, on a la série infinie (ordinaire)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \tag{6}$$

et la série de composition

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \overset{*}{f}{}^k. \tag{6'}$$

M. *Volterra* a démontré le théorème fondamental[3]: Si la série ordinaire (6) est convergente lorsque le modul de la variable z est suffisamment petit, la série de composition (6') converge absolument et uniformément dans le domaine (A) quelque soit le modul de la fonction $f(x, y)$ (à condition qu'il soit fini).

Alors la série de composition (6') représente une fonction permutable avec la fonction $f(x, y)$.

4. Pour maintenir l'analogie formelle complète entre multiplication arithmétique et composition, il a besoin dans la théorie de composition d'un élément qui joue le rôle d'unité.

M. *Volterra,* dans son Mémoire [27], a introduit le symbole $\overset{*}{f}{}^0$, la puissance nulle de composition, défini par la règle de calcul suivante

$$\overset{*}{f}{}^0 \overset{*}{\varphi} = \overset{*}{\varphi} \overset{*}{f}{}^0 = \varphi(x, y),$$

quelle que soit la fonction φ, permutable ou non avec f. Ce symbole

[3] On trouvera, dans les monographies de *Volterra* [24, Chap. IX et X] et de *Volterra-Pérès* [28, Chap. II], la généralisation et les applications nombreuses de ce théorème.

est permutable avec toute fonction $\varphi(x, y)$ et son effet est indépendant de la base f. C'est pourquoi on note

$$\overset{*}{f}{}^{0} = \overset{*}{1}{}^{0}, \tag{7}$$

en se servant de l'unité pour la base. Ce symbole est d'un caractère purement formel et il est très commode pour faciliter le calcul de composition.

On peut construire les fonctions symboliques de forme

$$F = a\,\overset{*}{1}{}^{0} + f(x, y), \quad \Phi = b\,\overset{*}{1}{}^{0} + \varphi(x, y) \tag{8}$$

où a et b sont des constantes et où $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ sont dites parties régulières de ces fonctions. L'opération

$$\overset{*}{F}\overset{*}{\Phi} = ab\,\overset{*}{1}{}^{0} + a\varphi + bf + \overset{*}{f}\overset{*}{\varphi}$$

est dite composition de F à droite avec Φ, tandis que l'opération

$$\overset{*}{\Phi}\overset{*}{F} = ab\,\overset{*}{1}{}^{0} + a\varphi + bf + \overset{*}{\varphi}\overset{*}{f}$$

s'appelle composition à gauche. Dans le cas où les parties régulières sont permutables

$$\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi} = \overset{*}{\varphi}\overset{*}{f},$$

les fonctions symboliques (8) sont aussi permutables

$$\overset{*}{F}\overset{*}{\Phi} = \overset{*}{\Phi}\overset{*}{F}.$$

§ 2. Ordre, caractéristique et diagonale d'une fonction.

1. *Définition.* Si une fonction $f(x, y)$ peut se mettre sous la forme [$\Gamma(\alpha)$ — fonction eulerienne]

$$f(x, y) = \frac{(x-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, g(x, y), \tag{1}$$

où α est un nombre réel, différent de zéro ou d'un entier négatif et où $g(x, y)$ est dans le domaine (A) une fonction continue qui est constamment différente de zéro en les points de la droite $y=x$, c.-à-d.

$$g(x, x) \gtreqless 0,$$

cette fonction $f(x, y)$ sera dite d'ordre régulier α; la fonction $g(x, y)$ sera dite la caractéristique de $f(x, y)$ et l'expression $g(x, x)$ en sera la diagonale.

La caractéristique $g(x, y)$ est une fonction du premier ordre. Dans la formule (1) on peut représenter le facteur

$$\frac{(x-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} = \overset{*}{1}{}^{\alpha} \tag{2}$$

par la puissance généralisée de composition de l'unité $\overset{*}{1}^\alpha$. Donc, on peut mettre (1) sous une forme équivalente

(1') $$f(x, y) = \overset{*}{1}^\alpha \cdot g(x,y),$$

valable, au sens de M. *Pérès*, dans le cas d'une fonction d'ordre régulier (α — différent de zéro ou d'un entier négatif).

Nous rappellons les deux théorèmes[4] suivants sur l'ordre de la résultante et sur les diagonales.

Théorème I. Si deux fonctions $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ sont d'ordre régulier α et β respectivement et si $\alpha+\beta$ est aussi régulier, leur résultante $\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi}$ est d'ordre $\alpha+\beta$; elle a pour diagonale le produit des diagonales des fonctions données.

En désignant la diagonale de la fonction (1) par

$$g(x, x) = D(f)$$

et la diagonale

$$\psi(x, x) = D(\varphi)$$

d'une autre fonction d'ordre β

(3) $$\varphi(x, y) = \overset{*}{1}^\beta \cdot \psi(x, y),$$

on exprime la relation entre les diagonales par la formule

(4) $$D(\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi}) = D(f) \cdot D(\varphi).$$

Théorème II. Si les fonctions précédentes $f(x,y)$ et $\varphi(x,y)$ sont permutables

$$\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi} = \overset{*}{\varphi}\overset{*}{f}$$

et telles que leurs caractéristiques $g(x,y)$ et $\psi(x,y)$ admettent les dérivées partielles continues de premier ordre, on a, entre les diagonales, la relation

(5) $$\frac{[g(x, x)]^{\frac{1}{\alpha}}}{[\psi(x, x)]^{\frac{1}{\beta}}} = \text{const.} \quad \text{ou} \quad \frac{[D(f)]^{\frac{1}{\alpha}}}{[D(\varphi)]^{\frac{1}{\beta}}} = \text{const.}$$

Ces théorèmes subsistent aussi pour α et β négatif (non entier) comme l'a démontré M. *Pérès* dans sa Note [12], en utilisant la notion de la partie finie[5] de l'intégrale définie.

---

[4] Pour la démonstration dans le cas où $\alpha > 0$, $\beta > 0$, voir, p. ex., la monographie de *Volterra-Pérès* [28, page 11 et 12].

[5] Cette notion est introduite dans l'analyse par M. M. *J. Hadamard* (1905) et *R. d'Adhémar*.

2. M. *Pérès*, dans la Note précédente, a introduit l'ordre singulier α d'une fonction, si α est zéro ou un entier négatif. La fonction symbolique (§ 1, n^0 4)

$$F = a\,\overset{*}{1}{}^0 + f(x,y),$$

où a est une constante, différente de zéro, et où $f(x, y)$ est une fonction d'ordre régulier, représente la forme générale d'une fonction d'ordre zéro.

Nous étudierons les fonctions d'ordre entier négatif au § 4, en introduisant le symbole $\overset{*}{f}{}^{-1}$ d'inversion de la composition.

§ 3. Transformations qui mettent une fonction sous forme canonique.

1. Pour faciliter la résolution du problème fondamental, M. M. *Volterra* et *Pérès*[6] mettent la fonction donnée d'ordre entier positif sous forme canonique par les transformations spéciales qui conservent la composition.

Expliquons d'abord le cas où la fonction donnée $f(x, y)$ est du premier ordre, en supposant qu'elle admet des dérivées partielles premières continues.

Notons les fonctions

$$f(x, x) = a(x) \gtrless 0 \tag{1}$$

et

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y=x} = b(x). \tag{2}$$

Par le changement des variables

$$x = \omega(\xi), \quad y = \omega(\eta), \quad s = \omega(\sigma) \qquad (\omega' \neq 0) \tag{3}$$

la résultante de deux fonctions $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ quelconques s'écrira

$$\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi} = \int_{\eta}^{\xi} f[\omega(\xi), \omega(\sigma)]\ \varphi[\omega(\sigma), \omega(\eta)]\ \omega'(\sigma)\, d\sigma.$$

Si nous introduisons deux fonctions auxiliaires $\alpha(\sigma)$ et $\beta(\sigma)$ telles que

$$\alpha(\sigma)\,\beta(\sigma) = \omega'(\sigma) \text{ ou } \omega(\sigma) = \int \alpha(\sigma)\,\beta(\sigma)\,d\sigma, \tag{4}$$

et si nous formons les fonctions

$$F(\xi,\eta) = \alpha(\xi)\,\beta(\eta) f[\omega(\xi),\omega(\eta)], \quad \Phi(\xi,\eta) = \alpha(\xi)\,\beta(\eta)\,\varphi[\omega(\xi), \omega(\eta)], \tag{5}$$

nous pouvons exprimer la résultante $\overset{*}{F}\overset{*}{\Phi}$ par la transformée de la résultante $\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi}$, c.-à-d.

$$\overset{*}{F}\overset{*}{\Phi} = \alpha(\xi)\,\beta(\eta)\ [\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi}]_{\substack{x=\omega(\xi),\\ y=\omega(\eta).}} \tag{6}$$

[6] *Volterra-Pérès* [28, pages 37 et 43].

Donc, la transformation définie par les formules (3), (4) et (5) conserve la composition.

Il est facile d'obtenir la transformation qui met la fonction $f(x, y)$ sous forme canonique, c.-à.-d. telle que les conditions

$$F(\xi, \xi) = 1, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)_{\eta=\xi} = 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)_{\eta=\xi} = 0 \tag{7}$$

soient vérifiées. Il vient de la première condition (7) la relation

$$\xi = \int a(x)\,dx \qquad [a(x) \neq 0] \tag{8}$$

qui définie bien la fonction inverse demandée

$$x = \omega(\xi).$$

On tire de (4) et (7) les autres fonctions

$$\alpha = e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx} \tag{9}$$

et

$$\beta = \frac{1}{a(x)}\, e^{+\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx}. \tag{10}$$

2. Appliquons la transformation précédente à la fonction

$$f(x, y) = A g(x) + B g(y) \qquad [g(x) \neq 0] \tag{11}$$

où $g(x)$ est une fonction donnée et où A et B sont des constantes telles que $\quad A + B \neq 0.$

En vertu des expressions

$$a(x) = (A + B)\, g(x), \qquad b(x) = A g'(x)$$

nous obtenons la forme canonique correspondante

$$F(\xi, \eta) = \frac{1}{A + B}\left[\frac{A g(x) + B g(y)}{[g(x)]^{\frac{A}{A+B}}[g(y)]^{\frac{B}{A+B}}}\right]_{\substack{x = \omega(\xi),\\ y = \omega(\eta)}}, \tag{12}$$

si nous substituerons la fonction $\omega(\xi)$ définie par la relation

$$\xi = (A + B) \int g(x)\,dx. \tag{13}$$

Dans le cas particulier où

$$g(x) = x,$$

la fonction donnée (11) est linéaire

$$f(x, y) = A x + B y \qquad (A + B \neq 0) \tag{11'}$$

et, d'après (13), on a

$$\xi = \frac{A + B}{2}\, x^2.$$

Donc, par la substitution

$$x = \left(\frac{2}{A+B}\right)^{\frac{1}{2}} \xi^{\frac{1}{2}}, \quad y = \left(\frac{2}{A+B}\right)^{\frac{1}{2}} \eta^{\frac{1}{2}}$$

dans la formule (12) on établit la forme canonique[7]

$$(12') \qquad F(\xi, \eta) = \frac{1}{A+B} \cdot \frac{A\,\xi^{\frac{1}{2}} + B\,\eta^{\frac{1}{2}}}{\xi^{2\frac{A}{(A+B)}} \cdot \eta^{2\frac{B}{(A+B)}}}$$

qui correspond à la fonction linéaire (11').

3. Pour traiter la transformation à la forme canonique dans le cas général d'une fonction d'ordre entier positif quelconque, nous emploierons le lemme suivant sur la dérivation d'une fonction composée. Soit $G(x)$ une fonction dérivable quelconque. Si l'on effectue le changement de variables

$$x = \omega(\xi),$$

on forme la fonction composée

$$\overline{G}(\xi) = G[\omega(\xi)],$$

dont la dérivée $n^{ième}$ par rapport à la nouvelle variable ξ est exprimée par la formule

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^n \overline{G}}{d\xi^n} = \frac{d^n G}{dx^n}[\omega'(\xi)]^n + \frac{n(n-1)}{2}\frac{d^{n-1}G}{dx^{n-1}}[\omega'(\xi)]^{n-2}\omega''(\xi) + \ldots + \\ + \frac{dG}{dx}\omega^{(n)}(\xi). \end{aligned} \right.$$

On établit facilement ce lemme par le raisonnement de recurrence.

4. Soit

$$(15) \qquad f(x, y) = \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} g(x, y) \qquad [g(x, x) \neq 0]$$

une fonction d'ordre entier positif n à caractéristique $g(x, y)$ dérivable. Alors en les points de la droite $y = x$ du domaine (A) la fonction $f(x, y)$ et ses dérivées partielles, jusqu'à l'ordre $n-2$ inclu, sont identiquement nulles[8]

$$(16) \qquad \left[\frac{\partial^k f(x, y)}{\partial x^i \partial y^j}\right]_{y=x} = 0 \qquad \left[\begin{aligned} &i + j = k, \\ &k = 0, 1, 2, \ldots, n-2 \end{aligned}\right],$$

tandis que la valeur des dérivées d'ordre $n-1$

[7] Tel exemple particulier $(A + B = 1)$ est indiqué dans la monographie de Volterra-Pérès [28, page 51].

[8] Ici la dérivée d'ordre $k = 0$ désigne la fonction $f(x, y)$ elle-même.

$$(17)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}}\right)_{y=x} = -\left(\dfrac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-2}\,\partial y}\right)_{y=x} = \ldots = \\ = (-1)^{n-1}\left(\dfrac{\partial^{n-1} f}{\partial y^{n-1}}\right)_{y=x} = g(x, x) = a(x) \end{cases}$$

est différente de zéro [$a(x) \neq 0$]. Notons la valeur des dérivées d'ordre n

$$(18)\quad \left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right)_{y=x} = -\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\,\partial y}\right)_{y=x} = \ldots = (-1)^n\left(\frac{\partial^n f}{\partial y^n}\right)_{y=x} = b(x).$$

La fonction $f(x, y)$ sérait de forme canonique si l'on avait

$$a(x) \equiv 1, \quad b(x) \equiv 0.$$

On peut mettre sous cette forme la fonction donnée en se servant de la transformation définie par les formules (3), (4) et (5).

La condition

$$\left(\frac{\partial^{n-1} F}{\partial \xi^{n-1}}\right)_{\eta=\xi} = 1$$

que vérifie la fonction transformée

$$F(\xi, \eta) = \alpha(\xi)\,\beta(\eta)\,f[\omega(\xi), \omega(\eta)],$$

entraîne la relation

$$(19)\quad \xi = \int [a(x)]^{\frac{1}{n}}\,dx$$

pour déterminer la fonction inverse

$$x = \omega(\xi).$$

En employant la règle de *Leibniz* sur la dérivation d'un produit et la formule (14), on tire de la condition

$$\left(\frac{\partial^n F}{\partial \xi^n}\right)_{\eta=\xi} = 0,$$

par les calculs faciles, la fonction

$$(20)\quad \alpha = [a(x)]^{\frac{n-1}{2n}} \cdot e^{-\int \frac{b(x)}{n\,a(x)}\,dx}.$$

Par la substitution de l'expression précédente dans la relation

$$\alpha\beta = \omega' = [a(x)]^{-\frac{1}{n}}$$

on détermine la seconde fonction

$$(21)\quad \beta = [a(x)]^{-\frac{n+1}{2n}} \cdot e^{+\int \frac{b(x)}{n\,a(x)}\,dx}.$$

Donc, la transformation (3), (4) et (5) est bien définie dans le cas d'une fonction $f(x, y)$ d'ordre entier positif n quelconque.

§ 4. Symbole $\overset{*}{f}{}^{-1}$ d'inversion de la composition.

1. Dans un problème d'inversion des intégrales définies (à limites variables) il faut résoudre les équations intégrales linéaires de *Volterra*

$$(1)\qquad \int_y^x f(x,s)\,\varphi(s,y)\,ds = \psi(x,y) \quad \text{ou} \quad \overset{*}{f}\overset{*}{\varphi} = \psi(x,y)$$

et

$$(2)\qquad \int_y^x \varphi(x,s)\,f(s,y)\,ds = \psi(x,y) \quad \text{ou} \quad \overset{*}{\varphi}\overset{*}{f} = \psi(x,y)$$

où les fonctions données sont $f(x,y)$ et $\psi(x,y)$ et où l'inconnue est $\varphi(x,y)$. Elles sont dites équations associées ou adjointes l'une de l'autre et peuvent être résolues respectivement par les formules

$$(3)\qquad \varphi(x,y) = \overset{*}{f}{}^{-1}\overset{*}{\psi} \qquad \text{(composition à gauche)}$$

et

$$(4)\qquad \varphi(x,y) = \overset{*}{\psi}\overset{*}{f}{}^{-1} \qquad \text{(composition à droite)}$$

avec le même symbole $\overset{*}{f}{}^{-1}$ d'inversion de la composition, défini par les conditions

$$(5)\qquad \overset{*}{f}\overset{*}{f}{}^{-1} = \overset{*}{f}{}^{-1}\overset{*}{f} = \overset{*}{f}{}^{0} = \overset{*}{1}{}^{0}.$$

2. Envisageons d'abord un cas particulier où $f(x,y)$ est la puissance entière de composition de l'unité:

$$f = \overset{*}{1}{}^{n} = \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Dans ce cas les compositions $\overset{*}{1}{}^{n}\overset{*}{\varphi}$ et $\overset{*}{\varphi}\overset{*}{1}{}^{n}$ peuvent être représentées par les intégrations répétées puisque

$$\overset{*}{1}{}^{n}\overset{*}{\varphi} = \int_y^x \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!}\,\varphi(s,y)\,ds = \int_y^x ds_1 \int_y^{s_1} ds_2 \ldots \int_y^{s_{n-1}} \varphi(s_n,y)\,ds_n$$

et

$$\overset{*}{\varphi}\overset{*}{1}{}^{n} = \int_y^x \varphi(x,s)\frac{(s-y)^{n-1}}{(n-1)!}\,ds = \int_y^x ds_1 \int_{s_1}^x ds_2 \ldots \int_{s_{n-1}}^x \varphi(x,s_n)\,ds_n.$$

Si la fonction $\psi(x,y)$ est d'ordre $m > n$, on a les solutions des équations associées

$$\overset{*}{1}{}^n \overset{*}{\varphi} = \psi(x,y) \tag{6}$$

et

$$\overset{*}{\varphi}\, \overset{*}{1}{}^n = \psi(x,y) \tag{6'}$$

respectivement par les formules

$$\varphi = \frac{\partial^n \psi(x,y)}{\partial x^n} \tag{7}$$

et

$$\varphi = (-1)^n \frac{\partial^n \psi(x,y)}{\partial y^n}. \tag{7'}$$

En comparant celles-ci avec les solutions formelles des mêmes équations

$$\varphi = \overset{*}{1}{}^{-n} \overset{*}{\psi}, \quad \varphi = \overset{*}{\psi}\, \overset{*}{1}{}^{-n}$$

on est conduit à poser par définition

$$\overset{*}{1}{}^n\, \overset{*}{1}{}^{-n} = \overset{*}{1}{}^{-n} \overset{*}{1}{}^n = \overset{*}{1}{}^0 \tag{8}$$

et

$$\begin{cases} \overset{*}{1}{}^{-n}\, \overset{*}{\psi} = \dfrac{\partial^n \psi(x,y)}{\partial x^n} & \text{(composition à gauche)} \\ \overset{*}{\psi}\, \overset{*}{1}{}^{-n} = (-1)^n \dfrac{\partial^n \psi(x,y)}{\partial y^n} & \text{(composition à droite),} \end{cases} \tag{9}$$

si la fonction $\psi(x,y)$ est d'ordre $m > n$.

Lorsque $\psi(x,y)$ est une fonction d'ordre n et de forme canonique (§ 3) on peut la représenter sous l'une quelconque des deux formes

$$\begin{cases} \psi(x,y) = \overset{*}{1}{}^n (\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\psi}_1) \\ \psi(x,y) = (\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\psi}_2)\, \overset{*}{1}{}^n \end{cases} \tag{10}$$

avec les fonctions

$$\psi_1(x,y) = \frac{\partial^n \psi}{\partial x^n} \tag{11}$$

et

$$\psi_2(x,y) = (-1)^n \frac{\partial^n \psi}{\partial y^n}. \tag{12}$$

Donc, on a sous les mêmes conditions, par définition, les formules fondamentales

$$\begin{cases} \overset{*}{1}{}^{-n}\, \overset{*}{\psi} = \overset{*}{1}{}^0 + \dfrac{\partial^n \psi}{\partial x^n} \\ \overset{*}{\psi}\, \overset{*}{1}{}^{-n} = \overset{*}{1}{}^0 + (-1)^n \dfrac{\partial^n \psi}{\partial y^n} \end{cases} \tag{13}$$

3. Dans le c a s g é n é r a l d'une fonction $f(x, y)$ d'ordre entier positif n le symbole $\overset{*}{f}{}^{-1}$ d'inversion de la composition peut être regardé comme une fonction d'ordre singulier $(-n)$ au sens de M. *Pérès*[9].

L'expression générale de telles fonctions est

$$(14) \quad \overset{*}{f}{}^{-1} = a_0(x)\, \overset{*}{1}{}^{-n} + a_1(x)\, \overset{*}{1}{}^{-n+1} + \ldots + a_n(x)\, \overset{*}{1}{}^{0} + F_1(x, y)$$

ou

$$(14') \quad \overset{*}{f}{}^{-1} = b_0(y)\, \overset{*}{1}{}^{-n} + b_1(y)\, \overset{*}{1}{}^{-n+1} + \ldots + b_n(y)\, \overset{*}{1}{}^{0} + F_2(x, y)$$

avec les fonctions $F_1(x, y)$ et $F_2(x, y)$ d'ordre positif et avec les autres termes, représentant le p r o d u i t et n o n la composition des fonctions

$$a_0(x),\ a_1(x), \ldots,\ a_n(x);\ b_0(y),\ b_1(y), \ldots,\ b_n(y)$$

par les symboles

$$\overset{*}{1}{}^{-n},\ \overset{*}{1}{}^{-n+1}, \ldots,\ \overset{*}{1}{}^{0}.$$

Il sera commode d'employer dans les calculs de composition l'expression (14) ou (14'), suivant le cas de la composition à gauche ou à droite avec le symbole $\overset{*}{f}{}^{-1}$.

Nous allons déterminer les fonctions

$$a_0(x), \ldots, a_n(x);\ b_0(y), \ldots\ b_n(y);\ F_1(x, y),\ F_2(x, y),$$

en supposant la fonction donnée $f(x, y)$ dérivable jusqu'à l'ordre $2n$ (inclus) et de forme canonique.

Pour trouver, par exemple, les fonctions

$$a_0(x), \ldots, a_n(x);\ F_1(x, y),$$

substituons l'expression symbolique (14) dans la relation

$$\overset{*}{f}{}^{-1} \overset{*}{f} = \overset{*}{1}{}^{0}$$

et effectuons ici les compositions par les règles (9) et (13).

Il vient la relation

$$a_0(x)\, \overset{*}{1}{}^{0} + a_0(x) \frac{\partial^n f}{\partial x^n} + a_1(x) \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}} + \ldots + a_n(x) f(x, y) + \overset{*}{F}_1 \overset{*}{f} = \overset{*}{1}{}^{0},$$

d'où

$$a_0(x) \equiv 1$$

et la relation nouvelle

$$(15) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^n f}{\partial x^n} + a_1(x) \dfrac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}} + a_2(x) \dfrac{\partial^{n-2} f}{\partial x^{n-2}} + \ldots + \\ + a_n(x) f(x, y) + \displaystyle\int_y^x F_1(x, s) f(s, y)\, ds = 0 \end{cases}$$

[9] *J. Pérès* [12, § 3] et *Volterra-Pérès* [28, chap. VII].

pour déterminer

$$a_1(x),\ a_2(x),\ \ldots,\ a_n(x) \text{ et } F_1(x,y).$$

Posons ici $y=x$. En vertu des conditions

$$(16)\quad \begin{cases} \left[\dfrac{\partial^k f(x,y)}{\partial x^i \partial y^j}\right]_{y=x}=0 & \left[\begin{matrix} i+j=k, \\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-2,\ n\end{matrix}\right] \\ \left(\dfrac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}}\right)_{y=x}=-\left(\dfrac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-2}\partial y}\right)_{y=x}=\ldots=(-1)^{n-1}\left(\dfrac{\partial^{n-1} f}{\partial y^{n-1}}\right)_{y=x}=1 \end{cases}$$

que vérifie la fonction $f(x,y)$ d'ordre n et de forme canonique, on tire

$$a_1(x)\equiv 0.$$

Pour déterminer $a_2(x)$, dérivons tous les membres de la relation (15) par rapport à y et posons $y=x$. Nous obtenons, en vertu des conditions (16), l'expression

$$a_2(x)=\left(\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^n \partial y}\right)_{y=x}.$$

En continuant de la même façon, on peut exprimer $a_3(x),\ldots,a_n(x)$ par emploi des dérivées partielles de la fonction $f(x,y)$ jusqu'à l'ordre $2n-1$ où l'on a $y=x$.

L'équation (15) par rapport à l'inconnue $F_1(x,y)$ est une équation intégrale linéaire de *Volterra* de première espèce. En dérivant n fois tous les membres de cette équation par rapport à y on obtient l'équation de *Volterra* de deuxième espèce

$$(17)\qquad F_1(x,y)+\overset{*}{F}_1\overset{*}{f}_2=H_1(x,y)$$

avec la fonction

$$f_2(x,y)=(-1)^n\frac{\partial^n f}{\partial y^n}$$

et

$$(18)\quad \begin{cases} H_1(x,y)=(-1)^{n-1}\left[\dfrac{\partial^{2n} f}{\partial x^n \partial y^n}+a_2(x)\dfrac{\partial^{2n-2} f}{\partial x^{n-2}\partial y^n}+\ldots+\right. \\ \qquad\qquad \left.+\,a_n(x)\dfrac{\partial^n f}{\partial y^n}\right]. \end{cases}$$

La solution de l'équation (17) est

$$(19)\quad F_1(x,y)=\overset{*}{H}_1(\overset{*}{1}{}^0+\overset{*}{f}_2)^{-1}=H_1-\overset{*}{H}_1\overset{*}{f}_2+\overset{*}{H}_1\overset{*}{f}_2\overset{*}{f}_2-\ldots,$$

la série obtenue (§ 1) étant absolument et uniformément convergente dans le domaine (A).

De la même façon, par la substitution de l'expression (14′) dans la relation

$$\overset{*}{f}\,\overset{*}{f}{}^{-1} = \overset{*}{1}{}^{0}$$

on obtient $b_0(y) \equiv 1$ et l'équation

$$(15') \quad \left\{ \begin{aligned} &(-1)^n \frac{\partial^n f}{\partial y^n} + (-1)^{n-1} b_1(y) \frac{\partial^{n-1} f}{\partial y^{n-1}} + \ldots + b_n(y) f(x,y) + \\ &\qquad + \int_y^x f(x,s)\, F_2(s,y)\, ds = 0, \end{aligned} \right.$$

pour déterminer les fonctions $b_1(y), \ldots, b_n(y)$ et $F_2(x,y)$.

En posant ici $y = x$ on a $b_1(y) \equiv 0$. Par la dérivation par rapport à x on exprime

$$b_2(y) = (-1)^{n+1} \left(\frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^n \, \partial x} \right)_{y=x}$$

et analogiquement les fonctions $b_3(y), \ldots, b_n(y)$ à l'aide des dérivées partielles suivantes

$$\left(\frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^n \, \partial x} \right)_{y=x}, \quad \left(\frac{\partial^{n+2} f}{\partial y^n \, \partial x^2} \right)_{y=x}, \; \ldots, \; \left(\frac{\partial^{2n-1} f}{\partial y^n \, \partial x^{n-1}} \right)_{y=x}.$$

Après avoir dérivé n fois tous les membres de (15′) par rapport à x on forme l'équation de Volterra

$$(17') \qquad F_2(x,y) + \overset{*}{f}_1 \overset{*}{F}_2 = H_2(x,y)$$

avec la fonction

$$f_1(x,y) = \frac{\partial^n f}{\partial x^n}$$

et

$$(18') \quad \left\{ \begin{aligned} H_2(x,y) &= (-1)^{n-1} \frac{\partial^{2n} f}{\partial y^n \, \partial x^n} + (-1)^{n-3} b_2(y) \frac{\partial^{2n-2} f}{\partial y^{n-2} \, \partial x^n} + \ldots - \\ &\qquad - b_n(y) \frac{\partial^n f}{\partial x^n}. \end{aligned} \right.$$

La solution de (17′) s'exprime par la série

$$(19') \quad F_2(x,y) = (\overset{*}{1}{}^{0} + \overset{*}{f}_1)^{-1} \overset{*}{H}_2 = H_2(x,y) - \overset{*}{f}_1 \overset{*}{H}_2 + \overset{*}{f}_1 \overset{*}{f}_1 \overset{*}{H}_2 - \ldots$$

qui converge absolument et uniformément dans le domaine (A).

Donc, l'expression générale du symbole

$$(20) \qquad \overset{*}{f}{}^{-1} = \overset{*}{1}{}^{-n} + a_2(x)\, \overset{*}{1}{}^{-n+2} + \ldots + a_n(x)\, \overset{*}{1}{}^{0} + F_1(x,y)$$

ou

$$(20') \qquad \overset{*}{f}{}^{-1} = \overset{*}{1}{}^{-n} + b_2(y)\, \overset{*}{1}{}^{-n+2} + \ldots + b_n(y)\, \overset{*}{1}{}^{0} + F_2(x,y)$$

est bien déterminée lorsque $f(x,y)$ est une fonction d'ordre n et de forme canonique, dérivable jusqu'à l'ordre $2n$.

Remarque[10]. Les fonctions $F_1(x,y)$ et $F_2(x,y)$, dites les parties régulières du symbole $\overset{*}{f}^{-1}$, sont en réalité égales entre elles quoiqu'elles ont les expressions analytiques (19) et (19′) de forme tout à fait différente.

Nous allons vérifier cette égalité dans le cas particulier où $n=2$ (le cas général peut être traité de la même façon). Dans ce cas, sous les conditions (16) où $n=2$, la fonction $f(x,y)$ du second ordre admet la représentation

$$f(x,y) = (x-y) + \frac{(x-y)^3}{3\,!}\,\Omega(x,y)$$

avec une fonction $\Omega(x,y)$ dérivable jusqu'à l'ordre 3.

Donc, les fonctions introduites

$$a_2(x) = \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right)_{y=x}, \quad b_2(y) = -\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}\right)_{x=y}$$

sont égales à

$$a_2(x) = b_2(x) = \Omega(x,x).$$

Ceci résulte aussi des relations

$$H(x,y) = -\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = -\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} \qquad \left(f_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ f_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

et [formules (10) avec $n=2$]

$$f(x,y) = \overset{*}{1}^2 + \overset{*}{1}^2 \overset{*}{f}_1 = \overset{*}{1}^2 + \overset{*}{f}_2 \overset{*}{1}^2.$$

En effet, on tire

$$f_1(x,y) = -\overset{*}{H}\overset{*}{1}^2 - a_2(x)\,\overset{*}{1}^2,\quad f_2(x,y) = -\overset{*}{1}^2\overset{*}{H} - b_2(y)\,\overset{*}{1}^2$$

et

$$\overset{*}{1}^2 \overset{*}{f}_1 = \overset{*}{f}_2 \overset{*}{1}^2$$

d'où

$$\overset{*}{1}^2\, \overset{*}{\overline{a_2(x)\,.\,\overset{*}{1}^2}} = \overset{*}{\overline{\overset{*}{1}^2 . b_2(y)}}\,\overset{*}{1}^2,$$

c'èst-à-dire

$$\int_y^x (x-s)\, a_2(s)\,(s-y)\, ds = \int_y^x (x-s)\, b_2(s)\,(s-y)\, ds.$$

On a bien égalité des fonctions $a_2(x)$ et $b_2(x)$.

---

[10] Cette remarque ne figurait pas dans le texte en langue lettonne, mais je l'ai annoncé au moment de la soutenance de ma Thèse. Je dois remercier M. le prof. *J. Pérès* qui a bien voulu m'indiquer son résultat général sur l'égalité des parties régulières.

Pour établir l'identité des parties régulières (19) et (19′) il suffit de montrer que

$$(\overset{*}{1}{}^0+\overset{*}{f}_1)\overset{*}{H}_1=\overset{*}{H}_2(\overset{*}{1}{}^0+\overset{*}{f}_2).$$

Mais ceci a bien lieu, car par emploi des expressions de $f_1(x,y)$ et $f_2(x,y)$, indiquées plus haut, et des formules

$H_1(x,y)=H(x,y)-a_2(x)f_2(x,y),\ H_2(x,y)=H(x,y)-b_2(y)f_1(x,y),$

tirées de (18) et (18′), on est conduit à vérifier l'égalité

$$\overset{*}{f}_1\,\overline{a_2(x)}\cdot\overset{*}{f}_2=\overset{*}{f}_1\cdot\overline{b_2(y)}\,\overset{*}{f}_2$$

qui est évidente si $a_2(x)=b_2(x)$.

Donc, on peut remplacer dans les formules (20) et (20′) les fonctions $F_1(x,y)$ et $F_2(x,y)$ par une seule

$$F(x,y)=F_1(x,y)=F_2(x,y).$$

4. Un cas particulier intéressant est celui où

$$a_i(x)=b_i(x)\equiv 0 \qquad (i=1,2,3,\ldots,n).$$

Il est facile de démontrer que les conditions nécessaires et suffisantes, dans ce cas, sont les suivantes

$$(21)\quad\begin{cases}\left[\dfrac{\partial^k f(x,y)}{\partial x^i\,\partial y^j}\right]_{y=x}=0 \quad \left[\begin{matrix}i+j=k,\\ k=0,1,2,\ldots,(n-2),n,(n+1),\ldots(2n-1)\end{matrix}\right],\\[2ex] \left(\dfrac{\partial^{n-1}f}{\partial x^{n-1}}\right)_{y=x}=-\left(\dfrac{\partial^{n-1}f}{\partial x^{n-2}\partial y}\right)_{y=x}=\ldots=(-1)^{n-1}\left(\dfrac{\partial^{n-1}f}{\partial y^{n-1}}\right)=1.\end{cases}$$

Donc on peut mettre la fonction donnée sous la forme

$$(22)\qquad f(x,y)=\frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!}+(x-y)^{2n}\,\omega(x,y)$$

où $\omega(x,y)$ est une fonction continue dérivable jusqu'à l'ordre $2n$.

Dans ce cas l'égalité des parties régulières $F_1(x,y)$ et $F_2(x,y)$ s'établie immédiatement. En effet, d'après les expressions (18) et (18′) les fonctions $H_1(x,y)$ et $H_2(x,y)$ sont identiques à la fonction

$$(23)\qquad H(x,y)=(-1)^{n-1}\frac{\partial^{2n}f}{\partial x^n\,\partial y^n}.$$

Sous les conditions (21) on peut exprimer les fonctions

$$f_1(x,y)=\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\ \text{ et }\ f_2(x,y)=(-1)^n\frac{\partial^n f}{\partial y^n}$$

par

$$f_1(x,y)=-\overset{*}{H}\,\overset{*}{1}{}^n\ \text{ et }\ f_2(x,y)=-\overset{*}{1}{}^n\,\overset{*}{H}.$$

Donc, à cause des formules (19) et (19′), les fonctions $F_1(x, y)$ et $F_2(x, y)$ sont identiques à la fonction

$$(24) \qquad F(x, y) = H(x, y) + \overset{*}{H}\,\overset{*}{1}^n \overset{*}{H} + \overset{*}{H}\,\overset{*}{1}^n \overset{*}{H}\,\overset{*}{1}^n \overset{*}{H} + \ldots,$$

la série obtenue étant absolument et uniformémant convergente dans le domaine (A). Lorsque $f(x, y)$ satisfait aux conditions (21) ou lorsqu'elle peut être mise sous la forme (22), on a l'expression unique

$$(25) \qquad \overset{*}{f}{}^{-1} = \overset{*}{1}{}^{-n} + F(x, y)$$

où $F(x, y)$ est définie par (24).

Les conditions (21) sont réalisées pour toute fonction $f(x, y)$ du premier ordre $(n = 1)$ et de forme canonique. L'expression (25) du symbole $\overset{*}{f}{}^{-1}$ généralise celle que M. *Pérès*[11] a établie pour la fonction du premier ordre.

Remarque. Sous les conditions

$$a_i(x) \equiv 0, \qquad b_i(y) \equiv 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

les équations intégrales de *Volterra* (15) et (15′) se réduisent à

$$\overset{*}{F}_1 \overset{*}{f} + \frac{\partial^n f}{\partial x^n} = 0 \quad \text{et} \quad \overset{*}{f} \overset{*}{F}_2 + (-1)^n \frac{\partial^n f}{\partial y^n} = 0.$$

Celles-ci ont la même solution

$$F(x, y) = F_1(x, y) = F_2(x, y)$$

donnée par la série (24). Donc on a

$$f_1(x, y) = \frac{\partial^n f}{\partial x^n} = -\overset{*}{F}\overset{*}{f}$$

et

$$f_2(x, y) = (-1)^n \frac{\partial^n f}{\partial y^n} = -\overset{*}{f}\overset{*}{F}.$$

La fonction $f(x, y)$ d'ordre n et de forme canonique admet, d'après les formules (10), la représentation

$$f(x, y) = \overset{*}{1}{}^n + \overset{*}{1}{}^n \overset{*}{f}_1 \quad \text{ou} \quad f(x, y) = \overset{*}{1}{}^n + \overset{*}{f}_2\, \overset{*}{1}{}^n.$$

En introduisant ici les expressions trouvées des fonctions $f_1(x, y)$ et $f_2(x, y)$, il vient

$$f(x, y) = \overset{*}{1}{}^n - \overset{*}{1}{}^n \overset{*}{F}\overset{*}{f} \quad \text{et} \quad f(x, y) = \overset{*}{1}{}^n - \overset{*}{f}\overset{*}{F}\,\overset{*}{1}{}^n$$

d'où

$$(26) \quad f(x, y) = (\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{1}{}^n \overset{*}{F})^{-1}\, \overset{*}{1}{}^n \quad \text{et} \quad f(x, y) = \overset{*}{1}{}^n (\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{F}\,\overset{*}{1}{}^n)^{-1},$$

avec l'expression commune

[11] La formule correspondante, indiquée dans la monographie de *Volterra — Pérès* [28, page 40 et 106], diffère de celle-ci seulement par la notation.

(27) $$f(x,y) = \overset{*}{1}{}^n - \overset{*}{1}{}^n \overset{*}{F} \overset{*}{1}{}^n + \overset{*}{1}{}^n \overset{*}{F} \overset{*}{1}{}^n \overset{*}{F} \overset{*}{1}{}^n - \ldots,$$
la série étant absolument et uniformémant convergente dans le domaine (A).

Nous utiliserons les dernières relations dans l'étude du problème fondamental en appliquant les transformations de M. *Pérès* (§ 10).

CHAPITRE II.

Problème de la détermination des fonctions permutables.

§ 5. Équations fondamentales et symboliques du problème. Fonctions du groupe du cycle fermé.

1. Le problème fondamental consiste à déterminer toutes les fonctions continues $\varphi(x,y)$ permutables avec une fonction donnée $f(x,y)$, c.-à-d. qui satisfont à la condition de permutabilité

(1) $$\int_y^x f(x,s)\varphi(s,y)\,ds = \int_y^x \varphi(x,s) f(s,y)\,ds \quad \text{ou} \quad \overset{*}{f}\overset{*}{\varphi} = \overset{*}{\varphi}\overset{*}{f}.$$

D'après une méthode, due à M. *Volterra*, on introduit la fonction inconnue auxiliaire $\psi(x,y)$ telle que

(2) $$\psi(x,y) = \overset{*}{f}\overset{*}{\varphi} = \overset{*}{\varphi}\overset{*}{f},$$

et on formera l'équation fonctionnelle, en éliminant la fonction $\varphi(x,y)$. Si l'on connaît le symbole $\overset{*}{f}{}^{-1}$ d'inversion de la composition, on aura les solutions

(3) $$\varphi(x,y) = \overset{*}{f}{}^{-1}\overset{*}{\psi} \quad \text{et} \quad \varphi(x,y) = \overset{*}{\psi}\overset{*}{f}{}^{-1}$$

des équations intégrales associées

$$\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi} = \psi(x,y) \quad \text{et} \quad \overset{*}{\varphi}\overset{*}{f} = \psi(x,y)$$

d'où l'équation fondamentale et symbolique du problème

(4) $$\overset{*}{f}{}^{-1}\overset{*}{\psi} - \overset{*}{\psi}\overset{*}{f}{}^{-1} = 0.$$

Par emploi de la propriété du symbole $\overset{*}{f}{}^{-1}$

$$\overset{*}{f}\overset{*}{f}{}^{-1} = \overset{*}{f}{}^{-1}\overset{*}{f} = \overset{*}{1}{}^0$$

on tire immédiatement (si la composition avec $\overset{*}{f}{}^{-1}$ est permise), de la condition de permutabilité (1), l'équation du même type symbolique

(5) $$\overset{*}{f}{}^{-1}\overset{*}{\varphi} - \overset{*}{\varphi}\overset{*}{f}{}^{-1} = 0$$

que vérifie la fonction inconnue $\varphi(x,y)$.

Puisque nous cherchons les fonctions $\varphi(x,y)$ continues dans le domaine

$$(A) \qquad a \leqslant y \leqslant x \leqslant b,$$

nous devons imposer, en vertu du théorème sur l'ordre de la résultante de composition (§ 2), les conditions supplémentaires que doit vérifier la fonction inconnue auxiliaire $\psi(x,y)$.

2. Études le problème fondamental dans le cas où

$$f(x,y) = \text{const.},$$

c.-à-d. cherchons toutes les fonctions continues $\varphi(x,y)$ qui sont permutables avec la constante.

Sans réstreindre le problème, on peut supposer cette constante égale à l'unité. Alors on a

$$\overset{*}{f}{}^{-1} = \overset{*}{1}{}^{-1},$$

et l'équation symbolique

$$(6) \qquad \overset{*}{1}{}^{-1}\overset{*}{\psi} - \overset{*}{\psi}\overset{*}{1}{}^{-1} = 0$$

de la résultante

$$\psi(x,y) = \int_y^x \varphi(s,y)\,ds = \int_y^x \varphi(x,s)\,ds$$

s'écrit, d'après les formules (9) du § 4, sous forme d'une équation linéaire aux dérivées partielles

$$(7) \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

d'où immédiatement

$$\psi(x,y) = \psi(x-y).$$

De la relation

$$\varphi(x,y) = \overset{*}{1}{}^{-1}\overset{*}{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{ou} \quad \varphi(x,y) = \overset{*}{\psi}\overset{*}{1}{}^{-1} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

on tire la même forme des fonctions

$$\varphi(x,y) = \varphi(x-y).$$

M. *Volterra* a nommé[12] telles fonctions, dépendantes de la seule différence $x-y$, par les fonctions du cycle fermé. Elles forment, par rapport à la composition, un groupe des fonctions car la résultante $\overset{*}{\varphi}_1 \overset{*}{\varphi}_2$ des deux fonctions quelconques de forme

$$\varphi_1(x,y) = \varphi_1(x-y) \text{ et } \varphi_2(x,y) = \varphi_2(x-y)$$

est aussi de même forme et on a la permutabilité mutuelle

$$\overset{*}{\varphi}_1 \overset{*}{\varphi}_2 = \overset{*}{\varphi}_2 \overset{*}{\varphi}_1.$$

[12] À cause des applications de telles fonctions aux questions de la physique mathématique, *c. f. Volterra* [23] et [24].

Rappellons donc le théorème suivant: Toutes les fonctions permutables avec la constante (ou l'unité) sont permutables entre elles et forment, par rapport à composition, un groupe des fonctions qu'on appelle le groupe du cycle fermé.

3. Au même groupe du cycle fermé appartiennent aussi toutes les fonctions permutables avec une fonction spéciale d'ordre entier positif n

$$f(x, y) = \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} = \overset{*}{1}{}^{n}.$$

En effet, la résultante

$$\psi(x, y) = \overset{*}{1}{}^{n} \overset{*}{\varphi} = \overset{*}{\varphi} \overset{*}{1}{}^{n}$$

satisfait, d'après (4), l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^n \psi}{\partial x^n} - (-1)^n \frac{\partial^n \psi}{\partial y^n} = 0, \tag{8}$$

jointe aux conditions supplémentaires

$$\left[\frac{\partial^k \psi(x, y)}{\partial x^i \, \partial y^j}\right]_{y=x} = 0 \qquad \left(\begin{matrix} i+j=k, \\ k=0, 1, 2, \ldots, n-1 \end{matrix}\right). \tag{9}$$

Ce problème de *Cauchy* admet[13] la solution unique de forme

$$\psi(x, y) = \psi(x-y);$$

on déduit de la relation

$$\varphi(x, y) = \overset{*}{1}{}^{-n} \overset{*}{\psi} = \frac{\partial^n \psi}{\partial x^n} \text{ ou } \varphi(x, y) = \overset{*}{\psi} \overset{*}{1}{}^{-n} = (-1)^n \frac{\partial^n \psi}{\partial y^n}$$

que les fonctions cherchées $\varphi(x, y)$ appartiennent aussi au groupe de cycle fermé:

$$\varphi(x, y) = \varphi(x-y).$$

4. Posons le problème nouveau suivant: à déterminer toutes les fonctions $f(x,y)$ du premier ordre qui se réduisent sous la forme canonique à la constante, notamment à l'unité.

Il est connu (§ 3) que par l'application de la transformation

$$x = \omega(\xi), \quad y = \omega(\eta) \tag{10}$$

et par le choix de deux fonctions $\alpha(\xi)$ et $\beta(\eta)$, vérifiant la condition

$$\alpha(\xi)\,\beta(\xi) = \omega'(\xi) = \frac{dx}{d\xi}, \tag{11}$$

on construit la fonction transformée

$$F(\xi, \eta) = [\alpha(x)\,\beta(x) f(x, y)]_{\substack{x=\omega(\xi), \\ y=\omega(\eta)}} \tag{12}$$

13 C. f. mon travail [8, page 634].

Si la forme canonique de la fonction $f(x,y)$ doit être

$$F=1,$$

il est nécessaire que la fonction $f(x,y)$ ait la représentation suivante

$$f(x,y)=\frac{1}{\alpha\beta}=g(x)\,h(y) \tag{13}$$

où

$$g(x)=\frac{1}{\alpha} \quad \text{et} \quad h(y)=\frac{1}{\beta}$$

sont respectivement les fonctions d'une seule variable x ou y.

La condition obtenue (13) est aussi suffisante. En effet, par emploi des valeurs

$$a(x)=f(x,x)=g(x)\,h(x)$$

et

$$b(x)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y=x}=g'(x)\,h(x)$$

dans les formules (9) et (10) du § 3 on tire, après les calculs faciles, les expressions

$$\alpha(x)=\frac{1}{g(x)} \quad \text{et} \quad \beta(x)=\frac{1}{h(x)},$$

et par la substitution des expressions précédentes dans (12) on obtient bien la forme canonique

$$F=1.$$

La relation entre les variables [§ 3, formule (8)] s'exprime ici de la façon suivante

$$\xi=\int g(x)\,h(x)\,dx=l(x). \tag{14}$$

Puisque les fonctions permutables avec l'unité appartiennent au groupe du cycle fermé

$$\Theta(\xi-\eta) \qquad [\Theta \text{ — une fonction arbitraire}]$$

et puisque les transformations précédentes conservent la composition, on obtient par la formule

$$\varphi(x,y)=g(x)\,h(y)\,\Theta[l(x)-l(y)] \tag{15}$$

toutes les fonctions permutables avec la fonction du premier ordre

$$f(x,y)=g(x)\,h(y) \qquad [g(x)\neq 0,\quad h(y)\neq 0], \tag{13}$$

la fonction Θ étant arbitraire et la fonction $l(x)$ étant déterminée par (14).

La permutabilité

$$\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi}=\overset{*}{\varphi}\overset{*}{f}$$

se vérifie aisement, en mettant par la substitution

$$l(s) - l(y) = \sigma \text{ ou } l(x) - l(s) = \sigma$$

les résultantes $\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi}$ et $\overset{*}{\varphi}\overset{*}{f}$ sous la forme d'une fonction unique

$$g(x)\, h(y) \int_0^L \Theta(\sigma)\, d\sigma$$

où

$$L(x, y) = l(x) - l(y).$$

De même on constate que les fonctions (15) sont permutables entre elles. Soient

$$\varphi_1(x, y) = g(x)\, h(y)\, \Theta_1\, [l(x) - l(y)]$$

et

$$\varphi_2(x, y) = g(x)\, h(y)\, \Theta_2\, [l(x) - l(y)]$$

les deux fonctions quelconques de (15). Leur résultantes

$$\overset{*}{\varphi}_1\, \overset{*}{\varphi}_2 \text{ et } \overset{*}{\varphi}_2\, \overset{*}{\varphi}_1$$

peuvent être exprimées par une seule fonction

$$g(x)\, h(y) \int_0^L \Theta_1(L - \sigma)\, \Theta_2(\sigma)\, d\sigma,$$

en utilisant la même substitution et la même fonction $L(x, y)$ qu'auparavant. Donc on a bien la permutabilité demandée

$$\overset{*}{\varphi}_1\, \overset{*}{\varphi}_2 = \overset{*}{\varphi}_2\, \overset{*}{\varphi}_1.$$

Exemple[14]. Trouver toutes les fonctions $\varphi(x, y)$ permutables avec la fonction donnée de forme

(16) $$f(x, y) = x^m y^k \qquad (m,\ k \text{ — constantes}).$$

Ici on a $$g(x) = x^m,\ h(y) = y^k$$

et

$$l(x) = \int x^{m+k}\, dx = \begin{cases} \dfrac{x^{m+k+1}}{m+k+1}, & \text{si } m+k \neq -1, \\ \ln|x|, & \text{si } m+k = -1. \end{cases}$$

Donc les fonctions permutables avec (16) sont déterminées par

(17) $$\varphi(x, y) = \begin{cases} x^m y^k\, \Theta\, [x^{m+k+1} - y^{m+k+1}], & \text{si } m+k \neq -1 \\ x^m y^k\, \Theta\, [\ln|x| - \ln|y|], & \text{si } m+k = -1, \end{cases}$$

où Θ est une fonction arbitraire.

5. En généralisant les résultats du n^0 précédent, posons à déterminer toutes les fonctions d'ordre entier positif n

[14] Tel exemple est cité au Mémoire de M. *Pérès* [11, page 60].

qui se réduisent sous leur forme canonique à la fonction

(18) $$F(\xi,\eta)=\frac{(\xi-\eta)^{n-1}}{(n-1)!}=\overset{*}{1}{}^{n}.$$

La relation (12) entraîne ici

$$[f(x,y)]_{\substack{x=\omega(\xi)\\ y=\omega(\eta)}}=\frac{(\xi-\eta)^{n-1}}{(n-1)!\ \alpha(\xi)\ \beta(\eta)},$$

et par emploi des fonctions inverses

$$\xi=\lambda(x),\quad \eta=\lambda(y)$$

on obtient de la relation précédente la condition nécessaire

(19) $$f(x,y)=g(x)\,h(y)\,\frac{[\lambda(x)-\lambda(y)]^{n-1}}{(n-1)!}$$

où

$$g(x)=\frac{1}{\alpha[\lambda(x)]},\quad h(y)=\frac{1}{\beta[\lambda(y)]}.$$

Nous allons voir que la condition (19) est aussi suffisante, si l'on choisit la fonction

(20) $$\lambda(x)=l(x)=\int g(x)\,h(x)\,dx,$$

c'est-à-dire que sous les hypothèses précédentes la forme canonique de (19) est certainement (18).

Pour que la relation générale [§ 3, formule (19)] entre des variables

$$\xi=\int [a(x)]^{\frac{1}{n}}\,dx \quad \text{ou} \quad \frac{d\xi}{dx}=[a(x)]^{\frac{1}{n}}$$

avec la fonction

$$a(x)=\left(\frac{\partial^{n-1}f}{\partial x^{n-1}}\right)_{y=x}$$

soit vérifiée dans ce cas, on doit prendre

$$a(x)=g(x)\,h(x)\,[\lambda'(x)]^{n-1} \qquad \left(\lambda'=\frac{d\lambda}{dx}\right)$$

et

$$\lambda'(x)=\frac{d\xi}{dx}=g(x)\,h(x).$$

Donc, l'égalité (20) est bien satisfaite.

La fonction

$$b(x)=\left(\frac{\partial^{n}f}{\partial x^{n}}\right)_{y=x}$$

peut être calculée de l'expression (19) [où $\lambda(x)$ est remplacée par $l(x)$] par emploi du règle de *Leibniz* sur la dérivation du produit et du lemme sur la dérivation de la fonction composée (§ 3, n^0 3). Il vient l'expression

$$b(x) = n\,g(x)\,h(x)\,[l'(x)]^{n-1}\left\{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{l''(x)}{l'(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)}\right\}.$$

Donc, en éliminant la fonction (20) on obtient la valeur de la fraction

$$\frac{b(x)}{n\,a(x)} = \frac{n+1}{2}\cdot\frac{g'(x)}{g(x)} + \frac{n-1}{2}\cdot\frac{h'(x)}{h(x)}.$$

En vertu de cela, on tire, des formules générales de transformation (20) et (21) du paragraphe 3 (n^0 4), la forme des fonctions

$$\alpha = \frac{1}{g(x)} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{h(x)}.$$

Avec de telles expressions on déduit immédiatement que la fonction transformée (12) est bien de forme demandée (18).

Puisque les fonctions permutables avec $\overset{*}{1}{}^n$ forment le groupe du cycle fermé

$$\Theta(\xi - \eta) \qquad [\Theta \text{ — fonction arbitraire}]$$

et puisque la transformation précédente conserve la composition, on a la forme générale

$$\varphi(x,y) = g(x)\,h(y)\,\Theta[\lambda(x) - \lambda(y)] \tag{21}$$

des fonctions $\varphi(x,y)$ permutables avec (19). L'expression (21) coïncide avec (15), car on a l'égalité des fonctions $\lambda(x)$ et $l(x)$.

On vérifie aisement la permutabilité

$$\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi} = \overset{*}{\varphi}\overset{*}{f}$$

en remarquant que les résultantes de composition $\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi}$ et $\overset{*}{\varphi}\overset{*}{f}$ peuvent être mises par la substitution, indiquée au n^0 4 et par l'emploi de même fonction

$$L(x,y) = l(x) - l(y),$$

sous forme d'une seule fonction

$$g(x)\,h(y)\int_0^L \frac{(L-\sigma)^{n-1}}{(n-1)!}\,\Theta(\sigma)\,d\sigma.$$

La permutabilité mutuelle des fonctions (21) est déjà établie au n^0 4.

§ 6. Problème dans le cas d'une fonction donnée du premier ordre.

1. En vertu des propriétés de la transformation canonique (§ 3) on peut réduire le problème de détermination des fonctions $\varphi(x,y)$, permutables avec une fonction donnée du premier ordre $f(x,y)$, à tel où $f(x,y)$ est de forme canonique, c.-à-d. où

$$(1) \qquad f(x,x) = 1, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y=x} = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y=x} = 0.$$

S'il existe dans le domaine (A) la dérivée partielle continue du second ordre

$$(2) \qquad H(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},$$

il est possible de construire (§ 4, n° 4) le symbole d'inversion de la composition

$$(3) \qquad \overset{*}{f}{}^{-1} = \overset{*}{1}{}^{-1} + F(x,y)$$

où

$$(4) \qquad F(x,y) = H(x,y) + \overset{*}{H}\overset{*}{1}\overset{*}{H} + \overset{*}{H}\overset{*}{1}\overset{*}{H}\overset{*}{1}\overset{*}{H} + \ldots,$$

la série étant absolument et uniformémant convergente dans le domaine (A).

Les équations associées du problème

$$(5) \qquad \overset{*}{f}\overset{*}{\varphi} = \psi(x,y) \quad \text{et} \quad \overset{*}{\varphi}\overset{*}{f} = \psi(x,y)$$

ont leur solutions respectivement

$$(6) \qquad \varphi(x,y) = \overset{*}{1}{}^{-1}\overset{*}{\psi} + \overset{*}{F}\overset{*}{\psi} \quad \text{et} \quad \varphi(x,y) = \overset{*}{\psi}\overset{*}{1}{}^{-1} + \overset{*}{\psi}\overset{*}{F}$$

ou sous forme explicite:

$$(7) \qquad \begin{cases} \varphi(x,y) = \dfrac{\partial \psi}{\partial x} + \displaystyle\int_y^x F(x,s)\,\psi(s,y)\,ds, \\ \varphi(x,y) = -\dfrac{\partial \psi}{\partial y} + \displaystyle\int_y^x \psi(x,s)\,F(s,y)\,ds. \end{cases}$$

En comparant entre elles les expressions (6) ou (7), il vient, pour déterminer la fonction

$$(8) \qquad \psi(x,y) = \int_y^x f(x,s)\,\varphi(s,y)\,ds = \int_y^x \varphi(x,s)\,f(s,y)\,ds,$$

l'équation symbolique

$$(9) \qquad \overset{*}{1}{}^{-1}\overset{*}{\psi} - \overset{*}{\psi}\overset{*}{1}{}^{-1} = \overset{*}{\psi}\overset{*}{F} - \overset{*}{F}\overset{*}{\psi}$$

ou explicitement

$$(9') \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = \int_y^x [\psi(x,s)\,F(s,y) - F(x,s)\,\psi(s,y)]\,ds.$$

De la formule (8) on tire la condition supplémentaire

$$(10) \qquad \psi(x,x) = 0.$$

Donc, le problème proposé se réduit à la résolution de l'équation intégro-différentielle, jointe à la condition (10).

2. Résolvons l'équation (9′), en suivant la méthode due à M. *Volterra*[15], mais en précisant la formule de solution.

Avec la notation

$$g(x,y) = \overset{*}{\psi}\overset{*}{F} - \overset{*}{F}\overset{*}{\psi}$$

l'équation (9′) s'écrit

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = g(x,y). \tag{11}$$

Par le changement des variables

$$u = \frac{x-y}{2}, \quad v = \frac{x+y}{2} \tag{12}$$

l'équation précédente se transforme en

$$\frac{\partial \overline{\psi}}{\partial v} = \overline{g}(u,v) \tag{11′}$$

où

$$\overline{\psi}(u,v) = \psi(v+u,\ v-u) \text{ et } \overline{g}(u,v) = g(v+u,\ v-u),$$

la condition (10) entraînant

$$\overline{\psi}(0,v) = 0. \tag{10′}$$

La solution générale de l'équation différentielle (11′)

$$\overline{\psi}(u,v) = \Theta(u) + \int_{v_0}^{v} \overline{g}(u,t)\,dt$$

contient une fonction arbitraire $\Theta(u)$. Pour que la condition (10′) soit vérifiée, il faut admettre

$$\Theta(0) = 0.$$

L'intégrale définie a pour la limite inférieure une valeur v_0 fixée de la variable nouvelle v[16].

Avec les anciennes variables

$$x = v + u, \quad y = v - u$$

on trouve la solution

$$\psi(x,y) = \Theta(u) + \int_{v_0}^{v} g(t+u,\ t-u)\,dt. \tag{13}$$

Par la substitution de l'expression de $g(x,y)$ dans (13) on obtient l'équation intégrale

[15] C. f. *Volterra* [21], *Bompiani* [1], *Pérès* [11] et les monographies [24] et [28].

[16] Cette explication est différente de celle-ci des ouvrages cités dans la remarque précédente.

$$(14)\quad \begin{cases} \psi(x, y) = \Theta(u) + \int\limits_{v_0}^{v} dt \int\limits_{t-u}^{t+u} [\psi(t+u, s) F(s, t-u) - \\ \quad - F(t+u, s) \psi(s, t-u)]\, ds, \end{cases}$$

équivalente à l'équation intégro-différentielle (9'), jointe à la condition du type de *Cauchy* (10), si la fonction arbitraire du groupe du cycle fermé

$$\Theta(u) = \Theta\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

vérifie la condition $\Theta(0) = 0$.

3. Nous allons démontrer le théorème d'unicité de la solution de l'équation (14): si la fonction $\Theta(u) = \Theta\left(\frac{x-y}{2}\right)$ est continue, fixée du groupe du cycle fermé, et si la fonction $F(x, y)$ est une fonction donnée continue dans le domaine (A), l'équation intégrale (14) admet au plus une solution $\psi(x, y)$ continue dans ce domaine.

Nous suivrons d'une méthode, bien connue dans la théorie des équations intégrales linéaires.

Si l'on avait une autre solution continue $\psi_0(x, y)$, la différence

$$\Psi(x, y) = \psi(x, y) - \psi_0(x, y)$$

était une solution de l'équation intégrale homogène

$$(15)\quad \Psi(x, y) = \int\limits_{v_0}^{v} dt \int\limits_{t-u}^{t+u} [\Psi(t+u, s) F(s, t-u) - F(t+u, s) \Psi(s, t-u)]\, ds.$$

Par les hypothèses, $\Psi(x, y)$ et $F(x, y)$ sont des fonctions continues dans le domaine (A).

Donc, il existe dans le domaine les bornes supérieures μ et M des modules de ces fonctions:

$$|\Psi| < \mu \quad \text{et} \quad |F| < M.$$

Si nous évaluons le deuxième membre de (15), nous obtenons

$$|\Psi(x, y)| < 2\mu M (b-a)(x-y).$$

En répétant ce procédé on établie l'inégalité générale

$$|\Psi(x, y)| < \mu \frac{[2M(b-a)(x-y)]^n}{n!}.$$

Puisque le deuxième membre de cette inégalité tend vers zéro lorsque n augmente indéfinement, la fonction $\Psi(x,y)$ doit être identiquement nulle dans le domaine (A). Donc

$$\psi(x,y) \equiv \psi_0(x,y),$$

d'où l'unicité de solution de l'équation (14).

4. La résolution effective de l'équation intégrale (14) se fait par la méthode des approximations successives.

Puisque $\Theta(0)=0$ et $\psi(x,x)=0$ on peut poser[17]

$$\Theta(u) = \int_0^{2u} \lambda(\xi)\,d\xi = \int_0^{x-y} \lambda(\xi)\,d\xi, \tag{16}$$

et

$$\psi(x,y) = \int_0^{x-y} \lambda(\xi) K(\xi;\, x,\, y)\,d\xi \tag{17}$$

où $\lambda(x-y)$ est une fonction nouvelle du groupe du cycle fermé et où $K(\xi;\, x, y)$ est la fonction inconnue, définie dans un domaine tel que

$$(A') \qquad a \leqslant y \leqslant x \leqslant b, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant x-y.$$

Par la substitution des expressions (16) et (17) dans tous les membres de l'équation (14) et par l'échange convenable de l'ordre des intégrations obtenues, on établie l'équation intégrale[18]

$$(18) \quad \begin{cases} K(\xi;x,y) = 1 + \displaystyle\int_{v_0}^{v} dt \int_{\xi}^{2u} [K(\xi; t+u, t+u-s) F(t+u-s, t-u) - \\ \qquad - F(t+u, t-u+s) K(\xi; t-u+s, t-u)]\,ds \end{cases}$$

que vérifie la fonction inconnue nouvelle $K(\xi; x,y)$.

Pour appliquer la méthode des approximations successives à la résolution de l'équation (18) nous cherchons la solution sous forme d'une série

$$K(\xi;\, x,y) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} K_n(\xi;\, x,y). \tag{19}$$

Par la substitution de cette expression dans (18) et par la comparaison des membres on tire la relation

$$(20) \quad K_1(\xi;x,y) = \int_{v_0}^{v} dt \int_{\xi}^{2u} [F(t+u-s,\, t-u) - F(t+u,\, t-u+s)]\,ds$$

et les formules générales de récurrence

$$(21) \quad \begin{cases} K_{n+1}(\xi;x,y) = \displaystyle\int_{v_0}^{v} dt \int_{\xi}^{2u} [K_n(\xi; t+u,\, t+u-s) F(t+u-s,\, t-u) - \\ \qquad - F(t+u,\, t-u+s) K_n(\xi;\, t-u+s,\, t-u)]\,ds \\ \qquad\qquad (n=1,\,2,\,3,\,\ldots) \end{cases}$$

---

[17] C'est un artifice du à M. *Volterra*.

[18] L'équation de cette forme indique M. *Pérès* dans sa Thèse [11, page 37].

On trouve les inégalités

$$|K_n(\xi; x, y)| < \frac{[2M(b-a)(x-y-\xi)]^n}{n!} \quad (n=1,2,3,\ldots),$$

d'où la convergence absolue et uniforme de la série (19) dans le domaine (A').

Enfin, les fonctions $\varphi(x,y)$ permutables avec une fonction $f(x,y)$ se calculent par l'une de deux formules (7). Si l'on introduit l'expression (17), par exemple, dans la première formule de (7) et si l'on échange l'ordre de l'intégration dans le produit de composition $\overset{*}{F}\overset{*}{\psi}$, on met les fonctions cherchées sous forme

$$\text{(22)} \qquad \varphi(x,y) = \lambda(x-y) + \int_0^{x-y} \lambda(\xi)\,\Phi(\xi; x, y)\,d\xi$$

où la fonction (l e n o y a u)

$$\text{(23)} \qquad \Phi(\xi; x, y) = \frac{\partial K(\xi; x, y)}{\partial x} + \int_{y+\xi}^{x} F(x,s)\,K(\xi; s, y)\,ds$$

est définie dans le domaine (A') et telle que

$$\Phi(x-y; x, y) = 0.$$

L a f o r m u l e (22), o ù $\lambda(x-y)$ e s t u n e f o n c t i o n a r b i t r a i r e d u g r o u p e d u c y c l e f e r m é e t o ù l a f o n c t i o n $\Phi(\xi; x, y)$ e s t d é f i n i e p l u s h a u t, r e p r é s e n t e t o u t e s l e s f o n c t i o n s $\varphi(x,y)$ p e r m u t a b l e s a v e c u n e f o n c t i o n $f(x,y)$ d u p r e m i e r o r d r e e t d e f o r m e c o n o n i q u e, c.-à-d. q u i s a t i s f o n t à l a c o n d i t i o n d e p e r m u t a b i l i t é

$$\text{(24)} \qquad \overset{*}{f}\,\overset{*}{\varphi} = \overset{*}{\varphi}\,\overset{*}{f}.$$

5. De la formule (22), due à M. *Volterra,* on déduit la p r o p r i é t é s u i v a n t e des fonctions permutables.

I l e x i s t e u n e f o n c t i o n p e r m u t a b l e $\varphi(x, y)$ e t u n e s e u l e q u i p r e n d s u r u n c ô t é $y=a$ d u t r i a n g l e d e d é f i n i t i o n

$$(A) \qquad a \leqslant y \leqslant x \leqslant b$$

d e s v a l e u r s a s s i g n é e s d'a v a n c e.

Ceci résulte du fait que l'équation intégrale linéaire de *Volterra*

$$\varphi(x, a) = \lambda(x-a) + \int_0^{x-a} \lambda(\xi)\,\Phi(\xi; x, a)\,d\xi$$

a, par rapport à l'inconnue λ, une seule solution.

Si l'on remplace x par $x+a$ dans l'équation précédente et si l'on désigne

$$\varphi_0(x)=\varphi(x+a,\ a), \qquad \Phi_0(\xi;\ x)=\Phi(\xi;\ x+a,\ a),$$

on obtient une équation intégrale nouvelle

$$\lambda(x)+\int_0^x \lambda(\xi)\,\Phi_0(\xi;\ x)\,d\xi=\varphi_0(x)$$

dont la solution unique est

$$\lambda(x)=\varphi_0(x)+\int_0^x \varphi_0(\xi)\,\Gamma(\xi;\ x)\,d\xi$$

avec la résolvante

$$\Gamma(\xi;\ x)=-\Phi_0(\xi;\ x)+\overset{*}{\Phi}_0{}^2-\overset{*}{\Phi}_0{}^3+\ldots.$$

Par la substitution de l'expression précédente de λ dans la formule (22) et par l'échange de l'ordre de l'intégration obtenue, on trouve

$$\varphi(x,y)=\varphi_0(x-y)+\int_0^{x-y}\varphi_0(\xi)\,L(\xi;\ x,y)\,d\xi$$

où

$$L(\xi;\ x,y)=\Gamma(\xi;\ x-y)+\Phi(\xi;\ x,y)+\int_\xi^{x-y}\Gamma(\xi;\ s)\,\Phi(s;\ x,y)\,ds. \tag{25}$$

En remplaçant ici φ_0 par son expression, on a la formule

$$\varphi(x,y)=\varphi(x-y+a,\ a)+\int_0^{x-y}\varphi(\xi+a,\ a)\,L(\xi;\ x,y)\,d\xi \tag{26}$$

qui généralise celle-ci de M. *Volterra* (22).

Dans le cas particulier où

$$\varphi(x,a)\equiv 0$$

l'équation intégrale homogène de Volterra

$$\lambda(x-a)+\int_0^{x-a}\lambda(\xi)\,\Phi(\xi;\ x,a)=0$$

admet la solution triviale $\lambda=0$ et une seule. Donc, la fonction $\varphi(x,y)\equiv 0$, c.-à-d.

Si la fonction permutable $\varphi(x,y)$ s'annule sur un côté $y=a$ du triangle de définition (A), elle est identiquement nulle dans tout le domaine (A).

6. La formule (22) ou (26) entraîne que la diagonale d'une fonction permutable quelconque $\varphi(x,y)$ est constante:

$$\varphi(x,x)=\lambda(0)=\varphi(a,a)=c_0=\text{const.}$$

Cette propriété est un cas particulier d'une propriété générale [§ 2, form. (5)] des diagonales lorsque la fonction donnée $f(x,y)$ est du premier ordre et de forme canonique, c.-à-d. lorsque la diagonale

$$f(x,x)=1.$$

En s'appuyant sur cette propriété et sur la possibilité de la résolution des équations intégrales de Volterra de première espèce on établit[19] la formule analogue à la formule de *Taylor*

$$(27)\quad \begin{cases} \varphi(x,y) = c_0 f(x,y) + c_1 \overset{*}{f}{}^2 + \ldots + c_{n-1} \overset{*}{f}{}^n + \overset{*}{f}{}^n \overset{*}{\varphi}_n = \\ \quad = c_0 f(x,y) + c_1 \overset{*}{f}{}^2 + \ldots + c_{n-1} \overset{*}{f}{}^n + \overset{*}{\varphi}_n \overset{*}{f}{}^n \end{cases}$$

où $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ sont des constantes et où $\varphi_n(x,y)$ est une fonction permutable avec $f(x,y)$ ou $\overset{*}{f}{}^n$.

Nous rappellons le résultat principal sur les fonctions permutables analytiques du à M. *Pérès*[20]: on obtiendra toutes les fonctions analytiques permutables avec $f(x,y)$ en formant tous les développements (analogues aux développements tayloriens)

$$(28)\quad c_0 f(x,y) + c_1 \overset{*}{f}{}^2 + \ldots + c_n \overset{*}{f}{}^{n+1} + \ldots,$$

les constantes $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots,$ étant seulement telles que la série

$$(29)\quad c_0 + c_1 \frac{z}{1!} + \ldots + c_n \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

converge.

7. Dans le cas particulier où $f(x,y)$ appartient au groupe de cycle fermé:

$$f(x,y) = f(x-y),$$

les fonctions (2) et (4) appartiennent aussi au même groupe:

$$H(x,y) = -f''(x-y) \text{ et } F(x,y) = F(x-y).$$

En vertu de cela et des formules (20) et (21) on a dans ce cas

$$K_n(\xi; x, y) \equiv 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots);$$

donc la fonction $K(\xi; x, y)$, d'après (19), se réduit à l'unité et la fonction (23)

$$\Phi(\xi; x, y) = \int_0^{x-y-\xi} F(\sigma)\, d\sigma$$

dépend seulement de la différence:

$$\Phi = \Phi(x-y-\xi).$$

Avec de telle fonction la formule (22) entraîne

$$\varphi(x,y) = \varphi(x-y),$$

c.-à-d. les fonctions permutables avec une fonction donnée $f(x-y)$ du groupe du cycle fermé appartiennent au même groupe.

---

[19] *Volterra* [24, page 165 et 167].

[20] *J. Pérès* [11, page 79].

Il est connu (§ 5, n^0 2) que les fonctions $\lambda\ (x-y)$ du groupe du cycle fermé sont permutables entre elles. Par emploi de formule (22), M. *Vessiot*[21] a démontré une propriété générale du groupe: Toutes les fonctions, admettant la représentation (22), sont permutables entre elles.

Cette proposition peut être démontrée facilement par emploi des transformations de M. *Pérès* (§ 10).

8. À la fin de l'étude du problème fondamental nous allons établir les équations fonctionnelles diverses qui caractérisent les fonctions $K\ (\xi;\ x,\ y)$ et $\Phi\ (\xi;\ x,\ y)$.

Par emploi de l'expression (22) et de l'échange convenable de l'ordre des intégrations on trouve, de la condition de permutabilité

$$\overset{*}{f}\,\overset{*}{\varphi} = \overset{*}{\varphi}\,\overset{*}{f},$$

l'équation fonctionnelle

$$\text{(30)}\quad \left\{\begin{aligned} & f(x-\xi,\ y) + \int_y^{x-\xi} \Phi(\xi;\ x,\ s)\, f(s,y)\, ds = \\ & = f(x,y+\xi) + \int_{y+\xi}^{x} f(x,\ s)\, \Phi\,(\xi;\ s,\ y)\, ds \end{aligned}\right.$$

qui relie directement la fonction $\Phi\ (\xi;\ x,\ y)$ à la fonction donnée $f(x,y)$.

La fonction auxiliaire

$$\text{(8)}\qquad \psi\,(x,\ y) = \overset{*}{\varphi}\,\overset{*}{f} = \overset{*}{f}\,\overset{*}{\varphi}$$

est permutable avec f, car on a les relations

$$\overset{*}{\psi}\,\overset{*}{f} = \overset{*}{f}\,\overset{*}{\psi} = \overset{*}{f}\,\overset{*}{\varphi}\,\overset{*}{f}.$$

Par la substitution de (17) on tire l'équation fonctionnelle

$$\text{(31)}\qquad \int_y^{x-\xi} K(\xi;\ x,\ s)\, f(s,y)\, ds = \int_{y+\xi}^{x} f(x,s)\, K(\xi;\ s,y)\, ds$$

reliant les fonctions $K(\xi;\ x,\ y)$ et $f(x,\ y)$.

Puisque la fonction $\psi\,(x,y)$ satisfait à l'équation intégro-différentielle (9), on peut former de cette équation, par l'introduction de l'expression (17), l'équation intégro-différentielle

$$\text{(32)}\quad \left\{\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) K(\xi;\ x,y) = \\ & = \int_y^{x-\xi} K(\xi;\ x,\ s) F(s,y)\, ds - \int_{y+\xi}^{x} F(x,\ s)\, K(\xi;\ s,y)\, ds \end{aligned}\right.$$

---

[21] *Vessiot* [19]. Une autre démonstration a donné M. *Volterra* [27, page 174].

où la fonction $F(x, y)$ est construite par la série (4). L'équation précédente (32), jointe à la condition

$$K(x-y;\ x, y) \equiv 1,$$

est équivalente à l'équation intégrale (18), déjà résolue.

Les fonctions permutables $\varphi(x, y)$ satisfont (§ 5, n^0 1) au même type d'équation intégro-différentielle

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \overset{*}{\varphi}\overset{*}{F} - \overset{*}{F}\overset{*}{\varphi}, \tag{33}$$

analogue à (9). Si nous introduisons ici l'expression (22), nous obtenons l'équation intégro-différentielle[22]

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)\Phi(\xi;\ x, y) = F(x-\xi, y) - F(x, y+\xi) + \\ &+ \int_{y}^{x-\xi} \Phi(\xi;\ x, s)\, F(s, y)\, ds - \int_{y+\xi}^{x} F(x, s)\, \Phi(\xi;\ s, y)\, ds \end{aligned}\right. \tag{34}$$

qui caractérise la fonction $\Phi(\xi;\ x, y)$.

Un nouveau type d'équations fonctionnelles s'obtient de la propriété du groupe (n^0 7) des fonctions $\psi(x, y)$ et $\varphi(x, y)$. Soient les deux autres fonctions

$$\psi'(x, y) = \int_{0}^{x-y} \mu(\eta)\, K(\eta;\ x, y)\, d\eta \tag{17'}$$

et

$$\varphi'(x, y) = \mu(x-y) + \int_{0}^{x-y} \mu(\eta)\, \Phi(\eta;\ x, y)\, d\eta \tag{22'}$$

avec une autre fonction $\mu(x-y)$ du groupe du cycle fermé.

De la permutabilité mutuelle des fonctions (17) et (17') on tire, par les calculs faciles, l'équation fonctionnelle nouvelle

$$\int_{y+\eta}^{x-\xi} K(\xi;\ x, s)\, K(\eta;\ s, y)\, ds = \int_{y+\xi}^{x-\eta} K(\eta;\ x, s)\, K(\xi;\ s, y)\, ds \tag{35}$$

qui caractérise la fonction $K(\xi;\ x, y)$.

De même, la condition de permutabilité

$$\overset{*}{\varphi}\overset{*}{\varphi}{}' = \overset{*}{\varphi}{}'\overset{*}{\varphi}$$

entraîne l'équation fonctionnelle[23]

---

[22] Avec les autres notations cette équation est établie dans la monographie de, *Volterra-Pérès* [28, page 74].

[23] Cette équation, avec les autres notations, est établie par M. *Volterra* [27 page 174].

$$
(36)\quad \begin{cases} \Phi(\xi; x, y+\eta) + \Phi(\eta; x-\xi, y) + \int\limits_{y+\eta}^{x-\xi} \Phi(\xi; x, s)\,\Phi(\eta; s, y)\,ds = \\ = \Phi(\eta; x, y+\xi) + \Phi(\xi; x-\eta, y) + \int\limits_{y+\xi}^{x-\eta} \Phi(\eta; x, s)\,\Phi(\xi; s, y)\,ds, \end{cases}
$$

caractérisant la fonction $\Phi(\xi; x, y)$.

§ 7. Problème dans le cas d'une fonction donnée du second ordre.

1. Sans restreindre la généralité, on peut admettre que la fonction donnée $f(x, y)$ du second ordre est mise (§ 3) sous la forme cononique

$$
(1)\quad \begin{cases} f(x, x) = 0, \quad \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{y=x} = -\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_{y=x} = 1, \\ \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{y=x} = -\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{y=x} = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{y=x} = 0. \end{cases}
$$

Si la fonction $f(x, y)$ est dérivable jusqu'à l'ordre 4, il existe (§ 4) l'expression explicite du symbole $\overset{*}{f}{}^{-1}$ d'inversion de la composition

(2) $\overset{*}{f}{}^{-1} = \overset{*}{1}{}^{-2} + a_2(x)\,\overset{*}{1}{}^{0} + F_1(x, y)$ (composition à gauche)

et

(2′) $\overset{*}{f}{}^{-1} = \overset{*}{1}{}^{-2} + b_2(y)\,\overset{*}{1}{}^{0} + F_2(x, y)$ (composition à droite)

où

$$
(3)\quad a_2(x) = \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right)_{y=x}, \quad b_2(y) = -\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}\right)_{y=x}
$$

et

$$
(4)\quad \begin{cases} F_1(x, y) = H_1(x, y) - \overset{*}{H}_1\,\overset{*}{f}_2 + \overset{*}{H}_1\,\overset{*}{f}_2\,\overset{*}{f}_2 - \dots \quad \left(f_2 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \\ F_2(x, y) = H_2(x, y) - \overset{*}{f}_1\,\overset{*}{H}_2 + \overset{*}{f}_1\,\overset{*}{f}_1\,\overset{*}{H}_2 - \dots \quad \left(f_1 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) \end{cases}
$$

avec les fonctions

$$
(5)\quad \begin{cases} H_1(x, y) = -\left[\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + a_2(x)\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right], \\ H_2(x, y) = -\left[\dfrac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial x^2} + b_2(y)\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]. \end{cases}
$$

Comme nous avons déjà remarqué (§ 4, n^0 3), les fonctions (3) et (4) sont en réalité égales entre elles; nous désignons leur valeurs communes par

$$
(3')\quad a_2(x) = b_2(x) = \alpha(x)
$$

et

$$
(4')\quad F_1(x, y) = F_2(x, y) = F(x, y).
$$

Nous allons d'abord étudier le problème de détermination des fonctions permutables $\varphi(x, y)$ dans le cas particulier où

$$\alpha(x) \equiv 0,$$

c.-à-d. où la fonction donnée $f(x, y)$ est du type spécial

$$(6) \qquad f(x, y) = (x-y) + (x-y)^4 \omega(x, y),$$

$\omega(x, y)$ étant une fonction continue, dérivable jusqu'à l'ordre 4. Dans ce cas particulier on a l'expression commune du symbole

$$(7) \qquad \overset{*}{f}{}^{-1} = \overset{*}{1}{}^{-2} + F(x, y)$$

où la fonction $F(x, y)$ est donnée par la série

$$(8) \qquad F(x,y) = H(x,y) + \overset{*}{H}\overset{*}{1}{}^2\overset{*}{H} + \overset{*}{H}\overset{*}{1}{}^2\overset{*}{H}\overset{*}{1}{}^2\overset{*}{H} + \ldots. \quad \left[H = -\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\right]$$

qui converge absolument et uniformément dans le domaine d'existence tel que

$$(A) \qquad a \leqslant y \leqslant x \leqslant b.$$

En prenant l'expression (7) pour résoudre les équations intégrales associées du problème

$$\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi} = \psi(x,y) \quad \text{et} \quad \overset{*}{\varphi}\overset{*}{f} = \psi(x,y)$$

on obtient leurs solutions

$$(9) \qquad \varphi(x,y) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \overset{*}{F}\overset{*}{\psi} \quad \text{et} \quad \varphi(x,y) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \overset{*}{\psi}\overset{*}{F}$$

d'où l'équation intégro-différentielle

$$(10) \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \overset{*}{\psi}\overset{*}{F} - \overset{*}{F}\overset{*}{\psi}$$

pour déterminer la fonction auxiliaire

$$(11) \qquad \psi(x,y) = \int_y^x f(x,s)\,\varphi(s,y)\,ds = \int_y^x \varphi(x,s)\,f(s,y)\,ds.$$

Puisque $f(x,y)$ est une fonction du second ordre, la fonction $\psi(x, y)$ d'après (11) doit vérifier les conditions

$$(12) \qquad \psi(x, x) = 0, \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{y=x} = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{y=x} = 0.$$

Donc, le problème fondamental est réduit à la résolution de l'équation intégro-différentielle (10), jointe aux conditions du type de *Cauchy* (12), c.-à-d. à la résolution d'un problème de *Cauchy* pour l'équation (10).

2. Comme dans le cas d'une fonction du premier ordre (§ 6), nous trouvons d'abord la solution générale $\psi(x,y)$ de l'équation différentielle

$$(13) \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = g(x,y)$$

avec la fonction

$$(14) \qquad g(x,y) = \int_y^x [\psi(x,s) F(s,y) - F(x,s) \psi(s,y)]\, ds$$

lorsque $\psi(x,y)$ satisfait aux conditions (12).

Par le changement des variables

$$(15) \qquad u = \frac{x-y}{2}, \quad v = \frac{x+y}{2}$$

l'équation précédente se transforme en

$$(16) \qquad \frac{\partial^2 \overline{\psi}}{\partial u\, \partial v} = \overline{g}(u, v)$$

où

$$\overline{\psi}(u,v) = \psi(v+u,\ v-u), \quad \overline{g}(u,v) = g(v+u,\ v-u).$$

La solution générale de (16)

$$\overline{\psi}(u,v) = \Theta(u) + \gamma(v) + \int_{v_0}^{v} ds \int_0^u \overline{g}(t,s)\, dt$$

contient deux fonctions arbitraires $\Theta(u)$ et $\gamma(v)$. En revenant aux variables

$$x = v + u \quad \text{et} \quad y = v - u$$

on obtient la solution générale de (13)

$$(17) \qquad \psi(x,y) = \Theta(u) + \gamma(v) + \int_{v_0}^{v} ds \int_0^u g(s+t,\ s-t)\, dt.$$

Le terme ici

$$(18) \qquad \psi_1(x,y) = \overline{\psi}_1(u,v) = \int_{v_0}^{v} ds \int_0^u g(s+t, s-t)\, dt$$

représente une solution particulière de (13) qui satisfait aux conditions (12). En effet, pour $y = x$ on a $u = 0$, et de formules (18) et (14) on tire

$$\psi_1(x,x) = \overline{\psi}_1(0,v) = 0$$

et

$$\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right)_{y=x} = -\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y}\right)_{y=x} = \frac{1}{2}\int_{v_0}^{v} g(s,s)\, ds = 0.$$

Pour que la solution générale (17) satisfasse à la condition

$$\psi(x,x) = 0$$

on doit prendre

$$\gamma(x) = -\Theta(0) = \text{const.}$$

Par le choix d'une fonction arbitraire $\Theta(u)$ du groupe du cycle fermé, soumise aux conditions

(19) $$\Theta(0)=0,\ \Theta'(0)=0,$$

on forme la solution générale de l'équation (13)

(20) $$\psi(x,y)=\Theta(u)+\int_{v_0}^{v} ds\int_{o}^{u} g(s+t,\ s-t)\,dt$$

qui satisfait bien aux conditions (12).

En remplaçant dans la formule précédente la fonction $g(x,y)$ par son expression (14) on trouve l'équation intégrale

(21) $$\begin{cases} \psi(x,y)=\Theta(u)+ \\ +\int_{v_0}^{v} ds\int_{o}^{u} dt\int_{s-t}^{s+t}[\psi(s+t,\sigma)F(\sigma,s-t)-F(s+t,\sigma)\psi(\sigma,s-t)]\,d\sigma \end{cases}$$

qui est équivalente à l'équation intégro-différentielle (10), jointe aux conditions (12).

3. Nous allons démontrer, comme au § 6, le théorème d'unicité suivant: si la fonction $\Theta(u)=\Theta\left(\frac{x-y}{2}\right)$, admettant la dérivée première continue, est fixée du groupe du cycle fermé et si la fonction $F(x,y)$ est une fonction donnée, continue dans le domaine (A), l'équation intégrale (21) admet au plus une solution $\psi(x,y)$, continue dans ce domaine.

Dans le cas contraire, en notant par $\psi_0(x,y)$ une autre solution continue de (21), on forme l'équation intégrale homogène

(22) $$\begin{cases} \Psi(x,y)= \\ =\int_{v_0}^{v} ds\int_{o}^{u} dt\int_{s-t}^{s+t}[\Psi(s+t,\sigma)F(\sigma,s-t)-F(s+t,\sigma)\Psi(\sigma,s-t)]\,d\sigma \end{cases}$$

que vérifie la différence

$$\Psi(x,y)=\psi(x,y)-\psi_0(x,y).$$

Or, sous les hypothèses précédentes, l'équation (22) admet la solution unique

$$\Psi(x,y)\equiv 0.$$

En effet, par l'évaluation répétée du deuxième membre de (22) on tire l'inégalité

(23) $$|\Psi(x,y)|<\mu M^n(b-a)^n\cdot\frac{(x-y)^{2n}}{(2n)!}$$

avec

$$|\Psi|<\mu \text{ et } |F|<M,$$

dont le second membre tend vers zéro lorsque n augmente indéfinement.

Donc, les solutions $\psi(x,y)$ et $\psi_0(x,y)$ doivent être identiques, — d'où l'unicité de solution de l'équation (21).

4. Pour la résolution effective de l'équation intégrale (21) on met les fonctions $\Theta(u)$ et $\psi(x,y)$ d'après (12) et (19) sous formes suivantes

$$(24)\qquad \Theta(u)=\int_o^{2u}\mu(\xi)\,d\xi=\int_o^{x-y}\mu(\xi)\,d\xi$$

et

$$(25)\qquad \psi(x,y)=\int_o^{x-y}\mu(\xi)\,K(\xi;x,y)\,d\xi$$

où $\mu(\xi)$ est une fonction arbitraire nouvelle (telle que $\mu(0)=0$) et où $K(\xi;x,y)$ est la fonction inconnue, définie dans le domaine tel que

$$(A')\qquad a\leqslant y\leqslant x\leqslant b,\quad 0\leqslant\xi\leqslant x-y.$$

Par la substitution des expressions (24) et (25) dans (21) on obtient, après quelques transformations sur l'échange de l'ordre des intégrations convenables, l'équation intégrale fondamentale

$$(26)\quad\begin{cases} K(\xi;x,y)=1+\int_{v_0}^{v}ds\int_{\frac{\xi}{2}}^{u}dt\int_{\xi}^{2t}[K(\xi;s+t,s+t-\tau)F(s+t-\tau,s-t)-\\ \qquad -F(s+t,s-t+\tau)\,K(\xi;s-t+\tau,s-t)]\,d\tau,\end{cases}$$

qui caractérise la fonction $K(\xi;x,y)$.

On obtient par la méthode des approximations successives la solution (d'ailleurs unique) de (26), exprimée par la série

$$(27)\qquad K(\xi;x,y)=1+\sum_{n=1}^{\infty}K_n(\xi;x,y)$$

où les termes sont déterminés par les formules suivantes de récurrence:

$$(28)\quad K_1(\xi;x,y)=\int_{v_0}^{v}ds\int_{\frac{\xi}{2}}^{u}dt\int_{\xi}^{2t}[F(s+t-\tau,s-t)-F(s+t,s-t+\tau)]d\tau$$

et

$$(29)\quad\begin{cases} K_{n+1}(\xi;x,y)=\int_{v_0}^{v}ds\int_{\frac{\xi}{2}}^{u}dt\int_{\xi}^{2t}[K_n(\xi;s+t,s+t-\tau)F(s+t-\tau,s-t)-\\ \qquad -F(s+t,s-t+\tau)\,K_n(\xi;s-t+\tau,s-t)]\,d\tau\end{cases}$$

$$(n=1,2,3,\ldots).$$

Dans le domaine (A') la convergence absolue et uniforme de la série (27) est assurée par les inégalités

$$(30)\qquad |K_n(\xi;x,y)|<M^n(b-a)^n\cdot\frac{(x-y-\xi)^{2n}}{(2n)!}\quad(n=1,2,3,\ldots)$$

où M est la borne supérieure du module de $F(x,y)$ dans le domaine (A)

La fonction $K(\xi;\, x, y)$ jouit les propriétés suivantes, tirées de l'équation intégrale (26). Si l'on pose ici $\xi = 2u = x - y$, on obtient la valeur

$$K(x-y;\, x, y) = 1. \tag{31}$$

En dérivant deux fois par rapport à x tous les membres de (26) et en posant la même valeur de ξ, on trouve immédiatement

$$\left[\frac{\partial K(\xi;\, x, y)}{\partial x}\right]_{\xi = x-y} = 0 \tag{32}$$

et

$$\left[\frac{\partial^2 K(\xi;\, x, y)}{\partial x^2}\right]_{\xi = x-y} = \frac{1}{2}\int_{v_0-u}^{v-u} F(\sigma, \sigma)\, d\sigma - \frac{1}{2}\int_{v_0+u}^{v+u} F(\sigma, \sigma)\, d\sigma. \tag{33}$$

5. Enfin, pour déterminer toutes les fonctions $\varphi(x, y)$ permutables avec (6), il suffit d'introduire l'expression (25) de la fonction trouvée $\psi(x, y)$ dans l'une des formules (9), comme par exemple, dans la première. En vertu des valeurs (31) et (32) on exprime, après quelques calculs faciles, les fonctions permutables par

$$\varphi(x, y) = \mu'(x-y) + \int_o^{x-y} \mu(\xi)\, \Psi(\xi;\, x, y)\, d\xi \tag{34}$$

où

$$\Psi(\xi;\, x, y) = \frac{\partial^2 K(\xi;\, x, y)}{\partial x^2} + \int_{y+\xi}^{x} F(x, s)\, K(\xi;\, s, y)\, d\xi. \tag{35}$$

Finalement on peut mettre les fonctions permutables $\varphi(x, y)$ sous forme de transformations de M. *Volterra*

$$\varphi(x, y) = \lambda(x-y) + \int_o^{x-y} \lambda(\xi)\, \Phi(\xi;\, x, y)\, d\xi, \tag{36}$$

en introduisant les fonctions nouvelles $\lambda(x-y)$ et $\Phi(\xi;\, x, y)$ telles que

$$\mu(x-y) = \int_o^{x-y} \lambda(\xi)\, d\xi \tag{37}$$

et

$$\Phi(\xi;\, x, y) = \int_\xi^{x-y} \Psi(\eta;\, x, y)\, d\eta. \tag{38}$$

Donc, toutes les fonctions $\varphi(x, y)$ permutables avec la fonction $f(x, y)$ du second ordre et du type spécial

$$f(x, y) = (x-y) + (x-y)^4\, \omega(x, y) \tag{6}$$

peuvent être représentées par les transformations de M. *Volterra* (36) où $\lambda(x-y)$ est une fonction arbitraire du groupe du cycle fermé et où la fonction (le noyau) $\Phi(\xi;\, x, y)$ est déterminée par les relations (38) et (35).

6. Toutes les propriétés des fonctions permutables qui sont basées sur la formule (36), sont les mêmes que pour les fonctions permutables avec une fonction donnée du premier ordre (§ 6, *n*^os 5—7). Aussi les équations fonctionnelles (30) et (31) du § 6 sont les mêmes.

Par la substitution de (25) dans l'équation (10) on tire l'équation intégro-différentielle

$$(39)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)K(\xi;x,y)= \\ =\displaystyle\int_y^{x-\xi}K(\xi;x,s)F(s,y)\,ds-\int_{y+\xi}^{x}F(x,s)K(\xi;s,y)\,ds, \end{cases}$$

qui, jointe aux conditions (31) et (32), est équivalente à l'équation intégrale (26).

Puisque la fonction permutable $\varphi(x,y)$, admettant les dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2, vérifie le même type (10) d'équation intégro-différentielle

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\overset{*}{\varphi}\overset{*}{F}-\overset{*}{F}\overset{*}{\varphi},$$

on peut former par la substitution de (36) l'équation intégro-différentielle

$$(40)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Phi(\xi;x,y)=F(x-\xi,y)-F(x,y+\xi)+ \\ +\displaystyle\int_y^{x-\xi}\Phi(\xi;x,s)F(s,y)\,ds-\int_{y+\xi}^{x}F(x,s)\Phi(\xi;s,y)\,ds \end{cases}$$

qui caractérise la fonction (le noyau) $\Phi(\xi;x,y)$.

7. Dans le cas général d'une fonction quelconque $f(x,y)$ du second ordre et de forme canonique (1) on doit prendre les expressions générales (2) et (2′) avec les fonctions (3) et (4). Ayant régard aux égalités (3′) et (4′), on exprime les solutions des équations intégrales associées

$$\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi}=\psi(x,y) \text{ et } \overset{*}{\varphi}\overset{*}{f}=\psi(x,y)$$

par

$$(9')\qquad \begin{cases} \varphi(x,y)=\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\alpha(x)\psi+\overset{*}{F}\overset{*}{\psi} \\ \varphi(x,y)=\dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\alpha(y)\psi+\overset{*}{\psi}\overset{*}{F} \end{cases}$$

d'où l'équation intégro-différentielle générale[24]

---

[24] Cette équation est équivalente à celle que M. *Volterra* a formé dans ses travaux [22, § 3] et [24, page 169].

$$(10') \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = [\alpha(y) - \alpha(x)]\, \psi(x, y) + \overset{*}{\psi} \overset{*}{F} - \overset{*}{F} \overset{*}{\psi}.$$

Par emploi de la formule de solution (20) on trouve l'équation intégrale

$$(21') \quad \begin{cases} \psi(x, y) = \Theta(u) + \int\limits_{v_0}^{v} ds \int\limits_{0}^{u} \Big\{ [\alpha(s-t) - \alpha(s+t)]\, \psi(s+t, s-t) + \\ + \int\limits_{s-t}^{s+t} [\psi(s+t, \sigma)\, F(\sigma, s-t) - F(s+t, \sigma)\, \psi(\sigma, s-t)]\, d\sigma \Big\}\, dt, \end{cases}$$

qui est équivalente à (10′), jointe aux conditions (12).

Comme au n^0 précédent, on constate l'unicité de solution de l'équation (21′), et par les substitutions (24) et (25) on obtient l'équation intégrale générale

$$(26') \quad \begin{cases} K(\xi; x, y) = 1 + \int\limits_{v_0}^{v} ds \int\limits_{\frac{\xi}{2}}^{u} \Big\{ [\alpha(s-t) - \alpha(s+t)]\, K(\xi; s+t, s-t) + \\ \quad + \int\limits_{\xi}^{2t} [K(\xi; s+t, s+t-\tau)\, F(s+t-\tau, s-t) - \\ \quad - F(s+t, s-t+\tau)\, K(\xi; s-t+\tau, s-t)]\, d\tau \Big\}\, dt. \end{cases}$$

Par la méthode des approximations successives on peut trouver la solution unique de (26′), exprimée par la série convergente de forme (27). La solution $K(\xi; x, y)$ a la même valeur (31), mais la fonction

$$(32') \quad \left[\frac{\partial K(\xi; x, y)}{\partial x}\right]_{y=x} = \varkappa(x, y) = \frac{1}{2} \int\limits_{v_0}^{v} [\alpha(s-u) - \alpha(s+u)]\, ds$$

est en général différente de zéro.

Enfin, toutes les fonctions permutables $\varphi(x, y)$ peuvent être mises sous forme de transformations (36) de M. *Volterra*, en posant

$$(35') \quad \Psi(\xi; x, y) = \frac{\partial^2 K(\xi; x, y)}{\partial x^2} + \alpha(x) K(\xi; x, y) + \int\limits_{y+\xi}^{x} F(x, s) K(\xi; s, y)\, ds$$

et

$$(38') \qquad \Phi(\xi; x, y) = \varkappa(x, y) + \int\limits_{\xi}^{x-y} \Psi(\eta; x, y)\, d\eta,$$

où la fonction $\varkappa(x, y)$ a l'expression (32′). Donc, les propriétés, indiquées au n^0 6, des fonctions $\varphi(x, y)$ permutables avec $f(x, y)$ subsistent dans le cas général. On pouvait généraliser facilement les équations intégro-différentielles (39) et (40).

8. Dans le cas particulier où la fonction $f(x, y) = f(x-y)$ est choisie du groupe du cycle fermé la fonction (3′) se réduit à constante

(41) $$\alpha(x) \equiv -f'''(0),$$

et les fonctions (5) sont identiques à

(42) $$H_0(x, y) = -f^{(4)}(x-y) + f'''(0) f''(x-y),$$

où l'on a noté par les accents les dérivées de $f(x-y)$ par rapport à variable $x-y$. Dans ce cas la fonction (4′) peut être représentée par la série convergente

(43) $$F(x, y) = H_0(x, y) - \overset{*}{H}_0 \overset{*}{f}'' + \overset{*}{H}_0 \overset{*}{f}'' \overset{*}{f}'' - \ldots,$$

et elle appartient, comme la fonction (42), au groupe du cycle fermé:

$$F(x, y) = F(x-y).$$

En vertu de cela, on constate facilement que dans ce cas particulier les équations (10′), (21′) et (26′) se réduisent respectivement aux équations (10), (21) et (26), où l'on doit prendre la fonction (43) du groupe du cycle fermé. Par emploi des formules correspondantes de recurrence on tire

$$K_n(\xi; x, y) \equiv 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Donc la fonction (27) se réduit à l'unité:

$$K(\xi; x, y) \equiv 1,$$

et d'après les formules (35) et (38) on a

$$\Psi(\xi; x, y) = \int_0^{x-y-\xi} F(\sigma)\, d\sigma = \Psi(x-y-\xi)$$

et

$$\Phi(\xi; x, y) = \int_0^{x-y-\xi} \Psi(\eta)\, d\eta = \Phi(x-y-\xi).$$

Avec telle expression les transformations (36) de M. Volterra indiquent que toutes les fonctions

$$\varphi(x, y) = \varphi(x-y)$$

permutables avec $f(x-y)$ appartiennent aussi au même groupe de cycle fermé.

§ 8. Problème dans le cas d'une fonction donnée d'ordre n $(n>2)$.

1. En effectuant les transformations convenables (§ 3) on peut toujours supposer que la fonction donnée $f(x, y)$ d'ordre entier positif n est mise sous forme canonique [§ 4, form. (16)]. Si de plus $f(x, y)$ est dérivable jusqu'à l'ordre $2n$, on sait construire (§ 4) l'expression[25] du symbole $\overset{*}{f}{}^{-1}$ d'inversion de composition par

$$(1) \qquad \overset{*}{f}{}^{-1}=\overset{*}{1}{}^{-n}+a_2(x)\,\overset{*}{1}{}^{-n+2}+\ldots+a_n(x)\,\overset{*}{1}{}^{0}+F(x, y)$$

ou

$$(1') \qquad \overset{*}{f}{}^{-1}=\overset{*}{1}{}^{-n}+b_2(y)\,\overset{*}{1}{}^{-n+2}+\ldots+b_n(y)\,\overset{*}{1}{}^{0}+F(x, y),$$

suivant le cas de composition à gauche ou à droite avec ce symbole.

Par emploi des expressions (1) et (1'), les solutions des équations intégrales associées du problème

$$\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi}=\psi(x, y) \quad \text{et} \quad \overset{*}{\varphi}\overset{*}{f}=\psi(x, y)$$

s'expriment de la façon suivante

$$(2) \qquad \varphi(x, y)=\overset{*}{f}{}^{-1}\overset{*}{\psi}=\frac{\partial^n \psi}{\partial x^n}+a_2(x)\frac{\partial^{n-2}\psi}{\partial x^{n-2}}+\ldots+a_n(x)\,\psi+\overset{*}{F}\overset{*}{\psi}$$

et

$$(2') \qquad \begin{cases} \varphi(x, y)=\overset{*}{\psi}\overset{*}{f}{}^{-1}=(-1)^n\dfrac{\partial^n \psi}{\partial y^n}+(-1)^{n-2}b_2(y)\dfrac{\partial^{n-2}\psi}{\partial y^{n-2}}+\ldots+ \\ \qquad\qquad +b_n(y)\,\psi+\overset{*}{\psi}\overset{*}{F} \end{cases}$$

d'où l'equation intégro-différentielle

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^n \psi}{\partial x^n}-(-1)^n\dfrac{\partial^n \psi}{\partial y^n}+\left[a_2(x)\dfrac{\partial^{n-2}\psi}{\partial x^{n-2}}-(-1)^{n-2}b_2(y)\dfrac{\partial^{n-2}\psi}{\partial y^{n-2}}\right]+\ldots+ \\ \qquad +[a_n(x)-b_n(y)]\,\psi(x, y)=\overset{*}{\psi}\overset{*}{F}-\overset{*}{F}\overset{*}{\psi}. \end{cases}$$

Puisque $f(x, y)$ est d'ordre n, la fonction introduite auxiliaire

$$(4) \qquad \psi(x, y)=\int_y^x f(x, s)\,\varphi(s, y)\,ds=\int_y^x \varphi(x, s)\,f(s, y)\,ds$$

doit être d'ordre supérieur à n; donc on a les conditions supplémentaires

$$(5) \qquad \left[\frac{\partial^k \psi(x, y)}{\partial x^i\,\partial y^j}\right]_{y=x}=0 \qquad (i+j=k, \quad k=0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

qui sont du type de *Cauchy*.

---

[25] L'égalité des parties régulières du $\overset{*}{f}{}^{-1}$ (aussi des fonctions a_2 et b_2) est indiquée au n^0 3 du § 4.

Dans le cas particulier où

$$a_i(x) \equiv 0, \quad b_i(y) \equiv 0 \qquad (i=1, 2, 3, \ldots, n)$$

la fonction $f(x, y)$ admet la représentation

$$(6) \qquad f(x, y) = \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} + (x-y)^{2n}\,\omega(x, y)$$

et le symbole $\overset{*}{f}{}^{-1}$ a l'expression commune

$$(7) \qquad \overset{*}{f}{}^{-1} = \overset{*}{1}{}^{-n} + F(x, y)$$

avec la fonction $F(x, y)$, représentée par la série convergente

$$(8) \quad F(x,y) = H(x,y) + \overset{*}{H}\,\overset{*}{1}{}^{n}\,\overset{*}{H} + \overset{*}{H}\,\overset{*}{1}{}^{n}\,\overset{*}{H}\,\overset{*}{1}{}^{n}\,\overset{*}{H} + \ldots \left[H = (-1)^{n-1}\frac{\partial^{2n} f}{\partial x^n \partial y^n}\right].$$

Dans ce cas on a l'équation intégro-différentielle du problème plus simple

$$(9) \qquad \frac{\partial^n \psi}{\partial x^n} - (-1)^n \frac{\partial^n \psi}{\partial y^n} = \overset{*}{\psi}\,\overset{*}{F} - \overset{*}{F}\,\overset{*}{\psi}.$$

Il faut donc résoudre en $\psi(x, y)$ ces équations intégro-différentielles (3) et (9), jointes aux conditions de *Cauchy* (5).

En désignant $g(x, y)$ le second membre

$$\overset{*}{\psi}\,\overset{*}{F} - \overset{*}{F}\,\overset{*}{\psi}$$

on peut remplacer équations (3) et (9) par des équations intégrales, si l'on peut résoudre le problème de *Cauchy*[26] pour les équations différentielles

$$(3') \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^n \psi}{\partial x^n} - (-1)^n \dfrac{\partial^n \psi}{\partial y^n} + \left[a_2(x)\dfrac{\partial^{n-2}\psi}{\partial x^{n-2}} - (-1)^{n-2} b_2(y)\dfrac{\partial^{n-2}\psi}{\partial y^{n-2}}\right] + \ldots + \\ \qquad + [a_n(x) - b_n(y)]\,\psi(x, y) = g(x, y) \end{cases}$$

ou

$$(9') \qquad \frac{\partial^n \psi}{\partial x^n} - (-1)^n \frac{\partial^n \psi}{\partial y^n} = g(x, y)$$

et pour les conditions supplémentaires (5). Telle réduction serait possible parce que $g(x, y)$ contient seulement sous le signe d'intégration la fonction inconnue $\psi(x, y)$, mais non ses dérivées partielles.

Au contraire, par le procédé employé par *M. Pérès*[27] on serait ramené à une nouvelle équation intégro-différentielle. Les difficultés du problème dans le cas général d'ordre $n > 2$ proviennent de ce que

---

[26] Pour les fonctions analytiques *M. Pérès* a établi les formules correspondantes dans ses travaux [11, page 42] et [28, page 47].

[27] C. f. *Pérès* [11, page 41 et 48].

les équations différentielles (3′) et (9′) ont des caractéristiques imaginaires. C'est pourquoi M. *Pérès* a traité le problème pour des fonctions permutables analytiques.

2. Les équations (3) et (9) peuvent être obtenues de la relation symbolique

$$\overset{*}{f}{}^{-1}\overset{*}{\psi}-\overset{*}{\psi}\overset{*}{f}{}^{-1}=0$$

si l'on remplace $\overset{*}{f}{}^{-1}$ par son expression (1) ou (1′) et (7). La fonction $\psi(x, y)$ est permutable avec $f(x, y)$ car

$$\overset{*}{f}\overset{*}{\psi}=\overset{*}{\psi}\overset{*}{f}=\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi}\overset{*}{f}.$$

De la condition de permutabilité

$$\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi}=\overset{*}{\varphi}\overset{*}{f}$$

on tire, en vertu des relations

$$\overset{*}{f}\overset{*}{f}{}^{-1}=\overset{*}{f}{}^{-1}\overset{*}{f}=\overset{*}{1}{}^{0},$$

la relation symbolique du même type

$$\overset{*}{f}{}^{-1}\overset{*}{\varphi}-\overset{*}{\varphi}\overset{*}{f}{}^{-1}=0.$$

Donc, les fonctions permutables $\varphi(x, y)$, admettant les dérivées partielles jusqu'à l'ordre n, satisfont aux mêmes équations intégro-différentielles (3) et (9), c.-à-d. ces équations caractérisent toutes les fonctions permutables avec la fonction donnée $f(x, y)$ d'ordre n et de forme canonique.

3. Dans le cas particulier où $f(x, y)=f(x-y)$ est une fonction du groupe du cycle fermé, on a les constantes égales

$$a_2=b_2=-f^{(n+1)}(0),\ \ldots,\quad a_n=b_n=\text{const.}$$

et la fonction

$$F(x, y)=H_0(x, y)-\overset{*}{H}_0\overset{*}{f}{}^{(n)}+\overset{*}{H}_0\overset{*}{f}{}^{(n)}\overset{*}{f}{}^{(n)}-\ldots \tag{10}$$

avec

$$H_0(x, y)=-[f^{(2n)}(x-y)+a_2f^{(2n-2)}(x-y)+\ldots+a_nf^{(n)}(x-y)] \tag{11}$$

appartenant au même groupe:

$$F(x, y)=F(x-y)\quad \text{et}\quad H_0(x, y)=H_0(x-y).$$

L'équation (3) se réduit dans ce cas à la suivante

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial^n\psi}{\partial x^n}-(-1)^n\frac{\partial^n\psi}{\partial y^n}+a_2\left[\frac{\partial^{n-2}\psi}{\partial x^{n-2}}-(-1)^{n-2}\frac{\partial^{n-2}\psi}{\partial y^{n-2}}\right]+\ldots+\\&+a_{n-1}\left[\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right]=\int_y^x[\psi(x, s)F(s-y)-F(x-s)\psi(s, y)]\,ds\end{aligned}\right. \tag{12}$$

Celle-ci admet évidemment la solution de forme

$$\psi(x, y) = \psi(x - y).$$

En vertu de la relation (2) ou (2′) on constate aisément que les fonctions $\varphi(x, y)$ permutables avec $f(x-y)$ appartiennent aussi au groupe du cycle fermé:

$$\varphi(x, y) = \varphi(x - y).$$

CHAPITRE III.

Transformations de M. *Pérès* et leur application au problème fondamental.

§ 9. Équation fonctionnelle qui caractérise la fonction génératrice de la transformation et sa discussion.

1. Dans le Chapitre précédent (§§ 6 et 7) nous avons trouvé toutes les fonctions $\varphi(x, y)$, permutables avec une fonction donnée du premier ou du second ordre et de forme canonique, exprimées par la formule

$$\varphi(x, y) = \lambda(x - y) + \int_0^{x-y} \lambda(\xi)\, \Phi(\xi; x, y)\, d\xi, \tag{1}$$

due à M. *Volterra.* Le second membre de (1) peut être interprété par une transformation fonctionnelle

$$\Omega(\lambda) = \lambda(x - y) + \int_0^{x-y} \lambda(\xi)\, \Phi(\xi; x, y)\, d\xi \tag{2}$$

faisant passer de toutes les fonctions $\lambda(x-y)$ du groupe du cycle fermé aux fonctions permutables $\varphi(x, y)$. Nous nommerons (2) en général les transformations de M. *Volterra;* leur fonction génératrice (le noyau) $\Phi(\xi; x, y)$ est une fonction continue dans le domaine tel que

$$(A') \qquad a \leqslant y \leqslant x \leqslant b, \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant x - y$$

et elle est formée par un procédé connu dans le problème de détermination des fonctions permutables.

Nous rappellons dans ce paragraphe les résultats principaux dus à M. *Pérès* sur les transformations $\Omega(\lambda)$, en rattachant les au domaine nouveau (A') de la définition de $\Phi(\xi; x, y)$ quelconque[28].

[28] C. f. *Pérès* [13] et *Volterra-Pérès* [28, Chap. IV]. Dans ces travaux le domaine cité est tel que $a \leqslant x \leqslant y \leqslant b, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant y - x.$

Tout d'abord, cherchons toutes les fonctions $\mu(x-y)$ du groupe de cycle fermé dont la transformée

$$(3) \qquad \mu(x-y)+\int_0^{x-y}\mu(\xi)\,\Phi_0(\xi;x,y)\,d\xi,$$

avec une fonction génératrice nouvelle $\Phi_0(\xi; x, y)$, coïncide avec (1). En égalant les expressions (1) et (3) et en posant $y=a=const$, on obtient, après avoir remplacé x par $x+a$, l'équation intégrale linéaire de *Volterra*

$$\mu(x)+\int_0^x\mu(\xi)\Phi_0(\xi;x+a,a)\,d\xi=\lambda(x)+\int_0^x\lambda(\xi)\Phi(\xi;x+a,a)\,d\xi,$$

dont la solution par rapport à l'inconnue $\mu(x)$ peut être mise sous forme

$$\mu(x)=\lambda(x)+\int_0^x\lambda(\xi)\,\Theta(\xi;x)\,d\xi,$$

la fonction $\Theta(\xi; x)$ étant formée à partir de Φ et Φ_0.

Par la substitution

$$(4) \qquad \mu(x-y)=\lambda(x-y)+\int_0^{x-y}\lambda(\xi)\,\Theta(\xi;x-y)\,d\xi$$

la fonction (3) devient égale à (1), si l'on choisit la relation suivante entre les fonctions génératrices

$$(5) \quad \Phi(\xi;x,y)=\Phi_0(\xi;x,y)+\Theta(\xi;x-y)+\int_\xi^{x-y}\Theta(\xi;s)\,\Phi_0(s;x,y)\,ds.$$

En fixant la fonction $\Phi_0(\xi; x, y)$ et en regardant la fonction $\Theta(\xi; x-y)$ comme arbitraire quelconque, on obtient par (5) la forme la plus générale de la fonction génératrice $\Phi(\xi; x,y)$ qui sert à représenter la même fonction par la transformation de M. *Volterra* (1).

2. M. *Pérès* a profité de cet arbitraire, en découvrant parmi toutes les transformations (2) celles qui conservent la composition, c.-à-d. qui satisfont à la condition

$$(6) \qquad \overset{*}{\Omega}(\lambda)\,\overset{*}{\Omega}(\mu)=\Omega(\overset{*}{\lambda}\,\overset{*}{\mu})$$

où $\Omega(\mu)$ est la transformation

$$(2') \qquad \Omega(\mu)=\mu(x-y)+\int_0^{x-y}\mu(\eta)\,\Phi(\eta;x,y)\,d\eta$$

avec la même fonction génératrice $\Phi(\xi; x, y)$ et avec une autre fonction $\mu(x-y)$ quelconque du groupe du cycle fermé. Par la substitution des expressions (2) et (2') dans la relation (6) on tire aisément l'équation fonctionnelle

$$(7)\ \Phi(\xi+\eta; x,y)=\Phi(\xi; x,y+\eta)+\Phi(\eta; x-\xi,y)+\int\limits_{y+\eta}^{x-\xi}\Phi(\xi; x,s)\,\Phi(\eta; s,y)\,ds$$

qui caractérise la fonction génératrice $\Phi(\xi; x, y)$ des transformations précédentes, dites les transformations de M. *Pérès*.

Celles-ci jouissent de propriété remarquable du groupe: les fonctions transformées (2) et (2′) sont permutables entre elles.

En effet, il existe les relations

$$\overset{*}{\Omega}(\mu)\,\overset{*}{\Omega}(\lambda)=\Omega(\overset{*}{\mu}\overset{*}{\lambda})=\Omega(\overset{*}{\lambda}\overset{*}{\mu})=\overset{*}{\Omega}(\lambda)\,\overset{*}{\Omega}(\mu)$$

car les fonctions $\lambda(x-y)$ et $\mu(x-y)$ du groupe du cycle fermé sont permutables entre elles.

Cette propriété peut être établie d'une autre manière, en échangeant dans la formule (7) les variables ξ et η; on tire alors l'équation fonctionnelle (36) du § 6 qui est caractéristique dans le cas de permutabilité.

3. La résolution de l'équation (7) dans le cas général, d'après une méthode due à M. *Pérès,* se réduit à la résolution de l'équation intégrale linéaire suivante. En posant $y=a=$ const. dans (7) et puis en remplaçant $a+\eta$ par y, on forme l'équation intégrale de Volterra

$$\Phi(\xi; x, y)+\int\limits_{y}^{x-\xi}\Phi(\xi; x, s)\,\alpha(s, y)\,ds=\alpha(x, y+\xi)-\alpha(x-\xi, y),$$

où la fonction introduite

$$(8)\qquad \alpha(x, y)=\Phi(y-a; x, a).$$

La solution de l'équation précédente

$$(9)\ \Phi(\xi; x, y)=\alpha(x, y+\xi)+\beta(x-\xi, y)+\int\limits_{y}^{x-\xi}\alpha(x, s+\xi)\,\beta(s, y)\,ds$$

est exprimeé par la résolvante

$$(10)\qquad \beta(x, y)=-\alpha(x, y)+\overset{*}{\alpha}{}^2-\overset{*}{\alpha}{}^3+\dots$$

que jouit la propriété bien connue

$$(11)\qquad \alpha+\beta+\overset{*}{\alpha}\overset{*}{\beta}=\alpha+\beta+\overset{*}{\beta}\overset{*}{\alpha}$$

ou sous forme symbolique

$$(11')\qquad (\overset{*}{1}{}^0+\overset{*}{\alpha})(\overset{*}{1}{}^0+\overset{*}{\beta})=(\overset{*}{1}{}^0+\overset{*}{\beta})(\overset{*}{1}{}^0+\overset{*}{\alpha})=\overset{*}{1}{}^0.$$

Par la substitution de l'expression (9) de la fonction génératrice $\Phi(\xi; x, y)$ dans (2) on obtient la forme générale suivante des transformations de M. *Pérès*

$$\Omega(\lambda) = \lambda + \overset{*}{\alpha}\overset{*}{\lambda} + \overset{*}{\lambda}\overset{*}{\beta} + \overset{*}{\alpha}\overset{*}{\lambda}\overset{*}{\beta}$$

ou

$$(12) \qquad \Omega(\lambda) = (\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\alpha})\, \overset{*}{\lambda}\, (\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\beta}).$$

Cette forme indique immédiatement que les transformations c o n s e r v e n t l a c o m p o s i t i o n. En effet, on a les relations

$$\overset{*}{\Omega}(\lambda)\,\overset{*}{\Omega}(\mu) = (\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\alpha})\,\overset{*}{\lambda}\,(\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\beta})\,(\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\alpha})\,\overset{*}{\mu}\,(\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\beta}) =$$
$$= (\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\alpha})\,\overset{*}{\lambda}\,\overset{*}{\mu}\,(\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\beta}) = \Omega(\overset{*}{\lambda}\,\overset{*}{\mu}),$$

quelle que soit la fonction $\alpha(x, y)$, pourvu que la fonction $\beta(x, y)$ soit déterminée par (10).

Donc, t o u t e s l e s t r a n s f o r m a t i o n s d e M. *Volterra* (2) q u i c o n s e r v e n t l a c o m p o s i t i o n, c.-à-d. t o u t e s l e s t r a n s f o r m a t i o n s d e M. *Pérès*, p e u v e n t ê t r e m i s e s s o u s f o r m e (12) o ù l e s f o n c t i o n s $\alpha(x, y)$ et $\beta(x, y)$ s o n t l i é e s p a r l e s r e l a t i o n s (11) ou (11′), l'u n e d e c e s f o n c t i o n s é t a n t a r b i t r a i r e.

L'équation fonctionnelle (7) admet la solution générale (9), contenant une fonction arbitraire, p. ex., $\alpha(x, y)$ et l'autre fonction $\beta(x, y)$, déterminée par (10).

4. Il est facile à établir la proposition suivante. O n p e u t m e t t r e l a m ê m e f o n c t i o n s o u s f o r m e d e s t r a n s f o r m a t i o n s d e M. *Pérès* (12) d'u n e i n f i n i t é d e m a n i è r e: si dans une telle transformation α_0 et β_0 font une paire des fonctions, vérifiant les relations de forme (11′)

$$(\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\alpha}_0)\,(\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\beta}_0) = (\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\beta}_0)\,(\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\alpha}_0) = \overset{*}{1}{}^0,$$

on obtient toutes les représentations par les formules

$$(13) \qquad \alpha(x, y) = \alpha_0(x, y) + \gamma(x - y) + \overset{*}{\alpha}_0\,\overset{*}{\gamma}$$

et

$$(13') \qquad \beta(x, y) = \beta_0(x, y) + \delta(x - y) + \overset{*}{\delta}\,\overset{*}{\beta}_0,$$

où les fonctions $\gamma(x - y)$ et $\delta(x - y)$ du groupe du cycle fermé sont liées par les relations

$$(14) \qquad \gamma(x - y) + \delta(x - y) + \overset{*}{\gamma}\,\overset{*}{\delta} = \gamma(x - y) + \delta(x - y) + \overset{*}{\delta}\,\overset{*}{\gamma},$$

l'une de ces fonctions étant arbitraire.

La fonction arbitraire, p. ex., $\gamma(x - y)$ est fixée d'une façon univoque, si l'on remet la fonction $\alpha(x, y)$ pour $y = a = \text{const.}$ à la condition

$$\alpha(x, a) = 0.$$

En effet, on tire de cette condition l'équation intégrale

$$\gamma(x) + \int_0^x \alpha_0(x+a, s+a)\,\gamma(s)\,ds = -\alpha_0(x+a, a)$$

dont la solution unique est

$$\gamma(x) = -\alpha_0(x+a, a) - \int_0^x \beta_0(x+a, a+s)\,\alpha_0(s+a, a)\,ds.$$

Avec telle fonction $\gamma(x-y)$ la formule (10) entraîne

$$\beta(x, a) = 0.$$

On tire de (9) la relation connue

$$\Phi(y-a; x, a) = \alpha(x, y). \tag{8}$$

5. La seconde méthode, due à M. *Pérès*[29] pour la résolution de l'équation fonctionnelle (7), est valable s'il existe dans le domaine (A')

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial x}\right) \Phi(\xi; x, y).$$

Par l'introduction d'une fonction auxiliaire

$$\Psi(\xi; x, y) = \Phi(\xi; x+\xi, y) \tag{15}$$

dans (7) on obtient l'équation

$$\Psi(\xi+\eta; x-\eta, y-\eta) = \Psi(\xi; x, y) + \Phi(\eta; x, y-\eta) + \\ + \int_y^x \Psi(\xi; x, s)\,\Phi(\eta; s, y-\eta)\,ds,$$

d'où, en dérivant par rapport à ξ et en posant $\xi = 0$, l'équation intégro-différentielle

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \Psi(\eta; x, y) = g(x+\eta, y+\eta) + \int_y^x g(x+\eta, t+\eta)\,\Psi(\eta; t, y)\,dt \tag{16}$$

avec la fonction

$$g(x, y) = \left[\frac{\partial \Psi(\xi; x, y)}{\partial \xi}\right]_{\xi=0}. \tag{17}$$

Puisque (7) entraîne, pour $\xi = \eta = 0$, la valeur

$$\Phi(0; x, y) = \Psi(0; x, y) = 0$$

[29] *J. Pérès* [13]. Dans ce cas les transformations sont dites régulières, c. f. *Volterra-Pérès* [28, chap. IV].

on tire l'équation intégrale

$$(18)\quad \begin{cases} \Psi(\eta; x, y) = \int\limits_0^{\eta} g(x+\eta_1, y+\eta_1)\, d\eta_1 + \\ + \int\limits_0^{\eta} d\eta_1 \int\limits_y^x g(x+\eta_1, s+\eta_1)\, \Psi(\eta_1; s, y)\, ds, \end{cases}$$

équivalente à la précédente (16).

Nous allons démontrer le théorème d'unicité suivant.

L'équation intégrale (18), où g est une fonction continue quelconque, admet au plus une solution $\Psi(\eta; x, y)$, continue dans le domaine tel que

$$(A')\qquad a \leqslant y \leqslant x \leqslant b, \qquad 0 \leqslant \eta \leqslant x - y.$$

Dans le cas contraire soit $\Psi_0(\eta; x, y)$ une autre solution continue de (18). La différence

$$\overline{\Psi}(\eta; x, y) = \Psi(\eta; x, y) - \Psi_0(\eta; x, y)$$

satisfait à l'équation intégrale homogène

$$(19)\qquad \overline{\Psi}(\eta; x, y) = \int\limits_0^{\eta} d\eta_1 \int\limits_y^x g(x+\eta_1, s+\eta_1)\, \overline{\Psi}(\eta_1; s, y)\, ds.$$

En nommant les modules des bornes supérieures

$$|\, g(x, y) \,| < M, \qquad |\, \overline{\Psi}(\eta; x, y) \,| < \mu$$

et en évaluant n fois le second membre de (19) on tire l'inégalité

$$|\, \overline{\Psi}(\eta; x, y) \,| < M^n \cdot \mu^n \cdot \frac{\eta^n}{n!} \cdot \frac{(x-y)^n}{n!},$$

d'où, en faisant $n \longrightarrow \infty$,

$$\overline{\Psi}(\eta; x, y) = 0.$$

Donc on a bien égalité des solutions admises

$$\Psi(\eta; x, y) \equiv \Psi_0(\eta; x, y).$$

La solution effective de (18) peut être obtenue par la méthode des approximations successives, en mettant la sous forme d'une série infinie

$$\Psi(\eta; x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(\eta; x, y)$$

dont les termes successives se calculent par

$$\Psi_n(\eta; x, y) = \int\limits_0^{\eta} d\eta_1 \int\limits_0^{\eta_1} d\eta_2 \ldots \int\limits_0^{\eta_{n-1}} d\eta_n\, \overset{*}{g}_{\eta_1} \overset{*}{g}_{\eta_2} \ldots \overset{*}{g}_{\eta_n}(x, y)\; (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

où

$$g_\eta(x, y) = g(x+\eta, y+\eta).$$

La convergence absolue et uniforme, dans le domaine (A'), de la série précédente est assurée par les inégalités

$$| \Psi_n(\eta; x, y) | < M^n \cdot \frac{\eta^n}{n!} \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

En vertu de la relation (15) on établit la solution générale de (7) sous forme

$$(20) \quad \Phi(\xi; x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\xi} d\eta_1 \int_0^{\eta_1} d\eta_2 \ldots \int_0^{\eta_{n-1}} d\eta_n \overset{*}{g}_{\eta_1} \overset{*}{g}_{\eta_2} \ldots \overset{*}{g}_{\eta_n} (x-\xi, y),$$

en regardant $g(x, y)$ comme une fonction arbitraire.

Si l'on remplace x par $x-\eta$ et η par ξ dans les équations (16) et (18), on tire les équations equivalentes

$$(21) \quad \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial x}\right) \Phi(\xi; x, y) = g(x, y+\xi) + \int_{y+\xi}^{x} g(x, s)\, \Phi(\xi; s, y)\, ds$$

et

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi(\xi; x, y) &= \int_0^{\xi} g(x-\xi+\eta, y+\eta)\, d\eta + \\ &+ \int_0^{\xi} d\eta \int_y^{x-\xi} g(x-\xi+\eta, s+\eta)\, \Phi(\eta; s+\eta, y)\, ds \end{aligned} \right.$$

qui caractérisent la fonction génératrice $\Phi(\xi; x, y)$ des transformations de M. *Pérès* régulières.

6. En posant $y = a = const.$ dans (21) et en remplaçant ξ par $y-a$ on établit la relation

$$(23) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) \alpha(x, y) = g(x, y) + \int_y^x g(x, s)\, \alpha(s, y)\, ds$$

qui existe entre les deux fonctions (8) et (17), introduites dans les deux méthodes de résolution précédentes.

Par rapport à l'inconnu $g(x, y)$ et avec les fonctions données

$$\alpha(x, y), \qquad \alpha'(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) \alpha(x, y)$$

la relation (23) représente une équation intégrale de Volterra de seconde espèce, dont la solution unique est exprimée par

$$(24) \quad g(x, y) = \alpha'(x, y) + \int_y^x \alpha'(x, s)\, \beta(s, y)\, ds$$

avec la résolvante (10).

Si l'on regarde $\alpha(x,y)$ pour l'inconnu, mais $g(x,y)$ pour la fonction donnée, on a une équation intégro-différentielle (23), dont la solution particulière, d'après (20), est

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} &\alpha_0(x,y)=\Phi(y-a;\, x,\, a)= \\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{y-a} d\eta_1 \int_0^{\eta_1} d\eta_2 \ldots \int_0^{\eta_{n-1}} d\eta_n \,.\, \overset{*}{g}_{\eta_1}\overset{*}{g}_{\eta_2}\ldots \overset{*}{g}_{\eta_n}(x-y+a,\, a) \end{aligned}\right.$$

et dont la solution générale (13) contient une fonction arbitraire $\gamma(x-y)$.

§ 10. Détermination des fonctions permutables par les transformations de M. *Pérès* et les propriétés du groupe de ces fonctions.

1. Pour déterminer tautes les fonctions $\varphi(x, y)$, permutables avec une fonction donnée $f(x, y)$ d'ordre entier positif n et de forme canonique, nous cherchons les fonctions $\alpha(x, y)$ et $\beta(x, y)$ telles que $f(x, y)$ soit représentée par la transformation de M. *Pérès*

$$(1)\qquad f(x,y)=\Omega(\overset{*}{1}{}^n)=(\overset{*}{1}{}^0+\overset{*}{\alpha})\,\overset{*}{1}{}^n\,(\overset{*}{1}{}^0+\overset{*}{\beta}).$$

Si l'on connaît $\alpha(x, y)$ et $\beta(x, y)$ on peut mettre $f(x, y)$ sous forme d'une transformation de *M. Volterra*

$$(2)\qquad f(x,y)=\frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!}+\int_0^{x-y}\frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!}\,\Phi(\xi;\, x,\, y)\,d\xi$$

où la fonction génératrice $\Phi(\xi;\, x,\, y)$ est formée (§ 9, n^0 3) à partir de $\alpha(x, y)$ et $\beta(x, y)$ de la façon suivante

$$(3)\quad \Phi(\xi;\, x,\, y)=\alpha(x,\, y+\xi)+\beta(x-\xi,\, y)+\int_y^{x-\xi}\alpha(x,\, s+\xi)\,\beta(s,\, y)\,ds.$$

Nous allons étudier d'abord le cas où $f(x, y)$ est du type spécial

$$(4)\qquad f(x,y)=\frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!}+(x-y)^{2n}\,\omega(x,y),$$

$\omega(x, y)$ étant une fonction continue, dérivable jusqu'à l'ordre $2n$. Il est connu (§ 4, n^0 4) que dans ce cas la fonction $f(x, y)$ peut âtre représentée par la série convergente

$$(5)\qquad f(x,y)=\overset{*}{1}{}^n-\overset{*}{1}{}^n\overset{*}{F}\,\overset{*}{1}{}^n+\overset{*}{1}{}^n\overset{*}{F}\,\overset{*}{1}{}^n\overset{*}{F}\,\overset{*}{1}{}^n-\ldots,$$

où la fonction $F(x, y)$ est exprimée par une autre série convergente

$$(6)\ F(x,y)=H(x,y)+\overset{*}{H}\,\overset{*}{1}{}^n\overset{*}{H}+\overset{*}{H}\,\overset{*}{1}{}^n\overset{*}{H}\,\overset{*}{1}{}^n\overset{*}{H}+\ldots\left[H=(-1)^{n-1}\frac{\partial^{2n}f}{\partial x^n\,\partial y^n}\right].$$

La série (5) est le développement commun de deux expressions symboliques

$$f(x, y) = (\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{1}{}^n \overset{*}{F})^{-1}\, \overset{*}{1}{}^n \tag{7}$$

et

$$f(x, y) = \overset{*}{1}{}^n (\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{F}\, \overset{*}{1}{}^n)^{-1}. \tag{7'}$$

Pour former l'équation à qui satisfait la fonction $\alpha(x, y)$, on compose à *droite* avec $\overset{*}{1}{}^0 + \alpha$ tous les membres de (1). En vertu des relations

$$(\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\alpha})(\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\beta}) = (\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\beta})(\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\alpha}) = \overset{*}{1}{}^0 \tag{8}$$

on obtient

$$\overset{*}{f}(\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\alpha}) = (\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\alpha})\, \overset{*}{1}{}^n.$$

Par la substitution de (7), suivie d'une composition à *gauche* avec

$$\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{1}{}^n \overset{*}{F},$$

on tire de l'équation précédente une relation

$$\overset{*}{1}{}^n \overset{*}{\alpha} - \overset{*}{\alpha}\, \overset{*}{1}{}^n = \overset{*}{1}{}^n (\overset{*}{F} + \overset{*}{F} \overset{*}{\alpha})\, \overset{*}{1}{}^n$$

que l'on peut mettre sous forme symbolique

$$\overset{*}{1}{}^{-n} \overset{*}{\alpha} - \overset{*}{\alpha}\, \overset{*}{1}{}^{-n} = -F - \overset{*}{F} \overset{*}{\alpha}.$$

Celle-ci s'écrit explicitement par une *équation intégrodifférentielle*

$$\frac{\partial^n \alpha}{\partial x^n} - (-1)^n \frac{\partial^n \alpha}{\partial y^n} = -F(x,y) - \int_y^x F(x, s)\, \alpha(s, y)\, ds \tag{9}$$

qu'il faut résoudre en $\alpha(x, y)$.

De la même façon, par la composition à *gauche* avec $\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\beta}$ et par la substitution de l'expression (7′) on trouve l'équation

$$\overset{*}{\beta}\, \overset{*}{1}{}^n - \overset{*}{1}{}^n \overset{*}{\beta} = \overset{*}{1}{}^n (\overset{*}{F} + \overset{*}{\beta} \overset{*}{F})\, \overset{*}{1}{}^n,$$

équivalente à la forme symbolique

$$\overset{*}{1}{}^{-n} \overset{*}{\beta} - \overset{*}{\beta}\, \overset{*}{1}{}^{-n} = F + \overset{*}{\beta} \overset{*}{F}$$

ou à l'*équation intégro-différentielle* analogue

$$\frac{\partial^n \beta}{\partial x^n} - (-1)^n \frac{\partial^n \beta}{\partial y^n} = F(x,y) + \int_y^x \beta(x, s)\, F(s, y)\, ds \tag{9'}$$

pour déterminer $\beta(x, y)$.

Si l'on a résolu, par exemple, l'équation (9) en $\alpha(x,y)$ on peut former directement, d'après les relations (8), la fonction

$$\beta(x,y) = -\alpha(x,y) + \overset{*}{\alpha}{}^2 - \overset{*}{\alpha}{}^3 + \dots$$

et la fonction génératrice $\Phi(\xi; x,y)$ des transformations (2) au moyen de l'expression (3).

Les équations (9) et (9') généralisent celles que M. *Pérès*[30] a établies pour la fonction $f(x,y)$ du premier ordre. Dans ce cas $(n=1)$ l'équation (9) se réduit à l'équation (23) du § 9, si l'on prend

$$g(x,y) = -F(x,y).$$

Pour que la fonction

$$\varphi(x,y) = \Omega(\lambda) = (\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\alpha})\overset{*}{\lambda}(\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\beta}) \tag{10}$$

soit permutable avec la fonction donnée (1) il est nécessaire et suffisant que

$$\overset{*}{\lambda}\overset{*}{1}{}^n = \overset{*}{1}{}^n\overset{*}{\lambda}.$$

Cette condition entraîne (§ 5, n^0 3) la forme

$$\lambda(x,y) = \lambda(x-y).$$

Donc, en prenant une fonction arbitraire $\lambda(x-y)$ du groupe du cycle fermé, on construit toutes les fonctions (10) permutables avec une fonction d'ordre n et du type spécial (4).

Les fonctions (10) jouissent la propriété du groupe remarquable: les fonctions $\varphi(x,y)$, permutables avec une fonction donnée $f(x,y)$ d'ordre n et du type spécial (4), sont permutables entre elles.

En effet, les fonctions $\lambda(x-y)$ sont permutables entre elles, et les transformations de M. *Pérès* sont isomorphes (§ 9).

La propriété du groupe énoncé dans le cas $n=1$ est établie pour la première fois par M. *Vessiot*[21].

2. En généralisant l'autre méthode, due à M. *Pérès*[31] dans le cas d'une fonction donnée du premier ordre, cherchons la fonction inconnue $g(x,y)$ dans l'expression de la fonction génératrice (§ 9)

$$\Phi(\xi; x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\xi} d\eta_1 \int_0^{\eta_1} d\eta_2 \dots \int_0^{\eta_{n-1}} d\eta_n\, \overset{*}{g}_{\eta_1}\, \overset{*}{g}_{\eta_2} \dots \overset{*}{g}_{\eta_n}(x-\xi, y) \tag{11}$$

où

$$g_\eta(x,y) = g(x+\eta, y+\eta).$$

[30] C. f. *Volterra-Pérès* [28, pages 72 et 75].

[31] *J. Pérès* [13] et *Volterra-Pérès* [28, page 65].

Pour cela il est préférable d'employer l'équation intégrale correspondante

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\Phi(\xi; x, y) = \int_0^\xi g(x-\xi+\eta, y+\eta)\, d\eta + \\ &+ \int_0^\xi d\eta \int_y^{x-\xi} g(x-\xi+\eta, s+\eta)\, \Phi(\eta; s+\eta, y)\, ds \end{aligned}\right.$$

et de mettre la fonction (2) sous forme

$$(13)\qquad f(x, y) = \overset{*}{1}{}^n + k_n(x, y)$$

avec la fonction auxiliaire

$$(14)\qquad k_n(x, y) = \int_0^{x-y} \frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!}\, \Phi(\xi; x, y)\, d\xi.$$

Par la substitution de l'expression (12) dans la formule précédente on trouve

$$k_n(x, y) = I_1 + I_2,$$

où l'on a nommé

$$I_1 = \int_0^{x-y} \frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!}\, d\xi \int_0^\xi g(x-\xi+\eta, y+\eta)\, d\eta$$

et

$$I_2 = \int_0^{x-y} \frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!}\, d\xi \int_0^\xi d\eta \int_y^{x-\xi} g(x-\xi+\eta, s+\eta)\, \Phi(\eta; s+\eta, y)\, ds.$$

Après avoir échangé l'ordre de l'intégration dans la première expression, faisons le changement des variables

$$x-\xi+\eta = s, \quad y+\eta = t.$$

Il vient

$$I_1 = \int_y^x dt \int_t^x g(s, t)\, \frac{(x-s+t-y)^{n-1}}{(n-1)!}\, ds,$$

d'où

$$I_1 = \overset{*}{1}{}^n \overset{*}{g} \overset{*}{1} + \overset{*}{1}{}^{n-1} \overset{*}{g} \overset{*}{1}{}^2 + \ldots + \overset{*}{1} \overset{*}{g} \overset{*}{1}{}^n$$

en utilisant la formule du binome

$$\frac{(x-s+t-y)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(x-s)^{n-2}}{(n-2)!}(t-y) + \ldots + \frac{(t-y)^{n-1}}{(n-1)!}$$

et les puissances entières de composition de l'unité.

Par les calculs analogues on trouve

$$I_2 = \overset{*}{1}{}^n \overset{*}{g} \overset{*}{k}_1 + \overset{*}{1}{}^{n-1} \overset{*}{g} \overset{*}{k}_2 + \ldots + \overset{*}{1} \overset{*}{g} \overset{*}{k}_n$$

où l'on a posé

$$k_p(x,y)=\int_0^{x-y}\frac{\xi^{p-1}}{(p-1)!}\Phi(\xi;x,y)\,d\xi \qquad (p=1,2,\ldots,n).$$

Donc, on a d'après (13), la relation

$$(15)\qquad f_n=\overset{*}{1}{}^n+\overset{*}{1}{}^n\overset{*}{g}\overset{*}{f}_1+\overset{*}{1}{}^{n-1}\overset{*}{g}\overset{*}{f}_2+\ldots+\overset{*}{1}\overset{*}{g}\overset{*}{f}_n$$

en posant

$$(16)\quad f_p(x,y)=\frac{(x-y)^{p-1}}{(p-1)!}+\int_0^{x-y}\frac{\xi^{p-1}}{(p-1)!}\Phi(\xi;x,y)\,d\xi \quad (p=1,2,\ldots,n)$$

et en admettant pour la symmétrie

$$f_n(x,y)=f(x,y).$$

Puisque les fonctions introduites peuvent être mises sous forme des transformations de M. *Pérès*

$$f_1(x,y)=\Omega(1),\qquad f_2(x,y)=\Omega(\overset{*}{1}{}^2),\ldots,\qquad f_n(x,y)=\Omega(\overset{*}{1}{}^n),$$

il existe les relations suivantes

$$f_2(x,y)=\overset{*}{f}_1{}^2,\ldots,\qquad f_n(x,y)=\overset{*}{f}_1{}^n.$$

En vertu du cela, on obtient de (15) l'équation

$$(17)\qquad \overset{*}{1}{}^n\overset{*}{g}\overset{*}{f}_1+\overset{*}{1}{}^{n-1}\overset{*}{g}\overset{*}{f}_1{}^2+\ldots+\overset{*}{1}\overset{*}{g}\overset{*}{f}_1{}^n=\overset{*}{f}_1{}^n-\overset{*}{1}{}^n$$

qui lie la fonction inconnue $g(x,y)$ avec la fonction

$$(18)\qquad f_1(x,y)=\Omega(1)=1+\int_0^{x-y}\Phi(\xi;x,y)\,d\xi.$$

La relation

$$\overset{*}{f}_1{}^n=f(x,y)$$

indique que la fonction (18) est une solution particulière de l'équation intégrale binome de composition

$$(19)\qquad \overset{*}{\psi}{}^n=f(x,y)$$

dont la diagonale

$$\psi(x,x)=f_1(x,x)=1.$$

Donc, dans le cas général d'une fonction donnée $f(x,y)$ d'ordre $n>1$ et de forme canonique le problème fondamental d'après la méthode précédente se réduit à la résolution de l'équation intégrale binome de composition (19) et d'une autre équation intégrale du type spécial (17).

Dans le cas particulier où $f(x,y)$ est du premier ordre ($n=1$) et de forme canonique on a seulement besoin de résoudre l'équation intégrale

$$\overset{*}{1}\overset{*}{g}\overset{*}{f}=f-1$$

que l'on peut mettre sous forme

$$\overset{*}{1}\overset{*}{g}(\overset{*}{1}{}^{0}-\overset{*}{1}\overset{*}{H})\overset{*}{1}=-\overset{*}{1}\overset{*}{H}\overset{*}{1}$$

en exprimant

$$f(x,y)=1-\overset{*}{1}\overset{*}{H}\overset{*}{1} \qquad \left(H=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right).$$

Par la dérivation par rapport à x et y on obtient l'équation équivalente

$$\overset{*}{g}(\overset{*}{1}{}^{0}-\overset{*}{1}\overset{*}{H})=-H,$$

d'où la solution

$$g(x,y)=-\overset{*}{H}(\overset{*}{1}{}^{0}-\overset{*}{1}\overset{*}{H})^{-1}=-[H(x,y)+\overset{*}{H}\overset{*}{1}\overset{*}{H}+\overset{*}{H}\overset{*}{1}\overset{*}{H}\overset{*}{1}\overset{*}{H}+\dots],$$

la série étant absolument et uniformément convergente dans le domaine de definition.

En comparant l'expression obtenue avec (6), on constate la relation

$$g(x,y)=-F(x,y).$$

Nous retrouvons le résultat suivant, dû à M. *Pérès:* Toutes les fonctions $\varphi(x,y)$, permutables avec une fonction donnée $f(x,y)$, du premier ordre et de forme canonique, peuvent être représentées par les transformations de M. *Pérès*

$$(20) \qquad \varphi(x,y)=\Omega(\lambda)=\lambda(x-y)+\int_0^{x-y}\lambda(\xi)\,\Phi(\xi;\,x,\,y)\,d\xi$$

dont la fonction génératrice (le noyau) est donnée par la série convergente

$$(21)\ \Phi(\xi;x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_0^{\xi}d\eta_1\int_0^{\eta_1}d\eta_2\dots\int_0^{\eta_{n-1}}d\eta_n\,\overset{*}{F}_{\eta_1}\overset{*}{F}_{\eta_2}\dots\overset{*}{F}_{\eta_n}(x-\xi,y)$$

où

$$F(x,y)=H(x,y)+\overset{*}{H}\overset{*}{1}\overset{*}{H}+\overset{*}{H}\overset{*}{1}\overset{*}{H}\overset{*}{1}\overset{*}{H}+\dots\left[H=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right]$$

et

$$F_{\eta}(x,y)=F(x+\eta,\,y+\eta).$$

3. La solution quelconque $\psi(x, y)$ de l'équation intégrale (19) est dite la puissance fractionnaire de composition:

$$\psi(x, y) = \overset{*}{f}{}^{\frac{1}{n}}.$$

Si $f(x, y)$ est d'ordre entier positif n, la fonction $\psi(x, y)$ est nécessairement (§ 2) du premier ordre.

L'équation intégrale (19) peut être résolue toutes les fois qu'on a la représentation par les transformations de M. *Pérès* (1) ou (2), par exemple, pour la fonction $f(x, y)$ du type spécial (4). Par emploi des propriétés des transformations Ω qui conservent la composition on peut exprimer $\psi(x, y)$ par

$$\psi(x, y) = \overset{*}{f}{}^{\frac{1}{n}} = \varepsilon\,\Omega(1) \tag{22}$$

avec ε qui représente la racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité:

$$\varepsilon^n = 1.$$

Ici la solution particulière

$$\Omega(1) = (\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\alpha})\,\overset{*}{1}\,(\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\beta})$$

ou

$$\Omega(1) = 1 + \int_0^{x-y} \Phi(\xi; x, y)\, d\xi$$

est formée avec les fonctions $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ et $\Phi(\xi; x, y)$, tirées de (1) et (2).

Aux diverses déterminations de ε correspondent n solutions distinctes de l'équation (19) ou du symbole $\overset{*}{f}{}^{\frac{1}{n}}$. La diagonale de la fonction (22) est constante et égale à ε:

$$\psi(x, x) = \varepsilon.$$

M. *Volterra*[32] a posé la question suivante: les fonctions permutables avec une fonction donnée $f(x, y)$, sont-elles aussi permutables avec la puissance fractionnaire $\overset{*}{f}{}^{\frac{1}{n}}$ de composition? Il est évident que dans le cas mentionné précédemment la réponse doit être affirmative.

---

[32] *Volterra* [29]. Cette même question est traitée dans mon travail [8, § 3].

Conclusions.

1. Dans le cas général d'une fonction $f(x, y)$ d'ordre entier positif n et de forme canonique on peut exprimer le symbole $\overset{*}{f}{}^{-1}$ d'inversion de la composition par les formules

(1) $$\overset{*}{f}{}^{-1} = \overset{*}{1}{}^{-n} + a_2(x)\,\overset{*}{1}{}^{-n+2} + \ldots + a_n(x)\,\overset{*}{1}{}^{0} + F(x,y)$$

et

(1') $$\overset{*}{f}{}^{-1} = \overset{*}{1}{}^{-n} + b_2(y)\,\overset{*}{1}{}^{-n+2} + \ldots + b_n(y)\,\overset{*}{1}{}^{0} + F(x,y),$$

où les fonctions

(2) $$a_2(x), \ldots, a_n(x); \quad b_2(y), \ldots, b_n(y); \quad F(x, y)$$

sont déterminées par emploi de la fonction $f(x, y)$ et de ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre $2n$.

Pour le type spécial

(3) $$f(x,y) = \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} + (x-y)^{2n}\,\omega(x,y)$$

il existe l'expression commune

(4) $$\overset{*}{f}{}^{-1} = \overset{*}{1}{}^{-n} + F(x,y),$$

où la fonction $F(x,y)$ est représentée par la série

(5) $$F(x,y) = H(x,y) + \overset{*}{H}\overset{*}{1}{}^{n}\overset{*}{H} + \overset{*}{H}\overset{*}{1}{}^{n}\overset{*}{H}\overset{*}{1}{}^{n}\overset{*}{H} + \ldots \quad \left[H = (-1)^{n-1}\frac{\partial^{2n} f}{\partial x^n\,\partial y^n}\right]$$

absolument et uniformément convergente.

2. Toutes les fonctions continues $\varphi(x,y)$ permutables avec la fonction

(6) $$f(x,y) = g(x)\,h(y) \qquad [g(x) \neq 0, \quad h(x) \neq 0]$$

du premier ordre ou avec la fonction

(6') $$f(x,y) = g(x)\,h(y)\,\frac{[l(x) - l(y)]^{n-1}}{(n-1)!}$$

d'ordre supérieur sont représentées par

(7) $$\varphi(x,y) = g(x)\,h(y)\,\Theta[l(x) - l(y)],$$

où Θ est une fonction arbitraire et $l(x)$ est donnée par

(8) $$l(x) = \int g(x)\,h(x)\,dx.$$

3. En le cas d'une fonction donnée $f(x,y)$ de premier et de second ordre on peut réduire le problème fondamental [trouver toutes les fonctions $\varphi(x,y)$ permutables avec $f(x,y)$] par l'introduction d'une inconnue auxiliaire

$$(9) \qquad \psi(x,y) = \int_y^x \varphi(x,s) f(s,y)\, ds = \int_y^x f(x,s)\, \varphi(s,y)\, ds$$

et son expression

$$(10) \qquad \psi(x,y) = \int_y^x \lambda(\xi)\, K(\xi; x,y)\, d\xi \qquad [\lambda = \lambda(x-y)]$$

à la résolution de l'équation intégrale qui caractérise la fonction $K(\xi; x,y)$. L'équation intégrale mentionnée admet, à des conditions convenables, une solution continue et une seule.

4. Toutes les fonctions continues $\varphi(x,y)$ permutables avec une fonction $f(x,y)$ du second ordre peuvent être exprimées par la formule

$$(11) \qquad \varphi(x,y) = \lambda(x-y) + \int_0^{x-y} \lambda(\xi)\, \Phi(\xi; x,y)\, d\xi,$$

due à M. *Volterra,* en désignant par $\lambda(x-y)$ une fonction arbitraire du groupe du cycle fermé et en formant le noyau (ou la fonction génératrice) $\Phi(\xi; x,y)$ à partir de la fonction donnée $f(x,y)$. Toutes les propriétés des fonctions $\varphi(x,y)$ qui reposent sur la formule (11) sont les mêmes que celles des fonctions permutables avec une fonction du premier ordre.

5. On peut réduire le problème fondamental dans le cas général d'une fonction donnée $f(x,y)$ d'ordre n et de forme canonique à la résolution d'une équation intégrale en partant de l'équation symbolique

$$(12) \qquad \overset{*}{f}{}^{-1}\overset{*}{\psi} - \overset{*}{\psi}\overset{*}{f}{}^{-1} = 0$$

qui est vérifiée par les fonctions (9).

L'équation symbolique du type (12), ainsi que sa forme explicite par une équation intégro-différentielle, caractérise aussi les fonctions $\varphi(x,y)$ permutables avec $f(x,y)$.

Dans le cas particulier où $f(x,y)$ est une fonction du groupe du cycle fermé, les fonctions $\varphi(x,y)$ appartiennent au même groupe.

6. En se servant des transformations

$$(13) \qquad \Omega(\lambda) = (\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\alpha})\overset{*}{\lambda}(\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\beta}) \qquad [(\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\alpha})(\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\beta}) = (\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\beta})(\overset{*}{1}{}^0 + \overset{*}{\alpha}) = \overset{*}{1}{}^0]$$

de *M. Pérès* on peut réduire le problème fondamental dans le cas particulier d'une fonction donnée

$$f(x,y) = \Omega(\overset{*}{1}{}^n) \tag{14}$$

sous forme (3) à la résolution des équations intégro-différentielles

$$\frac{\partial^n \alpha}{\partial x^n} - (-1)^n \frac{\partial^n \alpha}{\partial y^n} = -F(x,y) - \int_y^x F(x,s)\,\alpha(s,y)\,ds, \tag{15}$$

ou

$$\frac{\partial^n \beta}{\partial x^n} - (-1)^n \frac{\partial^n \beta}{\partial y^n} = F(x,y) + \int_y^x \beta(x,s)\,F(s,y)\,ds, \tag{15'}$$

où $F(x, y)$ est la fonction (5).

7. En généralisant une méthode de *M. Pérès*, on peut réduire le problème fondamental dans le cas général d'une fonction donnée $f(x, y)$ d'ordre $n\,(n > 1)$ et de forme canonique à la résolution d'une équation intégrale binome

$$\overset{*}{\psi}{}^n = f(x,y) \tag{16}$$

de composition et d'une équation intégrale du type spécial

$$\overset{*}{1}{}^n \overset{*}{g} \overset{*}{f}_1 + \overset{*}{1}{}^{n-1} \overset{*}{g} \overset{*}{f}{}_1^2 + \ldots + \overset{*}{1} \overset{*}{g} \overset{*}{f}{}_1^n = \overset{*}{f}{}_1^n - \overset{*}{1}{}^n \tag{17}$$

où les inconnues sont respectivement $\psi(x, y)$, $g(x, y)$ et où $f_1(x, y)$ est la solution particulière de (16) telle que la diagonale $f_1(x, x) = 1$.

8. Toutes les fois qu'on peut représenter la fonction $f(x, y)$ d'ordre n et de forme canonique par la transformation (14) de *M. Pérès* les fonctions permutables avec $f(x, y)$ sont aussi permutables avec la puissance fractionnaire $\overset{*}{f}{}^{\frac{1}{n}}$ de composition.

Permutablo funkciju teōrijas pamatproblēma.

A. Lūsis.

Slēdzieni.[33]

1. Vispārīgajā gadījumā, kad $f(x, y)$ ir n. kārtas (n—vesels pozitīvs skaitlis) un kanoniskās formas funkcija, kompozicijas inversijas simbolu $\overset{*}{f}{}^{-1}$ noteic ar formulām (1) un (1'), kuŗās funkcijas (2) ir aprēķināmas ar doto funkciju $f(x, y)$ un tās parciāliem atvasinājumiem līdz kārtai $2n$.

Speciālā veida funkcijai (3) der simbola $\overset{*}{f}{}^{-1}$ kopīga izteiksme (4), kuŗā funkciju $F(x, y)$ noteic ar absolūti un vienmērīgi savirzāmu rindu (5).

2. Visas nepārtrauktas funkcijas $\varphi(x, y)$, kas permutablas ar pirmās kārtas funkciju (6) vai ar augstākās kārtas funkciju (6'), ir aprēķināmas pēc formulas (7), kuŗā Θ apzīmē patvaļīgu funkciju un $l(x)$—funkciju (8).

3. Gadījumos, kad $f(x, y)$ ir dotā pirmās vai otrās kārtas un kanoniskās formas funkcija, pamatproblēmu [noteikt visas funkcijas $\varphi(x,y)$, kas permutablas ar $f(x,y)$] var reducēt uz funkcijas $K(\xi; x, y)$ raksturīgā integrālvienādojuma atrisināšanu, lietojot jaunās nezināmās funkcijas (9) izteiksmi (10).

Minētajam integrālvienādojumam ar vajadzīgiem nosacījumiem eksistē viens vienīgs nepārtraukts atrisinājums.

4. Visas nepārtrauktās funkcijas $\varphi(x, y)$, kas permutablas ar doto otrās kārtas un kanoniskās formas funkciju $f(x, y)$, ir aprēķināmas pēc *Volterra* formulas (11), kuŗā $\lambda(x-y)$ ir patvaļīga noslēgta cikla grupas funkcija un kodols (jeb veidotājas funkcija) $\Phi(\xi; x, y)$ sastādāms no dotās funkcijas $f(x, y)$. Visas funkciju $\varphi(x, y)$ īpašības, kas pamatojas uz formulu (11), ir tādas pat kā funkcijām, kas permutablas ar pirmās kārtas funkciju.

5. Vispārīgajā gadījumā, kad $f(x, y)$ ir dotā n. kārtas un kanoniskās formas funkcija, pamatproblēmu var reducēt uz integrālvienādojuma atrisināšanu, lietojot funkcijas (9) simbolisko pamatvienādojumu (12).

[33] Te minētās formulas un izteiksmes sk. franču tekstā.

Simboliskā vienādojuma tips (12) un tā atklātais veids ar integrodiferenciālo vienādojumu ir raksturīgs arī funkcijām $\varphi(x, y)$, kas permutablas ar $f(x, y)$.

Speciālajā gadījumā, kad $f(x, y)$ ir noslēgta cikla grupas funkcija, arī $\varphi(x, y)$ pieder šai grupai.

6. Gadījumā, kad dotai funkcijai (14) ir speciāls veids (3), pamatproblēmu ar *Pérès* transformācijām (13) reducē uz integrodiferenciālā vienādojuma (15) vai (15′) atrisināšanu, ja $F(x, y)$ apzīmē funkciju (5).

7. Vispārīgajā gadījumā, kad $f(x, y)$ ir n kārtas ($n > 1$) un kanoniskās formas funkcija, pamatproblēma pēc vispārinātās *Pérès* metodes reducējama uz kompozicijas binomālā integrālvienādojuma (16) un īpatnējā integrālvienādojuma (17) atrisināšanu, ja par nezināmo funkciju uzskata $\psi(x, y)$, resp. $g(x, y)$ un ar $f_1(x, y)$ apzīmē vienādojuma (16) partikulāro atrisinājumu, kam diagonāle $f_1(x, x) = 1$.

8. Visos gadījumos, kad n kārtas un kanoniskās formas funkciju $f(x, y)$ var attēlot ar *Pérès* transformāciju (14), funkcijas, kas permutablas ar $f(x, y)$, ir arī permutablas ar tās kompozicijas pakāpi $\overset{*}{f}{}^{\frac{1}{n}}$.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.
LITERĀTŪRAS SARAKSTS.

1. Bompiani (E.) — Sopra le funzioni permutabili. (*Rend. Ac. Lincei,* vol. XIX, ser. 5a, 1910).
2. Davis (H. T.) — The present status of integral equations. (*Indiana Univ. Stud.,* n⁰ 70, 1926).
3. Evans (G. C.) — Sopra algebra delle funzioni permutabili. (*Mem. Ac. Lincei,* vol. VIII, serie 5a, 1911).
4. Evans (G. C.) — L'algebra delle funzioni permutabili e non permutabili. (*Rend. Circ. Mat. Palermo,* vol. XXXIV, 1912).
5. Evans (G. C.) — Theory and application of functionals, including integral equations (*Amer. Math. Soc.,* Cambridge Colloqium, 1918).
6. Hellinger (E.), Toeplitz (O.) — Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten (*Enzykl. der Math. Wiss.,* Bd. II C 13).
7. Lalesco (T.) — Introduction à la théorie des équations intégrales (Paris, 1912).
8. Lūsis (A.) — Permutablas funkcijas un Volterra integrālvienādojums (Sur les fonctions permutables et l'équation intégrale de Volterra, *Acta Univ. Latviensis,* t. XVII, 1927).
9. Lūsis (A.) — Sur la recherche des fonctions permutables de 1-ière espèce avec une fonction donnée. (*Rend. Ac. Lincei,* vol. XI, serie 6a, 1930).
10. Lūsis (A.) — Sur la recherche des fonctions permutables de première espèce. (*Annales Fac. Sc. Toulouse,* t. XXII, 1930).
11. Pérès (J.) — Sur les fonctions permutables de première espèce de M. Vito Volterra. (*Thèse, Journ. de Math.,* 7-ième série, vol. I, 1915).
12. Pérès (J.) — Sur la composition de 1-ière espèce: les fonctions d'ordre quelconque et leur composition (2 notes). (*Rend. Ac. Lincei,* vol. XXVI, série 5a, 1917).
13. Pérès (J.) — Sur certaines transformations fonctionnelles et leur application à la théorie des fonctions permutables. (*Ann. École Normale supér.,* vol. XXXVI, 1919).
14. Pérès (J.) — Sur les transformations qui conservent la composition. (*Bull. Soc. Math. France,* vol. XLVII, 1919).
15. Pérès (J.) — Sulla teoria delle funzioni permutabili. (*Rend. Seminario Mat., Roma,* vol. VI, 1920).
16. Pérès (J.) — Quelques complements sur les transformations qui conservent la composition. (*Rend. Ac. Lincei,* série 5a, vol. XXXIII, 1924).
17. Soula (J.) — L'équation intégrale de première espèce à limites fixes et les fonctions permutables à limites fixes. (*Mémorial des Sc. Math.,* fasc. LXXX, 1936).

18. V e s s i o t (E.) — Sur les groupes fonctionnels et les équations intégro-différentielles linéaires. (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, Vol. 154, 1912).

19. V e s s i o t (E.) — Sur les fonctions permutables et les groupes continus de transformations fonctionnelles linéaires. (*C. R. Acad. Sc., Paris,* vol. 154, 1912).

20. V o l t e r r a (V.) — Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali. (*Rend. Ac. Lincei,* 5a serie, vol. XIX, 1910).

21. V o l t e r r a (V.) — Sopra le funzioni permutabili. (*Rend. Ac. Lincei,* serie 5a, vol. XIX, 1910).

22. V o l t e r r a (V.) — Contributo allo studio delle funzioni permutabili. (*Rend. Ac. Lincei,* serie 5a, vol. XX, 1911).

23. V o l t e r r a (V.) — Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles. (*Coll. Borel,* Paris, 1913).

24. V o l t e r r a (V.) — Leçons sur les fonctions de lignes. (*Coll. Borel,* Paris, 1913).

25. V o l t e r r a (V.) — Les problèmes qui ressortent du concept de fonction de ligne. (*Sitzungsber. Berliner Math. Ges.*, XIII J. g., 1914).

26. V o l t e r r a (V.) — The theory of permutable functions. (Princeton, 1915).

27. V o l t e r r a (V.) — Teoria delle potenze, dei logaritmi e delle funzioni di composizione. (*Memorie Ac. Lincei,* serie 5a, vol. XI, 1916).

28. V o l t e r r a (V.) et P é r è s (J.) — Leçons sur la composition et les fonctions permutables. (*Coll. Borel,* Paris, 1924).

29. V o l t e r r a (V.) — Sur les fonctions permutables. (*Bull. Soc. Math. France,* vol. LII, 1924).

30. V o l t e r r a (V.) — Theory of functionals and of integral and integro-differential equations. (London, 1930).

31. V o l t e r r a (V.) et P é r è s (J.) — Théorie générale des fonctionnelles. T. I. (*Coll. Borel,* Paris, 1936).

Présenté à la Faculté le 25 mars 1938.

0.50

Rīgā, Latgales ielā 11