

423

LATVIJAS
ŪNIVERSITĀTES RAKSTI
ACTA UNIVERSITATIS LATVIENSIS

MATĒMATIKAS UN DABAS ZINĀTŅU
FAKULTĀTES SERIJA

III. SEJUMS
TOMUS

№ 1—5

LATVIJAS ŪNIVERSITĀTE

R I G Ā, 1 9 3 8

p. 44
1446

8

IMI ZIATNICKA
P. 44
642-22-88

Sur la rotation permanente des ellipsoïdes hétérogènes

par *A. Putnis.*

Introduction.

Ce travail est une étude de rotations permanentes d'une masse fluide soumise à l'attraction mutuelle de ses particules, en supposant que la surface libre est un ellipsoïde de révolution aplati à pression constante. Ce problème est lié aux questions de la théorie des figures d'équilibre.

L'origine des travaux mathématiques sur les figures d'équilibre des masses fluides remonte à Newton. Dans ce problème on considère une masse fluide de densité ρ , qui tourne autour d'un axe fixe avec une vitesse angulaire ω uniforme, isolée dans l'espace et soumise seulement à l'attraction réciproque de toutes ses parties. Il s'agit d'étudier la figure d'équilibre relatif que prendra la surface extérieure de la masse, par rapport à des axes tournant avec elle, en bloc.

Maclaurin dans son „Traité des fluxions“ (1742) montra que pour $\rho = \text{const}$ et $\omega = \text{const}$ la surface libre peut prendre la forme d'un ellipsoïde de révolution aplati.

Jacobi (1842) généralisa ce resultat pour des ellipsoïdes à trois axes inégaux. Enfin H. Poincaré et Liapounoff ont montré, à peu près en même temps, qu'il y avait, dans les séries de figures de masses fluides homogènes d'équilibre une infinité d'ellipsoïdes critiques, qui pouvaient se déformer en donnant d'autres figures d'équilibre différentes, dérivées de ces ellipsoïdes en des points de bifurcation.

Pour une masse hétérogène, où la densité est différente dans les différents points du fluide, le problème est plus difficile et beaucoup moins étudié que le précédent. Cependant, c'est le seul qui soit applicable à l'étude de la figure de la Terre et des planètes.

Dans cette direction Clairaut est le premier qui dans son ouvrage „Figure de la Terre tirée des principes de l'Hydrostatique“ (1743) ait donné une solution remarquable du problème, en supposant la figure d'équilibre voisine de celle d'une sphère et la masse constituée par des couches homogènes ellipsoïdales peu aplaties. Il résout le problème dans le cas d'une vitesse faible et uniforme dans toute la masse. Laplace démontra qu'un sphéroïde fluide tournant en bloc ne pouvait être stratifié qu'en couches ellipsoïdales. Mais Laplace a utilisé des développements divergents sans démontrer que ce procédé est applicable dans ce cas. Enfin M. Wavre a repris le problème et par son procédé uniforme (n'employant qu'un seul développement, et toujours convergent, de l'inverse de la distance) a obtenu toute approximation nécessaire.

Un fluide est dit en rotation permanente autour d'un axe fixe z , si toutes les particules, situées sur une même circonférence perpendiculaire à z et centrée sur cet axe, ont la même densité et décrivent cette courbe avec une même vitesse indépendante du temps. Les différentes particules qui se succèdent en un même point de l'espace ont donc même vitesse et même densité. Ce mouvement est permanent au sens de la mécanique des fluides. Si la vitesse angulaire est uniforme dans toute l'étendue du fluide, on a l'équilibre relatif. Mais on peut supposer la vitesse angulaire variable d'une circonférence à une autre. C'est le cas de rotations permanentes de fluides parfaits que nous étudions dans ce travail.

Par son procédé uniforme M. Wavre¹ a étudié les rotations permanentes barotropes, où la vitesse angulaire ne dépend que de la distance à l'axe de rotation.

M. Dive² a ouvert un nouveau champ de recherches en établissant les équations pour les rotations permanentes générales et a traité au fond le mouvement dans le cas d'une stratification rigoureusement ellipsoïdale.

M. Véronnet dans sa thèse³ et tout récemment dans le *Traité de Mécanique rationnelle* de M. Appell (T. IV, fasc. II, 1937) a fait l'étude de rotations permanentes en général, dans le cas de stratifications ellipsoïdales et particulièrement dans le cas où l'on néglige le carré ou

¹ Figures planétaires et géodésie, Paris 1932.

² Rotations internes des astres fluides, Thèse, Dunod édit., Paris 1930.

³ Rotation de l'ellipsoïde hétérogène, Thèse, Journal de Mathématiques T. VIII, 1912.

le cube de l'aplatissement. Mais M. Véronnet a commis une erreur dans le problème de rotations permanentes, signalée déjà par M. Dive et M. Wavre.

Dans ce mémoire nous utiliserons la théorie générale de M. Dive à partir de laquelle il est possible de calculer la vitesse angulaire, si la stratification est donnée et le potentiel newtonien créé par cette stratification connu. En supposant que la surface libre de la masse fluide est un ellipsoïde de révolution aplati, nous calculons le potentiel newtonien d'un ellipsoïde hétérogène en utilisant les développements en coordonnées semi-elliptiques de l'inverse de la distance entre deux points. Un pareil développement a été donné pour la première fois par F. Neumann⁴. En supposant les stratifications de révolution autour de l'axe polaire de l'ellipsoïde (axe des z), symétriques par rapport à l'équateur et développables en une somme de polynômes de Legendre (donc des stratifications plus générales que celles étudiées jusqu'au présent), nous donnons une expression explicite du carré de la vitesse angulaire. L'expression du potentiel que nous utilisons dans ce travail permet de traiter aussi le cas de la surface libre de densité variable.

Si l'aplatissement de la surface libre est petit et si la stratification est ellipsoïdale en première approximation, nos formules se simplifient considérablement et nous retrouvons la formule de Clairaut pour le carré de la vitesse angulaire dans le cas de l'équilibre relatif. Ensuite nous étudions les rotations permanentes au cas de stratifications ellipsoïdales en première ou en seconde approximation et nous trouvons des solutions différant de celles de M. Véronnet.

Nous étudions aussi des stratifications en première approximation ellipsoïdales, la surface libre étant de densité variable, et nous consacrons un paragraphe à l'étude des stratifications en seconde approximation non ellipsoïdales qui donnent des lois de rotation intéressantes.

Enfin, sans faire aucune hypothèse sur la stratification et sur le mouvement à l'intérieur de la masse fluide, nous donnons l'expression explicite du potentiel newtonien à l'extérieur de l'ellipsoïde et de la pesanteur sur la surface libre dans le cas de rotation permanente.

Nous sommes heureux de pouvoir exprimer ici notre gratitude à M. Rolin Wavre. Nous devons beaucoup à ses conseils et nous n'oublions pas l'appui qu'il nous a témoigné.

Nous tenons à remercier également M. Dive qui nous fit bénéficier de ses conseils précieux.

⁴ Crelles Journal, vol. XXVII, 1848, p. 21.

Chapitre I.

Les équations de l'hydrodynamique et le potentiel newtonien.

§ 1. Les équations de l'hydrodynamique.

Voici d'abord, dans les § 1, 2, 3, un rapide rappel de la théorie et des formules fondamentales de M. Dive.

Désignons par ρ , p , ω et U la densité, la pression, la vitesse angulaire et la fonction des forces dues à l'attraction mutuelle des masses et par x , y , z les coordonnées cartésiennes du point considéré.

Les équations générales de l'hydrodynamique appliquées aux mouvements de rotation permanente autour de l'axe z s'écrivent:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} + \omega^2 x, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} + \omega^2 y, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z}. \end{cases}$$

La stratification étant de révolution, les fonctions ρ , p , ω et U ne dépendent que de la cote z et du carré l^2 de la distance du point considéré à l'axe de rotation, et les équations (1) se réduisent à

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l^2} = \frac{\partial U}{\partial l^2} + \frac{\omega^2}{2}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z}, \end{cases}$$

à partir desquelles on a

$$(3) \quad dp = \rho \left[\left(\frac{\partial U}{\partial l^2} + \frac{\omega^2}{2} \right) dl^2 + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right].$$

Ici le premier membre est la différentielle totale exacte de p , et la densité ρ doit être un facteur intégrant, ce qui s'exprime par la condition

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\rho \left(\frac{\partial U}{\partial l^2} + \frac{\omega^2}{2} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial l^2} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial z} \right)$$

ou

$$(4) \quad \frac{\partial \rho}{\partial l^2} \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial l^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (\rho \omega^2).$$

La première partie de cette équation est un Jacobien, et on peut écrire

$$(4') \quad 2 \frac{D(\rho, U)}{D(l^2, z)} = \frac{\partial}{\partial z} (\rho \omega^2).$$

Cette équation est due à M. Dive.⁵

En établissant l'équation (4') aucune hypothèse sur l'équation caractéristique du fluide n'est faite. Si l'on suppose que la pression ne dépend que de la densité, l'équation caractéristique s'écrit

$$p = f(\rho).$$

Dans ce cas les surfaces d'égale pression et de densité constante coïncident et d'après la théorie générale de M. Wavre⁶

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = 0,$$

et à partir de (4) on a

$$(5) \quad \omega^2 = \frac{\frac{\partial \rho}{\partial l} \frac{\partial U}{\partial z}}{l \frac{\partial \rho}{\partial z}} - \frac{1}{l} \frac{\partial U}{\partial l}.$$

Mais on peut se poser dans des conditions plus larges et supposer qu'en général les surfaces d'égale densité et d'égale pression ne coïncident pas. Cela revient à demander que dans l'équation caractéristique la pression soit fonction non seulement de ρ , mais encore de quelques paramètres, qui peuvent être déterminés par l'état thermique et la constitution chimique du fluide. Dans ce cas il faudra utiliser l'équation (4') de M. Dive au lieu de (5) et obtenir ω^2 en intégrant dans une direction parallèle à l'axe des z .

Ce sont les rotations permanentes baroclines ou les rotations permanentes générales, et nous consacrerons la plus grande partie de notre travail à l'étude de ces mouvements.

Il faut remarquer que dans l'équation (4') la pression n'intervient pas, et en connaissant la stratification on peut déterminer la vitesse angulaire sans connaître l'équation caractéristique, c'est-à-dire, sans faire des hypothèses sur l'état thermique et la constitution chimique du fluide.

⁵ P. Dive, *Mouvements internes les plus généraux d'une masse fluide hétérogène autour d'une axe*. Comptes rendus, Paris, 185, 1927.

⁶ R. Wavre, *Figures planétaires et géodésie*, Paris, 1932., p. 30.

§ 2. La transformation des coordonnées.

Nous utiliserons dans cette recherche les coordonnées r, ϑ, φ dites semi-elliptiques,⁷ liées aux coordonnées cartésiennes par les relations

$$(6) \quad \begin{cases} x = \sqrt{r^2 + e^2} \sin \vartheta \cos \varphi, \\ y = \sqrt{r^2 + e^2} \sin \vartheta \sin \varphi, \\ z = r \cos \vartheta. \end{cases}$$

De là nous avons

$$\frac{x^2 + y^2}{r^2 + e^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1,$$

c'est-à-dire que l'équation $r = s = \text{const}$ détermine un ellipsoïde de révolution aplati de demi axe polaire s et d'excentricité linéaire e .

Nous ne considérons que des stratifications de révolution, ce qui permet d'utiliser la coordonnée $l^2 = x^2 + y^2$ au lieu de x et y , et les formules (6) s'écrivent

$$\begin{cases} l^2 = (r^2 + e^2) \sin^2 \vartheta, \\ z = r \cos \vartheta, \end{cases}$$

à partir desquelles on a

$$z^2 = r^2 \left(1 - \frac{l^2}{r^2 + e^2} \right).$$

Considérons l^2 et r comme variables indépendantes et transformons l'équation (4') en ces coordonnées; nous avons

$$\frac{\partial}{\partial r} [\rho \omega^2(r, l^2)] = \frac{\partial}{\partial z} [\rho \omega^2(z, l^2)] \frac{\partial z}{\partial r};$$

et, d'après les lois de transformation de Jacobiens

$$\frac{D(\rho, U)}{D(l^2, r)} = \frac{D(\rho, U)}{D(l^2, z)} \cdot \frac{D(l^2, z)}{D(l^2, r)},$$

où

$$\frac{D(l^2, z)}{D(l^2, r)} = \frac{\partial z}{\partial r}.$$

Ainsi nous avons

$$(7) \quad \frac{D(\rho, U)}{D(l^2, r)} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho \omega^2).$$

Dans cette équation on peut donner à la coordonnée r une signification plus générale, en supposant que c'est un paramètre définissant

⁷ D'après *M. Munk*, *Aerodynamic Theory*, *W. F. Durand*, Editor-in-Chief, Berlin, 1934.

une famille de surfaces, par exemple les surfaces d'égale densité, les surfaces d'égale pression ou d'autres surfaces encore. Les transformations précédentes subsistent et l'équation ci-dessus est encore valable.

§ 3. La vitesse angulaire et l'existence du mouvement.

Posons

$$\Phi(r, l^2) = \frac{D(\rho, U)}{D(l^2, r)}.$$

En intégrant (7) par rapport à r on obtient $\rho\omega^2$ à une fonction additive de l^2 près. Cette fonction additive est déterminée par la connaissance de la densité et de la vitesse angulaire sur la surface libre qu'on suppose à pression constante, et le carré de la vitesse angulaire dans un point intérieur s'écrit

$$(8) \quad \omega^2 = \frac{\rho_s}{\rho} \omega_s^2 - \frac{2}{\rho} \int_r^s \Phi(r, l^2) dr,$$

où s désigne la valeur de r sur la surface libre et ρ_s et ω_s^2 la densité et le carré de la vitesse angulaire dans le point correspondant sur la surface libre.

L'équation (7) s'écrit encore

$$(9) \quad \rho \frac{\partial \omega^2}{\partial r} + \omega^2 \frac{\partial \rho}{\partial r} = 2 \Phi(r, l^2).$$

En comparant les équations (8) et (9), ou en dérivant (8) on a

$$(10) \quad \frac{\partial \omega^2}{\partial r} = -\frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\rho_s}{\rho^2} \omega_s^2 + \frac{2}{\rho} \Phi(r, l^2) + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial r} \int_r^s \Phi(r, l^2) dr,$$

où la dérivée est prise en gardant l^2 invariable, c'est-à-dire dans la direction parallèle à l'axe de rotation.

Si la surface libre appartient à la famille déterminée par le paramètre r on a $s = \text{const}$.

En désignant par r le paramètre qui détermine les surfaces d'égale pression, c'est-à-dire si l'on a $p = p(r)$, on obtient une forme simple de ω^2 et $\frac{\partial \omega^2}{\partial r}$. Dans ce cas à partir de

$$dp = \rho \left(dU + \frac{\omega^2}{2} dl^2 \right),$$

en effectuant le déplacement sur la surface d'égale pression, c'est-à-dire en posant $dp = 0$ et $dr = 0$, on a

$$(11) \quad \omega^2 = -2 \frac{\partial U}{\partial l^2},$$

formule qui est valable dans toute l'étendue du fluide.⁸

D'après (9) la dérivée partielle de cette fonction s'écrit:

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial r} = 2 \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial U}{\partial l^2} + 2 \left[\frac{\partial \rho}{\partial l^2} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial U}{\partial l^2} \right]$$

ou

$$(11') \quad \frac{\partial \omega^2}{\partial r} = \frac{2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial l^2} \frac{\partial U}{\partial r};$$

si $\frac{\partial \rho}{\partial l^2} = 0$, c'est-à-dire si les couches d'égale densité et d'égale pression coïncident, on a $\frac{\partial \omega^2}{\partial r} = 0$ et la vitesse angulaire ne varie pas dans la direction parallèle à l'axe de rotation en cette couche. M. Dive^{8'} a exprimé ce fait par une formule différente de (11').

Pour l'existence du mouvement il faut et il suffit que $\omega^2 > 0$ et que la pression soit positive dans tout point du fluide. M. Dive a démontré que, si la surface libre est convexe et la densité croissante en profondeur sur chaque parallèle à l'axe de rotation, la pression est positive dans tout le domaine du fluide sauf, éventuellement, sur la surface libre où elle peut s'annuler.

En coordonnées r, l , que nous utiliserons dans la suite, cette condition s'écrit

$$\frac{\partial \rho(r, l^2)}{\partial r} > 0.$$

§ 4. Potentiel newtonien à l'intérieur d'un ellipsoïde hétérogène de révolution.

Si la stratification est de révolution, la densité n'est fonction que de deux coordonnées semi-elliptiques r, ϑ . Nous supposons la densité exprimée dans la forme

⁸ cf. P. Dive, Rotations internes des astres fluides, Thèse, Dunod edit., Paris, 1930, p. 12.

^{8'} Ibid. pag. 24, form. (52).

$$(12) \quad \rho = \sum_{n=0}^m \alpha_n(r) P_n(\cos \vartheta),$$

où $\alpha_n(r)$ sont des fonctions continues de r seulement et $P_n(\cos \vartheta)$ le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Legendre qu'on peut écrire:

$$(13) \quad P_n(\cos \vartheta) = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{1.2.3 \dots n} \left\{ \cos^n \vartheta - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \cos^{n-2} \vartheta + \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^k \frac{n(n-1) \dots (n-2k+1)}{2.4 \dots 2k.(2n-1)(2n-3) \dots (2n-2k+1)} \cos^{n-2k} \vartheta + \dots \right\},$$

où n et k sont des entiers positifs, et $n \geq 2k$.

Si la répartition de la densité est symétrique par rapport à l'équateur de l'ellipsoïde, on a

$$\sum_{n=0}^m \alpha_n P_n(\cos \vartheta) = \sum_{n=0}^m \alpha_n P_n(-\cos \vartheta).$$

En vertu de la relation

$$P_n(-\cos \vartheta) = (-1)^n P_n(\cos \vartheta),$$

on a

$$\sum_{n=0}^m [\alpha_n - (-1)^n \alpha_n] P_n(\cos \vartheta) = 0.$$

Donc

$$\alpha_n [1 - (-1)^n] = 0,$$

et pour n impair on a $\alpha_n = 0$, ce qui permet d'écrire la loi de densités sous la forme

$$(14) \quad \rho = \sum_{n=0}^m \alpha_{2n}(r) P_{2n}(\cos \vartheta),$$

que nous adoptons dans ce travail.

Par cette loi de densités en prenant m assez grand (mais toujours fini), il est possible de représenter des stratifications assez voisines d'une stratification quelconque donnée (la dernière étant de révolution, symétrique par rapport à l'équateur, continue et à variation bornée) — en vertu d'un théorème sur la convergence de séries de polynômes de Legendre.

Pour déterminer la fonction des forces ou le potentiel newtonien dû à l'attraction mutuelle des particules du fluide considérée dans un point à l'intérieur de l'ellipsoïde, nous partageons l'ellipsoïde en deux

parties par une surface ellipsoïdale passant par le point potentié et homofocale à la surface libre. Le potentiel de l'ellipsoïde sera la somme de potentiels de ses deux parties. Pour déterminer ces potentiels on utilise deux développements différents de l'inverse de la distance D du point potentié au point potentialant.

En coordonnées semi-elliptiques l'élément de volume $d\upsilon$ a l'expression suivante:

$$d\upsilon = (r^2 + e^2 \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$$

En désignant par $r_1, \varphi_1, \vartheta_1$ les coordonnées du point potentialant, le potentiel de la partie intérieure s'écrit

$$(15) \quad U_1 = \gamma \int_0^r dr_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^\pi \frac{\varrho (r_1^2 + e^2 \cos^2 \vartheta_1) \sin \vartheta_1 d\vartheta_1}{D_1}$$

où γ est la constante de gravitation, e l'excentricité linéaire de la surface libre, et r la coordonnée du point potentié.

Le potentiel de la couche extérieure (détachée par la surface ellipsoïdale homofocale à la surface libre) s'écrit:

$$(16) \quad U_2 = \gamma \int_r^s dr_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^\pi \frac{\varrho (r_1^2 + e^2 \cos^2 \vartheta_1) \sin \vartheta_1 d\vartheta_1}{D_2}$$

où $s = \text{const.}$ est la coordonnée de la surface libre. Dans ce travail nous considérons l'axe polaire de l'ellipsoïde défini par s comme unité de longueur.

Les développements de l'inverse de la distance D entre les points $r_1, \vartheta_1, \varphi_1$ (point potentialant) et r, ϑ, φ (point potentié) dans les deux cas sont les suivantes:⁹

$$(17) \quad \frac{1}{D_1} = \frac{i}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n'} (-1)^\nu 2 \frac{[1 \cdot 3 \dots (2n-1)]^2}{(n+\nu)!(n-\nu)!} Q_{n,\nu} \left(\frac{ir}{e} \right) P_{n,\nu} \left(\frac{ir_1}{e} \right) \cdot P_{n,\nu}(\cos \vartheta) P_{n,\nu}(\cos \vartheta_1) \cdot \cos \nu (\varphi - \varphi_1),$$

et

$$(18) \quad \frac{1}{D_2} = \frac{i}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n'} (-1)^\nu 2 \frac{[1 \cdot 3 \dots (2n-1)]^2}{(n+\nu)!(n-\nu)!} Q_{n,\nu} \left(\frac{ir_1}{e} \right) P_{n,\nu} \left(\frac{ir}{e} \right) \cdot P_{n,\nu}(\cos \vartheta_1) P_{n,\nu}(\cos \vartheta) \cos \nu (\varphi - \varphi_1),$$

⁹ Cf. Wangerin, Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen, II B, Leipzig, 1921.

où l'accent (') indique qu'il faut encore diviser par 2 les membres du développement où $\nu = 0$.

Dans ces développements $i = \sqrt{-1}$ et $P_{n,\nu}$ et $Q_{n,\nu}$ sont les fonctions sphériques associées de première et de seconde espèce suivantes:

$$P_{n,\nu}(x) = \frac{(n-\nu)!}{1 \cdot 3 \dots (2n-1)} (\sqrt{x^2-1})^\nu \frac{d^\nu P_n(x)}{dx^\nu},$$

$$\left(x = \cos \vartheta, \cos \vartheta_1, \frac{ir_1}{e}, \frac{ir}{e}\right);$$

$$Q_{n,\nu}\left(\frac{ir}{e}\right) = (-1)^\nu \frac{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}{(n+\nu)!} \left[\sqrt{\left(\frac{ir}{e}\right)^2 - 1} \right]^\nu \frac{d^\nu Q_n\left(\frac{ir}{e}\right)}{d\left(\frac{ir}{e}\right)^\nu},$$

où Q_n est la fonction sphérique de seconde espèce.

Cette fonction s'écrit

$$Q_n\left(\frac{ir}{e}\right) = -i P_n\left(\frac{ir}{e}\right) \operatorname{arctg} \frac{e}{r} - P_n\left(\frac{ir}{e}\right) \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{\frac{ir}{e} - x_k},$$

où $-ix_k$ sont les racines de l'équation

$$P_n(iz) = 0$$

et

$$A_k = - \frac{1}{(x_k^2 - 1) \left[\frac{dP_n(x)}{dx} \right]_{x=x_k}^2}.$$

En adoptant la formule (14) comme expression de la densité nous pouvons développer l'expression

$$\rho(r^2 + e^2 \cos^2 \vartheta)$$

sous la forme suivante:

$$(19) \quad \rho(r^2 + e^2 \cos^2 \vartheta) = \sum_{n=0}^{m+1} a_{2n} P_{2n}(\cos \vartheta),$$

où les coefficients a_{2n} sont déterminés en fonction de $a_{2n}(r)$ et de e .

Si l'on se sert des développements (17), (18) et de l'expression (19) et si on considère les propriétés des fonctions sphériques, on obtient

$$U_1 = \frac{4\pi \gamma i}{e} \sum_{n=0}^{m+1} Q_{2n}\left(\frac{ir}{e}\right) P_{2n}(\cos \vartheta) \int_0^r a_{2n}(r_1) P_{2n}\left(\frac{ir_1}{e}\right) dr_1,$$

$$U_2 = \frac{4\pi\gamma i}{e} \sum_{n=0}^{m+1} P_{2n} \left(\frac{ir}{e} \right) P_{2n}(\cos \vartheta) \int_r^s a_{2n}(r_1) Q_{2n} \left(\frac{ir_1}{e} \right) dr_1,$$

et le potentiel newtonien U à l'intérieur de la masse fluide au point de coordonnées r, ϑ s'écrit

$$(20) \quad U = \frac{4\pi\gamma i}{e} \sum_{n=0}^{m+1} P_{2n}(\cos \vartheta) \left[Q_{2n} \left(\frac{ir}{e} \right) \int_0^r a_{2n}(r_1) P_{2n} \left(\frac{ir_1}{e} \right) dr_1 + \right. \\ \left. + P_{2n} \left(\frac{ir}{e} \right) \int_r^s a_{2n}(r_1) Q_{2n} \left(\frac{ir_1}{e} \right) dr_1 \right].$$

Dans cette expression les fonctions a_{2n} s'écrivent¹⁰

$$a_{2n}(r_1) = \frac{(2n-1)2n}{(4n-3)(4n-1)} e^2 \alpha_{2n-2}(r_1) + \left\{ \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{(4n-1)(4n-3)} \right] \right. \\ \left. \cdot e^2 + r_1^2 \right\} \alpha_{2n}(r_1) + \frac{(2n+1)(2n+2)}{(4n+3)(4n+5)} e^2 \alpha_{2n+2}(r_1),$$

où les fonctions $\alpha_{2n-2}, \alpha_{2n}, \alpha_{2n+2}$ sont des coefficients du développement (14) et e l'excentricité linéaire de la surface libre qui a la forme d'un ellipsoïde de révolution aplati.

En posant

$$(21) \quad R_{2n}(r) = \frac{4\pi\gamma i}{e} \left[Q_{2n} \left(\frac{ir}{e} \right) \int_0^r a_{2n}(r_1) P_{2n} \left(\frac{ir_1}{e} \right) dr_1 + \right. \\ \left. + P_{2n} \left(\frac{ir}{e} \right) \int_r^s a_{2n}(r_1) Q_{2n} \left(\frac{ir_1}{e} \right) dr_1 \right]$$

on a

$$(22) \quad U = \sum_{n=0}^{m+1} R_{2n}(r) P_{2n}(\cos \vartheta).$$

Si l'excentricité linéaire de la surface libre tend vers zéro, on a¹¹

$$\lim_{e \rightarrow 0} \left[\frac{i}{e} Q_{2n} \left(\frac{ir}{e} \right) P_{2n} \left(\frac{ir_1}{e} \right) \right] = \frac{1}{4n+1} \frac{r_1^{2n}}{r^{2n+1}}$$

et

$$(21') \quad R_{2n}(r) = \frac{4\pi\gamma}{4n+1} \left(\frac{1}{r^{2n+1}} \int_0^r \alpha_{2n} r_1^{2n+2} dr_1 + r^{2n} \int_r^s \alpha_{2n} \frac{1}{r_1^{2n-1}} dr_1 \right).$$

¹⁰ A. Putns, Sur la rotation permanente de la surface ellipsoïdale d'une masse fluide hétérogène, Acta Universitatis Latviensis, 1935.

¹¹ Wangerin, 1. c. pag. 188.

Le procédé de ce paragraphe est légitime, si ρ s'exprime par une somme finie de fonctions sphériques. Pour $m = \infty$ on demande encore la convergence uniforme et absolue des expressions de U_1 et U_2 .¹²

§ 5. Transformation du potentiel et de la densité en coordonnées r, l .

Pour appliquer l'expression (22) du potentiel à l'étude des rotations internes, transformons l'expression (13) en y remplaçant $\cos^2\vartheta$ par sa valeur respective en r, l

$$\cos^2\vartheta = 1 - \frac{l^2}{r^2 + e^2}.$$

Ainsi on obtient

$$(23) \quad P_{2n} \left(\sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2 + e^2}} \right) = \frac{1.3.5 \dots (4n-1)}{1.2.3 \dots 2n} \left\{ \left(1 - \frac{l^2}{r^2 + e^2} \right)^n - \frac{2n(2n-1)}{2(4n-1)} \left(1 - \frac{l^2}{r^2 + e^2} \right)^{n-1} + \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^k \frac{2n(2n-1) \dots (2k-2n+1)}{2.4 \dots 2k(4n-1)(4n-3) \dots (4n-2k+1)} \left(1 - \frac{l^2}{r^2 + e^2} \right)^{n-k} + \dots \right\}$$

Pour $n=1$ on a

$$P_2 \left(\sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2 + e^2}} \right) = 1 - \frac{3}{2} \frac{l^2}{r^2 + e^2},$$

pour $n=2$

$$P_4 \left(\sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2 + e^2}} \right) = 1 - 5 \frac{l^2}{r^2 + e^2} + \frac{35}{8} \frac{l^4}{(r^2 + e^2)^2}.$$

En posant

$$(24) \quad C_{2p, 2n} = (-1)^p \left[\frac{n(n-1) \dots (n-p+1)}{1.2 \dots p} - \frac{(n-1)(n-2) \dots (n-p)}{1.2.3 \dots p} \right. \\ \left. \frac{2n(2n-1)}{2.(4n-1)} + \dots + (-1)^{n-p} \frac{2n(2n-1) \dots (2p+1)}{2.4 \dots (2n-2p)(4n-1)(4n-3) \dots (2n+2p+1)} \right] \\ \cdot \frac{1.3.5 \dots (4n-1)}{1.2.3 \dots 2n},$$

$$C_{0, 2n} = 1,$$

nous pouvons écrire

$$(25) \quad P_{2n} \left(\sqrt{1 - \frac{l^2}{r^2 + e^2}} \right) = \sum_{p=0}^n C_{2p, 2n} \frac{l^{2p}}{(r^2 + e^2)^p}.$$

¹² Cf. *Hobson, Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*, Cambridge 1931. p. 430.

Alors le pontentiel s'écrit

$$U = \sum_{n=0}^{m+1} R_{2n}(r) \sum_{p=0}^n C_{2p, 2n} \frac{l^{2p}}{(r^2 + e^2)^p},$$

ou

$$(26) \quad U = \sum_{p=0}^{m+1} l^{2p} M_{2p}(r),$$

où

$$(27) \quad M_{2p}(r) = \frac{1}{(r^2 + e^2)^p} \sum_{n=0}^{m+1-p} C_{2p, 2m+2-2n} R_{2m+2-2n}(r).$$

De même la densité, qui dans les coordonnées semi-elliptiques a l'expression (14), dans les coordonnées r, l s'écrit

$$\rho = \sum_{n=0}^m \alpha_{2n}(r) \sum_{p=0}^n C_{2p, 2n} \frac{l^{2p}}{(r^2 + e^2)^p},$$

ou

$$(28) \quad \rho = \sum_{p=0}^m l^{2p} N_{2p}(r),$$

avec

$$(29) \quad N_{2p}(r) = \frac{1}{(r^2 + e^2)^p} \sum_{n=0}^{m-p} C_{2p, 2m-2n} \alpha_{2m-2n}(r).$$

Les expressions (26) et (28) sont des polynômes de degré $m+1$ et m en l^2 .

Chapitre II.

Rotation interne de l'ellipsoïde hétérogène de stratification donnée.

§ 6. Formules générales.

M. M. Hamy¹³ et Véronnet¹⁴ dans leurs travaux ont étudié l'équilibre relatif et M. Dive¹⁵ le mouvement de rotation permanente de l'ellipsoïde hétérogène si la stratification est ellipsoïdale. Les expressions

¹³ M. Hamy, Étude sur la figure des corps célestes, Thèse, Paris, 1887.

¹⁴ A. Véronnet, Rotation de l'ellipsoïde hétérogène, Thèse (Journal de Mathématiques, 1912, p. 314).

¹⁵ P. Dive, Rotations internes, 1930.

(14) ou (28) de la densité représentent des stratifications en général non ellipsoïdales, et il ne sera pas sans intérêt d'établir et d'étudier les formules de rotation permanente dans ce cas. La surface libre pourra être de densité variable du pôle à l'équateur.

Pour former l'équation (7) nous avons

$$\frac{\partial \rho}{\partial l^2} = \sum_{p=1}^m p l^{2p-2} N_{2p}(r),$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = \sum_{p=0}^m l^{2p} \frac{d}{dr} N_{2p}(r),$$

$$\frac{\partial U}{\partial l^2} = \sum_{p=1}^{m+1} p l^{2p-2} M_{2p}(r),$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \sum_{p=0}^{m+1} l^{2p} \frac{d}{dr} M_{2p}(r)$$

En substituant ces expressions des dérivées et l'expression (28) de la densité dans l'équation (7) nous avons

$$(30) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\omega^2 \sum_{p=0}^m l^{2p} N_{2p}(r) \right] = \sum_{p=1}^m p l^{2p-2} N_{2p}(r) \cdot \sum_{p=0}^{m+1} l^{2p} \frac{d}{dr} M_{2p}(r) - \\ - \sum_{p=0}^m l^{2p} \frac{d}{dr} N_{2p}(r) \cdot \sum_{p=1}^{m+1} p l^{2p-2} M_{2p}(r).$$

Posons, comme dans le § 3

$$(31) \quad \Phi(r, l^2) = \sum_{p=1}^m p l^{2p-2} N_{2p}(r) \sum_{p=0}^{m+1} l^{2p} \frac{d}{dr} M_{2p}(r) - \\ - \sum_{p=0}^m l^{2p} \frac{d}{dr} N_{2p}(r) \sum_{p=1}^{m+1} p l^{2p-2} M_{2p}(r).$$

Nous pouvons écrire cette expression aussi dans la forme

$$(32) \quad \Phi(r, l^2) = \sum_{p=0}^{2m} l^{2p} S_{2p}(r),$$

où

$$(33) \quad S_{2p}(r) = \sum_{q=0}^p (q+1) N_{2q+2}(r) \frac{d}{dr} M_{2p-2q}(r) - \\ - \sum_{q=0}^p (q+1) M_{2q+2}(r) \frac{d}{dr} N_{2p-2q}(r),$$

ici

$$N_{2q+2} = 0 \text{ si } q+1 > m,$$

$$\frac{d}{dr} M_{2p-2q} = 0 \text{ si } p-q > m+1,$$

$$M_{2q+2} = 0 \text{ si } q > m,$$

$$\frac{d}{dr} N_{2p-2q} = 0 \text{ si } p-q > m.$$

$S_{2p}(r)$ est une fonction de r seulement. Elle est entièrement déterminée si l'on connaît des coefficients $\alpha_{2n}(r)$ de l'expression (14) de la densité, l'axe polaire s et l'excentricité linéaire e de la surface libre.

En intégrant l'équation (30) dans une direction parallèle à l'axe de rotation, on obtient

$$(34) \quad \frac{\omega^2}{2} \sum_{p=0}^m l^{2p} N_{2p}(r) = \frac{\omega_s^2}{2} \sum_{p=0}^m l^{2p} N_{2p}(s) - \int_r^s \Phi(r, l^2) dr,$$

où sur la surface libre $r=s=\text{const}$, et $\omega_s^2 = \omega^2(l^2, s)$ est la vitesse angulaire d'un point de la surface libre. Cette vitesse angulaire s'écrit¹⁶

$$(35) \quad \omega_s^2 = \sum_{p=0}^m B_{2p} P_{2p}(\cos \vartheta),$$

où

$$(36) \quad B_{2p} = \sum_{n=0}^{n=m-p} \beta_{2p, 2m-2n+2} A_{2m-2n+2},$$

$$(37) \quad A_{2n} = \frac{8\pi\gamma i}{e(s^2+e^2)} Q_{2n}\left(\frac{is}{e}\right) \int_0^s \left\{ \frac{(2n-1)2n}{(4n-3)(4n-1)} e^2 \alpha_{2n-2}(r_1) + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} \right) e^2 + r_1^2 \right] \alpha_{2n}(r_1) + \right. \\ \left. + \frac{(2n+1)(2n+2)}{(4n+3)(4n+5)} e^2 \alpha_{2n+2}(r_1) \right\} P_{2n}\left(\frac{ir_1}{e}\right) dr_1,$$

¹⁶ A. Putns, l. c.

et

$$(38) \quad \beta_{2p, 2n} = \frac{4p+1}{2} \left\{ 1 - K_{2p} + K_{2p} \frac{1 \cdot 3 \dots (4n-1)}{(2n)!} \left[\frac{2n}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{2 \cdot (4n-1)} + \dots + (-1)^k \frac{1}{2n-2k-1} \cdot \frac{2n(2n-1) \dots (2n-2k+1)(2n-2k)}{2 \cdot 4 \dots (2k)(4n-1)(4n-3) \dots (4n-2k+1)} + \dots \right] \right\},$$

où

$$K_0 = 1 \text{ et } K_{2p} = (-1)^p \frac{1 \cdot 3 \dots (2p-1)}{2 \cdot 4 \dots (2p)}$$

pour $p > 0$.

Si la stratification est connue, c'est-à-dire si les fonctions $\alpha_0(r)$, $\alpha_2(r) \dots \alpha_{2m}(r)$ sont données, on a, d'après (35), ω_s^2 comme un polynôme de degré m en $\cos^2 \vartheta$ ou en l^2 .

En substituant des expressions en l^2 au lieu de $\cos^2 \vartheta$ dans (35) on obtient

$$(39) \quad \omega_s^2 = \sum_{p=0}^m E_{2p} l^{2p},$$

où

$$(40) \quad E_{2p} = \frac{1}{(s^2 + e^2)^p} \sum_{n=0}^{n=m-p} C_{2p, 2m-2n} \cdot B_{2m-2n},$$

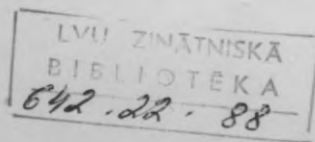
ici les coefficients $C_{2p, 2m-2n}$ sont les mêmes qu'au paragraphe précédent.

Substituons dans (34) les expressions ci-dessus de Φ et ω_s^2 , nous avons

$$(41) \quad \omega^2 = \frac{1}{\sum_{p=0}^m l^{2p} N_{2p}(r)} \left[\sum_{n=0}^m E_{2p} l^{2p} \sum_{p=0}^m N_{2p}(s) l^{2p} - 2 \sum_{p=0}^{2m} l^{2p} \int_r^s S_{2p}(r_1) dr_1 \right].$$

Développons l'inverse de la densité

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{N_0 \left[1 + \sum_{p=1}^m \frac{N_{2p}}{N_0} l^{2p} \right]}$$



en série entière de l^2 , qui sera absolument et uniformément convergente, si l'expression

$$(33) \quad \frac{\sum_{p=1}^m \left| \sum_{n=0}^{m-p} C_{2p, 2m-2n} \alpha_{2m-2n}(r) \right|}{\left| \sum_{n=0}^m C_{0, 2m-2n} \alpha_{2m-2n}(r) \right|}$$

est constamment moindre qu'un nombre fixe inférieur à l'unité, parce que

$$l^{2p} \leq (r^2 + e^2)^p.$$

Dans ce cas nous pouvons obtenir ω^2 sous la forme d'une série^{16'} convergente entière en l^2

$$(42) \quad \omega^2(r, l^2) = \omega_0(r) + \omega_2(r) l^2 + \omega_4(r) l^4 + \dots$$

Pour calculer les coefficients $\omega_0(r)$, $\omega_2(r)$, ... de ce développement, écrivons l'expression (41) sous la forme

$$(43) \quad \sum_{p=0}^{\infty} \omega_{2p}(r) l^{2p} \sum_{p=0}^m N_{2p}(r) l^{2p} = \sum_{p=0}^m E_{2p} l^{2p} \sum_{p=0}^m N_{2p}(s) l^{2p} - 2 \sum_{p=0}^{2m} l^{2p} \int_r^s S_{2p}(r) dr,$$

et posons

$$\sum_{p=0}^m E_{2p} l^{2p} \sum_{p=0}^m N_{2p}(s) l^{2p} = \sum_{p=0}^{2m} I_{2p} l^{2p},$$

où I_{2p} sont des constantes déterminées à partir de E_{2p} et $N_{2p}(s)$.

$$(44) \quad I_{2p} = \sum_{q=0}^p E_{2p-2q} N_{2q}(s)$$

avec

$$N_{2q} = 0 \text{ si } q > m \text{ et } E_{2p-2q} = 0 \text{ si } p - q > m.$$

Posons encore

$$\sum_{p=0}^{\infty} \omega_{2p}(r) l^{2p} \sum_{p=0}^m N_{2p}(r) l^{2p} = \sum_{p=0}^{\infty} K_{2p}(r) l^{2p},$$

^{16'} L'analyticité de $\omega^2(l^2)$ est démontrée tout récemment par M. Dive. C. R. Paris, mars 1938.

où

$$(45) \quad K_{2p}(r) = \sum_{q=0}^p \omega_{2p-2q}(r) N_{2q}(r),$$

avec

$$N_{2q}(r) = 0 \quad \text{si } q > m.$$

En comparant les deux parties de l'équation (43), nous obtenons

$$(46) \quad \begin{cases} K_{2p}(r) = I_{2p} - 2 \int_r^s S_{2p}(r) dr, & p = 0, 1, 2 \dots 2m, \\ K_{2p}(r) = 0, & p > 2m, \end{cases}$$

où le nombre m a la même valeur que dans l'expression (14) de la densité.

A partir de (46) on peut calculer les coefficients ω_{2p} du développement (42). Si la série ne converge pas, il faut déterminer $\omega^2(r, l^2)$ directement de l'expression (41). Dans le cas de convergence de (42) il sera souvent plus commode d'utiliser ce développement, car il est facile de voir que les p premières équations (46) ne contiennent que les p premiers coefficients ω_{2p} du développement du carré de la vitesse angulaire, par rapport auxquelles elles forment un système d'équations algébriques de premier ordre.

Si la convergence de (42) est assez rapide, on peut se contenter des premiers membres du développement et obtenir une expression approchée de la vitesse angulaire.

Dans le cas particulier le plus simple $m = 0$, et nous avons une seule équation qui relie $\alpha_0(r)$ et $\omega_0(r)$. Mais la loi des densités $\rho = \alpha_0(r)$ détermine des stratifications homofocales, d'où le théorème: dans les stratifications homofocales les couches d'égale densité et d'égale vitesse angulaire coïncident. Ce théorème a déjà été démontré par M. Dive¹⁷ par un procédé différent du nôtre. Nous allons étudier en détail deux cas analytiquement les plus simples.

§ 7. Stratification homofocale.

Formons l'expression de la vitesse angulaire pour $\rho = \alpha_0(r)$. Dans ce cas le potentiel s'écrit

$$U = R_0(r) + R_2(r) P_2(\cos \vartheta),$$

¹⁷ P. Dive, Thèse, p. 64.

où R_0 et R_2 sont les fonctions (21) avec $n=0$ et $n=1$, dans lesquelles il faut poser

$$a_0(r_1) = \left[\frac{1}{3} e^2 + r_1^2 \right] \alpha_0(r_1),$$

$$a_2(r_1) = \frac{2}{3} e^2 \alpha_0(r_1).$$

Avec les variables r, l^2 le potentiel ci-dessus s'écrit

$$U = R_0(r) + R_2(r) - \frac{3}{2} \frac{R_2(r)}{r^2 + e^2} l^2.$$

Les dérivées de la densité et du potentiel ont des expressions simples

$$\frac{\partial \rho}{\partial l^2} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{d\alpha_0}{dr} = \alpha_0'(r), \quad \frac{\partial U}{\partial l^2} = -\frac{3}{2} \frac{R_2(r)}{r^2 + e^2},$$

et l'équation (7) s'écrit

$$(47) \quad \frac{\partial}{\partial r} [\alpha_0(r) \omega^2] = 3 \frac{\alpha_0'(r)}{r^2 + e^2} R_2(r)$$

En intégrant cette équation, on obtient

$$(48) \quad \alpha_0(r) \omega^2 = \alpha_0(s) \omega_s^2 - 3 \int_r^s \frac{\alpha_0'(r)}{r^2 + e^2} R_2(r) dr.$$

Pour la stratification homofocale ω_s^2 est une constante qui s'écrit

$$(49) \quad \omega_s^2 = \frac{8\pi i \gamma}{e(s^2 + e^2)} Q_2\left(\frac{is}{e}\right) \int_0^s e^2 \alpha_0(r_1) P_2\left(\frac{ir_1}{e}\right) dr_1,$$

et la vitesse angulaire ω d'un point intérieur est fonction de r seulement, ce que nous avons déjà vu d'après les expressions générales.

L'existence du mouvement de rotation permanente pour ce cas est démontrée par M. Dive dans sa thèse.

La masse totale M d'un ellipsoïde de révolution aplati hétérogène s'écrit

$$M = 2\pi \int_0^s \int_0^\pi \alpha_0(r_1) \sin \vartheta d\vartheta dr_1 = 4\pi \int_0^s a_0 dr_1,$$

où

$$(50) \quad M = 4\pi \int_0^s \left\{ \left[\frac{1}{3} e^2 + r_1^2 \right] \alpha_0(r_1) + \frac{2}{15} \alpha_2(r_1) \right\} dr_1.$$

Pour la stratification homofocale elle s'écrit

$$M = 4\pi e^2 \int_0^s \alpha_0(r_1) \left[\frac{r_1^2}{e^2} + \frac{1}{3} \right] dr_1.$$

Mais

$$\frac{r_1^2}{e^2} + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} P_2 \left(\frac{ir_1}{e} \right),$$

et on a finalement

$$(51) \quad M = -\frac{8\pi e^2}{3} \int_0^s \alpha_0(r_1) P_2 \left(\frac{ir_1}{e} \right) dr_1.$$

En introduisant cette expression dans la formule (49) on a

$$\omega_s^2 = -\frac{3i\gamma}{e(s^2 + e^2)} Q_2 \left(\frac{is}{e} \right) M,$$

où

$$Q_2 \left(\frac{is}{e} \right) = \frac{3i}{2} \left(\frac{s^2}{e^2} + \frac{1}{3} \right) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{e}{s} - \frac{3i}{2} \frac{s}{e},$$

et nous pouvons écrire

$$(52) \quad \omega_s^2 = \frac{9\gamma}{2e(s^2 + e^2)} \left[\left(\frac{s^2}{e^2} + \frac{1}{3} \right) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{e}{s} - \frac{s}{e} \right] M.$$

En désignant par ρ_{moy} la densité moyenne de l'ellipsoïde on a

$$\rho_{\text{moy}} = -\frac{3M}{8\pi e^2 \int_0^s P_2 \left(\frac{ir_1}{e} \right) dr_1},$$

et après l'intégration

$$(53) \quad \rho_{\text{moy}} = \frac{M}{\frac{4}{3} \pi e^2 s \left(\frac{s^2}{e^2} + 1 \right)}.$$

En remplaçant dans (52) M par son expression ci-dessus, on obtient

$$\omega_s^2 = \frac{6\pi e s \gamma}{s^2 + e^2} \left[\left(\frac{s^2}{e^2} + \frac{1}{3} \right) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{e}{s} - \frac{s}{e} \right] \left(\frac{s^2}{e^2} + 1 \right) \rho_{\text{moy}}.$$

Posons $\frac{e}{s} = \lambda$, nous avons

$$\omega_s^2 = \frac{6\pi\gamma}{\left(\frac{1}{\lambda} + \lambda\right)} \left[\left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{3} \right) \text{arc tg } \lambda - \frac{1}{\lambda} \right] \left(\frac{1}{\lambda^2} + 1 \right) \rho_{\text{moy}},$$

et, finalement

$$(54) \quad \frac{\omega_s^2}{2\pi\gamma\rho_{\text{moy}}} = \frac{(3 + \lambda^2) \text{arc tg } \lambda - 3\lambda}{\lambda^3};$$

c'est-à-dire, l'aplatissement superficiel d'un ellipsoïde hétérogène de stratification homofocale varie de la même façon que celui d'un ellipsoïde homogène qui aurait la même densité moyenne ρ_{moy} .

On peut démontrer ce théorème aussi par d'autres méthodes¹⁸ différentes de la nôtre.

A partir de (47) on peut déterminer aussi la stratification, si la loi de rotation $\omega^2 = \omega^2(r)$ est connue. Supposons $\alpha_0(r) \neq 0$ et écrivons l'équation (47) dans la forme suivante:

$$(47) \quad \frac{e(r^2 + e^2) \frac{d}{dr}(\alpha_0 \omega^2)}{12\pi\gamma\alpha_0'(r)P_2\left(\frac{ir}{e}\right)} = i \frac{Q_2\left(\frac{ir}{e}\right)}{P_2\left(\frac{ir}{e}\right)} \int_0^r a_2(r_1) P_2\left(\frac{ir_1}{e}\right) dr_1 + \\ + i \int_r^s a_2(r_1) Q_2\left(\frac{ir_1}{e}\right) dr_1.$$

Désignons la première partie par $F(\alpha_0, r)$ et dérivons l'équation ci-dessus par rapport à r ; nous avons

$$(47) \quad \frac{dF(\alpha_0, r)}{dr} = i \frac{d}{dr} \left[\frac{Q_2\left(\frac{ir}{e}\right)}{P_2\left(\frac{ir}{e}\right)} \right] \int_0^r a_2(r_1) P_2\left(\frac{ir_1}{e}\right) dr_1.$$

En différentiant encore une fois, on a

$$(55) \quad \frac{d}{dr} \left\{ \frac{\frac{d}{dr} F(\alpha_0, r)}{\frac{d}{dr} \left[\frac{Q_2\left(\frac{ir}{e}\right)}{P_2\left(\frac{ir}{e}\right)} \right]} \right\} = \frac{2}{3} i e^2 \alpha_0'(r) P_2\left(\frac{ir}{e}\right)$$

¹⁸ Cf. P. Appell, *Traité de mécanique rationnelle*, T. IV fasc. II, mise à jour par A. Véronnet, Paris, 1937.

C'est l'équation différentielle de troisième ordre en α_0 , dont l'intégration donnera la loi de densités $\rho = \alpha_0(r)$.

§ 8. La loi de densités $\rho = \alpha_0(r) + \alpha_2(r) P_2(\cos \vartheta)$.

Cette loi est particulièrement intéressante parce qu'elle contient (comme nous le verrons dans la suite) des stratifications en première approximation ellipsoïdales, pour lesquelles la théorie classique de Clairaut est valable.

En coordonnées r, l cette loi de densités s'écrit

$$\rho(r, l^2) = \alpha_0(r) + \alpha_2(r) - \frac{3}{2} \frac{\alpha_2(r)}{r^2 + e^2} l^2.$$

Le potentiel créé par cette stratification est

$$U = R_0(r) + R_2(r) P_2(\cos \vartheta) + R_4(r) P_4(\cos \vartheta),$$

où $R_0(r), R_2(r)$ et $R_4(r)$ sont des fonctions (21).

En coordonnées r, l le potentiel s'écrit

$$U = M_0(r) + M_2(r) l^2 + M_4(r) l^4,$$

où

$$M_0(r) = R_0(r) + R_2(r) + R_4(r),$$

$$M_2(r) = -\frac{3}{2} \frac{R_2(r)}{r^2 + e^2} - 5 \frac{R_4(r)}{r^2 + e^2},$$

$$M_4(r) = \frac{35}{8} \frac{R_4(r)}{(r^2 + e^2)^2}.$$

Les dérivées de la densité et du potentiel sont

$$\frac{\partial \rho}{\partial l^2} = N_2(r),$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = N'_0(r) + l^2 N'_2(r),$$

$$\frac{\partial U}{\partial l^2} = M_2(r) + 2 l^2 M_4(r),$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = M'_0(r) + l^2 M'_2(r) + l^4 M'_4(r),$$

où

$$N_2(r) = -\frac{3}{2} \frac{\alpha_2(r)}{r^2 + e^2},$$

$$N'_0(r) = \frac{d\alpha_0(r)}{dr} + \frac{d\alpha_2(r)}{dr},$$

$$N'_2(r) = -\frac{3}{2} \frac{1}{r^2 + e^2} \frac{d\alpha_2(r)}{dr} + 3 \frac{r\alpha_2(r)}{(r^2 + e^2)^2},$$

$$M'_0(r) = \frac{d}{dr} [R_0(r) + R_2(r) + R_4(r)],$$

$$M'_2(r) = -\frac{3}{2} \frac{1}{r^2 + e^2} \frac{dR_2(r)}{dr} - \frac{5}{r^2 + e^2} \frac{dR_4(r)}{dr} + \\ + [3R_2(r) + 10R_4(r)] \frac{r}{(r^2 + e^2)^2}$$

$$M'_4(r) = \frac{35}{8} \frac{1}{(r^2 + e^2)^2} \frac{dR_4(r)}{dr} - \frac{35}{2} \frac{r}{(r^2 + e^2)^3} R_4(r).$$

Avec ces expressions on a

$$(56) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho \omega^2) = N_2 M'_0 - N'_0 M_2 + (N_2 M'_2 - 2 N'_0 M_4 - N'_2 M_2) l^2 + \\ + (N_2 M'_4 - 2 N'_2 M_4) l^4 = S_0(r) + S_2(r) l^2 + S_4(r) l^4,$$

et après l'intégration

$$(57) \quad \rho \omega^2 = \rho_s \omega_s^2 - 2 \int_r^s S_0(r) dr - 2 l^2 \int_r^s S_2(r) dr - 2 l^4 \int_r^s S_4(r) dr,$$

où

$$\rho_s = \alpha_2(s) + \alpha_2(s) - \frac{3}{2} \frac{\alpha_2(s)}{s^2 + e^2} l^2,$$

et

$$\omega_s^2 = E_0 + E_2 l^2,$$

avec

$$E_0 = \beta_{0,2} A_2 + (\beta_{0,4} + \beta_{2,4}) A_4 = \frac{3}{2} A_2 + 5 A_4,$$

$$E_2 = -\frac{3}{2} \beta_{2,4} \frac{A_4}{s^2 + e^2} = -\frac{35}{4} \frac{A_4}{s^2 + e^2},$$

où les constantes A et les coefficients β sont déterminés par des formules (37) et (38).

Les fonctions $\omega_0, \omega_2, \omega_4 \dots$ du développement (42) sont déterminées par le système d'équations algébriques:

$$(58) \left\{ \begin{array}{l} \omega_0 [\alpha_0(r) + \alpha_2(r)] = E_0 [\alpha_0(s) + \alpha_2(s)] - 2 \int_r^s S_0(r) dr, \\ \omega_2 [\alpha_0(r) + \alpha_2(r)] - \frac{3}{2} \omega_0 \frac{\alpha_2(r)}{r^2 + e^2} = E_2 [\alpha_0(s) + \alpha_2(s)] - \\ \quad - \frac{3}{2} E_0 \frac{\alpha_2(s)}{s^2 + e^2} - 2 \int_r^s S_2(r) dr, \\ \omega_4 [\alpha_0(r) + \alpha_2(r)] - \frac{3}{2} \omega_2 \frac{\alpha_2(r)}{r^2 + e^2} = - \frac{3}{2} E_2 \frac{\alpha_2(s)}{s^2 + e^2} - 2 \int_r^s S_4(r) dr, \\ \omega_6 [\alpha_0(r) + \alpha_2(r)] - \frac{3}{2} \omega_4 \frac{\alpha_2(r)}{r^2 + e^2} = 0, \\ \dots \dots \dots \\ \omega_{2p} [\alpha_0(r) + \alpha_2(r)] - \frac{3}{2} \omega_{2p-2} \frac{\alpha_2(r)}{r^2 + e^2} = 0, \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

A partir de ce système nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_0 = \frac{1}{\alpha_0(r) + \alpha_2(r)} \left\{ E_0 [\alpha_0(s) + \alpha_2(s)] - 2 \int_r^s [N_2 M_0' - N_0' M_2] dr \right\}, \\ \omega_2 = \frac{1}{\alpha_0(r) + \alpha_2(r)} \left\{ \frac{3}{2} \omega_0 \frac{\alpha_2(r)}{r^2 + e^2} + E_2 [\alpha_0(s) + \alpha_2(s)] - \right. \\ \quad \left. - \frac{3}{2} E_0 \frac{\alpha_2(s)}{s^2 + e^2} - 2 \int_r^s [N_2 M_2' - 2 N_0' M_4 - N_2' M_2] dr \right\}, \\ \omega_4 = \frac{1}{\alpha_0(r) + \alpha_2(r)} \left\{ \frac{3}{2} \omega_2 \frac{\alpha_2(r)}{r^2 + e^2} - \frac{3}{2} E_2 \frac{\alpha_2(s)}{s^2 + e^2} - \right. \\ \quad \left. - 2 \int_r^s [N_2 M_4' - 2 N_2' M_4] dr \right\}, \\ \omega_6 = \frac{3}{2} \frac{1}{\alpha_0(r) + \alpha_2(r)} \frac{\alpha_2(r)}{r^2 + e^2} \omega_4, \\ \dots \dots \dots \\ \omega_{2p} = \frac{3}{2} \frac{1}{\alpha_0(r) + \alpha_2(r)} \frac{\alpha_2(r)}{r^2 + e^2} \omega_{2p-2}, \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

La convergence du développement (42) dans ce cas sera assurée, si

$$(59) \quad \left| \frac{3}{2} \frac{\alpha_2(r)}{\alpha_0(r) + \alpha_2(r)} \right| < q < 1,$$

où q est un nombre fixe.

Ce sera toujours le cas, si $\alpha_2(r)$ est assez petit par rapport à $\alpha_0(r)$.

Pour l'existence du mouvement de rotation permanente il faut que $\omega^2 > 0$ en tous les points du fluide. Si la fonction $\alpha_2(r)$ et sa dérivée sont assez petites, ω^2 a le signe de ω_0 .

Pour déterminer ce signe considérons les fonctions E_0, N_0', M_2 . Le signe de ces fonctions dépend de

$$R_2(r) = \frac{4\pi\gamma i}{e} \left[Q_2\left(\frac{ir}{e}\right) \int_0^r a_2(r_1) P_2\left(\frac{ir_1}{e}\right) dr_1 + P_2\left(\frac{ir}{e}\right) \int_r^s a_2(r_1) Q_2\left(\frac{ir_1}{e}\right) dr_1 \right],$$

$$A_2 = \frac{2}{s^2 + e^2} R_2(s),$$

et de $\frac{d\alpha_0}{dr}$.

Dans l'expression de R_2

$$a_2(r_1) = \frac{2}{3} e^2 \alpha_0(r_1) + \left(\frac{11}{21} e^2 + r_1^2 \right) \alpha_2(r_1)$$

$$P_2\left(\frac{ir}{e}\right) = -\frac{3}{2} \left(\frac{r^2}{e^2} + \frac{1}{3} \right)$$

$$Q_2\left(\frac{ir}{e}\right) = \frac{3i}{e} \left(\frac{r^2}{e^2} + \frac{1}{3} \right) \operatorname{arctg} \frac{e}{r} - \frac{3}{2} i \frac{r}{e}$$

D'après un théorème de Stieltjes¹⁹, les fonctions $Q_n\left(\frac{ir}{e}\right)$ avec n entier positif n'ont pas de zéros, c'est-à-dire, la fonction $iQ_2\left(\frac{ir}{e}\right)$ qui est négative pour $r=0$ reste négative toujours. $P_2\left(\frac{ir}{e}\right)$ est aussi négatif et $R_2(r)$ a le signe de $\alpha_0(r)$. Mais $\alpha_0(r)$ est positif par la définition de la densité, ce qui entraîne que $R_2(r)$ est toujours positif, d'où $E_0 > 0$, $M_2 < 0$. Pour avoir $\omega_0 > 0$ il suffit donc que $\frac{d\alpha_0(r)}{dr} < 0$, c'est-à-dire que la densité décroisse du centre à la surface — une hypo-

¹⁹ Annales de Toulouse, Vol IV p. I 9, 1890.

thèse fort naturelle, suffisante pour avoir une pression positive dans tout le domaine du fluide.

Remarque. La démonstration ci-dessus sur l'existence du mouvement ne s'étend pas au cas de e^2 petit de l'ordre de α_2 , parce que dans ce cas on a a_2 de l'ordre de α_2 .

Chapitre III

Les stratifications ellipsoïdales en première et seconde approximation et le problème de Clairaut.

§ 9. Objet du Chapitre.

Le problème de Clairaut consiste à étudier les conditions d'équilibre relatif d'une masse fluide hétérogène en rotation, en supposant la vitesse angulaire constante et la stratification ellipsoïdale avec un aplatissement des couches d'égale densité assez faible pour qu'on puisse négliger son carré.

Il est possible, en appliquant l'expression (22) du potentiel, de retrouver l'expression de la vitesse angulaire dans ce problème. On sait, grâce aux travaux de M. M. Hamy et Véronnet, qu'avec des stratifications rigoureusement ellipsoïdales l'équilibre relatif est impossible. M. Dive dans sa thèse a démontré aussi l'impossibilité des rotations barotropes, si la stratification est rigoureusement ellipsoïdale. Mais si l'on n'étudie que des stratifications en première approximation ellipsoïdales avec la couche superficielle de densité uniforme et le carré d'aplatissement négligeable, on trouve la possibilité de l'équilibre relatif — résultat connu depuis Clairaut.

M. Dive a démontré l'existence de régimes de rotations permanentes baroclines si la stratification est rigoureusement ellipsoïdale et la surface libre de densité constante.

M. Véronnet a étudié²⁰ les rotations permanentes dans le cas de stratifications ellipsoïdales en première ou en seconde approximation, mais ses conclusions ne sont pas exactes. Nous avons repris l'étude des rotations permanentes pour ce cas, et nos conclusions sont en accord avec des résultats de M. Dive pour des stratifications rigoureusement ellipsoïdales.

²⁰ Cf. P. Appell-Véronnet, i. c. p. 143 et 208.

De plus, les expressions du potentiel que nous utilisons dans ce travail sont valables aussi pour le cas de surface libre de densité variable, ce qui permet d'étudier des stratifications en première approximation ellipsoïdales, si la surface libre ellipsoïdale ne coïncide pas avec une couche d'égale densité. D'après les résultats de M. Dive dans le cas rigoureux et d'après nos calculs en seconde approximation, la vitesse angulaire sur la surface libre est décroissante du pôle à l'équateur dans le cas de stratification ellipsoïdale. Sur le Soleil, Jupiter et Saturne la vitesse angulaire de la surface libre croît, au contraire, du pôle à l'équateur. Nous étudions dans ce chapitre quelles modifications de la stratification en première approximation ellipsoïdale sont suffisantes pour que la vitesse angulaire croisse du pôle à l'équateur sur la surface libre.

§ 10. Les lois de densités.

En désignant par c et ε l'axe polaire et l'excentricité linéaire d'une couche d'égale densité qui est supposée ellipsoïdale, on a

$$(60) \quad \frac{r^2 \cos^2 \vartheta}{c^2} + \frac{(r^2 + e^2) \sin^2 \vartheta}{c^2 + \varepsilon^2 (c^2)} = 1,$$

où r et ϑ sont les coordonnées semi-elliptiques d'un point du fluide et e l'excentricité linéaire de la surface libre. Nous pouvons considérer la densité ρ de chaque couche comme un paramètre qui détermine c , et poser $c = c(\rho)$.

L'excentricité linéaire ε est liée à l'aplatissement q d'une couche d'égale densité par la relation

$$\varepsilon^2 = 2c^2 q.$$

Dans le problème de Clairaut on suppose q petit et néglige q^2 , c'est-à-dire ε^4 , et aussi e^4 . Sous ces conditions il est facile de déterminer la loi de densités en coordonnées semi-elliptiques. A partir de (60) on a

$$r^2 \cos^2 \vartheta + (r^2 + e^2) \left(1 - \frac{\varepsilon^2 (c^2)}{c^2}\right) \sin^2 \vartheta = c^2(\rho),$$

donc

$$(61) \quad \rho = f \left[r^2 + \left(e^2 - \frac{r^2}{c^2} \varepsilon^2 (c^2) \right) \sin^2 \vartheta \right]$$

ou

$$\rho = f(r^2) + \left(e^2 - \frac{r^2}{c^2} \varepsilon^2 (c^2) \right) \sin^2 \vartheta \frac{df(r^2)}{dr^2},$$

en supposant seulement que la fonction $f(r^2)$ est continue, ainsi que ses deux premières dérivées²¹, et que ces dérivées ne deviennent pas grandes de l'ordre de $\frac{1}{e^2 - \varepsilon^2}$.

Dans cette expression nous avons

$$c^2(\rho) = r^2$$

et

$$\varepsilon^2(c^2) = \varepsilon^2(r^2),$$

en supposant que la fonction $\varepsilon^2(r^2)$ est continue et a la première dérivée d'un ordre supérieur ou égal au premier.

Donc

$$(61') \quad \rho = f(r^2) + \frac{df(r^2)}{dr^2} [e^2 - \varepsilon^2(r^2)] \sin^2 \vartheta.$$

En posant

$$\sin^2 \vartheta = \frac{2}{3} [1 - P_2(\cos \vartheta)],$$

où P_2 est le second polynôme de Legendre, on a

$$\rho = f(r^2) + \frac{2}{3} \frac{df(r^2)}{dr^2} [e^2 - \varepsilon^2(r^2)] - \frac{2}{3} \frac{df(r^2)}{dr^2} [e^2 - \varepsilon^2(r^2)] P_2(\cos \vartheta).$$

Posons

$$(62) \quad \begin{cases} \alpha_0(r) = f(r^2) + \frac{2}{3} \frac{df(r^2)}{dr^2} [e^2 - \varepsilon^2(r^2)], \\ \alpha_2(r) = -\frac{2}{3} \frac{df(r^2)}{dr^2} [e^2 - \varepsilon^2(r^2)]. \end{cases}$$

Alors

$$(61'') \quad \rho(r, \vartheta) = \alpha_0(r) + \alpha_2(r) P_2(\cos \vartheta),$$

où α_2 est de premier ordre.

Si $f(c^2)$ — l'expression de la densité en fonction de c^2 („loi de densités“ d'après Liapounoff), et $\varepsilon^2(c^2)$ — la loi des excentricités sont données, on en déduit α_0 et α_2 , les coefficients dans l'expression de ρ en coordonnées semi-elliptiques; et réciproquement, si l'on connaît α_0 et α_2 on a

²¹ Cf. Goursat. Cours d'analyse mathématique T. I p. 103. 1902.

$$(62') \quad \begin{cases} f(r^2) = \alpha_0(r) + \alpha_2(r), \\ \varepsilon^2(r^2) = e^2 + \frac{\alpha_2(r)}{\frac{2}{3} \frac{d}{dr^2}(\alpha_0 + \alpha_2)}. \end{cases}$$

C'est-à-dire, par l'expression (61'') sont toujours données les stratifications ellipsoïdales en première approximation, à condition de considérer α_2 comme quantité de premier ordre dont le carré est négligeable, et d'admettre pour les fonctions $\alpha_0(r)$ et $\alpha_2(r)$ les mêmes hypothèses que pour la fonction $f(r^2)$ dans la formule (61').

Cette forme simple de (61'') permet d'établir rapidement des équations analogues à celles de la théorie classique de Clairaut. Dans cette théorie on suppose la densité de la couche superficielle uniforme, c'est-à-dire $\varepsilon^2(s^2) = e^2$, donc $\alpha_2(s) = 0$. Si l'on se pose dans des conditions plus larges, on peut avoir $\alpha_2(s) \neq 0$ et la formule (61'') représente aussi des stratifications en première approximation ellipsoïdales avec la densité variable sur la surface libre.

Avant d'aller plus loin, nous établirons la formule analogue en seconde approximation, où il faut négliger e^6 et ε^6 .

Dans ce cas on a

$$(63) \quad \rho = f(r^2) + \frac{df(r^2)}{dr^2} \left[1 - \frac{\varepsilon^2(c^2)}{c^2} \right] \left[e^2 - r^2 \frac{\varepsilon^2(c^2)}{c^2} \right] \sin^2 \vartheta + \\ + \frac{1}{2} \frac{d^2 f(r^2)}{d(r^2)^2} \left[e^2 - r^2 \frac{\varepsilon^2(c^2)}{c^2} \right]^2 \sin^4 \vartheta,$$

où

$$c^2 = r^2 + [e^2 - \varepsilon^2(r^2)] \sin^2 \vartheta$$

et

$$\varepsilon^2(c^2) = \varepsilon^2(r^2) + \frac{d\varepsilon^2(r^2)}{dr^2} [e^2 - \varepsilon^2(r^2)] \sin^2 \vartheta,$$

en supposant que $\frac{d\varepsilon^2(r^2)}{dr^2}$ et $\frac{d^2\varepsilon^2}{d(r^2)^2}$ sont continues et d'un ordre supérieur ou égal au premier, que la fonction $f(r^2)$ est continue ainsi que ses trois premières dérivées, et que ces dérivées ne deviennent pas grandes de l'ordre de $\frac{1}{e^2 - \varepsilon^2}$. En remplaçant les fonctions trigonométriques par des polynômes de Legendre, on obtient

$$(64) \quad \rho = \alpha_0(r) + \alpha_2(r) P_2(\cos \vartheta) + \alpha_4(r) P_4(\cos \vartheta),$$

où

$$\begin{aligned} \alpha_0(r) &= f(r^2) + \frac{2}{3} \frac{df}{dr^2} [e^2 - \varepsilon^2(r^2)] - \frac{2}{15} \frac{df}{dr^2} [e^2 - \varepsilon^2(r^2)] \frac{\varepsilon^2(r^2)}{r^2} + \\ &+ \frac{4}{15} \frac{d^2f}{d(r^2)^2} [e^2 - \varepsilon^2(r^2)]^2 + \frac{8}{15} \frac{df}{dr^2} \frac{d\varepsilon^2}{dr^2} [e^2 - \varepsilon^2(r^2)], \\ \alpha_2(r) &= -\frac{2}{3} \frac{df}{dr^2} [e^2 - \varepsilon^2(r^2)] - \frac{2}{21} \frac{df}{dr^2} [e^2 - \varepsilon^2(r^2)] \frac{\varepsilon^2(r^2)}{r^2} - \\ (65) \quad &- \frac{8}{21} \frac{d^2f}{d(r^2)^2} [e^2 - \varepsilon^2(r^2)]^2 - \frac{16}{21} \frac{df}{dr^2} \frac{d\varepsilon^2}{dr^2} [e^2 - \varepsilon^2(r^2)], \\ \alpha_4(r) &= \frac{8}{35} \frac{df}{dr^2} [e^2 - \varepsilon^2(r^2)] \frac{\varepsilon^2(r^2)}{r^2} + \frac{4}{35} \frac{d^2f}{d(r^2)^2} [e^2 - \varepsilon^2(r^2)]^2 + \\ &+ \frac{8}{35} \frac{df}{dr^2} \frac{d\varepsilon^2}{dr^2} [e^2 - \varepsilon^2(r^2)]. \end{aligned}$$

Ici α_2 est de premier ordre, α_4 de second ordre, et on néglige $[\alpha_2]^3$ et $[\alpha_4]^2$.

La formule (64) peut représenter des stratifications ellipsoïdales en seconde approximation, mais aussi d'autres stratifications qui sont ellipsoïdales en première approximation et non ellipsoïdales en seconde.

Si dans les expressions (65) on néglige les quantités de second ordre, on obtient les expressions (62).

§ 11. Potentiel newtonien et équations de mouvement permanent en première approximation.

Nous utiliserons la loi de densités

$$\rho = \alpha_0(r) + \alpha_2(r) P_2(\cos \vartheta)$$

avec α_2 petit de premier ordre en sachant qu'avec des hypothèses convenables ces stratifications ne diffèrent de stratifications ellipsoïdales que par des quantités de second ordre.

Le potentiel en un point intérieur (r, ϑ) s'écrit

$$U = R_0 + R_2 P_2(\cos \vartheta) + R_4 P_4(\cos \vartheta),$$

où R_0 , R_2 et R_4 sont les fonctions (21).

En considérant e^4 , α_2^2 et $e^2 \alpha_2$ comme négligeables, dans les expressions de R il faut poser

$$a_0 = \left(\frac{1}{3} e^2 + r^2 \right) \alpha_0,$$

$$a_2 = \frac{2}{3} e^2 \alpha_0 + r^2 \alpha_2,$$

$$a_4 = 0,$$

et l'expression du potentiel prend la forme plus simple

$$(67) \quad U = R_0(r) + R_2(r) P_2(\cos \vartheta).$$

Dans cette expression interviennent les fonctions sphériques de première et seconde espèce suivantes :

$$P_0\left(\frac{ir}{e}\right) = 1,$$

$$P_2\left(\frac{ir}{e}\right) = -\frac{3}{2} \left(\frac{r^2}{e^2} + \frac{1}{3} \right),$$

$$(68) \quad Q_0\left(\frac{ir}{e}\right) = -i \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{e}{r},$$

$$Q_2\left(\frac{ir}{e}\right) = \frac{3i}{2} \left(\frac{r^2}{e^2} + \frac{1}{3} \right) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{e}{r} - \frac{3i}{2} \frac{r}{e}.$$

Développées en séries, les fonctions de seconde espèce s'écrivent

$$(69) \quad Q_0\left(\frac{ir}{e}\right) = \frac{1}{i} \left[\frac{e}{r} - \frac{1}{3} \left(\frac{e}{r} \right)^3 + \dots \right],$$

$$Q_2\left(\frac{ir}{e}\right) = \frac{2}{15i} \left[-\left(\frac{e}{r} \right)^3 + \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 7} \left(\frac{e}{r} \right)^5 - \dots \right].$$

Ces séries convergent si $\frac{e}{r} < 1$.

En négligeant $\left(\frac{e}{r} \right)^{2n}$ avec $n \geq 2$ on a

$$(70) \quad R_0 = 4\pi\gamma \left[\frac{1}{r} \int_0^r \left(\frac{1}{3} e^2 + r^2 \right) \alpha_0(r) dr - \frac{1}{3} \frac{e^2}{r^3} \int_0^r r^2 \alpha_0(r) dr + \int_r^s \alpha_0 r dr \right]$$

$$R_2 = 4\pi\gamma \left[\frac{2}{15r^3} \int_0^r \left(e^2 r^2 \alpha_0 + \frac{3}{2} r^4 \alpha_2 \right) dr + r^2 \int_r^s \left(\frac{2}{15} e^2 \frac{\alpha_0}{r^3} + \frac{1}{5} \frac{\alpha_2}{r} \right) dr \right].$$

Pour former ces expressions nous avons utilisé les développements de Q_0 et Q_2 valables pour $r > e$, c'est-à-dire dans toute l'étendue de la masse à l'exception d'un petit ellipsoïde de l'axe polaire e . En

effectuant les approximations nous avons négligé le carré de $\frac{e^2}{r^2}$. Ici $e^2 = 2s^2\rho$, où ρ est l'aplatissement de la surface libre; ρ étant petit de premier ordre, il faut prendre r assez voisin de s pour avoir $\frac{e^2}{r^2} = 2\rho \frac{s^2}{r^2}$ de premier ordre dont le carré est négligeable, et en utilisant les fonctions (70) on obtient une expression approchée du potentiel, valable dans les couches assez voisines à la surface libre et sur cette surface elle-même.

Néanmoins, comme nous le verrons dans la suite, si l'on suppose $\alpha_2(s) = 0$, c'est-à-dire la couche superficielle de densité constante, les expressions de ω^2 qu'on obtient avec des fonctions (70) sont valables dans toute l'étendue du fluide.

Dans le cas particulier où $e = 0$, c'est-à-dire où la surface libre est sphérique, on a

$$R_0 = 4\pi\gamma \left[\frac{1}{r} \int_0^r r^2 \alpha_0 dr + \int_r^s r \alpha_0 dr \right],$$

$$R_2 = \frac{4\pi\gamma}{5} \left[\frac{1}{r^3} \int_0^r r^4 \alpha_2 dr + r^2 \int_r^s \frac{\alpha_2}{r} dr \right].$$

Avec ces fonctions l'expression du potentiel est encore valable dans toute l'étendue du fluide. On peut obtenir les formules ci-dessus aussi directement de (21') en y posant $n = 0$ et $n = 1$.

Pour obtenir une expression du potentiel valable dans tout le domaine du fluide dans le cas général [$\alpha_2(s) \neq 0$ et $e \neq 0$], il faut utiliser la forme (68) de fonctions sphériques de seconde espèce, mais alors l'expression du potentiel devient plus compliquée.

Pour former l'équation (7) de rotations permanentes nous avons

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{d\alpha_0}{dr} + \frac{d\alpha_2}{dr} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{l^2}{r^2} \right) + 3\alpha_2 \frac{l^2}{r^4},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial l^2} = -\frac{3}{2} \frac{\alpha_2}{r^2},$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = 4\pi\gamma \left\{ -\frac{1}{r^2} \int_0^r \left(\frac{1}{3} e^2 + r^2 \right) \alpha_0 dr + \frac{e^2}{r^4} \int_0^r r^2 \alpha_0 dr + \right.$$

$$\left. + \frac{d}{dr} \left[\frac{2}{15} \frac{1}{r^3} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{l^2}{r^2} \right) \right] \int_0^r \left(e^2 r^2 \alpha_0 + \frac{3}{2} r^4 \alpha_2 \right) dr + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{d}{dr} \left[r^2 - \frac{3}{2} l^2 \right] \int_r^s \left(\frac{2}{15} e^2 \frac{\alpha_0}{r^3} + \frac{1}{5} \frac{\alpha_2}{r} \right) dr \Bigg\}, \\
 \frac{\partial U}{\partial l^2} = & -6\pi\gamma \left[\frac{2}{15} \frac{1}{r^5} \int_0^r \left(e^2 r^2 \alpha_0 + \frac{3}{2} \alpha_2 r^4 \right) dr + \right. \\
 & \left. + \int_r^s \left(\frac{2}{15} e^2 \frac{\alpha_0}{r^3} + \frac{1}{5} \frac{\alpha_2}{r} \right) dr \right].
 \end{aligned}$$

Avec ces expressions, en restant toujours en première approximation et en supposant aussi $\frac{d\alpha_2}{dr}$ de premier ordre, on a

$$\begin{aligned}
 (71) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (\omega^2 \rho) = & 6\pi\gamma \left\{ \frac{\alpha_2}{r^4} \int_0^r r^2 \alpha_0 dr + \frac{d\alpha_0}{dr} \left[\frac{2}{15} \frac{1}{r^5} \int_0^r \left(e^2 \alpha_0 r^2 + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \frac{3}{2} r^4 \alpha_2 \right) dr + \int_r^s \left(\frac{2}{15} e^2 \frac{\alpha_0}{r^3} + \frac{1}{5} \frac{\alpha_2}{r} \right) dr \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Dans le cas d'équilibre relatif $\omega^2 = \text{const.}$, et la vitesse angulaire est déterminée par la relation suivante:

$$\begin{aligned}
 (72) \quad \omega^2 = & 12\pi\gamma \left\{ \frac{\alpha_2(r)}{d\alpha_0(r)} \frac{1}{r^4} \int_0^r r^2 \alpha_0 dr + \frac{2}{15} \frac{1}{r^5} \int_0^r \left(e^2 \alpha_0 r^2 + \frac{3}{2} r^4 \alpha_2 \right) dr + \right. \\
 & \left. + \int_r^s \left(\frac{2}{15} e^2 \frac{\alpha_0}{r^3} + \frac{1}{5} \frac{\alpha_2}{r} \right) dr \right\}.
 \end{aligned}$$

C'est l'équation fondamentale à partir de laquelle on peut retrouver les résultats de la théorie classique de l'équilibre relatif des ellipsoïdes peu aplatis dans le cas $\alpha_2(s) = 0$.

Nous allons transformer les expressions (71) et (72) en utilisant les variables de Clairaut. Dans l'équation (71) remplaçons α_0 et α_2 par leurs valeurs en $f(r^2)$ et $\varepsilon^2(r^2)$; nous avons

$$\begin{aligned}
 \omega^2 + \frac{f}{df} \frac{\partial \omega^2}{\partial r} = & -4\pi\gamma \left\{ (e^2 - \varepsilon^2) \frac{1}{r^5} \int_0^r r^2 f(r^2) dr - \right. \\
 & \left. - \frac{2}{5} \frac{1}{r^5} \int_0^r \left[e^2 f(r^2) r^2 - \frac{df}{dr^2} (e^2 - \varepsilon^2) r^4 \right] dr - \right.
 \end{aligned}$$

$$-\frac{2}{5} \int_r^s \left[e^2 f(r^2) \frac{1}{r^3} - \frac{df}{dr^2} (e^2 - \varepsilon^2) \frac{1}{r} \right] dr \Bigg\}.$$

Dans la première partie de cette équation la densité ρ est remplacée par f et sa dérivée partielle par $\frac{df}{dr}$ parce que ω^2 et $\frac{\partial \omega^2}{\partial r}$ sont de premier ordre. En intégrant par parties nous obtenons

$$\omega^2 + \frac{f}{df} \frac{\partial \omega^2}{\partial r} = -\frac{4}{5} \pi \gamma \left[\frac{e^2}{s^2} f(s^2) - \frac{5}{r^5} \varepsilon^2(r^2) \int_0^r r^2 f(r^2) dr - \right. \\ \left. - \frac{2}{r^5} \int_0^r \frac{df(r^2)}{dr^2} r^4 \varepsilon^2(r^2) dr - 2 \int_r^s \frac{df(r^2)}{dr^2} \frac{\varepsilon^2(r^2)}{r} dr \right].$$

Substituons

$$\varepsilon^2 = 2q r^2,$$

$$e^2 = 2p s^2,$$

nous avons

$$\omega^2 + \frac{f}{df} \frac{\partial \omega^2}{\partial r} = -\frac{8 \pi \gamma}{5} \left[p f(s^2) - \frac{5q(r)}{r^3} \int_0^r r^2 f(r^2) dr - \right. \\ \left. - \frac{2}{r^5} \int_0^r \frac{df}{dr^2} q(r) r^6 dr - 2 \int_r^s \frac{df}{dr^2} q(r) r dr \right].$$

En effectuant encore une intégration par parties nous obtenons pour le mouvement permanent l'équation suivante:

$$(73) \quad \omega^2 + \frac{f}{df} \frac{\partial \omega^2}{\partial r} = \frac{8 \pi \gamma}{3} \left[\frac{3}{5} f(s^2) (q(s) - p) + \frac{q(r)}{r^3} \int_0^r f dr^3 - \right. \\ \left. - \frac{3}{5} \frac{1}{r^5} \int_0^r f(r^2) dq r^5 - \frac{3}{5} \int_r^s f(r^2) dq \right].$$

Si l'on a $\frac{\partial \omega^2}{\partial r} = 0$ et $q(s) = p$, on obtient

$$(74) \quad \omega^2 = \frac{8 \pi \gamma}{3} \left[\frac{q(r)}{r^3} \int_0^r f(r^2) dr^3 - \frac{3}{5} \frac{1}{r^5} \int_0^r f(r^2) dq r^5 - \frac{3}{5} \int_r^s f(r^2) dq \right].$$

C'est l'équation de l'équilibre relatif. La seconde partie de l'expression (74) est analogue à celle qu'on obtient dans la théorie classique de Clairaut, à la seule différence près qu'ici le paramètre r définit des ellipsoïdes homofocaux, mais dans la théorie classique on fait l'emploi de paramètre c définissant l'axe polaire des couches d'égale densité. Ce paramètre c que nous avons introduit au paragraphe 9, est lié à r par la relation approximative

$$c^2 = r^2 + [e^2 - \varepsilon^2 (r^2)] \sin^2 \vartheta.$$

Posons

$$(75) \quad S(r^2) = \frac{8\pi\gamma}{3} \left[\frac{q(r)}{r^3} \int_0^r f dr^3 - \frac{3}{5} \frac{1}{r^5} \int_0^r f dq r^5 - \frac{3}{5} \int_r^s f dq \right],$$

nous avons

$$S(c^2) = S[r^2 + (e^2 - \varepsilon^2) \sin^2 \vartheta] = S(r^2) + (e^2 - \varepsilon^2) \sin^2 \vartheta \frac{dS(\Theta^2)}{d\Theta^2},$$

Θ^2 désignant un nombre compris entre r^2 et $r^2 + (e^2 - \varepsilon^2) \sin^2 \vartheta$. Or, $S(r^2)$ et sa dérivée étant de l'ordre de q on a en première approximation

$$S(c^2) = S(r^2),$$

et nous pouvons regarder r dans (73) comme un paramètre définissant des couches d'égale densité et le remplacer par c .

§ 12. Stratification en première approximation ellipsoïdale et surface libre de densité constante.

Ce cas est caractérisé par la condition $q(s) = p$ ou $\alpha_2(s) = 0$. En posant $s = 1$ et en remplaçant sous le signe d'intégration c par a nous avons

$$(76) \quad \omega^2 + \frac{f}{df} \frac{\partial \omega^2}{\partial c} = \frac{8\pi\gamma}{3} \left[\frac{q}{c^3} \int_0^c f da^3 - \frac{3}{5} \frac{1}{c^5} \int_0^c f dq a^5 - \frac{3}{5} \int_c^1 f dq \right],$$

où sous le signe d'intégration il faut considérer q comme fonction du petit axe a ; en dehors du signe d'intégration q est fonction de c .

Dans ce cas d'après (59) ω^2 est développable en une série convergente

$$\omega^2 = \omega_0 + \omega_2 l^2 + \dots + \omega_{2n} l^{2n} + \dots,$$

où $\omega_0, \omega_2, \dots, \omega_{2n}, \dots$ sont fonctions de c seulement. Alors au lieu de (75) on peut écrire

$$\omega_0 + \frac{f}{df} \frac{d\omega_0}{dc} = \frac{8\pi\gamma}{3} \left[\frac{q}{c^3} \int_0^c f da^3 - \frac{3}{5} \frac{1}{c^5} \int_0^c f dq a^5 - \frac{3}{5} \int_c^1 f dq \right],$$

$$(77) \quad \omega_2 + \frac{f}{df} \frac{d\omega_2}{dc} = 0,$$

$$\omega_{2n} + \frac{f}{df} \frac{d\omega_{2n}}{dc} = 0,$$

$$\text{d'où} \quad \omega_{2n}(c) = \frac{C}{f(c)}, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

La constante C peut être déterminée par la connaissance de la densité et du mouvement de la couche superficielle pour laquelle on a $c = 1$, c'est-à-dire $C = \omega_{2n}(1)f(1)$.

La surface libre tournant d'un bloc, on a $\omega_{2n}(1) = 0$ pour $n \geq 1$ et $C = 0$. Dans ce problème c'est toujours le cas, car la surface libre étant de niveau et de densité constante, on a

$$\left(\frac{\partial \omega^2}{\partial c} \right)_{c=1} = 0$$

ou

$$\omega^2(1) = \frac{8\pi\gamma}{3} \left[q(1) \int_0^1 f da^3 - \frac{3}{5} \int_0^1 f dq a^5 \right] = \text{const}$$

et

$$\omega_{2n}(1) = 0, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

D'après ces remarques au lieu des équations (77) il ne reste qu'une seule équation

$$(78) \quad \omega^2 + \frac{f}{df} \frac{d\omega^2}{dc} = \frac{8\pi\gamma}{3} \left[\frac{q}{c^3} \int_0^c f da^3 - \frac{3}{5} \frac{1}{c^5} \int_0^c f dq a^5 - \frac{3}{5} \int_c^1 f dq \right].$$

C'est l'équation générale qui régit les rotations permanentes et l'équilibre relatif à l'intérieur d'une masse fluide de stratification ellipsoïdale, en négligeant les carrés de l'aplatissement et en supposant la couche superficielle de densité constante.

Il est possible de trouver l'expression de la seconde partie de (78) aussi directement à partir des expressions classiques des dérivées de la fonction de forces²² pour des stratifications du problème de Clairaut. D'après cette méthode on voit que l'expression (78) est valable pour toutes les valeurs de c de l'intervalle $0 \leq c \leq 1$, donc dans tout le domaine et sur la frontière (surface libre) du fluide.

En supposant l'équilibre relatif, c'est-à-dire $\frac{d\omega^2}{dc} = 0$, on a la formule classique, donnée par Clairaut

$$(79) \quad \frac{3}{8\pi\gamma} \omega^2 = \frac{q}{c^3} \int_0^c f da^3 - \frac{3}{5} \frac{1}{c^5} \int_0^c f dqa^5 - \frac{3}{5} \int_c^1 f dq,$$

où ω^2 doit être une constante. Pour assurer l'invariabilité de ω^2 dans ce cas particulier, on relie f et q par l'équation différentielle de Clairaut bien connue

$$(79^1) \quad \frac{d^2q}{dc^2} + \frac{2fc^2}{\int_0^c fa^2 da} \frac{dq}{dc} + \left[\frac{2fc}{\int_0^c fa^2 da} - \frac{6}{c^2} \right] q = 0.$$

Pour les stratifications, n'obéissant pas à l'équation différentielle de Clairaut (79¹), on a l'équation (78) au lieu de (79) et les rotations permanentes au lieu de l'équilibre relatif.

En différentiant l'équation (78) deux fois, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{d^2q}{dc^2} + \frac{2fc^2}{\int_0^c fa^2 da} \frac{dq}{dc} + \left[\frac{2fc}{\int_0^c fa^2 da} - \frac{6}{c^2} \right] q = \\ & = \frac{c^2}{8\pi\gamma \int_0^c fa^2 da} \frac{d}{dc} \left[\frac{1}{c^4} \frac{d}{dc} \left(c^5 \frac{f}{df} \frac{d\omega^2}{dc} + c^5 \omega^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

C'est l'équation différentielle de Clairaut, généralisée pour le cas de rotations permanentes. Si les lois de densités et de rotation sont connues, elle détermine les aplatissements.

²² Cf. Hopfner, *Physikalische Geodäsie*, Leipzig 1933, p. 261.

M. Véronnet²³ suppose $\frac{\partial \omega^2}{\partial z}$ négligeable et considère l'équation (79) comme valable aussi pour les rotations permanentes générales.

Mais admettre $\frac{\partial \omega^2}{\partial z} = 0$, c'est supposer $\frac{\partial \omega^2}{\partial c} = 0$ ou $\omega^2 = \text{const.}$ et on retombe sur l'équilibre relatif. Cette erreur de M. Veronnet est signalée déjà par M. Dive²⁴.

En posant

$$(80) \quad \Omega(c) = \frac{8\pi\gamma}{3} \left[\frac{q}{c^3} \int_0^c f da^3 - \frac{3}{5} \frac{1}{c^5} \int_0^c f dqa^5 - \frac{3}{5} \int_c^1 f dq \right],$$

l'équation (78) s'écrit

$$(81) \quad \frac{d\omega^2}{dc} + \frac{df}{f} \omega^2 = \frac{df}{f} \Omega(c),$$

d'où après l'intégration

$$(82) \quad f(c^2) \omega^2(c) = f(1) \Omega(1) + \int_1^c \frac{df}{dc} \Omega(c) dc,$$

ou

$$(82^1) \quad f(c^2) \omega^2(c) = f(c^2) \Omega(c) + \int_c^1 f \frac{d\Omega}{dc} dc.$$

M. Dive²⁵ a obtenu ces formules dans le cas général à la seule condition que la surface libre soit de densité constante.

Pour l'existence du mouvement il faut et il suffit que $\omega^2 > 0$ ou

$$(83) \quad f(1) \Omega(1) + \int_1^c \frac{df}{dc} \Omega(c) dc > 0,$$

et que la pression soit positive, ce qui aura toujours lieu si $\frac{df}{dc} < 0$.

Alors l'existence du mouvement sera assurée si l'on a

$$\Omega(c) > 0, \quad 0 \leq c \leq 1.$$

²³ *Appel-Véronnet*. Traité de mécanique rationnelle, T. IV, fasc. II, p. 143, Paris, 1937.

²⁴ *P. Dive*, Comptes rendus, Paris, 204, 1937., p. 661.

²⁵ Cf. Rotations internes, p. 11.

Pour l'étude de cette inégalité nous écrivons $\Omega(c)$ sous la forme suivante:

$$(84) \quad \Omega(c) = \frac{8\pi\gamma}{3} \left\{ - \int_0^c \frac{a^3}{c^3} \left[q(c) - \frac{3}{5} q(a) \frac{a^2}{c^2} \right] \frac{df}{da} da + \frac{2}{5} q(c) f(c) - \right. \\ \left. - \frac{3}{5} \int_c^1 f \frac{dq}{da} da \right\},$$

qu'on obtient à partir de (80) en intégrant par parties. Pour $\frac{dq}{dc} \leq 0$ on a $\Omega(c) > 0$, parce que, l'aplatissement des couches d'égale densité étant petit, on peut supposer

$$q(c) c^2 > q(a) a^2, \quad \text{si } c > a,$$

c'est-à-dire que l'aplatissement des couches d'égale densité décroît moins rapidement que dans la stratification homofocale. La densité et l'aplatissement de la couche extérieure étant $f(1)$ et $q(1)$, on peut écrire $\Omega(c)$ sous une autre forme

$$(85) \quad \Omega(c) = \frac{8\pi\gamma}{3} \left\{ - \int_0^c \frac{a^3}{c^3} \left[q(c) - \frac{3}{5} q(a) \frac{a^2}{c^2} \right] \frac{df}{da} da - \right. \\ \left. - \int_c^1 \left[q(c) - \frac{3}{5} q(a) \right] \frac{df}{da} da + f(1) \left[q(c) - \frac{3}{5} q(1) \right] \right\}.$$

D'après (85) il est évident qu'aussi pour $\frac{dq}{dc} > 0$, si $q(c)$ est limité par les inégalités

$$\frac{3}{5} < \frac{q(c)}{q(1)} < 1,$$

on a $\Omega(c) > 0$, et le mouvement permanent est possible. En plus, dans le cas d'équilibre relatif $\Omega(c) = \omega^2 = \text{const} > 0$; alors dans les répartitions des densités voisines de celles d'équilibre on aura encore $\Omega(c) > 0$, et le mouvement permanent est possible. Ainsi on a l'existence du mouvement permanent aussi pour certains cas où l'aplatissement croît du centre à la surface, comme dans la théorie classique de l'équilibre relatif.

Tous les résultats ci-dessus sur l'existence du mouvement sont en accord avec des conclusions de M. Dive dans le cas de stratification rigoureusement ellipsoïdale²⁶.

²⁶ Cf. Rotations internes, p. 58.

A partir de (81) et (82¹) on a la formule de M. Dive²⁷ pour la dérivée de la vitesse angulaire

$$(86) \quad \frac{d\omega^2}{dc} = - \frac{df}{dc} \int_c^1 f \frac{d\Omega}{dc} dc,$$

où

$$\frac{d\Omega}{dc} = \frac{8\pi\gamma}{3} \left\{ \frac{3}{c^3} \frac{dq}{dc} \int_0^c f a^2 da + \frac{3}{c^4} \int_0^c \left[q(c) - \frac{a^2}{c^2} q(a) \right] a^3 \frac{df}{da} da \right\}.$$

Pour $\frac{dq}{dc} \leq 0$ on a $\frac{d\Omega}{dc} < 0$ et $\frac{d\omega^2}{dc} < 0$,

c'est-à-dire la rotation décroît du centre à la surface, ce qui est parfaitement en accord avec des résultats généraux de M. Dive.

En écrivant la dérivée de Ω sous une autre forme

$$\frac{d\Omega}{dc} = \frac{8\pi\gamma}{3} \left\{ f \frac{dq}{dc} + \left[\frac{3q(c)}{c^4} - \frac{1}{c^3} \frac{dq}{dc} \right] \int_0^c a^3 \frac{df}{da} da - \frac{3}{c^6} \int_0^c a^5 q(a) \frac{df}{da} da \right\}$$

et en supposant $\frac{dq}{dc} > 0$ et $\frac{d}{dc} \left(\frac{q}{c^3} \right) \geq 0$ on a toujours $\frac{d\Omega}{dc} > 0$ et $\frac{d\omega^2}{dc} > 0$.

Ici la vitesse angulaire croît du centre à la surface. Dans ce dernier cas le mouvement est possible si $\omega^2 > 0$ au voisinage de centre. A partir de (82¹) on a

$$\omega^2(0) > \Omega(0) \left[1 - \frac{f(1)}{f(0)} \right] + \frac{f(1)}{f(0)} \Omega(1).$$

D'après (84) on a toujours $\Omega(1) > 0$ et $\Omega(0)$ borné. Alors, en prenant $\left[1 - \frac{f(1)}{f(0)} \right]$ assez petit, on a $\omega^2(0) > 0$, et le mouvement permanent est possible.

Donnons au paramètre c un petit accroissement qk où k est une variable et qk de premier ordre. En utilisant la formule des accroissements finis nous avons

$$\omega^2(c + qk) = \omega^2(c) + qk \frac{d\omega^2(\Theta)}{d\Theta},$$

Θ désignant un nombre compris entre c et $c + qk$.

²⁷ Ibidem p. 63

Ici $\frac{d\omega^2(\theta)}{d\theta}$ est de l'ordre de q et, en négligeant des quantités de second ordre, nous avons

$$(87) \quad \omega^2(c + qk) = \omega^2(c)$$

c'est-à-dire, en déterminant les surfaces d'égalité de rotation, on peut négliger la variation de c de l'ordre de q . Ainsi on peut avoir comme surfaces d'égalité de vitesse angulaire des surfaces d'égalité de densité²⁸, mais aussi d'autres surfaces, pour lesquelles le paramètre c peut varier. Par exemple, les sphères concentriques peuvent aussi être considérées comme surfaces d'égalité de vitesse angulaire, parce qu'en désignant par R et φ les coordonnées polaires et en posant $k = c \cos^2 \varphi$, on a $c + qk = R$ et

$$\omega^2(c) = \omega^2(R).$$

Les ellipsoïdes homofocaux ont aussi cette propriété et on peut les considérer aussi comme surfaces de rotation invariable.

§ 13. La surface libre de densité variable.

Pour calculer la vitesse angulaire et sa variation dans la couche superficielle dans ce cas il est possible d'utiliser les formules (11) et (11'), parce que la surface libre est de niveau et appartient à la famille de surfaces déterminées par le paramètre r . En effectuant les calculs, on obtient

$$(88) \quad \omega_s^2 = \frac{8\pi\gamma}{5} \frac{1}{s^5} \int_0^s \left(e^2 \alpha_0 r^2 + \frac{3}{2} \alpha_2 r^4 \right) dr,$$

et

$$(89) \quad \left(\frac{d\omega^2}{dr} \right)_{r=s} = 12\pi\gamma \frac{\alpha_2(s)}{\alpha_0(s) s^4} \int_0^s r^2 \alpha_0(r) dr.$$

En substituant $f(r^2)$ et $q(r)$ au lieu de $\alpha_0(r)$ et $\alpha_2(r)$ et p au lieu de e , on obtient

$$(88') \quad \omega_s^2 = \frac{16\pi\gamma}{5} \left\{ \frac{p}{s^3} \int_0^s \left[f(r^2) r^2 - \frac{1}{2} \frac{df(r^2)}{dr} r^3 \right] dr + \frac{1}{2} \frac{1}{s^5} \int_0^s q(r) \frac{df}{dr} r^5 dr \right\},$$

²⁸ Cf. *P. Dive*, Comptes rendus, Paris, 204, 1937, p. 661.

et, en intégrant par parties

$$(88'') \quad \omega_s^2 = -\frac{8\pi\gamma}{5} \left\{ f(s^2)[p - q(s)] - \frac{5p}{s^3} \int_0^s r^2 f(r^2) dr + \frac{1}{s^5} \int_0^s f(r^2) dq r^5 \right\}.$$

De même façon on obtient pour la variation de la vitesse angulaire dans la couche superficielle l'expression suivante:

$$(89') \quad \left(\frac{d\omega^2}{dr} \right)_{r=s} = -8\pi\gamma \left[\frac{df(r^2)}{dr} \right]_{r=s} \frac{p - q(s)}{s^3 f(s^2)} \int_0^s f(r^2) r^2 dr.$$

La densité moyenne ρ_{moy} de l'ellipsoïde ayant la valeur

$$\rho_{moy} = \frac{3}{s^3} \int_0^s f(r^2) r^2 dr = \frac{3}{s^3} \int_0^s \alpha_0(r) r^2 dr$$

nous pouvons écrire

$$(90) \quad \left(\frac{d\omega^2}{dr} \right)_{r=s} = 4\pi\gamma \frac{\alpha_2(s)}{\alpha_0(s) s} \rho_{moy}$$

ou

$$(90') \quad \left(\frac{d\omega^2}{dr} \right)_{r=s} = -\frac{8\pi\gamma}{3} \left[\frac{df(r^2)}{dr} \right]_{r=s} \frac{p - q(s)}{f(s^2)} \rho_{moy}.$$

Dans la seconde partie de l'équation (90) toutes les quantités sont mesurables dans les cas de la Terre.

Pour étudier la vitesse angulaire dans les couches plus profondes, formons la fonction $\Phi(r)$. Elle est liée à la fonction $\Omega(r)$ du paragraphe précédent par la relation

$$(91) \quad \Phi = \frac{4\pi\gamma}{3} \frac{df(r^2)}{dr} \left\{ \frac{3}{5} f(s^2)[q(s) - p] + \frac{3}{8\pi\gamma} \Omega(r) \right\},$$

et nous avons dans le cas de densité superficielle variable

$$(92) \quad \omega^2 = \frac{f(s^2)}{f(r^2)} \omega_s^2 - \frac{2}{f(r^2)} \int_r^s \Phi dr.$$

Pour avoir $\omega_s^2 > 0$ il suffit que $\alpha_2(r) > 0$, ou $ps^2 - qr^2 > 0$. En n'étudiant que des stratifications envisagées au paragraphe précédent, nous avons toujours $q(r)r^2 > q(a)a^2$ où $r > a$, et la condition ci-dessus peut être remplacée par $p - q(s) > 0$.

Si $\Omega(r) > 0$, ce qui est possible avec des stratifications étudiées plus haut, il suffit de prendre p assez voisin de $q(s)$ pour avoir $\Phi < 0$ et $\omega^2 > 0$ à l'intérieur de la masse fluide.

Si la stratification est sphérique, on a $q(r) = 0$

et

$$\Phi = -\frac{4\pi\gamma}{5} f(s^2) p \frac{df}{dr}.$$

La vitesse angulaire de la surface libre dans ce cas s'écrit

$$\omega_s^2 = -\frac{8\pi\gamma}{5} \left[f(s^2) p - \frac{5}{3} p \rho_{moy} \right].$$

En introduisant ces expressions dans la formule (92) nous obtenons

$$(93) \quad \omega^2 = 8\pi\gamma p \frac{f(s^2)}{f(r^2)} \left[\frac{\rho_{moy}}{3} - \frac{f(r^2)}{5} \right].$$

Si $f(r^2) < \frac{5}{3} \rho_{moy}$, c'est-à-dire si la condensation est peu prononcée, on a toujours $\omega^2 > 0$.

Mais il faut remarquer, que nos formules pour des cas étudiés dans ce paragraphe ne sont démontrées que pour le domaine assez voisin de la surface libre et pour cette surface elle-même.

Si $p = 0$, nos formules sont valables dans toute l'étendue du fluide, et dans le cas de $q(r) = 0$ on a $\omega^2 = 0$, donc l'équilibre absolu.

Si l'on suppose la surface libre sphérique, c'est-à-dire $p = 0$, et la stratification en première approximation ellipsoïdale ($q(r) \neq 0$), on a

$$(94) \quad \omega_s^2 = \frac{8\pi\gamma}{5} \frac{1}{s^5} \int_0^s q(r) \frac{df}{dr} r^5 dr$$

$\frac{df}{dr}$ étant négatif par hypothèse, nous voyons que pour $\omega_s^2 > 0$ il faut que $q(r) < 0$ au moins dans une partie du fluide, c'est-à-dire, les couches d'égale densité doivent être des ellipsoïdes allongés. Si $p = 0$ et $q(r) < 0$ on a $\alpha_2(r) > 0$, et dans la seconde partie de l'expression

$$\Phi = 6\pi\gamma \left\{ \frac{\alpha_2(r)}{r^4} \int_0^r r^2 \alpha_0(r) dr + \frac{1}{5} \frac{d\alpha_0}{dr} \left[\frac{1}{r^5} \int_0^r \alpha_2(r) r^4 dr + \int_r^s \frac{\alpha_2(r)}{r} dr \right] \right\}$$

le premier terme est positif et le second négatif, et le signe de $\omega^2(r)$ reste indéterminé.

§ 14. Les rotations permanentes au cas d'une stratification ellipsoïdale en seconde approximation.

La fonction Ω valable dans tout le domaine et sur la surface libre du fluide en seconde approximation s'écrit²⁹:

$$\Omega = \frac{4\pi\gamma}{3} \left[\int_0^c f d \frac{a^3}{c^3} \frac{1+\lambda^2}{1+\lambda_c^2} \left(\lambda_c^2 - \frac{3}{5} \beta^2 - \frac{6}{5} \lambda_c^2 \beta^2 + \frac{6}{7} \beta^4 \right) + \right. \\ \left. + \int_c^1 f d \frac{1+\lambda^2}{1+\lambda_c^2} \left(\lambda_c^2 - \frac{3}{5} \lambda^2 - \frac{6}{5} \lambda_c^2 \lambda^2 + \frac{6}{7} \lambda^4 \right) - \right. \\ \left. - \frac{3}{2} \sin^2 \Theta \int_0^c f d \frac{a^3}{c^3} (\lambda_c^2 - \beta^2)^2 \right],$$

où

$$\lambda^2 = 2q, \quad \sin^2 \Theta = \frac{l^2}{c^2}, \quad \beta^2 = \frac{a^2}{c^2} \lambda^2 = \frac{2a^2 q}{c^2},$$

et les fonctions q , c , a ont la même signification qu'au § 12.

En supposant la couche superficielle de densité constante, nous pouvons utiliser les formules (82) et (82') de M. Dive et obtenons

$$(95) \quad \omega^2(c, l^2) = \Omega_0(c) + \frac{1}{f(c^2)} \int_c^1 f \frac{d\Omega_0}{dc} dc + l^2 \left[\Omega_2(c) + \frac{1}{f(c^2)} \int_c^1 f \frac{d\Omega_2}{dc} dc \right],$$

où

$$(96) \quad \Omega_0(c) = \frac{8\pi\gamma}{3} \left\{ \int_0^c f(a^2) d \frac{a^3}{c^3} \frac{1+2q(a)}{1+2q(c)} \left[q(c) - \frac{3}{5} q(a) \frac{a^2}{c^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{12}{5} q(c)q(a) \frac{a^2}{c^2} + \frac{12}{7} q^2(a) \frac{a^4}{c^4} \right] + \right. \\ \left. + \int_c^1 f(a^2) d \frac{1+2q(a)}{1+2q(c)} \left[q(c) - \frac{3}{5} q(a) - \frac{12}{5} q(c)q(a) + \frac{12}{7} q^2(a) \right] \right\},$$

$$(97) \quad \Omega_2(c) = -8\pi\gamma \frac{1}{c^2} \int_0^c f(a^2) d \frac{a^3}{c^3} \left[q(c) - q(a) \frac{a^2}{c^2} \right]^2$$

²⁹ Cf. Appell-Véronnet, 1. c., p. 188.

La discussion du signe de l'expression (95) se ramène à la discussion que nous avons fait en étudiant la première approximation, car la fonction Ω de ce paragraphe ne diffère de la fonction Ω du § 12 que par des quantités de second ordre, et si les membres de premier ordre sont positifs dans l'expression (95) on a toujours $\omega^2(c, l^2) > 0$.

Pour déterminer la variation de la vitesse angulaire sur une couche d'égale densité, en particulier sur la surface libre, en différentiant l'expression (95) par rapport à l^2 nous avons

$$\frac{\partial \omega^2(c, l^2)}{\partial l^2} = \Omega_2(c) + \frac{1}{f(c^2)} \int_c^1 f \frac{d\Omega_2}{dc} dc,$$

ou, en intégrant par parties,

$$(98) \quad \frac{\partial \omega^2(c, l^2)}{\partial l^2} = \frac{f(1)}{f(c^2)} \Omega_2(1) - \frac{1}{f(c^2)} \int_c^1 \frac{df}{dc} \Omega_2(c) dc.$$

$\frac{df}{dc}$ étant négatif par hypothèse, le signe de l'expression (98) est déterminé par celui de $\Omega_2(c)$.

Or, en intégrant par parties, on a

$$(99) \quad \Omega_2(c) = 8\pi\gamma \frac{1}{c^2} \int_0^c \frac{a^3}{c^7} [q(c)c^2 - q(a)a^2]^2 \frac{df}{da} da,$$

donc

$$\Omega_2(c) < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \omega^2(c, l^2)}{\partial l^2} < 0,$$

c'est-à-dire, la vitesse angulaire sur une couche d'égale densité, en particulier sur la surface libre, décroît du pôle à l'équateur. Ce fait est en accord avec des résultats de l'analyse de M. Dive pour des stratifications rigoureusement ellipsoïdales.

Nous allons montrer qu'en supposant la stratification en seconde approximation non ellipsoïdale, on peut avoir des rotations permanentes où la vitesse angulaire croît du pôle à l'équateur, ce qui est en accord avec les données de l'observation sur le Soleil, Jupiter, Saturne.

Remarque. M. Véronnet³⁰, en étudiant des stratifications ellipsoïdales en seconde approximation, trouve que les surfaces d'égale densité ellipsoïdales sont impossibles, même en mouvement permanent,

³⁰ Appel-Véronnet, 1c. p. 207.

avec des vitesses de rotations variables. Mais la démonstration de M. Véronnet ne s'étend qu'aux rotations barotropes; dans le cas de mouvement barocline, comme nous venons de le voir, les rotations permanentes sont possibles, si la stratification est en seconde approximation ellipsoïdale et soumise à certaines conditions envisagées au § 12.

§ 15. Les stratifications en seconde approximation non ellipsoïdales.

La loi de densités

$$(100) \quad \rho = \alpha_0(r) + \alpha_2(r) P_2(\cos \vartheta) + \alpha_4(r) P_4(\cos \vartheta),$$

où r et ϑ sont des coordonnées semi-elliptiques, α_2 de premier et α_4 de second ordre, peut représenter des stratification ellipsoïdales en seconde approximation, c'est-à-dire avec la troisième puissance d'aplatissement négligeable.

Les stratification ellipsoïdales ne dépendent que de deux fonctions ε et f , mais ici nous avons le choix libre de trois fonctions α_0 , α_2 , α_4 , et la formule (100) contient aussi des stratifications en seconde approximation non ellipsoïdales, se réduisant aux stratifications ellipsoïdales bien déterminées en première approximation (en négligeant α_4).

Pour des stratifications (100) avec $e^2 \alpha_4$ négligeable le potentiel newtonien s'écrit:

$$U = R_0(r) + R_2(r) P_2(\cos \vartheta) + R_4(r) P_4(\cos \vartheta),$$

où les fonctions R_0 , R_2 , R_4 sont données par l'expression (21). Dans ces fonctions il faut substituer

$$a_0 = \left(\frac{1}{3} e^2 + r^2 \right) \alpha_0 + \frac{2}{15} e^2 \alpha_2,$$

$$a_2 = \frac{2}{3} e^2 \alpha_0 + \left(\frac{11}{21} e^2 + r^2 \right) \alpha_2,$$

$$a_4 = \frac{12}{35} e^2 \alpha_2 + r^2 \alpha_4.$$

En utilisant le développement des fonctions sphériques de seconde espèce et en restant toujours en seconde approximation, on obtient

$$R_0(r) = 4\pi\gamma \left(\frac{1}{r} \int_0^r r^2 \alpha_0 dr + \int_r^s r \alpha_0 dr + \frac{1}{3} \frac{e^2}{r} \int_0^r \alpha_0 dr - \right. \\ \left. - \frac{1}{3} \frac{e^2}{r^3} \int_0^r r^2 \alpha_0 dr + \frac{2}{15} \frac{e^2}{r} \int_0^r \alpha_2 dr - \frac{1}{9} \frac{e^4}{r^3} \int_0^r \alpha_0 dr + \right. \\ \left. + \frac{1}{5} \frac{e^4}{r^5} \int_0^r r^2 \alpha_0 dr + \frac{2}{15} e^2 \int_r^s \frac{\alpha_2}{r} dr + \frac{4}{45} e^4 \int_r^s \frac{\alpha_0}{r^3} dr \right),$$

$$R_2(r) = 6\pi\gamma \left(\frac{4}{45} \frac{e^2}{r^3} \int_0^r \alpha_0 r^2 dr + \frac{4}{45} e^2 r^2 \int_r^s \frac{\alpha_0}{r^3} dr + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{15} \frac{1}{r^3} \int_0^r \alpha_2 r^4 dr + \frac{2}{15} r^2 \int_r^s \frac{\alpha_2}{r} dr + \frac{22}{315} \frac{e^2}{r^3} \int_0^r \alpha_2 r^2 dr + \right.$$

$$\left. + \frac{22}{315} e^2 r^2 \int_r^s \frac{\alpha_2}{r^3} dr - \frac{2}{21} \frac{e^4}{r^5} \int_0^r r^2 \alpha_0 dr - \frac{2}{21} e^4 r^2 \int_r^s \frac{\alpha_0}{r^5} dr + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{135} \frac{e^4}{r^3} \int_0^r \alpha_0 dr + \frac{4}{135} e^4 \int_r^s \frac{\alpha_0}{r^3} dr + \frac{1}{7} \frac{e^2}{r^5} \int_0^r \alpha_2 r^4 dr + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{7} e^2 r^2 \int_r^s \frac{\alpha_2}{r^3} dr - \frac{2}{45} \frac{e^2}{r^3} \int_0^r \alpha_2 r^2 dr - \frac{2}{45} e^2 \int_r^s \frac{\alpha_2}{r} dr \right),$$

$$R_4(r) = \frac{4}{9} \pi\gamma \left(\frac{12}{35} \frac{e^2}{r^5} \int_0^r \alpha_2 r^4 dr + \frac{12}{35} e^2 r^4 \int_r^s \frac{\alpha_2}{r^5} dr + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r^5} \int_0^r \alpha_4 r^6 dr + r^4 \int_r^s \frac{\alpha_4}{r^3} dr \right).$$

On peut démontrer que ces expressions sont valables dans les couches assez voisines à la surface libre et sur cette surface elle-même (comme au § 11). Elles sont valables dans tout le domaine du fluide si $e = 0$. En coordonnées r, l la loi de densités s'écrit:

$$\rho(r, l^2) = \alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_4 - \frac{3}{2} \alpha_2 + 5\alpha_4 \left) \frac{l^2}{r^2 + e^2} + \frac{35}{8} \frac{\alpha_4}{r^4} l^4,$$

et le potentiel est respectivement

$$U = R_0 + R_2 + R_4 - \left(\frac{3}{2} R_2 + 5 R_4 \right) \frac{l^2}{r^2 + e^2} + \frac{35 R_4}{8 r^4} l^4.$$

En formant avec ces expressions l'équation (7) on obtient

$$(101) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (\omega^2 \rho) = S_0(r) + S_2(r) l^2.$$

où

$$\begin{aligned} S_0(r) = & \pi \gamma \left[(6\alpha_2 + 20\alpha_4 - 6 \frac{e^2}{r^2} \alpha_2) \frac{1}{r^4} \int_0^r r^2 \alpha_0 dr + \right. \\ & + 2e^2 \frac{\alpha_2}{r^4} \int_0^r \alpha_0 dr + 18 \frac{\alpha_2}{r^6} \left(\frac{2}{15} e^2 \int_0^r \alpha_0 r^2 dr + \frac{1}{5} \int_0^r \alpha_2 r^4 dr \right) - \\ & - 35 \frac{\alpha_4}{r^6} \int_0^r r^2 \alpha_0 dr + 18 \frac{d(\alpha_0 + \alpha_2)}{dr} \left(1 - \frac{e^2}{r^2} \right) \left(\frac{2}{45} \frac{e^2}{r^5} \int_0^r \alpha_0 r^2 dr + \right. \\ & + \frac{2}{45} e^2 \int_r^s \frac{\alpha_0}{r^3} dr + \frac{1}{15} \frac{1}{r^5} \int_0^r \alpha_2 r^4 dr + \frac{1}{15} \int_r^s \frac{\alpha_2}{r} dr \left. \right) + \\ & + 9 \frac{d\alpha_0}{dr} \left(\frac{22}{315} \frac{e^2}{r^5} \int_0^r \alpha_2 r^2 dr + \frac{22}{315} e^2 \int_r^s \frac{\alpha_2}{r^3} dr - \frac{2}{21} \frac{e^4}{r^7} \int_0^r r^2 \alpha_0 dr - \right. \\ & - \frac{2}{21} e^4 \int_r^s \frac{\alpha_0}{r^5} dr + \frac{4}{135} \frac{e^4}{r^5} \int_0^r \alpha_0 dr + \frac{4}{135} \frac{e^4}{r^2} \int_r^s \frac{\alpha_0}{r^3} dr + \\ & + \frac{1}{7} \frac{e^2}{r^7} \int_0^r \alpha_2 r^4 dr + \frac{1}{7} e^2 \int_r^s \frac{\alpha_2}{r^3} dr - \frac{2}{45} \frac{e^2}{r^5} \int_0^r \alpha_2 r^2 dr - \\ & - \frac{2}{45} \frac{e^2}{r^2} \int_r^s \frac{\alpha_2}{r} dr \left. \right) + \frac{20}{9} \frac{d\alpha_0}{dr} \left(\frac{12}{35} \frac{e^2}{r^7} \int_0^r \alpha_2 r^4 dr + \frac{12}{35} e^2 r^2 \int_r^s \frac{\alpha_2}{r^5} dr + \right. \\ & \left. + \frac{1}{r^7} \int_0^r \alpha_4 r^6 dr + r^2 \int_r^s \frac{\alpha_4}{r^3} dr \right) \Big], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_2(r) = \pi \gamma & \left[-27 \alpha_2 \left(\frac{2}{15} \frac{e^2}{r^8} \int_0^r \alpha_0 r^2 dr + \frac{1}{5} \frac{1}{r^8} \int_0^r \alpha_2 r^4 dr + \right. \right. \\
& + \frac{4}{45} \frac{e^2}{r^8} \int_0^r \alpha_0 r^2 dr + \frac{4}{45} \frac{e^2}{r^3} \int_r^s \frac{\alpha_0}{r^3} dr + \frac{2}{15} \frac{1}{r^8} \int_0^r \alpha_2 r^4 dr + \\
& + \frac{2}{15} \frac{1}{r^3} \int_r^s \frac{\alpha_2}{r} dr \left. \right) - \frac{35}{9} \frac{d\alpha_0}{dr} \left(\frac{12}{35} \frac{e^2}{r^9} \int_0^r \alpha_2 r^4 dr + \frac{12}{35} e^2 \int_r^s \frac{\alpha_2}{r^5} dr + \right. \\
& + \frac{1}{r^9} \int_0^r \alpha_4 r^6 dr + \left. \int_r^s \frac{\alpha_4}{r^3} dr \right) - 27 \frac{d}{dr} \left(\frac{\alpha_2}{r^2} \right) \left(\frac{2}{45} \frac{e^2}{r^5} \int_0^r \alpha_0 r^2 dr + \right. \\
& \left. \left. + \frac{2}{45} e^2 \int_r^s \frac{\alpha_0}{r^3} dr + \frac{1}{15} \frac{1}{r^5} \int_0^r \alpha_2 r^4 dr + \frac{1}{15} \int_r^s \frac{\alpha_2}{r} dr \right) \right].
\end{aligned}$$

Dans ces expressions $\frac{d\alpha_2}{dr}$ est supposée de premier et $\frac{d\alpha_4}{dr}$ de second ordre.

En intégrant l'équation (101) on a

$$(102) \quad \omega^2 \rho = \omega_s^2 \rho_s - 2 \int_r^s S_0(r) dr - 2l^2 \int_r^s S_2(r) dr,$$

où d'après (39)

$$\omega_s^2 = E_0 + E_2 l^2,$$

avec

$$E_0 = \frac{3}{2} A_2 + 5A_4 \text{ de premier ordre et}$$

$$E_2 = -\frac{35A_4}{4s^2} \text{ de second ordre.}$$

Les constantes A_2 , A_4 sont données par l'expression (37); d'ailleurs elles sont reliées aux fonctions R_{2n} par la relation suivante:

$$A_{2n} = \frac{2}{s^2 + e^2} R_{2n}(s).$$

En négligeant des quantités d'ordre supérieur au second nous avons

$$\omega_s^2 \rho_s = [\alpha_0(s) + \alpha_2(s)] E_0 - \left[\frac{3}{2} \frac{\alpha_2(s)}{s^2 + e^2} E_0 - \alpha_0 E_2 \right] l^2.$$

Supposons ω^2 développé en série de puissances de l^2

$$\omega^2(r, l^2) = \omega_0(r) + \omega_2(r) l^2 + \omega_4(r) l^4 + \dots$$

nous avons:

$$(103) \quad \omega^2 \rho = \omega_0(\alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_4) + \left[\omega_2(\alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_4) - \omega_0 \left(\frac{3}{2} \alpha_2 + 5\alpha_4 \right) \cdot \frac{1}{r^2 + e^2} \right] l^2 + \left[\omega_4(\alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_4) - \omega_2 \left(\frac{3}{2} \alpha_2 + 5\alpha_4 \right) \frac{1}{r^2 + e^2} + \frac{35}{8} \frac{\alpha_4}{r^4} \omega_0 \right] l^4 + \left[\omega_6(\alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_4) - \omega_4 \left(\frac{3}{2} \alpha_2 + 5\alpha_4 \right) \frac{1}{r^2 + e^2} + \frac{35}{8} \frac{\alpha_4}{r^4} \omega_2 \right] l^6 + \dots + \left[\omega_{2l}(\alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_4) - \omega_{2l-2} \left(\frac{3}{2} \alpha_2 + 5\alpha_4 \right) \frac{1}{r^2 + e^2} + \frac{35}{8} \frac{\alpha_4}{r^4} \omega_{2l-4} \right] l^{2n} + \dots$$

En comparant les deux parties de l'équation (102) on a

$$\omega_0(r) = \frac{1}{\alpha_0(r) + \alpha_2(r) + \alpha_4(r)} \left\{ E_0 [\alpha_0(s) + \alpha_2(s)] - 2 \int_r^s S_0(r) dr \right\},$$

$$\omega_2(r) = \frac{1}{\alpha_0(r) + \alpha_2(r) + \alpha_4(r)} \left\{ \omega_0(r) \left[\frac{3}{2} \alpha_2(r) + 5\alpha_4(r) \right] \frac{1}{r^2 + e^2} + \alpha_0(s) E_2 - \frac{3}{2} \frac{\alpha_2(s)}{s^2 + e^2} E_0 - 2 \int_r^s S_2(r) dr \right\},$$

$$\omega_4(r) = \frac{1}{\alpha_0(r) + \alpha_2(r) + \alpha_4(r)} \left\{ \omega_2(r) \left[\frac{3}{2} \alpha_2(r) + 5\alpha_4(r) \right] \frac{1}{r^2 + e^2} - \frac{35}{8} \frac{\alpha_4(r)}{r^4} \omega_0(r) \right\},$$

$$\omega_{2l}(r) = \frac{1}{\alpha_0(r) + \alpha_2(r) + \alpha_4(r)} \left\{ \omega_{2l-2}(r) \left[\frac{3}{2} \alpha_2(r) + 5\alpha_4(r) \right] \frac{1}{r^2 + e^2} - \frac{35}{8} \frac{\alpha_4(r)}{r^4} \omega_{2l-4}(r) \right\}$$

On voit d'ici que ω_0 est de premier, ω_2 de second, ω_4 de troisième, ω_{2l-2} de $l^{\text{ième}}$ et ω_{2l} de $(l+1)^{\text{ième}}$ ordre. Le développement de $\omega^2(r, l^2)$ est possible, et la série est convergente.

En supposant la surface libre de densité constante en première approximation, c'est-à-dire $\alpha_2(s) = 0$, et en négligeant toujours des quantités d'ordre supérieur au second, nous avons

$$(105) \quad \left\{ \begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{\alpha_0(r) + \alpha_2(r)} \left\{ \alpha_0(s) \left[\frac{3}{s^2 + e^2} R_2(s) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{10}{s^2} R_4(s) \right] - 2 \int_r^s S_0(r) dr \right\}, \\ \omega_2 &= \frac{1}{\alpha_0(r)} \left\{ -\frac{35}{2s^4} \alpha_0(s) R_4(s) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} \frac{\alpha_2(r)}{r^2} \omega_0(r) - 2 \int_r^s S_2(r) dr \right\}, \end{aligned} \right.$$

et

$$(106) \quad \omega^2(r, l^2) = \omega_0(r) + \omega_2(r) l^2.$$

La discussion du signe de ω_0 et ω_2 revient à celle de $R_2(s)$, $R_4(s)$, $S_0(r)$ et $S_2(r)$.

Nous ne considérons que des stratifications en seconde approximation non ellipsoïdales qui sont ellipsoïdales en première approximation et soumises aux conditions du § 12, ω^2 étant de premier ordre.

L'étude du paragraphe précédent nous a montré qu'avec des stratifications ellipsoïdales encore en seconde approximation on avait

toujours $\frac{\partial \omega^2}{\partial t^2} < 0$, donc $\omega_2(s) < 0$ et la vitesse angulaire de la rotation décroissante du pôle à l'équateur.

Il se pose donc la question: existe-t-il des stratifications non ellipsoïdales en seconde approximation, pour lesquelles la rotation de la surface libre croît du pôle à l'équateur. La réponse est affirmative. En effet, nous avons

$$\omega_2(s) = -\frac{35}{2s^4} R_4(s),$$

où

$$\omega_2(s) = -\frac{70}{9s^4} \pi \gamma \left[\frac{12}{35} \frac{e^2}{s^5} \int_0^s \alpha_2(r) r^4 dr + \frac{1}{s^5} \int_0^s \alpha_4(r) r^6 dr \right].$$

Avec des hypothèses d'après lesquelles était assurée l'existence du mouvement dans le cas de stratifications ellipsoïdales en première approximation on a toujours $\alpha_2(r)$ positif. En prenant α_4 négatif et assez grand (toujours de second ordre néanmoins), on peut obtenir $\omega_2(s) > 0$. De plus, avec $\alpha_4(r) < 0$ il est possible que $S_2(r)$ et $R_4(s)$ soient toujours négatifs. De là résulte que, $\alpha_2(r)$ et $\omega_0(r)$ étant positifs par hypothèse (parce que nous ne considérons que des stratifications ellipsoïdales en première approximation pour lesquelles $\omega^2 > 0$), la vitesse angulaire croît encore du pôle à l'équateur sur des surfaces homofocales, au moins dans les couches assez voisines à la surface libre.

Pour la couche superficielle la loi de densités s'écrit:

$$\rho(s, \vartheta) = \alpha_0(s) + \alpha_4(s) P_4(\cos \vartheta).$$

$P_4(\cos \vartheta)$ a sa plus grande valeur $P_4 = 1$ si $\cos \vartheta = \pm 1$ ou $\vartheta = 0, \vartheta = \pi$, c'est-à-dire aux pôles de l'ellipsoïde, et le minimum pour $\cos \vartheta \approx \pm 0,7$ environ, $P_4(\pm 0,7) \approx -0,4$. A l'équateur $P_4(0) \approx +0,4$. $\alpha_4(s)$ étant négatif, nous voyons que la densité de la surface libre a son minimum dans le pôle et son maximum sur la parallèle où $\cos \vartheta \approx \pm 0,7$, donc la colatitude $\vartheta \approx 45^\circ$ et la latitude $90^\circ - \vartheta$ aussi 45° environ.

A partir de cette latitude la densité décroît dans les directions vers le pôle et vers l'équateur et atteint au pôle une valeur un peu moins grande qu'à l'équateur.

Nous avons vu qu'une stratification avec $\alpha_4(r) < 0$ est suffisante pour obtenir des rotations croissantes du pôle à l'équateur (au moins sur la surface libre et dans les couches assez voisines à de la surface

libre), mais l'inégalité $\alpha_4(r) < 0$ n'est pas nécessaire sur la surface libre et dans tout le domaine du fluide, car dans nos formules de la vitesse angulaire la fonction $\alpha_4(r)$ n'intervient que sous le signe d'intégration.

Comme cas particulier considérons une surface libre sphérique et la loi de densités $\rho = \alpha_0(r) + \alpha_4(r)P_4(\cos \vartheta)$ avec $[\alpha_4]^2$ négligeable.

Alors

$$R_2(s) = 0,$$

$$R_4(s) = \frac{4}{9} \pi \gamma \frac{1}{s^5} \int_0^s \alpha_4 r^6 dr,$$

et

$$E_0 = \frac{40}{9} \pi \gamma \int_0^s \alpha_4 r^6 dr,$$

$$E_2 = -\frac{70}{9} \pi \gamma \int_0^s \alpha_4 r^6 dr.$$

Donc nous avons

$$\omega^2(l^2, s) = \frac{10}{9} \pi \gamma \frac{1}{s^7} \left\{ 4 - \frac{7}{s^2} l^2 \right\} \int_0^s \alpha_4 r^6 dr,$$

où l^2 doit varier de 0 à s^2 , et, quel que soit le choix de la valeur de $\alpha_4(r)$, on aura toujours des valeurs de l^2 pour lesquelles $\omega^2(l^2, s) < 0$. Par conséquent le mouvement n'est pas possible.

Chapitre IV.

Le théorème de Stokes et la pesanteur.

§ 16. Potentiel newtonien à l'extérieur d'un ellipsoïde hétérogène en rotation permanente.

Supposons toujours que la surface libre de la masse fluide à pression constante soit un ellipsoïde de révolution aplati, animé d'un mouvement de rotation permanente autour de son axe polaire.

D'après le théorème classique de Stokes³¹ étendu par M. Dive³² aux rotations permanentes et que M. Wavre³³ a entièrement généralisé,

³¹ Cambridge and Dublin Mathematical Journal, vol. 4, 1849.

³² Rotations internes, p. 28.

³³ Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 194, p. 1447. 1932 et Annales de l'Institut H. Poincaré, p. 491, 1932.

le potentiel newtonien dû à un fluide soumis à l'influence des attractions newtoniennes de ses propres particules et dont la surface libre est à pression constante est déterminé à l'extérieur par la connaissance des éléments stokiens.

Dans notre problème les éléments stokiens sont: la masse totale M , la vitesse angulaire ω_s , le demi-axe polaire s et l'excentricité linéaire e de la surface libre.

Supposant ces éléments donnés, nous formerons l'expression du potentiel newtonien à l'extérieur de l'ellipsoïde.

L'équation de l'hydrodynamique pour la surface libre en rotation permanente s'écrit:

$$(107) \quad dU_s + \frac{\omega_s^2}{2} dl_s^2 = 0$$

où U_s est le potentiel de l'ellipsoïde en un point de la surface libre et l_s la distance de ce point à l'axe de rotation.

En utilisant les coordonnées semi-elliptiques, l'équation (107) s'écrit en r et ϑ

$$(108) \quad dU_s + \omega_s^2 (s^2 + e^2) \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta = 0$$

ou

$$(109) \quad \frac{dU_s}{d \cos^2 \vartheta} = \frac{s^2 + e^2}{2} \omega_s^2,$$

où $s = \text{const.}$ est la valeur de la coordonnée r sur la surface libre.

Supposons la rotation permanente de la surface libre symétrique par rapport à l'équateur.

Alors le développement de ω_s^2 en polynômes de Legendre s'écrit

$$(110) \quad \omega_s^2 = \sum_{n=0}^m \omega_{2n} P_{2n}(\cos \vartheta)$$

où m est un entier positif, ou $m = \infty$; ω_{2n} sont des constantes déterminées et P_{2n} le $2n^{\text{ième}}$ polynôme de Legendre

$$(111) \quad P_{2n}(\cos \vartheta) = \sum_{k=0}^n a_{2n, 2k} \cos^{2k} \vartheta,$$

avec

$$(112) \quad a_{2n, 2k} = (-1)^{n-k} \frac{1 \cdot 3 \dots (4n-1)}{(2n)!} \cdot \frac{2n(2n-1) \dots (2k+1)}{2 \cdot 4 \dots 2(n-k) \cdot (4n-1)(4n-3) \dots (2n+2k+1)}$$

pour $k < n$,

$$a_{2n, 2n} = \frac{1.3 \dots (4n-1)}{(2n)!} \quad \text{et} \quad a_{0,0} = 1.$$

Substituons dans (110) les P_{2n} exprimés par (111), et supposons que, dans le cas $m = \infty$, la série ainsi obtenue

$$(113) \quad \omega_s^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \omega_{2n} a_{2n, 2k} \cos^{2k} \vartheta$$

est absolument et uniformément convergente, ce qui revient à demander que la série

$$(113') \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left| \omega_{2n} a_{2n, 2k} \right|$$

soit convergente.

D'après (109) et (110) on a

$$\frac{dU_s}{d \cos^2 \vartheta} = \frac{s^2 + e^2}{2} \sum_{n=0}^m \omega_{2n} P_{2n}(\cos \vartheta),$$

et le potentiel newtonien sur la surface libre s'écrit

$$(114) \quad U_s = \frac{s^2 + e^2}{2} \left\{ \sum_{n=0}^m \omega_{2n} \int P_{2n}(\cos \vartheta) d \cos^2 \vartheta + F_0 \right\},$$

où F_0 est une constante d'intégration.

Un calcul à partir de (114) donne

$$(115) \quad U_s = \frac{s^2 + e^2}{2} \sum_{p=0}^{m+1} F_{2p} P_{2p}(\cos \vartheta),$$

où

$$(116) \quad F_{2p} = \sum_{n=p-1}^m \omega_{2n} b_{2n, 2p} \quad \text{pour} \quad p = 1, 2, 3 \dots;$$

$$(117) \quad b_{2n, 2p} = \frac{1.2.3 \dots (2p)}{1.3.5 \dots (4p-1)} \left\{ \frac{a_{2n, 2p-2}}{p} + \frac{a_{2n, 2p}}{p+1} \frac{(2p+1)(2p+2)}{2(4p+3)} + \right. \\ \left. + \frac{a_{2n, 2p+2}}{p+2} \frac{(2p+1)(2p+2)(2p+3)(2p+4)}{2.4.(4p+3)(4p+5)} + \dots \right\};$$

(117) est une somme dont les coefficients $a_{2n, 2p-2}, a_{2n, 2p}, \dots, a_{2n, 2n}$ sont donnés par l'expression (112).

Si la convergence de (113') est assurée, l'expression

$$(118) \quad \sum_{p=0}^{\infty} |F_{2p}|$$

est aussi une série convergente.

Formons l'expression³⁴

$$(119) \quad U = \frac{s^2 + e^2}{2} \sum_{p=0}^{m+1} F_{2p} \frac{Q_{2p}\left(\frac{ir}{e}\right)}{Q_{2p}\left(\frac{is}{e}\right)} P_{2p}(\cos \vartheta),$$

où $i = \sqrt{-1}$ et r, ϑ sont les coordonnées d'un point extérieur à l'ellipsoïde. Q_{2p} est la $2p^{\text{ième}}$ fonction sphérique de seconde espèce.

Pour $\frac{e}{r} < 1$ elle s'écrit en série hypergéométrique convergente

$$Q_{2p}\left(\frac{ir}{e}\right) = \frac{(2p)!}{1.3\dots(4p+1)} \frac{1}{i^{2p+1}} \left[\left(\frac{e}{r}\right)^{2p+1} - \frac{(2p+1)(2p+2)}{2 \cdot (4p+3)} \left(\frac{e}{r}\right)^{2p+3} + \dots \right].$$

Démontrons que (119) représente le potentiel newtonien à l'extérieur de la masse fluide.

En effet, les fonctions

$$Q_{2p}\left(\frac{ir}{e}\right) P_{2p}(\cos \vartheta) \quad \text{où } p = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

sont harmoniques à l'extérieur³⁵, nulles à l'infini et atteignent leur plus grande valeur absolue sur la surface libre ellipsoïdale au point $\vartheta = 0$.

Alors (119) est une fonction harmonique qui a la valeur (115) sur la surface libre et s'annule à l'infini. C'est la solution du problème extérieur de Dirichlet pour la condition aux limites (115).

Si la série (118) est convergente, la série (119) pour $m = \infty$ l'est aussi.

Pour déterminer la constante F_0 , considérons l'expression générale du potentiel newtonien

$$(120) \quad U = \gamma \int \frac{dm}{D},$$

où D est la distance du point potentié au point potentialant. Nous avons vu qu'il est possible avec les coordonnées semi-elliptiques de développer $\frac{1}{D}$ en une série de fonctions sphériques.

³⁴ A. Putnis, Le potentiel newtonien à l'extérieur d'un astre ellipsoïdal en rotation permanente. Commentarii Mathematici Helvetici, vol. 8, 1935.

³⁵ Wangerin, l. c. p. 185.

En transportant le développement (17) dans (120) on trouve

$$(121) \quad F_0 = \frac{2i\gamma}{e(e^2 + s^2)} M Q_0 \left(\frac{is}{e} \right)$$

où M est la masse totale de l'ellipsoïde.

Nous pouvons déterminer cette constante aussi directement en appliquant le théorème de Gauss à l'expression (119). D'après ce théorème on a

$$\int_s \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma = -4\pi\gamma M,$$

où

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)_{r=s} \frac{\sqrt{s^2 + e^2}}{\sqrt{s^2 + e^2 \cos^2 \vartheta}},$$

et

$$d\sigma = \sqrt{s^2 + e^2 \cos^2 \vartheta} \sqrt{s^2 + e^2} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

Avec ces expressions on a

$$(122) \quad \int_s \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)_{r=s} (s^2 + e^2) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi =$$

$$= 2\pi (s^2 + e^2) \int_0^\pi \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)_{r=s} \sin \vartheta d\vartheta.$$

Dans cette formule

$$(123) \quad \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)_{r=s} = \frac{s^2 + e^2}{2} \frac{i}{e} \sum_{p=0}^{m+1} F_{2p} \frac{Q'_{2p} \left(\frac{is}{e} \right)}{Q_{2p} \left(\frac{is}{e} \right)} P_{2p}(\cos \vartheta),$$

où Q'_{2p} est la dérivée de la fonction Q_{2p} par rapport à l'argument $\frac{ir}{e}$. En substituant l'expression (123) dans (122) et en considérant l'orthogonalité des polynômes de Legendre, on obtient après l'intégration

$$\int_s \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma = 2\pi (s^2 + e^2)^2 \frac{i}{e} F_0 \frac{Q'_0 \left(\frac{is}{e} \right)}{Q_0 \left(\frac{is}{e} \right)},$$

où

$$Q'_0 \left(\frac{is}{e} \right) = \frac{1}{1 - \left(\frac{is}{e} \right)^2} = \frac{e^2}{s^2 + e^2}.$$

Ainsi on a
$$\int_s \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma = 2\pi (s^2 + e^2) ei \frac{F_0}{Q_0\left(\frac{is}{e}\right)} \quad (120)$$

ou
$$-4\pi\gamma M = 2\pi (s^2 + e^2) ei \frac{F_0}{Q_0\left(\frac{is}{e}\right)},$$

et
$$F_0 = \frac{2i\gamma}{(s^2 + e^2)e} M Q_0\left(\frac{is}{e}\right).$$

Pour traiter un exemple simple, supposons la loi de la rotation permanente de la surface libre de la forme suivante³⁶

$$(124) \quad \omega_s^2 = \omega_0 + \omega_2 P_2(\cos \vartheta),$$

où ω_0 et ω_2 sont des constantes.

En résolvant le problème de Dirichlet, on trouve le potentiel U à l'extérieur pour un point de coordonnées (r, ϑ) :

$$(125) \quad U = \frac{i}{e} \gamma M Q_0\left(\frac{ir}{e}\right) + T_2 Q_2\left(\frac{ir}{e}\right) P_2(\cos \vartheta) + T_4 Q_4\left(\frac{ir}{e}\right) P_4(\cos \vartheta),$$

où
$$T_2 = (s^2 + e^2) \frac{\frac{1}{3} \omega_0 + \frac{1}{21} \omega_2}{Q_2\left(\frac{is}{e}\right)}$$

et
$$T_4 = (s^2 + e^2) \frac{\frac{3}{35} \omega_2}{Q_4\left(\frac{is}{e}\right)}.$$

Les coefficients des expressions (119) et (125) du potentiel ne dépendent que des éléments stokiens M, s, e, ω_{2n} ($n=0, 1, 2 \dots$).

Si l'aplatissement de l'ellipsoïde est petit, on peut, comme dans la théorie classique des figures d'équilibre, considérer $\frac{e^2}{s^2}$ comme une quantité de premier ordre et négliger $\frac{e^4}{s^4}, \frac{e^6}{s^6}, \dots$

En désignant comme plus haut par p l'aplatissement de la surface libre, nous avons $\frac{e^2}{s^2} = 2p$ et

³⁶ A. Putnis, Sur le théorème de Stokes. Comptes rendus, Genève, 1935.

$$(126) \quad U = \frac{s^2}{2} \sum_{n=0}^{m+1} F_{2n} \frac{s^{2n+1}}{r^{2n+1}} [1 + p K_n] P_{2n}(\cos \vartheta),$$

$$\text{où} \quad K_n = \frac{4n^2 + 6n + 2}{4n + 3} \left(1 - \frac{s^2}{r^2}\right) + 2.$$

L'expression (126) peut être utile dans les applications.

Il faut remarquer que dans ce paragraphe aucune hypothèse sur la constitution intérieure et sur le mouvement à l'intérieur de la masse fluide n'est faite.

§ 17. Pesanteur sur la surface libre.

Désignons par g_s la pesanteur sur la surface libre. En dérivant par rapport à la normale extérieure, on a

$$(127) \quad g_s = - \frac{\partial U}{\partial n} - \frac{\omega_s^2}{2} \frac{\partial l^2}{\partial n}.$$

Nous avons

$$l^2 = (s^2 + e^2) \sin^2 \vartheta,$$

et de là

$$\frac{\partial l^2}{\partial n} = 2s \sin^2 \vartheta \frac{\sqrt{s^2 + e^2}}{\sqrt{s^2 + e^2 \cos^2 \vartheta}}.$$

$\frac{\partial U}{\partial n}$ a la même valeur que dans le paragraphe précédent. Avec ces expressions on obtient

$$(128) \quad g_s = - \frac{\sqrt{s^2 + e^2}}{\sqrt{s^2 + e^2 \cos^2 \vartheta}} \left[\frac{s^2 + e^2}{2} \frac{i}{e} \sum_{p=0}^{m+1} F_{2p} \frac{Q'_{2p}\left(\frac{is}{e}\right)}{Q_{2p}\left(\frac{is}{e}\right)} P_{2p}(\cos \vartheta) + \sum_{p=0}^m \omega_{2p} P_{2p}(\cos \vartheta) \cdot s \sin^2 \vartheta \right].$$

Si la surface libre tourne d'un bloc avec la vitesse angulaire $\omega_s = \text{const}$, nous avons

$$g_s = - \sqrt{\frac{s^2 + e^2}{s^2 + e^2 \cos^2 \vartheta}} \left[\frac{s^2 + e^2}{2} \frac{i}{e} F_0 \frac{Q'_0\left(\frac{is}{e}\right)}{Q_0\left(\frac{is}{e}\right)} + \right.$$

$$\left[+ \frac{s^2 + e^2}{2} \frac{i}{e} F_2 \frac{Q_2\left(\frac{is}{e}\right)}{Q_2\left(\frac{is}{e}\right)} P_2(\cos \vartheta) + \omega_s^2 s \sin^2 \vartheta \right].$$

Dans cette expression $F_2 = b_{0,2} \omega_s^2 = \frac{2}{3} \omega_s^2$ et F_0 a la valeur (121).
Ainsi nous avons

$$(129) \quad g_s = - \sqrt{\frac{s^2 + e^2}{s^2 + e^2 \cos^2 \vartheta}} \left[- \frac{1}{s^2 + e^2} \gamma M + \frac{1}{3} (s^2 + e^2) \frac{i}{e} \omega_s^2 \frac{Q_2\left(\frac{is}{e}\right)}{Q_2\left(\frac{is}{e}\right)} \cdot P_2(\cos \vartheta) + s \omega_s^2 \sin^2 \vartheta \right].$$

Si, de plus, l'aplatissement de la surface libre et ω_s^2 sont si petits qu'on puisse négliger leurs carrés (donc la quatrième puissance de $\frac{e}{s}$), on a

$$\sqrt{\frac{s^2 + e^2}{s^2 + e^2 \cos^2 \vartheta}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{e^2}{s^2 + e^2} \sin^2 \vartheta$$

et

$$\frac{Q_2\left(\frac{is}{e}\right)}{Q_2\left(\frac{is}{e}\right)} = \frac{3ie}{s} + C \left(\frac{e}{s}\right)^3,$$

où C est une constante purement imaginaire qui n'interviendra pas dans nos calculs.

Alors nous avons

$$g_s = - \left(1 + \frac{1}{2} \frac{e^2}{e^2 + s^2} \sin^2 \vartheta \right) \left[- \frac{1}{s^2 + e^2} \gamma M - s \omega_s^2 + \frac{5}{2} s \omega_s^2 \sin^2 \vartheta \right],$$

ou, en désignant par a le grand demi-axe $\sqrt{s^2 + e^2}$ et par p l'aplatissement de la surface libre,

$$g_s = \gamma \frac{M}{a^2} + a \omega_s^2 - \left(\frac{5}{2} a \omega_s^2 - p \gamma \frac{M}{a^2} \right) \sin^2 \vartheta.$$

Si l'on introduit la latitude Θ au lieu de la colatitude ϑ , on a $\cos^2 \Theta = \sin^2 \vartheta$ et la formule ci-dessus s'écrit

$$g_s = \gamma \frac{M}{a^2} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\omega_s^2 a^3}{\gamma M} + p \right) \left[1 + \left(\frac{5}{2} \frac{a^3 \omega_s^2}{\gamma M} - p \right) \sin^2 \Theta \right].$$

Or, $\frac{a^3 \omega_s^2}{\gamma M} = \varphi$ étant le rapport de la force centrifuge à la pesanteur à l'équateur, nous avons

$$(130) \quad g_s = \gamma \frac{M}{a^2} \left(1 - \frac{3}{2} \varphi + p \right) \left[1 + \left(\frac{5}{2} \varphi - p \right) \sin^2 \Theta \right].$$

A l'équateur $\sin^2 \Theta = 0$ et la pesanteur a la valeur

$$g_e = \gamma \frac{M}{a^2} \left(1 - \frac{3}{2} \varphi + p \right).$$

En substituant cette valeur dans (130) on obtient finalement

$$(131) \quad g_s = g_e \left[1 + \left(\frac{5}{2} \varphi - p \right) \sin^2 \Theta \right].$$

C'est une formule importante de Clairaut reliant l'aplatissement à la variation de la pesanteur.

Les expressions (128) et (129) sont des généralisations de cette formule.

Présenté à la faculté le 10 mai 1938.

Heterogenu ellipsoidu permanentā rotācija.

A. Putns.

Kopsavilkums.

Darbā pētīta heterogenu šķidru masu permanenta rotācija, ja uz masas daļiņām iedarbojas to savstarpējās gravitācijas spēki, pieņemot, ka ārējā virsa ir saspiegta rotācijas ellipsoīds un spiediens uz ārējās virsas konstants. Šī problēma ir saistīta ar līdzsvara figūru teorijas jautājumiem.

Šķidrums rotē permanenti ap kādu noteiktu z asi, ja visām tā daļiņām, kas atrodas uz z asij stateniskas un šai asī centrētas aploces, ir vienāds blīvums un ja tās pārvietojas ar nemainīgu leņķātrumu.

Ja visos šķidruma punktos rotācijas leņķātrums ir vienāds, tad šķidrums ir relatīvā līdzsvarā un šķidruma ārējā virsa ir tā sauktā līdzsvara figūra.

Ja rotācijas leņķātrums mainās, pārejot no vienas iepriekš minētās aploces uz otru, tad šķidruma kustība ir permanenta rotācija, kas pētīta šai darbā.

Kā līdzsvara figūru teorijā, tā arī permanentās rotācijas teorijā galvenās problēmas ir sakarību uzstādīšana masas sadalījuma, ārējās virsas formas un rotācijas leņķātruma starpā un šāda relatīvā līdzsvara vai permanentās rotācijas eksistences pierādījums.

Svarīgākie pētījumi homogenu (t. i. ar vienādu masas blīvumu visos punktos) līdzsvara figūru teorijā saistīti ar *Newton'a*, *Maclaurin'a*, *Jacobi*, *Poincaré* un *Liapunov'a* vārdiem. Ievērojamākos rezultātus heterogenu līdzsvara figūru teorijā devuši *Clairaut*, *Laplace*, *R. Wavre*. Šķidru masu permanentās rotācijas jautājumos ievērojamākie ir *R. Wavre'a* un *P. Dive'a* pētījumi. Šais jautājumos plašākus pētījumus izdarījis arī *A. Véronnet*, bet viņš pielaidis dažas principiālas kļūdas, kuŗas aizrādījuši jau *P. Dive* un *R. Wavre*.

Darba pirmajā daļā ievests *P. Dive'a* vienādojums (4¹)⁸⁷. Šis vienādojums transformēts speciālās līklniju koordinātās, kas piemērotas pētījamai problēmai. Izmantojot šo transformēto (7) vienādojumu, dotas rotācijas leņķātruma un tā parciālā atvasinājuma vispārējās izteiksmes (8), (10), (11) un (11¹). Masas blīvuma sadalījums ellipsoida

⁸⁷ Skaitļi iekavās apzīmē iepriekšējā tekstā ar tādu pašu skaitli atzīmēto formulu.

iekšienē pieņemts tāds, ka vienāda blīvuma virsas ir rotācijas virsas un blīvuma sadalījums simmetrisks pret ekvatora plāksni. Pieņemts, ka blīvums izteicams Legendre'a polinomu summas veidā (14). Ar šādām formulām var izteikt blīvumus, kas ir pietiekoši tuvi katram iepriekš pieņemtam blīvuma sadalījumam, ja pēdējais ir nepārtraukts un ar ierobežotu variāciju. Šādi blīvuma likumi ir vispārīgāki kā citu autoru pētījumos apskatītie.

Ar šādiem blīvuma likumiem, izmantojot divu punktu attāluma reciprokā lieluma pazīstamos izvirzījumus (17) un (18) sēmi-elliptiskās koordinātās (kuŗas izteikts arī blīvuma likums), noteikts pētījamā ellipsoida potenciāls iekšējā punktā (22). Pieņemtā blīvuma izteiksme un dabūtā potenciāla izteiksme transformētas problēmai piemērotās slipleņķa liklīniju koordinātās, kuŗas veido riņķa cilindri un ellipsoida brīvai virsmai homofokāli rotācijas ellipsoidi. Šās izteiksmes (28), (26) izmantotas pētījuma tālākajās daļās.

Darba otrā daļā ar minētiem vispārīgākiem blīvuma likumiem aprēķināti un diskutēti rotācijas leņķātrumi (41).

Līdzšinējos *Hamij'a*, *Véronnet'a* un *Dive'a* darbos, kuŗos pētīti ellipsoidu līdzsvara un permanentās rotācijas jautājumi, vienāda blīvuma virsas pieņemtas ellipsoidālas un ārējā virsa ar konstantu blīvumu.

Šai darbā pētītie blīvuma likumi aptver arī neellipsoidālus blīvuma sadalījumus un arī gadījumus, kur blīvums uz brīvās virsas nav konstants.

Līdz ar rotācijas leņķātruma aprēķināšanu noskaidrota arī šā leņķātruma izvirzīšanās iespēja konverģentās pakāpju rindās (42).

Kā analitiski vienkāršākie apskatīti homofokāla slāņojuma un ar formulu $\rho = \alpha_0(r) + \alpha_2(r) P_2(\cos \vartheta)$ noteiktie masu sadalījumi.

Šeit atrastas vairākas jaunas sakarības (55), (57) un apstiprinātas arī dažas, jau no agrākiem *Dive'a* un *Véronnet'a* darbiem pazīstamās, ar citām metodēm atrastās sakarības (48), (54).

Darba trešajā daļā pētīta permanentā rotācija, ja ellipsoida sa-spiedums ir mazs. Izrādījās, ka pirmā tuvinājumā ellipsoidālie slāņojumi (kuŗus ievēdis *Clairaut* savos klasiskajos, lēni rotējošu sfēroīdu relatīvā līdzsvara pētījumos) ar šai darbā ievesto metodi uzrakstāmi ļoti vienkāršā formā. Tā radusies iespēja ar jaunu metodi atrast *Clairaut'a* klasiskos rezultātus. Pieņemot slāņojumus pirmajā un otrā tuvinājumā ellipsoidālus, izpētīta šādu ellipsoidu permanentā rotācija. Atrastie rezultāti atšķiras no *P. Appell'a* „*Traité de mécanique ration-*

nelle" (T. IV, fasc. II, 1937) publicētajiem *A. Véronnet'*a rezultātiem. Ar citu autoru darbos lietātām potenciāla izteiksmēm nav bijis iespējams pētīt permanento rotāciju, ja virsas blīvums ir mainīgs. Šī darba metode tādu iespēju dod, ja blīvums mainās virzienā no pola uz ekvātoru.

Pieņemot, ka slāņojums pirmā tuvinājumā ellipsoidāls, bet ārējā virsa nav vienāda blīvuma virsa, pētīts rotācijas leņķātrums un tā maiņa dziļumā. Attiecinot atrastos rezultātus uz zemes lodi, redzams, ka (90) formulas labajā pusē visi lielumi ir zemes virsū mērījami. Pētīti arī otra tuvinājumā neellipsoidāli slāņojumi, un atrasti un diskutēti attiecīgie rotācijas likumi.

Darba ceturtajā daļā aprēķināts permanenti rotējoša ellipsoida potenciāls ārējā punktā, ja doti ārējo virsu noteicošie parametri, ellipsoida kopējā masa un ārējās virsas rotācijas leņķātrumi. Dabūtā izteiksme (119) nav atkarīga no blīvumu sadalījuma ellipsoida iekšienē un no iekšienē notiekošām kustībām. Par šiem jautājumiem autors jau publicējis dažus darbus⁸⁸.

Izmantojot atrasto (119) izteiksmi, aprēķināts smagums spēks uz permanenti rotējoša ellipsoida ārējās virsas. Dabūtās formulas (128) un (129) ir *Clairaut'*a ievērojamās (130) formulas vispārinājumi.

⁸⁸ *A. Putnis*. Le potentiel newtonien à l'extérieur d'un astre ellipsoïdal en rotation permanente. Commentarii mathem. Helvetici, vol. 8, 1935.

A. Putnis. Sur le théorème de Stokes pour les ellipsoïdes hétérogènes en rotation permanente. Comptes rendus, Genève, 1935.

Table des matières.

	Pages
Introduction	1
I. Les équations de l'hydrodynamique et le potentiel newtonien:	
1. Les équations de l'hydrodynamique	4
2. La transformation des coordonnées	6
3. La vitesse angulaire et l'existence du mouvement	7
4. Potentiel newtonien à l'intérieur d'un ellipsoïde hétérogène de révolution	8
5. Transformation du potentiel et de la densité en coordonnées r, l	13
II. Rotation interne de l'ellipsoïde hétérogène de stratification donnée:	
6. Formules générales	14
7. Stratification homofocale	19
8. La loi de densités $\rho = \alpha_0(r) + \alpha_2(r) P_2(\cos \vartheta)$	23
III. Les stratifications ellipsoïdales en première et seconde approximation et le problème de Clairaut:	
9. Objet du Chapitre	27
10. Les lois de densités	28
11. Potentiel newtonien et équations de mouvement permanent en première approximation	31
12. Stratification en première approximation ellipsoïdale et surface libre de densité constante	36
13. La surface libre de densité variable	42
14. Les rotations permanentes au cas d'une stratification ellipsoïdale en seconde approximation	45
15. Les stratifications en seconde approximation non ellipsoïdales	47
IV. Théorème de Stokes et la pesanteur:	
16. Potentiel newtonien à l'extérieur d'un ellipsoïde hétérogène en rotation permanente	54
17. Pesanteur sur la surface libre	60
Heterogenu ellīpsoidu permanentā rotācija (Résumé en letton)	63

Some Impossible Diophantine Equations in the Form of

$$x^4 + Ay^4 = z^2.$$

By E. Fogels.

§ 1. Let us suppose that the set of integers x, y, z is a solution of the equation

$$(1) \quad x^4 - py^4 = z^2, \quad p \text{ prime} \equiv 13 \pmod{16}$$

and y^2 has the least possible value > 0 . Then no two of the numbers x, y, z have a common factor other than unity and one of the numbers y, z is even. If we suppose that z is even, then we get the relation $2x^2 = u^2 + pv^2$, where x, u, v are odd numbers. It follows that $p \equiv 1 \pmod{8}$. But this is contrary to the assumption $p \equiv 13 \pmod{16}$. Thus in the equation (1) y is to be even and there are two relatively prime integers u, pv , such as

$$x^2 = u^2 + pv^2, \quad y^2 = 2uv, \quad uv \text{ even.}$$

If u is even, then we may express $\pm 2u = u_1^2 - pv_1^2$, $v = u_1v_1$ (u_1, v_1 relatively prime) and consequently $y^2 = \pm u_1v_1(u_1^2 - pv_1^2)$. Taking $u_1 = \pm X^2$, $v_1 = \pm Y^2$ we get the equation $X^4 - pY^4 = \pm Z^2$, where the lower sign of Z^2 is to be given up. There suits the inequality $y^2 = |2uu_1| Y^2 > Y^2 > 0$.

If v is even, then we write the relations $\pm u = u_1^2 - pv_1^2$, $v = 2u_1v_1$, $y^2 = \pm 4u_1v_1(u_1^2 - pv_1^2)$, where u_1, v_1 are relatively prime. Taking $u_1 = \pm X^2$, $v_1 = \pm Y^2$ we get the equation $X^4 - pY^4 = \pm Z^2$ (Z odd) with the sign $+$ to the right. There suits the inequality $y^2 = |4uu_1| Y^2 > Y^2 > 0$.

In either case we deduce from the solution x, y, z of the equation (1) a new solution X, Y, Z where $0 < Y^2 < y^2$. But this is not possible, because we have assumed that x, y, z is the solution with

the least value of y^2 . Thus $y=0$ is the single solution of the equation (1); and the same case may be deduced from the equations

$$x^4 + 4py^4 = z^2, \quad 4x^4 + py^4 = z^2.$$

In a similar manner it may be shown that $y=0$ is also the single rational solution of the equations

$$x^4 - q^3y^4 = z^2, \quad x^4 + 4q^3y^4 = z^2, \quad 4x^4 + q^3y^4 = z^2,$$

where q is a prime $\equiv 5 \pmod{16}$.

§ 2. Let us consider the equation

$$(2) \quad x^4 + p^2y^4 = z^2, \quad p \text{ prime } \equiv 5 \pmod{8}.$$

If y is odd, the relations $py^2 = u^2 - v^2$, $x^2 = 2uv$ are obtained, where u, v are relatively prime and uv even.

Taking first $u = \pm u_1^2$, $v = \pm 2v_1^2$, we get the equation

$$u_1^4 - 4v_1^4 = py^2;$$

splitting this into factors, we shall consider the two cases:

$$\begin{cases} u_1^2 + 2v_1^2 = y_1^2 \\ u_1^2 - 2v_1^2 = py_2^2, \end{cases} \quad \begin{cases} u_1^2 + 2v_1^2 = py_1^2 \\ u_1^2 - 2v_1^2 = y_2^2 \end{cases}$$

$$(y = y_1y_2).$$

Here we see that v_1 is even and $p \equiv 1 \pmod{8}$.

Taking secondly $u = \pm 2u_1^2$, $v = \pm v_1^2$ we write the equation

$$4u_1^4 - v_1^4 = py^2.$$

This will be solved by one of the systems

$$\begin{cases} 2u_1^2 + v_1^2 = y_1^2 \\ 2u_1^2 - v_1^2 = py_2^2, \end{cases} \quad \begin{cases} 2u_1^2 + v_1^2 = py_1^2 \\ 2u_1^2 - v_1^2 = y_2^2. \end{cases}$$

In the first system u_1 is even and $p \equiv 7 \pmod{8}$. In the second system u_1 is odd or even and we have respectively $p \equiv 3$ or $p \equiv 1 \pmod{8}$.

Thus we may suppose that y is even. Then we express from (2) the relations

$$py^2 = 2uv, \quad x^2 = u^2 - v^2,$$

where u, v are relatively prime and v an even number.

We set first $v = \pm 2v_1^2$, $u = \pm pu_1^2$ and get the equation $p^2u_1^4 - 4v_1^4 = x^2$. It follows that $pu_1^2 = u_2^2 + v_2^2$, $v_1^2 = u_2v_2$ (u_2, v_2 relatively prime). The assumption $u_2 = \pm X^2$, $v_2 = \pm Y^2$ leads to the equation $X^4 + Y^4 = pu_1^2$, where $p \equiv 1 \pmod{8}$.

Secondly we put $u = \pm u_1^2$, $v = \pm 2pv_1^2$ and write the equation $u_1^4 - 4p^2v_1^4 = x^2$. There suit the relations $u_1^2 = u_2^2 + v_2^2$, $pv_1^2 = u_2v_2$ (u_2, v_2 relatively prime). Setting $u_2 = \pm X^2$, $v_2 = \pm pY^2$ we get the equation $X^4 + p^2Y^4 = u_1^2$ which is of the same form as (2). The inequality $y^2 = |4uu_2| Y^2 > Y^2 > 0$ shows that $y=0$ is the single solution of the equation (2). Exactly the same may be said about the equations

$$4x^4 - p^2y^4 = z^2, \quad x^4 - 4p^2y^4 = z^2.$$

$y=0$ is also the single rational solution of the equations

$$x^4 - q^2y^4 = z^2, \quad x^4 + 4q^2y^4 = z^2, \quad 4x^4 + q^2y^4 = z^2$$

where q is a prime $\equiv 3 \pmod{8}$. It may be proved, using the method of infinite descent and the known propriety*, that $z=0$ is the single rational solution of the equation $x^4 - y^4 = qz^2$.

§ 3. Let us now consider the equation

$$(3) \quad x^4 - 2p^2y^4 = z^2, \quad p \text{ prime } \equiv 3 \pmod{8}.$$

If we suppose that (3) may be divided by p^2 , we are led to the equation

$$(3') \quad p^2X^4 - 2Y^4 = Z^2.$$

Hence we have $pX^2 = u^4 + 8v^4$ or $p \equiv 1 \pmod{8}$. Consequently we shall suppose that x, py in (3) are relatively prime; this leads us to one or the other of the equations

$$(i) \quad x^2 = p^2u^4 + 8v^4, \quad (ii) \quad x^2 = u^4 + 8p^2v^4 \\ (y = \pm 2uv).$$

From (i) we express $\pm pu^2 = u_1^4 - 2v_1^4$ and deduce $p \equiv \pm 1 \pmod{8}$. The equation (ii) can be solved by one of the systems

$$(\alpha) \begin{cases} u^2 = 2u_1^2 - v_1^2 \\ pv^2 = u_1v_1, \end{cases} \quad (\beta) \begin{cases} u^2 = u_1^2 - 2v_1^2 \\ pv^2 = u_1v_1 \end{cases}$$

(u_1, v_1 relatively prime).

Setting $u_1 = \pm pX^2$, $v_1 = \pm Y^2$ we get from (α) the equation $u^2 + Y^4 = 2p^2X^4$, where uY is not divisible by p . But such a sum of two squares is never divisible by a prime number $p \equiv 3 \pmod{4}$.

* See *H. C. Pocklington* — Some Diophantine Impossibilities. Proc. Cambr. Phil. Soc., vol. 17 (1914), or *T. Nagell* — Résultats nouveaux de l'analyse indéterminée. Norsk Mat. For. Skrifter, serie I, Nr. 8.

Hence the last equation is impossible. If on the contrary we set $u_1 = \pm X^2$, $v_1 = \pm pY^2$, we get the equation $u^2 = 2X^4 - p^2Y^4$, where uX is not divisible by p . It follows that 2 is a quadratic residue of the prime number p and consequently $p \equiv \pm 1 \pmod{8}$.

Let us now consider the system (β). Putting $u_1 = \pm pX^2$, $v_1 = \pm Y^2$ we get an impossible equation of the same form as (3'). If on the contrary we set $u_1 = \pm X^2$, $v_1 = \pm pY^2$, then we have the equation $X^4 - 2p^2Y^4 = u^2$ which is of the same form as (3). The inequality $y^2 = (2uXY)^2 > Y^2 > 0$ proves that (3) cannot be satisfied by a rational number y other than $y = 0$. — The same may be proved about the equations

$$x^4 + 2q^2y^4 = z^2, \quad x^4 - 8q^2y^4 = z^2$$

where q is a prime $\equiv 5 \pmod{8}$.

§ 4. We shall get some other impossible equations by using the following theorem:

If the number $A \not\equiv \pm 1, 3, 9 \pmod{16}$ contains only odd powers of prime factors, $A = \pm a\alpha^2$ (where a is not divisible by a square number other than 1) and there exist no integers u, v, w all different from zero, such as

$$(4) \quad \begin{cases} a_1u^2 \pm a_2v^2 = w^2 \\ a_1u, a_2v \text{ relatively prime, } uv \text{ even, } a_1a_2 = a, a_1 > 1, \end{cases}$$

then $y = 0$ is the single rational solution of the equation

$$(5) \quad x^4 + Ay^4 = z^2.$$

Let us suppose that (5) has a solution in integers x, y, z and y^2 has the least possible value > 0 . Then x, Ay are relatively prime and Ay is even. From (5) we get the relations

$$x^2 = u^2 - \varepsilon av^2, \quad \alpha y^2 = 2uv$$

where u, av are relatively prime and $\varepsilon = \text{sign } A$. There are two cases to be considered.

1) If A is not divisible by 8, then we shall set $v = \pm \alpha v_1^2$, $u = \pm 2u_1^2$ or $v = \pm 2\alpha v_1^2$, $u = \pm u_1^2$. We get the equations

$$(i) \quad 4u_1^4 - Av_1^4 = x^2, \quad (ii) \quad u_1^4 - 4Av_1^4 = x^2.$$

From (i) we have

$$(2u_1)^2 = u_2^2 + \varepsilon av_2^2, \quad \alpha v_1^2 = u_2v_2.$$

Here u_2, av_2 are relatively prime and we shall set $u_2 = \pm X^2$, $v_2 = \pm \alpha Y^2$. Then we get the equation $X^4 + AY^4 = (2u_1)^2$ which is of the same form as (5). The inequality $y^2 = |2uu_2| Y^2 > Y^2 > 0$ is a contradiction to the assumption about the least value of y^2 .

From (ii) we express

$$u_1^2 = u_2^2 + \varepsilon av_2^2, \quad \alpha v_1^2 = u_2 v_2.$$

Here we shall set $u_2 = \pm X^2$, $v_2 = \pm \alpha Y^2$. Then it follows that X, Y, u_1 is a solution of the equation (5). But it is not possible because of the inequality $y^2 = |4uu_2| Y^2 > Y^2 > 0$.

2) If A is divisible by 8 or $\alpha = 2\alpha_1$, we have to set $u = \pm X^2$, $v = \pm \alpha_1 Y^2$. This leads to the equation

$$X^4 - A_1 Y^4 = x^2,$$

and we may suppose that $A_1 = A/4$ is not divisible by 8.

We shall now make some uses of the proved theorem. Let (a, b, c) designates the equation $ax^4 + by^4 = cz^2$, and let p, q be unequal positive primes and ν, μ positive odd numbers. Since the equation $pu^2 - v^2 = w^2$ is impossible, if $p \equiv 3 \pmod{4}$, it follows that $y=0$ is the single rational solution of the equations

$$(6) \quad (1, A, 1), \quad (1, -4A, 1), \quad (4, -A, 1)$$

where

$$A = p^\nu \equiv 7, 11 \pmod{16} \text{ or } -A = p^\nu \equiv 3 \pmod{8}.$$

Considering that the equation $2pu^2 - v^2 = w^2$ (u even) is impossible to modulus 8, and the equations $2u^2 \pm pv^2 = w^2$, $-2u^2 + pv^2 = w^2$ are impossible, if $p \equiv \pm 3 \pmod{8}$, — we see that $y=0$ is the single solution of the equations

$$(7) \quad (1, 2A, 1), \quad (1, -8A, 1)$$

where

$$A = p^\nu \equiv 3, 5 \pmod{8}.$$

Let us now suppose that A contains two prime numbers p, q , one of which is $\equiv 1 \pmod{4}$ and $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$. Then from the law of reciprocity we get also $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$ and thus the equations $pu^2 \pm qv^2 = w^2$ are impossible. And so is the equation $au^2 - v^2 = w^2$, too, if the other of the primes p, q is $\equiv 3 \pmod{4}$. In such a manner we get the (with $y \neq 0$) impossible equations (6), where

$$A = p^\mu q^\nu \equiv 7, 11 \pmod{16}, \quad \left(\frac{p}{q}\right) = -1;$$

$$-A = p^\mu q^\nu \equiv 3 \pmod{8}, \quad \left(\frac{p}{q}\right) = -1.$$

Setting $p=3$ and 5 , we get the following special values of A which make (6) impossible, viz.

$$\left. \begin{array}{l} A = 3q, \quad q \equiv 29, 41 \\ A = 3q^3, \quad q \equiv 5, 41 \\ A = 27q, \quad q \equiv 5, 17 \\ A = 27q^3, \quad q \equiv 17, 29 \end{array} \right\} \pmod{48}; \quad \left. \begin{array}{l} A = 5q, \quad q \equiv 27, 43, 47, 63 \\ A = 5q^3, \quad q \equiv 3, 47, 63, 67 \\ A = 125q, \quad q \equiv 3, 7, 23, 67 \\ A = 125q^3, \quad q \equiv 7, 23, 27, 43 \end{array} \right\} \pmod{80};$$

$$-A = 3^\mu q^\nu, \quad q \equiv 17 \pmod{24};$$

$$-A = 5^\mu q^\nu, \quad q \equiv 7, 23 \pmod{40}.$$

The equation $2pqu^2 - v^2 = w^2$ (u even) is impossible to modulus 8 and the equation $2pu^2 + qv^2 = w^2$ is impossible if $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$. Is $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$, the equation $2pu^2 - qv^2 = w^2$ where $q \equiv -1 \pmod{8}$, is impossible modulo q , and so is the equation $-2pu^2 + qv^2 = w^2$, too. That proves that $y=0$ is the single rational solution of the equations (7), where

$$A = p^\mu q^\nu \equiv 3 \pmod{8}, \quad \left(\frac{p}{q}\right) = -1.$$

Setting $p=3$ and 5 , we get the following special values of A which make (7) impossible, viz.

$$-A = 3^\mu q^\nu, \quad q \equiv 17 \pmod{24};$$

$$-A = 5^\mu q^\nu, \quad q \equiv 7, 23 \pmod{40}.$$

S u m m a r y. We have proved by the method of infinite descent that $y=0$ is the single rational solution of the equations

$$(1, A, 1), \quad (1, -4A, 1), \quad (4, -A, 1)$$

where

$$\left. \begin{array}{l} A = p^\nu \equiv 7, 11 \pmod{16}; \\ A = p^2, \quad p \equiv 5 \pmod{8}; \\ -A = p^\nu \equiv 3, 11, 13 \pmod{16}; \\ -A = p^2, \quad p \equiv 3 \pmod{8}; \\ A = p^\mu q^\nu \equiv 7, 11 \pmod{16}, \quad \left(\frac{p}{q}\right) = -1; \\ -A = p^\mu q^\nu \equiv 3 \pmod{8}, \quad \left(\frac{p}{q}\right) = -1; \end{array} \right\} \text{(I)}$$

and the equations

$$(1, 2A, 1), \quad (1, -8A, 1)$$

where

$$\left. \begin{aligned} A &= p^v \equiv 3, 5 \pmod{8}; \\ A &= p^2, p \equiv 5 \pmod{8}; \\ -A &= p^2, p \equiv 3 \pmod{8}; \\ A &= p^\mu q^v \equiv 3 \pmod{8}, \left(\frac{p}{q}\right) = -1. \end{aligned} \right\} \text{(II)}$$

Here p and q are unequal positive primes, μ and v are positive odd numbers and (a, b, c) designates the diophantine equation $ax^4 + by^4 = z^2$.

Presented to the Faculty 29-th Sept. 1937.

Daži neiespējami diofantiski vienādojumi ar formu

$$x^4 + Ay^4 = z^2.$$

E. Fogels.

Kopsavilkums.

Ja diofantisko vienādojumu $ax^4 + by^4 = cz^2$ apzīmē ar (a, b, c) , p , q ir dažādi pozitīvi pirmskaitļi un μ , ν pozitīvi nepāru skaitļi, tad ar *descente infinie* metodi pierāda, ka A vērtībām (I) (lp. 72) vienādojumu

$$(1, A, 1), \quad (1, -4A, 1), \quad (4, -A, 1)$$

un A vērtībām (II) (lp. 73) vienādojumu

$$(1, 2A, 1), \quad (1, -8A, 1)$$

vienīgais racionālais atrisinājums ir $y=0$. Šo rezultātu lielāko daļu secina no 4. § pierādītās teorēmas:

Ja veselais skaitlis A satur dažādu pirmskaitļu nepāru pakāpes, izteic $A = \pm ax^2$, kur a nedalās ar pirmskaitļa kvadrātu, $A \not\equiv -1, 1, 3, 9 \pmod{16}$, un neviens no nesaīsināmiem vienādojumiem

$$a_1u^2 \pm a_2v^2 = w^2 \quad (uv \mid 2, a_1a_2 = a, a_1 > 1)$$

nav iespējams ar $uvw \neq 0$, tad vienādojumu $(1, A, 1)$, $(1, -4A, 1)$, $(4, -A, 1)$ vienīgais racionālais atrisinājums ir $y=0$.

Izvēlētām A nozīmēm $\equiv -1, 1, 3, 9 \pmod{16}$ vienādojumā $(1, A, 1)$ Ay ir pāru skaitlis. Teorēmu pierāda ar *descente infinie* metodi, ja izlieto vienādojuma

$$x^2 - ay^2 = z^2 \quad (a > 0, ay \text{ pāru skaitlis})$$

atrisināšanas formulu

$$\pm x = a_1u^2 + a_2v^2, \quad y = 2uv, \quad \pm z = a_1u^2 - a_2v^2,$$

kur u, v relatīvi pirmskaitļi.

1. § apskatītajiem vienādojumiem ir $A \equiv 3 \pmod{16}$, kādēļ minēto teorēmu nevar izlietot. Te ir jāapskata divi atsevišķi gadījumi, pieņemot y par pāru vai nepāru skaitli.

2. un 3. §§ apskatīti daži gadījumi, kad A satur pirmskaitļa pāru pakāpi.

Rezultāti un literatūra par apskatītā tipa vienādojumiem atrodami darbos L. E. Dickson — History of the Theory of Numbers II, New-York, 1934, p. 627—634, T. Nagell — L'analyse indéterminée de degré supérieur, 1929, Mémorial des sciences mathématiques, fasc. XXXIX, p. 16.

1937. g. 29. sept.

Überführungsenergien

von B. Bružs.

Als Resultat einer durchgreifenden energetischen Analyse des Diffusionselements und der polarisierten galvanischen Zelle werden zwei prinzipiell neue Thesen aufgestellt. Erstens wird der Weg angegeben, sonst unzugängliche Verdünnungsenergien (Gl 11, 12 und 8 b) und absolute Entropien (Gl. 7a) einzelner Ionenarten aus verhältnismäßig leicht zugänglichen elektrochemischen Daten zu bestimmen.

Zweitens wird nachgewiesen, daß zwischen den erwähnten thermodynamischen Eigenschaften der Ionen und ihren rein dynamischen Eigenschaften wie Leitfähigkeit, Diffusion und Überführungszahl eine thermodynamische, auf Grund experimenteller Beobachtungen abgeleitete Beziehung (Gl. 18 b) besteht.

Es wird angedeutet, daß die erhaltenen Resultate auf die Existenz eines allgemeinen statistischen Kraft-Gesetzes hindeuten, und dies Gesetz wird in die Form einer Überführungstheorie gekleidet.

1. Einleitung.

Seit den Jahren, in denen Gibbs und Helmholtz durch die Anwendung des zweiten Wärmesatzes auf galvanische Elemente, die Elektrochemie als einen der präzisesten Zweige der angewandten Thermodynamik begründeten, ist die Aufmerksamkeit der Elektrochemiker in zwei Richtungen konzentriert gewesen. Einerseits wurde in den Theorien der elektrolytischen Dissoziation und in Nernst's Theorie der galvanischen Stromerzeugung das Interesse auf den Aufbau und die mechanistische Deutung elektrischer Systeme gerichtet. Andererseits war eine Reihe von Forschern mit der Erwerbung und rationellen Verwertung elektrochemischer Daten als reicher Quelle für eine systematische Chemie beschäftigt. Inzwischen aber blieb die rein energetische Behandlung der galvanischen Einzel-Effekte, besonders der

thermischen Effekte, soweit vernachlässigt, daß von zufälligen und umstrittenen Theorien abgesehen, unsere Kenntnisse heutzutage kaum über diejenigen hinausgehen, die schon zu Helmholtz's Zeiten klargestellt waren.

Die vorliegende Arbeit versucht nun direkt auf die zu Helmholtz's Zeiten abgebrochenen Überlegungen zurückzugreifen und zu zeigen, daß wichtige, die einzelnen Effekte betreffende, thermodynamische Schlüsse auf Grund bekannter, aber sonst nur einseitig verwerteter experimenteller Befunde sich ziehen lassen. Diese Schlüsse dürften doppeltes Interesse beanspruchen, erstens als durch sie eine klassische Lösung in sonst sehr strittigen Fragen erreicht wird, zweitens aber insofern, als durch sie die Möglichkeit eröffnet wird, eine Reihe sonst unverwerteter experimenteller Meßergebnisse als thermodynamisches Material für die systematische Chemie nutzbar zu machen (vgl. Zusammenfassung).

Im Gegensatz zu einer deduktiven Erörterung des Problems, wie sie in mechanistischen Theorien angewandt wird, werden wir rein induktiv, von einer experimentell bekannten Tatsache zur anderen vorgehen, jedesmal die eingeführten thermodynamischen Einschränkungen maximal ausnutzend, und hoffen dann am Schluß, bei einem Maximum gelöster Fragen, die schon zur klassischen Zeit der Elektrochemie gemachten Annahmen nur minimal erweitert zu haben.

Unsere wichtigste Erweiterung der thermodynamischen Resultate wird darum nicht auf a priori Annahmen, sondern auf experimentellen Tatsachen beruhen. Unter ihnen wird für die zweite Hauptthese der Arbeit (Zusammenhang dynamischer und Gleichgewichts-Konstanten) das sogenannte Reziprozitätsphänomen von hervorragender Bedeutung sein. Es ist dies das Phänomen der Existenz zweier formunabhängiger Beziehungen zwischen den Potentialgrößen (*EMK* und Konzentration), von denen nur die „kompensierte“ (hier Diffusionselement) gewöhnlich analysiert wird, wogegen die zweite (vgl. Abschnitt 7 — polarisierte Zelle) energetisch vernachlässigt worden ist.¹

¹ Übrigens ist das Reziprozitätsphänomen ein sehr allgemeines, aber auch allgemein verkanntes Phänomen. Seine Rolle für die Formulierung eines neuen thermodynamischen Satzes liegt in dem Umstande, daß nach klassisch angelegter Lösung (Helmholtz, Kelvin) der aus dem kompensierten System folgenden Beziehung zwischen den Potentialgrößen (hier $dE/d \ln N$) man gezwungen ist, eine thermodynamische Einschränkung irreversibler Prozesse zu erwarten, um aus schon anerkannten Annahmen eine energetische Bilanz für die zweite formunabhängige Beziehung ($dE_r/d \ln N$) des reziproken Systems zu erhalten. Den Charakter eines allgemeinen thermodynamischen

Ohne auf die dramatisch interessanten Momente in der historischen Reihenfolge der Anwendung der Thermodynamik auf galvanische Probleme einzugehen, werden wir doch die wichtigsten Etappen des klassischen Arguments wiederholen müssen. Dadurch ersparen wir uns einerseits die Mühe einer ausführlichen Begriffsbildung, andererseits wird es sich als Endresultat der Arbeit herausstellen, daß die konsequent verallgemeinerten und schon in der klassischen Theorie benutzten Hilfsannahmen ein eigenes Interesse beanspruchen dürfen, insofern, als in ihnen die wahrscheinlichen Elemente eines allgemeingültigen Naturgesetzes verborgen zu sein scheinen.

2. Das stabile galvanische Element.

Rein historisch ist die Anwendung der Thermodynamik auf galvanische Ketten Hand in Hand mit der Entdeckung und Formulierung der Wärmesätze selbst gegangen. Wenn wir aber die thermodynamischen Sätze als gegeben annehmen, so müssen wir als erste Stufe der Anwendung der Thermodynamik auf galvanische Elemente in der Erkenntnis sehen, daß ein stabiles galvanisches Element ein ganz besonders sinnreich aufgebautes und kontrollierbares chemisches System darstellt. Und zwar soll in diesem chemischen System der Ablauf einer chemischen Reaktion sich ganz präzise durch ein äußerlich angelegtes elektrisches System, das als Quelle und Senke von freier Energie auftritt, lenken lassen. Vergrößert man die *EMK* des elektrischen Systems, das wir der Kürze halber immer Motor nennen wollen, über einen charakteristischen Grenzwert, so leistet der Motor Arbeit, und diese Arbeit wird als chemische Energie in System aufgespeichert. Vermindert man die *EMK*, so gewinnt der Motor Arbeit, und die galvanische Kette verliert chemische Energie. Die *EMK* ΔE_g , bei der galvanische Kette und Motor im Gleichgewicht sind, und bei dem das sonst so empfindliche System unendlich haltbar ist, ist offenbar ein charakteristisches Maß für die „Kraft“ der chemischen Reaktion, die mit analytischen Mitteln nach Durchtritt eines endlichen Stromes beobachtet wird, d. h. ΔE_g ist ein charakteristisches intensives Maß der angenommenen Reaktion.

Satzes erhält die Erweiterung des klassischen Gesetzes der *EMKK* dadurch, daß allen kompensierten stationären Systemen entsprechende reziproke Systeme zugeordnet sind, in die nur ein neuer und zwar ein „Reibungseffekt“ hinzutritt, der sich in die Bilanz eines formunabhängigen Systems auf ganz allgemeiner Grundlage unterbringen läßt. Da der Reibungseffekt durch materielle Überführung bedingt wird, darf seine Deutung als Überführungstheorie angesprochen werden.

Eine Äußerung über die Energie-Änderungen dieses Systems wird erst durch Faraday's Gesetz gewährleistet, welches feststellt, daß gleich der Motorarbeit auch die chemische Reaktion eine lineare Funktion des durchgegangenen Stromes ist. Hat man durch einen unabhängigen analytischen Versuch die Reaktionsformel und die einem umgesetzten Mol entsprechende Strommenge (das Faraday Equivalent $z\mathfrak{F}$) festgestellt und angenommen, daß es dieselbe Reaktion ist, deren Gleichgewicht mit $\Delta E_{\mathfrak{g}}$ charakterisiert ist, so läßt sich auf das galvanische Element die Gleichung anwenden $z\mathfrak{F} \cdot \Delta E_{\mathfrak{g}} =$ chemische „Umwandlungsenergie“, in der die thermodynamische Bedeutung von „Umwandlungsenergie“ noch unklar bleibt. Die Zusammenstellung einer allgemeinen experimentellen Situation nämlich — der Existenz charakteristischer *EMKK* für bestimmte lenkbare chemische Reaktionen — mit dem ersten Wärmesatz, verdanken wir Joule, Lord Kelvin und Helmholtz. Dieselben Forscher begingen aber einen erst später (von Horstmann, Lord Raleigh, Braun und besonders von Helmholtz selbst) erkannten Fehler, und zwar übersahen sie die Tatsache, daß der Umsatz zwischen elektrischer und chemischer Energie der im galvanischen Element, dem Faraday-Gesetz folgend, proportional der Stromstärke vor sich geht, von rein thermischen Effekten begleitet wird, und zwar von thermischen Effekten zweier Arten: erstens von thermischen Effekten, die von der Stromrichtung nicht abhängen, und die als Reibungseffekte betrachtet werden können, zweitens aber von thermischen Effekten, die der Stromstärke proportional sind, und die außerdem genau wie die chemischen Umsetzungen ihr Zeichen bei Stromwendung ändern.

Es war die Erkenntnis der Rolle dieser neuen Effekte in der thermodynamischen Bilanz des galvanischen Elements durch Gibbs und Helmholtz, die die heutige Elektrochemie begründete. Diese Forscher erkannten, daß die Energie, die Motor und Zelle austauschen, die „Gibbs'sche“ freie Energie (ΔF) der chemischen Reaktion vorstellt, wogegen die zwischen Zelle und Umgebung ausgetauschte thermische Energie der zweiten oben beschriebenen, vektoriellen Art, die latente Energie ($T\Delta S$) derselben chemischen Reaktion darstellt (Gesetz der *EMKK*).

Die große Bedeutung dieses Gesetzes manifestierte sich nicht so sehr in gelungenen Berechnungen galvanischer Potentiale aus thermochemischen Daten, die zufällig auch ohne des zweiten Satzes leidlich stimmten, sondern besonders in der Erstreckung des zweiten Wärmesatzes auf galvanische Elemente und der daraus folgenden

Klärung und thermodynamischen Verwertung sonst unbeachteter experimenteller Befunde. Die Gibbs-Helmholtz'sche Interpretation führt als Anwendung des ersten Satzes zur Gleichung:

Kalorimetrische Wärmetönung $(-\Delta H) =$ am Motor geleistete Arbeit $(z\mathfrak{F} \cdot \Delta E = -\Delta F) +$ latenter thermischer Effekt $(-T\Delta S)$, in der die beiden Glieder der rechten Seite durch Hereinspielen des zweiten Satzes voneinander abhängige Größen werden. Es existiert nämlich nach dem zweiten Wärmesatz zwischen ΔF und der Entropieänderung ΔS die allgemeine Beziehung

$$\Delta S = - \left(\frac{\partial \Delta F}{\partial T} \right)_P.$$

Berücksichtigt man diesen Umstand, so wird nicht nur die präzise kalorimetrische Wärmetönung, sondern auch die sonst schwer zu ermittelnde Entropieänderung ΔS aus reinen Potentialbestimmungen berechenbar:

$$\Delta H = -z\mathfrak{F} \left(\Delta E - T \frac{\partial \Delta E}{\partial T} \right) \dots \dots \dots (1)$$

$$\Delta S = -z\mathfrak{F} \frac{\partial \Delta E}{\partial T} \dots \dots \dots (2)$$

Die erste Gleichung ist oft bestätigt worden und liefert das zurzeit zuverlässigste Material für eine quantitative Prüfung des zweiten Wärmesatzes und des klassischen Gesetzes der elektromotorischen Kräfte.

Daß die klassische Theorie die experimentelle Prüfung so glänzend besteht, sollte uns darum weiter interessieren, weil die Interpretation des galvanischen Elementes in praktischen Fällen auf eine besondere Schwierigkeit stößt. Es ist nämlich keine galvanische Kette stabil und, wie klein sie auch sein mag, existiert in jeder Kette eine Diffusion und, mit ihr verbunden, eine spontane chemische Reaktion. So muß z. B. im Weston Element wegen endlicher Löslichkeit von Hg_2SO_4 letzteres bis zum Cd-Amalgam diffundieren und sich dortselbst umsetzen. Nun ist es wahr, daß in guten Ketten die Diffusion auf minimale Beträge heruntersinkt, prinzipiell aber ist sie immer zugegen, und wir müssen bei dieser Gelegenheit uns auch besonders noch daran erinnern, daß wir ja $\Delta E_{\mathfrak{F}}$ auch auf stromlosen Zustand interpolieren, d. h. auf einen Zustand, wo die elektrisch umgesetzte chemische Energie mit der durch Diffusion bedingten konkurriert.

Die rein empirische Erfahrung, daß reale galvanische Elemente den strengen Forderungen der als stabil definierten Systeme recht allgemein

genügen, ohne wirklich stabil zu sein, führt zu einer natürlichen Erweiterung des Gesetzes der elektromotorischen Kräfte. Wir sehen leicht, daß der Diffusionsprozeß nicht in die allgemeine „Maschinerie“ der Prozesse gehört, die von einem elektrischen Strom hervorgerufen werden und dann dem Strom proportional stattfinden — wie es außer den materiellen elektrolytischen Prozessen noch mit allen reversiblen thermischen Effekten der Fall ist. Es ist darum natürlich, das Gesetz der *EMKK* dahin zu erweitern, daß das im galvanischen Element beobachtete Potential ΔE_{g} , sich einzig und allein auf die Folge von Effekten bezieht, die proportional dem Strome stattfinden, wenn ΔE_{g} sich von seiner Gleichgewichtslage verschiebt. Diese Anschauung findet ihre erste Bestätigung im Umstande, daß sich keine Änderung von ΔE_{g} in Abhängigkeit von der absoluten Diffusion in der Zelle feststellen läßt, obwohl letztere durch entsprechende Formgebung der Zelle in relativ weiten Grenzen variiert werden kann. Eine weitere Bestätigung findet die Ansicht durch allgemeine physikalische Erfahrung auf anderen Gebieten.

Haben wir z. B. zwei unendlich große Wasserreservoirs, die im Gravitationsfelde sich verschieden hoch befinden, so können wir zwischen den beiden Reservoirs ein reversibles Turbinen-System aufstellen, durch das bei Erhöhung der auf die Turbine wirkenden Kraft (K) „äußere“ mechanische Energie aufgebraucht und im oberen Reservoir als übergeführtes Wasser aufgespeichert wird. Verkleinern wir die auf die Turbine wirkende Kraft, so wird Wasser auf niederes Niveau übergeführt mit gleichzeitiger Leistung „äußerer“ Arbeit. (Da es sich um mechanische Energieformen handelt, sind die Prozesse mit keinen latente-Wärme-Effekten verbunden.) Nun ist es möglich, das Wasser des oberen Reservoirs durch eine gleich dichte und mit reinem Wasser ideal mischbare Flüssigkeit (z. B. eine bestimmte wässrige Salzlösung) zu ersetzen. In diesem Falle ist, rein energetisch genommen, die Überführung der Lösungen aus einem Reservoir ins andere außer von den oben besprochenen mechanischen noch von Diffusions-Prozessen begleitet, wobei letztere ganz bedeutende Quellen freier Energie darstellen können. Es ist aber leicht zu sehen, daß aus dem besonderen Grunde, daß die Turbine nur für Umsätze rein mechanischer Energie empfindlich ist, d. h. daß der Diffusionsprozeß nicht in die „reversible“ Maschinerie der Turbine hineingehört, wir durch den eben beschriebenen Ersatz der Lösungen, keine Änderung der charakteristischen Größe K beobachten werden, ungeachtet dessen, daß durch diesen

Ersatz ein rein irreversibler Prozeß dem eingangs betrachteten reversiblen Prozeß überlagert wird.

In diesem allgemeinen Sinn hat Helmholtz das Gesetz der *EMKK* benutzt, als er das Diffusionselement thermodynamisch behandelte (vgl. nächsten Abschnitt).

Für unsere Zwecke ist es von Bedeutung, schon hier darauf aufmerksam zu machen, daß die oft genügende enge klassische Fassung des Gesetzes der *EMKK* auch für stabile galvanische Elemente nicht mehr ausreicht, wenn eine thermodynamische Verwertung der thermischen Effekte einer galvanischen Zelle versucht wird.

Die speziell für Potential-Messungen zugeschnittene klassische Annahme erkennt wohl die Rolle von thermischen reversiblen Effekten an und interpretiert sie als latente-Wärme Änderungen ($T\Delta S$) des chemischen Systems, sieht aber nicht vor, daß diese Effekte experimentell bestimmt werden können. Zur experimentellen Bestimmung bedarf man endlicher Ströme, letztere bringen aber neue Effekte (Joule-Wärme) und eventuelle Rückwirkungen auf die reversiblen thermischen Effekte, die auf Stromlosigkeit extrapoliert sind. Hier haben die Experimentalforscher zusammen mit Helmholtz schon seit langem das enge klassische Gesetz erweitert und erfolgreich latente Wärmen chemischer Prozesse aus Messungen der thermischen Effekte stromdurchflossener Elemente bestimmt. Es hat sich nämlich wieder rein empirisch erwiesen, daß ähnlich den materiellen Effekten (Faraday-Ausbeuten) die thermischen Effekte dem Strome, was Zeichen und Intensität anbetrifft, proportional sind. Von Reibungseffekten lassen sie sich durch Stromwendung trennen. Die von der Theorie wenig berücksichtigte Sachlage resultiert, daß die reversiblen materiellen, elektrischen und thermischen Effekte eine von irreversiblen Effekten unbeeinflusste Sonderexistenz besitzen.

Interessieren wir uns weiter für diesen auffallenden Zusammenhang der materiellen und thermischen Umwandlungen, so stoßen wir bald auf die Frage nach der räumlichen Verteilung der thermischen Effekte und nach der Anwendbarkeit klassischer Überlegungen auf die einzelnen Effekte (z. B. Peltier—Effekte). Durch die Anwendung des Faraday-Gesetzes und des Hittorf'schen Gesetzes der Ionenwanderung, können wir die chemischen Prozesse lokalisieren, und es wäre nur eine logische Folgerung der Gedankengänge von Gibbs und Helmholtz, wenn wir allen den chemischen Prozessen (Aggregatänderungen bzw. Konzentrationsänderungen), die in der Zelle stattfinden, die ihnen

entsprechenden latente-Wärme-Änderungen zuschreiben würden. Auf dieser Überlegung fußend, könnten z. B. die Peltier-Wärme als die latente-Wärme aufgefaßt werden, die dem heterogenen Elektrodenprozeß entspricht.

Es ist nun mit Recht die strenge Ansicht vertreten worden, daß die letzten Schlußfolgerungen keine notwendige Folge der klassischen Theorie sind, die sich nur auf den summarischen Prozeß der Zelle bezieht, ohne ihn räumlich zu unterteilen, ja, krasser gesagt, die sich mit einer Interpretation von gemessenen Potentialen begnügt, ohne nähere Auskünfte über faktisch an einer arbeitenden Zelle gemessene Energiegrößen zu geben.

Es wird die Aufgabe weiterer Abschnitte sein, nachzuweisen, daß man ohne einen sicheren Kontakt mit der Thermodynamik zu verlieren, die klassischen Annahmen in der liberaleren Richtung sicher erweitern kann. Einerseits wird dadurch eine Deutung aller im galvanischen Element auftretender Effekte ermöglicht, andererseits wird die prinzipielle Gleichheit des Problems der galvanischen Diffusionskette mit dem Problem des Thermoelements unmißverständlich erwiesen. Die erweiterte klassische Annahme, die jedem vom Strome erzeugten chemischen Umsatz seine funktionelle Unabhängigkeit und thermische Effekte latenter Art zuschreibt, wollen wir die Superpositions-Annahme nennen.

3. Das Diffusionselement.

Die klassische Zeit der Elektrochemie hat sich immer an die liberalere Fassung des Gesetzes gehalten, und es waren nebensächliche Umstände, wie z. B. die experimentellen Schwierigkeiten bei den Messungen von Peltier-Wärmen, die auf ein näheres Eingehen verzichten ließen. In dieser Hinsicht ist es interessant darauf hinzuweisen, daß Helmholtz² in seinen elektrochemischen Arbeiten den zweiten Wärmesatz zum ersten Mal gerade auf ein System anwandte, das nicht im Gleichgewicht war, — nämlich auf das nun zu besprechende Diffusions-Element (oder „Konzentrations-Element mit Flüssigkeits-Potential“), das schon 1804 von Bucholz³ gefunden und von Ritter definiert war. Um die explizite Ausschaltung der Diffusion aus der Energiebilanz zu zeigen, geben wir nun eine kurze Ableitung der Helmholtz'schen Gleichung.

² H. v. Helmholtz Monatsber. d. K. P. Akademie d. Wiss. Berlin 713-726, 1877.

³ C. F. Bucholz Neues allg. Journ. d. Chemie 3, 324, 1804;

J. W. Ritter *ibid.* 4, 253, 1805.

Wir betrachten der Einfachheit halber das stationäre Diffusionsgefälle eines verdünnten binären Elektrolyts. Durch zwei gleiche Elektroden, die mit einem der Ionen des Elektrolyts reagieren, wird der Spannungsunterschied dE_{g} zwischen zwei Stellen mit der Zusammensetzung N_2 und $N_2 + d \ln N_2$ kompensiert⁴. Die Erfahrung lehrt, daß diese experimentelle Anordnung Werte von dE liefert, die nur von N_2 bzw. $d \ln N_2$, nicht aber von äußeren Formfaktoren abhängen, also im besonderen nicht von der Größe der Elektroden und auch nicht vom Absolut-Wert der Diffusion. Die Diffusion selbst ist von Formfaktoren abhängig, da sie nicht nur von N_2 bzw. $d \ln N_2$, sondern auch noch von einem Abstände dx zwischen den Stellen mit vorgeschriebener Konzentration bestimmt wird.

Wir haben es also hier, wie bei „stabilen“ Ketten, in $\chi_{\text{g}} = \frac{dE_{\text{g}}}{d \ln N_2}$ mit intensiven, gewisse Prozesse charakterisierenden Koeffizienten zu tun. Außerdem können wir auf analytischem Wege oder in einfachen Fällen direkt aus den Gesetzen der Hittorf-Wanderung die chemischen Prozesse bestimmen, die einen kleinen Strom in der Nähe der Kompensationsspannung dE_{g} begleiten werden. Die Prozesse (pro zF Einheiten Stromes gerechnet) bestehen im Verschwinden von einem Grammatom des Elektrodenmaterials an einer Elektrode und dem entsprechenden Erscheinen an der anderen; gleichzeitig werden $(1-t)$ Gramm Mole Elektrolyt in der Lösung von einer Elektrode zu anderen übertragen (t — Überföhrungszahl des sich umsetzenden Ions)⁵.

⁴ Um die Resultate auf Lösungen beliebiger Konzentration anwenden zu können, benutzen wir als Zusammensetzungs-Maß den Molenbruch N , wobei das Subskript 2 für gelösten Stoff gilt. In verdünnten Lösungen ist wegen $N = cV$, $d \ln N$ mit $d \ln c = \frac{dc}{c}$ identisch.

⁵ Was die Größe $1-t$ bzw. t anbetrifft, so muß auf bestimmte Beschränkungen hingewiesen werden, die bei einer rein thermodynamischen Untersuchung des Diffusionselements in Betracht gezogen werden müssen. Allgemein erlaubt die Thermodynamik bei der Auswahl der Komponenten eines binären (bzw. mehrkomponentigen) Systems eine große Willkür. Speziell bei elektrochemischen Systemen wird diese Willkür durch allgemein chemische Erfahrung kraß eingegrenzt, wenn man sich für „Elektrolyt“ und „Lösungsmittel“ entscheidet. Nun wird bei den in dieser Arbeit behandelten Problemen als Ausdruck neuer Beschränkungen auch die Auswahl der Komponenten eindeutig vorgeschrieben. Wir nehmen weiter an, daß diese Einschränkung mit der chemisch üblichen übereinstimmt, d. h. daß wir es mit einem Fall einer ganz einfachen Hittorf-Wanderung zu tun haben.

Als Kriterium dessen, daß die aus chemischen Rücksichten getroffene Auswahl (besonders betreffs Ionentyp und Assoziation mit Lösungsmittel) mit der thermodyna-

Von den drei Prozessen ist nur letzterer mit einer Änderung der freien Energie verbunden, und zwar entsprechend dem Konzentrationsunterschiede an beiden Elektroden. Wendet man nun das Gibbs-Helmholtz'sche Postulat unter Vernachlässigung der Diffusion⁶ an, so muß die Änderung der freien Energie des chemischen Systems, die durch den Strom hervorgerufen wird, also die freie Verdünnungsenergie $(\frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \ln N_2} d \ln N_2)$ gleich sein der Arbeit des Motors

$$z \mathfrak{F} dE_3 = (1-t) \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \ln N_2} d \ln N_2$$

oder

$$dE_3 = \frac{1-t}{z \mathfrak{F}} \cdot \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \ln N_2} d \ln N_2 \left[= (1-t) \frac{2RT}{z \mathfrak{F}} d \ln c \right]_{c \rightarrow 0}, \quad (3)$$

womit die thermodynamische Lösung des Problems gegeben ist. Man erkennt in dieser Gleichung ohne Schwierigkeiten die von Lewis⁷ gegebene Verallgemeinerung der ursprünglichen Helmholtz'schen Gleichung. Befremdend erscheint zunächst das Auftreten der Überführungszahl t in einer thermodynamischen Gleichung, und man könnte glauben, daß in der vorliegenden Lösung der Frage im Vergleich zur Lösung des stabilen galvanischen Elements neue Motive hinzugekommen sind. Wir werden weiter zeigen, daß diese Befürchtung unbegründet ist. Eben ist es für uns von Bedeutung festzustellen, daß die hinsichtlich der Stabilitätsforderungen verallgemeinerte

misch neuerlich verlangten sich deckt, kann nur eine Untersuchung der Hittorf-Effekte an allen vom System erlaubten Elektroden ergeben. Es muß nämlich bei richtiger Komponentenwahl $\Sigma t = 1$ resultieren.

Die so gewonnene Erkenntnis über die „dynamischen“ Komponenten des Systems ergibt auch das notwendige Material zur Ausdehnung thermodynamischer Betrachtungen auf beliebig konzentrierte Lösungen (vgl. nächsten Abschnitt), bei der man die partiellen Volumen der dynamischen Komponenten kennen muß. Diese Beschränkung fällt erst im Abschnitt 5 fort. Übrigens sei bemerkt, daß die weiter entwickelte klassische Gleichung 3 nicht nur auf Fälle anwendbar ist, wo der gewöhnliche Hittorf'sche Mechanismus für unassoziierte Ionen in Kraft ist, sondern für jedes binäre System für das rein empirisch die aus Stromdurchtritt resultierende Änderung der Zusammensetzung festgestellt ist; nur muß dann $1-t = \alpha$ als rein empirischer Koeffizient betrachtet werden, in dem t nicht mehr die Rolle einer Überführungszahl zukommt. In den weiteren Abschnitten der Arbeit nehmen wir an, den „wahren“ Wert von t zu kennen, d. h. den, der bei richtiger Wahl der Komponenten ($\Sigma t = 1$) gilt.

⁶ Die thermodynamische Lösung mit berücksichtigter Diffusion sieh Abschnitt 6.

⁷ C. N. Lewis and M. Randall, Thermodynamik 289, Wien 1927.

klassische Annahme zu einer experimentell prüfbar Gleichung (3) führt. Da aber letztere bekanntlich vom Experiment glänzend bestätigt wird, können wir auch volles Vertrauen für diese Annahme hegen und nach neuen Verallgemeinerungsmöglichkeiten im Sinne der Lokalisation der Effekte suchen (Absatz 5).

4. Verallgemeinerung der Helmholtz'schen Gleichung für konzentrierte Lösungen.

Ungeachtet aller Verallgemeinerungen, die die Helmholtz'sche Gleichung seit ihrer Aufstellung in 1877 erfahren hat, bleibt sie auch in ihrer allgemeinsten Form (3) auf verdünnte Lösungen beschränkt. Dieser Übelstand läßt sich bei Benutzung partieller molarer Energiefunktionen und der mit Helmholtz's Postulaten übereinstimmenden Überlegungen des vorhergehenden Abschnitts leicht beheben.

Betrachten wir die energieaufspeichernden Prozesse eines Diffusions-Elementes näher, so merken wir, daß in den oben gemachten Überlegungen die reversiblen Veränderungen, die mit dem Lösungsmittel stattfinden, nicht berücksichtigt worden sind. Der Hittorf-Effekt stellt nämlich nicht nur den Transport des gelösten Stoffs dar, den wir schon oben in Rechnung gebracht haben, sondern wegen den hydrostatischen Bedingungen, die in der Zelle erfüllt sind, wandert proportional dem gelösten Stoff auch noch eine ganz bestimmte Menge Lösungsmittel in der dem gelösten Stoff entgegengesetzten Richtung. Offenbar haben wir es mit einem zweiten energieaufspeichernden Prozeß zu tun.

Ist der per $z \mathcal{F}/(1-t)$ Stromeinheiten durch den gelösten Stoff aufgespeicherte freie Energie *

$$\frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \ln N_2} d \ln N_2,$$

so muß die entsprechende vom Lösungsmittel aufgespeicherte freie Energie

$$-\frac{V_2}{V_1} \cdot \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \ln N_2} d \ln N_2$$

sein. Denn die hydrostatische Bedingung verlangt, daß die übergeführten Mole (M -Mole/cm² · sec) sich umgekehrt wie ihre partiellen molaren Volumen $M_1/M_2 = V_2/V_1$ verhalten⁸. Es werden also per Mol gelö-

⁸ Vgl. Anmerkung 5 S. 83.

sten Stoffes \bar{V}_2/\bar{V}_1 Mole Lösungsmittel übergeführt, die dann mit der freien Konzentrationsenergie multipliziert, die durch das Lösungsmittel aufgespeicherte freie Energie ergeben.

Ganz allgemein gilt für das Verhältnis der beiden molaren Konzentrationsenergien die Gleichung

$$\frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \ln N_2} = -\frac{N_2}{N_1} \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \ln N_2}, \dots \dots \dots (4)$$

und aus ihr ist es leicht zu erkennen, daß für verdünnte Lösungen ($N_2 \rightarrow 0$) auf die sich die klassische Theorie bezieht, die mit der Lösungsmittel-Wanderung verbundene Energieaufspeicherung vernachlässigt werden darf. Für endlich konzentrierte Lösungen dagegen muß die Aufspeicherung freier Energie durch das Lösungsmittel mitberücksichtigt werden, und es folgt, durch Gleichsetzung der beiden Konzentrationsenergien mit der Motorleistung, die allgemein gültige Gleichung:

$$dE_{\text{H}} = (1-t) \left(1 + \frac{\bar{V}_2 N_2}{\bar{V}_1 N_1} \right) \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \ln N_2} d \ln N_2 \dots \dots (5)$$

Die weitere Schlußfolgerung, die sich aus dem klassischen Ansatz ziehen läßt, bezieht sich auf die thermischen Energieumsätze mit der Umgebung, die latenter Art sein müssen und genau den materiellen Umsätzen beim Hittorf-Effekt zu entsprechen haben. Sie lassen sich also genau, wie oben die freien Energie-Änderungen, berechnen, wenn an Stelle der freien Energie die latente Wärme tritt. Die in einer konzentrierten Lösung von der Umgebung aufgenommene Wärme wird also:

$$(1-t) \left(1 + \frac{\bar{V}_2 N_2}{\bar{V}_1 N_1} \right) T \frac{\partial \bar{S}_2}{\partial \ln N_2} d \ln N_2$$

und für eine verdünnte Lösung

$$(1-t) T \frac{\partial \bar{S}_2}{\partial \ln N_2} d \ln N_2$$

per $z\mathcal{F}$ Stromeinheiten berechnet.

Geht also ein kleiner Strom (im aufspeichernden Sinn) zwischen den im Konzentrationsgefälle befindlichen Elektroden, so wird pro Mol übergeführten Elektrolyts durch den Hittorf'schen Entmischungsprozeß die Energie

$$\left(1 + \frac{\bar{V}_2 N_2}{\bar{V}_1 N_1}\right) \left(\frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \ln N_2} + T \frac{\partial \bar{S}_2}{\partial \ln N_2}\right) d \ln N_2 = \left(1 + \frac{\bar{V}_2 N_2}{\bar{V}_1 N_1}\right) \frac{\partial \bar{H}_2}{\partial \ln N_2} d \ln N_2$$

aufgespeichert — den einen Teil dieser Energie liefert der Motor (Glied mit \bar{F}) den anderen die Umgebung (Glied mit \bar{S}).

Man überzeugt sich leicht, daß der eben abgeleitete Ausdruck die Enthalpie (kalorimetrische Reaktionswärme) darstellt, die die Umgebung auf rein irreversiblen Wege gewinnt, wenn ein stationärer Diffusionsprozeß stattfindet, und wenn die Enthalpieänderung des Vermischungsprozesses auf ein Mol diffundierten gelösten Stoffes (Subskript 2), bzw. \bar{V}_2/\bar{V}_1 Mol Lösungsmittel bezogen wird.

Der Grund dieser Übereinstimmung, die die Korrektheit unserer Berechnung beweist, liegt im Umstande, daß der materielle Effekt einer Hittorf-Wanderung der Diffusion d. h. Vermischung, bzw. der Entmischung gleichkommt. Der Hittorf-Effekt ist abgesehen vom detaillierten Mechanismus in seinen materiellen Folgen mit dem Diffusions-Effekt, was den Elektrolyt anbetrifft, identisch.

Im Gegensatz zur einfachen Diffusion ist der Hittorf-Effekt leicht umkehrbar, d. h. man kann durch Stromwendung ein Mischen in ein Entmischen verwandeln. Es folgt dann, daß im Falle einer „elektrischen Diffusion“ (Hittorf-Überführung bei freiwilliger Strom-Richtung), die mit der Diffusion verbundene freie Energie vom Motor gewonnen wird, der Kalorimeter aber gewinnt die entsprechende latente Wärme, wogegen bei gewöhnlicher Diffusion beide Energie-Werte dem Kalorimeter abgegeben werden.

Da in den vorangehenden Gleichungen für konzentrierte Lösungen recht komplizierte Ausdrücke vorkommen, die von Zeit zu Zeit von Bedeutung sein werden, wenn wir unsere Überlegungen auf konzentrierte Lösungen ausdehnen, wollen wir gleich eine die Übersicht erleichternde neue Funktion x einführen:

$$x = \bar{x} d \ln N_2 = \left(1 + \frac{\bar{V}_2 N_2}{\bar{V}_1 N_1}\right) \frac{\partial \bar{X}_2}{\partial \ln N_2} d \ln N_2 \dots (6)$$

Sie stellt allgemein die Energie einer Entmischung gerechnet per Mol entmischten Elektrolyts durch das Zusammensetzungsgebiet $d \ln N_2$ dar.

Ersetzen wir x durch f , s oder h ; \bar{x} durch \bar{f} , \bar{s} oder \bar{h} und schließlich \bar{X} durch \bar{F} , $T\bar{S}$ oder \bar{H} , so entsprechen die erhaltenen Funktionen der Änderung der freien Energie, der latenten Energie oder schließlich der Enthalpie desselben Prozesses.

5. Eine neue Gleichung für das Diffusionselement.

Obwohl die Ableitung der Helmholtz'schen Gleichung von einem thermodynamischen Standpunkt wohl kaum beanstandet werden dürfte, so ist es vom selben Standpunkt erlaubt, die zur Gleichung führenden Annahmen, als auch die experimentelle Bewiesenheit der Gleichung selbst in Frage zu stellen. Wir werden die Kritik der Annahmen im nächsten Abschnitt durchführen, wollen aber schon jetzt die günstigen Resultate der Kritik vorwegnehmend auf wichtige nicht berücksichtigte Folgen der Helmholtz'schen Annahme näher eingehen, wenn die detaillierte energetische Bilanz des Diffusionselementes aufgestellt wird, d. h. wenn alle lokalen Effekte thermodynamisch gedeutet werden.

Wir können als allgemeine Zusammenfassung der klassischen Betrachtungsweise die Behauptung aufstellen, daß im Diffusions-Element, wenn man berechtigterweise von Diffusionsprozessen (als zur reversiblen Effekte-Folge nicht gehörend) und von Reibungseffekten (Joule-Wärme, als bei Interpolation auf Stromlosigkeit verschwindend) absieht, alle zur Maschinerie gehörigen Effekte mit der Stromstärke und auch mit dem chemischen Umsatz betreffs Menge und Zeichen proportional sein werden.

Weiter werden die Effekte in zwei Arten zerfallen — es wird einerseits freie Energie zwischen Motor und chemischem System ausgetauscht, andererseits die durch den chemischen Umsatz genau festgesetzte Menge latenter thermischer Energie zwischen chemischem System und Kalorimeter.

Geht also durch ein (kationisches) Diffusionselement die (aufspeichernde) Strommenge ($z\mathcal{F}$), und werden dann durch Hittorf-Überführung

$$(1-t) \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \ln N_2} d \ln N_2$$

(bzw. allgemeiner $(1-t)f$ — vgl. Abschnitt 5) Einheiten freier Energie aufgespeichert, so muß gleichzeitig vom Kalorimeter die thermische Energiemenge

$$(1-t) \frac{T \partial \bar{S}_2}{d \ln N_2} d \ln N_2$$

(bzw. allgemeiner $(1-t)s$) in Summa geliefert werden. Welche sind nun die Prozesse, die dieser Energieaufnahme entsprechen?⁹ An erster

⁹ Für Zwecke der Klassifikation verschiedener Effekte ist es ratsam, den materiellen Transport, der mit einer Hittorf-Wanderung verbunden ist („Hittorf-Effekt“), als materielles Analogon des Peltier-Effekts aufzufassen. Der weiter zu besprechende gal-

Stelle betrachten wir als am besten bekannt die beiden elektrolytischen Peltier-Effekte. Rein analytisch entspricht der Prozeß an der Anode einem Übergang von Elektrodenstoff in Ionenform bei der Konzentration $N_2 + d \ln N_2$ und der Prozeß an der Kathode dem umgekehrten Übergang bei der Konzentration N_2 . Bei Anwendung der Superpositionsannahme entsprechen den Peltier-Effekten die latenten Wärmen dieser Prozesse:

anodischer Peltier-Effekt (pro $z \mathcal{F}$ Stromeinheiten)

$$z \mathcal{F} \left(\pi + \frac{\partial \pi}{\partial \ln N_2} d \ln N_2 \right) = T \left(\bar{S}_+ + \frac{\partial \bar{S}_+}{\partial \ln N_2} d \ln N_2 - S_{\text{elektrode}} \right) \dots (7)$$

kathodischer Peltier-Effekt

$$-z \mathcal{F} \pi = T (S_{\text{elektrode}} - \bar{S}_+) \dots (7a)$$

Zuletzt haben wir die homogenen vektoriellen thermischen Effekte, die die Hittorf-Wanderung begleiten. Auf denselben Stromdurchtritt ($z \mathcal{F}$) berechnet, besteht die Hittorf-Wanderung in einer Überführung von t_+ Molen Kation von der höheren zur niederen Konzentration und von t_- Molen Anion von der niederen zur höheren Konzentration. Die entsprechenden Beiträge an latenter Energie sind dann:

für das Kation —

$$-t_+ z \mathcal{F} \zeta^+ d \ln N_2 = -t_+ T \frac{\partial \bar{S}_+}{\partial \ln N_2} d \ln N_2, \dots (8)$$

für das Anion —

$$t_- z \mathcal{F} \zeta^- d \ln N_2 = t_- T \frac{\partial \bar{S}_-}{\partial \ln N_2} d \ln N_2, \dots (8a)$$

Addiert man alle vier Effekte, so findet man

$$(1 - t_+) T \frac{\partial \bar{S}_2}{\partial \ln N_2} d \ln N_2,$$

d. h. genau die oben für den summarischen thermischen Effekt verlangte Energiegröße¹⁰.

vanische Homogeneffekt muß als ein homogener Peltier-Effekt aufgefaßt werden. Über die beiden Ionen summiert verschwindet er, wie wir gleich sehen werden, weil die Ionen in entgegengesetzter Richtung wandern. Als materielles Analogon des Thomson-Effekts erscheint dann der Effekt einer Elektrolyt-Aufspeicherung bzw. eines Elektrolyt-Aufbrauchs, der von einer Änderung von t entsteht, wenn t im betrachteten $d \ln N_2$ Intervall variabel ist (vgl. Acta Univ. Latv. mat. fak. ser. II, 6).

¹⁰ Aus den Gleichungen (7) und (8) folgt weiter:

$$\zeta^+ = \frac{\partial \pi^+}{\partial \ln N_2} = \frac{T}{z \mathcal{F}} \frac{\partial \bar{S}_+}{\partial \ln N_2} = -T \frac{\partial \chi^+}{\partial T} \dots (8b)$$

d. h. die Bestimmungsmöglichkeit ionaler Verdünnungsentropien aus Diffusionsketten.

Wie aus einer Inspektion der Gleichungen (8) folgt, ist in allen Fällen, wo $d \ln N_2$ ein Differential bleibt, der Homogeneffekt im Vergleich zum Peltier-Effekt zu vernachlässigen; übrigens muß er auch bei endlichem $d \ln N_2$ klein bleiben, weil er ja die Differenz zweier sehr ähnlicher Effekte darstellt.

Es läßt sich also die lokale Verteilung der von der klassischen Theorie verlangten latenten Wärme nach klassischen Gesichtspunkten durchführen, wenn man auf die bekannten heterogenen Peltier-Effekte und die homogenen Konzentrationseffekte die Bedingung anwendet, daß sie die latenten Wärmen, der ihnen entsprechenden chemischen Prozesse darstellen.

Eine Bestätigung der Ansicht, daß unsere Überlegungen keine grundlegenden Abweichungen, sondern nur eine beinahe notwendige, jedenfalls aber oft stillschweigend gemachte Verallgemeinerung des klassischen Gesetzes der *EMKK* darstellen, läßt sich überzeugend nachweisen, durch Vergleich mit der thermodynamischen Behandlung ähnlicher Probleme.

Wir können nämlich die eben gezogenen Schlußfolgerungen dazu benutzen, die klassische Gleichung so umzuformen, daß die charakteristische *EMK* des Diffusionselements dE_{Φ} als Funktion des Peltier-Effekts ausgedrückt wird.

Wendet man die Helmholtz'sche Gleichung auf zwei nacheinander geschaltete Diffusionselemente an, von denen eins kationische, das andere anionische Elektroden besitzt (und deren kurzgeschaltete Elektroden in Lösungen gleicher Konzentration tauchen), so ist die Arbeitsleistung an dieser Kette:

$$z \mathcal{F} (dE_{\Phi}^+ + dE_{\Phi}^-) = \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \ln N_2} d \ln N_2 = \frac{\partial}{\partial \ln N_2} (\bar{F}_+ + \bar{F}_-) d \ln N_2,$$

oder nach Umformung im Sinne des zweiten Wärmesatzes ($F = \int S dT$):

$$= - \frac{\partial}{\partial \ln N_2} (\int \bar{S}_+ dT + \int \bar{S}_- dT) d \ln N_2$$

und durch Hinzufügen einer das Resultat nicht beeinflussenden (weil konzentrationsunabhängigen) Konstante S (Elektrodenstoff):

$$= - \frac{\partial}{\partial \ln N_2} (\int \Delta S_+ dT + \int \Delta S_- dT) d \ln N_2,$$

wo ΔS_{\pm} die Entropieänderung der kationischen bzw. anionischen Elektrode bedeutet. Führen wir in diese Gleichung unsere Definition des Peltier-Effekts hinein (Gl. 7a), so erhalten wir:

$$= z \mathfrak{F} \frac{\partial}{\partial \ln N_2} \left(\int \frac{\pi^+}{T} dT + \int \frac{\pi^-}{T} dT \right) d \ln N_2 = z \mathfrak{F} d \int \frac{\pi_2}{T} dT. \quad (9)$$

Diese umgeformte Gleichung des Diffusionselements läßt sich aber mit Lord Kelvin's Gleichung für das Thermoelement

$$dE_{\mathfrak{g}} = d \int \frac{\pi}{T} dT = \frac{\pi}{T} dT \quad \dots \dots \dots (10)$$

vergleichen, mit dem Resultat, daß beide Gleichungen als prinzipiell identisch erkannt werden müssen. Der einzige Unterschied besteht in der Differentiation, die beim Thermoelement nach der Temperatur, der vom System erlaubten Variablen stattfindet, wogegen im Diffusionselement logischerweise die Differentiation nach der Zusammensetzung (N) durchgeführt werden muß. Diese interessante Analogie entsteht ganz natürlich aus dem Umstande, daß Lord Kelvin für das Thermoelement genau dieselbe Art von Postulat anwendet, wie Helmholtz für das Diffusions-Element. Er findet, daß das Thermoelement aus einer Reihe von Effekten besteht, die mit dem Strome entstehen und verschwinden und die beim Stromdurchgang dem Strome proportional stattfinden und mit der Stromrichtung ihr Zeichen wechseln (Peltier-Effekt, Thomson-Effekt, Motorleistung). Er nimmt darum ebenso wie Helmholtz an, daß diese Effekte im Sinne des zweiten Wärmesatzes als umkehrbar angesehen werden können, und daß sie sich darum in thermische Prozesse, die mit Änderungen latenter Art verbunden sind und in Arbeits-Prozesse unterscheiden lassen. Gleich Helmholtz nimmt er schließlich an, daß diese Prozesse von den begleitenden irreversiblen Prozessen (spontane Wärmeleitung) in ihrer Reversibilität nicht beeinträchtigt werden.

Es drückt dann die für Thermoelement und Diffusionselement gemeinsame Gleichung $z \mathfrak{F} dE_{\mathfrak{g}} = z \mathfrak{F} d \int \frac{\pi}{T} dT$ aus, daß in beiden Elementen die Motorleistung ($z \mathfrak{F} dE_{\mathfrak{g}}$) eindeutig durch den Peltier-Effekt ($z \mathfrak{F} \pi$) bestimmt wird und zwar derart, daß sich Peltier-Effekt zur Motorleistung wie die latente Wärme ($T \Delta S$) zur freien Energie (ΔF) verhält. Die Homogeneffekte sind dann den Peltier-Effekten untergeordnet.

nete Differentialeffekte und spielen erst dann eine Rolle, wenn zwischen Anoden und Kathoden größere dT — bzw. $d \ln N_2$ — Unterschiede bestehen und π eine Funktion dieser Größen wird¹¹.

Abgesehen von dem interessanten Zusammenhang, der hierdurch zwischen sonst unverbundenen Zweigen der Physik hergestellt wird, läßt sich durch eine weitere Verfolgung der gemeinsamen Formel ein sehr wichtiges Resultat für das Diffusionselement erhalten. Wir haben fürs erste die Anwendbarkeit der Formel (10) nur für ein „summarisches“ Diffusionselement nachgewiesen, in dem kationisches und anionisches Element so geschaltet sind, daß sie einander verstärken. Nun überzeugt man sich aber leicht durch Wiederholung der Berechnung für ein Differenz-Element, daß auch hier die *EMK* vom totalen Peltier-Effekt bestimmt wird. Daraus folgt, daß auch für das einzelne Diffusionselement Gleichung (10) gültig sein muß und weiter, daß die Homogeneffekte nur bei einer Integration über solche $d \ln N$ Intervalle zu berücksichtigen sind, in denen π variabel wird.

Dieser interessante Schluß führt nun ohne weiteres zu einer ganz neuen Formel für das Diffusionselement. Führt man nämlich die Differentiation von (10) für den Fall des Diffusionselements durch, in dem N (die Zusammensetzung an den Elektroden) die Variable darstellt, so erhält man die für alle Konzentrationen gültige Gleichung

$$z \mathfrak{F} dE_{\ddagger}^{\pm} = z \mathfrak{F} d \int \frac{\pi}{T} dT = \frac{\partial}{\partial \ln N_2} \int \Delta S dT.$$

$$d \ln N_2 = \frac{\partial \bar{F}_{\ddagger}^{\pm}}{\partial \ln N_2} d \ln N_2, \dots \dots \dots (11)$$

d. h. die *EMK* eines Diffusionselements wird durch die freie Verdünnungsenergie des sich umsetzenden Ions bestimmt.

Daß ein Resultat von der Form der Gleichung (11), d. h. aus rein thermodynamischen Größen bestehend, existieren muß, müsste ja a priori für ein System erwartet werden, das als nur aus Gleichgewichtsprozessen aufgebaut angesehen wird. Verglichen mit der klas-

¹¹ Es ist interessant, hier den Fall einer geschichtlichen Umkehrung in der Erforschung zweier ähnlicher Probleme festzustellen. Beim Thermoelement hatte man anfänglich den Homogeneffekt übersehen, und erst Kelvin erkannte ihn aus einer energetischen Bilanz von integralen Thermokräften und dem Phänomen der Inversion. Bei den galvanischen Effekten hat man nur dem Homogeneffekt (der Hittorf-Wanderrung) Aufmerksamkeit geschenkt. Es dürfte die vorliegende Analyse zum erstenmal dem heterogenen Primärprozeß den ihm gebührenden Platz eingeräumt haben.

sischen Helmholtz'schen Gleichung (3) enthält unsere Gleichung die weittragende Behauptung, daß die die Konzentrationsänderungen beherrschenden thermodynamischen Eigenschaften (\bar{X}_2) eines Elektrolyts sich aufspalten lassen in entsprechende Eigenschaften der Ionen (\bar{X}_\pm) nach den Gleichungen

$$\bar{X}_2 = t_- \bar{X}_2 + t_+ \bar{X}_2 = \bar{X}_+ + \bar{X}_- \dots \dots \dots (12),$$

$$t_- \bar{X}_2 = \bar{X}_+ \text{ und } t_+ \bar{X}_2 = \bar{X}_- \dots \dots \dots (12a)$$

im besonderen muß dies zutreffen für $\bar{X}_2 = \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \ln N_2}$, d. h. für die freie Verdünnungs-Energie. In konzentrierten Lösungen hat man für $\bar{X}_2 \bar{x}$ zu setzen.

Gleichung (12) enthält also die einfache Antwort auf H. A. Lorentz's¹² Frage über das sonst unerklärliche Auftreten von Überführungszahlen in thermodynamischen Gleichungen, indem wir finden, daß die Überführungszahlen gleichzeitig dynamische, wie auch thermodynamische Eigenschaften vorstellen. Wie wir weiter sehen werden, ist diese doppelte Natur nicht auf reine Zahlen, wie t allein beschränkt: eine bestimmte Relation von dynamischen Koeffizienten hat sich schon längst als thermodynamische Größe in die Elektrochemie eingeschlichen (Gl. 18b).

Da nun in Fällen verwickelten Elektrolyt-Aufbaus der Elektrodenprozeß sich wird leichter feststellen lassen als die Hittorf'sche Überführung, so sollte auch die Anwendbarkeit von Gleichung (11) allgemeiner sein, als die von Gleichung (3) bzw. (5).

Den neuen Befund, daß die Ausdrücke $d\bar{X}_+$ und $t_- d\bar{X}_2$ identisch werden, können wir physikalisch dahin deuten, daß vom thermodynamischen Standpunkt zwei verschiedene Mechanismen für die elektrolytischen Prozesse in einer Diffusionszelle gleichwertig sind, nämlich a) der Hittorf'sche in dem der energieaufspeichernde Prozesse eine Überführung zwischen zwei Konzentrationen von t_- Molen Elektrolyt ist, oder b) auch ein netto Prozeß, in dem der energieaufspeichernde Anteil eine Überführung zwischen den selben Konzentrationen von 1 Mol Kation ist. Die Diffusion von 1 Mol Salz ist also äquivalent der Diffusion von $(1/t_-)$ Mol Kation, bzw. $1/t_+$ Mol Anion.

Da also bei der elektrolytischen Leitung die Mengen der Ionen sich wie t_+/t_- , die Potentialverbräuche aber wie $-t_-/t_+$ verhalten, so hat der Energieverbrauch für beide Ionen gleiche Größe, aber verschiedenes Zeichen, und die Summe beider Energieverbräuche ist Null.

¹² H. A. Lorentz Les théories statistiques en th. § 45 Teubner Leipzig, 1916.

Wenn wir ähnlicherweise die Rückwirkung der neuen Formel auf die Energie-Bilanz der thermischen Effekte untersuchen, so finden wir aus einer Anwendung von (12) auf die Gleichungen der homogenen Effekte in Übereinstimmung mit den allgemeinen Überlegungen, daß die Homogeneffekte sich aufheben (auch für konzentrierte Lösungen):

$$t_+ \frac{\partial \bar{S}_+}{\partial \ln N_2} d \ln N_2 = t_- \frac{\partial \bar{S}_-}{\partial \ln N_2} d \ln N_2.$$

Diese Regeln brauchen aber nicht mehr zuzutreffen, wenn größere $d \ln N_2$ Intervalle untersucht werden, in denen t veränderlich wird. Hier sind endliche Homogeneffekte zu erwarten (vgl. Anmerk. 9. S. 88).

6. Allgemein thermodynamische Lösung.

Mit den Überlegungen des vorhergehenden Abschnitts dürften die Konsequenzen des Superposition-Prinzips ebenso voll ausgenutzt sein, wie es in der Lord Kelvin'schen Theorie des Thermoelements geschehen ist. Die Hauptumstände, die auf die eben erhaltenen und auf dem Gebiete der Thermoelektrizität schon geläufigen Resultate so lange warten ließen, dürfen wohl hauptsächlich die sein, daß der rein mechanistische Weg, der durch die gute Kenntnis der elektrolytischen Leitung vorgezeichnet war, die Aufmerksamkeit der Forscher auf ein Gebiet gelenkt hat, das wiederum in der klassischen Behandlung des Thermoelements fortgefallen war. Wir werden diesen von W. Nernst gewiesenen Weg etwas weiter behandeln, inzwischen wollen wir aber auch eine allgemein thermodynamische Kritik des Superpositionsprinzips durchführen, indem wir versuchen, dasselbe Problem ohne Superpositionsprinzip zu lösen. Es handelt sich also jetzt um die Aufgabe, die L. Boltzmann¹³ im Zusammenhang mit Lord Kelvin's Theorie des Thermoelements sich stellte und die er mit der Schlußfolgerung löste, daß Lord Kelvin's Theorie einen Spezialfall einer allgemeineren Lösung darstellt, und zwar einen, für den die größte Wahrscheinlichkeit vorhanden ist.

Mit der Erkenntnis der prinzipiellen Gleichheit der beiden Probleme: Diffusionselement und Thermoelement, ist auch eine Wiederholung der Boltzmann'schen thermodynamischen Analyse leicht durchzuführen. Sie bietet den Vorteil einer tieferen Kenntnisnahme des Diffusionselements, andererseits verschafft sie durch erstmalige Duplikation der Boltzmann'schen Analyse eine Einsicht in die tieferen Grundlagen des Prinzips der Superposition.

¹³ L. Boltzmann Sitzb. d. K. Akademie d. W. Wien 96, (2), 1258 1888.

Wir betrachten wie früher einen Diffusionszylinder vom Querschnitt $q \text{ cm}^2$ mit zwei kationischen Elektroden (von wabenartiger Struktur — um die Diffusion nicht zu beeinträchtigen). Der Elektrodenabstand ist $l \text{ cm}$ und die Zusammensetzung der Lösung an den Elektroden N_2 bzw. $N_2 + d \ln N_2$.

Die Elektroden werden durch einen „Motor“ mit einer Spannung dE_x und einem Widerstand r_m geschlossen.

Im allgemeinsten Fall finden drei verschiedene mit Änderungen der freien Energie verbundene Prozesse statt: a) Elektrolyt wird durch Diffusion übergeführt, b) Elektrolyt wird durch Hittorf-Wanderung übergeführt, und schließlich c) Lösungsmittel wird in der dem Elektrolyten entgegengesetzten Richtung, und zwar im Verhältnis \bar{V}_2/\bar{V}_1 übertragen. Wir können also für die Stoffüberführung M im Molen/cm² sec., d. h. auf Einheit Querschnitt berechnet setzen¹⁴

$$\text{für } M_2 = \delta \frac{dc}{l} + \frac{t \cdot i}{z \mathfrak{F} q} = \frac{\delta \cdot c}{l} d \ln N_2 + \frac{t \cdot i}{z \mathfrak{F} q} \dots (13)$$

nach a) und b) und für M_1 , nach c):

$$M_1 = \frac{\bar{V}_2}{\bar{V}_1} M_2.$$

Mit diesen Überführungen des Stoffes sind nun ganz allgemein Energie-Änderungen verbunden. Für uns kommen eben nur die Änderungen der freien Energie in Frage, da wir den Wärme-Austausch mit der Umgebung nicht weiter verfolgen werden und uns nur auf den Energie-Austausch mit dem Motor konzentrieren. Der Motor kann aber offenbar nur von Änderungen der freien Energie profitieren.

Die Änderung der freien Energie, die den drei Prozessen entspricht, ist

$$M_2 \left(1 + \frac{N_2 \bar{V}_2}{N_1 \bar{V}_1} \right) \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \ln N_2} d \ln N_2 = M_2 \bar{f} \cdot d \ln N_2. \dots (13a)$$

Andererseits ist der entsprechende Energie-Gewinn des Motors

$$\frac{i dE_x}{q}, \text{ wobei } \frac{i}{q} = \frac{dE_m - dE_x}{Rq}, \dots (14)$$

wo dE_m die EMK des Diffusions-Elementes darstellt und R den Widerstand des Kreises.

¹⁴ Für unsere Zwecke formen wir die gewöhnliche Fick'sche Diffusionsgleichung $M = \delta \frac{dc}{l}$ in $M_2 = \delta \cdot c \frac{d \ln N_2}{l}$ um, da ja $c = N/V$ und für verdünnte Lösungen $dc = c d \ln N$ ist.

Wenden wir auf diesen Energieumsatz den zweiten Wärmesatz an, so können wir behaupten, daß die vom Motor gewonnene Arbeit nie größer, bestenfalls aber gleich groß mit dem Verlust freier Energie durch das chemische System sein kann:

$$\text{d. h.} \quad M_2 \bar{f} d \ln N_2 - \frac{i d E_x}{q} \geq 0.$$

Es sind also thermodynamisch für das Diffusions-Element verschiedene Verhältnisse möglich, solange sie dieser Ungleichung genügen. Von allen diesen Möglichkeiten wird die extreme Möglichkeit, in der der Ausdruck Null wird, einen reversiblen Prozeß darstellen, in dem der ganze Verlust an freier Energie durch das Diffusions-Element in elektrische Energie verwandelt wird.

Dieser beste Fall hängt in der gegenwärtigen Fragestellung noch von vier nicht fixierten Größen ab: dE_m , dE_x , Rq und l , von denen die drei letzten apparative Konstanten und dE_m die gesuchte maximale EMK des Diffusions-Elementes darstellt. Nun folgt aus der Überlegung, daß für einen reversiblen Prozeß die Apparate-Konstanten ideal ausgewählt sein müssen, um keine Möglichkeit zu lassen, aus denselben Energie-Quellen verschiedene beste Resultate zu erzielen, daß die obige Ungleichung nur dann gleich Null gesetzt werden kann, wenn in ihr dE_x , Rq und l so gewählt sind, daß sie das von ihnen abhängige Minimum des Ausdrucks schon erschöpfen.

In Abhängigkeit von dE_x findet sich das Minimum einfach durch Differentiation der Ungleichung, nachdem in ihr M_2 und i/q durch (13) und (14) eliminiert werden. Elimination:

$$M_2 \bar{f} d \ln N_2 - \frac{i d E_x}{q} = \bar{f} d \ln N_2 \left(\frac{c \delta}{l} d \ln N_2 + \frac{t}{z \mathfrak{F}} \cdot \frac{d E_m - d E_x}{Rq} \right) - \frac{d E_m d E_x - (d E_x)^2}{Rq}.$$

Berücksichtigung von

$$d E_m = \chi_m d \ln N_2:$$

$$(d E_x)^2 - d E_x \left(\chi_m + \frac{t \bar{f}}{z \mathfrak{F}} \right) d \ln N_2 + \frac{t \chi \bar{f}}{z \mathfrak{F}} (d \ln N_2)^2 + \bar{f} (d \ln N_2)^2 \frac{c \delta Rq}{l} \geq 0$$

und Differentiation nach $d E_x$ ergibt:

$$2 dE_x - \left(\chi_m + \frac{t\bar{f}}{z\bar{\mathfrak{F}}}\right) d\ln N_2 = 0 \text{ oder } (dE_x)_0 = \frac{1}{2} \left(\chi_m + \frac{t\bar{f}}{z\bar{\mathfrak{F}}}\right) d\ln N_2.$$

Was nun Rq und l anbetrifft, so sieht man, daß das Minimum des obigen Ausdrucks mit einem Minimum Rq/l zusammentrifft, R , der Totalwiderstand des Kreises setzt sich zusammen aus dem Widerstande des Elektrolyts und dem Widerstande des Motors. Es ist offenbar mit einem Minimum des Ausdrucks dann zu rechnen, wenn ersterer im Vergleich zum zweiten verschwindet — dann wird auch gleichzeitig $(r_{el}q/l)$ gleich dem spezifischen Widerstande des Elektrolyts $1/\kappa$.

Wir setzen die eben erhaltenen Extremwerte für dE_x und Rq/l in die Ungleichung ein:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \left(\chi_m + \frac{t\bar{f}}{z\bar{\mathfrak{F}}}\right)^2 (d\ln N_2)^2 - \frac{1}{2} \left(\chi_m + \frac{t\bar{f}}{z\bar{\mathfrak{F}}}\right)^2 (d\ln N_2)^2 + \frac{\chi t\bar{f}}{z\bar{\mathfrak{F}}} (d\ln N_2)^2 + \\ & + \bar{f} (d\ln N_2)^2 \frac{c\delta}{\kappa} = -\frac{1}{4} \left(\chi_m - \frac{t\bar{f}}{z\bar{\mathfrak{F}}}\right)^2 (d\ln N_2)^2 + \bar{f} (d\ln N_2)^2 \frac{c\delta}{\kappa} \geq 0 \\ & \chi_m^+ \leq \frac{t\bar{f}}{z\bar{\mathfrak{F}}} + 2 \sqrt{\frac{\bar{f}c\delta}{\kappa}} = \frac{\partial}{\partial \ln N_2} \int \frac{\pi}{T} dT + 2 \sqrt{\frac{\bar{f}c\delta}{\kappa}} \dots (15) \end{aligned}$$

Hier erkennt man im ersten Gliede des mittleren Ausdrucks für eine verdünnte Lösung (vergl. Gl. 6) leicht den Ausdruck

$$\frac{t_-}{z\bar{\mathfrak{F}}} \cdot \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \ln N_2}$$

oder Helmholtz's Gleichung für das Diffusions-Element. Es ist also rein thermodynamisch ein jeder Wert von Null über den Helmholtz'schen Wert bis zu einem offenbar bedeutend größeren Wert erlaubt. Hierbei ist es leicht ersichtlich, daß die höheren Werte dann in Frage kommen, wenn die spontane Diffusion ihren Beitrag zur Gewinnung von Arbeit unabhängig vom Hittorf Mechanismus beitragen könnte. Dieses ist eben nach der Superpositions-Annahme nicht erlaubt: wir können Arbeit nur aus den am Prozeß direkt beteiligten Effekten gewinnen. Die experimentelle Bestätigung der Helmholtz'schen Gleichung einerseits, besonders aber die prinzipielle Übereinstimmung mit den auch experimentell erhärteten Befunden von Lord Kelvin, erlauben uns, ein ganz besonderes Vertrauen dem Superpositions-Prinzip zu schenken.

Es ist nämlich nicht nur seiner Ableitung nach, sondern auch der Form nach, unsere Ungleichung mit der Boltzmann'schen, für das Thermoelement gefundenen,

$$\epsilon_{\vartheta} \leq \frac{\pi}{T} + 2 \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha T}} = \frac{\partial}{\partial T} \int \frac{\pi}{T} dT + 2 \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha T}} \dots \dots (16)$$

verwandt. Es kommen in beiden Gleichungen die der Superpositions-Annahme entsprechenden und nur den Peltier-Effekt enthaltenden, rein thermodynamischen Glieder vor. Außerdem kommen in beiden Ungleichungen und in beiden Fällen die Quadratwurzel (Zeichenfrage!) enthaltenden Ausdrücke vor, die rein dynamische Koeffiziente (Leitfähigkeiten) enthalten.

Diese Situation ist in der Hinsicht besonders interessant, daß, obwohl in Boltzmann's Ausdruck diese „dynamischen“ Glieder nicht anerkannterweise gedeutet sind, wir es andererseits im Diffusions-Element mit einem Ausdruck zu tun haben, der wenn auch nicht explizite, so doch implizite durch die Nernst'sche Theorie gedeutet ist (sich Absatz 7 und Gleichung 18).

Im Lichte der Boltzmann'schen Analyse können wir mit einfachen Zügen das Gerüst der thermodynamischen Lösung des Problems stationärer Systeme aufdecken.

Rein experimentell sind χ_{ϑ} und ϵ_{ϑ} (die Helmholtz- und Seebeck-Koeffizienten) Materialkonstanten und haben ganz bestimmte Werte. Die ohne Einführung der Superpositions-Annahmen erhaltenen Ungleichungen (15) und (16) müssen also Gleichungen darstellen, und es existieren also naturgegebene Beschränkungen außer den schon angewandten thermodynamischen Sätzen, die dem Problem konkrete Lösungen geben. Die erste Beschränkung, die gleichzeitig dem Thermoelement und dem Diffusionselement eine Lösung erteilt, wird durch die Superpositions-Annahme auferlegt, laut der die spontanen Prozesse nicht zu berücksichtigen sind (alle Glieder mit δ bzw. λ verschwinden) und laut der die übrigbleibenden Prozesse als reversibel zu betrachten sind (Ungleichung geht über in Gleichung). Es soll nun weiter gezeigt werden, daß auch die dynamischen Glieder der allgemeinen thermodynamischen Ungleichung physikalischen Sinn besitzen, der durch eine Deutung irreversibler Reibungs-Prozesse (Joule-Wärme) aufgedeckt werden kann.

7. Die polarisierte Zelle.

Die Betrachtungen der vorhergehenden Abschnitte dürften klar gezeigt haben, daß in der thermodynamischen Behandlung galvanischer Elemente keine prinzipiellen Unterschiede zwischen sogenannten stabilen und eklatanterweise unstabilen, wie das Diffusionselement, vorhanden sind. Gemeinsam für die theoretische Lösung der verschiedenen Elemente war einerseits die Ansicht, daß die Intensität des Diffusionsprozesses den Mechanismus der galvanischen Effekte nicht beeinflusst, andererseits aber, die allen betrachteten Systemen charakteristische Stromlosigkeit. Damit sei hervorgehoben, daß die bis jetzt benutzte Superpositions-Annahme keine bindenden Aussagen bezüglich des elektrischen Stromes enthält, hauptsächlich was seinen Einfluß auf die thermischen Effekte betrifft.

Nun existiert aber ein dem Diffusionselement ähnliches System und zwar die polarisierte galvanische Zelle, in der dieselbe schon beim Diffusionselement untersuchte Maschinerie von materiellen und energetischen Effekten auftritt, dieses Mal aber unter den Bedingungen eines endlichen Stromes, der überdies von dem irreversiblen Prozeß der Diffusion seiner Größe nach bestimmt wird.

Um die prinzipiellen Fragen, die hier entstehen, klarer hervorzuheben, wollen wir kurz die experimentell festgestellten Eigenschaften der polarisierten Zelle untersuchen. Legt man nämlich unter Vermeidung von Konvektion und Temperaturgradienten eine *EMK* dE_r an zwei kationische, in einen Elektrolyt tauchende, Elektroden, so beobachtet man zweierlei: a) das Auftreten einer Zusammensetzungsänderung $d \ln N_2$, die von Formfaktoren unabhängig ist, und b) einen unzweideutig mit dem Formfaktoren veränderlichen Reststrom.

Die erste Erscheinung, die gewissermaßen eine Umkehrung des Diffusionselements darstellt, insofern als in ihr durch Anlegen einer *EMK* eine von Formfaktoren unabhängige Zusammensetzungsänderung entsteht, ebenso, wie im Diffusionselement eine von Formfaktoren unabhängige *EMK* entsteht, wenn man eine konstante Zusammensetzungs-Differenz besitzt, wollen wir das Reziprozitätsphänomen nennen. Obwohl dieses für die Theorie überaus wichtige Phänomen scheinbar nie zum speziellen Gegenstand einer experimentellen Untersuchung gemacht worden ist, werden wir es als experimentell gegeben betrachten, besonders darum, weil dieselbe Erscheinung in verschiedenen Gebieten der Physik, spe-

ziell aber im Thermoelement, als scheinbar allgemeine Naturerscheinung auftritt. Speziell auf dem Gebiete der Elektrochemie wird mit dieser Erscheinung wohl sehr oft gerechnet und zwar aus folgenden Überlegungen. Ändert man die Formfaktoren einer polarisierten Zelle, so ändert sich der Widerstand R proportional l/q (l — Länge, q — Querschnitt), andererseits ändert sich der Reststrom i proportional der Diffusion, die wiederum sich proportional q/l ändert, also ändert sich gleich ihr der Reststrom proportional q/l . Hieraus folgt, daß das strombestimmende Potential $dE_d = iR$ unabhängig von den Formfaktoren q/l wird. Ebenso ist dE_p , die reversible Polarisationsspannung vom Formfaktoren unabhängig. Wird nun die übliche, aber, wie wir später sehen werden, noch zu revidierende Annahme gemacht, die Zellen-Spannung sei die Summe dieser beiden Spannungen ($dE_p + dE_d = dE_s$), so muß auch sie von Formfaktoren unabhängig sein. Obwohl aus den eben gemachten Überlegungen ein klares Bild der experimentellen Situation resultiert, mit der allgemein gemachten Erfahrung, daß die Eigenschaften der polarisierten Zelle sich aus den Eigenschaften anderer untersuchter Systeme voraussagen lassen, ohne zu neuen Materialkonstanten zu führen, stehen wir als Thermodynamiker vor einer Reihe unbeantworteter Fragen. Ganz allgemein ist es nicht klar, ob die Konzentrationspolarisation mit Hilfe der Superpositions-Annahme gelöst werden kann. Speziell aber werden wir uns nach dem thermodynamischen Sinne der charakteristischen EMK dE fragen müssen, und wir werden auch erklären müssen, in welcher Art die Energie des Reststroms bestritten wird.

Die für den stromlosen Zustand definierte Superpositions-Annahme genügt für die polarisierte Zelle nicht mehr, da sie die Existenz endlicher Ströme und das daraus folgende Hineinspielen der Joule-Wärme in die Energie-Bilanz ungelöst läßt. Aus verschiedenen möglichen Annahmen, die zu einer konkreten Lösung der aufgestellten Fragen führen, scheint aber ganz natürlicherweise eine Annahme in den Vordergrund der Aufmerksamkeit zu rücken, die sich längs den vom klassischen Superpositionsprinzip vorgezeichneten Linien entwickeln läßt. Und zwar nehmen wir systematisch verallgemeinernd an, daß die prinzipielle Unabhängigkeit und der im Diffusionselement erkannte Charakter der einzelnen Effekte, auch in der polarisierten Zelle in Gegenwart eines elektrischen Stromes erhalten bleibt.

Betrachten wir nun der Reihe nach die verschiedenen Effekte und zuerst den Motor. Im stationären Zustand einer polarisierten Zelle

findet keine Akkumulation chemischer Energie statt, ungeachtet dessen, daß der Motor immerfort freie Energie verliert — sie wird letzten Endes in thermische Energie degradiert und der Umgebung zugeführt. Wir müssen aber berücksichtigen, daß zur ständig vonstatten gehenden Diffusion freie Energie benötigt wird, und wir müssen auch darum erwarten, daß primär der Motor einen Teil der Energie, und zwar in dem Maße, wie sie für die Diffusion benötigt wird, auf demselben Wege verliert, wie im Diffusionselement, d. h. als freie chemische Energie des übergeführten Elektrolyts (Polarisations-Energie). Den zweiten Verlust an freier Energie erleidet der Motor zur Überwindung der Reibung bei der tatsächlichen Wanderung der Ionen durch die Lösung — eine Energiemenge, die im Diffusionselement durch Interpolation auf Stromlosigkeit eliminiert wurde.

Berücksichtigen wir nun den analytisch gesicherten Umstand, daß alle chemischen Prozesse, von denen im Diffusionselement angenommen wurde, daß sie dem Strome proportional verlaufen, in der polarisierten Zelle erhalten bleiben und auch bei endlichen Strömen, dem Strome genau proportional bleiben, so können wir mit allergrößter Zuversicht erwarten, daß auch in der polarisierten Zelle alle „reversiblen“ aus dem Diffusionselement erkannten energetischen Effekte unverändert auftreten, weil ja die entsprechenden analytisch-chemischen Effekte erhalten bleiben. D. h. wir können ebenso, wie einen Augenblick vorher betreffs der einen Komponente (der vom Motor umgesetzten Arbeit), jetzt betreffs aller „reversiblen“ thermischen Effekte behaupten, daß sie dieselbe thermodynamische Bedeutung wie im Diffusionselement beibehalten.

Dann läßt sich ein Teil der energetischen Bilanz der polarisierten Zelle fixieren. Ein Teil des Energieverlustes des Motors, den wir oben als Polarisations-Energie bezeichnet haben, und zwar idE_p Watt, wird zur „reversiblen“ Überführung des Elektrolyts verbraucht und primär als freie chemische Energie aufgespeichert. Parallel mit dieser Überführung findet auch weiter ebenso wie im Diffusionselement eine Serie von thermischen Umsätzen mit der Umgebung statt — zwei Peltier-Effekte und die homogenen Effekte — die zusammen gleich sind der latenten Wärme des Überführungsprozesses. Es führen also schließlich die aus dem Diffusionselement bekannten Effekte in Summa zu einer Aufspeicherung von Energie in Form des übergeführten Stoffes. Diese Energie (die Enthalpie, ΔH) des übergeführten Stoffes wird nun vollkommen irreversibel in Form einer Verdünnungswärme bei der

spontanen Diffusion der Umgebung abgegeben, womit die Bilanz dieser Effekte abschließt. (N. B. Im stationären Zustand ist die diffundierende Menge gleich der durch Hittorf-Effekt übergeführten).

Es bleibt also zur vollständigen Lösung des Problems der polarisierten Zelle nur noch die Frage nach der Joule-Wärme (W_j) übrig, die nach dem ersten Wärmesatz dem Überschuß der Motorleistung über die Polarisationsenergie hinaus gleich sein muß: $W_j = idE_r - idE_\varphi$. Die Lösung dieser Frage ist aber durch unsere eben gemachten Annahmen zu einem bestimmten Teil schon vorweggenommen. Denn unsere Bilanz enthält schon die Diffusionsenergie, die Diffusion aber bestimmt die Größe der elektrischen Stromstärke und folglich in bestimmtem Maß auch die Joule-Wärme.

Nach unseren Annahmen ist die Polarisationsenergie idE_φ^+ gleich der freien Energie der Diffusion $M_2 \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \ln N_2} d \ln N_2$ (oder allgemein $M_2 f$, vgl. Abschnitt 4). Aus dieser Gleichung lassen sich aber die Gleichgewichtsgrößen mit Hilfe der Ohm'schen $iR = dE_d^+$, der Diffusions $M_2 = \frac{q\delta}{l} c d \ln N_2$ (13) und der Helmholtz'schen $\frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \ln N_2} d \ln N_2 = -\frac{z\mathfrak{F}}{1-t} dE_\varphi^+$ (3) Gleichungen eliminieren. Es folgt für das „strombestimmende Potential“ dE_d , das wir durch Ohm's Gleichung einführen:

$$\frac{dE_d^+}{R} = \frac{z\mathfrak{F}q\delta}{(1-t)l} c d \ln N_2$$

oder

$$dE_d^+ = \frac{c\delta}{\kappa t} z\mathfrak{F} d \ln N_2, \dots \dots \dots (18a)$$

d. h. eine Gleichung, die aus rein dynamischen Koeffizienten (δ — Diffusionskoeffizient, κ — elektrische Leitfähigkeit) besteht. Man sieht gleich, daß die zwei Potentiale, das reversible dE_φ , durch die Helmholtz'sche Formel dargestellte, und das strombestimmende dE_d , durch die Gleichung (18a) dargestellte, sich dadurch unterscheiden, daß das erstere von thermodynamischen, das andere aber von dynamischen Stoffkonstanten bestimmt wird. Im Diffusionselement tritt wegen Stromlosigkeit nur das erstere ins Spiel, in der stationären polarisierten Zelle aber beide, indem dE_φ die reversiblen, dE_d dagegen die Reibungseffekte oder genauer: den Reststrom regelt (vgl. Anm. 18.)

Eine weitere Überlegung zeigt nun, daß die beiden Potentiale nicht voneinander unabhängig sein können und daß das Reziprozitätsphänomen, welches Diffusionselement und polarisierte Zelle verbindet, eine viel engere Verknüpfung zwischen den beiden Potentialen herstellt, als es oberflächlichweise scheinen würde.

Betrachtet man nämlich zwei Diffusionszylinder mit gleichen R, q, l und dN_2 , aber einmal mit kationischen, das andere Mal mit anionischen Elektroden, so ist in beiden Zylindern die Diffusion gleich, aber wegen der verschiedenen Hittorf-Ausbeute verhalten sich die elektrischen Ströme in beiden Zylindern wie $i_+/i_- = t_+/t_-$, also auch (wegen konstantem R) $dE_d^+/dE_d^- = t_+/t_-$. Wir wissen aber aus den klassischen Überlegungen (Gl. 3), daß $t_+/t_- = dE_{\mathfrak{F}}^-/dE_{\mathfrak{F}}^+$. Es folgt also, daß der folgende Zusammenhang zwischen den dynamischen strombestimmenden Potentialen (dE_d) und den EMKK der Diffusions-Elemente ($dE_{\mathfrak{F}}$) =

$$\frac{dE_d^+}{dE_d^-} = \frac{dE_{\mathfrak{F}}^-}{dE_{\mathfrak{F}}^+}$$

und auch allgemein $dE_d^+ = x^* dE_{\mathfrak{F}}^-$ und $dE_d^- = x^* dE_{\mathfrak{F}}^+$ bestehen muß.

Wir stehen hier vor der Alternative, entweder die Existenz einer neuen Materialkonstante (x^*), die sich aus dem Vergleich zwischen den beiden experimentell bestimmbareren Größen ergeben würde, aber nie beobachtet worden ist, zu postulieren, oder anzunehmen, daß $x = 1$ ist, d. h. daß die strombestimmenden Potentiale rein thermodynamische Größen vorstellen.

Entschließen wir uns, der vorläufigen experimentellen Erfahrung folgend, die keine neuen Konstanten kennt, für die letzte Annahme, so erhalten wir für die EMK des Diffusionselementes $dE_{\mathfrak{F}}^+$:

$$dE_{\mathfrak{F}}^+ = dE_d^- = \frac{c \delta}{x t_+} z \mathfrak{F} d \ln N_2, \dots \dots \dots (18)$$

d. h. eine von der Helmholtz'schen Gleichung vollständig unabhängige, neue, aus den Eigenschaften der polarisierten Zellen abgeleitete Gleichung. Da in dieser Gleichung der Hittorf-Koeffizient ($\chi_{\mathfrak{F}} = dE_{\mathfrak{F}}/d \ln N_2$) im Gegensatz zu Gl (3) als Funktion rein dynamischer Koeffizienten ausgedrückt ist, wollen wir diese Gleichung die „dynamische“ im Gegensatz von „thermodynamische“, die für (11) reserviert werden soll, nennen, wobei aber durch diese Benennungen nur der Inhalt,

nicht aber die Ableitung der Gleichungen gekennzeichnet wird, denn schließlich sind beide auf thermodynamischem Wege erhalten.

Kombiniert man unsere neue Gleichung (18) mit der Helmholtz'schen Gleichung (3), so läßt sich der rein thermodynamische „Verdünnungskoeffizient“ des Elektrolyts $\frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \ln N_2}$ bzw. \bar{f} als Funktion rein dynamischer Größen darstellen:

$$\frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \ln N_2} = \frac{c \delta}{\alpha t_+ t_-} z^2 \mathfrak{F}^2 \dots \dots \dots (18b)$$

Dieses scheinbar ungewöhnliche Resultat, das übrigens dieselben Koeffizienten erhält wie die allgemein thermodynamische Gleichung (15), entpuppt sich bei näherer Untersuchung als Verallgemeinerung einer lange bekannten Gleichung von Nernst.

In seiner berühmten, von rein mechanischen Überlegungen ausgehenden Theorie hat nämlich W. Nernst die dynamische Gleichung in einer zwar mehr speziellen und nur für verdünnte ideale Elektrolyte gültige Form schon gefunden. Denn, berücksichtigt man die Definitionsgleichungen $\alpha / c z^2 \mathfrak{F}^2 = u + v = \Lambda$ und $t_+ = \frac{u}{u+v}$ und setzt sie in (18b) ein, so folgt

$$\delta = \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \ln N_2} \frac{\alpha t_+ t_-}{c z^2 \mathfrak{F}^2} = \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \ln N_2} \cdot \frac{u v}{u+v} \left[= 2RT \frac{u v}{u+v} \right]_{c \rightarrow 0} \dots (19)$$

wo der für verdünnte Lösungen geltende Ausdruck in Klammern die Nernst'sche Gleichung vorstellt.¹⁵

¹⁵ Die Einführung neuer Annahmen, gegenüber denen, die zur Lösung des Diffusionselements benötigt sind, äußert sich bei Nernst und Planck in der Aufstellung von Bewegungsgleichungen. Sie enthalten implizite die Bedingungen irreversibler Überführung. In unseren induktiven Überlegungen finden wir erst aus rein energetischen Betrachtungen die Eigenschaften irreversibler Überführungen und schließlich die allgemeinen Bewegungsgesetze, in denen das thermodynamische Kraftgesetz verborgen ist (vgl. Phil. Mag. (7), 16, 248, 1933 und Acta Univ. Latv. Ķīm. fak. ser. II, 10, 1934). Gleichung 19 unterscheidet sich von 18b dadurch, daß sie die Additivität der Ionenleitungen impliziert von der 18b ganz unabhängig ist. Dieser Umstand und die Idealisierung $\partial F_2 / \partial \ln N_2 = 2RT$ ist für die Erfassung der Finessen des „reziproken“ Systems besonders gefährlich, denn eine kritiklose Anwendung des Nernst'schen Grenzgesetzes $\delta / \Lambda t_+ t_- = \text{universale Konstante}$ ist ebenso verheerend wie eine Annahme des ihm analogen Wiedemann-Franz'schen Gesetzes in thermoelektrischen Problemen. Würde nämlich $\lambda / \alpha T$ tatsächlich eine universale Konstante sein, so gäbe es keine thermoelektrische Erscheinungen.

Durch die Übereinstimmung dieser Folgerungen mit den bestätigten Befunden der Nernst'schen Theorie galvanischer Elemente rückt unsere spezielle aus der Erweiterung des Superpositions-Postulats gefolgerte und auf die Deutung der Joule-Wärme ausgehende Annahme in das Zentrum der Aufmerksamkeit, denn durch diese Annahme wird die Joule-Wärme, wahrscheinlich zum ersten Mal, in eine thermodynamische Bilanz eingereiht, die die quantitativen Beschränkungen beider Wärmesätze ausnutzt. Es bedarf aber noch einer weiteren Überlegung, um die Bilanz vollständig abzuschließen.

8. Die Überführungstheorie.

Es gehört zu den Grundannahmen der Elektrochemie, daß die chemische Energie lokal an die Stoffe gebunden ist. Wie wir sahen, findet sie sich in allen Anwendungen der Thermodynamik auf galvanische Elemente, angefangen vom Augenblick, als man den Zusammenhang zwischen Faraday's Gesetz der Elektrolyse und der chemischen Energie der Reaktion erkannte (Joule, Kelvin, Helmholtz).

Diese Grundannahme verbunden mit der zweiten Grundannahme, nämlich der prinzipiellen Verschiedenheit der Umsätze freier und latenter Energie, die den zweiten Wärmesatz enthält, hat dann ganz unauffälligerweise Helmholtz direkt auf den Prozeß der materiellen Überführung angewandt. Helmholtz schreibt einem Transport eines Stoffes aus einem Gebiet niederen chemischen Potentials in ein Gebiet höheren chemischen Potentials in einem homogenen Medium spezielle Überführungsenergien zu, und zwar eine freie Überführungsenergie, die von äußeren Arbeitsquellen (Motor) geleistet wird („Polarisationsenergie“), und eine Überführungswärme, die von der Umgebung geliefert wird, dabei sind beide Energiegrößen dieselben rein thermodynamischen Funktionen, die man auf anderem Wege, z. B. aus Dampfdruckmessungen und kalorimetrischen Daten berechnen kann.

Berücksichtigt man noch Gl. 12a, so erhält man als thermodynamische Gleichung (im Gegensatz zu Grenzgleichung) für das Verhältnis von Diffusionskoeffizient und elektrischer Leitfähigkeit:

$$\partial/\Lambda = \frac{\partial \bar{F}_+}{\partial \ln N_2} \cdot \frac{\partial \bar{F}_-}{\partial \ln N_2} / \bar{f} \dots \dots \dots (18c)$$

einen Ausdruck, der sich universaler Konstanz unter zwei Bedingungen nähert: wenn die Komponenten nicht nur im geometrischen Mittel sondern auch einzeln sich der idealen Grenze $\partial F / \partial \ln N = RT$ nähern, und wenn die Lösung verdünnt ist.

Wendet man diese Vorschrift speziell auf die kalorischen Umsetzungen bei einer „reversiblen“ Wanderung eines Trägers durch heterogene Stellen an, so läßt sich auch behaupten, der Energieträger führe seine latente Energie mit sich. In diesem Sinne hat F. Kohlrausch¹⁶ an der Definition der Überführungswärmen teilgenommen, als er in seiner Mitführungstheorie den Peltier-Effekt als Differenz von Überführungswärmen (also latenten Energiemengen TS) deutete. Seine explizite gegebene Definition hat gegenüber der impliziten Definition von Helmholtz den Nachteil, die andere (und zwar „freie“) Überführungsenergie, die mit Reservoirien freier Energie ausgetauscht wird, zu vernachlässigen, wodurch in bestimmter Hinsicht ein Regreß im Vergleich zu Helmholtz's Leistungen entsteht. Ähnlicherweise hat dann auch C. Liebenow die Überführungsenergien (immer noch in ihren Anwendungen auf das Thermoelement) falsch interpretiert.

Erst bedeutend später hat die Frage der Überführungswärmen, von E. D. Eastman aus der Vergessenheit erweckt und für beliebige thermodynamische Systeme erweitert, neues verdientes Interesse hervorgerufen. Abgesehen von der Erkenntnis der allgemeinen Bedeutung des Problems, besteht der große Verdienst E. D. Eastman's in einer korrekt durchgeführten Definition der Überführungswärmen als partiellen Größen. Obwohl einzelne Anwendungen seiner Ansichten, besonders wenn man unklar gebliebene Fragen im Sinne von E. Lange interpretiert, Erfolge gezeitigt haben, die auf den oben hervorgehobenen Eigenschaften der Eastman'schen Theorie beruhen, so scheint doch kein experimenteller Grund vorhanden, den Überführungswärmen, im krassen Gegensatz zu Helmholtz, unbekannte und von den thermodynamischen verschiedene Eigenschaften zuzuschreiben. Dies bezieht sich besonders auf die von Lange experimentell gemessenen Größen.¹⁷

Ähnlich liegt die Sache mit den irreversiblen Überführungsenergien, die erst dann einen physikalischen Sinn bekommen,

¹⁶ Literaturnachweis zu den Überführungstheorien in *Phil. Mag.* (7) 16,248, 1933. C. Liebenow *Ann. d. Physik* 2,636, 1906, hat als erster den physikalischen Sinn der dynamischen Glieder in (16) erraten.

¹⁷ Die Ausführungen des 5. Abschnitts scheinen deutlich darauf hinzuweisen, daß eine Abweichung der Peltierwärmern vom Werte $T\Delta S$ des Elektrodenprozesses nicht ohne Aufgabe des Superpositionsprinzips möglich sind. Gibt man aber das letztere auf, so fallen auch die Gleichungen von Helmholtz-Nernst und auch die von Kelvin, und an ihre Stelle treten die Gleichungen des Abschnitts 6.

wenn man, wie im Abschnitt 7, das Reziprozitätsphänomen erkannt und aus ihm geschlossen hat, daß neben dE_s , $\zeta d \ln N$, π , fz/\mathcal{F} , die das Diffusionselement eindeutig bestimmen, auch dE_r der polarisierten Zelle eine dimensionell und funktionell gleichwertige Rolle zukommt. Wir wollen sehen, wie diese verkannte Größe sich energetisch deuten läßt.

Wenn man sich der allgemein thermodynamischen Analyse des Diffusionselements erinnert, die wir im Abschnitt 6 nach L. Boltzmann's Beispiel durchführten, so erkennt man als Grundidee der Superpositionsannahme die Integrität einzelner Effekte, die in eine Maschinerie von Effekten eingehen, was sich z. B. darin äußert, daß die freie Energie eines diffundierenden Stoffes keine äußere Arbeitsleistung bewerkstelligen kann, es sei denn, daß an Stelle der Diffusion eine von außen geregelte Hittorf-Wanderung als reversibler Effekt tritt, und auch dann ist die Arbeitsleistung nur genau von der Größe, in der die Diffusion durch reversible Hittorf-Wanderung ersetzt wird. Diese Annahme erlaubt, jeden Effekt nach seinen einzeln festgestellten physikalischen Eigenschaften thermodynamisch in Rechnung zu setzen, und zwar im verallgemeinerten Sinn der Superpositionsannahme, unabhängig davon, ob dieser Effekt reversibel oder irreversibel ist, man braucht nur seine durch andere Effekte unbeeinflussbaren Eigenschaften zu kennen. Diese Bahauptung ist der Behauptung analog: die Reibung beim Heben oder Senken eines Gewichts über reale Flaschenzüge sei gleich.

Die Elemente der eben besprochenen klassischen Überführungstheorie beschränken sich auf die beiden Arten von reversiblen Effekten, die ja zur Lösung von Systemen, ohne tatsächlichen Stofftransport, genügen. Wollen wir aber mit denselben thermodynamischen Mitteln auch stromdurchflossene Systeme behandeln, so müssen die Überführungsenergien, die bei einer tatsächlichen räumlichen Überführung auftreten, noch bestimmt werden.

Durch unsere im vorhergehenden Abschnitt gewählte Fragestellung nach der Energie-Bilanz der polarisierten Zelle erhält unsere Aufgabe eine in enge Grenzen gezwängte Lösungsmöglichkeit, besonders wenn man auch bei der Joule-Wärme die Effekte, die den einzelnen Ionen zukommen, reinlich trennt und als ganz selbständige Effekte auffaßt. Wir werden gleich sehen, wie leicht sich sonst ein gedank-

licher Kurzschluß einschleicht, auf den wir im Abschnitt 9 bei der Definition der polarisierten Zelle andeuteten¹⁸⁾

Wir kehren zu unserer Bilanz der polarisierten Zelle zurück, in der wir feststellten, daß das dynamische, strombestimmende Potential dE_d aus den thermodynamischen Eigenschaften des Elektrolyts folgt. Wie groß ist nun die Joule-Wärme und die Spannung dE_r der polarisierten Zelle? Die gewöhnliche Antwort lautet, daß die Joule-Wärme idE_d oder $(dE_d)^2/R$ sei, und daß folglich die Zellenspannung $dE_d + dE_\varphi = dE_s$ sein muß. Nun ist aber die quadratische Gleichung für die Joule-Wärme nur dann bindend, wenn dE_d wirklich ein Potentialabfall in der Lösung zukäme, ob dies für eine aus dem Diffusionsprozeß abgeleitete Größe zutrifft, wissen wir aber nicht. Und weiterhin hat die Annahme den Nachteil, daß sie die Aufteilung der Joule-Wärme in die den beiden Ionen entsprechenden Komponenten nicht gestattet. Betrachten wir nämlich wieder zwei gleiche Zylinder ($R, q, l, d \ln N_2$) einmal mit kationischen, das andere Mal mit anionischen Elektroden, dann ist wegen gleicher Diffusion das dynamische Potential (dE_d) einmal dE_φ^- und das andere Mal dE_φ^+ (vgl. Gl. 18), und die Stromstärken sind i_+ und i_- .

Dann ist die Joule-Wärme in einem Zylinder $i_+ dE_d^+ = i_+ dE_\varphi^-$ und im anderen $i_- dE_d^- = i_- dE_\varphi^+$. Nun haben beide Zylinder das gemeinsam, daß ungeachtet der verschiedenen Stromstärken der Anteil der beiden Ionengattungen an der Leitung in beiden Fällen der Gleiche ist. Diesem Umstand geben die eben angeführten Gleichungen keine

¹⁸⁾ Bevor wir weiter gehen, sollen die verschiedenen Potentiale und ihre Bezeichnungen zusammengefaßt werden, die man zur Lösung des Problems unterscheiden muß:

dE_φ (φ — thermodynamisch) — das Potential des Diffusionselementes (mit Konzentrationsunterschied $d \ln N_2$),

dE_r (r — reziprok) — das Potential, das ein Konzentrationsgefälle $d \ln N_2$ in einer polarisierten Zelle verursacht,

dE_d (d — dynamisch) — das Potential, das sich aus der Ohm'schen Gleichung aus Strom und Widerstand errechnen läßt $dE_d = iR$,

dE_s (s — summatorisch) — $dE_\varphi + dE_d$ (Scheint mit dE_r nicht identisch zu sein),

dE_j (j — Joule) — ein neu postuliertes Potential, das der irreversiblen Übertragung eines Ions zwischen Stellen mit dem Konzentrationsunterschied $d \ln N_2$ entspricht (wahrscheinlich identisch mit dE_φ),

dE_m — thermodynamisch zulässiges Maximalpotential bei Ausnutzung der Diffusion (Gl. 15).

Rechenschaft. Soll die eben angesetzte Gleichung für die Joule-Wärme wahr sein, so muß dE_d als Überführungspotential angesehen werden, und da dE_d in beiden Zellen ungeachtet des gleichen Mechanismus verschieden ist, muß das Überführungspotential für ein und dieselbe Überführung verschieden sein bei verschiedenen Stromstärken. Durch diesen letzten Umstand würde der Leitungsmechanismus seine Ähnlichkeit mit dem Diffusionsmechanismus, wie weiter folgt, verlieren.

Es gibt aber eine andere Alternative, die bei näherer Prüfung den angedeuteten Tatsachen besser gerecht zu werden scheint. Wir nehmen an, daß ein jedes Ion von der Stromstärke unabhängiges und nur von dem chemischen Potential der Terminale abhängiges Überführungspotential dE_j besitzt. In diesem Fall wird die Joule-Wärme der ersten Zelle $i_+(t_+dE_j^+ + t_-dE_j^-)$ und die der zweiten $i_-(t_+dE_j^+ + t_-dE_j^-)$. Beide Zellen haben wieder verschiedene Joule-Wärme, aber gleiche Überführungspotentiale, die aus den Überführungspotentialen der beiden Ionen gemäß ihrer Beteiligung an der Leitung zusammengesetzt sind. Erinnert man sich noch (Gl. 12) an die allgemeine Bedeutung der Überführungszahlen, so kann man auch für das irreversible Überführungspotential einer polarisierten Zelle $2t_+t_-dE_j = 2t_+dE_j^+ = 2t_-dE_j^-$ schreiben, wo dE_j das Überführungspotential des einheitlich in Überführung befindlichen Elektrolyts darstellt. Nehmen wir wie früher an, daß aus der polarisierten Zelle keine neuen Materialkonstanten gewonnen werden können, so muß auch $dE_j = dE_\phi$ werden, und als Größe der Polarisationsspannung ergibt sich

$$dE_r^+ = (1 + 2t_+)dE_\phi^+ = (1 + 2t_+)t_-dE_\phi \quad (20)$$

und $dE_r^- = (1 + 2t_-)dE_\phi^- = (1 + 2t_-)t_+dE_\phi$

im Gegensatz zur ersten Annahme, die für kationische und anionische Zellen das gleiche Potential

$$dE_r = dE_d^+ + dE_\phi^+ = dE_\phi^- + dE_\phi^+ = dE_\phi$$

verlangt. Hier bezieht sich dE_ϕ (ohne Zeichen) auf das Salz (vgl. Gl. 12). Da $(1 + 2t_+)t_-$ in den seltensten Fällen von 1 sehr verschieden ist, muß man im Besitz sehr präziser Daten für Diffusionselemente und korrespondierende polarisierte Zellen sein, um zwischen den beiden Alternativen schon jetzt zu unterscheiden.

Es existieren aber für die neuere Anschauung, abgesehen von ihrer logischen Verwandtschaft mit der Superpositionsannahme und

ihrer Anwendbarkeit zur Lösung des Problems vom Thermoelement, auch noch experimentelle Überlegungen allgemeiner Art. Betrachten wir den Diffusionsprozeß, dessen Verwandtschaft mit der Hittorf-Wanderung ja durch Nernst's Werk aufgedeckt ist, und überlegen wir uns die Energieverhältnisse. Der Elektrolyt, der von einer Stelle höheren chemischen Potentials auf eine Stelle niederen Potentials diffundiert, wird offenbar vom Überschuß der freien Energie getrieben (quasi Motor). Die begleitenden Effekte sind: der homogene latente thermische Effekt, der die latente Energie frei macht, und ein Reibungseffekt (der Joule-Wärme genau analog), der die freie Energie aufbraucht. Hier wissen wir genau, daß wegen Abwesenheit anderer Energiequellen der Reibungseffekt proportional dem „Strome“ und unabhängig von dem zurückgelegten Wege stattfindet, d. h. auch unabhängig von der Geschwindigkeit des Prozesses. Da die Hittorf-Wanderung sich von der Diffusion in Reibungsfragen nur dadurch unterscheidet, daß die Komponenten in entgegengesetzter Richtung wandern, so ist auch hier zu erwarten, daß das irreversible Reibungspotential von der zurückgelegten Strecke nicht abhängt.¹⁹

Auf diesen Annahmen fußend, können wir die folgenden Eigenschaften der irreversiblen Überführungsenergie (elektrolytischen Joule-Wärme und Diffusion) feststellen. Gleich den latenten thermischen Effekten und der Polarisations-Energie, ist die irreversible Überführungsenergie proportional den übergeführten Stoffmengen und unabhängig von der Überführungsstrecke. Die irreversible Überführungsenergie kann aus äußeren Quellen oder aus der Reserve freier chemischer Energie des Stoffes stammen, äußert sich aber immer als positiver thermischer Effekt (Joule-Wärme bzw. Teil der Diffusionswärme) und ändert also, im Gegensatz zu den reversiblen Effekten, sein Zeichen bei Stromwendung nicht. Die irreversible Überführungsenergie eines bestimmten Energieträgers ist, abgesehen von der eben erörterten Zeichenfrage, sonst genau der entsprechenden Polarisationsenergie gleich — d. h. die irreversible Überführungswärme ist dem Unterschiede der freien Energie des Trägers in seinen extremen Lagen gleich.

¹⁹ Vergleicht man den Reibungseffekt bei einer Vermischung durch Diffusion mit einer Vermischung durch Hittorf-Wanderung (z. B. bei spontanem Strom im Diffusionselement) mit kationischen Elektroden, so verhält sich der erste zum zweiten wie: $1/2t_+$, d. h. ein Unterschied ist nur dann zu erwarten, wenn beide Ionen sehr verschieden sind und t sich von $1/2$ stark unterscheidet.

Sollte sich diese aus der Analyse des galvanischen Problems ergebende Vervollständigung der Helmholtz'schen Überführungsidee bestätigen²⁰, so wird es möglich, irreversible Prozesse in thermodynamische Energie-Bilanzen aufzunehmen, ohne dadurch die quantitative Anwendbarkeit des zweiten Wärmesatzes zu gefährden.

Zusammenfassung.

Wir hatten uns als Aufgabe unseres Aufsatzes die Aufdeckung und klassische Lösung vernachlässigter Fragen auf dem Gebiete der galvanischen Effekte gestellt. Um die Grenzen der Arbeit nicht übermäßig zu erweitern, wurde von experimentellen Daten abgesehen und der Schwerpunkt auf die rein logische Einreihung allgemeiner experimenteller Erscheinungen verlegt.

Abgesehen von einer Verallgemeinerung der klassischen Gleichungen von Helmholtz, Nernst und Boltzmann (5, 19, 15), glauben wir durch Benutzung recht allgemein anerkannter, aber nicht vollständig verwerteter Erfahrungen folgende Verhältnisse sichergestellt zu haben:

- 1) Eine konsequente Anwendung klassischer elektrochemischer Ansätze ergibt die Bestimmungsmöglichkeit der freien Verdünnungsenergien und der Verdünnungsentropien einzelner Ionen-Gattungen aus den *EMKK* von Diffusionselementen (Gl. 11 und 8b), und
- 2) die Bestimmungsmöglichkeit von partiellen absoluten Entropien einzelner Ionen-Gattungen aus elektrolytischen Peltier-Effekten (Gl. 7a).
- 3) Es wird gefunden, daß die Erscheinungen in polarisierten Zellen eine Entscheidung über die thermodynamische Rolle der Joule-Wärme verlangen. Um mit der vorhandenen Erfahrung im Einklang zu bleiben, muß angenommen werden, daß rein thermodynamische Eigenschaften von Elektrolyten aus ihren dynamischen Eigenschaften vorausgesagt werden können (Gl. 18b und 12).
- 4) Es wird gefunden, daß bei entgegengesetzt gerichteter Wanderung der Ionen eines Elektrolyts durch ein Konzentrationsgefälle, der summare homogene thermische Effekt (und auch

²⁰ Vgl. B. Bružs Proc. Roy. Soc. A. 151, 640—665, 1935.

der reversible Polarisations-Effekt) sich aufhebt, solange t (die Überführungszahl) in diesem Konzentrationsgebiet als konstant aufgefaßt werden kann.

- 5) Neue Eigenschaften der Joule-Wärme werden aufgedeckt, und die Bestimmungsmöglichkeit des Potentials der irreversiblen Überführung des Elektrolyts (dE_j) aus dem Potentialgefälle einer polarisierten Zelle wird gefunden [$dE_j^+ = (dE_r^+ - dE_\varphi^+) / 2t_+$]. Es ist überaus wahrscheinlich, daß dE_j mit dE_φ identisch ist.

Die gesammelte Erfahrung wird in Form einer kurz angedeuteten und für beliebige stationäre Systeme anwendbaren Überführungstheorie zusammengestellt.

Der Fakultät vorgelegt den 13. Dezember 1937.

Pārnesanas enerģijas.

B. Bružs.

Difūzijas elementa un polārizētas galvaniskas šūnas sīka enerģētiska analīze ved pie divām principiāli jaunām tezēm.

Pirmā tezē tiek uzrādīta iespēja noteikt citādi nepieejamas ionālas atšķaidīšanas enerģijas un ionālas entropijas no viegli pieejamiem elektroķīmiskiem datiem.

Otrā tezē tiek pierādīts, ka starp minētām jonu termodinamiskām īpašībām un viņu dinamiskām īpašībām, kā piemēram elektrisko vadītspēju, difūzijas koeficientu un pārnesanas skaitļi, pastāv termodinamiski uz reciprocitātes fēnomēna pamatota attiecība.

Paralēli ar šo težu pamatošanu tiek iegūti sekojoši rezultāti:

1. Klasiskais Helmholtz'a nolīdzinājums tiek ģenerālizēts koncentrēto šķīdumu gadījumam un gadījumam, kad difūzija iespaido elektromotorisko spēku.

2. Tiek atrasti sakari starp ionālām atšķaidīšanas afinitātēm un entropijām un starp difūzijas elementa elektromotorisko spēku.

3. Tiek atrasti sakari starp ionālām entropijām un Peltier'a koeficientiem.

4. Uzstādot polārizētas galvaniskas šūnas enerģētisko bilanci, tiek atrasta termodinamiska izteiksme difūzijas koeficienta un elektriskas vadītspējas attiecībai (Nernst'a robežlikuma precizējums).

5. Tiek atrasts, ka reversībie homogenie galvaniskie efekti pazūd tais intervalos, kur pārnesanas skaitļi konstanti.

6. Joule'a siltuma lielums tiek atvasināts no termodinamiskiem ionāliem koeficientiem.

Iegūtie rezultāti tiek ietērpti visām stacionārām sistēmām derīgā pārnesanas procesu teorijā.

Übersicht über die Eigenschaften der Wärme...

Die Eigenschaften der Wärme sind:

1. Die Wärme ist eine Form der Energie.
2. Die Wärme wird durch die Bewegung der Teilchen übertragen.
3. Die Wärme wird durch die Ausdehnung der Körper übertragen.
4. Die Wärme wird durch die Strahlung übertragen.
5. Die Wärme wird durch die Leitung übertragen.
6. Die Wärme wird durch die Konvektion übertragen.

Die Wärme ist eine Form der Energie, die durch die Bewegung der Teilchen übertragen wird. Die Wärme wird durch die Ausdehnung der Körper übertragen. Die Wärme wird durch die Strahlung übertragen. Die Wärme wird durch die Leitung übertragen. Die Wärme wird durch die Konvektion übertragen.

Zur Wechselwirkung zwischen den schweren Teilchen nach der Theorie von Fermi.¹

von A. Apinis, Physikalisches Institut der Universität.

Die Strahlungstheorie des β -Zerfalls führt uns bekanntlicher Weise (Tamm², Ivanenko³, Sokolow³, Weizsäcker⁴, Behrhe⁵) zu einer sehr kleinen Wechselwirkung zwischen Proton und Neutron, wenn wir die ursprüngliche Fermi's Form des Kraftansatzes anwenden. Durch Einführung der Ableitungen der Wellenfunktionen kann man, wie Konopinski und Uhlenbeck⁶ gezeigt haben, nicht nur den β -Zerfall mit dem Experiment in Zusammenhang bringen, sondern auch die Wechselwirkungsenergie vergrößern. Nach Weißkopf⁷, und Ivanenko und Sokolow³ genügen schon die drei Ableitungen, um die Kraft von der notwendigen Stärke hervorzurufen. Eine genauere Form des Wechselwirkungsansatzes bei dieser Ableitungszahl (eine dem Elektron und zwei für Neutrino) und seiner Abhängigkeit von der Entfernung der beiden Partikeln ist das Ziel der vorliegenden Arbeit.

Mit drei Ableitungen ist es möglich verschiedene Wechselwirkungsformen aufzustellen. Wir nehmen als einfachste die vektorielle Form an. Allgemein bedeutet die Einführung der Ableitungen, in diesem Fall, keine wesentliche Veränderung für den Kraftansatz. Dann kann man den Ausdruck, für den Übergang eines schweren Teilchens, von einem Protonenzustand in einen Neutronenzustand und umgekehrt, folgendermaßen schreiben:

$$A = (u_n^* \cdot \gamma \cdot u_p) \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \psi^* \cdot \frac{\partial}{\partial x_e} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} \varphi \right) + \text{conj. kompl.} \dots (1)$$

Hier bedeutet u_n^* , u_p , ψ^* , φ die Wellenfunktionen des Neutrons, Protons, Elektrons und Neutrino und $x = x, y, z, ict$; $\gamma = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta)$.⁸

Von diesem skalaren Produkt nehmen wir nur die zeitliche Komponente, weil die räumlichen Komponenten der schweren Teilchen einen geschwindigkeitsabhängigen Vektor $\vec{\alpha}$ enthält, und das vermindert den Übergang annähernd wie v_s/v_e . v_s, v_e sind die Geschwindigkeiten der schweren und leichten Teilchen. Nach der Vorschrift der Strahlungstheorie, müssen wir die Wellenfunktionen als Operatoren auffassen. Deshalb entspricht im Ausdruck (1) das erste Glied einem Entstehen des Neutrons und Elektrons und einem Verschwinden eines Protons und Antineutrinos (was dasselbe ist, wie Entstehen eines Neutrinos im negativen Energiezustand). Das konjugierte Glied gibt uns den umgekehrten Prozeß. Setzen wir nun für $u_n^* = -i\beta u_n^*$ und $\psi^* = -i\beta \psi^*$ ein. Dann haben wir die Form

$$A = (u_n^* u_p) \left\{ \frac{\beta}{c} \left(\text{grad}_x \psi^*, \text{grad}_x \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \frac{\beta}{c^3} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial t}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) \right\} + \text{conj. kompl.} \dots \dots \dots (2)$$

$x = x, y, z.$

Nach Theorie von Fermi ist dieser Übergang mit einer β -Emission verbunden. Diese bekommen wir aus dem Ausdruck (2) durch Multiplikation mit einem dimensionalen Faktor g und Integration über den ganzen, von den Wellenfunktionen besetzten Raum

$$K = g \int A dr \dots \dots \dots (3)$$

Wenn ein zweites Partikel existiert, dann besteht derselbe Ausdruck auch für die Umwandlung in diesem Fall, aber dann kommt noch ein Glied zu, das als Wechselwirkungsglied zwischen beiden Teilchen aufzufassen ist. Dieses ist ein Übergangsprozeß zweiter Ordnung, weil hier die beiden Übergänge gleichzeitig eintreten müssen. Die Perturbationstheorie gibt uns folgenden Ausdruck in diesem Fall:

$$K_{12} = - \sum_{e i} \frac{K_1 \cdot K_2}{E_e + E_i} + \text{conj. kompl.} = -g^2 \sum_{e i} \int \int u_n^*(x_1) u_p(x_1) u_p^*(x_2) u_n(x_2) \left\{ \frac{\beta}{c} \text{grad}_{x_1} \psi_e(x_1, s_1) \cdot \text{grad}_{x_1} \left(\frac{\partial \varphi_i(x_1, v_1)}{\partial t} \right) - \frac{\beta}{c^3} \frac{\partial \psi_e(x_1, s_1)}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_i(x_1, v_1)}{\partial t^2} \right\} \times \left\{ x_2, s_2 / x_2, v_2 \right\} dx_1 dx_2 + \text{conj. kompl.} \dots \dots \dots (4)$$

Mit den E_e, E_i, s, v haben wir die Energien und Spins der Elektronen und Neutrinos am Ort der schweren Teilchen bezeichnet. Diese Formel, in Form

$$K_{12} = -g^2 \sum_{e i} \iint \frac{u_n^*(x_1) u_p^*(x_2)}{E_e + E_i} \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \end{array} \right\}}_{(a)} u_n(x_2) u_p(x_1) dx_1 dx_2 + \\ + \text{conj. kompl.} \dots \dots \dots (5)$$

geschrieben, gibt uns sehr anschaulich die Austauschkraft zwischen beiden Partikeln.

Nun ist die Aufgabe daraus die Austauschkraft, seine Abhängigkeit von den Spins der leichten Teilchen und von der Entfernung der beiden schweren Partikeln zu berechnen. Wir sehen hier, daß in diesem Ansatz die Spinkoordinate der schweren Teilchen nicht vorkommt. Deshalb ist die Austauschkraft in diesem Fall im wesentlichen eine Majorana Kraft. Die Heisenberg'sche Kraftform kann nur als eine kleine Korrektur überlagern (wenn wir von Anfang auch die räumlichen Komponenten der Vektorprodukte berücksichtigen). Im Ausdruck (a) nehmen wir, statt Summation, die Integration über alle Wertebereiche der Impulse und summieren nur über Spinkoordinaten. Die Austauschkraft sieht dann folgendermaßen aus:

$$A = -\frac{2g^2}{c} \sum_{s, v} \iint \left\{ -\left(\frac{i}{\hbar}\right)^3 p_i \vec{p}_e \psi^*, \beta \vec{p}_e \varphi + \left(\frac{i}{\hbar}\right)^3 p_e p_i^2 \psi^* \beta \varphi \right\} \times \\ \times \left\{ -\left(\frac{i}{\hbar}\right)^3 p_i \vec{p}_e \varphi^*, \vec{p}_e \beta \psi + \left(\frac{i}{\hbar}\right)^3 p_e p_i^2 \varphi^* \beta \psi \right\} d\vec{p}_e d\vec{p}_i \dots (6)$$

Die Übergänge im konjugierten Glied sind vollkommen symmetrisch. Daher kommt hier die Multiplikation mit 2. Für die Wellenfunktionen der leichten Teilchen in den Zwischenzuständen können wir ebene Wellen nehmen. Als weitere Vereinfachung lassen wir auch die Ruhenergie wegfallen

$$\left. \begin{array}{l} \psi_e(\vec{x}_1, s_1) = a_e(s_1) e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_e \vec{x}_1)} \\ \varphi_i(\vec{x}_1, v_1) = b_i(v_1) e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_i \vec{x}_1)} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

A nimmt dann folgende Form an

$$\begin{aligned}
 A = & -\frac{2g^2}{c} \left(\frac{i}{\hbar}\right)^6 \iint \sum_{s \ v} \frac{d\vec{p}_e d\vec{p}_i}{p_e + p_i} \left\{ p_i^2 (\vec{p}_e, \vec{p}_i) a_e^*(s_1) \beta b_i(v_1) \cdot \right. \\
 & e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_e \vec{x}_1)} e^{+\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_i \vec{x}_1)} \cdot (\vec{p}_i, \vec{p}_e) b_i^*(v_2) a_e(s_2) e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_i \vec{x}_2)} e^{+\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_e \vec{x}_2)} - \\
 & - p_e p_i^3 (\vec{p}_e, \vec{p}_i) a^*(s_1) b(v_1) e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_e \vec{x}_1)} e^{+\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_i \vec{x}_1)} \cdot b^*(v_2) a(s_2) \cdot \\
 & e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_i \vec{x}_2)} e^{+\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_e \vec{x}_2)} - p_e p_i^3 a_e^*(s_1) b_i(v_1) e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_e \vec{x}_1)} e^{+\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_i \vec{x}_1)} \cdot \\
 & (p_i p_e) b_i^*(v_2) a(s_2) e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_i \vec{x}_2)} e^{+\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_e \vec{x}_2)} + p_e^2 p_i^4 a_e^*(s_1) b_i(v_1) \\
 & \left. e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_e \vec{x}_1)} e^{+\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_i \vec{x}_1)} b^*(v_2) a(s_2) e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_i \vec{x}_2)} e^{+\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_e \vec{x}_2)} \right\} \dots (8)
 \end{aligned}$$

Zuerst führen wir die Summation über die Spinwerte aus. Die spinabhängige Größe ist hier zweiartig, die Spinfunktionenprodukte a^*a der Elektronen und Spinfunktionenprodukte des Neutrinos b^*b . Statt Summation über Spinwerte, können wir die Summation über die zugehörigen Impulse der leichten Teilchen ausführen. Das ist möglich mit Hilfe eines Operators $(1 + \alpha_m)$, der definiert ist mit dem Dirac'schen Operator

$$H = (\vec{\alpha} \vec{p}) + \alpha_m m c \dots (9)$$

Wenn wir berücksichtigen, daß

$$\frac{E}{c} = \pm \sqrt{m^2 c^2 + p^2} = \sqrt{m^2 c^2 + p^2} / \alpha_m, \dots (10)$$

wo

$$\alpha_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \dots (11)$$

und auch daß

$$\sqrt{m^2 c^2 + p^2} / \alpha_m = (\vec{\alpha}, \vec{p}), \dots (12)$$

dann nimmt die Summe der Elektronen- und Neutrinos-Spinfunktionen folgende Gestalt an:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \sum_{e=1}^2 a_e^*(s_1) a_e(s_2) = \frac{1}{2} (1 + \alpha_m)_{s_2 s_1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(\vec{\alpha} \vec{p}_e)}{p_e} \right)_{s_2 s_1} \\ S_2 &= \sum_{i=1}^2 b_i^*(v_1) b_i(v_2) = \frac{1}{2} (1 - \alpha_m)_{v_2 v_1} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{(\vec{\alpha} \vec{p}_i)}{p_i} \right)_{v_2 v_1} \end{aligned} \right\} (13)$$

Die Summation bei den Elektronen geht nur über positive, aber bei Neutrinos über die negativen Energiezustände. Nun legen wir dieses Ergebnis in das erste Glied der Formel (8) hinein:

$$A^1 = \frac{1}{4} p_i^2 (\vec{p}_e \vec{p}_i) \beta \left(1 - \frac{(\vec{\alpha} \vec{p}_e)}{p_e} \right)_{s_2 s_1} \beta \left(1 + \frac{(\vec{\alpha} \vec{p}_i)}{p_i} \right)_{v_2 v_1} (\vec{p}_i \vec{p}_e) \cdot \exp. (14)$$

und nehmen die Spur, d. h. den mittleren Wert für einen bestimmten Impuls. Die Ausrechnung, wenn wir berücksichtigen, daß die Spur über eine unpaarige Zahl der Faktoren verschwindet und über paarzahlige 4 gibt, führt zu folgendem Resultat:

$$\begin{aligned} A^1 &= \text{Spur} \frac{1}{4} p_i^2 (\vec{p}_e \vec{p}_i) \beta \left(\beta - \frac{(\vec{\alpha} \vec{p}_e)}{p_e} \beta + \frac{(\vec{\alpha} \vec{p}_i)}{p_i} \beta - \frac{(\vec{\alpha} \vec{p}_e)}{p_e} \beta \frac{(\vec{\alpha} \vec{p}_i)}{p_i} \right) \times \\ &\quad \times (\vec{p}_i \vec{p}_e) \cdot \exp. \dots \dots \dots (15) \end{aligned}$$

$$A^1 = (p_e^2 p_i^4 + p_e p_i^3 (\vec{p}_e \vec{p}_i)) e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p}_e (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)} e^{+\frac{i}{\hbar} \vec{p}_i (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)} \dots (16)$$

Ähnlicherweise kann man die anderen Glieder berechnen, und der Ausdruck der Austauschkraft schreibt sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{4g^2}{c} \left(\frac{i}{\hbar^6} \right)^6 \left(\frac{1}{\hbar} \right)^6 \iint \frac{d\vec{p}_e d\vec{p}_i}{p_e + p_i} \{ p_e^2 p_i^4 + p_e p_i^3 (\vec{p}_e \vec{p}_i) \} \times \\ &\quad \times e^{+\frac{i}{\hbar} (\vec{p}_e \vec{r})} e^{-\frac{i}{\hbar} (\vec{p}_i \vec{r})}, \dots \dots \dots (17) \end{aligned}$$

wobei $\vec{r} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$ bezeichnet. Multiplikation mit $\frac{1}{\hbar^6}$ kommt aus Normierungsgründen der Wellenfunktionen der leichten Partikeln. Schon hier können wir sehen, daß die Wechselwirkung bei $r = 0$ unendlich wird. Weizsäcker⁴ folgend multiplizieren wir den ganzen Ausdruck mit einem exponentiellen Faktor $e^{-\alpha(p_e + p_i)}$, wo α eine Größe von der Dimension $\frac{\text{cm.}}{\text{erg. sec.}}$ ist. Die Integration der Formel (17) ist

eine reine mathematische Frage. Aus der Formel für die potentielle Energie des Systems

$$A = k(A_1 + A_2) \dots \dots \dots (18),$$

kann man das zweite Glied fortlassen, weil hier die Abstandsabhängigkeit der Kräfte mit kleineren Potenzen behaftet ist, als im Vorherigen. Aber bei größeren, doch uns weniger interessierenden, Entfernungen spielt doch dieses Glied die primäre Rolle. Im Fall, wo $r \ll h\alpha$, haben wir nach einem langen Integrationsweg das folgende Resultat:

$$A = k \frac{7}{16} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \arctg q \right) - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{3q^3} + \dots \right) \right] \dots (19)$$

$$A = \frac{4g^2}{c} \cdot \left(\frac{i}{\hbar} \right)^6 \cdot \left(\frac{1}{h} \right)^6 \pi^2 \left\{ \frac{276480}{11 \alpha^{11}} - \frac{29274 \cdot 2880 r^2}{2080 \hbar^2 \alpha^{13}} + \dots \right\}, (20)$$

wo

$$k = - \frac{2880 g^2}{c} \cdot \left(\frac{i}{\hbar} \right)^6 \left(\frac{i}{h} \right)^6 \left(\frac{2\pi i \hbar}{r} \right)^2 \dots \dots \dots (21)$$

und

$$q = \frac{h\alpha}{r} \dots \dots \dots (22)$$

Die obige Formel für die Wechselwirkung zwischen dem Neutron und Proton gibt uns einen von der unendlichen Selbstenergie freien Ausdruck. Das graphische Bild gibt uns eine ähnliche, nur steiler fallende Form wie bei Weizsäcker⁴. Die maximale potentielle Energie ist mit

$$A_{max} = - g^2 \frac{4 \cdot 276480 \pi^2 \cdot (2\pi)^6}{11 c \hbar^{12} \alpha^{11}} \dots \dots \dots (23)$$

gegeben. Deshalb, weil α sehr verschiedene Werte annehmen kann, variiert auch die Bindungsenergie in sehr weitem Wertbereich.

Die nächste Aufgabe ist nun die Konstante g zu bestimmen. Diese Konstante muß von fundamentaler Natur sein. Das fordert, deshalb weiter, die Berechnung der β -Emmissionswahrscheinlichkeit. Nach der allgemeinen Störungstheorie der Strahlung haben wir für diesen folgenden Ausdruck

$$P(E)dE = g^2 \left| \int u_n u_p dx_1 \right|^2 \int \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right) \psi^* \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 \frac{\sin^2 \frac{-E + E_e + E_i}{2\hbar} t}{(-E + E_i + E_e)^2} dE (24)$$

Den Vergleich führen wir bei leichten radioaktiven Elementen aus, deshalb genügt es für die Wellenfunktionen der leichten Teilchen die ebenen Wellenfunktionen zu nehmen. Nach Berechnung bekommen wir für die Fermi'sche Konstante $g = 1 \cdot 10^{-82}$. Entsprechend der beobachteten Wechselwirkungsenergie des Deuterons verlangt es eine Entfernung von $3 \cdot 10^{-13}$ cm.

Eine Nachprüfung wurde auch für die Größe des magnetischen Moments des Protons durchgeführt, und in Größenordnung der Beobachtung gefunden. Da aber die Theorie schon in ihren Gründen viele Schwierigkeiten hat, muß diese Verschärfung vorläufig von kleinerer Bedeutung sein.

Eine ähnlich große Wechselwirkung, wie bei ungleich geladenen Teilchen, muß auch für die gleichgeladenen Teilchen existieren. Das ist klar, wenn wir die Unabhängigkeit der Kräfte von der Ladung berücksichtigen. Der Proton- oder Neutronzustand ist keineswegs, in Bezug auf das Vorhandensein der leichten Teilchen, oder auf den Zustand der schweren Teilchen, eindeutig. Im Gegenteil, der Zustand der schweren Teilchen ist ein ausgearteter. Hier muß man streng unterscheiden, zwischen der Kraft der schweren Partikeln und zwischen der Kraft, welche man durch die Existenz der leichten Teilchen in der Nähe der schweren bekommt. Z. B. in der Austauschkraft, wo ein Proton sich in ein Neutron und ein Neutron sich in ein Proton verwandelt, deutet dieser Prozeß nur auf die Zustandsbesetzung der leichten Teilchen hin. Ein Proton können wir ebenso als ein Proton, 2 Protonen plus ein negatives Proton, zwei Neutronen plus zwei Protonen, 3 Protonen plus zwei negative Protonen u. s. w. ansehen. Wenn die Wechselwirkungsenergie groß ist, sind diese Zustände äquivalent.

Zusammenfassung.

Es wurde untersucht die Wechselwirkung zwischen den elementaren Kernbausteinen Neutron und Proton, nach der Fermi'schen Theorie, bei der Einführung von drei Ableitungen (ein für das Elektron, und zwei für das Neutrino) in die Wellenfunktionen der leichten Teilchen, und beim Abstand $3 \cdot 10^{-13}$ cm die Übereinstimmung mit der experimentell beobachteten Bindungsenergie des Deuterons, gefunden.

Die Rechnungen wurden im Institut für die theoretische Physik in Kopenhagen im Herbst, 1936, durchgeführt. Dem Professor N. B o h r

danke ich für die herzliche Aufnahme in seinem Institut. Ebenso habe ich die angenehme Pflicht meine Dankbarkeit den Herren Dr. K. von Weizsäcker und Professor V. Weißkopf für die Anregung und viele Hinweisungen zu diesem Thema, auszusprechen. Dem lettischen Kulturfond und dem dänisch-lettischen Verein bin ich für die materielle Unterstützung dankbar.

Der Fakultät vorgelegt im Februar 1938.

Die Rechnungen wurden im Institut für die theoretische Physik in Kopenhagen im Herbst 1938 durchgeführt. Dem Professor N. Bohr
 Es wurde untersucht die Wechselwirkung zwischen den elementaren Kernbausteinen Neutron und Proton nach der Fermi'schen Theorie der Einführung von drei Ableitungen (ein für das Elektron und zwei für das Neutrino) in die Wellenfunktionen der leichten Teilchen und beim Abstand $\approx 10^{-12}$ cm die Oberstimmung mit der experimentell beobachteten Bindungsenergie des Deuterons.
 Zusammenfassung
 Die Rechnungen wurden im Institut für die theoretische Physik in Kopenhagen im Herbst 1938 durchgeführt. Dem Professor N. Bohr

Literatur:

- 1) ZS. f. Physik Bd. 88. 161. 1934.
- 2) Nature Vol. 133. 981. 1934.
- 3) ZS. f. Physik Bd. 102. 118. 1936.
- 4) ZS. f. Physik Bd. 102. 572. 1936.
- 5) Rev. Mod. Phys. Vol. 8. 82. 1936.
- 6) Phys. Rev. Vol. 48. 7. 1935.
- 7) Phys. Rev. Vol. 50. 1187. 1936.
- 8) Die Bedeutung dieser Matrizen siehe Pauli, Handb. d. Physik Bd. 24. Teil 1. 214. 1933.

Introduction	126
Chapitre I. Définitions et propriétés fondamentales des fonctions permutable	129
§ 1. Définitions et propriétés fondamentales des fonctions permutable	129
§ 2. Ordre caractéristique et dérivée d'une fonction	132
§ 3. Transformations qui maintiennent une fonction sous forme canonique	133
§ 4. Groupes de composition de la composition	135
Chapitre II. Problèmes de la détermination des fonctions permutable	146
Problèmes fondamentaux et symboliques du problème. Fonctions du groupe du cycle fermé	146
§ 1. Problème dans le cas d'une fonction donnée du premier ordre	152
§ 2. Problème dans le cas d'une fonction donnée du second ordre	162
§ 3. Problème dans le cas d'une fonction donnée d'ordre n ($n > 2$)	171
Chapitre III. Transformations de M. Pères et leur application au problème	174
§ 1. Fonction fonctionnelle qui caractérise la fonction caractéristique de la composition et sa discussion	174
§ 2. Détermination des fonctions permutable par les transformations de M. Pères et les propriétés du groupe de ces fonctions	181
Conclusion	188
Formules auxiliaires relatives aux problèmes (Résumé en langue lettone)	181
Index	193

Šis raksts izdots latviski un krievu valodā, tāpat kā krievu valodā, tika prezentēts 1937. gada 15. jūnijā, kad tika izdots "Acta Universitatis Latviensis" sērijas III. 5. numurs. Šis raksts ir izdots arī krievu valodā, tika prezentēts 1937. gada 15. jūnijā, kad tika izdots "Acta Universitatis Latviensis" sērijas III. 5. numurs. Šis raksts ir izdots arī krievu valodā, tika prezentēts 1937. gada 15. jūnijā, kad tika izdots "Acta Universitatis Latviensis" sērijas III. 5. numurs.

danke ich für die herzliche Aufnahme in meinem Institut. Ebenso habe ich die angenehme Pflicht meine Dankbarkeit den Herren Dr. K. von Weizsäcker und Professor V. Weisskopf für die Anregung und gegütigen viele Hinweise zu diesem Thema, anzusprechen. Der Deutsche Kulturfond und der Verein für die wissenschaftliche Unterstiftung dankbar.

1) ZS f. Physik Bd. 88, 161, 1934

2) Nature Vol. 133, 981, 1934

3) ZS f. Physik Bd. 102, 118, 1935

4) ZS f. Physik Bd. 102, 372, 1935

5) Rev. Mod. Phys. Vol. 8, 82, 1936

6) Phys. Rev. Vol. 48, 1, 1935

7) Phys. Rev. Vol. 50, 1187, 1936

8) Die Bedeutung dieser Matrizen siehe Pauli, Handb. d. Physik Bd. 24, Teil I, 214, 1933.

Sur le problème fondamental de la théorie des fonctions permutables¹

Par A. Lūsis.

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
Introduction	126
Chapitre I. Quelques propriétés générales de la composition et de la permutabilité	129
§ 1. Composition et permutabilité de première espèce. Symbole $\bar{1}^0$	129
§ 2. Ordre, caractéristique et diagonale d'une fonction	132
§ 3. Transformations qui mettent une fonction sous forme canonique	134
§ 4. Symbole f^{-1} d'inversion de la composition	138
Chapitre II. Problème de la détermination des fonctions permutables	146
§ 5. Equations fondamentales et symboliques du problème. Fonctions du groupe du cycle fermé	146
§ 6. Problème dans le cas d'une fonction donnée du premier ordre	152
§ 7. Problème dans le cas d'une fonction donnée du second ordre	162
§ 8. Problème dans le cas d'une fonction donnée d'ordre n ($n > 2$)	171
Chapitre III. Transformations de M. Pérès et leur application au problème fondamental	174
§ 9. Equation fonctionnelle qui caractérise la fonction génératrice de la transformation et sa discussion	174
§ 10. Détermination des fonctions permutables par les transformations de M. Pérès et les propriétés du groupe de ces fonctions	181
Conclusions	188
Permutablo funkciju teorijas pamatproblēma (Résumé en langue lettone)	191
Index bibliographique	193

¹ Ce travail, composé *in extenso* en langue lettone, était présenté en 1937 comme la thèse de doctorat à la Faculté des Sciences de l'Université de Lettonie. J'exprime aux M. M. J. Pérès et les examinateurs toute ma reconnaissance pour quelques renseignements concernant ce travail.

Introduction.

M. *Volterra* a fondé par ses Notes [20], [21] et [22]² de 1910 et de 1911 la théorie de la composition et des fonctions permutables de première espèce, dont l'application systématique à la résolution des équations intégrales et intégral-différentielles est faite dans les monographies [23] et [24] du même auteur. Parmi les continuateurs qui étendent considérablement la théorie de M. *Volterra* il faut citer M. M. *Evans* et *Pérès*. Par les travaux [3], [4] et [5] de M. *Evans* est développée l'algèbre des fonctions permutables et par la Thèse [11] de M. *Pérès* — la théorie des fonctions permutables analytiques. M. *Volterra*, par son Mémoire fondamental [27] de 1916, a constitué l'analyse infinitésimale des fonctions permutables, en introduisant la notion générale de la fonction de composition. Puisque celle-ci est une forme particulière de la fonctionnelle, on peut rattacher la théorie des fonctions permutables à la théorie générale des fonctionnelles. Sous ce point de vue la théorie de la composition et des fonctions permutables de 1^{ère} espèce est exposée dans les traités modernes [30] et [31] de M. M. *Volterra* et *Pérès*, ainsi que dans la monographie spéciale [28].

On trouve le sommaire des résultats sur la théorie mentionnée dans les rapports suivants: [2], [6], [17], [25].

Nous traiterons dans ce travail le *problème fondamental*: trouver et étudier toutes les fonctions continues $\varphi(x, y)$ qui sont permutables (de 1^{ère} espèce) avec une fonction donnée $f(x, y)$, c.-à-d. qui vérifient la relation intégrale

$$\int_y^x \varphi(x, s) f(s, y) ds = \int_y^x f(x, s) \varphi(s, y) ds$$

ou

$$\overset{*}{\varphi} \overset{*}{f} = \overset{*}{f} \overset{*}{\varphi}.$$

Tout d'abord ce problème est étudié dans les Notes fondamentales [21] et [22] de M. *Volterra* où la fonction donnée $f(x, y)$ est supposée du premier ou du second ordre. Le cas général d'une fonction donnée d'ordre entier positif $n > 2$ est traité, sous les hypothèses des fonctions analytiques, dans la Thèse [11] de M. *Pérès*. Je suis revenu sur le problème fondamental dans mes publications [9] et [10] qui servent de base pour ce travail.

² Ici et plus bas les numéros, figurant entre crochets, renvoient à l'Index bibliographique, placé à la fin du travail.

Je résume mes résultats et mes compléments principaux exposés dans ce travail. Pour appliquer une méthode uniforme et nouvelle à la résolution du problème fondamental j'expose (Chapitre I, § 4), comme dans mes publications [9] et [10], la détermination du symbole f^{-1} d'inversion de la composition dans le cas général d'une fonction $f(x, y)$ d'ordre entier positif n et de forme canonique. L'expression obtenue du symbole f^{-1} est appliquée dans le Chapitre II à la réduction du problème fondamental. On obtient un nouveau type d'équation intégral-différentielle qu'on peut remplacer, dans le cas général, par l'équation intégrale équivalente.

Par application des fonctions du groupe du cycle fermé et des transformations qui mettent une fonction donnée sous forme canonique, je détermine (§ 5, nos 4 et 5) une classe spéciale des fonctions, permutable avec une fonction du premier ordre ou, en général, d'ordre n qui se réduit respectivement sous la forme canonique à l'unité ou à i^n .

Dans le cas d'une fonction donnée $f(x, y)$ du premier ou du second ordre je résous (§ 6 et § 7) le problème fondamental en le réduisant, par l'introduction d'une inconnue auxiliaire

$$\psi(x, y) = \int_y^x \varphi(x, s) f(s, y) ds = \int_y^x f(x, s) \varphi(s, y) ds$$

et son expression

$$\psi(x, y) = \int_0^{x-y} \lambda(\xi) K(\xi; x, y) d\xi \quad [\lambda = \lambda(x - y)],$$

à la résolution de l'équation intégrale qui caractérise la fonction $K(\xi; x, y)$. Le cas d'une fonction donnée du premier ordre (§ 6) est complété par la précision des formules de la solution. En complétant les indications générales dues à M. *Volterra* dans sa Note [22], je donne (§ 7) la résolution complète du problème fondamental dans le cas d'une fonction du second ordre et je constate que dans ce cas toutes les fonctions permutable $\varphi(x, y)$ peuvent être exprimées par la formule de M. *Volterra*

$$\varphi(x, y) = \lambda(x - y) + \int_0^{x-y} \lambda(\xi) \Phi(\xi; x, y) d\xi.$$

Donc, toutes les propriétés des fonctions $\varphi(x, y)$ qui reposent sur cette formule sont les mêmes que celles des fonctions permutables avec une fonction du premier ordre. Dans les deux cas précédents sont aussi établies les équations fonctionnelles nouvelles qui caractérisent les fonctions $K(\xi; x, y)$ et $\Phi(\xi; x, y)$.

Dans le cas général d'une fonction $f(x, y)$ d'ordre entier positif $n > 2$ j'annonce (§ 8) la possibilité de réduire l'équation intégral-différentielle du problème à l'équation intégrale équivalente et j'étudie le cas particulier d'une fonction du groupe du cycle fermé.

Par application des transformations de *M. Pérés*

$$\Omega(\lambda) = (\dot{1}^0 + \ddot{\alpha}) \dot{\lambda} (\dot{1}^0 + \dot{\beta}) \quad [(\dot{1}^0 + \ddot{\alpha})(\dot{1}^0 + \dot{\beta}) = (\dot{1}^0 + \dot{\beta})(\dot{1}^0 + \ddot{\alpha}) = \dot{1}^0]$$

et de la condition

$$f(x, y) = \Omega(\dot{1}^n)$$

que doit vérifier la fonction $f(x, y)$ d'ordre n et du type spéciale

$$f(x, y) = \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} + (x-y)^{2n} \omega(x, y),$$

je forme (Chap. III, § 10, n° 1) les équations intégral-différentielles qui caractérisent les fonctions $\alpha(x, y)$ et $\beta(x, y)$. Les équations précédentes généralisent celles que *M. Pérés* a établies pour la fonction du premier ordre. Vient de suite (§ 10, n° 2) la généralisation de l'autre méthode, due à *M. Pérés*, par laquelle on emploie l'équation intégrale qui caractérise la fonction génératrice $\Phi(\xi; x, y)$ des transformations. À la fin du travail les transformations de *M. Pérés* sont appliquées à la résolution de l'équation intégrale binôme et sont aussi annoncées les propriétés caractéristiques du groupe des fonctions permutables.

Dans mon travail ultérieur [8] j'ai envisagé la théorie des fonctions permutables en vue des applications aux équations intégrales et j'ai pris, comme ici, le domaine d'existence tel que

$$(A) \quad a \leq y \leq x \leq b.$$

Puisque ce domaine diffère de celui-ci, pris dans mes publications [9] et [10] et dans les travaux fondamentaux de *M. M. Volterra* et *Pérés*, il faut modifier convenablement toutes les formules employées. C'est pourquoi une partie de ce travail (§§ 1—3, § 9) est consacrée à l'explication de ces formules ainsi que des notions et des propriétés de la composition et des fonctions permutables, nécessaires pour la suite.

CHAPITRE I.

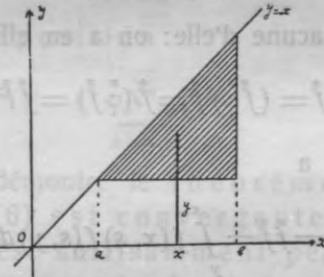
Quelques propriétés générales de la composition et de la permutabilité.

§ 1. Composition et permutabilité de première espèce. Symbole $\overset{*}{\int}$.

1. Dans la suite les fonctions envisagées de deux variables réelles x et y seront supposées continues dans un domaine tel que

$$(A) \quad a \leq y \leq x \leq b,$$

et ces fonctions admettent les dérivées partielles, continues dans le domaine (A) jusqu'à l'ordre déterminé. Ce domaine peut être représenté par le triangle marqué sur la figure.



2. M. Volterra a nommé l'opération

$$(1) \quad \overset{*}{\int} \overset{*}{\int} \varphi = \int_y^x f(x, s) \varphi(s, y) ds$$

composition de première espèce des deux fonctions $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$. Celles-ci seront dites composantes et le résultat de l'opération

$$F(x, y) = \overset{*}{\int} \overset{*}{\int} \varphi$$

sera leur résultante (produit de composition). Si les composantes sont les fonctions continues dans le domaine (A), leur résultante sera continue dans le même domaine. Comme il s'agit ici toujours de la composition de première espèce, cette notion est nommée plus brièvement: la composition.

La composition est distributive

$$\overset{*}{\int} (\overset{*}{\int} \varphi + \overset{*}{\int} \psi) = \overset{*}{\int} \overset{*}{\int} \varphi + \overset{*}{\int} \overset{*}{\int} \psi, \quad (\overset{*}{\int} \varphi + \overset{*}{\int} \psi) \overset{*}{\int} = \overset{*}{\int} \overset{*}{\int} \varphi + \overset{*}{\int} \overset{*}{\int} \psi$$

et associative

$$(f^* \varphi)^* \psi = f^* (\varphi^* \psi),$$

mais elle n'est pas en général commutative.

3. Si la composition de deux fonctions $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ est commutative, c.-à-d.

$$(2) \quad f^* \varphi = \varphi^* f \quad \text{ou} \quad \int_y^x f(x, s) \varphi(s, y) ds = \int_y^x \varphi(x, s) f(s, y) ds,$$

les fonctions $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ sont dites *permutables* (de première espèce); leur résultante

$$F = f^* \varphi = \varphi^* f$$

est permutable avec chacune d'elle: on a en effet, par exemple,

$$F^* f = (f^* \varphi)^* f = f^* (\varphi^* f) = f^* F.$$

Lorsque $\varphi = f$, on a

$$f^2 = f^* f = \int_y^x f(x, s) f(s, y) ds$$

et en général les puissances entières de composition

$$f^3 = f^2 f^* = f^* f^2, \dots, \quad f^n = f^{n-1} f^*.$$

Pour ces puissances il est facile à établir la règle de composition suivante

$$(3) \quad f^m f^* f^n = f^* f^m f^n = f^{m+n}$$

(m, n — entier positif).

Dans le cas particulier où $f = 1$ on obtient les puissances de composition de l'unité

$$(4) \quad i^2 = \frac{x-y}{1!}, \quad i^3 = \frac{(x-y)^2}{2!}, \dots, \quad i^n = \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(x-y)^{n-1}}{\Gamma(n)}$$

où $\Gamma(n)$ est la fonction eulérienne.

Si dans chaque membre d'un polynome algébrique à coefficients constants

$$(5) \quad P(z) = \sum_{k=1}^n a_k z^k$$

on remplace la puissance ordinaire z^k de la variable z par la puissance de composition $f^*{}^k$ d'une fonction $f(x, y)$, on obtient un polynôme de composition

$$(5') \quad P(f^*) = \sum_{k=1}^n a_k f^*{}^k$$

qui obéit aux mêmes règles de calcul formelles que le polynôme algébrique correspondant. Lorsque $n \rightarrow \infty$, on a la série infinie (ordinaire)

$$(6) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$$

et la série de composition

$$(6') \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k f^*{}^k.$$

M. *Volterra* a démontré le théorème fondamental³: Si la série ordinaire (6) est convergente lorsque le module de la variable z est suffisamment petit, la série de composition (6') converge absolument et uniformément dans le domaine (A) quelque soit le module de la fonction $f(x, y)$ (à condition qu'il soit fini).

Alors la série de composition (6') représente une fonction permutable avec la fonction $f(x, y)$.

4. Pour maintenir l'analogie formelle complète entre multiplication arithmétique et composition, il a besoin dans la théorie de composition d'un élément qui joue le rôle d'unité.

M. *Volterra*, dans son Mémoire [27], a introduit le symbole f^0 , la puissance nulle de composition, défini par la règle de calcul suivante

$$f^0 \varphi = \varphi f^0 = \varphi(x, y),$$

quelle que soit la fonction φ , permutable ou non avec f . Ce symbole

³ On trouvera, dans les monographies de *Volterra* [24, Chap. IX et X] et de *Volterra-Pérès* [28, Chap. II], la généralisation et les applications nombreuses de ce théorème.

est permutable avec toute fonction $\varphi(x, y)$ et son effet est indépendant de la base f . C'est pourquoi on note

$$(7) \quad \overset{*}{f}{}^0 = \overset{*}{1}{}^0,$$

en se servant de l'unité pour la base. Ce symbole est d'un caractère purement formel et il est très commode pour faciliter le calcul de composition.

On peut construire les fonctions symboliques de forme

$$(8) \quad F = a \overset{*}{1}{}^0 + f(x, y), \quad \Phi = b \overset{*}{1}{}^0 + \varphi(x, y)$$

où a et b sont des constantes et où $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ sont dites parties régulières de ces fonctions. L'opération

$$\overset{*}{F}\overset{*}{\Phi} = ab \overset{*}{1}{}^0 + a\varphi + bf + \overset{*}{f}\overset{*}{\varphi}$$

est dite composition de F à droite avec Φ , tandis que l'opération

$$\overset{*}{\Phi}\overset{*}{F} = ab \overset{*}{1}{}^0 + a\varphi + bf + \overset{*}{\varphi}\overset{*}{f}$$

s'appelle composition à gauche. Dans le cas où les parties régulières sont permutable

$$\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi} = \overset{*}{\varphi}\overset{*}{f},$$

les fonctions symboliques (8) sont aussi permutable

$$\overset{*}{F}\overset{*}{\Phi} = \overset{*}{\Phi}\overset{*}{F}.$$

§ 2. Ordre, caractéristique et diagonale d'une fonction.

1. *Définition.* Si une fonction $f(x, y)$ peut se mettre sous la forme $[\Gamma(\alpha) - \text{fonction eulérienne}]$

$$(1) \quad f(x, y) = \frac{(x-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} g(x, y),$$

où α est un nombre réel, différent de zéro ou d'un entier négatif et où $g(x, y)$ est dans le domaine (A) une fonction continue qui est constamment différente de zéro en les points de la droite $y=x$, c.-à-d.

$$g(x, x) \cong 0,$$

cette fonction $f(x, y)$ sera dite d'ordre régulier α ; la fonction $g(x, y)$ sera dite la caractéristique de $f(x, y)$ et l'expression $g(x, x)$ en sera la diagonale.

La caractéristique $g(x, y)$ est une fonction du premier ordre. Dans la formule (1) on peut représenter le facteur

$$(2) \quad \frac{(x-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} = \overset{*}{1}{}^\alpha$$

par la puissance généralisée de composition de l'unité $\mathbb{1}^\alpha$. Donc, on peut mettre (1) sous une forme équivalente

$$(1') \quad f(x, y) = \mathbb{1}^\alpha \cdot g(x, y),$$

valable, au sens de M. Pérés, dans le cas d'une fonction d'ordre régulier (α — différent de zéro ou d'un entier négatif).

Nous rappelons les deux théorèmes⁴ suivants sur l'ordre de la résultante et sur les diagonales.

Théorème I. Si deux fonctions $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ sont d'ordre régulier α et β respectivement et si $\alpha + \beta$ est aussi régulier, leur résultante $f^* \varphi^*$ est d'ordre $\alpha + \beta$; elle a pour diagonale le produit des diagonales des fonctions données.

En désignant la diagonale de la fonction (1) par

$$g(x, x) = D(f)$$

et la diagonale

$$\psi(x, x) = D(\varphi)$$

d'une autre fonction d'ordre β

$$(3) \quad \varphi(x, y) = \mathbb{1}^\beta \cdot \psi(x, y),$$

on exprime la relation entre les diagonales par la formule

$$(4) \quad D(f^* \varphi^*) = D(f) \cdot D(\varphi).$$

Théorème II. Si les fonctions précédentes $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ sont permutable

$$f^* \varphi^* = \varphi^* f^*$$

et telles que leurs caractéristiques $g(x, y)$ et $\psi(x, y)$ admettent les dérivées partielles continues de premier ordre, on a, entre les diagonales, la relation

$$(5) \quad \frac{[g(x, x)]^{\frac{1}{\alpha}}}{[\psi(x, x)]^{\frac{1}{\beta}}} = \text{const.} \quad \text{ou} \quad \frac{[D(f)]^{\frac{1}{\alpha}}}{[D(\varphi)]^{\frac{1}{\beta}}} = \text{const.}$$

Ces théorèmes subsistent aussi pour α et β négatif (non entier) comme l'a démontré M. Pérés dans sa Note [12], en utilisant la notion de la partie finie⁵ de l'intégrale définie.

⁴ Pour la démonstration dans le cas où $\alpha > 0$, $\beta > 0$, voir, p. ex., la monographie de Volterra-Pérés [28, page 11 et 12].

⁵ Cette notion est introduite dans l'analyse par M. M. J. Hadamard (1905) et R. d'Adhémar.

2. M. Pérés, dans la Note précédente, a introduit l'ordre singulier α d'une fonction, si α est zéro ou un entier négatif. La fonction symbolique (§ 1, n° 4)

$$F = a \mathbb{1}^0 + f(x, y), \quad (1)$$

où a est une constante, différente de zéro, et où $f(x, y)$ est une fonction d'ordre régulier, représente la forme générale d'une fonction d'ordre zéro.

Nous étudierons les fonctions d'ordre entier négatif au § 4, en introduisant le symbole $f^{\star-1}$ d'inversion de la composition.

§ 3. Transformations qui mettent une fonction sous forme canonique.

1. Pour faciliter la résolution du problème fondamental, M. M. Volterra et Pérés⁶ mettent la fonction donnée d'ordre entier positif sous forme canonique par les transformations spéciales qui conservent la composition.

Expliquons d'abord le cas où la fonction donnée $f(x, y)$ est du premier ordre, en supposant qu'elle admet des dérivées partielles premières continues.

Notons les fonctions

$$(1) \quad f(x, x) = a(x) \geq 0$$

et

$$(2) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y=x} = b(x).$$

Par le changement des variables

$$(3) \quad x = \omega(\xi), \quad y = \omega(\eta), \quad s = \omega(\sigma) \quad (\omega' \neq 0)$$

la résultante de deux fonctions $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ quelconques s'écrira

$$f^{\star} \varphi = \int_{\eta}^{\xi} f[\omega(\xi), \omega(\sigma)] \varphi[\omega(\sigma), \omega(\eta)] \omega'(\sigma) d\sigma.$$

Si nous introduisons deux fonctions auxiliaires $\alpha(\sigma)$ et $\beta(\sigma)$ telles que

$$(4) \quad \alpha(\sigma) \beta(\sigma) = \omega'(\sigma) \text{ ou } \omega(\sigma) = \int \alpha(\sigma) \beta(\sigma) d\sigma,$$

et si nous formons les fonctions

$$(5) \quad F(\xi, \eta) = \alpha(\xi) \beta(\eta) f[\omega(\xi), \omega(\eta)], \quad \Phi(\xi, \eta) = \alpha(\xi) \beta(\eta) \varphi[\omega(\xi), \omega(\eta)],$$

nous pouvons exprimer la résultante $F^{\star} \Phi$ par la transformée de la résultante $f^{\star} \varphi$, c.-à-d.

$$(6) \quad F^{\star} \Phi = \alpha(\xi) \beta(\eta) [f^{\star} \varphi]_{x=\omega(\xi), y=\omega(\eta)}.$$

⁶ Volterra-Pérés [28, pages 37 et 43].

Donc, la transformation définie par les formules (3), (4) et (5) conserve la composition.

Il est facile d'obtenir la transformation qui met la fonction $f(x, y)$ sous forme canonique, c.-à-d. telle que les conditions

$$(7) \quad F(\xi, \xi) = 1, \quad \left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)_{\eta=\xi} = 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)_{\eta=\xi} = 0 \end{aligned} \right\}$$

soient vérifiées. Il vient de la première condition (7) la relation

$$(8) \quad \xi = \int a(x) dx \quad [a(x) \neq 0]$$

qui définit bien la fonction inverse demandée

$$x = \omega(\xi).$$

On tire de (4) et (7) les autres fonctions

$$(9) \quad \alpha = e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx}$$

et

$$(10) \quad \beta = \frac{1}{a(x)} e^{+\int \frac{b(x)}{a(x)} dx}$$

2. Appliquons la transformation précédente à la fonction

$$(11) \quad f(x, y) = Ag(x) + Bg(y) \quad [g(x) \neq 0]$$

où $g(x)$ est une fonction donnée et où A et B sont des constantes telles que

$$A + B \neq 0.$$

En vertu des expressions

$$a(x) = (A + B)g(x), \quad b(x) = Ag'(x)$$

nous obtenons la forme canonique correspondante

$$(12) \quad F(\xi, \eta) = \frac{1}{A+B} \left[\frac{Ag(x) + Bg(y)}{[g(x)]^{A+B} [g(y)]^{A+B}} \right] \begin{cases} x = \omega(\xi), \\ y = \omega(\eta) \end{cases}$$

si nous substituerons la fonction $\omega(\xi)$ définie par la relation

$$(13) \quad \xi = (A+B) \int g(x) dx.$$

Dans le cas particulier où

$$g(x) = x,$$

la fonction donnée (11) est linéaire

$$(11') \quad f(x, y) = Ax + By \quad (A+B \neq 0)$$

et, d'après (13), on a

$$\xi = \frac{A+B}{2} x^2.$$

(6) Donc, par la substitution

$$x = \left(\frac{2}{A+B}\right)^{\frac{1}{2}} \xi^{\frac{1}{2}}, \quad y = \left(\frac{2}{A+B}\right)^{\frac{1}{2}} \eta^{\frac{1}{2}}$$

dans la formule (12) on établit la forme canonique⁷

$$(12') \quad F(\xi, \eta) = \frac{1}{A+B} \cdot \frac{A\xi^{\frac{1}{2}} + B\eta^{\frac{1}{2}}}{\xi^{\frac{1}{2}(A+B)} \cdot \eta^{\frac{1}{2}(A+B)}}$$

qui correspond à la fonction linéaire (11').

3. Pour traiter la transformation à la forme canonique dans le cas général d'une fonction d'ordre entier positif quelconque, nous emploierons le lemme suivant sur la dérivation d'une fonction composée. Soit $G(x)$ une fonction dérivable quelconque. Si l'on effectue le changement de variables

$$x = \omega(\xi),$$

on forme la fonction composée

$$\bar{G}(\xi) = G[\omega(\xi)],$$

dont la dérivée $n^{\text{ième}}$ par rapport à la nouvelle variable ξ est exprimée par la formule

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^n \bar{G}}{d\xi^n} &= \frac{d^n G}{dx^n} [\omega'(\xi)]^n + \frac{n(n-1)}{2} \frac{d^{n-1} G}{dx^{n-1}} [\omega'(\xi)]^{n-2} \omega''(\xi) + \dots + \\ &+ \frac{dG}{dx} \omega^{(n)}(\xi). \end{aligned} \right.$$

On établit facilement ce lemme par le raisonnement de récurrence.

4. Soit

$$(15) \quad f(x, y) = \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} g(x, y) \quad [g(x, x) \neq 0]$$

une fonction d'ordre entier positif n à caractéristique $g(x, y)$ dérivable. Alors en les points de la droite $y=x$ du domaine (A) la fonction $f(x, y)$ et ses dérivées partielles, jusqu'à l'ordre $n-2$ inclus, sont identiquement nulles⁸

$$(16) \quad \left[\frac{\partial^k f(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} \right]_{y=x} = 0 \quad \left[\begin{array}{l} i+j=k, \\ k=0, 1, 2, \dots, n-2 \end{array} \right],$$

tandis que la valeur des dérivées d'ordre $n-1$

⁷ Tel exemple particulier ($A+B=1$) est indiqué dans la monographie de *Volterra-Pérès* [28, page 51].

⁸ Ici la dérivée d'ordre $k=0$ désigne la fonction $f(x, y)$ elle-même.

$$(17) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}}\right)_{y=x} = -\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-2} \partial y}\right)_{y=x} = \dots = \\ = (-1)^{n-1} \left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial y^{n-1}}\right)_{y=x} = g(x, x) = a(x) \end{cases}$$

est différente de zéro [$a(x) \neq 0$]. Notons la valeur des dérivées d'ordre n

$$(18) \quad \left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right)_{y=x} = -\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y}\right)_{y=x} = \dots = (-1)^n \left(\frac{\partial^n f}{\partial y^n}\right)_{y=x} = b(x).$$

La fonction $f(x, y)$ serait de forme canonique si l'on avait

$$a(x) \equiv 1, \quad b(x) \equiv 0.$$

On peut mettre sous cette forme la fonction donnée en se servant de la transformation définie par les formules (3), (4) et (5).

La condition

$$\left(\frac{\partial^{n-1} F}{\partial \xi^{n-1}}\right)_{\eta=\xi} = 1 \quad (3)$$

que vérifie la fonction transformée

$$F(\xi, \eta) = \alpha(\xi) \beta(\eta) f[\omega(\xi), \omega(\eta)], \quad (4)$$

entraîne la relation

$$(19) \quad \xi = \int [a(x)]^{\frac{1}{n}} dx$$

pour déterminer la fonction inverse

$$x = \omega(\xi).$$

En employant la règle de *Leibniz* sur la dérivation d'un produit et la formule (14), on tire de la condition

$$\left(\frac{\partial^n F}{\partial \xi^n}\right)_{\eta=\xi} = 0,$$

par les calculs faciles, la fonction

$$(20) \quad \alpha = [a(x)]^{\frac{n-1}{2n}} \cdot e^{-\int \frac{b(x)}{na(x)} dx}$$

Par la substitution de l'expression précédente dans la relation

$$\alpha \beta = \omega' = [a(x)]^{-\frac{1}{n}}$$

on détermine la seconde fonction

$$(21) \quad \beta = [a(x)]^{-\frac{n+1}{2n}} \cdot e^{+\int \frac{b(x)}{na(x)} dx}$$

Donc, la transformation (3), (4) et (5) est bien définie dans le cas d'une fonction $f(x, y)$ d'ordre entier positif n quelconque.

§ 4. Symbole f^{-1} d'inversion de la composition.

1. Dans un problème d'inversion des intégrales définies (à limites variables) il faut résoudre les équations intégrales linéaires de *Volterra*

$$(1) \quad \int_y^x f(x, s) \varphi(s, y) ds = \psi(x, y) \quad \text{ou} \quad \overset{*}{f} \overset{*}{\varphi} = \psi(x, y)$$

et

$$(2) \quad \int_y^x \varphi(x, s) f(s, y) ds = \psi(x, y) \quad \text{ou} \quad \overset{*}{\varphi} \overset{*}{f} = \psi(x, y)$$

où les fonctions données sont $f(x, y)$ et $\psi(x, y)$ et où l'inconnue est $\varphi(x, y)$. Elles sont dites équations associées ou adjointes l'une de l'autre et peuvent être résolues respectivement par les formules

$$(3) \quad \varphi(x, y) = \overset{*}{f}^{-1} \overset{*}{\psi} \quad (\text{composition à gauche})$$

et

$$(4) \quad \varphi(x, y) = \overset{*}{\psi} \overset{*}{f}^{-1} \quad (\text{composition à droite})$$

avec le même symbole f^{-1} d'inversion de la composition, défini par les conditions

$$(5) \quad \overset{*}{f} \overset{*}{f}^{-1} = \overset{*}{f}^{-1} \overset{*}{f} = \overset{*}{f}^0 = \overset{*}{1}^0.$$

2. Envisageons d'abord un cas particulier où $f(x, y)$ est la puissance entière de composition de l'unité:

$$f = \overset{*}{1}^n = \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Dans ce cas les compositions $\overset{*}{1}^n \overset{*}{\varphi}$ et $\overset{*}{\varphi} \overset{*}{1}^n$ peuvent être représentées par les intégrations répétées puisque

$$\overset{*}{1}^n \overset{*}{\varphi} = \int_y^x \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi(s, y) ds = \int_y^x ds_1 \int_y^{s_1} ds_2 \dots \int_y^{s_{n-1}} \varphi(s_n, y) ds_n$$

et

$$\overset{*}{\varphi} \overset{*}{1}^n = \int_y^x \varphi(x, s) \frac{(s-y)^{n-1}}{(n-1)!} ds = \int_y^x ds_1 \int_{s_1}^x ds_2 \dots \int_{s_{n-1}}^x \varphi(x, s_n) ds_n.$$

Si la fonction $\psi(x, y)$ est d'ordre $m > n$, on a les solutions des équations associées

$$(6) \quad \dot{1}^n \dot{\varphi} = \psi(x, y)$$

et

$$(6') \quad \dot{\varphi} \dot{1}^n = \psi(x, y)$$

respectivement par les formules

$$(7) \quad \varphi = \frac{\partial^n \psi(x, y)}{\partial x^n}$$

et

$$(7') \quad \varphi = (-1)^n \frac{\partial^n \psi(x, y)}{\partial y^n}$$

En comparant celles-ci avec les solutions formelles des mêmes équations

$$\varphi = \dot{1}^{-n} \dot{\psi}, \quad \varphi = \dot{\psi} \dot{1}^{-n}$$

on est conduit à poser par définition

$$(8) \quad \dot{1}^n \dot{1}^{-n} = \dot{1}^{-n} \dot{1}^n = \dot{1}^0$$

et

$$(9) \quad \begin{cases} \dot{1}^{-n} \dot{\psi} = \frac{\partial^n \psi(x, y)}{\partial x^n} & \text{(composition à gauche)} \\ \dot{\psi} \dot{1}^{-n} = (-1)^n \frac{\partial^n \psi(x, y)}{\partial y^n} & \text{(composition à droite),} \end{cases}$$

si la fonction $\psi(x, y)$ est d'ordre $m > n$.

Lorsque $\psi(x, y)$ est une fonction d'ordre n et de forme canonique (§ 3) on peut la représenter sous l'une quelconque des deux formes

$$(10) \quad \begin{cases} \psi(x, y) = \dot{1}^n (\dot{1}^0 + \dot{\psi}_1) \\ \psi(x, y) = (\dot{1}^0 + \dot{\psi}_2) \dot{1}^n \end{cases}$$

avec les fonctions

$$(11) \quad \psi_1(x, y) = \frac{\partial^n \psi}{\partial x^n}$$

et

$$(12) \quad \psi_2(x, y) = (-1)^n \frac{\partial^n \psi}{\partial y^n}$$

Donc, on a sous les mêmes conditions, par définition, les formules fondamentales

$$(13) \quad \begin{cases} \dot{1}^{-n} \dot{\psi} = \dot{1}^0 + \frac{\partial^n \psi}{\partial x^n} \\ \dot{\psi} \dot{1}^{-n} = \dot{1}^0 + (-1)^n \frac{\partial^n \psi}{\partial y^n} \end{cases}$$

3. Dans le cas général d'une fonction $f(x, y)$ d'ordre entier positif n le symbole f^{-1} d'inversion de la composition peut être regardé comme une fonction d'ordre singulier $(-n)$ au sens de M. Pérés⁹.

L'expression générale de telles fonctions est

$$(14) \quad f^{-1} = a_0(x) \mathfrak{I}^{-n} + a_1(x) \mathfrak{I}^{-n+1} + \dots + a_n(x) \mathfrak{I}^0 + F_1(x, y)$$

ou

$$(14') \quad f^{-1} = b_0(y) \mathfrak{I}^{-n} + b_1(y) \mathfrak{I}^{-n+1} + \dots + b_n(y) \mathfrak{I}^0 + F_2(x, y)$$

avec les fonctions $F_1(x, y)$ et $F_2(x, y)$ d'ordre positif et avec les autres termes, représentant le produit et non la composition des fonctions

$$a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x); b_0(y), b_1(y), \dots, b_n(y)$$

par les symboles

$$\mathfrak{I}^{-n}, \mathfrak{I}^{-n+1}, \dots, \mathfrak{I}^0.$$

Il sera commode d'employer dans les calculs de composition l'expression (14) ou (14'), suivant le cas de la composition à gauche ou à droite avec le symbole f^{-1} .

Nous allons déterminer les fonctions

$$a_0(x), \dots, a_n(x); b_0(y), \dots, b_n(y); F_1(x, y), F_2(x, y),$$

en supposant la fonction donnée $f(x, y)$ dérivable jusqu'à l'ordre $2n$ (inclus) et de forme canonique.

Pour trouver, par exemple, les fonctions

$$a_0(x), \dots, a_n(x); F_1(x, y),$$

substituons l'expression symbolique (14) dans la relation

$$f^{-1} f = \mathfrak{I}^0$$

et effectuons ici les compositions par les règles (9) et (13).

Il vient la relation

$$a_0(x) \mathfrak{I}^0 + a_0(x) \frac{\partial^n f}{\partial x^n} + a_1(x) \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}} + \dots + a_n(x) f(x, y) + F_1 f = \mathfrak{I}^0,$$

d'où

$$a_0(x) \equiv 1$$

et la relation nouvelle

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{\partial^n f}{\partial x^n} + a_1(x) \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}} + a_2(x) \frac{\partial^{n-2} f}{\partial x^{n-2}} + \dots + \\ + a_n(x) f(x, y) + \int_y^x F_1(x, s) f(s, y) ds = 0 \end{cases}$$

⁹ J. Pérés [12, § 3] et Volterra-Pérés [28, chap. VII].

pour déterminer

$$a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x) \text{ et } F_1(x, y).$$

Posons ici $y = x$. En vertu des conditions

$$(16) \quad \begin{cases} \left[\frac{\partial^k f(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} \right]_{y=x} = 0 & \begin{cases} i+j=k, \\ k=0, 1, 2, \dots, n-2, n \end{cases} \\ \left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}} \right)_{y=x} = - \left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-2} \partial y} \right)_{y=x} = \dots = (-1)^{n-1} \left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial y^{n-1}} \right)_{y=x} = 1 \end{cases}$$

que vérifie la fonction $f(x, y)$ d'ordre n et de forme canonique, on tire

$$a_1(x) \equiv 0.$$

Pour déterminer $a_2(x)$, dérivons tous les membres de la relation (15) par rapport à y et posons $y = x$. Nous obtenons, en vertu des conditions (16), l'expression

$$a_2(x) = \left(\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^n \partial y} \right)_{y=x}.$$

En continuant de la même façon, on peut exprimer $a_3(x), \dots, a_n(x)$ par emploi des dérivées partielles de la fonction $f(x, y)$ jusqu'à l'ordre $2n-1$ où l'on a $y = x$.

L'équation (15) par rapport à l'inconnue $F_1(x, y)$ est une équation intégrale linéaire de *Volterra* de première espèce. En dérivant n fois tous les membres de cette équation par rapport à y on obtient l'équation de *Volterra* de deuxième espèce

$$(17) \quad F_1(x, y) + \overset{*}{F}_1 \overset{*}{f}_2 = H_1(x, y)$$

avec la fonction

$$f_2(x, y) = (-1)^n \frac{\partial^n f}{\partial y^n}$$

et

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} H_1(x, y) = & (-1)^{n-1} \left[\frac{\partial^{2n} f}{\partial x^n \partial y^n} + a_2(x) \frac{\partial^{2n-2} f}{\partial x^{n-2} \partial y^n} + \dots + \right. \\ & \left. + a_n(x) \frac{\partial^n f}{\partial y^n} \right]. \end{aligned} \right.$$

La solution de l'équation (17) est

$$(19) \quad F_1(x, y) = \overset{*}{H}_1 (\overset{*}{I}^0 + \overset{*}{f}_2)^{-1} = \overset{*}{H}_1 - \overset{*}{H}_1 \overset{*}{f}_2 + \overset{*}{H}_1 \overset{*}{f}_2 \overset{*}{f}_2 - \dots,$$

la série obtenue (§ 1) étant absolument et uniformément convergente dans le domaine (A).

De la même façon, par la substitution de l'expression (14') dans la relation

$$\dot{f} \dot{f}^{-1} = \dot{1}^0$$

on obtient $b_0(y) \equiv 1$ et l'équation

$$(15') \left\{ \begin{aligned} & (-1)^n \frac{\partial^n f}{\partial y^n} + (-1)^{n-1} b_1(y) \frac{\partial^{n-1} f}{\partial y^{n-1}} + \dots + b_n(y) f(x, y) + \\ & + \int_y^x f(x, s) F_2(s, y) ds = 0, \end{aligned} \right. \quad (15')$$

pour déterminer les fonctions $b_1(y), \dots, b_n(y)$ et $F_2(x, y)$.

En posant ici $y = x$ on a $b_1(y) \equiv 0$. Par la dérivation par rapport à x on exprime

$$b_2(y) = (-1)^{n+1} \left(\frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^n \partial x} \right)_{y=x}$$

et analogiquement les fonctions $b_3(y), \dots, b_n(y)$ à l'aide des dérivées partielles suivantes

$$\left(\frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^n \partial x} \right)_{y=x}, \quad \left(\frac{\partial^{n+2} f}{\partial y^n \partial x^2} \right)_{y=x}, \quad \dots, \quad \left(\frac{\partial^{2n-1} f}{\partial y^n \partial x^{n-1}} \right)_{y=x}$$

Après avoir dérivé n fois tous les membres de (15') par rapport à x on forme l'équation de Volterra

$$(17') \quad F_2(x, y) + \dot{f}_1 \dot{F}_2 = H_2(x, y)$$

avec la fonction

$$f_1(x, y) = \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \quad (17)$$

et

$$(18') \left\{ \begin{aligned} H_2(x, y) = & (-1)^{n-1} \frac{\partial^{2n} f}{\partial y^n \partial x^n} + (-1)^{n-3} b_2(y) \frac{\partial^{2n-2} f}{\partial y^{n-2} \partial x^n} + \dots - \\ & - b_n(y) \frac{\partial^n f}{\partial x^n}. \end{aligned} \right. \quad (18)$$

La solution de (17') s'exprime par la série

$$(19') \quad F_2(x, y) = (\dot{1}^0 + \dot{f}_1)^{-1} \dot{H}_2 = H_2(x, y) - \dot{f}_1 \dot{H}_2 + \dot{f}_1 \dot{f}_1 \dot{H}_2 - \dots$$

qui converge absolument et uniformément dans le domaine (A).

Donc, l'expression générale du symbole

$$(20) \quad \dot{f}^{-1} = \dot{1}^{-n} + a_2(x) \dot{1}^{-n+2} + \dots + a_n(x) \dot{1}^0 + F_1(x, y) \quad (19)$$

ou

$$(20') \quad \dot{f}^{-1} = \dot{1}^{-n} + b_2(y) \dot{1}^{-n+2} + \dots + b_n(y) \dot{1}^0 + F_2(x, y)$$

est bien déterminée lorsque $f(x, y)$ est une fonction d'ordre n et de forme canonique, dérivable jusqu'à l'ordre $2n$.

*Remarque*¹⁰. Les fonctions $F_1(x, y)$ et $F_2(x, y)$, dites les parties régulières du symbole \hat{f}^{-1} , sont en réalité égales entre elles quoiqu'elles ont les expressions analytiques (19) et (19') de forme tout à fait différente.

Nous allons vérifier cette égalité dans le cas particulier où $n=2$ (le cas général peut être traité de la même façon). Dans ce cas, sous les conditions (16) où $n=2$, la fonction $f(x, y)$ du second ordre admet la représentation

$$f(x, y) = (x - y) + \frac{(x - y)^3}{3!} \Omega(x, y)$$

avec une fonction $\Omega(x, y)$ dérivable jusqu'à l'ordre 3.

Donc, les fonctions introduites

$$a_2(x) = \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \right)_{y=x}, \quad b_2(y) = - \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} \right)_{x=y}$$

sont égales à

$$a_2(x) = b_2(x) = \Omega(x, x).$$

Ceci résulte aussi des relations

$$H(x, y) = - \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = - \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} \quad \left(f_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, f_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)$$

et [formules (10) avec $n=2$]

$$f(x, y) = \hat{1}^2 + \hat{1}^2 f_1 = \hat{1}^2 + f_2 \hat{1}^2.$$

En effet, on tire

$$f_1(x, y) = - \hat{H} \hat{1}^2 - a_2(x) \hat{1}^2, \quad f_2(x, y) = - \hat{1}^2 \hat{H} - b_2(y) \hat{1}^2$$

et

$$\hat{1}^2 f_1 = f_2 \hat{1}^2$$

d'où

$$\hat{1}^2 a_2(x) \cdot \hat{1}^2 = \hat{1}^2 \cdot b_2(y) \hat{1}^2,$$

c'est-à-dire

$$\int_y^x (x-s) a_2(s) (s-y) ds = \int_y^x (x-s) b_2(s) (s-y) ds.$$

On a bien égalité des fonctions $a_2(x)$ et $b_2(x)$.

¹⁰ Cette remarque ne figurait pas dans le texte en langue lettone, mais je l'ai annoncé au moment de la soutenance de ma Thèse. Je dois remercier M. le prof. J. Pères qui a bien voulu m'indiquer son résultat général sur l'égalité des parties régulières.

Pour établir l'identité des parties régulières (19) et (19') il suffit de montrer que

$$(\dot{1}^0 + \dot{f}_1) \dot{H}_1 = \dot{H}_2 (\dot{1}^0 + \dot{f}_2).$$

Mais ceci a bien lieu, car par emploi des expressions de $f_1(x, y)$ et $f_2(x, y)$, indiquées plus haut, et des formules

$H_1(x, y) = H(x, y) - a_2(x) f_2(x, y)$, $H_2(x, y) = H(x, y) - b_2(y) f_1(x, y)$, tirées de (18) et (18'), on est conduit à vérifier l'égalité

$$\dot{f}_1 \overline{a_2(x)} \cdot \dot{f}_2 = \overline{f_1} \cdot \overline{b_2(y)} \dot{f}_2$$

qui est évidente si $a_2(x) = b_2(x)$.

Donc, on peut remplacer dans les formules (20) et (20') les fonctions $F_1(x, y)$ et $F_2(x, y)$ par une seule

$$F(x, y) = F_1(x, y) = F_2(x, y).$$

4. Un cas particulier intéressant est celui où

$$a_i(x) = b_i(x) \equiv 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Il est facile de démontrer que les conditions nécessaires et suffisantes, dans ce cas, sont les suivantes

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\partial^k f(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} \right]_{y=x} = 0 \quad \left[\begin{array}{l} i + j = k, \\ k = 0, 1, 2, \dots, (n-2), n, (n+1), \dots, (2n-1) \end{array} \right], \\ \left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}} \right)_{y=x} = - \left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-2} \partial y} \right)_{y=x} = \dots = (-1)^{n-1} \left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial y^{n-1}} \right) = 1. \end{array} \right.$$

Donc on peut mettre la fonction donnée sous la forme

$$(22) \quad f(x, y) = \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} + (x-y)^{2n} \omega(x, y)$$

où $\omega(x, y)$ est une fonction continue dérivable jusqu'à l'ordre $2n$.

Dans ce cas l'égalité des parties régulières $F_1(x, y)$ et $F_2(x, y)$ s'établit immédiatement. En effet, d'après les expressions (18) et (18') les fonctions $H_1(x, y)$ et $H_2(x, y)$ sont identiques à la fonction

$$(23) \quad H(x, y) = (-1)^{n-1} \frac{\partial^{2n} f}{\partial x^n \partial y^n}.$$

Sous les conditions (21) on peut exprimer les fonctions

$$\text{par } \begin{array}{l} f_1(x, y) = \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \text{ et } f_2(x, y) = (-1)^n \frac{\partial^n f}{\partial y^n} \\ f_1(x, y) = -\dot{H} \dot{1}^n \text{ et } f_2(x, y) = -\dot{1}^n \dot{H}. \end{array}$$

Donc, à cause des formules (19) et (19'), les fonctions $F_1(x, y)$ et $F_2(x, y)$ sont identiques à la fonction

$$(24) \quad F(x, y) = H(x, y) + \overset{*}{H} \overset{*}{I}^n \overset{*}{H} + \overset{*}{H} \overset{*}{I}^n \overset{*}{H} \overset{*}{I}^n \overset{*}{H} + \dots,$$

la série obtenue étant absolument et uniformément convergente dans le domaine (A) . Lorsque $f(x, y)$ satisfait aux conditions (21) ou lorsqu'elle peut être mise sous la forme (22), on a l'expression unique

$$(25) \quad \overset{*}{f}^{-1} = \overset{*}{I}^{-n} + F(x, y)$$

où $F(x, y)$ est définie par (24).

Les conditions (21) sont réalisées pour toute fonction $f(x, y)$ du premier ordre ($n = 1$) et de forme canonique. L'expression (25) du symbole $\overset{*}{f}^{-1}$ généralise celle que M. Pérés¹¹ a établie pour la fonction du premier ordre.

Remarque. Sous les conditions

$$a_i(x) \equiv 0, \quad b_i(y) \equiv 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

les équations intégrales de Volterra (15) et (15') se réduisent à

$$\overset{*}{F}_1 \overset{*}{f} + \frac{\partial^n f}{\partial x^n} = 0 \quad \text{et} \quad \overset{*}{f} \overset{*}{F}_2 + (-1)^n \frac{\partial^n f}{\partial y^n} = 0.$$

Celles-ci ont la même solution

$$F(x, y) = F_1(x, y) = F_2(x, y)$$

donnée par la série (24). Donc on a

$$f_1(x, y) = \frac{\partial^n f}{\partial x^n} = -\overset{*}{F} \overset{*}{f}$$

et

$$f_2(x, y) = (-1)^n \frac{\partial^n f}{\partial y^n} = -\overset{*}{f} \overset{*}{F}.$$

La fonction $f(x, y)$ d'ordre n et de forme canonique admet, d'après les formules (10), la représentation

$$f(x, y) = \overset{*}{I}^n + \overset{*}{I}^n \overset{*}{f}_1 \quad \text{ou} \quad f(x, y) = \overset{*}{I}^n + \overset{*}{f}_2 \overset{*}{I}^n.$$

En introduisant ici les expressions trouvées des fonctions $f_1(x, y)$ et $f_2(x, y)$, il vient

$$f(x, y) = \overset{*}{I}^n - \overset{*}{I}^n \overset{*}{F} \overset{*}{f} \quad \text{et} \quad f(x, y) = \overset{*}{I}^n - \overset{*}{f} \overset{*}{F} \overset{*}{I}^n$$

d'où

$$(26) \quad f(x, y) = (\overset{*}{I}^0 + \overset{*}{I}^n \overset{*}{F})^{-1} \overset{*}{I}^n \quad \text{et} \quad f(x, y) = \overset{*}{I}^n (\overset{*}{I}^0 + \overset{*}{F} \overset{*}{I}^n)^{-1},$$

avec l'expression commune

¹¹ La formule correspondante, indiquée dans la monographie de Volterra — Pérés [28, page 40 et 106], diffère de celle-ci seulement par la notation.

(27) $f(x, y) = \overset{*}{1}^n - \overset{*}{1}^n \overset{*}{F} \overset{*}{1}^n + \overset{*}{1}^n \overset{*}{F} \overset{*}{1}^n \overset{*}{F} \overset{*}{1}^n - \dots$,
la série étant absolument et uniformément convergente dans le domaine (A).

Nous utiliserons les dernières relations dans l'étude du problème fondamental en appliquant les transformations de M. *Péres* (§ 10).

CHAPITRE II.

Problème de la détermination des fonctions permutable.

§ 5. Équations fondamentales et symboliques du problème. Fonctions du groupe du cycle fermé.

1. Le problème fondamental consiste à déterminer toutes les fonctions continues $\varphi(x, y)$ permutable avec une fonction donnée $f(x, y)$, c.-à-d. qui satisfont à la condition de permutabilité

$$(1) \quad \int_y^x f(x, s) \varphi(s, y) ds = \int_y^x \varphi(x, s) f(s, y) ds \quad \text{ou} \quad \overset{*}{f} \overset{*}{\varphi} = \overset{*}{\varphi} \overset{*}{f}.$$

D'après une méthode, due à M. *Volterra*, on introduit la fonction inconnue auxiliaire $\psi(x, y)$ telle que

$$(2) \quad \psi(x, y) = \overset{*}{f} \overset{*}{\varphi} = \overset{*}{\varphi} \overset{*}{f},$$

et on formera l'équation fonctionnelle, en éliminant la fonction $\varphi(x, y)$.

Si l'on connaît le symbole $\overset{*}{f}^{-1}$ d'inversion de la composition, on aura les solutions

$$(3) \quad \varphi(x, y) = \overset{*}{f}^{-1} \overset{*}{\psi} \quad \text{et} \quad \varphi(x, y) = \overset{*}{\psi} \overset{*}{f}^{-1}$$

des équations intégrales associées

$$\overset{*}{f} \overset{*}{\varphi} = \psi(x, y) \quad \text{et} \quad \overset{*}{\varphi} \overset{*}{f} = \psi(x, y)$$

d'où l'équation fondamentale et symbolique du problème

$$(4) \quad \overset{*}{f}^{-1} \overset{*}{\psi} - \overset{*}{\psi} \overset{*}{f}^{-1} = 0.$$

Par emploi de la propriété du symbole $\overset{*}{f}^{-1}$

$$\overset{*}{f} \overset{*}{f}^{-1} = \overset{*}{f}^{-1} \overset{*}{f} = \overset{*}{1}^0$$

on tire immédiatement (si la composition avec $\overset{*}{f}^{-1}$ est permise), de la condition de permutabilité (1), l'équation du même type symbolique

$$(5) \quad \overset{*}{f}^{-1} \overset{*}{\varphi} - \overset{*}{\varphi} \overset{*}{f}^{-1} = 0$$

que vérifie la fonction inconnue $\varphi(x, y)$.

Puisque nous cherchons les fonctions $\varphi(x, y)$ continues dans le domaine

$$(A) \quad a \leq y \leq x \leq b,$$

nous devons imposer, en vertu du théorème sur l'ordre de la résultante de composition (§ 2), les conditions supplémentaires que doit vérifier la fonction inconnue auxiliaire $\psi(x, y)$.

2. Étudions le problème fondamental dans le cas où

$$f(x, y) = \text{const.},$$

c.-à-d. cherchons toutes les fonctions continues $\varphi(x, y)$ qui sont permutable avec la constante.

Sans restreindre le problème, on peut supposer cette constante égale à l'unité. Alors on a

$$f^{-1} = \mathbb{1}^{-1},$$

et l'équation symbolique

$$(6) \quad \mathbb{1}^{-1} \psi - \psi \mathbb{1}^{-1} = 0$$

de la résultante

$$\psi(x, y) = \int_y^x \varphi(s, y) ds = \int_y^x \varphi(x, s) ds$$

s'écrit, d'après les formules (9) du § 4, sous forme d'une équation linéaire aux dérivées partielles

$$(7) \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

d'où immédiatement

$$\psi(x, y) = \psi(x - y).$$

De la relation

$$\varphi(x, y) = \mathbb{1}^{-1} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{ou} \quad \varphi(x, y) = \psi \mathbb{1}^{-1} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

on tire la même forme des fonctions

$$\varphi(x, y) = \varphi(x - y).$$

M. *Volterra* a nommé¹² telles fonctions, dépendantes de la seule différence $x - y$, par les fonctions du cycle fermé. Elles forment, par rapport à la composition, un groupe des fonctions car la résultante $\varphi_1 \varphi_2$ des deux fonctions quelconques de forme

$$\varphi_1(x, y) = \varphi_1(x - y) \quad \text{et} \quad \varphi_2(x, y) = \varphi_2(x - y)$$

est aussi de même forme et on a la permutable mutuelle

$$\varphi_1 \varphi_2 = \varphi_2 \varphi_1.$$

¹² À cause des applications de telles fonctions aux questions de la physique mathématique, c. f. *Volterra* [23] et [24].

Rappelons donc le théorème suivant: Toutes les fonctions permutable avec la constante (ou l'unité) sont permutable entre elles et forment, par rapport à composition, un groupe des fonctions qu'on appelle le groupe du cycle fermé.

3. Au même groupe du cycle fermé appartiennent aussi toutes les fonctions permutable avec une fonction spéciale d'ordre entier positif n

$$f(x, y) = \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} = \mathfrak{I}^n.$$

En effet, la résultante

$$\psi(x, y) = \mathfrak{I}^n \mathfrak{F} = \mathfrak{F} \mathfrak{I}^n$$

satisfait, d'après (4), l'équation aux dérivées partielles

$$(8) \quad \frac{\partial^n \psi}{\partial x^n} - (-1)^n \frac{\partial^n \psi}{\partial y^n} = 0,$$

jointe aux conditions supplémentaires

$$(9) \quad \left[\frac{\partial^k \psi(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} \right]_{y=x} = 0 \quad \begin{cases} (i+j=k, \\ (k=0, 1, 2, \dots, n-1). \end{cases}$$

Ce problème de Cauchy admet¹³ la solution unique de forme

$$\psi(x, y) = \psi(x-y);$$

on déduit de la relation

$$\varphi(x, y) = \mathfrak{I}^{-n} \mathfrak{F} = \frac{\partial^n \psi}{\partial x^n} \text{ ou } \varphi(x, y) = \mathfrak{F} \mathfrak{I}^{-n} = (-1)^n \frac{\partial^n \psi}{\partial y^n}$$

que les fonctions cherchées $\varphi(x, y)$ appartiennent aussi au groupe de cycle fermé:

$$\varphi(x, y) = \varphi(x-y).$$

4. Posons le problème nouveau suivant: à déterminer toutes les fonctions $f(x, y)$ du premier ordre qui se réduisent sous la forme canonique à la constante, notamment à l'unité.

Il est connu (§ 3) que par l'application de la transformation

$$(10) \quad x = \omega(\xi), \quad y = \omega(\eta)$$

et par le choix de deux fonctions $\alpha(\xi)$ et $\beta(\eta)$, vérifiant la condition

$$(11) \quad \alpha(\xi) \beta(\xi) = \omega'(\xi) = \frac{dx}{d\xi},$$

on construit la fonction transformée

$$(12) \quad F(\xi, \eta) = [\alpha(x) \beta(x) f(x, y)]_{x=\omega(\xi), y=\omega(\eta)}$$

¹³ C. f. mon travail [8, page 634].

Si la forme canonique de la fonction $f(x, y)$ doit être $F = 1$, il est nécessaire que la fonction $f(x, y)$ ait la représentation suivante

$$(13) \quad f(x, y) = \frac{1}{\alpha\beta} = g(x)h(y)$$

où

$$g(x) = \frac{1}{\alpha} \quad \text{et} \quad h(y) = \frac{1}{\beta}$$

sont respectivement les fonctions d'une seule variable x ou y .

La condition obtenue (13) est aussi suffisante. En effet, par emploi des valeurs

$$a(x) = f(x, x) = g(x)h(x)$$

et

$$b(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y=x} = g'(x)h(x)$$

dans les formules (9) et (10) du § 3 on tire, après les calculs faciles, les expressions

$$\alpha(x) = \frac{1}{g(x)} \quad \text{et} \quad \beta(x) = \frac{1}{h'(x)},$$

et par la substitution des expressions précédentes dans (12) on obtient bien la forme canonique

$$F = 1.$$

La relation entre les variables [§ 3, formule (8)] s'exprime ici de la façon suivante

$$(14) \quad \xi = \int g(x)h(x)dx = l(x).$$

Puisque les fonctions permutable avec l'unité appartiennent au groupe du cycle fermé

$$\Theta(\xi - \eta) \quad [\Theta - \text{une fonction arbitraire}]$$

et puisque les transformations précédentes conservent la composition, on obtient par la formule

$$(15) \quad \varphi(x, y) = g(x)h(y)\Theta[l(x) - l(y)]$$

toutes les fonctions permutable avec la fonction du premier ordre

$$(13) \quad f(x, y) = g(x)h(y) \quad [g(x) \neq 0, \quad h(y) \neq 0],$$

la fonction Θ étant arbitraire et la fonction $l(x)$ étant déterminée par (14).

La permutabilité

$$f^* \varphi = \varphi^* f$$

se vérifie aisément, en mettant par la substitution

$l(s) - l(y) = \sigma$ ou $l(x) - l(s) = \sigma$
 les résultantes $f^* \varphi^*$ et $\varphi^* f^*$ sous la forme d'une fonction unique

$$g(x) h(y) \int_0^L \Theta(\sigma) d\sigma$$

où

$$L(x, y) = l(x) - l(y).$$

De même on constate que les fonctions (15) sont permutables entre elles. Soient

$$\varphi_1(x, y) = g(x) h(y) \Theta_1 [l(x) - l(y)]$$

et

$$\varphi_2(x, y) = g(x) h(y) \Theta_2 [l(x) - l(y)]$$

les deux fonctions quelconques de (15). Leur résultantes

$$\varphi_1^* \varphi_2^* \text{ et } \varphi_2^* \varphi_1^*$$

peuvent être exprimées par une seule fonction

$$g(x) h(y) \int_0^L \Theta_1(L - \sigma) \Theta_2(\sigma) d\sigma,$$

en utilisant la même substitution et la même fonction $L(x, y)$ qu'au-paravant. Donc on a bien la permutabilité demandée

$$\varphi_1^* \varphi_2^* = \varphi_2^* \varphi_1^*.$$

*Exemple*¹⁴. Trouver toutes les fonctions $\varphi(x, y)$ permutables avec la fonction donnée de forme

$$(16) \quad f(x, y) = x^m y^k \quad (m, k - \text{constantes}).$$

Ici on a $g(x) = x^m, h(y) = y^k$

et

$$l(x) = \int x^{m+k} dx = \begin{cases} \frac{x^{m+k+1}}{m+k+1}, & \text{si } m+k \neq -1, \\ \ln|x|, & \text{si } m+k = -1. \end{cases}$$

Donc les fonctions permutables avec (16) sont déterminées par

$$(17) \quad \varphi(x, y) = \begin{cases} x^m y^k \Theta [x^{m+k+1} - y^{m+k+1}], & \text{si } m+k \neq -1 \\ x^m y^k \Theta [\ln|x| - \ln|y|], & \text{si } m+k = -1, \end{cases}$$

où Θ est une fonction arbitraire.

5. En généralisant les résultats du n^0 précédent, posons à déterminer toutes les fonctions d'ordre entier positif n

¹⁴ Tel exemple est cité au Mémoire de M. Pérés [11, page 60].

qui se réduisent sous leur forme canonique à la fonction

$$(18) \quad F(\xi, \eta) = \frac{(\xi - \eta)^{n-1}}{(n-1)!} = i^n.$$

La relation (12) entraîne ici

$$[f(x, y)]_{x=\omega(\xi)}^{y=\omega(\eta)} = \frac{(\xi - \eta)^{n-1}}{(n-1)! \alpha(\xi) \beta(\eta)},$$

et par emploi des fonctions inverses

$$\xi = \lambda(x), \quad \eta = \lambda(y)$$

on obtient de la relation précédente la condition nécessaire

$$(19) \quad f(x, y) = g(x) h(y) \frac{[\lambda(x) - \lambda(y)]^{n-1}}{(n-1)!}$$

où

$$g(x) = \frac{1}{\alpha[\lambda(x)]}, \quad h(y) = \frac{1}{\beta[\lambda(y)]}.$$

Nous allons voir que la condition (19) est aussi suffisante, si l'on choisit la fonction

$$(20) \quad \lambda(x) = l(x) = \int g(x) h(x) dx,$$

c'est-à-dire que sous les hypothèses précédentes la forme canonique de (19) est certainement (18).

Pour que la relation générale [§ 3, formule (19)] entre des variables

$$\xi = \int [a(x)]^{\frac{1}{n}} dx \quad \text{ou} \quad \frac{d\xi}{dx} = [a(x)]^{\frac{1}{n}}$$

avec la fonction

$$a(x) = \left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}} \right)_{y=x}$$

soit vérifiée dans ce cas, on doit prendre

$$a(x) = g(x) h(x) [\lambda'(x)]^{n-1} \quad \left(\lambda' = \frac{d\lambda}{dx} \right)$$

et

$$\lambda'(x) = \frac{d\xi}{dx} = g(x) h(x).$$

Donc, l'égalité (20) est bien satisfaite.

La fonction

$$b(x) = \left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n} \right)_{y=x}$$

peut être calculée de l'expression (19) [où $\lambda(x)$ est remplacée par $l(x)$] par emploi du règle de *Leibniz* sur la dérivation du produit et du

lemme sur la dérivation de la fonction composée (§ 3, n° 3). Il vient l'expression

$$b(x) = n g(x) h(x) [l'(x)]^{n-1} \left\{ \frac{n-1}{2} \cdot \frac{l''(x)}{l'(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)} \right\}. \quad (18)$$

Donc, en éliminant la fonction (20) on obtient la valeur de la fraction

$$\frac{b(x)}{n a(x)} = \frac{n+1}{2} \cdot \frac{g'(x)}{g(x)} + \frac{n-1}{2} \cdot \frac{h'(x)}{h(x)}.$$

En vertu de cela, on tire, des formules générales de transformation (20) et (21) du paragraphe 3 (n° 4), la forme des fonctions

$$\alpha = \frac{1}{g(x)} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{h(x)}.$$

Avec de telles expressions on déduit immédiatement que la fonction transformée (12) est bien de forme demandée (18).

Puisque les fonctions permutables avec i^n forment le groupe du cycle fermé

$$\Theta(\xi - \eta) \quad [\Theta - \text{fonction arbitraire}]$$

et puisque la transformation précédente conserve la composition, on a la forme générale

$$(21) \quad \varphi(x, y) = g(x) h(y) \Theta[\lambda(x) - \lambda(y)]$$

des fonctions $\varphi(x, y)$ permutables avec (19). L'expression (21) coïncide avec (15), car on a l'égalité des fonctions $\lambda(x)$ et $l(x)$.

On vérifie aisément la permutabilité

$$f^* \varphi^* = \varphi^* f^*$$

en remarquant que les résultantes de composition $f^* \varphi^*$ et $\varphi^* f^*$ peuvent être mises par la substitution, indiquée au n° 4 et par l'emploi de même fonction

$$L(x, y) = l(x) - l(y),$$

sous forme d'une seule fonction

$$g(x) h(y) \int_0^L \frac{(L-\sigma)^{n-1}}{(n-1)!} \Theta(\sigma) d\sigma.$$

La permutabilité mutuelle des fonctions (21) est déjà établie au n° 4.

§ 6. Problème dans le cas d'une fonction donnée du premier ordre.

1. En vertu des propriétés de la transformation canonique (§ 3) on peut réduire le problème de détermination des fonctions $\varphi(x, y)$, permutables avec une fonction donnée du premier ordre $f(x, y)$, à tel où $f(x, y)$ est de forme canonique, c.-à-d. où

$$(1) \quad f(x, x) = 1, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y=x} = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y=x} = 0.$$

S'il existe dans le domaine (A) la dérivée partielle continue du second ordre

$$(2) \quad H(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},$$

il est possible de construire (§ 4, n° 4) le symbole d'inversion de la composition

$$(3) \quad \overset{*}{f}{}^{-1} = \overset{*}{I}{}^{-1} + F(x, y)$$

où

$$(4) \quad F(x, y) = H(x, y) + \overset{*}{H} \overset{*}{I} \overset{*}{H} + \overset{*}{H} \overset{*}{I} \overset{*}{H} \overset{*}{I} \overset{*}{H} + \dots,$$

la série étant absolument et uniformément convergente dans le domaine (A).

Les équations associées du problème

$$(5) \quad \overset{*}{f} \overset{*}{\varphi} = \psi(x, y) \quad \text{et} \quad \overset{*}{\varphi} \overset{*}{f} = \psi(x, y)$$

ont leur solutions respectivement

$$(6) \quad \varphi(x, y) = \overset{*}{I}{}^{-1} \overset{*}{\psi} + \overset{*}{F} \overset{*}{\psi} \quad \text{et} \quad \varphi(x, y) = \overset{*}{\psi} \overset{*}{I}{}^{-1} + \overset{*}{\psi} \overset{*}{F}$$

ou sous forme explicite:

$$(7) \quad \begin{cases} \varphi(x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \int_y^x F(x, s) \psi(s, y) ds, \\ \varphi(x, y) = -\frac{\partial \psi}{\partial y} + \int_y^x \psi(x, s) F(s, y) ds. \end{cases}$$

En comparant entre elles les expressions (6) ou (7), il vient, pour déterminer la fonction

$$(8) \quad \psi(x, y) = \int_y^x f(x, s) \varphi(s, y) ds = \int_y^x \varphi(x, s) f(s, y) ds,$$

l'équation symbolique

$$(9) \quad \overset{*}{I}{}^{-1} \overset{*}{\psi} - \overset{*}{\psi} \overset{*}{I}{}^{-1} = \overset{*}{\psi} \overset{*}{F} - \overset{*}{F} \overset{*}{\psi}$$

ou explicitement

$$(9') \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = \int_y^x [\psi(x, s) F(s, y) - F(x, s) \psi(s, y)] ds.$$

De la formule (8) on tire la condition supplémentaire

$$(10) \quad \psi(x, x) = 0.$$

Donc, le problème proposé se réduit à la résolution de l'équation intégral-différentielle, jointe à la condition (10).

2. Résolvons l'équation (9'), en suivant la méthode due à M. *Volterra*¹⁵, mais en précisant la formule de solution. (1)

Avec la notation

$$g(x, y) = \psi^* F^* - F^* \psi^*$$

l'équation (9') s'écrit

$$(11) \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = g(x, y).$$

Par le changement des variables

$$(12) \quad u = \frac{x-y}{2}, \quad v = \frac{x+y}{2}$$

l'équation précédente se transforme en

$$(11') \quad \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial v} = \bar{g}(u, v)$$

où

$$\bar{\psi}(u, v) = \psi(v+u, v-u) \text{ et } \bar{g}(u, v) = g(v+u, v-u),$$

la condition (10) entraînant

$$(10') \quad \bar{\psi}(0, v) = 0.$$

La solution générale de l'équation différentielle (11')

$$\bar{\psi}(u, v) = \Theta(u) + \int_{v_0}^v \bar{g}(u, t) dt$$

contient une fonction arbitraire $\Theta(u)$. Pour que la condition (10') soit vérifiée, il faut admettre

$$\Theta(0) = 0.$$

L'intégrale définie a pour la limite inférieure une valeur v_0 fixée de la variable nouvelle v ¹⁶.

Avec les anciennes variables

$$x = v + u, \quad y = v - u$$

on trouve la solution

$$(13) \quad \psi(x, y) = \Theta(u) + \int_{v_0}^v g(t+u, t-u) dt.$$

Par la substitution de l'expression de $g(x, y)$ dans (13) on obtient l'équation intégrale

¹⁵ C. f. *Volterra* [21], *Bompiani* [1], *Pèrès* [11] et les monographies [24] et [28].

¹⁶ Cette explication est différente de celle-ci des ouvrages cités dans la remarque précédente.

$$(14) \quad \begin{cases} \psi(x, y) = \Theta(u) + \int_{v_0}^v dt \int_{t-u}^{t+u} [\psi(t+u, s) F(s, t-u) - \\ - F(t+u, s) \psi(s, t-u)] ds, \end{cases}$$

équivalente à l'équation intégral-différentielle (9'), jointe à la condition du type de *Cauchy* (10), si la fonction arbitraire du groupe du cycle fermé

$$\Theta(u) = \Theta\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

vérifie la condition $\Theta(0) = 0$.

3. Nous allons démontrer le théorème d'unicité de la solution de l'équation (14): si la fonction $\Theta(u) = \Theta\left(\frac{x-y}{2}\right)$ est continue, fixée du groupe du cycle fermé, et si la fonction $F(x, y)$ est une fonction donnée continue dans le domaine (A), l'équation intégrale (14) admet au plus une solution $\psi(x, y)$ continue dans ce domaine.

Nous suivrons d'une méthode, bien connue dans la théorie des équations intégrales linéaires.

Si l'on avait une autre solution continue $\psi_0(x, y)$, la différence

$$\Psi(x, y) = \psi(x, y) - \psi_0(x, y)$$

était une solution de l'équation intégrale homogène

$$(15) \quad \Psi(x, y) = \int_{v_0}^v dt \int_{t-u}^{t+u} [\Psi(t+u, s) F(s, t-u) - F(t+u, s) \Psi(s, t-u)] ds.$$

Par les hypothèses, $\Psi(x, y)$ et $F(x, y)$ sont des fonctions continues dans le domaine (A).

Donc, il existe dans le domaine les bornes supérieures μ et M des modules de ces fonctions:

$$|\Psi| < \mu \quad \text{et} \quad |F| < M.$$

Si nous évaluons le deuxième membre de (15), nous obtenons

$$|\Psi(x, y)| < 2\mu M(b-a)(x-y).$$

En répétant ce procédé on établit l'inégalité générale

$$|\Psi(x, y)| < \mu \frac{[2M(b-a)(x-y)]^n}{n!}.$$

Puisque le deuxième membre de cette inégalité tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment, la fonction $\Psi(x, y)$ doit être identiquement nulle dans le domaine (A) . Donc

$$\psi(x, y) \equiv \psi_0(x, y),$$

d'où l'unicité de solution de l'équation (14).

4. La résolution effective de l'équation intégrale (14) se fait par la méthode des approximations successives.

Puisque $\Theta(0) = 0$ et $\psi(x, x) = 0$ on peut poser¹⁷

$$(16) \quad \Theta(u) = \int_0^{2u} \lambda(\xi) d\xi = \int_0^{x-y} \lambda(\xi) d\xi,$$

et

$$(17) \quad \psi(x, y) = \int_0^{x-y} \lambda(\xi) K(\xi; x, y) d\xi$$

où $\lambda(x-y)$ est une fonction nouvelle du groupe du cycle fermé et où $K(\xi; x, y)$ est la fonction inconnue, définie dans un domaine tel que (A') $a \leq y \leq x \leq b, 0 \leq \xi \leq x-y$.

Par la substitution des expressions (16) et (17) dans tous les membres de l'équation (14) et par l'échange convenable de l'ordre des intégrations obtenues, on établit l'équation intégrale¹⁸

$$(18) \quad \begin{cases} K(\xi; x, y) = 1 + \int_{v_0}^v dt \int_{\xi}^{2u} [K(\xi; t+u, t+u-s) F(t+u-s, t-u) - \\ - F(t+u, t-u+s) K(\xi; t-u+s, t-u)] ds \end{cases}$$

que vérifie la fonction inconnue nouvelle $K(\xi; x, y)$.

Pour appliquer la méthode des approximations successives à la résolution de l'équation (18) nous cherchons la solution sous forme d'une série

$$(19) \quad K(\xi; x, y) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} K_n(\xi; x, y).$$

Par la substitution de cette expression dans (18) et par la comparaison des membres on tire la relation

$$(20) \quad K_1(\xi; x, y) = \int_{v_0}^v dt \int_{\xi}^{2u} [F(t+u-s, t-u) - F(t+u, t-u+s)] ds$$

et les formules générales de récurrence

$$(21) \quad \begin{cases} K_{n+1}(\xi; x, y) = \int_{v_0}^v dt \int_{\xi}^{2u} [K_n(\xi; t+u, t+u-s) F(t+u-s, t-u) - \\ - F(t+u, t-u+s) K_n(\xi; t-u+s, t-u)] ds \\ (n=1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

¹⁷ C'est un artifice du à M. Volterra.

¹⁸ L'équation de cette forme indique M. Pérés dans sa Thèse [11, page 37].

On trouve les inégalités

$$|K_n(\xi; x, y)| < \frac{[2M(b-a)(x-y-\xi)]^n}{n!} \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

d'où la convergence absolue et uniforme de la série (19) dans le domaine (A').

Enfin, les fonctions $\varphi(x, y)$ permutable avec une fonction $f(x, y)$ se calculent par l'une de deux formules (7). Si l'on introduit l'expression (17), par exemple, dans la première formule de (7) et si l'on échange l'ordre de l'intégration dans le produit de composition $\overset{*}{F}\overset{*}{\Phi}$, on met les fonctions cherchées sous forme

$$(22) \quad \varphi(x, y) = \lambda(x-y) + \int_0^{x-y} \lambda(\xi) \Phi(\xi; x, y) d\xi$$

où la fonction (le noyau)

$$(23) \quad \Phi(\xi; x, y) = \frac{\partial K(\xi; x, y)}{\partial x} + \int_{y+\xi}^x F(x, s) K(\xi; s, y) ds$$

est définie dans le domaine (A') et telle que

$$\Phi(x-y; x, y) = 0.$$

La formule (22), où $\lambda(x-y)$ est une fonction arbitraire du groupe du cycle fermé, et où la fonction $\Phi(\xi; x, y)$ est définie plus haut, représente toutes les fonctions $\varphi(x, y)$ permutable avec une fonction $f(x, y)$ du premier ordre et de forme canonique, c.-à-d. qui satisfont à la condition de permutableté

$$(24) \quad \overset{*}{f}\overset{*}{\varphi} = \overset{*}{\varphi}\overset{*}{f}.$$

5. De la formule (22), due à M. *Volterra*, on déduit la propriété suivante des fonctions permutable.

Il existe une fonction permutable $\varphi(x, y)$ et une seule qui prend sur un côté $y=a$ du triangle de définition

$$(A) \quad a \leq y \leq x \leq b$$

des valeurs assignées d'avance.

Ceci résulte du fait que l'équation intégrale linéaire de *Volterra*

$$\varphi(x, a) = \lambda(x-a) + \int_0^{x-a} \lambda(\xi) \Phi(\xi; x, a) d\xi$$

a, par rapport à l'inconnue λ , une seule solution.

Si l'on remplace x par $x + a$ dans l'équation précédente et si l'on désigne

$$\varphi_0(x) = \varphi(x + a, a), \quad \Phi_0(\xi; x) = \Phi(\xi; x + a, a),$$

on obtient une équation intégrale nouvelle

$$\lambda(x) + \int_0^x \lambda(\xi) \Phi_0(\xi; x) d\xi = \varphi_0(x)$$

dont la solution unique est

$$\lambda(x) = \varphi_0(x) + \int_0^x \varphi_0(\xi) \Gamma(\xi; x) d\xi$$

avec la résolvante

$$\Gamma(\xi; x) = -\Phi_0(\xi; x) + \Phi_0^2 - \Phi_0^3 + \dots$$

Par la substitution de l'expression précédente de λ dans la formule (22) et par l'échange de l'ordre de l'intégration obtenue, on trouve

$$\varphi(x, y) = \varphi_0(x - y) + \int_0^{x-y} \varphi_0(\xi) L(\xi; x, y) d\xi$$

où

$$(25) \quad L(\xi; x, y) = \Gamma(\xi; x - y) + \Phi(\xi; x, y) + \int_{\xi}^{x-y} \Gamma(\xi; s) \Phi(s; x, y) ds.$$

En remplaçant ici φ_0 par son expression, on a la formule

$$(26) \quad \varphi(x, y) = \varphi(x - y + a, a) + \int_0^{x-y} \varphi(\xi + a, a) L(\xi; x, y) d\xi$$

qui généralise celle-ci de M. Volterra (22).

Dans le cas particulier où

$$\varphi(x, a) \equiv 0$$

l'équation intégrale homogène de Volterra

$$\lambda(x - a) + \int_0^{x-a} \lambda(\xi) \Phi(\xi; x, a) = 0$$

admet la solution triviale $\lambda = 0$ et une seule. Donc, la fonction $\varphi(x, y) \equiv 0$, c.-à-d.

Si la fonction permutable $\varphi(x, y)$ s'annule sur un côté $y = a$ du triangle de définition (A), elle est identiquement nulle dans tout le domaine (A).

6. La formule (22) ou (26) entraîne que la diagonale d'une fonction permutable quelconque $\varphi(x, y)$ est constante:

$$\varphi(x, x) = \lambda(0) = \varphi(a, a) = c_0 = \text{const.}$$

Cette propriété est un cas particulier d'une propriété générale [§ 2, form. (5)] des diagonales lorsque la fonction donnée $f(x, y)$ est du premier ordre et de forme canonique, c.-à-d. lorsque la diagonale $f(x, x) = 1$.

En s'appuyant sur cette propriété et sur la possibilité de la résolution des équations intégrales de Volterra de première espèce on établit¹⁹ la formule analogue à la formule de Taylor

$$(27) \quad \begin{cases} \varphi(x, y) = c_0 f(x, y) + c_1 f^{*2} + \dots + c_{n-1} f^{*n} + f^{*n} \varphi_n = \\ = c_0 f(x, y) + c_1 f^{*2} + \dots + c_{n-1} f^{*n} + \check{\varphi}_n f^{*n} \end{cases}$$

où c_0, c_1, \dots, c_{n-1} sont des constantes et où $\varphi_n(x, y)$ est une fonction permutable avec $f(x, y)$ ou f^{*n} .

Nous rappelons le résultat principal sur les fonctions permutable analytiques du à M. Pérés²⁰: on obtiendra toutes les fonctions analytiques permutable avec $f(x, y)$ en formant tous les développements (analogues aux développements tayloriens)

$$(28) \quad c_0 f(x, y) + c_1 f^{*2} + \dots + c_n f^{*n+1} + \dots,$$

les constantes $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$, étant seulement telles que la série

$$(29) \quad c_0 + c_1 \frac{z}{1!} + \dots + c_n \frac{z^n}{n!} + \dots$$

converge.

7. Dans le cas particulier où $f(x, y)$ appartient au groupe de cycle fermé:

$$f(x, y) = f(x-y),$$

les fonctions (2) et (4) appartiennent aussi au même groupe:

$$H(x, y) = -f^n(x-y) \text{ et } F(x, y) = F(x-y).$$

En vertu de cela et des formules (20) et (21) on a dans ce cas

$$K_n(\xi; x, y) \equiv 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots);$$

donc la fonction $K(\xi; x, y)$, d'après (19), se réduit à l'unité et la fonction (23)

$$\Phi(\xi; x, y) = \int_0^{x-y-\xi} F(\sigma) d\sigma$$

dépend seulement de la différence:

$$\Phi = \Phi(x-y-\xi).$$

Avec de telle fonction la formule (22) entraîne

$$\varphi(x, y) = \varphi(x-y),$$

c.-à-d. les fonctions permutable avec une fonction donnée $f(x-y)$ du groupe du cycle fermé appartiennent au même groupe.

¹⁹ Volterra [24, page 165 et 167].

²⁰ J. Pérés [11, page 79].

Il est connu (§ 5, n° 2) que les fonctions $\lambda(x-y)$ du groupe du cycle fermé sont permutable entre elles. Par emploi de formule (22), M. Vessiot²¹ a démontré une propriété générale du groupe: Toutes les fonctions, admettant la représentation (22), sont permutable entre elles.

Cette proposition peut être démontrée facilement par emploi des transformations de M. Pères (§ 10).

8. À la fin de l'étude du problème fondamental nous allons établir les équations fonctionnelles diverses qui caractérisent les fonctions $K(\xi; x, y)$ et $\Phi(\xi; x, y)$.

Par emploi de l'expression (22) et de l'échange convenable de l'ordre des intégrations on trouve, de la condition de permutable

$$\overset{*}{f} \overset{*}{\varphi} = \overset{*}{\varphi} \overset{*}{f},$$

l'équation fonctionnelle

$$(30) \quad \begin{cases} f(x-\xi, y) + \int_y^{x-\xi} \Phi(\xi; x, s) f(s, y) ds = \\ = f(x, y+\xi) + \int_{y+\xi}^x f(x, s) \Phi(\xi; s, y) ds \end{cases}$$

qui relie directement la fonction $\Phi(\xi; x, y)$ à la fonction donnée $f(x, y)$.

La fonction auxiliaire

$$(8) \quad \psi(x, y) = \overset{*}{\varphi} \overset{*}{f} = \overset{*}{f} \overset{*}{\varphi}$$

est permutable avec f , car on a les relations

$$\overset{*}{\psi} \overset{*}{f} = \overset{*}{f} \overset{*}{\psi} = \overset{*}{f} \overset{*}{\varphi} \overset{*}{f}.$$

Par la substitution de (17) on tire l'équation fonctionnelle

$$(31) \quad \int_y^{x-\xi} K(\xi; x, s) f(s, y) ds = \int_{y+\xi}^x f(x, s) K(\xi; s, y) ds$$

reliant les fonctions $K(\xi; x, y)$ et $f(x, y)$.

Puisque la fonction $\psi(x, y)$ satisfait à l'équation intégral-différentielle (9), on peut former de cette équation, par l'introduction de l'expression (17), l'équation intégral-différentielle

$$(32) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) K(\xi; x, y) = \\ = \int_y^{x-\xi} K(\xi; x, s) F(s, y) ds - \int_{y+\xi}^x F(x, s) K(\xi; s, y) ds \end{cases}$$

²¹ Vessiot [19]. Une autre démonstration a donné M. Volterra [27, page 174].

où la fonction $F(x, y)$ est construite par la série (4). L'équation précédente (32), jointe à la condition

$$K(x-y; x, y) \equiv 1,$$

est équivalente à l'équation intégrale (18), déjà résolue.

Les fonctions permutables $\varphi(x, y)$ satisfont (§ 5, n° 1) au même type d'équation intégral-différentielle

$$(33) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \varphi^* F - F^* \varphi,$$

analogue à (9). Si nous introduisons ici l'expression (22), nous obtenons l'équation intégral-différentielle²²

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \Phi(\xi; x, y) &= F(x-\xi, y) - F(x, y+\xi) + \\ &+ \int_y^{x-\xi} \Phi(\xi; x, s) F(s, y) ds - \int_{y+\xi}^x F(x, s) \Phi(\xi; s, y) ds \end{aligned} \right.$$

qui caractérise la fonction $\Phi(\xi; x, y)$.

Un nouveau type d'équations fonctionnelles s'obtient de la propriété du groupe (n° 7) des fonctions $\psi(x, y)$ et $\varphi(x, y)$. Soient les deux autres fonctions

$$(17'') \quad \psi'(x, y) = \int_0^{x-y} \mu(\eta) K(\eta; x, y) d\eta$$

et

$$(22'') \quad \varphi'(x, y) = \mu(x-y) + \int_0^{x-y} \mu(\eta) \Phi(\eta; x, y) d\eta$$

avec une autre fonction $\mu(x-y)$ du groupe du cycle fermé.

De la permutabilité mutuelle des fonctions (17) et (17'') on tire, par les calculs faciles, l'équation fonctionnelle nouvelle

$$(35) \quad \int_{y+\eta}^{x-\xi} K(\xi; x, s) K(\eta; s, y) ds = \int_{y+\xi}^{x-\eta} K(\eta; x, s) K(\xi; s, y) ds$$

qui caractérise la fonction $K(\xi; x, y)$.

De même, la condition de permutabilité

$$\varphi^* \varphi' = \varphi' \varphi^*$$

entraîne l'équation fonctionnelle²³

²² Avec les autres notations cette équation est établie dans la monographie de, *Volterra-Pérès* [28, page 74].

²³ Cette équation, avec les autres notations, est établie par M. *Volterra* [27 page 174].

$$(36) \begin{cases} \Phi(\xi; x, y + \eta) + \Phi(\eta; x - \xi, y) + \int_{y+\eta}^{x-\xi} \Phi(\xi; x, s) \Phi(\eta; s, y) ds = \\ = \Phi(\eta; x, y + \xi) + \Phi(\xi; x - \eta, y) + \int_{y+\xi}^{x-\eta} \Phi(\eta; x, s) \Phi(\xi; s, y) ds, \end{cases}$$

caractérisant la fonction $\Phi(\xi; x, y)$.

§ 7. Problème dans le cas d'une fonction donnée du second ordre.

1. Sans restreindre la généralité, on peut admettre que la fonction donnée $f(x, y)$ du second ordre est mise (§ 3) sous la forme canonique

$$(1) \begin{cases} f(x, x) = 0, & \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y=x} = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y=x} = 1, \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{y=x} = -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{y=x} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{y=x} = 0. \end{cases}$$

Si la fonction $f(x, y)$ est dérivable jusqu'à l'ordre 4, il existe (§ 4) l'expression explicite du symbole $\overset{*}{f}^{-1}$ d'inversion de la composition

$$(2) \quad \overset{*}{f}^{-1} = \overset{*}{1}^{-2} + a_2(x) \overset{*}{1}^0 + F_1(x, y) \quad (\text{composition à gauche})$$

$$(2') \quad \overset{*}{f}^{-1} = \overset{*}{1}^{-2} + b_2(y) \overset{*}{1}^0 + F_2(x, y) \quad (\text{composition à droite})$$

où

$$(3) \quad a_2(x) = \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right)_{y=x}, \quad b_2(y) = -\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}\right)_{y=x}$$

et

$$(4) \begin{cases} F_1(x, y) = H_1(x, y) - \overset{*}{H}_1 \overset{*}{f}_2 + \overset{*}{H}_1 \overset{*}{f}_2 \overset{*}{f}_2 - \dots \quad \left(f_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \\ F_2(x, y) = H_2(x, y) - \overset{*}{f}_1 \overset{*}{H}_2 + \overset{*}{f}_1 \overset{*}{f}_1 \overset{*}{H}_2 - \dots \quad \left(f_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) \end{cases}$$

avec les fonctions

$$(5) \begin{cases} H_1(x, y) = -\left[\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + a_2(x) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right], \\ H_2(x, y) = -\left[\frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial x^2} + b_2(y) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]. \end{cases}$$

Comme nous avons déjà remarqué (§ 4, n° 3), les fonctions (3) et (4) sont en réalité égales entre elles; nous désignons leur valeurs communes par

$$(3') \quad a_2(x) = b_2(x) = \alpha(x)$$

et

$$(4') \quad F_1(x, y) = F_2(x, y) = F(x, y).$$

Nous allons d'abord étudier le problème de détermination des fonctions permutables $\varphi(x, y)$ dans le cas particulier où

$$\alpha(x) \equiv 0,$$

c.-à-d. où la fonction donnée $f(x, y)$ est du type spécial

$$(6) \quad f(x, y) = (x - y) + (x - y)^4 \omega(x, y),$$

$\omega(x, y)$ étant une fonction continue, dérivable jusqu'à l'ordre 4. Dans ce cas particulier on a l'expression commune du symbole

$$(7) \quad \overset{*}{f}^{-1} = \overset{*}{1}^{-2} + F(x, y)$$

où la fonction $F(x, y)$ est donnée par la série

$$(8) \quad F(x, y) = H(x, y) + \overset{*}{H} \overset{*}{1}^2 \overset{*}{H} + \overset{*}{H} \overset{*}{1}^2 \overset{*}{H} \overset{*}{1}^2 \overset{*}{H} + \dots \left[H = - \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \right]$$

qui converge absolument et uniformément dans le domaine d'existence tel que

$$(A) \quad a \leq y \leq x \leq b.$$

En prenant l'expression (7) pour résoudre les équations intégrales associées du problème

$$\overset{*}{f} \overset{*}{\varphi} = \psi(x, y) \quad \text{et} \quad \overset{*}{\varphi} \overset{*}{f} = \psi(x, y)$$

on obtient leurs solutions

$$(9) \quad \varphi(x, y) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \overset{*}{F} \overset{*}{\psi} \quad \text{et} \quad \varphi(x, y) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \overset{*}{\psi} \overset{*}{F}$$

d'où l'équation intégral-différentielle

$$(10) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \overset{*}{\psi} \overset{*}{F} - \overset{*}{F} \overset{*}{\psi}$$

pour déterminer la fonction auxiliaire

$$(11) \quad \psi(x, y) = \int_y^x f(x, s) \varphi(s, y) ds = \int_y^x \varphi(x, s) f(s, y) ds.$$

Puisque $f(x, y)$ est une fonction du second ordre, la fonction $\psi(x, y)$ d'après (11) doit vérifier les conditions

$$(12) \quad \psi(x, x) = 0, \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{y=x} = - \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{y=x} = 0.$$

Donc, le problème fondamental est réduit à la résolution de l'équation intégral-différentielle (10), jointe aux conditions du type de *Cauchy* (12), c.-à-d. à la résolution d'un problème de *Cauchy* pour l'équation (10).

2. Comme dans le cas d'une fonction du premier ordre (§ 6), nous trouvons d'abord la solution générale $\psi(x, y)$ de l'équation différentielle

$$(13) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = g(x, y)$$

avec la fonction

$$(14) \quad g(x, y) = \int_y^x [\psi(x, s) F(s, y) - F(x, s) \psi(s, y)] ds$$

lorsque $\psi(x, y)$ satisfait aux conditions (12).

Par le changement des variables

$$(15) \quad u = \frac{x-y}{2}, \quad v = \frac{x+y}{2}$$

l'équation précédente se transforme en

$$(16) \quad \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial u \partial v} = \bar{g}(u, v)$$

où $\bar{\psi}(u, v) = \psi(v+u, v-u)$, $\bar{g}(u, v) = g(v+u, v-u)$.

La solution générale de (16)

$$\bar{\psi}(u, v) = \Theta(u) + \gamma(v) + \int_{v_0}^v ds \int_0^u \bar{g}(t, s) dt$$

contient deux fonctions arbitraires $\Theta(u)$ et $\gamma(v)$. En revenant aux variables

$$x = v + u \quad \text{et} \quad y = v - u$$

on obtient la solution générale de (13)

$$(17) \quad \psi(x, y) = \Theta(u) + \gamma(v) + \int_{v_0}^v ds \int_0^u g(s+t, s-t) dt.$$

Le terme ici

$$(18) \quad \psi_1(x, y) = \bar{\psi}_1(u, v) = \int_{v_0}^v ds \int_0^u g(s+t, s-t) dt$$

représente une solution particulière de (13) qui satisfait aux conditions (12). En effet, pour $y=x$ on a $u=0$, et de formules (18) et (14) on tire

$$\psi_1(x, x) = \bar{\psi}_1(0, v) = 0$$

et $\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right)_{y=x} = -\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y}\right)_{y=x} = \frac{1}{2} \int_{v_0}^v g(s, s) ds = 0$.

Pour que la solution générale (17) satisfasse à la condition

$$\psi(x, x) = 0$$

on doit prendre

$$\gamma(x) = -\Theta(0) = \text{const.}$$

Par le choix d'une fonction arbitraire $\Theta(u)$ du groupe du cycle fermé, soumise aux conditions

$$(19) \quad \Theta(0) = 0, \quad \Theta'(0) = 0,$$

on forme la solution générale de l'équation (13)

$$(20) \quad \psi(x, y) = \Theta(u) + \int_{v_0}^v ds \int_0^u g(s+t, s-t) dt$$

qui satisfait bien aux conditions (12).

En remplaçant dans la formule précédente la fonction $g(x, y)$ par son expression (14) on trouve l'équation intégrale

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi(x, y) = \Theta(u) + \\ + \int_{v_0}^v ds \int_0^u dt \int_{s-t}^{s+t} [\psi(s+t, \sigma) F(\sigma, s-t) - F(s+t, \sigma) \psi(\sigma, s-t)] d\sigma \end{array} \right.$$

qui est équivalente à l'équation intégrale-différentielle (10), jointe aux conditions (12).

3. Nous allons démontrer, comme au § 6, le théorème d'unicité suivant: si la fonction $\Theta(u) = \Theta\left(\frac{x-y}{2}\right)$, admettant la dérivée première continue, est fixée du groupe du cycle fermé et si la fonction $F(x, y)$ est une fonction donnée, continue dans le domaine (A), l'équation intégrale (21) admet au plus une solution $\psi(x, y)$, continue dans ce domaine.

Dans le cas contraire, en notant par $\psi_0(x, y)$ une autre solution continue de (21), on forme l'équation intégrale homogène

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi(x, y) = \\ = \int_{v_0}^v ds \int_0^u dt \int_{s-t}^{s+t} [\Psi(s+t, \sigma) F(\sigma, s-t) - F(s+t, \sigma) \Psi(\sigma, s-t)] d\sigma \end{array} \right.$$

que vérifie la différence

$$\Psi(x, y) = \psi(x, y) - \psi_0(x, y).$$

Or, sous les hypothèses précédentes, l'équation (22) admet la solution unique

$$\Psi(x, y) \equiv 0.$$

En effet, par l'évaluation répétée du deuxième membre de (22) on tire l'inégalité

$$(23) \quad |\Psi(x, y)| < \mu M^n (b-a)^n \cdot \frac{(x-y)^{2n}}{(2n)!}$$

avec

$$|\Psi| < \mu \text{ et } |F| < M,$$

dont le second membre tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment.

Donc, les solutions $\psi(x, y)$ et $\psi_0(x, y)$ doivent être identiques, — d'où l'unicité de solution de l'équation (21).

4. Pour la résolution effective de l'équation intégrale (21) on met les fonctions $\Theta(u)$ et $\psi(x, y)$ d'après (12) et (19) sous formes suivantes

$$(24) \quad \Theta(u) = \int_0^{2u} \mu(\xi) d\xi = \int_0^{x-y} \mu(\xi) d\xi$$

et

$$(25) \quad \psi(x, y) = \int_0^{x-y} \mu(\xi) K(\xi; x, y) d\xi$$

où $\mu(\xi)$ est une fonction arbitraire nouvelle (telle que $\mu(0) = 0$) et où $K(\xi; x, y)$ est la fonction inconnue, définie dans le domaine tel que

$$(A') \quad a \leq y \leq x \leq b, \quad 0 \leq \xi \leq x - y.$$

Par la substitution des expressions (24) et (25) dans (21) on obtient, après quelques transformations sur l'échange de l'ordre des intégrations convenables, l'équation intégrale fondamentale

$$(26) \quad \begin{cases} K(\xi; x, y) = 1 + \int_{v_0}^v ds \int_{\frac{\xi}{2}}^u dt \int_{\xi}^{2t} [K(\xi; s+t, s+t-\tau) F(s+t-\tau, s-t) - \\ - F(s+t, s-t+\tau) K(\xi; s-t+\tau, s-t)] d\tau, \end{cases}$$

qui caractérise la fonction $K(\xi; x, y)$.

On obtient par la méthode des approximations successives la solution (d'ailleurs unique) de (26), exprimée par la série

$$(27) \quad K(\xi; x, y) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} K_n(\xi; x, y)$$

où les termes sont déterminés par les formules suivantes de récurrence:

$$(28) \quad K_1(\xi; x, y) = \int_{v_0}^v ds \int_{\frac{\xi}{2}}^u dt \int_{\xi}^{2t} [F(s+t-\tau, s-t) - F(s+t, s-t+\tau)] d\tau$$

et

$$(29) \quad \begin{cases} K_{n+1}(\xi; x, y) = \int_{v_0}^v ds \int_{\frac{\xi}{2}}^u dt \int_{\xi}^{2t} [K_n(\xi; s+t, s+t-\tau) F(s+t-\tau, s-t) - \\ - F(s+t, s-t+\tau) K_n(\xi; s-t+\tau, s-t)] d\tau \\ (n=1, 2, 3, \dots). \end{cases}$$

Dans le domaine (A') la convergence absolue et uniforme de la série (27) est assurée par les inégalités

$$(30) \quad |K_n(\xi; x, y)| < M^n (b-a)^n \cdot \frac{(x-y-\xi)^{2n}}{(2n)!} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

où M est la borne supérieure du module de $F(x, y)$ dans le domaine (A)

La fonction $K(\xi; x, y)$ jouit les propriétés suivantes, tirées de l'équation intégrale (26). Si l'on pose ici $\xi = 2u = x - y$, on obtient la valeur

$$(31) \quad K(x - y; x, y) = 1.$$

En dérivant deux fois par rapport à x tous les membres de (26) et en posant la même valeur de ξ , on trouve immédiatement

$$(32) \quad \left[\frac{\partial K(\xi; x, y)}{\partial x} \right]_{\xi=x-y} = 0$$

et

$$(33) \quad \left[\frac{\partial^2 K(\xi; x, y)}{\partial x^2} \right]_{\xi=x-y} = \frac{1}{2} \int_{v_0-u}^{v-u} F(\sigma, \sigma) d\sigma - \frac{1}{2} \int_{v_0+u}^{v+u} F(\sigma, \sigma) d\sigma.$$

5. Enfin, pour déterminer toutes les fonctions $\varphi(x, y)$ permutable avec (6), il suffit d'introduire l'expression (25) de la fonction trouvée $\psi(x, y)$ dans l'une des formules (9), comme par exemple, dans la première. En vertu des valeurs (31) et (32) on exprime, après quelques calculs faciles, les fonctions permutable par

$$(34) \quad \varphi(x, y) = \mu'(x - y) + \int_0^{x-y} \mu(\xi) \Psi(\xi; x, y) d\xi$$

où

$$(35) \quad \Psi(\xi; x, y) = \frac{\partial^2 K(\xi; x, y)}{\partial x^2} + \int_{y+\xi}^x F(x, s) K(\xi; s, y) d\xi.$$

Finalement on peut mettre les fonctions permutable $\varphi(x, y)$ sous forme de transformations de M. Volterra

$$(36) \quad \varphi(x, y) = \lambda(x - y) + \int_0^{x-y} \lambda(\xi) \Phi(\xi; x, y) d\xi,$$

en introduisant les fonctions nouvelles $\lambda(x - y)$ et $\Phi(\xi; x, y)$ telles que

$$(37) \quad \mu(x - y) = \int_0^{x-y} \lambda(\xi) d\xi$$

et

$$(38) \quad \Phi(\xi; x, y) = \int_{\xi}^{x-y} \Psi(\eta; x, y) d\eta.$$

Donc, toutes les fonctions $\varphi(x, y)$ permutable avec la fonction $f(x, y)$ du second ordre et du type spécial

$$(6) \quad f(x, y) = (x - y) + (x - y)^4 \omega(x, y)$$

peuvent être représentées par les transformations de M. Volterra (36) où $\lambda(x - y)$ est une fonction arbitraire du groupe du cycle fermé et où la fonction (le noyau) $\Phi(\xi; x, y)$ est déterminée par les relations (38) et (35).

6. Toutes les propriétés des fonctions permutable qui sont basées sur la formule (36), sont les mêmes que pour les fonctions permutable avec une fonction donnée du premier ordre (§ 6, nos 5—7). Aussi les équations fonctionnelles (30) et (31) du § 6 sont les mêmes.

Par la substitution de (25) dans l'équation (10) on tire l'équation intégral-différentielle

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) K(\xi; x, y) = \\ & = \int_y^{x-\xi} K(\xi; x, s) F(s, y) ds - \int_{y+\xi}^x F(x, s) K(\xi; s, y) ds, \end{aligned} \right.$$

qui, jointe aux conditions (31) et (32), est équivalente à l'équation intégrale (26).

Puisque la fonction permutable $\varphi(x, y)$, admettant les dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2, vérifie le même type (10) d'équation intégral-différentielle

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \overset{*}{\varphi} \overset{*}{F} - \overset{*}{F} \overset{*}{\varphi},$$

on peut former par la substitution de (36) l'équation intégral-différentielle

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi(\xi; x, y) = F(x - \xi, y) - F(x, y + \xi) + \\ & + \int_y^{x-\xi} \Phi(\xi; x, s) F(s, y) ds - \int_{y+\xi}^x F(x, s) \Phi(\xi; s, y) ds \end{aligned} \right.$$

qui caractérise la fonction (le noyau) $\Phi(\xi; x, y)$.

7. Dans le cas général d'une fonction quelconque $f(x, y)$ du second ordre et de forme canonique (1) on doit prendre les expressions générales (2) et (2') avec les fonctions (3) et (4). Ayant regard aux égalités (3') et (4'), on exprime les solutions des équations intégrales associées

$$\overset{*}{f} \overset{*}{\varphi} = \psi(x, y) \text{ et } \overset{*}{\varphi} \overset{*}{f} = \psi(x, y)$$

par

$$(9') \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(x, y) &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \alpha(x) \psi + \overset{*}{F} \overset{*}{\psi} \\ \varphi(x, y) &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \alpha(y) \psi + \overset{*}{\psi} \overset{*}{F} \end{aligned} \right.$$

d'où l'équation intégral-différentielle générale²⁴

²⁴ Cette équation est équivalente à celle que M. Volterra a formé dans ses travaux [22, § 3] et [24, page 169].

$$(10') \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = [\alpha(y) - \alpha(x)] \psi(x, y) + \ddot{\psi} \ddot{F} - \ddot{F} \ddot{\psi}.$$

Par emploi de la formule de solution (20) on trouve l'équation intégrale

$$(21') \quad \left\{ \begin{aligned} \psi(x, y) = \Theta(u) + \int_{v_0}^v ds \int_0^u \{ [\alpha(s-t) - \alpha(s+t)] \psi(s+t, s-t) + \\ + \int_{s-t}^{s+t} [\psi(s+t, \sigma) F(\sigma, s-t) - F(s+t, \sigma) \psi(\sigma, s-t)] d\sigma \} dt, \end{aligned} \right.$$

qui est équivalente à (10'), jointe aux conditions (12).

Comme au n^0 précédent, on constate l'unicité de solution de l'équation (21'), et par les substitutions (24) et (25) on obtient l'équation intégrale générale

$$(26') \quad \left\{ \begin{aligned} K(\xi; x, y) = 1 + \int_{v_0}^v ds \int_{\frac{s}{2}}^u \{ [\alpha(s-t) - \alpha(s+t)] K(\xi; s+t, s-t) + \\ + \int_{s-t}^{s+t} [K(\xi; s+t, s+t-\tau) F(s+t-\tau, s-t) - \\ - F(s+t, s-t+\tau) K(\xi; s-t+\tau, s-t)] d\tau \} dt. \end{aligned} \right.$$

Par la méthode des approximations successives on peut trouver la solution unique de (26'), exprimée par la série convergente de forme (27). La solution $K(\xi; x, y)$ a la même valeur (31), mais la fonction

$$(32') \quad \left[\frac{\partial K(\xi; x, y)}{\partial x} \right]_{y=x} = \varkappa(x, y) = \frac{1}{2} \int_{v_0}^v [\alpha(s-u) - \alpha(s+u)] ds$$

est en général différente de zéro.

Enfin, toutes les fonctions permutables $\varphi(x, y)$ peuvent être mises sous forme de transformations (36) de M. *Volterra*, en posant

$$(35') \quad \Psi(\xi; x, y) = \frac{\partial^2 K(\xi; x, y)}{\partial x^2} + \alpha(x) K(\xi; x, y) + \int_{y+\xi}^x F(x, s) K(\xi; s, y) ds$$

et

$$(38') \quad \Phi(\xi; x, y) = \varkappa(x, y) + \int_{\xi}^{x-y} \Psi(\eta; x, y) d\eta,$$

où la fonction $\varkappa(x, y)$ a l'expression (32'). Donc, les propriétés, indiquées au n^0 6, des fonctions $\varphi(x, y)$ permutables avec $f(x, y)$ subsistent dans le cas général. On pouvait généraliser facilement les équations intégral-différentielles (39) et (40).

8. Dans le cas particulier où la fonction $f(x, y) = f(x - y)$ est choisie du groupe du cycle fermé la fonction (3') se réduit à constante

$$(41) \quad \alpha(x) \equiv -f'''(0),$$

et les fonctions (5) sont identiques à

$$(42) \quad H_0(x, y) = -f^{(4)}(x - y) + f'''(0)f''(x - y),$$

où l'on a noté par les accents les dérivées de $f(x - y)$ par rapport à variable $x - y$. Dans ce cas la fonction (4') peut être représentée par la série convergente

$$(43) \quad F(x, y) = H_0(x, y) - \dot{H}_0 \dot{f}'' + \dot{H}_0 \dot{f}'' \dot{f}'' - \dots,$$

et elle appartient, comme la fonction (42), au groupe du cycle fermé:

$$F(x, y) = F(x - y).$$

En vertu de cela, on constate facilement que dans ce cas particulier les équations (10'), (21') et (26') se réduisent respectivement aux équations (10), (21) et (26), où l'on doit prendre la fonction (43) du groupe du cycle fermé. Par emploi des formules correspondantes de récurrence on tire

$$K_n(\xi; x, y) \equiv 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Donc la fonction (27) se réduit à l'unité:

$$K(\xi; x, y) \equiv 1,$$

et d'après les formules (35) et (38) on a

$$\Psi(\xi; x, y) = \int_0^{x-y-\xi} F(\sigma) d\sigma = \Psi(x - y - \xi)$$

et

$$\Phi(\xi; x, y) = \int_0^{x-y-\xi} \Psi(\eta) d\eta = \Phi(x - y - \xi).$$

Avec telle expression les transformations (36) de M. Volterra indiquent que toutes les fonctions

$$\varphi(x, y) = \varphi(x - y)$$

permutables avec $f(x - y)$ appartiennent aussi au même groupe de cycle fermé.

§ 8. Problème dans le cas d'une fonction donnée d'ordre n ($n > 2$).

1. En effectuant les transformations convenables (§ 3) on peut toujours supposer que la fonction donnée $f(x, y)$ d'ordre entier positif n est mise sous forme canonique [§ 4, form. (16)]. Si de plus $f(x, y)$ est dérivable jusqu'à l'ordre $2n$, on sait construire (§ 4) l'expression²⁵ du symbole f^* d'inversion de composition par

$$(1) \quad f^* = \mathbb{1}^{-n} + a_2(x) \mathbb{1}^{-n+2} + \dots + a_n(x) \mathbb{1}^0 + F(x, y)$$

ou

$$(1') \quad f^* = \mathbb{1}^{-n} + b_2(y) \mathbb{1}^{-n+2} + \dots + b_n(y) \mathbb{1}^0 + F(x, y),$$

suivant le cas de composition à gauche ou à droite avec ce symbole.

Par emploi des expressions (1) et (1'), les solutions des équations intégrales associées du problème

$$f^* \psi = \psi(x, y) \quad \text{et} \quad \psi^* f = \psi(x, y)$$

s'expriment de la façon suivante

$$(2) \quad \varphi(x, y) = f^* \psi = \frac{\partial^n \psi}{\partial x^n} + a_2(x) \frac{\partial^{n-2} \psi}{\partial x^{n-2}} + \dots + a_n(x) \psi + F^* \psi$$

et

$$(2') \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(x, y) = \psi^* f &= (-1)^n \frac{\partial^n \psi}{\partial y^n} + (-1)^{n-2} b_2(y) \frac{\partial^{n-2} \psi}{\partial y^{n-2}} + \dots + \\ &+ b_n(y) \psi + \psi^* F \end{aligned} \right.$$

d'où l'équation intégralo-différentielle

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^n \psi}{\partial x^n} - (-1)^n \frac{\partial^n \psi}{\partial y^n} + \left[a_2(x) \frac{\partial^{n-2} \psi}{\partial x^{n-2}} - (-1)^{n-2} b_2(y) \frac{\partial^{n-2} \psi}{\partial y^{n-2}} \right] + \dots + \\ + [a_n(x) - b_n(y)] \psi(x, y) = \psi^* F - F^* \psi. \end{aligned} \right.$$

Puisque $f(x, y)$ est d'ordre n , la fonction introduite auxiliaire

$$(4) \quad \psi(x, y) = \int_y^x f(x, s) \varphi(s, y) ds = \int_y^x \varphi(x, s) f(s, y) ds$$

doit être d'ordre supérieur à n ; donc on a les conditions supplémentaires

$$(5) \quad \left[\frac{\partial^k \psi(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} \right]_{y=x} = 0 \quad (i+j=k, \quad k=0, 1, 2, \dots, n-1),$$

qui sont du type de *Cauchy*.

²⁵ L'égalité des parties régulières du f^* (aussi des fonctions a_2 et b_2) est indiquée au n° 3 du § 4.

Dans le cas particulier où

$$a_i(x) \equiv 0, \quad b_i(y) \equiv 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

la fonction $f(x, y)$ admet la représentation

$$(6) \quad f(x, y) = \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} + (x-y)^{2n} \omega(x, y)$$

et le symbole $\overset{*}{f}^{-1}$ a l'expression commune

$$(7) \quad \overset{*}{f}^{-1} = \overset{*}{1}^{-n} + F(x, y)$$

avec la fonction $F(x, y)$, représentée par la série convergente

$$(8) \quad F(x, y) = H(x, y) + \overset{*}{H} \overset{*}{1}^n \overset{*}{H} + \overset{*}{H} \overset{*}{1}^n \overset{*}{H} \overset{*}{1}^n \overset{*}{H} + \dots \left[H = (-1)^{n-1} \frac{\partial^{2n} f}{\partial x^n \partial y^n} \right]$$

Dans ce cas on a l'équation intégral-différentielle du problème plus simple

$$(9) \quad \frac{\partial^n \psi}{\partial x^n} - (-1)^n \frac{\partial^n \psi}{\partial y^n} = \overset{*}{\psi} \overset{*}{F} - \overset{*}{F} \overset{*}{\psi}$$

Il faut donc résoudre en $\psi(x, y)$ ces équations intégral-différentielles (3) et (9), jointes aux conditions de *Cauchy* (5).

En désignant $g(x, y)$ le second membre

$$\overset{*}{\psi} \overset{*}{F} - \overset{*}{F} \overset{*}{\psi}$$

on peut remplacer équations (3) et (9) par des équations intégrales, si l'on peut résoudre le problème de *Cauchy*²⁶ pour les équations différentielles

$$(3') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^n \psi}{\partial x^n} - (-1)^n \frac{\partial^n \psi}{\partial y^n} + \left[a_2(x) \frac{\partial^{n-2} \psi}{\partial x^{n-2}} - (-1)^{n-2} b_2(y) \frac{\partial^{n-2} \psi}{\partial y^{n-2}} \right] + \dots + \\ + [a_n(x) - b_n(y)] \psi(x, y) = g(x, y) \end{aligned} \right.$$

ou

$$(9') \quad \frac{\partial^n \psi}{\partial x^n} - (-1)^n \frac{\partial^n \psi}{\partial y^n} = g(x, y)$$

et pour les conditions supplémentaires (5). Telle réduction serait possible parce que $g(x, y)$ contient seulement sous le signe d'intégration la fonction inconnue $\psi(x, y)$, mais non ses dérivées partielles.

Au contraire, par le procédé employé par *M. Pérès*²⁷ on serait ramené à une nouvelle équation intégral-différentielle. Les difficultés du problème dans le cas général d'ordre $n > 2$ proviennent de ce que

²⁶ Pour les fonctions analytiques *M. Pérès* a établi les formules correspondantes dans ses travaux [11, page 42] et [28, page 47].

²⁷ C. f. *Pérès* [11, page 41 et 48].

les équations différentielles (3') et (9') ont des caractéristiques imaginaires. C'est pourquoi M. Pérés a traité le problème pour des fonctions permutables analytiques.

2. Les équations (3) et (9) peuvent être obtenues de la relation symbolique

$$\overset{*}{f}^{-1} \overset{*}{\psi} - \overset{*}{\psi} \overset{*}{f}^{-1} = 0$$

si l'on remplace $\overset{*}{f}^{-1}$ par son expression (1) ou (1') et (7). La fonction $\psi(x, y)$ est permutable avec $f(x, y)$ car

$$\overset{*}{f} \overset{*}{\psi} = \overset{*}{\psi} \overset{*}{f} = \overset{*}{f} \overset{*}{\psi} \overset{*}{f}.$$

De la condition de permutabilité

$$\overset{*}{f} \overset{*}{\varphi} = \overset{*}{\varphi} \overset{*}{f}$$

on tire, en vertu des relations

$$\overset{*}{f} \overset{*}{f}^{-1} = \overset{*}{f}^{-1} \overset{*}{f} = \overset{*}{1}^0,$$

la relation symbolique du même type

$$\overset{*}{f}^{-1} \overset{*}{\varphi} - \overset{*}{\varphi} \overset{*}{f}^{-1} = 0.$$

Donc, les fonctions permutables $\varphi(x, y)$, admettant les dérivées partielles jusqu'à l'ordre n , satisfont aux mêmes équations intégral-différentielles (3) et (9), c.-à-d. ces équations caractérisent toutes les fonctions permutables avec la fonction donnée $f(x, y)$ d'ordre n et de forme canonique.

3. Dans le cas particulier où $f(x, y) = f(x - y)$ est une fonction du groupe du cycle fermé, on a les constantes égales

$$a_2 = b_2 = -f^{(n+1)}(0), \dots, a_n = b_n = \text{const.}$$

et la fonction

$$(10) \quad F(x, y) = H_0(x, y) - \overset{*}{H}_0 \overset{*}{f}^{(n)} + \overset{*}{H}_0 \overset{*}{f}^{(n)} \overset{*}{f}^{(n)} - \dots$$

avec

$$(11) \quad H_0(x, y) = -[f^{(2n)}(x-y) + a_2 f^{(2n-2)}(x-y) + \dots + a_n f^{(n)}(x-y)]$$

appartenant au même groupe:

$$F(x, y) = F(x - y) \quad \text{et} \quad H_0(x, y) = H_0(x - y).$$

L'équation (3) se réduit dans ce cas à la suivante

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^n \psi}{\partial x^n} - (-1)^n \frac{\partial^n \psi}{\partial y^n} + a_2 \left[\frac{\partial^{n-2} \psi}{\partial x^{n-2}} - (-1)^{n-2} \frac{\partial^{n-2} \psi}{\partial y^{n-2}} \right] + \dots + \\ & + a_{n-1} \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] = \int_y^x [\psi(x, s) F(s - y) - F(x - s) \psi(s, y)] ds \end{aligned} \right.$$

Celle-ci admet évidemment la solution de forme

$$\psi(x, y) = \psi(x - y).$$

En vertu de la relation (2) ou (2') on constate aisément que les fonctions $\varphi(x, y)$ permutable avec $f(x - y)$ appartiennent aussi au groupe du cycle fermé:

$$\varphi(x, y) = \varphi(x - y).$$

CHAPITRE III.

Transformations de M. Pérés et leur application au problème fondamental.

§ 9. Équation fonctionnelle qui caractérise la fonction génératrice de la transformation et sa discussion.

1. Dans le Chapitre précédent (§§ 6 et 7) nous avons trouvé toutes les fonctions $\varphi(x, y)$, permutable avec une fonction donnée du premier ou du second ordre et de forme canonique, exprimées par la formule

$$(1) \quad \varphi(x, y) = \lambda(x - y) + \int_0^{x-y} \lambda(\xi) \Phi(\xi; x, y) d\xi,$$

due à M. *Volterra*. Le second membre de (1) peut être interprété par une transformation fonctionnelle

$$(2) \quad \Omega(\lambda) = \lambda(x - y) + \int_0^{x-y} \lambda(\xi) \Phi(\xi; x, y) d\xi$$

faisant passer de toutes les fonctions $\lambda(x - y)$ du groupe du cycle fermé aux fonctions permutable $\varphi(x, y)$. Nous nommerons (2) en général les transformations de M. *Volterra*; leur fonction génératrice (le noyau) $\Phi(\xi; x, y)$ est une fonction continue dans le domaine tel que

$$(A') \quad a \leq y \leq x \leq b, \quad 0 \leq \xi \leq x - y$$

et elle est formée par un procédé connu dans le problème de détermination des fonctions permutable.

Nous rappelons dans ce paragraphe les résultats principaux dus à M. *Pérés* sur les transformations $\Omega(\lambda)$, en rattachant les au domaine nouveau (A') de la définition de $\Phi(\xi; x, y)$ quelconque²⁸.

²⁸ C. f. *Pérés* [13] et *Volterra-Pérés* [28, Chap. IV]. Dans ces travaux le domaine cité est tel que $a \leq x \leq y \leq b, \quad 0 \leq \xi \leq y - x$.

Tout d'abord, cherchons toutes les fonctions $\mu(x-y)$ du groupe de cycle fermé dont la transformée

$$(3) \quad \mu(x-y) + \int_0^{x-y} \mu(\xi) \Phi_0(\xi; x, y) d\xi,$$

avec une fonction génératrice nouvelle $\Phi_0(\xi; x, y)$, coïncide avec (1). En égalant les expressions (1) et (3) et en posant $y = a = \text{const}$, on obtient, après avoir remplacé x par $x + a$, l'équation intégrale linéaire de *Volterra*

$$\mu(x) + \int_0^x \mu(\xi) \Phi_0(\xi; x+a, a) d\xi = \lambda(x) + \int_0^x \lambda(\xi) \Phi(\xi; x+a, a) d\xi,$$

dont la solution par rapport à l'inconnue $\mu(x)$ peut être mise sous forme

$$\mu(x) = \lambda(x) + \int_0^x \lambda(\xi) \Theta(\xi; x) d\xi,$$

la fonction $\Theta(\xi; x)$ étant formée à partir de Φ et Φ_0 .

Par la substitution

$$(4) \quad \mu(x-y) = \lambda(x-y) + \int_0^{x-y} \lambda(\xi) \Theta(\xi; x-y) d\xi$$

la fonction (3) devient égale à (1), si l'on choisit la relation suivante entre les fonctions génératrices

$$(5) \quad \Phi(\xi; x, y) = \Phi_0(\xi; x, y) + \Theta(\xi; x-y) + \int_{\xi}^{x-y} \Theta(\xi; s) \Phi_0(s; x, y) ds.$$

En fixant la fonction $\Phi_0(\xi; x, y)$ et en regardant la fonction $\Theta(\xi; x-y)$ comme arbitraire quelconque, on obtient par (5) la forme la plus générale de la fonction génératrice $\Phi(\xi; x, y)$ qui sert à représenter la même fonction par la transformation de M. *Volterra* (1).

2. M. *Pérès* a profité de cet arbitraire, en découvrant parmi toutes les transformations (2) celles qui conservent la composition, c.-à-d. qui satisfont à la condition

$$(6) \quad \check{\Omega}(\lambda) \check{\Omega}(\mu) = \check{\Omega}(\check{\lambda} \check{\mu})$$

où $\check{\Omega}(\mu)$ est la transformation

$$(2') \quad \check{\Omega}(\mu) = \mu(x-y) + \int_0^{x-y} \mu(\eta) \Phi(\eta; x, y) d\eta$$

avec la même fonction génératrice $\Phi(\xi; x, y)$ et avec une autre fonction $\mu(x-y)$ quelconque du groupe du cycle fermé. Par la substitution des expressions (2) et (2') dans la relation (6) on tire aisément l'équation fonctionnelle

$$(7) \Phi(\xi + \eta; x, y) = \Phi(\xi; x, y + \eta) + \Phi(\eta; x - \xi, y) + \int_{y+\eta}^{x-\xi} \Phi(\xi; x, s) \Phi(\eta; s, y) ds$$

qui caractérise la fonction génératrice $\Phi(\xi; x, y)$ des transformations précédentes, dites les transformations de M. Pérés.

Celles-ci jouissent de propriété remarquable du groupe: les fonctions transformées (2) et (2') sont permutablees entre elles.

En effet, il existe les relations

$$\check{\Omega}(\mu) \check{\Omega}(\lambda) = \check{\Omega}(\mu \check{\lambda}) = \check{\Omega}(\check{\lambda} \mu) = \check{\Omega}(\lambda) \check{\Omega}(\mu)$$

car les fonctions $\lambda(x-y)$ et $\mu(x-y)$ du groupe du cycle fermé sont permutablees entre elles.

Cette propriété peut être établie d'une autre manière, en échangeant dans la formule (7) les variables ξ et η ; on tire alors l'équation fonctionnelle (36) du § 6 qui est caractéristique dans le cas de permutableité.

3. La résolution de l'équation (7) dans le cas général, d'après une méthode due à M. Pérés, se réduit à la résolution de l'équation intégrale linéaire suivante. En posant $y = a = \text{const.}$ dans (7) et puis en remplaçant $a + \eta$ par y , on forme l'équation intégrale de Volterra

$$\Phi(\xi; x, y) + \int_y^{x-\xi} \Phi(\xi; x, s) \alpha(s, y) ds = \alpha(x, y + \xi) - \alpha(x - \xi, y),$$

où la fonction introduite

$$(8) \quad \alpha(x, y) = \Phi(y - a; x, a).$$

La solution de l'équation précédente

$$(9) \quad \Phi(\xi; x, y) = \alpha(x, y + \xi) + \beta(x - \xi, y) + \int_y^{x-\xi} \alpha(x, s + \xi) \beta(s, y) ds$$

est exprimé par la résolvante

$$(10) \quad \beta(x, y) = -\alpha(x, y) + \check{\alpha}^2 - \check{\alpha}^3 + \dots$$

que jouit la propriété bien connue

$$(11) \quad \alpha + \beta + \check{\alpha} \check{\beta} = \alpha + \beta + \check{\beta} \check{\alpha}$$

ou sous forme symbolique

$$(11') \quad (\check{1}^0 + \check{\alpha}) (\check{1}^0 + \check{\beta}) = (\check{1}^0 + \check{\beta}) (\check{1}^0 + \check{\alpha}) = \check{1}^0.$$

Par la substitution de l'expression (9) de la fonction génératrice $\Phi(\xi; x, y)$ dans (2) on obtient la forme générale suivante des transformations de M. Pérés

$$\Omega(\lambda) = \lambda + \overset{*}{\alpha} \overset{*}{\lambda} + \overset{*}{\lambda} \overset{*}{\beta} + \overset{*}{\alpha} \overset{*}{\lambda} \overset{*}{\beta}$$

ou

$$(12) \quad \Omega(\lambda) = (\overset{*}{I}^0 + \overset{*}{\alpha}) \overset{*}{\lambda} (\overset{*}{I}^0 + \overset{*}{\beta}).$$

Cette forme indique immédiatement que les transformations conservent la composition. En effet, on a les relations

$$\begin{aligned} \overset{*}{\Omega}(\lambda) \overset{*}{\Omega}(\mu) &= (\overset{*}{I}^0 + \overset{*}{\alpha}) \overset{*}{\lambda} (\overset{*}{I}^0 + \overset{*}{\beta}) (\overset{*}{I}^0 + \overset{*}{\alpha}) \overset{*}{\mu} (\overset{*}{I}^0 + \overset{*}{\beta}) = \\ &= (\overset{*}{I}^0 + \overset{*}{\alpha}) \overset{*}{\lambda} \overset{*}{\mu} (\overset{*}{I}^0 + \overset{*}{\beta}) = \overset{*}{\Omega}(\overset{*}{\lambda} \overset{*}{\mu}), \end{aligned}$$

quelle que soit la fonction $\alpha(x, y)$, pourvu que la fonction $\beta(x, y)$ soit déterminée par (10).

Donc, toutes les transformations de M. Volterra (2) qui conservent la composition, c.-à-d. toutes les transformations de M. Pérès, peuvent être mises sous forme (12) où les fonctions $\alpha(x, y)$ et $\beta(x, y)$ sont liées par les relations (11) ou (11'), l'une de ces fonctions étant arbitraire.

L'équation fonctionnelle (7) admet la solution générale (9), contenant une fonction arbitraire, p. ex., $\alpha(x, y)$ et l'autre fonction $\beta(x, y)$, déterminée par (10).

4. Il est facile à établir la proposition suivante. On peut mettre la même fonction sous forme des transformations de M. Pérès (12) d'une infinité de manière: si dans une telle transformation α_0 et β_0 font une paire des fonctions, vérifiant les relations de forme (11')

$$(\overset{*}{I}^0 + \overset{*}{\alpha}_0) (\overset{*}{I}^0 + \overset{*}{\beta}_0) = (\overset{*}{I}^0 + \overset{*}{\beta}_0) (\overset{*}{I}^0 + \overset{*}{\alpha}_0) = \overset{*}{I}^0,$$

on obtient toutes les représentations par les formules

$$(13) \quad \alpha(x, y) = \alpha_0(x, y) + \gamma(x-y) + \overset{*}{\alpha}_0 \overset{*}{\gamma}$$

et

$$(13') \quad \beta(x, y) = \beta_0(x, y) + \delta(x-y) + \overset{*}{\delta} \overset{*}{\beta}_0,$$

où les fonctions $\gamma(x-y)$ et $\delta(x-y)$ du groupe du cycle fermé sont liées par les relations

$$(14) \quad \gamma(x-y) + \delta(x-y) + \overset{*}{\gamma} \overset{*}{\delta} = \gamma(x-y) + \delta(x-y) + \overset{*}{\delta} \overset{*}{\gamma},$$

l'une de ces fonctions étant arbitraire.

La fonction arbitraire, p. ex., $\gamma(x-y)$ est fixée d'une façon univoque, si l'on remet la fonction $\alpha(x, y)$ pour $y = a = \text{const.}$ à la condition

$$\alpha(x, a) = 0.$$

En effet, on tire de cette condition l'équation intégrale

$$\gamma(x) + \int_0^x \alpha_0(x+a, s+a) \gamma(s) ds = -\alpha_0(x+a, a) \quad (12)$$

dont la solution unique est

$$\gamma(x) = -\alpha_0(x+a, a) - \int_0^x \beta_0(x+a, a+s) \alpha_0(s+a, a) ds.$$

Avec telle fonction $\gamma(x-y)$ la formule (10) entraîne

$$\beta(x, a) = 0.$$

On tire de (9) la relation connue

$$(8) \quad \Phi(y-a; x, a) = \alpha(x, y).$$

5. La seconde méthode, due à M. Pèrès²⁹ pour la résolution de l'équation fonctionnelle (7), est valable s'il existe dans le domaine (A')

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \Phi(\xi; x, y).$$

Par l'introduction d'une fonction auxiliaire

$$(15) \quad \Psi(\xi; x, y) = \Phi(\xi; x + \xi, y)$$

dans (7) on obtient l'équation

$$\begin{aligned} \Psi(\xi + \eta; x - \eta, y - \eta) &= \Psi(\xi; x, y) + \Phi(\eta; x, y - \eta) + \\ &+ \int_y^x \Psi(\xi; x, s) \Phi(\eta; s, y - \eta) ds, \end{aligned} \quad (11)$$

d'où, en dérivant par rapport à ξ et en posant $\xi = 0$, l'équation intégral-différentielle

$$(16) \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \Psi(\eta; x, y) = g(x + \eta, y + \eta) + \int_y^x g(x + \eta, t + \eta) \Psi(\eta; t, y) dt$$

avec la fonction

$$(17) \quad g(x, y) = \left[\frac{\partial \Psi(\xi; x, y)}{\partial \xi} \right]_{\xi=0}.$$

Puisque (7) entraîne, pour $\xi = \eta = 0$, la valeur

$$\Phi(0; x, y) = \Psi(0; x, y) = 0$$

²⁹ J. Pèrès [13]. Dans ce cas les transformations sont dites régulières, c. f. Volterra-Pèrès [28, chap. IV].

on tire l'équation intégrale

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \Psi(\eta; x, y) &= \int_0^\eta g(x + \eta_1, y + \eta_1) d\eta_1 + \\ &+ \int_0^\eta d\eta_1 \int_y^x g(x + \eta_1, s + \eta_1) \Psi(\eta_1; s, y) ds, \end{aligned} \right.$$

équivalente à la précédente (16).

Nous allons démontrer le théorème d'unicité suivant.

L'équation intégrale (18), où g est une fonction continue quelconque, admet au plus une solution $\Psi(\eta; x, y)$, continue dans le domaine tel que

$$(A) \quad a \leq y \leq x \leq b, \quad 0 \leq \eta \leq x - y.$$

Dans le cas contraire soit $\Psi_0(\eta; x, y)$ une autre solution continue de (18). La différence

$$\bar{\Psi}(\eta; x, y) = \Psi(\eta; x, y) - \Psi_0(\eta; x, y)$$

satisfait à l'équation intégrale homogène

$$(19) \quad \bar{\Psi}(\eta; x, y) = \int_0^\eta d\eta_1 \int_y^x g(x + \eta_1, s + \eta_1) \bar{\Psi}(\eta_1; s, y) ds.$$

En nommant les modules des bornes supérieures

$$|g(x, y)| < M, \quad |\bar{\Psi}(\eta; x, y)| < \mu$$

et en évaluant n fois le second membre de (19) on tire l'inégalité

$$|\bar{\Psi}(\eta; x, y)| < M^n \cdot \mu^n \cdot \frac{\eta^n}{n!} \cdot \frac{(x-y)^n}{n!},$$

d'où, en faisant $n \rightarrow \infty$,

$$\bar{\Psi}(\eta; x, y) = 0.$$

Donc on a bien égalité des solutions admises

$$\Psi(\eta; x, y) \equiv \Psi_0(\eta; x, y).$$

La solution effective de (18) peut être obtenue par la méthode des approximations successives, en mettant la sous forme d'une série infinie

$$\Psi(\eta; x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(\eta; x, y)$$

dont les termes successives se calculent par

$$\Psi_n(\eta; x, y) = \int_0^\eta d\eta_1 \int_0^{\eta_1} d\eta_2 \dots \int_0^{\eta_{n-1}} d\eta_n g_{\eta_1}^* g_{\eta_2}^* \dots g_{\eta_n}^*(x, y) \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

où

$$g_\eta(x, y) = g(x + \eta, y + \eta),$$

La convergence absolue et uniforme, dans le domaine (A'), de la série précédente est assurée par les inégalités

$$|\Psi_n(\eta; x, y)| < M^n \cdot \frac{\eta^n}{n!} \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (18)$$

En vertu de la relation (15) on établit la solution générale de (7) sous forme

$$(20) \quad \Phi(\xi; x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\xi} d\eta_1 \int_0^{\eta_1} d\eta_2 \dots \int_0^{\eta_{n-1}} d\eta_n g_{\eta_1}^* g_{\eta_2}^* \dots g_{\eta_n}^* (x - \xi, y),$$

en regardant $g(x, y)$ comme une fonction arbitraire.

Si l'on remplace x par $x - \eta$ et η par ξ dans les équations (16) et (18), on tire les équations équivalentes

$$(21) \quad \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \Phi(\xi; x, y) = g(x, y + \xi) + \int_{y+\xi}^x g(x, s) \Phi(\xi; s, y) ds$$

et

$$(22) \quad \begin{cases} \Phi(\xi; x, y) = \int_0^{\xi} g(x - \xi + \eta, y + \eta) d\eta + \\ + \int_0^{\xi} d\eta \int_y^{x-\xi} g(x - \xi + \eta, s + \eta) \Phi(\eta; s + \eta, y) ds \end{cases}$$

qui caractérisent la fonction génératrice $\Phi(\xi; x, y)$ des transformations de M. Pérés régulières.

6. En posant $y = a = \text{const.}$ dans (21) et en remplaçant ξ par $y - a$ on établit la relation

$$(23) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \alpha(x, y) = g(x, y) + \int_y^x g(x, s) \alpha(s, y) ds$$

qui existe entre les deux fonctions (8) et (17), introduites dans les deux méthodes de résolution précédentes.

Par rapport à l'inconnu $g(x, y)$ et avec les fonctions données

$$\alpha(x, y), \quad \alpha'(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \alpha(x, y)$$

la relation (23) représente une équation intégrale de Volterra de seconde espèce, dont la solution unique est exprimée par

$$(24) \quad g(x, y) = \alpha'(x, y) + \int_y^x \alpha'(x, s) \beta(s, y) ds$$

avec la résolvante (10).

Si l'on regarde $\alpha(x, y)$ pour l'inconnu, mais $g(x, y)$ pour la fonction donnée, on a une équation intégral-différentielle (23), dont la solution particulière, d'après (20), est

$$(25) \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0(x, y) = \Phi(y - a; x, a) = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{y-a} d\eta_1 \int_0^{\eta_1} d\eta_2 \dots \int_0^{\eta_{n-1}} d\eta_n \cdot g_{\eta_1}^* g_{\eta_2}^* \dots g_{\eta_n}^* (x - y + a, a) \end{array} \right.$$

et dont la solution générale (13) contient une fonction arbitraire $\gamma(x - y)$.

§ 10. Détermination des fonctions permutable par les transformations de M. Pérés et les propriétés du groupe de ces fonctions.

1. Pour déterminer toutes les fonctions $\varphi(x, y)$, permutable avec une fonction donnée $f(x, y)$ d'ordre entier positif n et de forme canonique, nous cherchons les fonctions $\alpha(x, y)$ et $\beta(x, y)$ telles que $f(x, y)$ soit représentée par la transformation de M. Pérés

$$(1) \quad f(x, y) = \Omega(\hat{1}^n) = (\hat{1}^0 + \hat{\alpha}) \hat{1}^n (\hat{1}^0 + \hat{\beta}).$$

Si l'on connaît $\alpha(x, y)$ et $\beta(x, y)$ on peut mettre $f(x, y)$ sous forme d'une transformation de M. Volterra

$$(2) \quad f(x, y) = \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} + \int_0^{x-y} \frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!} \Phi(\xi; x, y) d\xi$$

où la fonction génératrice $\Phi(\xi; x, y)$ est formée (§ 9, $n^0 3$) à partir de $\alpha(x, y)$ et $\beta(x, y)$ de la façon suivante

$$(3) \quad \Phi(\xi; x, y) = \alpha(x, y + \xi) + \beta(x - \xi, y) + \int_y^{x-\xi} \alpha(x, s + \xi) \beta(s, y) ds.$$

Nous allons étudier d'abord le cas où $f(x, y)$ est du type spécial

$$(4) \quad f(x, y) = \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} + (x-y)^{2n} \omega(x, y),$$

$\omega(x, y)$ étant une fonction continue, dérivable jusqu'à l'ordre $2n$. Il est connu (§ 4, $n^0 4$) que dans ce cas la fonction $f(x, y)$ peut être représentée par la série convergente

$$(5) \quad f(x, y) = \hat{1}^n - \hat{1}^n \hat{F}^* \hat{1}^n + \hat{1}^n \hat{F}^* \hat{1}^n \hat{F}^* \hat{1}^n - \dots,$$

où la fonction $F(x, y)$ est exprimée par une autre série convergente

$$(6) \quad F(x, y) = H(x, y) + \hat{H} \hat{1}^n \hat{H} + \hat{H} \hat{1}^n \hat{H} \hat{1}^n \hat{H} + \dots \left[H = (-1)^{n-1} \frac{\partial^{2n} f}{\partial x^n \partial y^n} \right].$$

La série (5) est le développement commun de deux expressions symboliques

$$(7) \quad f(x, y) = (\mathfrak{I}^0 + \mathfrak{I}^n \mathfrak{F}^*)^{-1} \mathfrak{I}^n$$

et

$$(7') \quad f(x, y) = \mathfrak{I}^n (\mathfrak{I}^0 + \mathfrak{F}^* \mathfrak{I}^n)^{-1}.$$

Pour former l'équation à qui satisfait la fonction $\alpha(x, y)$, on compose à droite avec $\mathfrak{I}^0 + \alpha$ tous les membres de (1). En vertu des relations

$$(8) \quad (\mathfrak{I}^0 + \alpha^*) (\mathfrak{I}^0 + \beta^*) = (\mathfrak{I}^0 + \beta^*) (\mathfrak{I}^0 + \alpha^*) = \mathfrak{I}^0$$

on obtient

$$f^* (\mathfrak{I}^0 + \alpha^*) = (\mathfrak{I}^0 + \alpha^*) \mathfrak{I}^n.$$

Par la substitution de (7), suivie d'une composition à gauche avec

$$\mathfrak{I}^0 + \mathfrak{I}^n \mathfrak{F}^*,$$

on tire de l'équation précédente une relation

$$\mathfrak{I}^n \alpha^* - \alpha^* \mathfrak{I}^n = \mathfrak{I}^n (\mathfrak{F}^* + \mathfrak{F}^* \alpha^*) \mathfrak{I}^n$$

que l'on peut mettre sous forme symbolique

$$\mathfrak{I}^{-n} \alpha^* - \alpha^* \mathfrak{I}^{-n} = -F - \mathfrak{F}^* \alpha^*.$$

Celle-ci s'écrit explicitement par une équation intégrodifférentielle

$$(9) \quad \frac{\partial^n \alpha}{\partial x^n} - (-1)^n \frac{\partial^n \alpha}{\partial y^n} = -F(x, y) - \int_y^x F(x, s) \alpha(s, y) ds$$

qu'il faut résoudre en $\alpha(x, y)$.

De la même façon, par la composition à gauche avec $\mathfrak{I}^0 + \beta^*$ et par la substitution de l'expression (7') on trouve l'équation

$$\beta^* \mathfrak{I}^n - \mathfrak{I}^n \beta^* = \mathfrak{I}^n (\mathfrak{F}^* + \beta^* \mathfrak{F}^*) \mathfrak{I}^n,$$

équivalente à la forme symbolique

$$\mathfrak{I}^{-n} \beta^* - \beta^* \mathfrak{I}^{-n} = F + \beta^* \mathfrak{F}^*$$

ou à l'équation intégrodifférentielle analogue

$$(9') \quad \frac{\partial^n \beta}{\partial x^n} - (-1)^n \frac{\partial^n \beta}{\partial y^n} = F(x, y) + \int_y^x \beta(x, s) F(s, y) ds$$

pour déterminer $\beta(x, y)$.

Si l'on a résolu, par exemple, l'équation (9) en $\alpha(x, y)$ on peut former directement, d'après les relations (8), la fonction

$$\beta(x, y) = -\alpha(x, y) + \alpha^2 - \alpha^3 + \dots$$

et la fonction génératrice $\Phi(\xi; x, y)$ des transformations (2) au moyen de l'expression (3).

Les équations (9) et (9') généralisent celles que M. Pérés³⁰ a établies pour la fonction $f(x, y)$ du premier ordre. Dans ce cas ($n=1$) l'équation (9) se réduit à l'équation (23) du § 9, si l'on prend

$$g(x, y) = -F(x, y).$$

Pour que la fonction

$$(10) \quad \varphi(x, y) = \Omega(\lambda) = (\mathbb{1}^0 + \alpha) \lambda (\mathbb{1}^0 + \beta)$$

soit permutable avec la fonction donnée (1) il est nécessaire et suffisant que

$$\lambda \mathbb{1}^n = \mathbb{1}^n \lambda.$$

Cette condition entraîne (§ 5, n° 3) la forme

$$\lambda(x, y) = \lambda(x - y).$$

Donc, en prenant une fonction arbitraire $\lambda(x - y)$ du groupe du cycle fermé, on construit toutes les fonctions (10) permutable avec une fonction d'ordre n et du type spécial (4).

Les fonctions (10) jouissent la propriété du groupe remarquable: les fonctions $\varphi(x, y)$, permutable avec une fonction donnée $f(x, y)$ d'ordre n et du type spécial (4), sont permutable entre elles.

En effet, les fonctions $\lambda(x - y)$ sont permutable entre elles, et les transformations de M. Pérés sont isomorphes (§ 9).

La propriété du groupe énoncé dans le cas $n=1$ est établie pour la première fois par M. Vessiot²¹.

2. En généralisant l'autre méthode, due à M. Pérés³¹ dans le cas d'une fonction donnée du premier ordre, cherchons la fonction inconnue $g(x, y)$ dans l'expression de la fonction génératrice (§ 9)

$$(11) \quad \Phi(\xi; x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\xi} d\eta_1 \int_0^{\eta_1} d\eta_2 \dots \int_0^{\eta_{n-1}} d\eta_n g_{\eta_1} g_{\eta_2} \dots g_{\eta_n}(x - \xi, y)$$

où

$$g_{\eta}(x, y) = g(x + \eta, y + \eta).$$

³⁰ C. f. *Volterra-Pérés* [28, pages 72 et 75].

³¹ *J. Pérés* [13] et *Volterra-Pérés* [28, page 65].

Pour cela il est préférable d'employer l'équation intégrale correspondante

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi(\xi; x, y) &= \int_0^{\xi} g(x - \xi + \eta, y + \eta) d\eta + \\ &+ \int_0^{\xi} d\eta \int_y^{x-\xi} g(x - \xi + \eta, s + \eta) \Phi(\eta; s + \eta, y) ds \end{aligned} \right.$$

et de mettre la fonction (2) sous forme

$$(13) \quad f(x, y) = \mathfrak{I}^n + k_n(x, y)$$

avec la fonction auxiliaire

$$(14) \quad k_n(x, y) = \int_0^{x-y} \frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!} \Phi(\xi; x, y) d\xi.$$

Par la substitution de l'expression (12) dans la formule précédente on trouve

$$k_n(x, y) = I_1 + I_2,$$

où l'on a nommé

$$I_1 = \int_0^{x-y} \frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!} d\xi \int_0^{\xi} g(x - \xi + \eta, y + \eta) d\eta$$

et

$$I_2 = \int_0^{x-y} \frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!} d\xi \int_0^{\xi} d\eta \int_y^{x-\xi} g(x - \xi + \eta, s + \eta) \Phi(\eta; s + \eta, y) ds.$$

Après avoir échangé l'ordre de l'intégration dans la première expression, faisons le changement des variables

$$x - \xi + \eta = s, \quad y + \eta = t.$$

Il vient

$$I_1 = \int_y^x dt \int_t^x g(s, t) \frac{(x-s+t-y)^{n-1}}{(n-1)!} ds,$$

d'où

$$I_1 = \mathfrak{I}^n \mathfrak{g} \mathfrak{I} + \mathfrak{I}^{n-1} \mathfrak{g} \mathfrak{I}^2 + \dots + \mathfrak{I} \mathfrak{g} \mathfrak{I}^n$$

en utilisant la formule du binôme

$$\frac{(x-s+t-y)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(x-s)^{n-2}}{(n-2)!} (t-y) + \dots + \frac{(t-y)^{n-1}}{(n-1)!}$$

et les puissances entières de composition de l'unité.

Par les calculs analogues on trouve

$$I_2 = \mathfrak{I}^n \mathfrak{g} \mathfrak{k}_1 + \mathfrak{I}^{n-1} \mathfrak{g} \mathfrak{k}_2 + \dots + \mathfrak{I} \mathfrak{g} \mathfrak{k}_n$$

où l'on a posé

$$k_p(x, y) = \int_0^{x-y} \frac{\xi^{p-1}}{(p-1)!} \Phi(\xi; x, y) d\xi \quad (p = 1, 2, \dots, n).$$

Donc, on a d'après (13), la relation

$$(15) \quad f_n = \dot{1}^n + \dot{1}^n \dot{g}^* \dot{f}_1^* + \dot{1}^{n-1} \dot{g}^* \dot{f}_2^* + \dots + \dot{1} \dot{g}^* \dot{f}_n^*$$

en posant

$$(16) \quad f_p(x, y) = \frac{(x-y)^{p-1}}{(p-1)!} + \int_0^{x-y} \frac{\xi^{p-1}}{(p-1)!} \Phi(\xi; x, y) d\xi \quad (p = 1, 2, \dots, n)$$

et en admettant pour la symmétrie

$$f_n(x, y) = f(x, y).$$

Puisque les fonctions introduites peuvent être mises sous forme des transformations de M. Pèrès

$$f_1(x, y) = \Omega(1), \quad f_2(x, y) = \Omega(\dot{1}^2), \dots, \quad f_n(x, y) = \Omega(\dot{1}^n),$$

il existe les relations suivantes

$$f_2(x, y) = \dot{f}_1^2, \dots, \quad f_n(x, y) = \dot{f}_1^n.$$

En vertu du cela, on obtient de (15) l'équation

$$(17) \quad \dot{1}^n \dot{g}^* \dot{f}_1^* + \dot{1}^{n-1} \dot{g}^* \dot{f}_1^{*2} + \dots + \dot{1} \dot{g}^* \dot{f}_1^{*n} = \dot{f}_1^n - \dot{1}^n$$

qui lie la fonction inconnue $g(x, y)$ avec la fonction

$$(18) \quad f_1(x, y) = \Omega(1) = 1 + \int_0^{x-y} \Phi(\xi; x, y) d\xi.$$

La relation

$$\dot{f}_1^n = f(x, y)$$

indique que la fonction (18) est une solution particulière de l'équation intégrale binome de composition

$$(19) \quad \dot{\psi}^n = f(x, y)$$

dont la diagonale

$$\psi(x, x) = f_1(x, x) = 1.$$

Donc, dans le cas général d'une fonction donnée $f(x, y)$ d'ordre $n > 1$ et de forme canonique le problème fondamental d'après la méthode précédente se réduit à la résolution de l'équation intégrale binome de composition (19) et d'une autre équation intégrale du type spécial (17).

Dans le cas particulier où $f(x, y)$ est du premier ordre ($n=1$) et de forme canonique on a seulement besoin de résoudre l'équation intégrale

$$\dot{1} g^* \dot{1} = f - 1$$

que l'on peut mettre sous forme

$$\dot{1} g^* (\dot{1}^0 - \dot{1} \dot{H}^* \dot{1}) \dot{1} = - \dot{1} \dot{H}^* \dot{1}$$

en exprimant

$$f(x, y) = 1 - \dot{1} \dot{H}^* \dot{1} \quad \left(H = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right).$$

Par la dérivation par rapport à x et y on obtient l'équation équivalente

$$g^* (\dot{1}^0 - \dot{1} \dot{H}^* \dot{1}) = -H,$$

d'où la solution

$$g(x, y) = -\dot{H} (\dot{1}^0 - \dot{1} \dot{H}^* \dot{1})^{-1} = -[H(x, y) + \dot{H} \dot{1} \dot{H}^* + \dot{H} \dot{1} \dot{H}^* \dot{1} \dot{H}^* + \dots],$$

la série étant absolument et uniformément convergente dans le domaine de définition.

En comparant l'expression obtenue avec (6), on constate la relation

$$g(x, y) = -F(x, y).$$

Nous retrouvons le résultat suivant, dû à M. Pérès: Toutes les fonctions $\varphi(x, y)$, permutable avec une fonction donnée $f(x, y)$, du premier ordre et de forme canonique, peuvent être représentées par les transformations de M. Pérès

$$(20) \quad \varphi(x, y) = \Omega(\lambda) = \lambda(x - y) + \int_0^{x-y} \lambda(\xi) \Phi(\xi; x, y) d\xi$$

dont la fonction génératrice (le noyau) est donnée par la série convergente

$$(21) \quad \Phi(\xi; x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\xi} d\eta_1 \int_0^{\eta_1} d\eta_2 \dots \int_0^{\eta_{n-1}} d\eta_n \dot{F}_{\eta_1}^* \dot{F}_{\eta_2}^* \dots \dot{F}_{\eta_n}^* (x - \xi, y)$$

où

$$F(x, y) = H(x, y) + \dot{H} \dot{1} \dot{H}^* + \dot{H} \dot{1} \dot{H}^* \dot{1} \dot{H}^* + \dots \left[H = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right]$$

et

$$F_{\eta}(x, y) = F(x + \eta, y + \eta).$$

3. La solution quelconque $\psi(x, y)$ de l'équation intégrale (19) est dite la puissance fractionnaire de composition:

$$\psi(x, y) = f^{\frac{1}{n}}.$$

Si $f(x, y)$ est d'ordre entier positif n , la fonction $\psi(x, y)$ est nécessairement (§ 2) du premier ordre.

L'équation intégrale (19) peut être résolue toutes les fois qu'on a la représentation par les transformations de M. Pérés (1) ou (2), par exemple, pour la fonction $f(x, y)$ du type spécial (4). Par emploi des propriétés des transformations Ω qui conservent la composition on peut exprimer $\psi(x, y)$ par

$$(22) \quad \psi(x, y) = f^{\frac{1}{n}} = \varepsilon \Omega(1)$$

avec ε qui représente la racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité:

$$\varepsilon^n = 1.$$

Ici la solution particulière

$$\Omega(1) = (1^0 + \alpha^* 1^1) (1^0 + \beta^*)$$

ou

$$\Omega(1) = 1 + \int_0^{x-y} \Phi(\xi; x, y) d\xi$$

est formée avec les fonctions $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ et $\Phi(\xi; x, y)$, tirées de (1) et (2).

Aux diverses déterminations de ε correspondent n solutions distinctes de l'équation (19) ou du symbole $f^{\frac{1}{n}}$. La diagonale de la fonction (22) est constante et égale à ε :

$$\psi(x, x) = \varepsilon.$$

M. Volterra³² a posé la question suivante: les fonctions permutable avec une fonction donnée $f(x, y)$, sont-elles aussi permutable avec la puissance fractionnaire $f^{\frac{1}{n}}$ de composition? Il est évident que dans le cas mentionné précédemment la réponse doit être affirmative.

³² Volterra [29]. Cette même question est traitée dans mon travail [8, § 3].

Conclusions.

1. Dans le cas général d'une fonction $f(x, y)$ d'ordre entier positif n et de forme canonique on peut exprimer le symbole $\overset{*}{f}^{-1}$ d'inversion de la composition par les formules

$$(1) \quad \overset{*}{f}^{-1} = \overset{*}{I}^{-n} + a_2(x) \overset{*}{I}^{-n+2} + \dots + a_n(x) \overset{*}{I}^0 + F(x, y)$$

et

$$(1') \quad \overset{*}{f}^{-1} = \overset{*}{I}^{-n} + b_2(y) \overset{*}{I}^{-n+2} + \dots + b_n(y) \overset{*}{I}^0 + F(x, y),$$

où les fonctions

$$(2) \quad a_2(x), \dots, a_n(x); \quad b_2(y), \dots, b_n(y); \quad F(x, y)$$

sont déterminées par emploi de la fonction $f(x, y)$ et de ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre $2n$.

Pour le type spécial

$$(3) \quad f(x, y) = \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} + (x-y)^{2n} \omega(x, y)$$

il existe l'expression commune

$$(4) \quad \overset{*}{f}^{-1} = \overset{*}{I}^{-n} + F(x, y),$$

où la fonction $F(x, y)$ est représentée par la série

$$(5) \quad F(x, y) = H(x, y) + \overset{*}{H} \overset{*}{I}^n \overset{*}{H} + \overset{*}{H} \overset{*}{I}^n \overset{*}{H} \overset{*}{I}^n \overset{*}{H} + \dots \left[H = (-1)^{n-1} \frac{\partial^{2n} f}{\partial x^n \partial y^n} \right]$$

absolument et uniformément convergente.

2. Toutes les fonctions continues $\varphi(x, y)$ permutables avec la fonction

$$(6) \quad f(x, y) = g(x) h(y) \quad [g(x) \neq 0, \quad h(x) \neq 0]$$

du premier ordre ou avec la fonction

$$(6') \quad f(x, y) = g(x) h(y) \frac{[l(x) - l(y)]^{n-1}}{(n-1)!}$$

d'ordre supérieur sont représentées par

$$(7) \quad \varphi(x, y) = g(x) h(y) \Theta[l(x) - l(y)],$$

où Θ est une fonction arbitraire et $l(x)$ est donnée par

$$(8) \quad l(x) = \int g(x) h(x) dx.$$

3. En le cas d'une fonction donnée $f(x, y)$ de premier et de second ordre on peut réduire le problème fondamental [trouver toutes les fonctions $\varphi(x, y)$ permutables avec $f(x, y)$] par l'introduction d'une inconnue auxiliaire

$$(9) \quad \psi(x, y) = \int_y^x \varphi(x, s) f(s, y) ds = \int_y^x f(x, s) \varphi(s, y) ds$$

et son expression

$$(10) \quad \psi(x, y) = \int_y^x \lambda(\xi) K(\xi; x, y) d\xi \quad [\lambda = \lambda(x-y)]$$

à la résolution de l'équation intégrale qui caractérise la fonction $K(\xi; x, y)$. L'équation intégrale mentionnée admet, à des conditions convenables, une solution continue et une seule.

4. Toutes les fonctions continues $\varphi(x, y)$ permutables avec une fonction $f(x, y)$ du second ordre peuvent être exprimées par la formule

$$(11) \quad \varphi(x, y) = \lambda(x-y) + \int_0^{x-y} \lambda(\xi) \Phi(\xi; x, y) d\xi,$$

due à M. *Volterra*, en désignant par $\lambda(x-y)$ une fonction arbitraire du groupe du cycle fermé et en formant le noyau (ou la fonction génératrice) $\Phi(\xi; x, y)$ à partir de la fonction donnée $f(x, y)$. Toutes les propriétés des fonctions $\varphi(x, y)$ qui reposent sur la formule (11) sont les mêmes que celles des fonctions permutables avec une fonction du premier ordre.

5. On peut réduire le problème fondamental dans le cas général d'une fonction donnée $f(x, y)$ d'ordre n et de forme canonique à la résolution d'une équation intégrale en partant de l'équation symbolique

$$(12) \quad \check{f}^{-1} \check{\psi} - \check{\psi} \check{f}^{-1} = 0$$

qui est vérifiée par les fonctions (9).

L'équation symbolique du type (12), ainsi que sa forme explicite par une équation intégral-différentielle, caractérise aussi les fonctions $\varphi(x, y)$ permutables avec $f(x, y)$.

Dans le cas particulier où $f(x, y)$ est une fonction du groupe du cycle fermé, les fonctions $\varphi(x, y)$ appartiennent au même groupe.

6. En se servant des transformations

$$(13) \quad \Omega(\lambda) = (\check{1}^0 + \check{\alpha}) \check{\lambda} (\check{1}^0 + \check{\beta}) \quad [(\check{1}^0 + \check{\alpha})(\check{1}^0 + \check{\beta}) = (\check{1}^0 + \check{\beta})(\check{1}^0 + \check{\alpha}) = \check{1}^0]$$

de *M. Pérès* on peut réduire le problème fondamental dans le cas particulier d'une fonction donnée

$$(14) \quad f(x, y) = \Omega(\mathbb{1}^n)$$

sous forme (3) à la résolution des équations intégréo-différentielles

$$(15) \quad \frac{\partial^n \alpha}{\partial x^n} - (-1)^n \frac{\partial^n \alpha}{\partial y^n} = -F(x, y) - \int_y^x F(x, s) \alpha(s, y) ds,$$

ou

$$(15') \quad \frac{\partial^n \beta}{\partial x^n} - (-1)^n \frac{\partial^n \beta}{\partial y^n} = F(x, y) + \int_y^x \beta(x, s) F(s, y) ds,$$

où $F(x, y)$ est la fonction (5).

7. En généralisant une méthode de *M. Pérès*, on peut réduire le problème fondamental dans le cas général d'une fonction donnée $f(x, y)$ d'ordre n ($n > 1$) et de forme canonique à la résolution d'une équation intégrale binôme

$$(16) \quad \psi^n = f(x, y)$$

de composition et d'une équation intégrale du type spécial

$$(17) \quad \mathbb{1}^n g f_1 + \mathbb{1}^{n-1} g f_1^2 + \dots + \mathbb{1} g f_1^n = f_1^n - \mathbb{1}^n$$

où les inconnues sont respectivement $\psi(x, y)$, $g(x, y)$ et où $f_1(x, y)$ est la solution particulière de (16) telle que la diagonale $f_1(x, x) = 1$.

8. Toutes les fois qu'on peut représenter la fonction $f(x, y)$ d'ordre n et de forme canonique par la transformation (14) de *M. Pérès* les fonctions permutable avec $f(x, y)$ sont aussi permutable avec la puissance fractionnaire $f^{\frac{1}{n}}$ de composition.

Permutablu funkciju teorijas pamatproblēma.

A. Lūsis.

Slēdzieni.³³

1. Vispārīgajā gadījumā, kad $f(x, y)$ ir n -kārtas (n —vesels pozitīvs skaitlis) un kanoniskās formas funkcija, kompozīcijas inversijas simbolu f^{-1} noteic ar formulām (1) un (1'), kurās funkcijas (2) ir aprēķināmas ar doto funkciju $f(x, y)$ un tās parciāliem atvasinājumiem līdz kārtai $2n$.

Speciālā veida funkcijai (3) der simbola f^{-1} kopīga izteiksme (4), kurā funkciju $F(x, y)$ noteic ar absolūti un vienmērīgi savirzāmu rindu (5).

2. Visas nepārtrauktas funkcijas $\varphi(x, y)$, kas permutablas ar pirmās kārtas funkciju (6) vai ar augstākās kārtas funkciju (6'), ir aprēķināmas pēc formulas (7), kurā Θ apzīmē patvaļīgu funkciju un $l(x)$ —funkciju (8).

3. Gadījumos, kad $f(x, y)$ ir dotā pirmās vai otrās kārtas un kanoniskās formas funkcija, pamatproblēmu [noteikt visas funkcijas $\varphi(x, y)$, kas permutablas ar $f(x, y)$] var reducēt uz funkcijas $K(\xi; x, y)$ raksturīgā integrālvienādojuma atrisināšanu, lietojot jaunās nezināmās funkcijas (9) izteiksmi (10).

Minētajam integrālvienādojumam ar vajadzīgiem nosacījumiem eksistē viens vienīgs nepārtraukts atrisinājums.

4. Visas nepārtrauktās funkcijas $\varphi(x, y)$, kas permutablas ar doto otrās kārtas un kanoniskās formas funkciju $f(x, y)$, ir aprēķināmas pēc *Volterra* formulas (11), kurā $\lambda(x - y)$ ir patvaļīga noslēgta cikla grupas funkcija un kodols (jeb veidotājas funkcija) $\Phi(\xi; x, y)$ sastādāms no dotās funkcijas $f(x, y)$. Visas funkciju $\varphi(x, y)$ īpašības, kas pamatojas uz formulu (11), ir tādas pat kā funkcijām, kas permutablas ar pirmās kārtas funkciju.

5. Vispārīgajā gadījumā, kad $f(x, y)$ ir dotā n -kārtas un kanoniskās formas funkcija, pamatproblēmu var reducēt uz integrālvienādojuma atrisināšanu, lietojot funkcijas (9) simbolisko pamatvienādojumu (12).

³³ Te minētās formulas un izteiksmes sk. franču tekstā.

Simboliskā vienādojuma tips (12) un tā atklātais veids ar integrodiferenciālo vienādojumu ir raksturīgs arī funkcijām $\varphi(x, y)$, kas permutablas ar $f(x, y)$.

Speciālajā gadījumā, kad $f(x, y)$ ir noslēgta cikla grupas funkcija, arī $\varphi(x, y)$ pieder šai grupai.

6. Gadījumā, kad dotai funkcijai (14) ir speciāls veids (3), pamatproblēmu ar *Pérès* transformācijām (13) reducē uz integrodiferenciālā vienādojuma (15) vai (15') atrisināšanu, ja $F(x, y)$ apzīmē funkciju (5).

7. Vispārīgajā gadījumā, kad $f(x, y)$ ir n kārtas ($n > 1$) un kanoniskās formas funkcija, pamatproblēma pēc vispārinātās *Pérès* metodes reducējama uz kompozīcijas binomālā integrālvienādojuma (16) un īpatnējā integrālvienādojuma (17) atrisināšanu, ja par nezināmo funkciju uzskata $\psi(x, y)$, resp. $g(x, y)$ un ar $f_1(x, y)$ apzīmē vienādojuma (16) partikulāro atrisinājumu, kam diagonāle $f_1(x, x) = 1$.

8. Visos gadījumos, kad n kārtas un kanoniskās formas funkciju $f(x, y)$ var attēlot ar *Pérès* transformāciju (14), funkcijas, kas permutablas ar $f(x, y)$, ir arī permutablas ar tās kompozīcijas pakāpi $f^{*1/n}$.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.
LITERĀTŪRAS SARAKSTS.

1. Bompiani (E.) — Sopra le funzioni permutabili. (*Rend. Ac. Lincei*, vol. XIX, ser. 5a, 1910).
2. Davis (H. T.) — The present status of integral equations. (*Indiana Univ. Stud.*, n^o 70, 1926).
3. Evans (G. C.) — Sopra algebra delle funzioni permutabili. (*Mem. Ac. Lincei*, vol. VIII, serie 5a, 1911).
4. Evans (G. C.) — L'algebra delle funzioni permutabili e non permutabili. (*Rend. Circ. Mat. Palermo*, vol. XXXIV, 1912).
5. Evans (G. C.) — Theory and application of functionals, including integral equations (*Amer. Math. Soc.*, Cambridge Colloquium, 1918).
6. Hellinger (E.), Toeplitz (O.) — Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten (*Enzykl. der Math. Wiss.*, Bd. II C 13).
7. Lalesco (T.) — Introduction à la théorie des équations intégrales (Paris, 1912).
8. Lūsis (A.) — Permutablas funkcijas un Volterra integrālvienādojums (Sur les fonctions permutables et l'équation intégrale de Volterra, *Acta Univ. Latviensis*, t. XVII, 1927).
9. Lūsis (A.) — Sur la recherche des fonctions permutables de 1-ⁱère espèce avec une fonction donnée. (*Rend. Ac. Lincei*, vol. XI, serie 6a, 1930).
10. Lūsis (A.) — Sur la recherche des fonctions permutables de première espèce. (*Annales Fac. Sc. Toulouse*, t. XXII, 1930).
11. Pérès (J.) — Sur les fonctions permutables de première espèce de M. Vito Volterra. (*Thèse, Journ. de Math.*, 7-ⁱème série, vol. I, 1915).
12. Pérès (J.) — Sur la composition de 1-ⁱère espèce: les fonctions d'ordre quelconque et leur composition (2 notes). (*Rend. Ac. Lincei*, vol. XXVI, série 5a, 1917).
13. Pérès (J.) — Sur certaines transformations fonctionnelles et leur application à la théorie des fonctions permutables. (*Ann. École Normale supér.*, vol. XXXVI, 1919).
14. Pérès (J.) — Sur les transformations qui conservent la composition. (*Bull. Soc. Math. France*, vol. XLVII, 1919).
15. Pérès (J.) — Sulla teoria delle funzioni permutabili. (*Rend. Seminario Mat., Roma*, vol. VI, 1920).
16. Pérès (J.) — Quelques complements sur les transformations qui conservent la composition. (*Rend. Ac. Lincei*, série 5a, vol. XXXIII, 1924).
17. Soula (J.) — L'équation intégrale de première espèce à limites fixes et les fonctions permutables à limites fixes. (*Mémorial des Sc. Math.*, fasc. LXXX, 1936).

18. Vessiot (E.) — Sur les groupes fonctionnels et les équations intégral-différentielles linéaires. (*C. R. Acad. Sc., Paris*, Vol. 154, 1912).
19. Vessiot (E.) — Sur les fonctions permutable et les groupes continus de transformations fonctionnelles linéaires. (*C. R. Acad. Sc., Paris*, vol. 154, 1912).
20. Volterra (V.) — Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali. (*Rend. Ac. Lincei*, 5a serie, vol. XIX, 1910).
21. Volterra (V.) — Sopra le funzioni permutabili. (*Rend. Ac. Lincei*, serie 5a, vol. XIX, 1910).
22. Volterra (V.) — Contributo allo studio delle funzioni permutabili. (*Rend. Ac. Lincei*, serie 5a, vol. XX, 1911).
23. Volterra (V.) — Leçons sur les équations intégrales et les équations intégral-différentielles. (*Coll. Borel*, Paris, 1913).
24. Volterra (V.) — Leçons sur les fonctions de lignes. (*Coll. Borel*, Paris, 1913).
25. Volterra (V.) — Les problèmes qui ressortent du concept de fonction de ligne. (*Sitzungsber. Berliner Math. Ges.*, XIII J. g., 1914).
26. Volterra (V.) — The theory of permutable functions. (Princeton, 1915).
27. Volterra (V.) — Teoria delle potenze, dei logaritmi e delle funzioni di composizione. (*Memorie Ac. Lincei*, serie 5a, vol. XI, 1916).
28. Volterra (V.) et Pérés (J.) — Leçons sur la composition et les fonctions permutables. (*Coll. Borel*, Paris, 1924).
29. Volterra (V.) — Sur les fonctions permutables. (*Bull. Soc. Math. France*, vol. LII, 1924).
30. Volterra (V.) — Theory of functionals and of integral and integro-differential equations. (London, 1930).
31. Volterra (V.) et Pérés (J.) — Théorie générale des fonctionnelles. T. I. (*Coll. Borel*, Paris, 1936).

Présenté à la Faculté le 25 mars 1938.

LATVIJAS UNIVERSITĀTES BIBLIOTĒKA



0509079457

LU bibliotēka



220041775

249456

P. Lill
144d

LŪR mat. III.	AUL math. III.
Nr. 1. A. Putnis. Sur la rotation permanente des ellipsoïdes hétérogènes.	1
Heterogenu ellipsoidu permanentā rotācija	63
Nr. 2. E. Fogels. Some Impossible Diophantine Equations in the Form of $x^4 + Ay^4 = z^2$	67
Daži neiespējami diofantiski vienādojumi ar formu $x^4 + Ay^4 = z^2$	74
Nr. 3. B. Bružs. Überführungsenergien	75
Pārvešanas enerģijas	113
Nr. 4. A. Apinis. Zur Wechselwirkung zwischen den schweren Teilchen nach der Theorie von Fermi	115
Nr. 5. A. Lūsis. Sur le problème fondamental de la théorie des fonctions permutables	125
Permutāblo funkciju teorijas pamatproblēma .	191