

423

LATVIJAS  
UNIVERSITATES RAKSTI  
ACTA UNIVERSITATIS LATVIENSIS

---

MATEMATIKAS UN DABAS ZINĀTŅU  
FAKULTATES SERIJA

III SĒJUMS  
TOMUS

№ 9—14

LATVIJAS UNIVERSITATE

---

R I G Ā, 1 9 4 0

P. LU  
1446

8

TRKA  
TRKA  
642-24-88



## Über die Möglichkeit diophantischer Gleichungen in relativ quadratischen Zahlkörpern

von E. Fogels.

§ 1. Der Zweck dieser Note ist, einige Sätze zu betrachten, die die Möglichkeit einer diophantischen Gleichung dritten Grades in dem Körper  $\Omega$  mit der Möglichkeit derselben oder einer anderen Gleichung in  $\Omega(\sqrt{\lambda})$  ( $\lambda$  Zahl aus  $\Omega$ ) vergleichen. Einige Literatur (von denen ich 4, 5, 7 und 8 nur durch das *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* kenne) über Resultate dieser Art wird S. 282 folgen. Untersuchungen über die Möglichkeit diophantischer Gleichungen 3. Grades in quadratischen Körpern habe ich auch in einem anderen Artikel angestellt (s. 10), doch wurden dort nicht alle Fälle betrachtet und  $\Omega$  war auch unnötiger Weise auf den Körper der rationalen Zahlen beschränkt.

In den §§ 2 und 3 werden allgemeine Sätze bewiesen und einige bekannte Resultate zur Illustrierung gegeben. Unter weiteren Voraussetzungen gibt § 4 zwei Sätze über mehrfache Adjunktion zu  $\Omega$  und in § 5 wird die gleichzeitige Unmöglichkeit einer Gleichung in  $\Omega$  und einer anderen Gleichung in quadratischen Erweiterungskörpern gezeigt.

§ 2. Es sei

$$(1) \quad f(x, y, z, \dots) = 0$$

eine diophantische Gleichung dritten Grades in  $\Omega$  und es gebe Zahlen  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  in  $\Omega$ , die nicht alle verschwinden und die für  $x, y, z, \dots$  gesetzt den homogenen Teil dritten Grades von  $f$  zu Null machen. Dann gilt der

Satz 1. *Ist die Gleichung (1) in  $\Omega$  unmöglich, dann gibt es zu jedem System  $(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$  relativ quadratische Körper über  $\Omega$  in denen (1) Lösungen hat.*

Beweis. Setzen wir

$$(2) \quad x = \alpha t + \alpha_1, y = \beta t + \beta_1, z = \gamma t + \gamma_1, \dots,$$

wo  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots$  beliebige Zahlen aus  $\Omega$  sind, dann wird  $f(x, y, z, \dots) = \varphi(t) = 0$  zu einer quadratischen Gleichung in  $t$ . Dieselbe muß in  $\Omega$  irreduzibel sein, denn andernfalls wären  $t$  und zugleich  $x, y, z, \dots$  in (2) Zahlen aus  $\Omega$  und (1) hätte doch eine Lösung in  $\Omega$ . Die Zahl  $t$  ist also quadratisch irrational in bezug auf  $\Omega$ ; wird

$$t = \mu + \sqrt{\lambda} \quad (\mu, \lambda \text{ Zahlen aus } \Omega)$$

gesetzt, dann ist die Gleichung (1) in  $\Omega(\sqrt{\lambda})$  möglich und die Lösung wird durch (2) gegeben.

Beispiel. Es gibt Zahlen  $A \neq 0$  aus  $\Omega$  für die die Gleichung

$$(3) \quad x^3 + y^3 + A = 0$$

keine Lösung in  $\Omega$  hat. Sie hat jedoch Lösungen in unendlich vielen  $\Omega(\sqrt{\lambda})$ , wo  $\lambda$  gewisse Zahlen aus  $\Omega$  sind. Diese finden wir, indem wir  $\alpha = -\beta = 1$ ,  $\alpha_1 + \beta_1 = \gamma \neq 0$  setzen. Durch Lösung einer quadratischen Gleichung kommen wir dann auf die gesuchte Lösung von (3)

$$(4) \quad x = \frac{1}{2}\gamma + \sqrt{\lambda}, \quad y = \frac{1}{2}\gamma - \sqrt{\lambda},$$

wo

$$\lambda = -\frac{\gamma^3 + 4A}{12\gamma}$$

und  $\gamma$  eine beliebige Zahl aus  $\Omega$  ist.

Diese Formel kann als allgemeine Lösung der Gleichung (3) aufgefaßt werden. Denn sie liefert auch die eventuellen „rationalen“ Lösungen, falls  $\lambda$  gleich dem Quadrat einer Zahl aus  $\Omega$  ausfällt, und umgekehrt: hat (3) eine Lösung  $x_0, y_0$  aus  $\Omega$ , dann ist

$$-4A = \gamma(\gamma^2 + 3\delta^2),$$

wo  $\gamma = x_0 + y_0$ ,  $\delta = x_0 - y_0$ ,

$$\text{d. h.} \quad \lambda = -\frac{\gamma^3 + 4A}{12\gamma} = \left(\frac{\delta}{2}\right)^2.$$

Hieraus folgt, daß es Gleichungen (3) gibt, die in vorgeschriebenen Erweiterungskörper  $\Omega(\sqrt{\lambda})$  möglich sind. In der Tat haben wir nur

$$-\frac{\gamma^3 + 4A}{12\gamma}$$



gleich  $\lambda \delta^2$  ( $\delta$  eine beliebige Zahl aus  $\Omega$ ) zu setzen, woraus sich

$$A = -\gamma \left\{ \left( \frac{\gamma}{2} \right)^2 + 3\lambda \delta^2 \right\}$$

bestimmen läßt. So wird z. B. die im Körper der rationalen Zahlen unmögliche Gleichung<sup>1</sup>  $x^3 + y^3 - 14 = 0$  lösbar nach Adjunktion zu dem Körper von  $\sqrt[3]{2}$  ( $\delta = 1, \gamma = 2$ ) oder  $\sqrt{-1}$  ( $\delta = 4, \gamma = 14$ ) oder  $\sqrt{-6}$  ( $\delta = \frac{5}{3}, \gamma = -14$ ) usw.

Es gibt also Adjunktionen die eine unmögliche Gleichung (3) zu einer lösbaren machen. Dies geschieht aber niemals durch die Adjunktion von  $\sqrt{-3}$ , denn es gilt der

**Satz 2.** *Hat die Gleichung (3) eine Lösung in  $\Omega(\sqrt{-3})$ , dann hat sie auch eine im Körper  $\Omega$ .*

Dieser Satz kommt in demselben oder engeren Sinne bei *R. Fueter* (3) und *T. Nagell* (4 u. 5) vor. Hier werde ich einen Beweis anführen, der, wie ich glaube, von dem dieser Autoren verschieden sein wird.

Hat die Gleichung (3) in  $\Omega(\sqrt{-3})$  die Lösung  $x = \alpha\rho, y = \beta\rho$  (oder  $x = \alpha\rho, y = \beta$ ), wo  $\alpha, \beta$  Zahlen aus  $\Omega$  sind und  $\rho$  die komplexe dritte Einheitswurzel bedeutet, dann hat sie auch in  $\Omega$  die Lösung  $x = \alpha, y = \beta$ .

Nun setzen wir voraus, daß keine der Zahlen  $x, y$  von der eben genannten Form ist. Dann ist z. B.  $x$  eine primitive Größe des Körpers  $\Omega(\sqrt{-3})$  und  $y = ax + b$ , wo  $a, b$  Zahlen aus  $\Omega$  sind. Es entsteht eine Gleichung

$$x^3 + (ax + b)^3 + A = 0,$$

die entweder zweiten oder dritten Grades ist, je nachdem  $a = -1$  oder  $a \neq -1$ .

Es sei zuerst  $a \neq -1$ . Dann wird der Gleichung dritten Grades durch eine quadratische Irrationalität in bezug auf  $\Omega$  genügt, sie muß also auch eine Wurzel  $x = x_0$  aus  $\Omega$  besitzen. Nun hat aber (3) auch eine Lösung in  $\Omega$

$$x = x_0, y = ax_0 + b.$$

Es sei nun  $a = -1$ . Dann zeigt die Formel (4), daß  $x$  und  $y$  konjugierte Zahlen des Körpers  $\Omega(\sqrt{-3})$  sind. Wir setzen

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-3}, y = \alpha - \beta\sqrt{-3},$$

<sup>1</sup> Vgl. z. B. *T. Nagell*, „L'analyse indéterminée de degré supérieur“, *Mémorial des sciences mathématiques*, fasc. XXXIX (1929) S. 14.

wo  $\alpha, \beta$  Zahlen aus  $\Omega$  sind, die nicht beide verschwinden. Zugleich mit  $x, y$  hat (3) auch die Lösung

$$X = x\rho = \frac{-\alpha - 3\beta + (\alpha - \beta)\sqrt{-3}}{2},$$

$$Y = y\rho = \frac{-\alpha + 3\beta + (\alpha + \beta)\sqrt{-3}}{2}$$

$$\left(\rho = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right).$$

Ist  $\alpha \neq 0$ , dann sind  $X, Y$  nicht konjugierte Zahlen und es liegt der Fall mit  $Y = aX + b$ ,  $a \neq -1$  vor; (3) hat also nach dem vorherbewiesenen auch eine Lösung in  $\Omega$ . Ist dagegen  $\alpha = 0$ , dann haben wir  $x = -y$ , woraus  $A = 0$  folgt.

Da die Gleichung (3) zugleich in  $\Omega$  und  $\Omega(\sqrt{-3})$  möglich oder unmöglich ist, es folgt hieraus, daß die kubischen Formen

$$x(x^2 + 3y^3), \quad u(u^2 - v^2)$$

dieselben Zahlen in  $\Omega$  darstellen. Anders gesagt: das Produkt dreier Zahlen einer arithmetischen Progression in  $\Omega$  ist stets durch  $x(x^2 + 3y^2)$  in  $\Omega$  darstellbar, und umgekehrt. Die Darstellungen finden wir, indem wir die Schritte des Beweises von Satz 2 wiederholen. So ist z. B.  $2 \cdot 3 \cdot 4 = x(x^2 + 3y^2)$  für

$$x = \frac{18}{7}, \quad y = \frac{20}{21}.$$

§ 3. Im folgenden setzen wir stets voraus, daß (1) eine diophantische Gleichung dritten Grades sei, deren homogener Teil dritten Grades nicht Null wird, wenn  $x, y, z, \dots$  nicht gleichzeitig verschwindende Werte aus  $\Omega$  annehmen. Es sei dieser Teil von Null verschieden für alle Zahlensysteme  $(x, y, z, \dots)$  aus  $\Omega$ , wo  $x \neq 0$  ist.

Diese Bedingung wird kurz „*Bedingung I*“ genannt.

Es ist unser Zweck, von der Unmöglichkeit einer Gleichung in  $\Omega$  auf die in quadratischen Erweiterungskörpern zu schließen. Wird aber nicht vorausgesetzt, daß alle Unbekannten wirklich in der dritten Potenz auftreten, dann ist ein solcher Schluß nicht angängig, denn es ist z. B. die Gleichung

$$(5) \quad x^3 - y^2 - A = 0 \quad (A \text{ Zahl aus } \Omega)$$

in allen Körpern  $\Omega(\sqrt{\alpha^3 - A})$  ( $\alpha$  eine beliebige Zahl aus  $\Omega$ ) lösbar,

wenn sie auch nicht in  $\Omega$  möglich wäre. Ohne diese Voraussetzung können wir nur spezielle quadratische Erweiterungskörper diskutieren, von denen ein Beispiel durch den Satz 3 gegeben wird.

Wir setzen voraus, daß die Unbekannte  $x$  nur in der dritten Potenz vorkommt (oder in der Potenz  $3k$ , was natürlich auf die dritte zurückgeführt werden kann). Dann gilt der

**Satz 3.** *Hat die Gleichung (1) eine Lösung, wo  $x, y, z, \dots$  Zahlen des Körpers  $\Omega(\sqrt{-3})$  sind und  $x \neq 0$ , dann hat sie auch eine Lösung in  $\Omega$ .*

**Beweis.** Hat die Gleichung (1) eine Lösung  $(x, y, z, \dots)$  in  $\Omega(\sqrt{-3})$ , so hat sie daselbst auch noch die Lösung  $(\rho x, y, z, \dots)$ , wo  $\rho = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})$  ist. Eine der Zahlen  $x, \rho x$  ist eine primitive Größe des Körpers  $\Omega(\sqrt{-3})$ ; es sei diese z. B.  $x$ . Alle anderen Unbekannten haben dann die Form

$$y = ax + a_1, \quad z = bx + b_1, \quad \dots,$$

wo die Koeffizienten  $a, b, \dots$  Zahlen aus  $\Omega$  bezeichnen. Nun ist aber wegen der Bedingung I

$$f(x, ax + a_1, bx + b_1, \dots) = 0$$

eine Gleichung dritten Grades, die durch ein  $x$  zweiten Grades in bezug auf  $\Omega$  befriedigt wird. Sie muß also auch eine Lösung  $x = x_0$  aus  $\Omega$  besitzen. Die gesuchte Lösung von (1) wird nun durch die Zahlen  $x_0, ax_0 + a_1, bx_0 + b_1, \dots$  gegeben.

**Beispiel.** Die Voraussetzungen des Satzes 3 im Falle der Gleichung (5) sind offenbar erfüllt. Hat sie im Körper  $\Omega$  keine Lösung, so hat sie auch keine Lösung mit  $x \neq 0$  in  $\Omega(\sqrt{-3})$ . Ist jedoch  $A = 3\alpha^2$  ( $\alpha$  Zahl aus  $\Omega$ ), dann bildet  $x = 0, y = \alpha\sqrt{-3}$  die einzige Lösung in  $\Omega(\sqrt{-3})$ .

Dies Ergebnis war zuerst durch *Nagell* (5) bekannt. Ein ähnlicher Satz für die Gleichung

$$(6) \quad x^3 - Ax - y^2 = 0$$

und den Erweiterungskörper  $\Omega(\sqrt{-1})$  ist in *Lind* (6) gegeben. Der dortige Beweis läßt sich ein wenig kürzen, wenn man bemerkt, daß zugleich mit  $(x, y)$  auch  $(-x, y\sqrt{-1})$  eine Lösung der Gleichung (6) bildet.



G. Billing (7) hat diese Sätze verallgemeinert, indem er zeigt, daß die Gleichung (5) nur endlich viele Lösungen in  $\Omega(\sqrt{-3})$  besitzt, falls sie endlich viele in  $\Omega$  hat. Entsprechendes wird dann auch für die Gleichung (6) gezeigt.

Bei Billing (8) sind u. a. auch andere Sätze bewiesen, die die Unmöglichkeit der Gleichung  $\eta^2 = \xi^3 - A\xi + B$  von  $\Omega$  auf gewisse Erweiterungskörper übertragen.

§ 4. Von hier an setzen wir voraus, daß alle Unbekannten von  $f$  wirklich in der dritten Potenz auftreten. Diese nennen wir die „Bedingung II“.

Satz 4. Die Gleichung (1) sei homogen. Ist  $x=y=z=\dots=0$  ihre einzige Lösung in  $\Omega$ , dann hat sie auch in keinem  $\Omega(\sqrt{\lambda})$  ( $\lambda$  beliebige Zahl aus  $\Omega$ ) eine andere Lösung.

Beweis. Ist  $(x, y, z, \dots)$  eine Lösung in  $\Omega(\sqrt{\lambda})$  der Gleichung (1), so ist  $(x\sqrt{\lambda}, y\sqrt{\lambda}, z\sqrt{\lambda}, \dots)$  auch eine, und falls  $x \neq 0$  ist, kann es als eine primitive Größe des Körpers  $\Omega(\sqrt{\lambda})$  vorausgesetzt werden. Wir setzen nun

$$y = ax + a_1, z = bx + b_1, \dots (a, a_1, \dots \text{ Zahlen aus } \Omega)$$

und zeigen auf dieselbe Weise wie bei Satz 3, daß (1) auch eine Lösung in  $\Omega$  hat. Diese muß mit  $x=y=z=\dots=0$  übereinstimmen, woraus  $a_1=b_1=\dots=0$  folgt. Da  $f$  homogen ist, folgt hieraus

$$0 = f(x, ax, bx, \dots) = x^3 f(1, a, b, \dots).$$

Wegen der Voraussetzung ist aber  $f(1, a, b, \dots) \neq 0$ , woher  $x=y=z=\dots=0$  folgt.

Durch Wiederholung des Schlusses von Satz 4 können wir zeigen, daß  $x=y=z=\dots=0$  die einzige Lösung der Gleichung (1) eben in jedem Körper  $\Omega(\xi)$  gibt, wo  $\xi$  eine „konstruierbare Größe“ in bezug auf  $\Omega$  bezeichnet, d. h. eine solche, die nur aus Quadratwurzeln und Zahlen des Körpers  $\Omega$  zusammengesetzt ist.

So ist z. B. die 17-te Einheitswurzel eine konstruierbare Größe in bezug auf jedes  $\Omega$ .

Nennen wir zur Abkürzung  $\Omega(\xi)$  einen *konstruierbaren Körper über  $\Omega$* , dann können wir den folgenden Satz aussprechen.

Satz 5. Ist die Gleichung (1) homogen und  $x=y=z=\dots=0$  ihre einzige Lösung in  $\Omega$ , dann hat sie auch keine andere Lösung in jedem konstruierbaren Körper über  $\Omega$ .

Nun wollen wir von der Voraussetzung der Homogenität absehen, die Bedingungen I und II aber beibehalten. Dann gilt der

**Satz 6.** *Ist die Gleichung (1) im Körper  $\Omega$  unmöglich, dann hat sie auch keine Lösung in jedem konstruierbaren Körper über  $\Omega$ .*

Zuerst zeigen wir, daß (1) unmöglich bleibt in jedem Körper  $\Omega_1 = \Omega(\sqrt[\lambda]{\lambda})$  ( $\lambda$  Zahl aus  $\Omega$ ). Da nach Satz 4 die Bedingung I auch noch in  $\Omega_1$  gilt, können wir den Satz von  $\Omega_1$  auf  $\Omega_2 = \Omega_1(\sqrt[\lambda_1]{\lambda_1})$  ( $\lambda_1$  Zahl aus  $\Omega_1$ ) übertragen usw.

Ist z. B. die Gleichung

$$x^3 + 2y^3 + Ay + B = 0 \quad (A, B \text{ Zahlen aus } \Omega)$$

unmöglich in einem Körper  $\Omega$ , der die Zahl  $\sqrt[3]{2}$  nicht enthält, so bleibt sie noch immer unmöglich nach Adjunktion irgendwelcher konstruierbarer Größen zu  $\Omega$ .

§ 5. In diesem Abschnitt werden wir zwei Sätze aufstellen, die sich auf Satz 6 stützen. Es sei auch bemerkt, daß keine Schwierigkeiten vorliegen das Entsprechende für Satz 5 zu tun.

**Satz 7.** *Die Bedingungen des Satzes 6 seien erfüllt und  $\varphi(X, Y, Z, \dots)$ ,  $\psi(X, Y, Z, \dots)$ ,  $\chi(X, Y, Z, \dots)$ , . . . irgendwelche rationale Funktionen in  $\Omega$ . Ist (1) im Körper  $\Omega$  unmöglich und wird von Werten von  $X, Y, Z, \dots$  abgesehen, für welche manche der Funktionen  $\varphi, \psi, \chi, \dots$   $\infty$  oder unbestimmt werden, dann hat auch die Gleichung*

$$f(\varphi, \psi, \chi, \dots) = 0$$

keine Lösung in jedem konstruierbaren Körper über  $\Omega$ .

Der Beweis ist klar.

**Satz 8.** *Ist die Gleichung*

$$(7) \quad x^2 + f(y, z, \dots) = 0$$

in  $\Omega$  unmöglich, dann hat auch

$$(8) \quad X^4 + f(\varphi, \psi, \dots) = 0$$

außer Werten von  $X, Y, Z, \dots$ , für die  $\varphi, \psi, \dots$  nicht definiert sind, keine Lösung in jedem relativ quadratischen Körper über  $\Omega$ .

Hat aber (7) in  $\Omega$  Lösungen, dann gibt es möglicherweise auch quadratische Erweiterungskörper mit Lösungen für (8). Ein Beispiel dieser Art wird durch die Gleichung  $X^4 + Y^3 - 1 = 0$  geliefert, die wenigstens in den Körpern  $\Omega(\sqrt[3]{3})$  und  $\Omega(\sqrt{-3})$  Lösungen besitzt ( $\sqrt[3]{3}, -2$  bzw.  $\sqrt{-3}, -2$ ).

Beweis. Hat die Gleichung (8) eine Lösung  $(X, Y, \dots)$  in dem Körper  $\Omega$  ( $\sqrt{\lambda}$  ( $\lambda$  Zahl aus  $\Omega$ ), so sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem  $X^2$  eine Zahl  $\alpha$  aus  $\Omega$  ist oder nicht.

Im ersten Falle ist eine der Zahlen  $\varphi, \psi, \dots$  eine primitive Größe des Körpers  $\Omega$  ( $\sqrt{\lambda}$ ) und es folgt wie bei Satz 6 daß (7) doch in  $\Omega$  möglich ist und dort die Lösung  $x = \alpha, \dots$  hat.

Im zweiten Falle muß  $X^2$  eine primitive Größe des Körpers  $\Omega$  ( $\sqrt{\lambda}$ ) sein. Wir bezeichnen sie mit  $\xi$  und setzen

$$\varphi = a\xi + a_1, \psi = b\xi + b_1, \dots \quad (a, a_1, \dots \text{ Zahlen aus } \Omega).$$

Wären  $a, b, \dots$  nicht alle 0, dann hätten wir (nach der Bedingung I) eine Gleichung dritten Grades

$$\xi^2 + f(a\xi + a_1, b\xi + b_1, \dots) = 0,$$

deren eine Wurzel eine Zahl aus  $\Omega$  sein müßte. Hieraus würde folgen, daß (7) doch durch Zahlen aus  $\Omega$  befriedigt werden kann.

Es ist also  $a = b = \dots = 0$ ,  $\varphi = a_1, \psi = b_1, \dots$  und

$$\xi^2 = \nu,$$

wo  $\nu = -f(a_1, b_1, \dots)$  eine Zahl aus  $\Omega$  ist. Wäre diese gleich dem Quadrat einer anderen Zahl  $\lambda$  aus  $\Omega$ :

$$\nu = \lambda^2,$$

dann hätte (7) wieder die Lösung in  $\Omega$

$$x = \lambda, y = a_1, z = b_1, \dots$$

$\nu$  ist also kein Quadrat in  $\Omega$  und  $X = \sqrt[4]{\nu}$  ist eine Irrationalität vierten Grades in bezug auf  $\Omega$ . Damit ist der Satz bewiesen.

Sind z. B.  $A \neq 0, B \neq 0$  Zahlen aus  $\Omega$ , für die die Gleichung  $x^2 + Ay^3 + B = 0$  in  $\Omega$  unmöglich ist, so hat auch

$$X^4 + AY^3 + B = 0$$

keine Lösung in jedem relativ quadratischen Körper über  $\Omega$ .

Endlich werden wir noch einen Satz derselben Art beweisen. (8)

Es sei  $A$  eine Zahl aus  $\Omega$ , für die die Gleichung

$$Ax^2 + y^3 - 1 = 0$$

außer  $x = 0, y = 1$  keine andere Lösung in  $\Omega$  hat. Z. B. ist es für den Körper  $\Omega$  der rationalen Zahlen bekannt<sup>2</sup>, daß diese Eigen-

<sup>2</sup> T. Nagell, „Über die rationalen Punkte auf einigen kubischen Kurven“, *Tôhoku Math. Journ.* 24 (1924) 48—53. Vgl. auch Fueter (3).



schaft den positiven ganzen Zahlen, die nur die Primzahlen 3 und  $p \equiv 5 \pmod{12}$  enthalten, sowie auch der Zahl  $-1$  zukommt.

Es gehöre weiter  $\sqrt{3}$  nicht zu  $\Omega$ .

Unter diesen Voraussetzungen gilt der

Satz 9. *Die Gleichung*

$$(9) \quad AX^4 + Y^3 - 1 = 0$$

hat in keinem quadratischen Erweiterungskörper eine Lösung mit  $X \neq 0$ .

Beweis. Ist in (9)  $X^2$  eine Zahl aus  $\Omega$ , dann ist es klar, daß sie gleich Null sein muß. Ist dagegen  $X^2 = \xi$  eine quadratische Irrationalität in bezug auf  $\Omega$ , dann setzen wir  $Y = a\xi + b$  ( $a, b$  Zahlen aus  $\Omega$ ) und kommen auf die Gleichung

$$A\xi^2 + (a\xi + b)^3 - 1 = 0,$$

die durch  $\xi = 0$ ,  $a\xi + b = 1$  befriedigt werden muß. Es ist also  $b = 1$  und die Gleichung kann durch  $\xi$  gekürzt werden; es bleibt dann die Gleichung

$$(10) \quad a^3\xi^2 + (A + 3a^2)\xi + 3a = 0,$$

die offenbar in  $\Omega$  irreduzibel ist. Wird aber  $X^2$  für  $\xi$  gesetzt, dann muß sie reduzibel werden, denn  $X$  ist ja eine quadratische Irrationalität etwa gleich  $\alpha + \sqrt{\beta}$  ( $\alpha, \beta$  Zahlen aus  $\Omega$ ). Es folgt hieraus, daß (10) die Form

$$(\xi + \alpha^2 - \beta)^2 - 4\alpha^2\xi = 0,$$

oder

$$(10') \quad \xi^2 - 2(\alpha^2 + \beta)\xi + (\alpha^2 - \beta)^2 = 0$$

hat. Nun erhalten wir eine Beziehung zwischen den Koeffizienten von (10) und (10'):

$$\frac{3}{a^2} = (\alpha^2 - \beta)^2,$$

woraus folgt, daß

$$\sqrt{3} = \pm a(\alpha^2 - \beta)$$

doch eine Zahl aus  $\Omega$  ist. Damit hat sich ein Widerspruch zu der Voraussetzung ergeben und zugleich ist auch der Satz bewiesen.

## LITERATUR

1. W. Burnside, "On the rational solutions of the equation  $X^3 + Y^3 + Z^3 = 0$  in a quadratic field", *Proc. London Math. Soc.* 14 (1915) 1—4.
2. R. Fueter, „Die diophantische Gleichung  $\xi^3 + \eta^3 + \zeta^3 = 0^*$ “, *Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wiss. Math. Naturwiss. Klasse* 1913, 25. Abh.
3. R. Fueter, „Über kubische diophantische Gleichungen“, *Com. Math. Helvetici* 2 (1930) 69—89.
4. T. Nagell, „Bemerkungen über die diophantische Gleichung  $x^3 + y^3 = Az^{3n}$ “, *Arkiv för Mat.* 25 (1935) Nr. 5.
5. T. Nagell, „Über die Lösbarkeit gewisser diophantischer Gleichungen dritten Grades“, *Comm. Math. Helvetici* 9 (1937) 31—39, 135.
6. C. E. Lind, „Ein Analogon zu einem Nagellschen Satze über kubische diophantische Gleichungen“, *Comm. Math. Helvetici* 9 (1937) 156—160.
7. G. Billing, „Über kubische diophantische Gleichungen mit endlich vielen Lösungen“, *Comm. Math. Helvetici* 9 (1937) 161—165.
8. G. Billing, „Beiträge zur arithmetischen Theorie der ebenen kubischen Kurven von Geschlecht Eins“, *R. Soc. Scient. Uppsala* (4) 11 (1938) Nr. 1.
9. A. Aigner, „Über die Möglichkeit von  $x^4 + y^4 = z^4$  in quadratischen Körpern“, *Jahresbericht der Deutschen Math. Ver.* 43 (1934) 226—229.
10. E. Fogels, „Über die Möglichkeit einiger diophantischer Gleichungen 3. und 4. Grades in quadratischen Körpern“, *Comm. Math. Helvetici* 10 (1938) 263—269.

Der Fakultät vorgelegt den 29. Sept. 1939.

## Diofantisko vienādojumu atrisinājumi relativī kvadratiskos skaitļu laukos

E. Fogels.

### Kopsavilkums

Šinī darbā ir meklēti diofantisku vienādojumu atrisinājumi laukā  $\Omega(\sqrt{\lambda})$  ( $\lambda$  lauka  $\Omega$  skaitlis), pieņemot par zināmiem to pašu (vai citu) vienādojumu atrisinājumus laukā  $\Omega$ . Par tādu jautājumu esmu rakstījis arī kādā agrākā darbā, bet tur par  $\Omega$  tika pieņemts racionali skaitļu lauks un nebij rādīta starpība starp dažiem gadījumiem kā tas darīts tagad. Literatura, kam sakars ar apskatīto jautājumu, dota 282. lpp.

Ar  $f$  vienmēr apzīmējam trešās pakāpes polinomu, kura koeficienti ir lauka  $\Omega$  skaitļi.

2. § apskata gadījumu, kad laukā  $\Omega$  ir skaitļi  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ , kas nav visi reizē nulles, bet likti  $x, y, z, \dots$  vietā pārvērs  $f$  trešās pakāpes homogēno daļu par 0. Tad vienādojums  $f=0$  ir vai nu atrisināms laukā  $\Omega$  vai arī var konstruēt relativī kvadratiskus skaitļu laukus attiecībā pret  $\Omega$ , kuros vienādojumam ir atrisinājumi (*teorema 1*). Kā piemērs apskatīts vienādojums  $x^3 + y^3 + A = 0$ . *Teorema 2* pierāda pazīstamu rezultātu, ka gadījumā, ja šis vienādojums ir iespējams laukā  $\Omega(\sqrt{-3})$ , tad tas ir iespējams arī laukā  $\Omega$ .

3. un turpmākos §§ tiek pieņemts, ka  $f$  trešās pakāpes homogēnā daļa netop 0 nezināmo nozīmēm  $x \neq 0, y, z, \dots$ , kas ir  $\Omega$  skaitļi. Ja  $f$  satur  $x$  tikai trešajā, bet ne zemākās pakāpēs, un vienādojumam  $f=0$  ir atrisinājums ar  $x \neq 0$  laukā  $\Omega(\sqrt{-3})$ , tad tam ir atrisinājums arī laukā  $\Omega$  (*teorema 3*). Te kā sekas rodas pazīstams rezultāts par vienādojumu  $x^3 - y^2 = A$ .

Ja  $f$  satur kādu nezināmo zemākā pakāpē kā trešajā, tad acīm redzot eksistē relativī kvadratiski skaitļu lauki, kuros vienādojums  $f=0$  ir atrisināms. 4. un 5. §§ tiek pieņemts, ka  $f$  satur katra nezināmā trešo pakāpi. Ja  $f=0$  ir homogēns vienādojums un  $x=y=\dots=0$  ir tā vienīgais atrisinājums laukā  $\Omega$ , tad *teorema 4* pierāda, ka vienādojumam nav cita atrisinājuma arī katrā relativī kvadratiskā laukā attiecībā pret



$\Omega$ . Vispārinot šo rezultātu *teorema 5* izteic, ka vienādojumam nav cita atrisinājuma pat nevienā laukā  $\Omega$  ( $\xi$ ), kur  $\xi$  ir *relatīvi konstruējams lielums*, t. i. tāds, kas izteikts ar kvadratsaknēm no  $\Omega$  skaitļiem. *Teorema 6* pierāda analogu rezultātu gadījumā, kad  $f=0$  ir nehomogens vienādojums, kam laukā  $\Omega$  nav atrisinājuma. *Teorema 7* vispārina šo rezultātu tā, ka  $x, y, \dots$  vietā liek citu mainīgo  $X, Y, \dots$  racionālas funkcijas  $\varphi, \psi, \dots$ , kuru koeficienti ir  $\Omega$  skaitļi.

Beidzot tiek pierādītas vēl šādas teoremas:

*Teorema 8.* Ja vienādojums  $x^2 + f(y, z, \dots) = 0$  nav iespējams laukā  $\Omega$ , tad nevienā relatīvi kvadratiskā skaitļu laukā attiecībā pret  $\Omega$  vienādojumam

$$X^4 + f(\varphi, \psi, \dots) = 0$$

nav citu atrisinājumu kā tikai (iespējamā kārtā) tās  $X, Y, \dots$  nozīmes kurām  $\varphi, \psi, \dots$  nav definēti.

*Teorema 9.* Ja  $x=0, y=1$  ir vienādojuma  $Ax^2 + y^3 - 1 = 0$  vienīgais atrisinājums laukā  $\Omega$ , tad vienādojumam

$$AX^4 + Y^3 - 1 = 0$$

nevienā relatīvi kvadratiskā laukā attiecībā pret  $\Omega$  nav atrisinājuma ar  $X \neq 0$ .

1939. g. 29. sept.

## On Average Values of Arithmetical Functions

By E. Fogels.

### Introduction.

The problem considered in this paper is that of finding the least possible  $h = h(x)$  such that a given arithmetical function  $a(n)$  should keep its average order in the interval  $x, x + h$ , i. e. that we have

$$(1) \quad \sum_{n \leq x} a(n) = \psi(x) + o(\psi(x))$$

and

$$(2) \quad \sum_{x < n \leq x+h} a(n) \sim \psi(x+h) - \psi(x),$$

as  $x \rightarrow \infty$ .

There are some arithmetical functions for which the error term in (1) is of comparatively small order. Thus for the Euler's function  $\varphi(n)$  it is known that<sup>1</sup>

$$\sum_{n \leq x} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2} x^2 + O(x \log x)$$

whence we get (2) with  $h = \log^{1+\varepsilon} x$ .

The method developed in this paper may be of interest only in the case of  $a(n)$  with a large error term in (1). Examples of this kind are given by the arithmetical functions  $\lambda(n)$ ,  $\mu(n)$ ,  $\Lambda(n)$ , . . . defined as follows:

$\lambda(n) = (-1)^\rho$ ,  $\rho$  being the total number of prime factors of  $n$ , when multiple factors are counted multiply;  $\lambda(1) = 1$ .

<sup>1</sup> See for example Hardy and Wright (14) Chap. XVIII.

$$\mu(n) = \begin{cases} \lambda(n) & \text{if } n \text{ contains no square factor } > 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{if } n = p^m \text{ (} p \text{ prime, } m \geq 1) \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

From the best estimates of the sum (1) of these functions that we can get with the present knowledge about the zeros of the Riemann zeta-function<sup>2</sup> we could deduce (2) in a direct manner for no

$$(3) \quad h = x^\Theta$$

where  $\Theta$  is a constant  $< 1$ . Hoheisel however proved<sup>3</sup> that this is true for  $\Lambda(n)$  and that the constant  $\Theta$  can be taken  $= \frac{32999}{33000}$ . Using another method Heilbronn<sup>4</sup> got for  $\Lambda(n)$  and  $\mu(n)$  the value

$$\Theta = \frac{249}{250},$$

whereas Čudakov's results<sup>5</sup> about the zeros of  $\zeta(s)$  reduced  $\Theta$  to

$$\frac{3}{4} + \varepsilon.$$

Ingham<sup>6</sup> improved Hoheisel's method by making use of a convexity theorem for integrals<sup>7</sup> and got for  $\Lambda(n)$  the value

$$(4) \quad \Theta = \frac{1 + 4c}{2 + 4c} + \varepsilon,$$

where  $c$  is a constant for which

$$(5) \quad \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = O(t^c)$$

as  $t \rightarrow \infty$ .

The best known value<sup>8</sup> of  $c$  equal to  $\frac{19}{116}$  gives

$$\Theta = \frac{48}{77} + \varepsilon.$$

<sup>2</sup> See Čudakov (10), (11) or Titchmarsh (7).

<sup>3</sup> Hoheisel (4).

<sup>4</sup> Heilbronn (3).

<sup>5</sup> Čudakov (10).

<sup>6</sup> Ingham (1).

<sup>7</sup> Hardy, Ingham and Pólya (12) Theorem 7.

<sup>8</sup> See Ingham (1) Note on page 256.



In the following paper we shall use Heilbronn's method together with a convexity theorem of Ingham <sup>9</sup> and obtain in Theorem 1 the solution given by (3), (4) for the functions

$$\Lambda(n), \mu(n), \lambda(n), \lambda(n) \frac{\varphi(n)}{n}, \lambda(n) \frac{\sigma(n)}{n},$$

where  $\sigma(n)$  is the sum of divisors of  $n$ . The result stated for  $\Lambda(n)$  may be expressed in the form

$$\pi(x+h) - \pi(x) \sim \frac{h}{\log x} \quad (x \rightarrow \infty),$$

$\pi(x)$  being the number of primes not exceeding  $x$ . Putting

$$h = x^\theta \quad (0 < \theta < 1), \quad \vartheta = \frac{1}{1-\theta}, \quad y^\vartheta = x,$$

we get

$$\begin{aligned} \pi\{(y+1)^\vartheta\} - \pi(y^\vartheta) &\geq \pi(y^\vartheta + y^{\vartheta-1}) - \pi(y^\vartheta) \\ &= \pi(x+h) - \pi(x) \sim \frac{h}{\log x} > 0 \end{aligned}$$

[since  $(y+1)^\vartheta > y^\vartheta + y^{\vartheta-1}$  for all  $\vartheta > 1$ ,  $y > y_0(\vartheta)$ ]. This proves that *between consecutive  $\vartheta$ -th powers*

$$y^\vartheta, (y+1)^\vartheta \quad (y > y_0)$$

*there is at least one prime.* The best known value of  $\theta$  gives

$$\vartheta = \frac{77}{29} + \varepsilon.$$

The other results of Theorem 1 expressed in a similar form state that *in the interval*

$$x, x + x^\theta \quad (x > x_0) \text{ or } y^\vartheta, (y+1)^\vartheta \quad (y > y_0)$$

*the functions  $\lambda(n)$  and  $\mu(n)$  change their signs at least once.*

From the results about

$$\lambda(n) \frac{\varphi(n)}{n}, \lambda(n) \frac{\sigma(n)}{n}$$

it follows

$$\sum_{x < n \leq x+h} \lambda(n) \frac{\varphi(n)}{n} = o(xh), \quad \sum_{x < n \leq x+h} \lambda(n) \frac{\sigma(n)}{n} = o(xh) \quad (x \rightarrow \infty).$$

<sup>9</sup> Ingham (1) Theorem 2.

To prove the last we put  $\lambda(n) \frac{\sigma(n)}{n} = \beta(n)$ ;

then we obtain for

$$\begin{aligned} h &= o\left(\frac{x}{\log x}\right) \\ \sum_{x < n \leq x+h} \lambda(n) \sigma(n) &= \sum_{x < n \leq x+h} n \beta(n) = [x] \sum_{x < n \leq x+h} \beta(n) + O\left(h \sum_{x < n \leq x+h} |\beta(n)|\right) \\ &= o(xh) + O\left(h \sum_{x < n \leq x+h} \frac{\sigma(n)}{n}\right) = o(xh) + O(h^2 \log x) = o(xh), \end{aligned}$$

since

$$\sum_{x < n \leq x+h} \beta(n) = o(h)$$

by Theorem 1, and

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \sum_{d|n} \frac{1}{d} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = O(\log n).$$

Theorems 2 and 3 give a solution of the problem stated for the arithmetical functions

$\lambda(n) d(n)$ , where  $d(n)$  is the number of divisors of  $n$ ;

$\lambda(n) 2^{\nu(n)}$ ,  $\nu(n)$  being the number of different prime factors of  $n$ ;

$q(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n \text{ is not divisible by a } k\text{-th power of a prime } (k \geq 2) \\ 0 & \text{if it is.} \end{cases}$

In Theorem 2 is obtained the solution  $h = x^\theta$ ,

$$(6) \quad \theta = \frac{1+8c}{2+8c} + \varepsilon$$

for the functions  $\lambda(n) d(n)$  and  $\lambda(n) 2^{\nu(n)}$ . The best known value of  $c$  gives

$$\theta = \frac{67}{96} + \varepsilon,$$

and if the Lindelöf hypothesis is true (that is to say, if (5) holds with an arbitrary small  $c$ ) then we have in (4) and (6) even

$$\theta = \frac{1}{2} + \varepsilon.$$

Theorem 3 is proved without making use of Čudakov's results. Taking  $k=2$  we deduce that in the interval

$$x, x + x^{\frac{2}{5}} \log^3 x \quad (x > x_0) \quad \text{or} \quad y^{\vartheta_0}, (y+1)^{\vartheta_0} \quad \left(\vartheta_0 = \frac{5}{3} + \varepsilon, y > y_0(\varepsilon)\right)$$

there is at least one quadratfrei number. This is an advance compared with Landau's *Handbuch* (p. 606)

from which we cannot get anything better than  $\vartheta_0 = 2$ .

To prove these theorems we use a formula of Landau (Lemma 3) for the sum

$$\sum_{n \leq x} a(n)$$

of the coefficients of the Dirichlet series

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$$

called the *generating function* of  $a(n)$ . Generating functions for the  $a(n)$  considered in this paper are given by the formulae

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum \frac{\mu(n)}{n^s}, \quad \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \sum \frac{\lambda(n)}{n^s}, \quad -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

$$\frac{\zeta(s+1)\zeta(2s)}{\zeta(s)\zeta(2s+2)} = \sum \frac{\lambda(n) \frac{\varphi(n)}{n}}{n^s}, \quad \frac{\zeta(2s)\zeta(2s+2)}{\zeta(s)\zeta(s+1)} = \sum \frac{\lambda(n) \frac{\sigma(n)}{n}}{n^s},$$

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta^2(s)} = \sum \frac{\lambda(n) 2^{\nu(n)}}{n^s}, \quad \frac{\zeta^2(2s)}{\zeta^2(s)} = \sum \frac{\lambda(n) d(n)}{n^s},$$

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(hs)} = \sum \frac{q(n)}{n^s} \quad (s = \sigma + it, \sigma > 1),$$

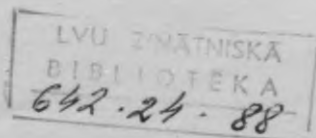
which can be proved by the Euler product extension<sup>10</sup>.

In the cases considered in Theorems 1 and 3 the generating functions contain a factor of the form  $\zeta^{-1}(s)$  so that Ingham's convexity theorem (Lemma 1) may be conveniently used. In Theorem 2, however, it does not appear to be applicable successfully [since the generating functions contain a factor like  $\zeta^{-2}(s)$ ] and we have first to prove a suitable analogue to Ingham's theorem. We will do so in Lemma 2.

There are no special difficulties in extending the results to arithmetic progressions as Heilbronn has done.

I wish to express my thanks to Mr. Ingham for drawing my attention to this problem and for his valuable suggestions and criticism.

<sup>10</sup> See for example Hardy and Wright (14) Chap. XVII.



## Preliminary Lemmas.

We shall make use of the following properties of the Riemann zeta-function and the auxiliary functions  $M_X(s)$ ,  $A_X(s)$  defined by (16), (18);  $C, C_1, \dots$  will always denote absolute constants and so will be generally those implied in the symbol  $O$ .

1) There are positive numbers  $\alpha < 1$ ,  $\alpha_1 < 2$  and  $A = A(\alpha)$  such that for all  $s = \sigma + it$  of the region

$$(7) \quad 1 - A \log^{-\alpha} t < \sigma < 2, \quad t > t_0 > 1$$

$$(8) \quad \zeta(s) \neq 0$$

and we have uniformly

$$(9) \quad \zeta(s) = O(\log^{\alpha_1} t)$$

$$(10) \quad \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(\log^{\alpha} t)$$

$$(11) \quad \frac{1}{\zeta(s)} = O(\log^{\alpha} t).$$

(8) and (9) are proved by Titchmarsh<sup>11</sup> with  $\alpha = \frac{4}{5} + \varepsilon^{12}$ ,  $A = A_1$ ,  $\alpha_1 = \frac{6}{5}$  and hence by a known method<sup>13</sup> we can show that (10), (11) are true for  $A = \frac{1}{8} A_1$ .

2) For  $c$  and  $\alpha_1 \geq 1$  satisfying (5), (9) we have uniformly in  $\sigma$

$$(12) \quad \zeta(\sigma + iT) = \begin{cases} O(T^{2c(1-\sigma)} \log^{\alpha_1} T) & \text{for } \frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1 \\ O(T^{(2c-1)\sigma + \frac{1}{2}} \log^{\alpha_1} T) & \text{for } 0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(13) \quad \int_0^T |\zeta(\sigma + it)|^2 dt = \begin{cases} O(T^{2-2\sigma}) & \text{for } \sigma < \frac{1}{2} \\ O(T \log T) & \text{for } \sigma = \frac{1}{2} \end{cases}$$

<sup>11</sup> Titchmarsh (7).

<sup>12</sup> For a better value of  $\alpha (= \frac{3}{4} + \varepsilon)$  see Čudakov (11).

<sup>13</sup> See Landau (6) or Titchmarsh (8) Theorem 14.



(12) is a consequence of the Phragmén-Lindelöf theorem<sup>14</sup>, (5), (9) and the known property

$$\zeta(it) = O(t^{\frac{1}{2}} \log t).$$

For (13) see Ingham (2) formulae (4), (5) and the references given there.

3) Let  $\omega = \omega(\sigma)$  ( $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1$ ) be a function satisfying Lipschitz condition  $|\omega(\sigma) - \omega(\sigma')| < C|\sigma - \sigma'|$  and  $\zeta(\sigma + it) = O(t^\omega \log^\beta t)$  as  $t \rightarrow \infty$ . Then we have uniformly in  $\sigma$  ( $\sigma_0 + \delta \leq \sigma \leq \sigma_1 - \delta$ ,  $\delta > 0$ )

$$(14) \quad \zeta'(\sigma + it) = O(t^{\omega(\sigma)} \log^{\beta+1} t) \quad (t \rightarrow \infty).$$

This can be proved applying Cauchy's theorem

$$f'(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{(z-s)^2}$$

to  $f(s) = \zeta(s)$  where  $\Gamma$  is a circle with centre  $s$  and radius  $\log^{-1} t$ .

4) For  $\sigma \geq \sigma_0 > 0$ ,  $|t| < bT$ ,  $b < 2\pi$  we have uniformly

$$(15) \quad \zeta(s) = \sum_{n \leq T} n^{-s} - \frac{T^{1-s}}{1-s} + O(T^{-\sigma}).$$

For a proof see Hardy and Littlewood (13) Lemma 2 or Titchmarsh (8) Theorem 19.

5) Let

$$(16) \quad M_X(s) = \sum_{n < X} \frac{\mu(n)}{n^s} \quad (X > 1)$$

and  $1 \leq k \leq k_0$ . Then there exists a number  $B$  depending on  $k_0$  only, such that for  $\sigma \geq \frac{1}{2}$  we have

$$(17) \quad \int_0^T |M_X(\sigma + kit)|^2 dt < B(T+X) \log X.$$

For  $k=1$  and  $\sigma = \frac{1}{2}$  this is proved by Ingham<sup>15</sup> and the proof still holds for

$$\sigma > \frac{1}{2}, \quad 1 < k \leq k_0.$$

<sup>14</sup> See for example Titchmarsh (9) p. 180.

<sup>15</sup> Ingham (1) p. 260.

(5) 6) Let the arithmetical function  $\alpha(n)$  be defined by

$$\frac{1}{\zeta^2(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(n)}{n^s} \quad (s = \sigma + it, \sigma > 1),$$

i. e. if  $\nu_1(n)$  denote the number of quadratfrei prime factors of  $n$ ,

$$\alpha(n) = \begin{cases} (-2)^{\nu_1(n)} & \text{for } n \text{ not divisible by a cube } > 1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Further let  $X > 1$ ,  $T > 0$  and

$$(18) \quad A_X(s) = \sum_{n < X} \frac{\alpha(n)}{n^s}$$

Then we have

$$(19) \quad |A_X(\sigma + it)| \leq \sum_{n < X} \frac{d(n)}{n^\sigma} = O\left(\frac{\sigma X^{1-\sigma}}{(1-\sigma)^2} \log X\right) \text{ for } 0 < \sigma < 1,$$

$$(20) \quad \int_0^T |A_X(\sigma + it)|^2 dt < C_1 (T + X) \log^4 X \text{ for } \sigma \geq \frac{1}{2}.$$

Since  $|\alpha(n)| \leq d(n)$  for all  $n \geq 1$  and<sup>16</sup>

$$\sum_{n \leq x} d(n) < C_2 x \log x \quad (x > 2),$$

we have for  $0 < \sigma < 1$

$$|A_X(\sigma + it)| \leq \sum_{n < X} \frac{d(n)}{n^\sigma} = \sigma \sum_{n < X} d(n) \left\{ \int_n^X \frac{dx}{x^{1+\sigma}} + X^{-\sigma} \right\}$$

$$= \sigma \left\{ \int_1^X x^{-1-\sigma} \sum_{n \leq x} d(n) dx + X^{-\sigma} \sum_{n < X} d(n) \right\}$$

$$= O\left\{ \sigma X^{1-\sigma} \left( \frac{\log X}{1-\sigma} - \frac{1}{(1-\sigma)^2} + \log X \right) \right\},$$

whence (19) follows.

For  $\sigma \geq \frac{1}{2}$  the following estimate holds good

<sup>16</sup> See for example Hardy and Wright (14) Chap. XVIII.

$$\int_0^T |A_X(\sigma + it)|^2 dt \leq T \sum_{n < X} \frac{\alpha^2(n)}{n^{2\sigma}} +$$

$$+ 4 \sum_{m < n < X} \frac{|\alpha(m)\alpha(n)|}{(mn)^\sigma \log \frac{n}{m}} \leq T \sum_{n < X} \frac{d^2(n)}{n} + 4 \sum_{m < n < X} \frac{d(m)d(n)}{(mn)^{\frac{1}{2}} \log \frac{n}{m}}$$

Since<sup>17</sup>

$$\sum_{n \leq x} d^2(n) < C_3 x \log^3 x \quad (x \geq 2)$$

$$\sum_{m < n < x} \frac{d(m)d(n)}{(mn)^{\frac{1}{2}} \log \frac{n}{m}} < C_4 x \log^3 x \quad (x > 1)$$

we have

$$\sum_{n < X} \frac{d^2(n)}{n} = \sum_{n < X} d^2(n) \left\{ \int_n^X \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{X} \right\} = \int_1^X x^{-2} \sum_{n \leq x} d^2(n) dx +$$

$$+ \frac{1}{X} \sum_{n < X} d^2(n) < C_5 \log^4 X.$$

This proves (20).

Lemma 1. Let

$$f_X(s) = \zeta(s) M_X(s) - 1$$

where  $M_X(s)$  is defined by (16). Then for  $X = O(T)$ ,  $T = O(X)$ ,  $1 \leq k \leq k_0$  and all  $\sigma$  of the interval  $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$  there holds the inequality

$$\int_1^T |f_X(\sigma + kit)|^2 dt < BT^{(2+4c)(1-\sigma)} \log^4 T$$

where  $B$  is a number depending on  $k_0$  only and  $c$  is any constant satisfying (5).

This is a consequence of Theorem 2 of Ingham (1).

Lemma 2. Let

$$F_X(s) = \zeta^2(s) A_X(s) - 1$$

<sup>17</sup> See the reference given on page 259 of Ingham (1).

where  $A_X(s)$  is defined by (18). Then, if  $c$  is a constant for which (5) is true,

$$\int_1^T |F_X(\sigma + it)|^2 dt < C \frac{T^{8c(1-\sigma)}}{X^{2\sigma-1}} (T+X) \log^8(T+X)$$

for  $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1, T > 1$ .

This lemma is a complete analogy of Theorem 2 of Ingham (1). Therefore we shall sketch the proof only as far as it differs from that of Ingham's theorem.

We may suppose  $X \geq 2$ ; for  $\sigma > 1$  we have

$$F_X(s) = \zeta^2(s) \left\{ \frac{1}{\zeta^2(s)} - \sum_{n \geq X} \frac{\alpha(n)}{n^s} \right\} - 1 = -\zeta^2(s) \sum_{n \geq X} \frac{\alpha(n)}{n^s},$$

whence

$$\int_0^T |F_X(s)|^2 dt = \int_0^T |\zeta(s)|^4 \left| \sum_{n \geq X} \frac{\alpha(n)}{n^s} \right|^2 dt \leq \zeta^4(\sigma) \int_0^T \left| \sum_{n \geq X} \frac{\alpha(n)}{n^s} \right|^2 dt.$$

Let  $\sigma = 1 + \delta, 0 < \delta < 1$ . Then the last integral is equal to

$$\begin{aligned} & \int_0^T \sum_{n \geq X} \frac{\alpha(n)}{n^{1+\delta+ti}} \sum_{m \geq X} \frac{\alpha(m)}{m^{1+\delta-ti}} dt \\ &= \sum_{m, n \geq X} \frac{\alpha(m)\alpha(n)}{(mn)^{1+\delta}} \int_0^T \left(\frac{m}{n}\right)^{ti} dt = \sum_{m=n} T + 2 \Re \sum_{m < n} \\ &\leq T \sum_{n \geq X} \frac{\alpha^2(n)}{n^{2+2\delta}} + 4 \sum_{n > m \geq X} \frac{|\alpha(m)\alpha(n)|}{(mn)^{1+\delta} \log \frac{n}{m}} \\ &\leq T \sum_{n \geq X} \frac{d^2(n)}{n^{2+2\delta}} + 4 \sum_{n > m \geq X} \frac{d(m)d(n)}{(mn)^{1+\delta} \log \frac{n}{m}}. \end{aligned}$$

In Ingham's paper this sum is proved to be

$$< C_6 \left( \frac{T}{X} + 1 \right) \delta^{-4}.$$



Hence we have

$$(21) \quad \int_0^T |F_X(1 + \delta + ti)|^2 dt < C_7 \left(\frac{T}{X} + 1\right) \delta^{-8}.$$

By means of the inequality

$$|F_X|^2 \leq 2(|\zeta|^4 |A_X|^2 + 1),$$

(5) and (20) we deduce the estimate

$$(22) \quad \int_0^T \left|F_X\left(\frac{1}{2} + it\right)\right|^2 dt < C_8 T^{4c} (T + X) \log^4 X$$

holding down to  $T=0$ .

Now we define

$$\Phi(s) = \Phi_{X,\tau}(s) = \frac{(s-1)^2}{s^2 \cos \frac{s}{2\tau}} F_X(s) \quad \left(\tau > \frac{3}{\pi}\right),$$

$$J_\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(\sigma + it)|^2 dt.$$

Using (21) and (22) we get in the same manner as in Ingham's theorem

$$(23) \quad J_\sigma < \left\{ C_9 \left(\frac{\tau}{X} + 1\right) \delta^{-8} \right\}^{\frac{1}{2} + \delta} \left\{ C_{10} \tau^{4c} (\tau + X) \log^4 X \right\}^{\frac{1}{2} + \delta}$$

for  $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1 + \delta$ . Since

$$|\Phi(s)|^2 \geq C_{11} e^{-\frac{t}{\tau}} |F_X(s)|^2 \quad \left(\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1 + \delta, t \geq 1\right),$$

we deduce from (23) that for  $T > 1, \frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$

$$C_{11} e^{-\frac{T}{\tau}} \int_1^T |F_X(\sigma + it)|^2 dt < X^{1+2\delta} \tau^{\frac{c(1+\delta-\sigma)}{1+2\delta}} (\tau + X) \text{Max}(C_9 \delta^{-8}, C_{10} \log^4 X)$$

Taking now

$$\tau = C_{12} T, \quad \delta = \frac{C_{13}}{\log(T + X)}, \quad c < \frac{1}{2},$$

we get the lemma, since

$$X^{\frac{1-2\sigma}{1+2\delta}} < e^{2C_{13}} X^{-(2\sigma-1)}, T^{\frac{8c(1+\delta-\sigma)}{1+2\delta}} < e^{4C_{13}} T^{8c(1-\sigma)}. \tag{21}$$

Lemma 3. Let  $\alpha(x)$  for  $x > x_0$  be a positive non-decreasing function of  $x$  such that  $\alpha(2x) = O\{\alpha(x)\}$  and for all  $n > x_0$

$$a_n = O\{\alpha(n)\}.$$

Further suppose the series

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \tag{22}$$

is convergent for  $\sigma > 1$ , and for  $1 < \eta < 2$  and for some fixed  $l$

$$(\eta - 1)^l \sum \frac{|a_n|}{n^\eta} \tag{23}$$

is bounded. Then we have uniformly for  $1 < \eta < 2, T > 0, x > 2$

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} a_n - \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti} \frac{x^s}{s} f(s) ds \\ = O\left(\frac{x^\eta}{T(\eta-1)^l} + \frac{x\alpha(x) \log x}{T} + \alpha(x)\right). \end{aligned} \tag{24}$$

For  $l=1$  and  $\alpha(x) = \log x$  the lemma is proved by Landau<sup>18</sup>. But there are no difficulties in repeating the same argument and proving (24) under the generalised conditions.

Lemma 4. Let  $f(s)$  satisfy the conditions of Lemma 3 and  $\alpha(x) = o(x^\varepsilon)$  for all  $\varepsilon > 0$ . Further suppose

$$T > t_0, \quad x = T^a$$

( $a$  may depend on  $T$  but for  $T > t_0$  it satisfies the inequalities  $1 + \varepsilon < a \leq a_0$  for some constant  $\varepsilon > 0$ ),

$$\eta = 1 + \log^{-1} T, \quad h < x$$

and

$$h \geq x^{1-\frac{1}{a}} \log^{1+\delta} x. \quad \text{Max}\{\log^{l-1} x, \alpha(x)\}, \quad \delta \geq \delta_0 > 0.$$

<sup>18</sup> Landau (5) Hilfssatz 3.

Then

$$(25) \quad \sum_{x < n \leq x+h} a_n - \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti} \{(x+h)^s - x^s\} \frac{f(s)}{s} ds = o(h),$$

as  $x \rightarrow \infty$ .

Putting in turn  $x+h$  and  $x$  in (24) we get for the left hand side of (25) the estimate

$$\begin{aligned} & O \left( \frac{(x+h)^\eta}{T(\eta-1)!} + \frac{(x+h)^\alpha (x+h) \log(x+h)}{T} + \alpha(x+h) \right) \\ &= O \left( xT^{-1} \log^l T + xT^{-1} \alpha(x) \log x + \alpha(x) \right) \\ &= O \left( x^{1-\frac{1}{a}} \log^l x + x^{1-\frac{1}{a}} \alpha(x) \log x \right) \\ &= o(h). \end{aligned}$$

### Theorem 1.

*Notation.* In the following paragraph  $g(s)$  denote any of the functions

$$1, -\zeta'(s), \zeta(2s), \zeta(2s) \frac{\zeta(s+1)}{\zeta(2s+2)}, \zeta(2s) \frac{\zeta(2s+2)}{\zeta(s+1)}$$

and

$$f(s) = \frac{g(s)}{\zeta(s)}.$$

Further let  $A$ ,  $\alpha$  and  $t_0$  be the constants of (7) and  $T$ ,  $\eta$ ,  $a$ ,  $x$ ,  $h$  be as explained in Lemma 4. We define

$$\sigma_0 = 1 - A \log^{-\alpha} T,$$

$$\sigma_1 = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{for } g(s) = 1, -\zeta'(s) \\ \frac{1}{2} + \log^{-1} T & \text{for other cases.} \end{cases}$$

$L, L_1, \dots$  are straight lines joining the points

$L) \eta - iT, \eta + iT; L_1) \sigma_0 + iT, \eta + iT; L_2) \sigma_0 - iT, \sigma_0 + iT; L_3) \eta - iT, \sigma_0 - iT;$   
 $L_{21}) \sigma_1 + iT, \sigma_0 + iT; L_{22}) \sigma_1 - iT, \sigma_1 + iT; L_{23}) \sigma_0 - iT, \sigma_1 - iT,$   
 respectively.

$y$  is any number satisfying the inequalities

$$x \leq y \leq x + h.$$

Lemma 5. We have for  $x \rightarrow \infty$

$$I_1 = \int_{L_1} \{(x+h)^s - x^s\} \frac{f(s)}{s} ds = o(h) \quad (25)$$

$$I_3 = \int_{L_3} \{(x+h)^s - x^s\} \frac{f(s)}{s} ds = o(h).$$

Let us consider for example the integral  $I_1$ . On  $L_1$  we have  $(x+h)^s - x^s = O(x)$  and  $f(s) = O(\log^\alpha T)$  by (10), (11). Since the length of  $L_1$  is  $O(\log^{-\alpha} T)$ , we have

$$I_1 = O(x T^{-1}) = O\left(x^{1-\frac{1}{a}}\right) = o(h).$$

The same argument proves  $I_3 = o(h)$ .

Lemma 6. If  $f_T(s)$  is the function of Lemma 1, we have for  $a > 2 + 4c$ ,  $x \rightarrow \infty$

$$J_1 = \int_{L_2} y^{s-1} f(s) f_T^2(s) ds = o(1).$$

Let us divide the path of integration into two parts

$$L'_2 (|t| \leq t_0), \quad L''_2 (|t| > t_0)$$

and denote the corresponding parts of  $J_1$  by  $J'_1, J''_1$ .

If  $T$  is large enough,  $\zeta(s)$  does not vanish in the neighbourhood of  $L'_2$  and hence for any of the  $f(s)$  defined above we have along  $L'_2$

$$f(s) = O\left(\frac{1}{1-\sigma_0}\right) = O(\log^\alpha T).$$

Similarly

$$\begin{aligned} f_T^2(s) &= \zeta^2(s) M_T^2(s) - 2\zeta(s) M_T(s) + 1 = O\left(\frac{1}{(1-\sigma_0)^2} \frac{T^{2(1-\sigma_0)}}{(1-\sigma_0)^2}\right) \\ &= O(T^{2(1-\sigma_0)} \log^{4\alpha} T). \end{aligned}$$

Therefore we have

$$\begin{aligned} J'_1 &= O(y^{\sigma_0-1} T^{2(1-\sigma_0)} \log^{5\alpha} T) = O(T^{-(a-2)(1-\sigma_0)} \log^{5\alpha} T) \\ &= O \exp\{-(a-2)A \log^{1-\alpha} T + 5\alpha \log \log T\} \\ &= o(1). \end{aligned}$$



Dealing with  $J_1''$  we make use of Lemma 1, (10), (11) and obtain the estimate

$$J_1'' = O(y^{\sigma_0-1} \log^\alpha T) \int_{i_0}^T |f_T(\sigma_0 + it)|^2 dt = O(T^{(2+4c-a)(1-\sigma_0)} \log^{\alpha+4} T).$$

Hence  $J_1'' = o(1)$  for all  $a > 2 + 4c$ . This proves the lemma.

Lemma 7. Let  $M_T(s)$  be defined by (16). Then we have for  $a > 2, x \rightarrow \infty$

$$J_2 = \int_{L_2} y^{s-1} g(s) M_T(s) ds = o(1).$$

We have to consider different cases of  $g(s)$  separately.

1) For  $g(s) = 1$  we have

$$\begin{aligned} J_2 &= iy^{\sigma_0-1} \sum_{n < T} \frac{\mu(n)}{n^{\sigma_0}} \int_{-T}^T \left(\frac{y}{n}\right)^{it} dt = O\left(y^{\sigma_0-1} \sum_{n < T} n^{-\sigma_0} \log^{-1} \frac{y}{n}\right) \\ &= O(y^{\sigma_0-1} \log^{-1} T) \sum_{n < T} n^{-\sigma_0} = O(T^{(1-a)(1-\sigma_0)} \log^{\alpha-1} T) \\ &= o(1). \end{aligned}$$

2) In the case of  $g(s) = \zeta(2s)$ ,

$$\zeta(2s) \frac{\zeta(s+1)}{\zeta(2s+2)} \text{ or } \zeta(2s) \frac{\zeta(2s+2)}{\zeta(s+1)}$$

we make use of Cauchy's theorem and replace  $L_2$  by  $L_{21}, L_{22}, L_{23}$ . If the corresponding parts of  $J_2$  are  $J_{21}, J_{22}, J_{23}$  we have

$$\begin{aligned} J_{21} &= O(y^{-1} \log T) \sum_{n < T} \int_{\sigma_1}^{\sigma_0} \left(\frac{y}{n}\right)^\sigma d\sigma = O(y^{-(1-\sigma_0)}) \sum_{n < T} n^{-\sigma_0} \\ &= O(T^{(1-a)(1-\sigma_0)} \log^\alpha T) = o(1), \end{aligned}$$

and similarly  $J_{23} = o(1)$ .

Obviously

$$\int_{L_{22}} |\zeta(2s)|^2 dt \leq \zeta^2(2\sigma_1) \int_{-T}^T dt = O(T \log^2 T).$$

Hence we get by (17)

$$\begin{aligned} J_{22} &= O\left(y^{-\frac{1}{2}}\right) \int_{L_{22}} |\zeta(2s) M_T(s)| dt \\ &= O\left(y^{-\frac{1}{2}}\right) \left( \int_{L_{22}} |\zeta(2s)|^2 dt \int_{L_{22}} |M_T(s)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= O\left(T^{1-\frac{a}{2}} \log^3 T\right) = o(1). \end{aligned}$$

3) We could deal similarly with the case of  $g(s) = -\zeta'(s)$  by making use of (12), (14) and the known<sup>19</sup> mean value of  $\zeta'(s)$

$$\int_0^T \left| \zeta'\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 dt = O(T \log^3 T).$$

Or, if we integrate by parts

$$\int y^{s-1} \zeta'(s) M_T(s) ds = y^{s-1} \zeta(s) M_T(s) - y^{-1} \sum_{n < T} \mu(n) \log \frac{y}{n} \int \left(\frac{y}{n}\right)^s \zeta(s) ds$$

and use the approximate functional equation for  $\zeta(s)$ , (15), we get  $J_2$  as a sum of four terms  $J_{21}, \dots, J_{24}$ , say. They are

$$\begin{aligned} J_{21} &= \left[ y^{s-1} \zeta(s) M_T(s) \right]_{\sigma_0-iT}^{\sigma_0+iT}, \quad J_{22} = y^{-1} \sum_{m, n \leq T} \mu(n) \log \frac{y}{n} \int_{L_2} \left(\frac{y}{mn}\right)^s ds, \\ J_{23} &= y^{-1} T \sum_{n < T} \mu(n) \log \frac{y}{n} \int_{L_2} \left(\frac{y}{nT}\right)^s \frac{ds}{1-s}, \quad J_{24} = O(y^{\sigma_0-1} T^{1-\sigma_0}) \sum_{n < T} n^{-\sigma_0} \log \frac{y}{n}, \end{aligned}$$

Obviously

$$J_{21} = O(T^{(1-a)(1-\sigma_0)} \log^{\alpha+\alpha_1} T) = o(1)$$

$$\begin{aligned} J_{24} &= O(T^{(1-a)(1-\sigma_0)} \log T) \sum_{n < T} n^{-\sigma_0} = O(T^{(2-a)(1-\sigma_0)} \log^{1+\alpha} T) \\ &= o(1). \end{aligned}$$

Assuming  $y > eT^2$  we get

$$\begin{aligned} J_{22} &= iy^{\sigma_0-1} \sum_{m, n \leq T} \frac{\mu(n)}{(mn)^{\sigma_0}} \log \frac{y}{n} \int_{-T}^T \left(\frac{y}{mn}\right)^{it} dt = O(y^{\sigma_0-1} \log T) \left( \sum_{n \leq T} n^{-\sigma_0} \right)^2 \\ &= O(T^{(2-a)(1-\sigma_0)} \log^{1+2\alpha} T) = o(1), \end{aligned}$$

<sup>19</sup> Ingham (2) Theorem A".

and similarly

$$\begin{aligned} J_{23} &= O(y^{2\alpha_0-1} T^{1-\sigma_0} \log T) \sum_{n < T} n^{-\sigma_0} \int_0^T \frac{dt}{|1-\sigma_0+it|} \\ &= O(T^{2-a(1-\sigma_0)} \log^{2+\alpha} T) \\ &= o(1). \end{aligned}$$

This proves the lemma.

Lemma 8. For  $a > 2 + 4c$ ,  $x \rightarrow \infty$  we have

$$J_3 = \int_{L_3} y^{s-1} g(s) \zeta(s) M_T^2(s) ds = o(1).$$

Let us replace the path of integration by  $L_{21}$ ,  $L_{22}$ ,  $L_{23}$  and denote by  $J_{31}$ ,  $J_{32}$ ,  $J_{33}$  the corresponding parts of  $J_3$ .

On  $L_{21}$  we use (12), (14) and get for all defined  $g(s)$

$$\begin{aligned} J_{31} &= O(y^{-1} \log^{2\alpha_1+1} T) \sum_{m, n < T^{\sigma_1}} \int_{\sigma_1}^{\sigma_0} y^\sigma T^{4c(1-\sigma)} (mn)^{-\sigma} d\sigma \\ &= O(y^{-1} T^{4c} \log^{2\alpha_1+1} T) \sum_{m, n} \int_{\sigma_1}^{\sigma_0} \left( \frac{y}{mn T^{4c}} \right)^\sigma d\sigma. \end{aligned}$$

For  $a = 2 + 4c + \varepsilon$  and  $T > T_0(\varepsilon)$  we have  $y > e mn T^{4c}$ . Therefore

$$\begin{aligned} J_{31} &= O\left(y^{-(1-\sigma_0)} T^{4c(1-\sigma_0)} \log^{2\alpha_1+1} T\right) \left(\sum_{n < T} n^{-\sigma_0}\right)^2 \\ &= O(T^{(2+4c-a)(1-\sigma_0)} \log^{2\alpha+2\alpha_1+1} T) = o(1). \end{aligned}$$

The same argument proves  $J_{33} = o(1)$ .

By (5) and (14) we have for  $t \rightarrow \infty$

$$g\left(\frac{1}{2} + it\right) = O(t^c \log t).$$

Hence using (17) we get

$$\begin{aligned} J_{32} &= O\left(y^{-\frac{1}{2}} T^{2c} \log T\right) \int_0^T |M_T(\sigma_1 + it)|^2 dt = O\left(T^{1+2c-\frac{a}{2}} \log^2 T\right) \\ &= o(1). \end{aligned}$$

This proves the lemma.

Lemma 9. For  $a > 2 + 4c$ ,  $x \rightarrow \infty$  we have

$$I_2 = \int_{L_2} \left\{ (x+h)^s - x^s \right\} \frac{f(s)}{s} ds = o(h).$$

Let us consider first the integral

$$J = \int_{L_2} y^{s-1} f(s) ds.$$

Multiplying the identity (see Lemma 1)

$$f_T^2(s) = \zeta^2(s) M_T^2(s) - 2\zeta(s) M_T(s) + 1$$

by

$$f(s) = \frac{g(s)}{\zeta(s)},$$

we get an expression for  $f(s)$

$$f(s) = f(s) f_T^2(s) + 2g(s) M_T(s) - g(s) \zeta(s) M_T^2(s),$$

which enables us to write  $J$  as a sum of the integrals  $J_1, J_2, J_3$  considered in Lemmas 6—8. Hence  $J = o(1)$  for the stated values of  $a$ .

Returning to  $I_2$  we get at once

$$I_2 = \int_x^{x+h} J dy = o(h).$$

Theorem 1. For  $h$  defined by (3), (4) we have

$$\sum_{x < n \leq x+h} \Lambda(n) = h + o(h)$$

$$\sum_{x < n \leq x+h} \mu(n) = o(h), \quad \sum_{x < n \leq x+h} \lambda(n) = o(h)$$

$$\sum_{x < n \leq x+h} \lambda(n) \frac{\varphi(n)}{n} = o(h), \quad \sum_{x < n \leq x+h} \lambda(n) \frac{\sigma(n)}{n} = o(h),$$

as  $x \rightarrow \infty$ .

Let us consider the integral of Lemma 4

$$I = \int_L \left\{ (x+h)^s - x^s \right\} \frac{f(s)}{s} ds.$$

The integrand is regular in the rectangle with the sides  $L, L_1, L_2, L_3$ , except (possibly) for a single pole at  $s = 1$  with residue  $\gamma h$ . Therefore

$$I = 2\pi i \gamma h + I_1 + I_2 + I_3.$$



Since  $I_1, I_2, I_3$  are each  $o(h)$  by Lemmas 5, 9 and since

$$\gamma = \begin{cases} 1 & \text{for } g(s) = -\zeta'(s) \\ 0 & \text{for other cases,} \end{cases}$$

the theorem follows by Lemma 4.

### Theorem 2.

Let us denote now by  $g(s)$  any of the functions

$$\zeta(2s), \zeta^2(2s)$$

and let

$$f(s) = \frac{g(s)}{\zeta^2(s)},$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} + \log^{-1} T.$$

All other symbols keep their previous meaning.

Lemma 10. We have for  $x \rightarrow \infty$

$$I_1 = \int_{L_1} \left\{ (x+h)^s - x^s \right\} \frac{f(s)}{s} ds = o(h)$$

$$I_3 = \int_{L_3} \left\{ (x+h)^s - x^s \right\} \frac{f(s)}{s} ds = o(h).$$

By the same argument as in Lemma 5 we prove

$$I_1 = O(x T^{-1} \log^\alpha T) = O(x^{1-\frac{1}{a}} \log^\alpha x) = o(h)$$

and  $I_3 = o(h)$ .

Lemma 11. Let  $F_T(s)$  be the function of Lemma 2. Then we have for  $a > 2 + 8c$ ,  $x \rightarrow \infty$

$$J_1 = \int_{L_2} y^{s-1} f(s) F_T^2(s) ds = o(1).$$

Dividing the path of integration in the same manner as in Lemma 6 and using (19) and Lemma 2 we get the estimates for the corresponding parts of  $J_1$

$$J_1' = O(T^{(2-a)(1-\sigma_0)} \log^{2+10\alpha} T)$$

$$J_1'' = O(T^{(2+8c-a)(1-\sigma_0)} \log^{8+2\alpha} T).$$

Hence  $J_1 = J'_1 + J''_1 = o(1)$  for all  $a > 2 + 8c$ .

Lemma 12. For  $a > 2$ ,  $x \rightarrow \infty$  we have

$$J_2 = \int_{L_2} y^{s-1} g(s) A_T(s) ds = o(1).$$

The proof is about the same as that of the second case in Lemma 7. First  $L_2$  is replaced by  $L_{21}, L_{22}, L_{23}$ ; then we use (19) and (20) and get the estimates of the corresponding parts of  $J_2$  as follows:

$$\begin{aligned} J_{21} &= O(y^{-1} \log^2 T) \sum_{n < T} d(n) \int_{\sigma_1}^{\sigma_0} \left(\frac{y}{n}\right)^\sigma d\sigma = O(y^{-(1-\sigma_0)} \log T) \sum_{n < T} \frac{d(n)}{n^{\sigma_0}} \\ &= O(T^{(1-a)(1-\sigma_0)} \log^{2+2\alpha} T) = o(1), \end{aligned}$$

$$J_{23} = o(1),$$

$$\begin{aligned} J_{22} &= O\left(y^{-\frac{1}{2}}\right) \int_{L_{22}} |g(s) A_T(s)| dt = O\left(y^{-\frac{1}{2}}\right) \left\{ \int_{L_{22}} |\zeta(2s)|^4 dt \int_{L_{22}} |A_T(s)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= O\left(T^{1-\frac{a}{2}} \log^4 T\right) = o(1). \end{aligned}$$

Lemma 13. For  $a > 2 + 4c$ ,  $x \rightarrow \infty$  we have

$$J_3 = \int_{L_3} y^{s-1} g(s) \zeta^2(s) A_T^2(s) ds = o(1).$$

We replace  $L_2$  by  $L_{21}, L_{22}, L_{23}$  and use (12), (19), (20). Assuming  $y > e T^{2+4c}$  we get the following estimates of the corresponding parts of  $J_3$ :

$$\begin{aligned} J_{31} &= O(y^{-1} T^{4c} \log^{2+2\alpha_1} T) \sum_{m, n < T} d(m) d(n) \int_{\sigma_1}^{\sigma_0} \left(\frac{y}{mn T^{4c}}\right)^\sigma d\sigma \\ &= O(y^{-(1-\sigma_0)} T^{4c(1-\sigma_0)} \log^{2+2\alpha_1} T) \sum_{m, n} \frac{d(m) d(n)}{(mn)^{\sigma_0}} \\ &= O(T^{(4c-a)(1-\sigma_0)} \log^{2+2\alpha_1} T) \left( \sum_{n < T} \frac{d(n)}{n^{\sigma_0}} \right)^2 \\ &= O(T^{(2+4c-a)(1-\sigma_0)} \log^{4+4\alpha+2\alpha_1} T) = o(1), \end{aligned}$$

$$J_{33} = o(1),$$

$$\begin{aligned} J_{32} &= O\left(y^{-\frac{1}{2}} T^{2c} \log^{2+2\alpha_1} T\right) \int_0^T |A_T(\sigma_1 + it)|^2 dt \\ &= O\left(T^{1+2c-\frac{a}{2}} \log^{6+2\alpha_1} T\right) = o(1). \end{aligned}$$

Lemma 14. For  $a > 2 + 8c$ ,  $x \rightarrow \infty$  we have

$$I_2 = \int_{L_2} \left\{ (x+h)^s - x^s \right\} \frac{f(s)}{s} ds = o(h).$$

To prove this we use the identity

$$F_T^2(s) = \zeta^4(s) A_T^2(s) - 2\zeta^2(s) A_T(s) + 1,$$

and Lemmas 11, 12, 13 and argue in the same manner as in Lemma 9.

Theorem 2. For  $h$  defined by (3), (6) we have

$$\sum_{x < n \leq x+h} \lambda(n) 2^{v(n)} = o(h), \quad \sum_{x < n \leq x+h} \lambda(n) d(n) = o(h)$$

as  $x \rightarrow \infty$ .

For the proof compare Theorem 1 and Lemmas 4, 10, 14.

### Theorem 3.

Let us denote by  $f(s)$  the function

$$f(s) = \frac{\zeta(s)}{\zeta(ks)}$$

where  $k$  is an integer,  $1 < k \leq k_0$ , and let  $L, L_1, \dots$  be straight lines joining the points

$$\begin{aligned} L) & \eta - iT, \eta + iT; L_1) \frac{1}{k} + iT, \eta + iT; L_2) \frac{1}{k} - iT, \frac{1}{k} + iT; \\ L_3) & \eta - iT, \frac{1}{k} - iT; L_{21}) \frac{1}{2k} + iT, \frac{1}{k} + iT; L_{22}) \frac{1}{2k} - iT, \frac{1}{2k} + iT; \\ & L_{23}) \frac{1}{k} - iT; \frac{1}{2k} - iT. \end{aligned}$$

The notation remains in other respects as in Theorem 1

Lemma 15. For  $a > 1$ ,  $x \rightarrow \infty$  we have

$$I_1 = \int_{L_1} \left\{ (x+h)^s - x^s \right\} \frac{f(s)}{s} ds = o(h)$$

$$I_3 = \int_{L_3} \left\{ (x+h)^s - x^s \right\} \frac{f(s)}{s} ds = o(h).$$

Let us divide  $L_1$  into three parts as follows:

$$L_{11} \left( \frac{1}{k} \leq \sigma \leq \frac{1}{2} \right), L_{12} \left( \frac{1}{2} \leq \sigma \leq \sigma_0 \right), L_{13} (\sigma_0 \leq \sigma \leq \eta)$$

(for  $k = 2$  the first part does not exist its length being zero).

On  $L_{11}, L_{12}$  we shall consider instead of  $I_1$  the integral

$$H = \int y^{s-1} f(s) ds$$

and denote by  $H_1, H_2$  the parts of  $H$  corresponding to  $L_{11}, L_{12}$ .

Making use of (11), (12) we get the results

$$H_1 = O \left( y^{-1} T^{\frac{1}{2}} \log^{\alpha+\alpha_1} T \right) \int_{\frac{1}{k}}^{\frac{1}{2}} (y T^{2c-1})^\sigma d\sigma = O \left( T^{c-\frac{a}{2}} \log^{\alpha+\alpha_1-1} T \right),$$

$$H_2 = O \left( y^{-1} T^{2c} \log^{\alpha+\alpha_1} T \right) \int_{\frac{1}{2}}^{\sigma_0} (y T^{-2c})^\sigma d\sigma.$$

Since  $c$  can be taken  $< \frac{1}{2}$ , we have

$$H_1 = o(1),$$

$$H_2 = O \left( T^{(2c-a)(1-\sigma_0)} \log^{\alpha+\alpha_1-1} T \right) = o(1).$$

Hence the part of  $I_1$  corresponding to  $L_{11}, L_{12}$  is

$$I'_1 = \int_x^{x+h} (H_1 + H_2) dy = o(h).$$

The remaining part of  $I_1$  is obviously

$$I''_1 = (\eta - \sigma_0) O(x T^{-1} \log^{\alpha_1} T) = O(x^{1-\frac{1}{a}} \log^{\alpha_1-\alpha} x) = o(h)$$

[since  $\alpha_1 - \alpha$  can be taken  $< 1$ ]. Hence  $I_1 = I'_1 + I''_1 = o(h)$ .

The same argument holds for  $I_3$ .

**Lemma 16.** If  $f_T(s)$  is the function of Lemma 1, we have for  $a > 1, x \rightarrow \infty$

$$J_1 = \int_{L_2} y^{s-1} f(s) f_T(ks) ds = o(1).$$

Dividing  $L_2$  into the parts

$$L'_2 (|t| < t_0), L''_2 (|t| \geq t_0)$$



we consider the corresponding parts  $J'_1, J''_1$  of  $J_1$ . On  $L'_2$  we have

$$f(s) f_T(ks) = \zeta(s) M_T(ks) - \frac{\zeta(s)}{\zeta(ks)} = O(\log T).$$

Therefore

$$J'_1 = O(y^{\frac{1}{k}-1} \log T) = o(1).$$

On  $L''_2$  we make use of (13) and Lemma 1 and get the result

$$\begin{aligned} J''_1 &= O(T^{-a \frac{k-1}{k}} \log^\alpha T) \left( \int_{t_0}^T \left| \zeta\left(\frac{1}{k} + it\right) \right|^2 dt \int_{t_0}^T |f_T(1 + kit)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= O(T^{(1-a) \frac{k-1}{k}} \log^{\alpha + \frac{5}{2}} T) = o(1). \end{aligned}$$

This proves the lemma.

Lemma 17. For  $\frac{3k-1}{2k-1} + \frac{2k}{2k-1} \frac{\log \log T}{\log T} \leq a < 2$ ,  $x \rightarrow \infty$  we have

$$J_2 = \int_{L_2} y^{s-1} \zeta(s) M_T(ks) ds = o(1).$$

Let us replace  $L_2$  by  $L_{21}, L_{22}, L_{23}$ . On  $L_{21}$  we use (12) and the property

$$M_T(k\sigma + kiT) = O(T^{1-k\sigma} \log T) \quad \left(0 \leq \sigma \leq \frac{1}{k}\right).$$

The corresponding part of  $J_2$  is

$$J_{21} = O(y^{-1} T^{\frac{3}{2} \log^{1+\alpha_1} T}) \int_{\frac{1}{2k}}^{\frac{1}{k}} (y T^{2c-1-k})^\sigma d\sigma.$$

Since  $a < 2$  and  $c$  can be taken  $< \frac{1}{2}$ ,  $a + 2c - 1 - k$  is less than some negative constant  $-\delta < 0$ . Therefore we have

$$\begin{aligned} J_{21} &= O(y^{-1 + \frac{1}{2k}} T^{\frac{3}{2} - \frac{k+1-2c}{2k}} \log^{\alpha_1} T) = O(T^{\frac{2k-1}{2k} \left(1 + \frac{2c}{2k-1} - a\right)} \log^{\alpha_1} T) \\ &= o(1). \end{aligned}$$

The same result holds for  $J_{23}$ , the part of  $J_2$  corresponding to  $L_{23}$ . By (13) and (17) we have for the remaining part of  $J_2$

$$\begin{aligned}
 J_{22} &= O\left(y^{\frac{1}{2k}-1}\right) \left(\int_0^T \left|M_T\left(\frac{1}{2} + kit\right)\right|^2 dt \int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2k} + it\right)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= O\left(T^{-a\frac{2k-1}{2k} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2k} \log^2 T}\right) = o\left(T^{\frac{3k-1}{2k} - a\frac{2k-1}{2k} \log T}\right) \\
 &= o\left(T^{\frac{3k-1}{2k} - a\frac{2k-1}{2k} + \frac{\log \log T}{\log T}}\right).
 \end{aligned}$$

Hence  $J_{22} = o(1)$  for the stated values of  $a$ .

Lemma 18. For  $x \rightarrow \infty$  and the values of  $a$  of Lemma 17 we have

$$I_2 = \int_{L_2} \left\{ (x+h)^s - x^s \right\} \frac{f(s)}{s} ds = o(h).$$

From the identity  $f_T(ks) = \zeta(ks) M_T(ks) - 1$  (see Lemma 1) we deduce

$$f(s) = \zeta(s) M_T(ks) - f(s) f_T(ks).$$

Hence by Lemmas 16, 17 we have

$$J = \int_{L_2} y^{s-1} f(s) ds = J_2 - J_1 = o(1)$$

and consequently

$$I_2 = \int_x^{x+h} J dy = o(h).$$

Theorem 3. We have

$$\sum_{x < n \leq x+h} q(n) = \frac{h}{\zeta(k)} + o(h) \text{ for } h = x^{\frac{k}{3k-1}} \log^3 x,$$

as  $x \rightarrow \infty$ . In particular  $k=2$  gives

$$\sum_{x < n \leq x+h} |\mu(n)| = \frac{6}{\pi^2} h + o(h) \text{ for } h = x^{\frac{2}{5}} \log^3 x, x \rightarrow \infty.$$

Since the integrand of

$$I = \int_L \left\{ (x+h) - x^s \right\} \frac{f(s)}{s} ds, \quad f(s) = \frac{\zeta(s)}{\zeta(ks)}$$

is regular in the rectangle whose sides are  $L, L_1, L_2, L_3$ , except for a single pole at  $s=1$  with residue  $\frac{h}{\zeta(k)}$ , we have

$$I = \frac{2\pi i h}{\zeta(k)} + I_1 + I_2 + I_3.$$

$I_1, I_2, I_3$  being the integrals of Lemmas 15, 18, are  $= o(h)$  for

$$a = \frac{3k-1}{2k-1} + \frac{2k}{2k-1} \frac{\log \log T}{\log T}, T \rightarrow \infty.$$

By Lemma 4 the theorem holds for all  $h$  satisfying the inequalities

$$x > h \geq x^{1-\frac{1}{a}} \log^{1+\delta} x \quad (\delta > 0, x \rightarrow \infty)$$

and hence for

$$h = x^{\frac{k}{3k-1}} \log^3 x \quad (x \rightarrow \infty),$$

since we can prove that

$$x^{\frac{k}{3k-1}} \log^3 x$$

finally exceeds

$$x^{1-\frac{1}{a}} \log^{1+\delta} x, \text{ when } \delta \leq 1.$$

In fact we have for  $k \geq 2, T > T_0(k)$ ,

$$a = \frac{3k-1}{2k-1} + \frac{2k}{2k-1} \delta,$$

when  $\delta$  is put instead of

$$\frac{\log \log T}{\log T},$$

$$1 - \frac{1}{a} = \frac{k}{3k-1} + \frac{2k(2k-1)\delta}{(3k-1)(3k-1+2k\delta)} < \frac{k}{3k-1} + \frac{2k(2k-1)}{(3k-1)^2} \delta <$$

$$< \frac{k}{3k-1} + \frac{2k(2k-1)a}{(3k-1)^2} \frac{\log \log x}{\log x} < \frac{k}{3k-1} + \frac{6k^2}{(3k-1)^2} \frac{\log \log x}{\log x}$$

$$= \frac{k}{3k-1} + \frac{6}{\left(3-\frac{1}{k}\right)^2} \frac{\log \log x}{\log x} < \frac{k}{3k-1} + \frac{\log \log x}{\log x},$$

whence

$$x^{1-\frac{1}{a}} \log^{1+\delta} x < x^{\frac{k}{3k-1}} \log^{2+\delta} x \text{ for } x > x_0(k).$$

## REFERENCES

1. A. E. Ingham, On the difference between consecutive primes, *Quart. J. of Math.* 8 (1937) 255—266.
2. A. E. Ingham, Mean value theorems in the theory of the Riemann zeta-function, *Proc. London Math. Soc.* (2) 27 (1926) 273—300.
3. H. Heilbronn, Über den Primzahlsatz von Herrn Hoheisel, *Math. Zeitschrift* 36 (1933) 394—423.
4. G. Hoheisel, Primzahlprobleme in der Analysis, *Berliner Sitzungsberichte* (1930) 580—588.
5. E. Landau, Über einige Summen, die von den Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion abhängen, *Acta Mathematica* 35 (1912) 271—294.
6. E. Landau, Über die Riemannsche Zetafunktion in der Nähe von  $\sigma = 1$ , *Rend. di Palermo* 50 (1926) 423—427.
7. E. C. Titchmarsh, On  $\zeta(s)$  and  $\pi(x)$ , *Quart. J. of Math.* 9 (1938) 97—108.
8. E. C. Titchmarsh, The zeta-function of Riemann (Cambridge 1930).
9. E. C. Titchmarsh, The theory of functions (Oxford 1932).
10. N. G. Čudakov, On zeros of the function  $\zeta(s)$ , *C. R. de l'Académie des Sciences de l'URSS*, X (1936) 201—204.
11. N. G. Čudakov, On the functions  $\zeta(s)$  and  $\pi(x)$ , *C. R. de l'Académie des Sciences de l'URSS*, XXI (1938) 421—422.
12. G. H. Hardy, A. E. Ingham and G. Pólya, Theorems concerning mean values of analytic functions, *Proc. Royal Soc. A* 113 (1927) 542—569.
13. G. H. Hardy and J. E. Littlewood, The zeros of the Riemann's zeta-function on the critical line, *Math. Zeitschrift* 10 (1921) 283—317.
14. G. H. Hardy and E. M. Wright, An introduction to the theory of numbers (Oxford 1938).

Presented to the Faculty 29-th September 1939.



## Aritmetisko funkciju caurmēra vērtības

E. Fogels

### Kopsavilkums

Šinī darbā ir apskatīta problēma: noteikt pēc iespējas mazu  $h = h(x)$  tā, lai dotā aritmetiskā funkcija  $a(n)$  paturētu savu caurmēra vērtību intervālā  $x, x+h$ , t. i. lai derētu sakari

$$(1) \quad \sum_{n \leq x} a(n) = \psi(x) + o(\psi(x))$$

un

$$(2) \quad \sum_{x < n \leq x+h} a(n) \sim \psi(x+h) - \psi(x),$$

ja  $x \rightarrow \infty$ .

Tiešā ceļā no formulas (1) var dabūt zemas kārtas  $h$  tikai tad, ja (1) kļūdas locekļa kārtā samērā ar galveno locekli ir zema. Tādus piemērus dod Eulera funkcija  $\varphi(n)$ , dalītāju summa  $\sigma(n)$ , u. c.

Daudzām skaitļu teorijā svarīgām aritmetiskām funkcijām summā (1) kļūdas loceklis, kādu var noteikt ar pašreizējām zināšanām par Rimana  $\zeta$ -funkcijas saknēm, ir tik augstas kārtas, ka tiešā ceļā nav iespējams dabūt problēmas atrisinājumu

$$h = x^\theta,$$

kur  $\theta$  ir konstante  $< 1$ . Tādu funkciju piemēri ir

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{ja } n = p^m \text{ (} p \text{ pirmskaitlis, } m \geq 1) \\ 0 & \text{pretējā gadījumā;} \end{cases}$$

$\lambda(n) = (-1)^\rho$ , kur  $\rho$  ir  $n$  visu pirmreizinātāju skaits (vairākkārtējos faktoros skaitot vairākkārtēji);

$$\mu(n) = \begin{cases} \lambda(n), & \text{ja } n \text{ nedalās ar kvadrātu } > 1 \\ 0 & \text{pretējā gadījumā;} \end{cases}$$

$\lambda(n) d(n)$ , kur  $d(n)$  ir  $n$  dalītāju skaits;

$\lambda(n) 2^{\nu(n)}$ , kur  $\nu(n)$  ir  $n$  dažādo pirmreizinātāju skaits.

1930. g. Hoheisels pierādīja, ka funkcijai  $\Lambda(n)$  problema ir atrisnāma ar

$$\Theta = 1 - \frac{1}{33000};$$

Heilbronns 1933. g. šo rezultātu uzlaboja ar

$$\Theta = \frac{249}{250}$$

un dabūja to pašu arī funkcijai  $\mu(n)$ . Inghams 1937. g. noteica funkcijai  $\Lambda(n)$   $\Theta$  vērtību

$$\Theta = \frac{1+4c}{2+4c} + \varepsilon,$$

kur  $c$  ir konstante, ar kuru

$$(3) \quad \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = O(t^c),$$

jā  $t \rightarrow \infty$ . Mazākā pazīstamā  $c$  vērtība =  $\frac{19}{116}$  dod

$$\Theta = \frac{48}{77} + \varepsilon,$$

bet pieņemot vēl nepierādīto *Lindelefa hipotēzi* [ka sakaru (3) apmierina katrs lai cik mazs pozitīvs  $c$ ], seko pat

$$\Theta = \frac{1}{2} + \varepsilon.$$

Jāpiezīmē, ka

$$\Theta = \frac{1}{2}$$

nav izdevies pierādīt pat pieņemot Rimana hipotēzi.

No pierādītā sekoja, ka *starp divu pēc kārtas ejošu skaitļu pakāpēm*

ja  $y^{\vartheta}, (y+1)^{\vartheta}$ ,

$$\vartheta = \frac{1}{1-\Theta}, y > y_0(\vartheta),$$

atrodas vismaz viens pirmskaitlis. Labākā pazīstamā  $c$  vērtība dod

$$\vartheta = \frac{77}{29} + \varepsilon (\leq 2,66).$$

Tā tad piemēram starp divu pēc kārtas ejošu pietiekoši lielu skaitļu kubiem atrodas vismaz viens pirmskaitlis<sup>1</sup>.

Inghama metode nebija tieši izlietojama citu aritmetisko funkciju gadījumā. Šinī darbā esmu rādījis, ka lietojot Inghama konveksitates teoremu ir iespējams iegūt vienkāršākā ceļā to pašu  $\Theta$  nozīmi funkcijām

$$\Lambda(n), \mu(n), \lambda(n), \lambda(n) \frac{\varphi(n)}{n} \text{ un } \lambda(n) \frac{\sigma(n)}{n}$$

[sk. teoremu 1].

Interpretējot rezultātu aritmetiski seko, ka *intervallā*  $x, x+h$  funkcijas  $\lambda(n), \mu(n)$  maina zīmi vismaz vienreiz. Ja  $M(x)$  izteic  $\mu(n)$  [resp.  $\lambda(n)$ ] zīmju maiņu skaitu intervallā  $1, x$ , tad

$$M(x) > x^{1-\Theta} \quad (x > x_0).$$

Teoremā 2 ir atrasta  $\Theta$  vērtība

$$\Theta = \frac{1+8c}{2+8c} + \varepsilon$$

funkcijām  $\lambda(n) d(n)$  un  $\lambda(n) 2^{\nu(n)}$ . Inghama konveksitates teorema te nav izlietojama, kādēļ iepriekš jāpierāda tās analogs gadījums [Lemma 2].

Teorema 3 apskata funkciju

$$q(n) = \begin{cases} 1, & \text{ja } n \text{ nedalās ar pirmskaitļa } k \text{ pakāpi } (k \geq 2) \\ 0 & \text{pretējā gadījumā} \end{cases}$$

un atrod

$$\Theta = \frac{k}{3k-1} + \varepsilon.$$

Teoremas speciāls gadījums ( $k=2$ ) izteic, ka *intervallā*

$$x, x+x^{\frac{2}{5}} \log^3 x, \text{ ja } x > x_0,$$

atrodas vismaz viens skaitlis, kas nedalās ar kvadratu  $> 1$ .

1939. g. 29. sept.

<sup>1</sup> J. Annamariatali Speciali... University... Moscow, 1939.

<sup>1</sup> E. Landaus, runājot 1912. g. Kembridžas kongresā par neatrisinātiem jautājumiem pirmskaitļu teorijā, starp citu uzdeva šādu problēmu: Pierādīt, ka starp diviem sekojošiem kvadrātiem  $x^2$  un  $(x+1)^2$  atrodas vismaz viens pirmskaitlis. Tomēr līdz šim to nav izdevies pierādīt pat pieņemot Rimana hipotezi.

Ta tad piemēram starp divu pāriem...  
ar zīmētiem vienādiem...  
ar zīmētiem vienādiem...

Inghama metode nepāra tieši izlietojama citu aritmētisko funkciju  
gadījumā. Šim darba esmu rādījis, ka tiešajiem Inghama konveksitātes  
teoremi ir iespējams iegūt vienādiem ceļiem lo pašu  $\theta$  nozīmī funkcionālu  
ar zīmētiem vienādiem...

$$\Lambda(n) = \lambda(n) + \mu(n) + \nu(n) + \dots$$

[sk. teoremu 1]...  
Inghama metode nepāra tieši izlietojama citu aritmētisko funkciju  
gadījumā. Šim darba esmu rādījis, ka tiešajiem Inghama konveksitātes  
teoremi ir iespējams iegūt vienādiem ceļiem lo pašu  $\theta$  nozīmī funkcionālu  
ar zīmētiem vienādiem...

[teor. 2] zīmju mainu skaiti...  
Ja  $M(x) > x_0$ , tad  
ar zīmētiem vienādiem...

Teorema 2 ir atbilstoši  $\theta$  vērtība

$$(3) \quad \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

Inghama konveksitātes teorema...  
ar zīmētiem vienādiem...

Teorema 3 apskata funkciju...  
ar zīmētiem vienādiem...

Inghama konveksitātes teorema...  
ar zīmētiem vienādiem...

$$\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

Teoremas speciāls gadījums ( $k=2$ ) izteic, ka intervāla...  
ar zīmētiem vienādiem...

ar zīmētiem vienādiem...

$$y^2 = (y+1)^2$$

ar zīmētiem vienādiem...  
ar zīmētiem vienādiem...

Scheme for the Solution of Normal Equations  
on the Calculating Machine.

S. Vasiļevskis.

The solution of Normal Equations using logarithms by the method of least squares is inconvenient; this work is mostly done on the Calculating Machine. Therefore the schemes for calculating must be altered. The arithmometer enables us to perform multiplication and addition simultaneously, and for this reason the scheme has to be arranged so, that, whenever possible, all operations should be done on the machine, and only the computed quantities left to be inserted into the scheme. These principles are taken into account in the scheme of the Polish engineer J. Jasnorzewski<sup>1</sup>. The scheme dealt with here, agrees in its bases with the afore-mentioned; there are only some supplements and alterations made. Gauss's Method of Substitution we are applying for the solution of the Normal Equations<sup>2</sup>. The system of five unknowns in the equations of condition of equal weights has been chosen for the explanation of this scheme, so that no difficulties will arise with the application of the scheme to other circumstances.

If the form of Equations of Condition is:

$$a_i x + b_i y + c_i z + d_i t + e_i u + l_i = 0, \dots \dots (1)$$

<sup>1</sup> J. Jasnorzewski. Sposób uproszozeny algorytmu Gaussa. Krakow, 1930.

<sup>2</sup> Of such schemes as are suitable for calculating on the arithmometer, but are not based on Gauss's method of substitution, Cholesky's scheme may be mentioned (Commandant Benoit. Note sur une méthode de la résolution des équations normales etc. Bulletin géodésique de l'Union géodésique et géophysique internationale — Année 1924 — No. 2.).



the Normal Equations with their corresponding formulae for control will be:

$$\begin{aligned}
 [aa]x + [ab]y + [ac]z + [ad]t + [ae]u + [al] &= 0 \\
 [ba]x + [bb]y + [bc]z + [bd]t + [be]u + [bl] &= 0 \\
 [ca]x + [cb]y + [cc]z + [cd]t + [ce]u + [cl] &= 0 \dots (2) \\
 [da]x + [db]y + [dc]z + [dd]t + [de]u + [dl] &= 0 \\
 [ea]x + [eb]y + [ec]z + [ed]t + [ee]u + [el] &= 0 \\
 [aa] + [ab] + [ac] + [ad] + [ae] + [al] &= [as] \\
 [ba] + [bb] + [bc] + [bd] + [be] + [bl] &= [bs] \text{ etc.} \dots (3)
 \end{aligned}$$

if:

$$s_i = a_i + b_i + c_i + d_i + e_i + l_i \dots (4)$$

Applying Gauss's Method of Substitution, we obtain the Reduced System of Equations:

$$\begin{aligned}
 [aa]x + [ab]y + [ac]z + [ad]t + [ae]u + [al] &= 0 \\
 [bb.1]y + [bc.1]z + [bd.1]t + [be.1]u + [bl.1] &= 0 \\
 [cc.2]z + [cd.2]t + [ce.2]u + [cl.2] &= 0 \dots (5) \\
 [dd.3]t + [de.3]u + [dl.3] &= 0 \\
 [ee.4]u + [el.4] &= 0
 \end{aligned}$$

which enables us to find  $u, t, z, y, x$ . The corresponding control formulae are:

$$\begin{aligned}
 [bb.1] + [bc.1] + [bd.1] + [be.1] + [bl.1] &= [bs.1] \\
 [cc.2] + [cd.2] + [ce.2] + [cl.2] &= [cs.2] \\
 [dd.3] + [de.3] + [dl.3] &= [ds.3] \dots (6) \\
 [ee.4] + [el.4] &= [es.4] \\
 [ll.5] &= [ls.5]
 \end{aligned}$$

The coefficients of the equations (5) can be computed according to the following formulae:

$$\begin{aligned}
[bb.1] &= [bb] - \frac{[ab]}{[aa]} [ab] \\
[bc.1] &= [bc] - \frac{[ab]}{[aa]} [ac] \\
&\dots \dots \dots \\
[cc.2] &= [cc] - \frac{[ac]}{[aa]} [ac] - \frac{[bc.1]}{[bb.1]} [bc.1] \\
[cd.2] &= [cd] - \frac{[ac]}{[aa]} [ad] - \frac{[bc.1]}{[bb.1]} [bd.1] \\
&\dots \dots \dots \\
[dd.3] &= [dd] - \frac{[ad]}{[aa]} [ad] - \frac{[bd.1]}{[bb.1]} [bd.1] - \frac{[cd.2]}{[cc.2]} [cd.2] \\
[de.3] &= [de] - \frac{[ad]}{[aa]} [ae] - \frac{[bd.1]}{[bb.1]} [be.1] - \frac{[cd.2]}{[cc.2]} [ce.2] \\
&\dots \dots \dots \\
&\dots \dots \dots \\
[ls.5] &= [ls] - \frac{[al]}{[aa]} [as] - \frac{[bl.1]}{[bb.1]} [bs.1] - \frac{[cl.2]}{[cc.2]} [cs.2] - \frac{[dl.3]}{[dd.3]} [ds.3] - \\
&\qquad \qquad \qquad - \frac{[el.4]}{[ee.4]} [es.4].
\end{aligned} \tag{7}$$

Five Systems of equations in the form of

$$\begin{aligned}
(1) \quad [aa] Q_{11} + [ab] Q_{12} + [ac] Q_{13} + [ad] Q_{14} + [ae] Q_{15} &= 1 \dots (8) \\
[b a] Q_{11} + [bb] Q_{12} + [bc] Q_{13} + [bd] Q_{14} + [be] Q_{15} &= 0 \text{ etc.}
\end{aligned}$$

give the weights of the unknown quantities.

By reducing these equations in the same way as the normal equations, we obtain:

$$\begin{aligned}
 Q_{55} &= \frac{1}{[ee.4]} \\
 Q_{54} &= -\frac{[de.3]}{[dd.3]} Q_{55} \\
 Q_{53} &= -\frac{[cd.2]}{[cc.2]} Q_{54} - \frac{[ce.2]}{[cc.2]} Q_{55} \\
 Q_{52} &= -\frac{[bc.1]}{[bb.1]} Q_{53} - \frac{[bd.1]}{[bb.1]} Q_{54} - \frac{[be.1]}{[bb.1]} Q_{55} \\
 Q_{51} &= -\frac{[ab]}{[aa]} Q_{52} - \frac{[ac]}{[aa]} Q_{53} - \frac{[ad]}{[aa]} Q_{54} - \frac{[ae]}{[aa]} Q_{55} \\
 Q_{44} &= \frac{1}{[dd.3]} - \frac{[de.3]}{[dd.3]} Q_{54} \\
 Q_{43} &= -\frac{[cd.2]}{[cc.2]} Q_{44} - \frac{[ce.2]}{[cc.2]} Q_{54} \\
 Q_{42} &= -\frac{[bc.1]}{[bb.1]} Q_{43} - \frac{[bd.1]}{[bb.1]} Q_{44} - \frac{[be.1]}{[bb.1]} Q_{54} \\
 \dots & \\
 \dots & \\
 Q_{11} &= \frac{1}{[aa]} - \frac{[ab]}{[aa]} Q_{21} - \frac{[ac]}{[aa]} Q_{31} - \frac{[ad]}{[aa]} Q_{41} - \frac{[ae]}{[aa]} Q_{51}
 \end{aligned} \tag{9}$$

In order to perform all the above operations in a perspicuous way, I have endeavoured to make up the following scheme.

Nr.	a	b	c	d	e	l	s	v
1	$a_1$	$b_1$	$c_1$	$d_1$	$e_1$	$l_1$	$s_1$	$v_1$
2	$a_2$	$b_2$	$c_2$	$d_2$	$e_2$	$l_2$	$s_2$	$v_2$
3	$a_3$	$b_3$	$c_3$	$d_3$	$e_3$	$l_3$	$s_3$	$v_3$
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
n	$a_n$	$b_n$	$c_n$	$d_n$	$e_n$	$l_n$	$s_n$	$v_n$

(I)

[v]

		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>l</i>	<i>s</i>		
(V)	1	$Q_{11}$	[aa]	[ab]	[ac]	[ad]	[ae]	[al]	[as]	<i>a</i>
	2	$Q_{21}$	$Q_{22}$	[bb]	[bc]	[bd]	[be]	[bl]	[bs]	<i>b</i>
	3	$Q_{31}$	$Q_{32}$	$Q_{33}$	[cc]	[cd]	[ce]	[cl]	[cs]	<i>c</i>
	4	$Q_{41}$	$Q_{42}$	$Q_{43}$	$Q_{44}$	[dd]	[de]	[dl]	[ds]	<i>d</i>
	5	$Q_{51}$	$Q_{52}$	$Q_{53}$	$Q_{54}$	$Q_{55}$	[ee]	[el]	[es]	<i>e</i>
			<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>	<i>t</i>	<i>u</i>	[ll]	[ls]	<i>l</i>

		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>l</i>	<i>s</i>		
(IV)	1	$\frac{1}{[aa]}$	[aa]	[ab]	[ac]	[ad]	[ae]	[al]	[as]	<i>a</i>
	2	$\frac{[ab]}{[aa]}$	$\frac{1}{[bb.1]}$	[bb.1]	[bc.1]	[bd.1]	[be.1]	[bl.1]	[bs.1]	<i>b.1</i>
	3	$\frac{[ac]}{[aa]}$	$\frac{[bc.1]}{[bb.1]}$	$\frac{1}{[cc.2]}$	[cc.2]	[cd.2]	[ce.2]	[cl.2]	[cs.2]	<i>c.2</i>
	4	$\frac{[ad]}{[aa]}$	$\frac{[bd.1]}{[bb.1]}$	$\frac{[cd.2]}{[cc.2]}$	$\frac{1}{[dd.3]}$	[dd.3]	[de.3]	[dl.3]	[ds.3]	<i>d.3</i>
	5	$\frac{[ae]}{[aa]}$	$\frac{[be.1]}{[bb.1]}$	$\frac{[ce.2]}{[cc.2]}$	$\frac{[de.3]}{[dd.3]}$	$\frac{1}{[ee.4]}$	[ee.4]	[el.4]	[es.4]	<i>e.4</i>
		$\frac{[al]}{[aa]}$	$\frac{[bl.1]}{[bb.1]}$	$\frac{[cl.2]}{[cc.2]}$	$\frac{[dl.3]}{[dd.3]}$	$\frac{[el.4]}{[ee.4]}$		[ll.5]	[ls.5]	<i>l.5</i>

(I) is the scheme of the coefficients of equations of condition. By simultaneous multiplication and addition of the products on the arithmometer we fill up scheme (II), which is separated from (V) by a stairlike thick line. (III) and (IV) are separated from each other in

the same way. (III)  $\div$  (IV) must implicitly be written directly under (II)  $\div$  (V), but (I) may be on another page.

(II) contains the coefficients of the normal equations with the numbers for verification. When these have been computed, schemes (III) and (IV) are filled up, both at the same time. (III) contains the coefficients of equations (5), together with control quantities of (6). Firstly, the coefficients of the first normal equation are entered in the upper line of (III) scheme and then the calculation of the first column of (IV) must be done.  $[bb . 1]$ ,  $[bc . 1]$ , etc. are calculated on the machine according to formulae (7), which give the following rule:

The quantity from (II) scheme which corresponds with the required number must be turned on the machine. Then the farthest number on the left of the required quantity is multiplied by that above it. The number thus obtained is then written in the compartment provided for it. When  $[bb . 1]$ ,  $[bc . 1]$ , . . . ,  $[bs . 1]$  have been found in this way, and verification performed, the second column of (IV) is computed.

Then  $[cc . 2]$ ,  $[cd . 2]$  etc. are found according to the formulae (7). There is a similar rule here too: The quantity from (II) scheme which corresponds with the required number must be turned on the arithmometer. Then the farthest number on the left and the uppermost are multiplied by each other. The next factors are then chosen by one compartment nearer, until the required quantity is found.

Taking into account the aforesaid and the formulae (7), schemes (III) and (IV) are filled up and then  $u$ ,  $t$ ,  $z$ ,  $y$ ,  $x$  can be found. Here too there is a similar rule. First of all the corresponding number for the unknown is turned on the machine from (IV) scheme, and then every two numbers are multiplied by each other, taking one of them from below in (IV) scheme and the other on the right from the unknown quantity. The multiplication may be begun either with the farthest (or the nearest) numbers, and the next factors are taken by one compartment nearer (or farther).

$Q_{55}$ ,  $Q_{54}$  etc. are found according to formulae (9). Here, likewise, by keeping strictly to these formulae, we shall notice a similar lawfulness.

In order to illustrate the above let us take a numerical example



Nr.	a	b	c	d	e	l	s	v
1	+ 1.000	- 31.000	+ 9.610	- 2.979	+ 9.235	- 13.199	- 27.333	+ 0.095
2	1	- 29	8.410	- 2.439	7.073	- 12.728	- 27.684	+ 20
3	1	- 28	7.840	- 2.195	6.147	- 12.464	- 27.672	+ 6
4	1	- 27	7.290	- 1.968	5.314	- 12.226	- 27.590	- 37
5	1	- 26	6.760	- 1.758	4.570	- 11.923	- 27.351	- 19
6	1	- 25	6.250	- 1.563	3.906	- 11.661	- 27.068	- 45
7	1	- 24	5.760	- 1.382	3.318	- 11.358	- 26.662	- 35
8	1	- 23	5.290	- 1.217	2.798	- 11.072	- 26.201	- 46
9	1	- 22	4.840	- 1.065	2.343	- 10.765	- 25.647	- 40
10	1	- 20	4.000	- 0.800	1.600	- 10.129	- 24.329	- 22
11	1	- 19	3.610	- 0.686	1.303	- 9.805	- 23.578	- 14
12	1	- 18	3.240	- 0.583	1.050	- 9.488	- 22.781	- 19
13	1	- 13	1.690	- 0.220	0.286	- 7.742	- 17.986	+ 33
14	1	- 12	1.440	- 0.173	0.207	- 7.394	- 16.920	+ 23
15	1	- 10	1.000	- 0.100	0.100	- 6.644	- 14.644	+ 38
16	1	- 9	0.810	- 0.073	0.066	- 6.264	- 13.461	+ 41
17	1	- 8	0.640	- 0.051	0.041	- 5.839	- 12.209	+ 81
18	1	- 7	0.490	- 0.034	0.024	- 5.474	- 10.994	+ 54
19	1	- 6	0.360	- 0.022	0.013	- 5.104	- 9.753	+ 25
20	1	- 2	0.040	- 0.001	0.000	- 3.464	- 4.425	+ 6
21	1	- 1	0.010	0.000	0.000	- 3.020	- 3.010	+ 1
22	1	0	0.000	0.000	0.000	- 2.592	- 1.592	- 16
23	1	+ 7	0.490	+ 0.034	0.024	+ 0.718	+ 9.266	- 51
24	1	8	0.640	0.051	0.041	1.234	10.966	- 46
25	1	11	1.210	0.133	0.146	2.819	16.308	- 48
26	1	12	1.440	0.173	0.207	3.368	18.188	- 46
27	1	15	2.250	0.338	0.506	5.085	24.179	- 21
28	1	16	2.560	0.410	0.655	5.681	26.306	- 7
29	1	21	4.410	0.926	1.945	8.747	38.028	+ 17
30	1	23	5.290	1.217	2.798	10.049	43.354	+ 40
31	1	25	6.250	1.563	3.906	11.354	49.073	+ 30
32	1	31	9.610	2.979	9.235	15.482	69.306	+ 5
33	1	33	10.890	3.594	11.859	16.944	77.287	+ 14
34	1	34	11.560	3.930	13.363	17.708	81.561	+ 39
35	1	35	12.250	4.287	15.006	18.422	85.965	+ 6
36	1	36	12.960	4.666	16.796	19.169	90.591	- 3
37	1	39	15.210	5.932	23.134	21.454	105.730	- 32
38	1	40	16.000	6.400	25.600	22.255	111.255	- 19

0.049.924

[v] - 4

	a	b	c	d	e	l	s			
1	+ 0.102 393	+ 38.000	+ 26.000	+ 192.400	+ 17.324	+ 174.615	- 9.866	+ 438.473	a	0
2	+ 0.001 708	+ 0.000 505	+ 19 240.000	+ 1 732.400	+ 1 746.216	+ 3 110.546	+ 9 475.511	+ 35 330.673	b	0
3	- 0.034 290	- 0.001 091	+ 0.020 644	+ 1 746.178	+ 311.066	+ 1 937.662	+ 991.751	+ 6 911.457	c	0
4	- 0.028 734	- 0.006 419	+ 0.023 061	+ 0.098 013	+ 193.771	+ 481.989	+ 884.564	+ 3 634.930	d	0
5	+ 0.023 823	+ 0.001 392	- 0.017 410	- 0.027 925	+ 0.016 562	+ 2 397.246	+ 1 750.313	+ 9 852.372	e	-1
	+ 2.576 367	- 0.449 028	- 0.402 160	- 0.156 209	+ 0.021 307	+ 4 779.962	+ 17 872.234		l	+1
1	+ 0.026 315 79	+ 38.000	+ 26.000	+ 192.400	+ 17.324	+ 174.615	- 9.866	+ 438.473	a	0
2	- 0.684 210 54	+ 0.000 052 02	+ 19 222.211	+ 1 600.758	+ 1 734.363	+ 2 991.073	+ 9 482.261	+ 35 030.665	b. 1	+1
3	- 5.063 158 00	- 0.083 276 48	+ 0.001 565 63	+ 638.721	+ 78.920	+ 804.473	+ 252.055	+ 1 774.168	c. 2	+1
4	- 0.455 894 75	- 0.090 227 03	- 0.123 559 44	+ 0.050 928 68	+ 19.635 <sub>g</sub>	+ 33.107 <sub>1</sub>	+ 2.361 <sub>s</sub>	+ 55.104 <sub>4</sub>	d. 3	-0 <sub>g</sub>
5	- 4.595 131 67	- 0.155 605 05	- 1.259 506 26	- 1.686 101 07	+ 0.016 561 64	+ 60.380 <sub>g</sub>	- 1.286 <sub>g</sub>	+ 59.095 <sub>g</sub>	e. 4	-1 <sub>g</sub>
	+ 0.259 631 58	- 0.493 297 11	- 0.394 624 62	- 0.120 283 37	+ 0.021 306 55		+ 0.050 <sub>g</sub>	+ 0.053 <sub>7</sub>	l. 5	-2 <sub>g</sub>

Contr.

... strictly to these formulae, we shall notice a similar  
 ... the above let us take a numerical example  
 ...

$$m = \sqrt{\frac{0.049924}{38 - 5}} = \pm 0.038_9$$

$$\sqrt{Q_{11}} = 0.320 \quad m_x = \pm 0.0124$$

$$\sqrt{Q_{22}} = 0.022_5 \quad m_y = \pm 0.0008_8$$

$$\sqrt{Q_{33}} = 0.144 \quad m_z = \pm 0.0056$$

$$\sqrt{Q_{44}} = 0.313 \quad m_t = \pm 0.0122$$

$$\sqrt{Q_{55}} = 0.129 \quad m_u = \pm 0.0050$$

Presented to the Faculty 19. X. 1939.



## The Graphical and Analytical Results if Latitude and Longitude are determined by the Method of Equal Altitudes.

By A. Brikmanis.

I. For simultaneous determination of latitude and longitude in geodesy the method of equal altitudes is used<sup>1</sup>. Using this method the observer notices the moments, when several stars are at one and the same altitude or zenithdistance known by measuring. If the approximate values of latitude ( $\varphi_0$ ) and longitude ( $L_0$ ) are known, the zenithdistances for the observed stars can be found also by calculating. As the geographical coordinates are only approximately known, the measured and calculated zenithdistances will not agree, but there will be certain differences. By knowing them the errors of  $\varphi_0$  and  $L_0 - d\varphi$  and  $dL$  can be found.

The finding of  $d\varphi$  and  $dL$  can be done analytically and graphically. In this work I have compared the analytical and graphical results, got from one and the same material of observations and I have tried to clear up the question about the equality of both

<sup>1</sup> The East-African Geographical Part of France and the Geodetical Section of the Geographical Part of the Army of France use this method in their measurements in their African colonies. Also in other states this method is used. It has also been tried to throw light upon the equality of this method and the methods of meridian observations. So in the international longitude determinations arranged by the Longitudes Committee of the International Astronomical Union in the year 1926, three observatories have used this method; in the observatory of Dehra-Dun, Survey of India, longitude determination has been made both with a transit-instrument and with a prism-astrolabe.



ways of finding the results. In the literature, which was in my use, such a comparing of analytical and graphical results, got from one and the same material of observations, I have found in the publication of the East-African Geographical Part of France: „Rapport sur la campagne d'astronomie géodésique exécutée en 1913—14 en Afrique Occidentale Française. Travaux de la Section de Géodésie de l'Union Géodésique et Géophysique Internationale. Tome 2. Paris 1925.“ There are given the mean errors of the analytical results, obtained from the observations got in one night, and the differences between the analytical and graphical results. One half of all the cases are such, that the differences, mentioned above, are greater than the mean errors of the analytical results. So it is to be said that in one half of all cases the analytical and graphical results do not agree. The differences between the analytical and graphical results, obtained from the observations in one night, I have found also in the „Journal des Observateurs“ first number of the year 1936. There the absolute differences in the quantities  $d\varphi$  and  $\cos \varphi \cdot dt$  are respectively  $0''$ , 12 and  $0^s,033$ . There is nothing said about the mean errors of the analytical results.

For this work I have used the observations made by the director of the observatory of the Latvian university doc. A. Žagger in the years 1933 and 1934 and the observations made by myself also in the year 1934.

## II. The formula

$$\cos z_0 = \sin \varphi_0 \sin \delta + \cos \varphi_0 \cos \delta \cos t_0$$

gives the calculated zenithdistances  $z_0$ , which will not agree with the measured ones, as the latitude and longitude are not well known —  $\varphi_0$  and  $L_0$  are only approximate values. Let the difference between the calculated and measured zenithdistance be  $d\zeta$ . If the errors of  $\varphi_0$  and  $t_0$  —  $d\varphi$  and  $dt$  are known, the value of  $d\zeta$  can be calculated by the formula

<sup>2</sup>  $t_0$  is the approximate hour-angle of the observed star. By receiving the scientific radio-time signals (the U. T. of their emission being known) and knowing the longitude  $L$ , we get the correction of the clock. But if the longitude is only approximately known, the correction of the clock as well as the hour-angle of the observed star is got only approximately. Of course errors in the hour-angle of the observed star can arise also from other circumstances, which should be removed.

$$d\zeta = \cos a \cdot d\varphi + \sin a \cos \varphi \cdot dt^3$$

Let us imagine a certain number of stars are observed, and let all the measured zenithdistances  $z_i$  contain the constant systematical error  $dz$ . The observations give us then the following equations

$$z_i + dz = (z_0)_i + \cos a_i \cdot d\varphi + \sin a_i \cdot \cos \varphi \cdot dt$$

or

$$\cos a_i \cdot d\varphi + \sin a_i \cdot \cos \varphi \cdot dt - dz + \Delta z_i = 0 \quad (1),$$

where

$$\Delta z_i = (z_0)_i - z_i.$$

The solution of the equations by the method of least squares gives us the three unknown quantities:  $d\varphi$ ,  $\cos \varphi \cdot dt$  and  $dz$ . The corresponding normalequations are the followig:

$$\left. \begin{aligned} [\cos^2 a_i] \cdot d\varphi + [\sin a_i \cdot \cos a_i] \cdot \cos \varphi \cdot dt - [\cos a_i] \cdot dz + [\Delta z_i \cdot \cos a_i] &= 0 \\ [\cos a_i \cdot \sin a_i] \cdot d\varphi + [\sin^2 a_i] \cdot \cos \varphi \cdot dt - [\sin a_i] \cdot dz + [\Delta z_i \cdot \sin a_i] &= 0 \\ - [\cos a_i] \cdot d\varphi - [\sin a_i] \cdot \cos \varphi \cdot dt + [1 \cdot 1] dz - [\Delta z_i] &= 0 \end{aligned} \right\} (2)$$

III. Let us write (1) in the form

$$\cos a_i \cdot d\varphi + \sin a_i \cdot \cos \varphi \cdot dt + (\Delta z_i - dz) = 0$$

With axes  $\cos \varphi \cdot dt$ ,  $d\varphi$  the graphical sketches of those equations are represented by straight lines; the perpendiculars drawn from the starting point to them are equal  $(\Delta z_i - dz)$ . The positive angle, which is formed by the perpendicular and the positive direction of the  $d\varphi$  axe is  $(a_i - 180^\circ)$  (the positive angle formed by the perpendicular and the negative direction of the  $d\varphi$  axe is  $a_i$ ).

Let us take a point that lies on one of those lines. The coordinates of it correspond to the values  $\cos \varphi \cdot dt$  and  $d\varphi$  of the point of observations. So the place of observations, sketched as a point in those

<sup>3</sup> This formula can be got by developing  $\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$  or  $z = \arccos(\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t)$  in the series of Taylor and breaking the development up with the first derivatives. Using this differentialformula we have always to know the above limits of  $d\varphi$  and  $dt$ , outside of which the formula dare not be used, if a certain precision is required. Estimating the values of the omitted terms with the second, etc. derivatives we can judge about the precision of the formula.

axes, is to be searched somewhere on one of those lines (position lines). The coordinates of the crossing point of all those position lines are

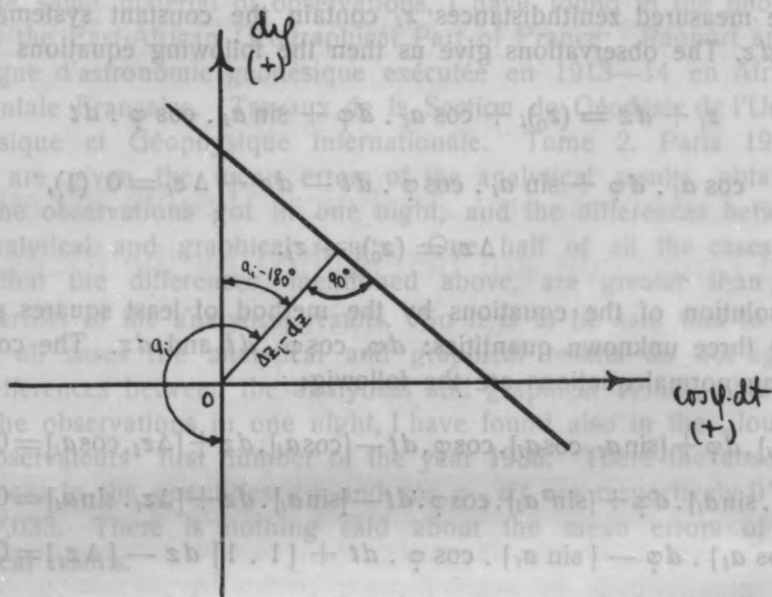


Figure 1.

then the values  $\cos \varphi \cdot dt$  and  $d\varphi$  which correspond to the point of observations.

As  $dz$  is unknown, the position lines are not precisely defined. The geometrical interpretation of the equations

$$\cos a_i \cdot d\varphi + \sin a_i \cdot \cos \varphi \cdot dt + \Delta z_i - dz = 0 \dots (1)$$

is here of much help. Geometrically interpreted these equations tell us, that a point with the coordinates  $\cos \varphi \cdot dt$ ,  $d\varphi$  is in the distance  $dz$  from the straight lines

$$\cos a_i \cdot d\varphi + \sin a_i \cdot \cos \varphi \cdot dt + \Delta z_i = 0.$$

So the common solution of the equations (1) is geometrically to be interpreted as the finding of the coordinates of that point, which is in equal distances from the straight lines

$$\cos a_i \cdot d\varphi + \sin a_i \cdot \cos \varphi \cdot dt + \Delta z_i = 0.$$

(1) written in the form

$$\cos a_i \cdot d\varphi + \sin a_i \cdot \cos \varphi \cdot dt + (\Delta z_i + k) - (dz + k) = 0$$

geometrically express the fact, that the point with coordinates  $\cos \varphi \cdot dt$ ,  $d\varphi$  is in the distance  $(dz + k)$  from the straight lines

$$\cos a_i \cdot d\varphi + \sin a_i \cdot \cos \varphi \cdot dt + (\Delta z_i + k) = 0$$

So the common solution of the same equations (1) is also geometrically to be interpreted as the finding of the coordinates of that point, which is in equal distances from the straight lines

$$\cos a_i \cdot d\varphi + \sin a_i \cdot \cos \varphi \cdot dt + (\Delta z_i + k) = 0.$$

In accordance to the above said, the graphical finding of the results is done as follows. The straight lines

$$\cos a_i \cdot d\varphi + \sin a_i \cdot \cos \varphi \cdot dt + \Delta z_i = 0$$

are drawn (all  $\Delta z_i$  can be altered by a constant quantity as it has been found necessary). Then we find the centre of the circle for which all, or better to say, the possibly greatest number of the drawn position lines are tangents. The coordinates of this centre are the required results.

So the graphical finding of the results is conformed to the geometrical interpretation of the analytical finding of them. Vice versa — if the geometrical actions in the graphical finding of the results are expressed mathematically, we obtain the same normal-equations which are obtained, if the results are found analytically. If a point with coordinates  $\xi$ ,  $\eta$  must be in one and the same distance  $R$  from the straight lines

$$\cos a_i \cdot d\varphi + \sin a_i \cdot \cos \varphi \cdot dt + \Delta z_i = 0,$$

then this fact can be expressed mathematically by the equations

$$\cos a_i \cdot \xi + \sin a_i \cdot \eta + \Delta z_i - R = 0.$$

The common solution of those equations gives us the required quantities  $\xi$ ,  $\eta$  and also  $R$ . The normal equations for that are the following

$$\left. \begin{aligned} [\cos^2 a_i] \cdot \xi + [\cos a_i \cdot \sin a_i] \cdot \eta - [\cos a_i] \cdot R + [\Delta z_i \cdot \cos a_i] &= 0 \\ [\sin a_i \cdot \cos a_i] \xi + [\sin^2 a_i] \cdot \eta - [\sin a_i] \cdot R + [\Delta z_i \cdot \sin a_i] &= 0 \\ -[\cos a_i] \xi - [\sin a_i] \cdot \eta + [1 \cdot 1] \cdot R - [\Delta z_i] &= 0 \end{aligned} \right\}$$

which exactly agree with (2).

The finding of the centre of that circle for which the possibly greatest number of the drawn position lines are tangents, in accordance to the directives, given by the director of the observatory of geometrically to be interpreted as the finding of the coordinates of that point, which is in equal distances from the straight lines

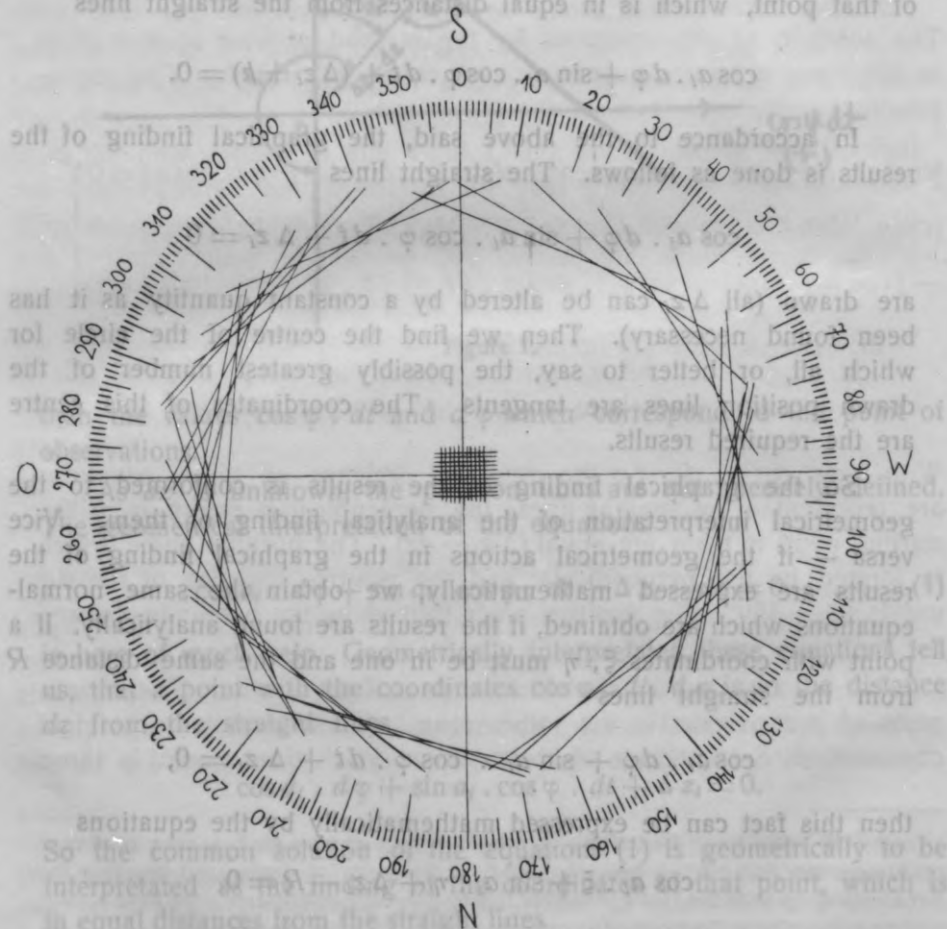


Figure 2.



the Latvian university, is done as follows. On a transparent paper a circle of the required size is drawn. The centre of it is marked as a prick in the paper, caused by the sharp end of the compasses. The circle is placed on the drawn position lines and a situation of it is searched, in which the possibly greatest part of the position lines are tangents to the circle. Then the place of the centre of the mentioned circle is noted relatively to the starting point of the axes in which the position lines are drawn. An example of such drawn position lines is given in the figure 2.

IV. So in the principle there is no difference between the graphical and analytical obtaining of the results. A difference can be only in certain advantages or disadvantages in practical use.

Obtaining the results graphically, I have drawn the position lines ( $\Delta z_i!$ ) on different scales in order to clear up, what scale in practice is to be preferred. I have drawn on the scales:  $1'' = 2 \text{ mm}$  ( $G_2$ ),  $1'' = 3 \text{ mm}$  ( $G_3$ ) and  $1'' = 5 \text{ mm}$  ( $G_5$ ).

Obtaining the results graphically I put the transparent circle several times on the drawn position lines and several times got the coordinates of its centre relatively to the starting point of the axes, in which the position lines are drawn and took the means of them. The agreeing of the repeatedly got coordinates of the centre of the transparent circle dare not be used for judging about the mean errors of the obtained results. Of course: in the case of better observations we shall get better agreeing coordinates of the centre, but good agreeing coordinates we can get also in the case of bad observations (systematical errors by the situating!). As we search for the centre of that circle to which the possibly greatest part of the position lines are tangents we should judge of the errors of the results, noticing how many position lines deviate from the tangential position and how much they deviate from the tangential position (this is the principle for calculating the errors analytically). If now the deviation from the tangential position of each position line is not estimated — that would really take much time and labour — for the graphically obtained results of one night the mean errors cannot be given. Only having more such results we have the possibility to characterise the mean of them with a mean error.

Date	A			$G_2, G'_2$			$G_3, G'_3$			$G_5, G'_5$						
	$d\varphi$	$\cos \varphi \cdot dt$	$d\varphi$	$\cos \varphi \cdot dt$	$d\varphi$	$\cos \varphi \cdot dt$	$d\varphi$	$\cos \varphi \cdot dt$	$d\varphi$	$\cos \varphi \cdot dt$						
1933.	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"						
1. — 2. VIII	-0.45	$\pm 0.65$	-0.18	$\pm 0.45$	+0.34	+0.07	+0.20	+0.08	+0.14	+0.09	-0.04	+0.11	+0.16	+0.01	$\pm 0.00$	+0.17
2. — 3. VIII	+0.28	$\pm 0.28$	-0.38	$\pm 0.22$	+0.60	+0.67	-0.32	-0.06	+0.62	+0.50	-0.20	-0.19	+0.68	+0.55	-0.38	-0.35
4. — 5. VIII	+0.09	$\pm 0.47$	+0.96	$\pm 0.36$	-0.24	-0.45	+0.70	+0.87	-0.20	-0.18	+0.80	+0.70	-0.24	+0.02	+0.97	+0.84
5. — 6. VIII	+0.30	$\pm 0.23$	+0.82	$\pm 0.16$	+0.14	+0.40	+0.94	+0.94	+0.29	+0.38	+0.85	+0.82	+0.34	+0.40	+0.77	+0.79
1934.																
30. VI — 1. VII	+0.41	$\pm 0.21$	+0.51	$\pm 0.17$	+0.48	+0.51	+0.45	+0.45	+0.41	+0.38	+0.56	+0.36	+0.48	+0.65	+0.55	+0.57
2. — 3. VIII	+0.48	$\pm 0.16$	+0.60	$\pm 0.11$	+0.48	+0.50	+0.64	+0.79	+0.49	+0.22	+0.66	+0.65	+0.40	+0.29	+0.57	+0.58
6. — 7. VIII	-0.36	$\pm 0.24$	+0.90	$\pm 0.21$	-0.16	-0.51	+0.74	+0.97	-0.47	-0.45	+0.93	+0.92	-0.35	-0.43	+1.02	+1.03
10. — 11. VIII	+0.03	$\pm 0.36$	+0.35	$\pm 0.25$	-0.04	-0.23	+0.45	+0.54	-0.04	-0.10	+0.37	+0.42	-0.24	-0.28	+0.24	+0.31
10. — 11. VII	+0.36	$\pm 0.24$	+0.55	$\pm 0.18$	+0.48	+0.32	+0.70	+0.52	+0.29	+0.35	+0.44	+0.43	+0.40	+0.35	+0.47	+0.68
11. — 12. VII	+0.02	$\pm 0.16$	+0.05	$\pm 0.12$	+0.02	-0.02	+0.10	+0.20	+0.23	+0.33	+0.11	+0.13	+0.06	+0.24	+0.11	+0.06
12. — 13. VII	-0.17	$\pm 0.18$	+0.28	$\pm 0.13$	-0.20	-0.43	+0.46	+0.47	-0.08	-0.13	+0.38	+0.37	-0.09	-0.14	+0.41	+0.40
15. — 16. VII	+0.32	$\pm 0.16$	+0.30	$\pm 0.11$	+0.09	+0.16	+0.34	+0.39	+0.08	+0.17	+0.36	+0.39	+0.17	+0.24	+0.30	+0.36

Table 1.

From the same drawn position lines I repeated the obtaining of the results after a day — sometimes after several days. The so obtained results ( $G'_2, G'_3, G'_5$ ) differ from those got first. All the results: the analytical ( $A$ ) and the graphical ( $G_2, G'_2, G_3, G'_3, G_5, G'_5$ ) I have arranged in the table 1, where also the mean errors of the analytical results are given.

In the table 2 I have arranged the differences  $G_v - G_2, G_v - G_3, G_v - G_5$

$$\left( G_v = \frac{1}{3} (G_2 + G_3 + G_5) \right)$$

Date	$G_v - G_2$		$G_v - G_3$		$G_v - G_5$	
	$d\varphi$	$\cos\varphi \cdot dt$	$d\varphi$	$\cos\varphi \cdot dt$	$d\varphi$	$\cos\varphi \cdot dt$
1933.						
1. — 2. VIII.	-0.13	-0.15	+0.07	+0.09	+0.05	+0.05
2. — 3. VIII.	+0.03	+0.02	+0.01	-0.10	-0.05	+0.08
4. — 5. VIII.	+0.01	+0.12	-0.03	+0.02	+0.01	-0.15
5. — 6. VIII.	+0.11	-0.09	-0.04	0.00	-0.09	+0.08
1934.						
30.VI. — 1. VII.	-0.02	+0.07	+0.05	-0.04	-0.02	-0.03
2. — 3. VII.	-0.02	-0.02	-0.03	-0.04	+0.06	+0.05
6. — 7. VII.	-0.17	+0.16	+0.14	-0.03	+0.02	-0.12
10. — 11. VII.	-0.07	-0.10	-0.07	-0.02	+0.13	+0.11
10. — 11. VII.	-0.09	-0.16	+0.10	+0.10	-0.01	+0.07
11. — 12. VII.	+0.08	+0.01	-0.13	0.00	+0.04	0.00
12. — 13. VII.	+0.08	-0.04	-0.04	+0.04	-0.03	+0.01
15. — 16. VII.	+0.02	-0.01	+0.03	-0.03	+0.06	+0.03

Table 2.

As it is to be seen the differences are of accidental character: it is not so that using a certain scale the obtained results are systematically greater or smaller.

The differences  $G'_2 - G_2, G'_3 - G_3, G'_5 - G_5$  I have arranged in the table 3.

Date	$G'_2 - G_2$		$G'_3 - G_3$		$G'_5 - G_5$	
	$d\varphi$	$\cos\varphi \cdot dt$	$d\varphi$	$\cos\varphi \cdot dt$	$d\varphi$	$\cos\varphi \cdot dt$
1933.	"	"	"	"	"	"
1. — 2. VIII	-0.27	-0.12	-0.05	+0.15	-0.15	+0.07
2. — 3. VIII	+0.07	+0.26	-0.12	+0.01	-0.06	+0.10
4. — 5. VIII	-0.21	+0.17	+0.02	-0.10	+0.03	-0.02
5. — 6. VIII	+0.26	0.00	+0.09	-0.03	+0.14	0.00
1934.						
30. VI — 1. VII	+0.03	0.00	-0.03	-0.20	+0.17	+0.02
2. — 3. VII	+0.02	+0.15	-0.27	-0.01	-0.11	+0.01
6. — 7. VII	-0.35	+0.23	+0.02	-0.01	-0.08	+0.01
10. — 11. VII	-0.19	+0.09	-0.06	+0.05	-0.04	+0.07
10. — 11. VII	-0.16	-0.18	+0.06	-0.01	-0.05	+0.21
11. — 12. VII	-0.04	+0.10	+0.10	+0.02	+0.18	-0.05
12. — 13. VII	-0.23	+0.01	-0.05	-0.01	-0.05	-0.01
15. — 16. VII	+0.07	+0.05	+0.09	+0.03	+0.07	+0.06

Table 3.

These differences are characterised by the data given in the table 4.

Values of $G'_i - G_i$	$i = 2$		$i = 3$		$i = 5$	
	$d\varphi$	$\cos\varphi \cdot dt$	$d\varphi$	$\cos\varphi \cdot dt$	$d\varphi$	$\cos\varphi \cdot dt$
" "						
0.00 — 0.10	42%	42%	75%	75%	58%	83%
0.10 — 0.20	17	42	17	17	42	8
0.20 — 0.30	33	17	8	8	0	8
0.30 — 0.40	8	0	0	0	0	0

Table 4.

Using greater scale, where the drawn position lines are more dispersed, it could be expected that the placing of the transparent circle can be done more arbitrarily, and that therefore the repeatedly got results from the same drawn position lines should give more differing results than using a smaller scale. But as it is to be seen, greater differences are more frequent if the scale  $1'' = 2$  mm has been used; if a greater scale is used, greater differences are rarer. So the free choice by the situating of the transparent circle then does not increase proportionally to the increase of the scale and therefore the use of a greater scale should be preferred. In the practice it seemed to me the scale  $1'' = 3$  mm to be the most pleasant one, for using it the position lines are not too much dispersed and by the choice of the right position of the transparent circle not so many difficulties arise.

In the table 5 I have given the analytical results (A), their mean errors and the differences  $A - G_2$ ,  $A - G'_2$ ,  $A - G_3$ ,  $A - G'_3$ ,  $A - G_5$ ,  $A - G'_5$  for each night of observations.

Date	A		A - G <sub>2</sub> , A - G' <sub>2</sub>		A - G <sub>3</sub> , A - G' <sub>3</sub>		A - G <sub>5</sub> , A - G' <sub>5</sub>								
	dφ	cos φ · dt	dφ	cos φ · dt	dφ	cos φ · dt	dφ	cos φ · dt							
1933.															
1. - 2. VIII	- 0.45	± 0.65 - 0.18	± 0.45	- 0.79	- 0.52	- 0.38	- 0.26	- 0.59	- 0.54	- 0.14	- 0.29	- 0.61	- 0.46	- 0.18	- 0.35
2. - 3. VIII	+ 0.28	± 0.28 - 0.38	± 0.22	- 0.32	- 0.39	- 0.06	- 0.32	- 0.34	- 0.22	- 0.18	- 0.19	- 0.40	- 0.27	0.00	- 0.03
4. - 5. VIII	+ 0.09	± 0.47 + 0.96	± 0.36	+ 0.33	+ 0.54	+ 0.26	+ 0.09	+ 0.29	+ 0.27	+ 0.16	+ 0.26	+ 0.33	+ 0.07	- 0.01	+ 0.12
5. - 6. VIII	+ 0.30	± 0.23 + 0.82	± 0.16	+ 0.16	- 0.10	- 0.12	- 0.12	+ 0.01	- 0.08	- 0.03	0.00	- 0.04	- 0.10	+ 0.05	+ 0.03
1934.															
30. VI - 1. VII	+ 0.41	± 0.21 + 0.51	± 0.17	- 0.07	- 0.10	+ 0.06	+ 0.06	0.00	+ 0.03	- 0.05	+ 0.15	- 0.07	- 0.24	- 0.04	- 0.06
2. - 3. VII	+ 0.48	± 0.16 + 0.60	± 0.11	0.00	- 0.02	- 0.04	- 0.19	- 0.01	+ 0.26	- 0.06	- 0.05	+ 0.08	+ 0.19	+ 0.03	+ 0.02
6. - 7. VII	- 0.36	± 0.24 + 0.90	± 0.21	- 0.20	+ 0.15	+ 0.16	- 0.07	+ 0.11	+ 0.09	- 0.03	- 0.02	- 0.01	+ 0.07	- 0.12	- 0.13
10. - 11. VII	+ 0.03	± 0.36 + 0.35	± 0.25	+ 0.07	+ 0.26	- 0.10	- 0.19	+ 0.07	+ 0.13	- 0.02	- 0.07	+ 0.27	+ 0.31	+ 0.11	+ 0.04
10. - 11. VII	+ 0.36	± 0.24 + 0.55	± 0.18	- 0.12	+ 0.04	- 0.15	+ 0.03	+ 0.07	+ 0.01	+ 0.11	+ 0.12	- 0.04	+ 0.01	+ 0.08	- 0.13
11. - 12. VII	+ 0.02	± 0.16 + 0.05	± 0.12	0.00	+ 0.04	- 0.05	- 0.15	- 0.21	- 0.31	- 0.06	- 0.08	- 0.04	- 0.22	- 0.06	- 0.01
12. - 13. VII	- 0.17	± 0.18 + 0.28	± 0.13	+ 0.03	+ 0.26	- 0.18	- 0.19	- 0.09	- 0.04	- 0.10	- 0.09	- 0.08	- 0.03	- 0.13	- 0.12
15. - 16. VII	+ 0.32	± 0.16 + 0.30	± 0.11	+ 0.23	+ 0.16	- 0.04	- 0.09	+ 0.24	+ 0.15	- 0.06	- 0.09	+ 0.15	+ 0.08	0.00	- 0.06

Table 5.



On the whole, as it is to be seen, the results got graphically on different scales in the limits of the mean errors agree with the analytically got ones.

In some azimuths there are more, in some azimuths fewer and in some azimuths there are no position lines at all, for the azimuthal distribution of the observed stars is not equidistant. In the table 6 I have given for each night of observations: the number of the observed stars, the differences  $(A-G)_{d\varphi}$ ,  $(A-G)_{\cos\varphi \cdot dt}$  and I have compared the number of position lines near the azimuths  $0^\circ$  and  $180^\circ$  and near the azimuths  $90^\circ$  and  $270^\circ$ , which position lines are of the greatest importance for the results  $d\varphi$  and  $\cos\varphi \cdot dt$  respectively.

Date	Number of the observed stars	Azimuthal distribution of the observed stars	$(A-G)_{d\varphi}$	Azimuthal distribution of the observed stars	$(A-G)_{\cos\varphi \cdot dt}$
1933.			"		"
1. — 2. VIII	9	More near $180^\circ$ (2)	-0.59	More near $270^\circ$ (3)	-0.14
2. — 3. VIII	37	" " $180^\circ$ (3)	-0.34	" " $270^\circ$ (4)	-0.18
4. — 5. VIII	29	Equal	+0.29	" " $90^\circ$ (3)	+0.16
5. — 6. VIII	16	More near $0^\circ$ (1)	+0.01	" " $270^\circ$ (3)	-0.03
1934.					
30. VI — 1. VII	48	More near $180^\circ$ (5)	0.00	" " $90^\circ$ (1)	-0.05
2. — 3. VII	40	" " $180^\circ$ (2)	-0.01	" " $270^\circ$ (6)	-0.06
6. — 7. VII	39	" " $0^\circ$ (1)	+0.11	" " $90^\circ$ (4)	-0.03
1934.					
10. — 11. VII	13	" " $0^\circ$ (2)	+0.07	" " $270^\circ$ (3)	-0.02
10. — 11. VII	25	" " $180^\circ$ (6)	+0.07	" " $90^\circ$ (6)	+0.11
11. — 12. VII	47	" " $180^\circ$ (2)	-0.21	" " $270^\circ$ (9)	-0.06
12. — 13. VII	45	" " $180^\circ$ (3)	-0.09	" " $270^\circ$ (8)	-0.10
15. — 16. VII	38	" " $0^\circ$ (2)	+0.24	" " $90^\circ$ (2)	-0.06

Table 6.

The number of the observed stars seems to be of no importance. The differences  $(A-G)_{\cos\varphi \cdot dt}$  seem to be in close connection with the azimuthal distribution of the observed stars: if there are more position lines near the azimuth  $270^\circ$  — the differences are negative and if near the azimuth  $90^\circ$  — the differences are positive. The same is to be said about the differences  $(A-G)_{d\varphi}$ : they are negative if more position lines are near the azimuth  $180^\circ$  and positive — if near the azimuth  $0^\circ$ . In this table the data are given for the scale

1" = 3 mm. But comparing the graphical and analytical results in the table 5 it is to be noticed, that on the whole in the different nights in the limits of the mean errors all the graphically obtained results are systematically shifted in one or the other direction. So the same can be said about the cases if other scales are used. Obtaining the results analytically, we search the point the distances of which from the straight lines  $\cos a_i \cdot d\varphi + \sin a_i \cos \varphi \cdot dt + \Delta z_i = 0$  are equal — but we find that point for which the sum of the squares of the distances is minimum. Finding the results graphically — we also search the point, the distances of which from the mentioned lines are equal — but here that point is found the distances of which are possibly best equal. This „possibly best“ of course for all persons will not be the same and it varies also for one person at a time. So the above mentioned systematical shift in one or the other direction is to be explained as a systematical error in the graphical results.

In the table 7 I have given for each period of observations the mean results: the analytical ( $A_0$ ), the graphical ( ${}_0G_2, {}_0G_2', {}_0G_3, {}_0G_3', {}_0G_5, {}_0G_5'$ ) and their mean errors.

Date	$A_0$		${}_0G_2, {}_0G_2'$				${}_0G_3, {}_0G_3'$				${}_0G_5, {}_0G_5'$			
	$d\varphi$	$\cos \varphi \cdot dt$	$d\varphi$	$\cos \varphi \cdot dt$	$d\varphi$	$\cos \varphi \cdot dt$	$d\varphi$	$\cos \varphi \cdot dt$	$d\varphi$	$\cos \varphi \cdot dt$	$d\varphi$	$\cos \varphi \cdot dt$	$d\varphi$	$\cos \varphi \cdot dt$
1933.	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
1.—6. VIII	+0.22 ±0.11	+0.42 ±0.33	+0.21 ±0.18	+0.17 ±0.24	+0.38 ±0.28	+0.46 ±0.26	+0.21 ±0.17	+0.20 ±0.15	+0.37 ±0.28	+0.36 ±0.24	+0.24 ±0.19	+0.24 ±0.14	+0.36 ±0.32	+0.36 ±0.28
1934.	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
30.VI-7.VII	+0.28 ±0.24	+0.63 ±0.09	+0.27 ±0.21	+0.17 ±0.34	+0.61 ±0.08	+0.74 ±0.15	+0.14 ±0.31	+0.05 ±0.25	+0.72 ±0.11	+0.64 ±0.16	+0.18 ±0.27	+0.17 ±0.32	+0.71 ±0.15	+0.73 ±0.15
1934.	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
10.—16.VII	+0.11 ±0.10	+0.26 ±0.08	+0.07 ±0.11	-0.04 ±0.13	+0.41 ±0.10	+0.42 ±0.06	+0.08 ±0.07	+0.12 ±0.10	+0.33 ±0.06	+0.35 ±0.06	+0.06 ±0.08	+0.08 ±0.12	+0.31 ±0.06	+0.36 ±0.10

Table 7.

In the limits of the mean errors the graphical and analytical results are agreeing.

In the table 8 I have arranged the differences  ${}_0G_i' - {}_0G_i$ .

Date	${}_0G_2, {}_0G_2'$		${}_0G_3, {}_0G_3'$		${}_0G_5, {}_0G_5'$	
	$d\varphi$	$\cos \varphi \cdot dt$	$d\varphi$	$\cos \varphi \cdot dt$	$d\varphi$	$\cos \varphi \cdot dt$
1933. 1.—6. VIII . . .	"	"	"	"	"	"
1934. 30. VI — 7. VII	-0.04	+0.08	-0.01	-0.01	0.00	0.00
1934. 10.—16. VII . .	-0.10	+0.13	-0.09	-0.08	-0.01	+0.02
	-0.11	+0.01	+0.04	+0.02	+0.02	+0.05

Table 8.

The results show again that the greater scales are to be preferred. In the practice using the scale  $1'' = 5 \text{ mm}$  it seems that the position lines are somewhat too much dispersed and there are difficulties in the choice of the best position of the transparent circle, but just in this case the differences are small.

Finding the results analytically to each of the equations  $\cos a_i \cdot d\varphi + \sin a_i \cos \varphi \cdot dt + \Delta z_i = 0$  a certain weight can be given according to the errors in  $\Delta z_i$ . If results are found graphically a certain weight to each position line can be given by drawing it more or less thickly. Placing the transparent circle on the drawn position lines the thicker position lines should be taken more in account than the thinner ones. Of course there will arise systematical errors for there is a place for a certain subjectivity.

Often two or more stars are observed in one and the same or nearly equal azimuths. If then the reduced  $\Delta z$  for those stars are equal, the obtained position lines give a double or threefold line. The taking in account of this doubleness or triplicity (graphically finding the results) is connected with difficulties: at least there will be a certain subjectivity.

An advantage of the graphical method is the applied less labour and the possibility to exclude observations which are connected with rough errors in the quantities  $\Delta z_i$ . So as in all azimuths  $\Delta z_i$  must not be equal, without graphically drawing the position lines, it cannot be said, whether an observation of a certain star is to be omitted. And so it is to be proposed also by using the analytical method to draw the position lines in order to remove the observations connected with rough errors.

### Conclusion.

Repeatedly obtaining the results from the same drawn position lines, differing results are got: the results of a single night differ and the mean results of more nights as well. In the last case, using greater scale the differences are small and it can be expected that by increasing the number of nights these differences would disappear. All though a certain subjectivity of the graphical finding of the results must be ascertained. Attempt to give a certain weight to each of the observed stars or to take in account the doubleness or triplicity of a certain

position line would also be connected with a certain subjectivity.

Still in the limits of the mean errors the graphical results agree with the analytical ones: the mean results of more nights agree and the results of a single night as well. The differences between the analytical and graphical results depend from the azimuthal distribution of the observed stars; if the number of the nights of observations is sufficiently great and if in those nights the azimuthal distribution of the observed stars is not the same, but in each two nights nearly opposite, the analytical finding of the results can be replaced by the graphical one. If the number of the nights of observations is not great and if in those nights the azimuthal distribution of the observed stars is nearly the same and if greater precision necessary, the results should be found analytically, using the method of the least squares, the rough errors of observations being excluded by the help of a graphic.

Presented to the Faculty 19. X. 1939.

Grafiski un analitiski atrastie rezultāti, nosakot vietas ģeografiskās koordinātas pēc vienādo augstumu metodes.

#### Savilkums.

Vieta ģeografiskā platuma un garuma vienlaicīgai noteikšanai ģeodezijā lieto tā saucamo vienādo augstuma metodi. Pēc šīs metodes novērotājs atzīmē momentus, kad vairākas zvaigznes sasniedz vienu un to pašu zenitdistanci, kas novērotājam zināma no mērījumiem. Tuveni zinot savas atrašanās vietas ģeografisko platumu ( $\varphi_0$ ) un ģeografisko garumu ( $L_0$ ), var novērotiem spīdekļiem zenitdistances dabūt arī rēķināšanas ceļā. Tā kā ģeografiskās koordinātas tikai tuveni zināmas, tad izmēritās un izrēķinātās zenitdistances nesakrīt, bet tur ir zināmas starpības. Pēc šīm starpībām tad var sarēķināt  $\varphi_0$  un  $L_0$  kļūdas:  $d\varphi$  un  $dL$ .  $d\varphi$  un  $dL$  atrašana iespējama analitiski un grafiski. Šajā darbā salīdzināti analitiskie un grafiskie rezultāti, dabūti no viena un tā paša novērojumu materiāla apstrādāšanas, un nolūks bijis noskaidrot jautājumu par abu rezultātu atrašanas paņēmieni līdzvērtīgumu.

Vispirms ģeometriski interpretētas analitiskā rezultātu atrašanas paņēmienā lietotās matemātiskās izteiksmes un konstatēts, ka grafiskais rezultātu atrašanas paņemiens ir pieskaņots šim interpretējumam un ka starp abiem rezultātu atrašanas paņēmieniem principālas starpības nav.

Grafiski rezultātus atrodot, pozīciju līnijas zīmētas dažādos mērogos, kā arī no viena un tā paša pozīciju līniju zīmējuma rezultātu atrašana atkārtota pēc vienas vai vairākām dienām. Tālāk tad nu salīdzināti šie dažādos mērogos un atkārtoti atrastie rezultāti savā starpā kā arī ar analitiski atrastiem rezultātiem.

No vienas nakts novērojumiem grafiski dažādos mērogos dabūto rezultātu starpībām ir gadījuma raksturs: tā tad vienreiz lielāku rezultātu dod viens — otru reizi cits mērogs (tab. 2).

Atkārtoti no viena un tā paša pozīciju līniju zīmējuma rezultātus atrodot, dabū atšķirīgus lielumus (tab. 3). Lielas starpības gan ir retas, pie kam tās nāk vairāk priekšā, lietojot mazāku mērogu (tab. 4).



No vienas nakts novērojumiem analitiski un grafiski atrastie rezultāti kļūdu robežās visumā saskan (tab. 5). Vienas nakts analitisko un grafisko rezultātu starpības ( $A - G$ ) izrādas būt atkarīgas no novēroto zvaigžņu azimutālā izdalījuma: 1) attiecībā uz  $d\varphi$  — ja vairāk zvaigžņu tuvu azimutam  $0^\circ$ , tad  $A - G$  ir pozitīva — ja vairāk zvaigžņu tuvu azimutam  $180^\circ$ , tad ( $A - G$ ) negatīvas, 2) attiecībā uz  $\cos\varphi \cdot dt$  — ja vairāk zvaigžņu tuvu azimutam  $90^\circ$ , tad ( $A - G$ ) pozitīvas — ja vairāk zvaigžņu tuvu azimutam  $270^\circ$  — tad negatīvas (tab. 6). Tas būtu izskaidrojams ar sistematiskām kļūdām rezultātu grafiskā atrašanā.

Nemot vairāku novērojumu nakšu vidējos rezultātus, jāsaprot, ka grafiski dažādos mērogos atrastie rezultāti kļūdu robežās saskan savā starpā un arī ar analitiskiem rezultātiem (tab. 7). Atkārtoti atrastie rezultāti arī tagad šķirojas; lielāku mērogu lietojot starpības gan mazas un pie lielāka novērojumu nakšu skaita var sagaidīt to izzušanu. Izceļamas ir grafiskā rezultātu atrašanas paņēmiena priekšrocības: pārskatāmība par rupji kļūdainiem novērojumiem un mazākais darba patēriņš.

#### Slēdzieni.

Atkārtoti no tiem pašiem pozīciju līniju zīmējumiem rezultātus atrodot — rezultāti šķirojas: tas sakams gan par atsevišķas nakts, gan par vairāku novērojumu nakšu vidējiem rezultātiem. Pēdējā gadījumā gan starpības pie lielāka mēroga lietošanas mazas, un var sagaidīt, ka pie lielāka novērojumu nakšu skaita starpības izzustu. Par zinamu subjektīvismu grafiskā rezultātu atrašanā tas tomēr liecina. Arī atsevišķu zvaigžņu novērojumu svarošana un vairākkārtēju pozīciju līniju vērā ņemšana, grafiski rezultātus atrodot, ir neizbēgami saistīta ar zinamu patvaļu.

Kļūdu robežās analitiskie un grafiskie rezultāti tomēr saskan; saskan vairāku novērojumu nakšu vidējie rezultāti, kā arī vienas atsevišķas nakts dotie rezultāti. Analitisko un grafisko rezultātu starpības ir atkarīgas no pozīciju līniju sakārtojuma; ja novērojumu nakšu skaits ir pietiekoši liels un ja šais naktīs novēroto zvaigžņu azimutālais sadalījums nav viens un tas pats, bet ik divās naktīs apmēram pretējs, tad analitiskā rezultātu atrašanas paņēmiena vietā var lietot grafisko. Ja novērojumu nakšu skaits mazāks un novēroto zvaigžņu azimutālais izdalījums visās naktīs daudz maz vienāds, tad lielākas precizitātes vajadzības gadījumā jālieto analitiskais paņmiens, rupjās novērojumu kļūdas atsiļājot ar grafikas palīdzību.

No vienas naktis novērojumiem analītiski un grafiski atstātē rezult-  
 tāti kļūda robežas visuam saskaņ (tab. 5). Vienas naktis analītisko un  
 grafisko rezultātu starpības (A — G) izrādās būt atkarīgas no novēroto  
 zvaiņņu aximālās izdalījuma: 1) attiecībā uz dφ — ja vairāk zvaiņņu  
 tuvu aximālam 0° tad A — G ir pozitīvas — ja vairāk zvaiņņu tuvu  
 aximālam 180° tad (A — G) negatīvas, 2) attiecībā uz cosφ. — ja  
 vairāk zvaiņņu tuvu aximālam 90° tad (A — G) pozitīvas — ja vai-  
 rāk zvaiņņu tuvu aximālam 270° tad negatīvas (tab. 6). Tas palū  
 izskaidrojams ar sistematiskām kļūdam rezultātu grafiskā atstāšanā.  
 Ņemot vērāku novērojumu māksasvīdējos rezultātas, jāaska, ka  
 grafiskā daždos mērogos atstātē rezultāti kļūda robežas saskaņ savā  
 starpā un arī ar analītiskiem rezultātiem (tab. 7). Atbilstoši atstātē re-  
 zultātiem atstātē starpības; lielāku mērogu hietoj starpības gan mazas  
 un pie lielāku novērojumu naktis skaita var sagaidīt to izņemšanu. Ie-  
 lamā ir grafiskā rezultātu atstāšanas pārkāpums: pārkā-  
 pums par to, ka hietoj novērojumiem un mazākais dātos pārkā-  
 pums inveniēt kādā katrā hietoj starpības. At šīs atstāšanas ir  
 iz- iz ir tur tad, izrādās saskaņ starpības un atstāšanas būt saskaņ  
 starpības 7 un 8. Izrādās, ka katrā hietoj starpības saskaņ  
 starpības no liem pašiem pozitīvu hietoj kļūmēm rezultātas  
 atrodot — rezultāti skaitās; tas saskaņ gan par atstāšanas naktis gan  
 par vairāku novērojumu naktis vidējiem rezultātiem. Pēdējā gadījumā  
 gan starpības pie lielāku mērogu hietojamas mazas un var sagaidīt, ka  
 pie lielāku novērojumu naktis skaita starpības izrādās. Par zināmu  
 subjektīvu grafiskā rezultātu atstāšanu tas tomēr liecina. Ar atstāšanu  
 zvaiņņu novērojumu svārstānu un vairākkārtēju pozitīvu hietoj vērā  
 gēmasnā grafiskā rezultātas atrodot, ir neizpējamā sānā ar zināmu  
 pārkāpumu.

Kļūda robežas analītiskie un grafiskie rezultāti tomēr saskaņ; saskaņ  
 vairāku novērojumu naktis vidējie rezultāti, ka arī vienas atstāšanas  
 naktis bontē rezultāti. Analītisko un grafisko rezultātu starpības ir at-  
 stāšanas no pozitīvu hietoj atkarīgas; ja novērojumu naktis skaita ir  
 pietiekoshi liels un ja šīs naktis novēroto zvaiņņu summas sānā.  
 jama nav vienas un tas pats, bet ikdivas naktis apmēram pretēji, ja  
 analītiskā rezultātu atstāšanas pārkāpums ir hietoj kļūmēs. Ja  
 novērojumu naktis skaita ir mazs un novēroto zvaiņņu aximālās iz-  
 dalījums vienas naktis dādos mazs, tad hietoj precizitātes vajā-  
 dības gadījumā jālieto analītiskā pārkāpums, turpās novērojumu kļūdas  
 atstājot ar grafiskā pārkāpumu, izskaidrojot, ka katrā hietoj starpības

Über die Beobachtungsanzahl, die für die Bestimmung der Polhöhe eines Ortes notwendig wäre, wenn das Resultat mit dem mittleren Fehler  $\pm 1''$  genau sein soll.

*Sergejs Slaucitājs.*

### Einleitung.

Die vorliegende Arbeit ist eine Zusammenfassung eines größeren Manuskriptes, das schon im Jahre 1927 verfaßt worden war, jedoch nicht gedruckt wurde. Der Grundzweck dieser Arbeit war festzustellen, wie viele Messungen notwendig wären, um die Polhöhe eines Ortes mit der Genauigkeit bis auf eine Bogensekunde nach mehreren Methoden bei Gebrauch verschiedener transportabler Instrumente zu bestimmen.

Die Beobachtungen wurden in der Sternwarte der Lettländischen Universität ausgeführt, darum geben die gewonnenen Resultate, auch unter anderem die Polhöhe der Sternwarte mit der Genauigkeit bis auf eine Bogensekunde.

Die Polhöhe ist nach folgenden Methoden bestimmt worden:

- 1) nach der Horrebow-Talcott'schen,
- 2) nach der Pewzow'schen,
- 3) nach Messungen der Zenitdistanzen der Polaris,
- 4) nach den gemessenen Nebenmeridian- wie auch Meridianzenitdistanzen verschiedener Sterne.

Als Instrumente wurden benutzt:

- 1) ein Durchgangsinstrument,
- 2) zwei Universalinstrumente,
- 3) ein Höhenkreis und
- 4) zwei Sextante.

## 1. Die Instrumente und ihre Konstanten.

1. Das Durchgangsinstrument der Firma Heyde Nr. 9096 war mit gebrochenem Fernrohr; die Objektivöffnung war 110 mm, die Brennweite 120 cm und die benutzte Vergrößerung 133.

Die Horrebow-Talcott Libellen hatten einen Parswert

$$\tau_1 = 1''.34 \quad (0 - 30)$$

$$\tau_2 = 1.09 \quad (60 - 90)$$

Der Wert einer Schraubenrevolution des Okularmikrometers war

$$R = 83''.8.$$

2. Das Universalinstrument mit gebrochenem Fernrohr der Firma Hildebrand Nr. 58500 hatte eine Objektivöffnung von 63 mm, eine Brennweite 54 cm und die benutzte Vergrößerung war 65mal.

Die Kreise waren mit Mikroskope abzulesen; direkte Ablesung 1". Der Parswert der Horrebow-Talcott Libelle  $\tau = 1''.09$ ; der der Rahmen Libelle  $\tau' = 1''.27$ .

3. Das Universalinstrument mit gebrochenem Fernrohr der Firma Kern Nr. 21016: Objektivöffnung 65 mm, Brennweite 55 cm, die benutzte Vergrößerung 60mal.

Die Kreise sind mit Hilfe der Mikroskope abzulesen; direkte Ablesung 1". Der Parswert der Horrebow-Talcott Libelle  $\tau = 2''.51$ ; der Parswert der Mikroskoprahmenlibelle  $\tau' = 4''.20$ .

4. Höhenkreis mit gebrochenem Fernrohr der Firma Sartorius-Werke Nr. 2107: Objektivöffnung 35 mm, Brennweite 37 cm, die benutzte Vergrößerung 48mal.

Der Vertikalkreis ist mit Hilfe der Mikroskope auf 5" direkt abzulesen. Der Parswert der Mikroskoprahmenlibelle  $\tau' = 4''.80$ .

5. Sextant der Firma Plath Nr. 9059 war mit einem Vernier auf 10" abzulesen. Die benutzte Vergrößerung des Fernrohrs war 10mal.

6. Sextant Мастерскія Главн. Гидрограф. Управленія (С. П. Б.) Nr. 41, war mit einem Vernier auf 12" abzulesen: die gebrauchte Vergrößerung 10mal.

7. Ein Taschenchronometer (Vierzehntelschläger) Ericson Nr. 655.

8. Die an den Chronograph angeschlossene Uhr war Riefler Nr. 435 auf Sternzeit reguliert.

## 2. Die zu theoretisch erwartende Genauigkeit der Resultate.

Wenn die Instrumentenfehler nicht in Betracht genommen werden<sup>1</sup> und angenommen werden würde, daß der mittlere Fehler der erhaltenen geographischen Breite von Zenitdistanzmessungen eines Sternes nur von folgenden Fehlern abhängig wäre, und zwar vom

1) mittleren Fehler der Einstellung des Sternes auf den Faden des Instrumentes,  $\varepsilon_s$ ,

2) mittleren Fehler bei der Ablesung der Zenitdistanzen,  $\varepsilon_e$ , und

3) Katalogfehler der Sterndeklination,  $\varepsilon_\delta$ , so hatten wir im allgemeinen einen mittl. zufälligen Fehler  $\varepsilon_\varphi$

$$\varepsilon_\varphi = \pm \sqrt{\varepsilon_s^2 + \varepsilon_e^2 + \varepsilon_\delta^2}$$

zu erwarten.

Wenn die Polhöhe zum Beispiel nach folgender Formel berechnet wird

$$\varphi = \delta \pm z, \dots \dots \dots (1)$$

dann ist

$$\varepsilon_\varphi = \pm \sqrt{\varepsilon_z^2 + \varepsilon_\delta^2},$$

wo mit  $\varepsilon_z$  der mittlere Fehler der Bestimmung der Zenitdistanz bezeichnet worden ist [ $\varepsilon_z^2 = (\varepsilon_s/\sqrt{n})^2 + (\varepsilon_e/\sqrt{m})^2$ , wo  $n$  die Anzahl der Fäden, auf welchen der Stern beobachtet wurde, ist und  $m$  — die Ablesungsanzahl der gemessenen Zenitdistanzen ist].

Wenn die Zenitdistanz oder Höhe des gegebenen Sternes mit Hilfe eines Instrumentes bestimmt ist, so ist die Grundformel zur Berechnung der  $\varphi$ :

$$\cos z = \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos t, \dots \dots \dots (2)$$

wo  $z$  — die Zenitdistanz des Sternes,  $\varphi$  — die Polhöhe des Ortes,  $\delta$  — die Deklination des Sternes,  $t$  — den Stundenwinkel im Momente der Beobachtung bezeichnet.

Der Fehler bei der Bestimmung der Polhöhe,  $\Delta\varphi$ , ist abhängig von den Fehlern  $\Delta z$  und  $\Delta t$  und ist nach folgender Formel zu berechnen

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta z}{\cos A_z} - \Delta t \frac{\cos \varphi}{\text{ctg } A_z}, \dots \dots \dots (3)$$

wenn  $A_z$  das Azimut des Sternes bezeichnet.

<sup>1</sup> Der Einfluß der Instrumentenfehler wird besonders behandelt.



Wenn wir den persönlichen Fehler des Beobachters bei der Notierung des Momentes  $T$ , wenn der Stern den Faden bissiziert, zur Uhrkorrektur hinzuzählen, so ist  $\Delta t$  — der zufällige Fehler und seine Größe, bei der Beobachtung des Bissisierungsmomentes eines Fadens, kann annäherungsweise durch folgende Formel

$$\varepsilon_t = \pm \sqrt{x^2 + \left(\frac{\varepsilon}{v}\right)^2}$$

ausgedrückt werden, wo  $x$  — eine konstante Größe ist, die von dem Verfahren der Momentnotierung abhängig ist,  $\varepsilon$  — der mittlere Einstellungsfehler des Fadens auf einen unbeweglichen Gegenstand und  $v = \cos \delta \cdot \sin q$  ist die Winkelgeschwindigkeit bei der Bewegung des Sternes, wenn  $q$  der Winkel ist, unter dem der Stern mit der Deklination  $\delta$  den Faden bissiziert ( $q$  ist der parallaktische Winkel des Sternes, wenn die Fäden horizontal, und  $(90^\circ - p)$ , wenn sie vertikal sind).

Wenn wir den Stern gerade im Beobachtungsmeridian ( $A_z = 0^\circ$  oder  $180^\circ$ ) beobachten, so wird, wie die Formel (3) zeigt,  $\Delta t$  das Resultat  $\varphi$  gar nicht beeinflussen, und in diesem Falle ist  $\Delta \varphi$  bloß von  $\Delta z$  (und von dem faktischen Deklinationsfehler des beobachteten Sternes) abhängig.

Die Größe  $\Delta z$  — der mittlere zufällige Fehler einer Bestimmung der Zenitdistanz, dessen Wert wir mit  $\varepsilon_z$  bezeichnen, wird hauptsächlich, wie schon früher erwähnt wurde, durch

- 1) den Fehler einer Einstellung des Sternes auf dem Faden,  $\varepsilon_s$ , und
- 2) den mittleren Fehler einer Kreisablesung,  $\varepsilon_e$ , charakterisiert.

Da die meridionalen oder auch nebenmeridionalen Zenitdistanzen eines Sternes sich sehr langsam ändern, so könnte man den Fehler der Einstellung auf den Faden bei der Beobachtung des Bissisierungsmomentes,  $\varepsilon_s$ , auch ungefähr gleich  $\varepsilon$  annehmen, d. h. im mittleren

$\pm \frac{50''^2}{W}$ ,  
wo  $W$  die Vergrößerung des Instrumentes ist.

<sup>2</sup> Wie es die Beobachtungspraxis zeigt, so ist bei der Einstellung des Fadens auf einen Stern der mittlere Fehler  $\varepsilon_s$  größer, als bei der Einstellung auf ein unbewegliches terrestrisches Objekt. Wenn man annimmt, daß  $\varepsilon$  bei der Einstellung des Fadens auf ein unbewegl. terrestrisches Objekt etwa  $\pm \frac{30''}{W}$  oder  $\pm \frac{2^s}{W}$  wäre, so würde bei einer

Sternbeobachtung  $\varepsilon_s$  in den Grenzen von  $\pm \frac{2^s \cdot 5}{W}$  bis  $\pm \frac{4^s \cdot 0}{W}$  schwanken (hier ist mit  $W$  die Vergrößerung des Fernrohres bezeichnet worden). Siehe auch: *H. Цингер, Курс астрономии, часть практическая, Москва.*

Der mittlere Ablesungsfehler des vertikalen Kreises,  $\epsilon_e$ , ist abhängig 1) vom Einstellungsfehler der Fäden des Mikrometers auf die Einteilungen des Limbus,  $\epsilon_i$ , letzterer ist wiederum abhängig von der Vergrößerung der Mikroskope (gewöhnlich  $40\times$  oder  $50\times$ ), der Entfernung der Fäden, der Schärfe der Limbuseinstellung usw. und 2) vom Ablesungsfehler der Libellen des Mikroskoprahmens,  $\epsilon_r$ . (Der Einstellungsfehler des Mikrometers,  $\epsilon_i$ , wurde nach mehrmaliger Wiederholung, beim Gebrauch der Universalinstrumente von Hildebrand und Kern, beinahe immer ein und derselbe gefunden, nämlich  $\pm 0.3$  Zylindereinteilungen, beim Höhenkreis, Sartorius-Werke,  $\pm 0.4$  Zylindereinteilungen.)

Im einzelnen Fall könnte man, bei der Bestimmung der Polhöhe des Ortes nach den Messungen der absoluten Zenitdistanzen, mit den gebrauchten Instrumenten, für das Endresultat folgenden mittleren Fehler erwarten:

### 1. Universalinstrument der Firma Hildebrand.

$$\epsilon_r = \pm \frac{50''}{65} = \pm 0''.77$$

$$\epsilon_e = \pm \sqrt{\epsilon_i^2 + \epsilon_r^2} = \pm \sqrt{0.1} \approx \pm 0''.3$$

Wenn jede Ablesung des vertikalen Limbus mit Hilfe zweier Mikroskope ausgeführt wird und wenn der mittlere Fehler einer Ablesung  $\epsilon_e = \pm \sqrt{0.1}''$  ist, dann wird wie in der Kreisstellung  $L$ , so auch in der Stellung  $R$ , der Limbusablesungsfehler bei einer Einstellung des Sternes

$$\epsilon_{e_1} = \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_e}{\sqrt{2}}\right)^2} = \pm \sqrt{0.05} \approx \pm 0''.2$$

und daraus ist  $\epsilon_{z_1}$  für eine Einstellung des Sternes

$$\epsilon_{z_1} = \pm \sqrt{0.64} = \pm 0''.8.$$

Das mittlere Resultat der Zenitdistanz des Sternes, das aus einer Einstellung in beiden Kreisstellungen gefunden ist, wird mit dem mittleren zufälligen Fehler

$$\epsilon_{z_2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_{z_1}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \pm \sqrt{0.32} \approx \pm 0''.6.$$

Der mittlere zufällige Fehler des Resultates der Polhöhe,  $\varepsilon_{\varphi_2}$ , das als Mittel aus einer Einstellung am Kreis  $L$  und Kreis  $R$  gefunden worden ist, wird

$$\varepsilon_{\varphi_2} = \pm \sqrt{\varepsilon_{z_2}^2 + \varepsilon_{\varphi_2}^2} = \pm \sqrt{0.41} \approx \pm 0''.7.$$

Für das Resultat  $-\varphi$ , das aus einer *Kombination* von zwei Beobachtungen: Einstellungen des Südsterne (Kreis  $L$  und  $R$ ) und Einstellungen des Nordsterne (Kreis  $L$  und  $R$ ) gefunden worden ist, der mittlere zufällige Fehler würde sein

$$\varepsilon_{\varphi_4} = \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{\varphi_2}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \pm \sqrt{0.21} \approx \pm 0''.5.$$

## 2. Universalinstrument der Firma Kern.

$$\varepsilon_s = \pm 0''.83$$

$$\varepsilon_{z_2} = \pm \sqrt{0.41} \approx \pm 0''.6$$

$$\varepsilon_{\varphi_2} = \pm 0''.7$$

$$\varepsilon_{\varphi_4} = \pm 0''.5.$$

## 3. Höhenkreis der Firma Sartorius-Werke.

$$\varepsilon_s = \pm 1''.04$$

$$\varepsilon_{z_2} = \pm \sqrt{1.61} \approx \pm 1''.3$$

$$\varepsilon_{\varphi_2} = \pm 1''.3$$

$$\varepsilon_{\varphi_4} = \pm 0''.9.$$

## 4. Sextant.

Bei der Beobachtung ist der mittlere Fehler der Koinzidenz zweier Abbildungen größer als der Einstellungsfehler auf dem Faden. Bei der Vergrößerung  $W = 10$ , befindet sich der Fehler in den Grenzen zwischen  $\pm 4''$  bis  $\pm 8''$ , je nach der Schärfe des Objektes usw.

Wenn wir annehmen, daß  $\varepsilon'_s = \pm 6''$  und der mittlere Fehler einer Ablesung des Limbus  $\varepsilon_e = \pm 5''$ , so ist

$$\varepsilon'_{z_1} = \pm \sqrt{61} \approx \pm 8''$$

$$\varepsilon_{\varphi_1} = \pm \sqrt{61.1} \approx \pm 8''.$$

<sup>3</sup> Die Deklinationen der beobachteten Sterne sind dem Sternkatalog von *Eichelberger* entnommen, in dem der Fehler eines Sternes bei der Deklination mit dem mittleren Fehler  $\pm 0''.3$  charakterisiert ist, siehe

W. S. *Eichelberger*, Positions and proper motions of 1504 stars for the equinox 1925.0, Washington, 1925.

Der mittlere zufällige Fehler des mittleren  $\varphi$  Resultats aus einer Kombination (Stern nach  $N$  und  $S$ )

$$\varepsilon_{\varphi_2} = \pm \sqrt{31} \approx \pm 6''$$

$$(\varepsilon_{\varphi_4} = \pm 4'').$$

Gewiß kann der mittlere Fehler der gegebenen Polhöhe einer Sterneinstellung oder einer Sternenkombination in der Praxis auch ein anderes Resultat ergeben, denn jedes Instrument hat seine eigenen, besonderen Fehler, die mit der Anordnung der Beobachtungen nicht eliminiert werden können.

Bei den Polhöhen-Bestimmungen nach den Methoden von *Pewzow* oder *Horrebow-Talcott* wird der Wert von  $\varepsilon_{\varphi}$  anders ausfallen, als nach den direkten Messungen der absoluten Zenitdistanzen der Sterne.

### 3. Die Anordnung der Beobachtungen und kurze Beschreibung derselben.

Vor dem Beginn der Beobachtungen wurden die Fehler jedes Instrumentes, soweit es möglich war, verkleinert und nachher sorgfältig geprüft um mit Sicherheit zu konstatieren, daß sie bei entsprechendem Verfahren die gesuchte Präzision der zu bestimmenden Breite nicht beeinflussen. Systematische Fehler der Instrumente wurden möglichst ausgeschaltet, indem die einzelnen Beobachtungen miteinander entsprechend kombiniert wurden.

Die mit dem Universalinstrument oder Höhenkreis gemessene Zenitdistanz wird von folgenden bedeutenden systematischen Fehlern der Instrumente beeinflusst:

- 1) Fehler der Neigung der horizontalen Achse,
- 2) Kollimationsfehler,
- 3) systematischen Fehlern der Limbuseinteilungen,
- 4) Bieigungsfehler des Fernrohres.

Außer den Fehlern der Instrumente ist noch der

- 5) Refraktionsfehler in Betracht zu ziehen.

Wenn  $z > 5^{\circ}$ , dann wird bei einer ziemlich kleinen Neigung der horizontalen Achse des Instrumentes die Zenitdistanz beinahe gar nicht beeinflusst. Den Einfluß der Kollimationsfehler der Instrumente beseitigt man, wenn man den Stern in beiden Kreisstellungen beobachtet. Die systematischen Fehler der Limbus-Einteilungen können an dem

entsprechenden Instrumente (z. B. an dem Universalinstrument von Hildebrand) sehr klein sein und beim Verstellen des Kreises können sie zum größten Teil eliminiert werden. Die Biegung des Fernrohres und die Refraktionsfehler können in gewissem Grade ausgeschaltet werden, indem die Beobachtungen der Sterne nach *S* und *N* immerfort kombiniert werden.

Die systematischen Fehler des Sextanten, wie die Exzentrizität der Alhidade, die systematischen Fehler der Teilungen usw. wurden bestimmt, indem die Resultate verschiedener Winkelmessungen, die mit Hilfe des Sextanten ausgeführt waren, mit den Resultaten verglichen wurden, die mit Hilfe der Universalinstrumente gewonnen waren. Nachher wurde eine Graphik zusammengestellt, von welcher dann die betreffenden Verbesserungen der gegebenen Winkel abgelesen wurden.

Die Höhen- oder Zenitdistanzmessungen der Sterne waren derart angeordnet, daß die schon erwähnten systematischen Fehler des Instrumentes nach Möglichkeit eliminiert werden würden.

Bei allen Beobachtungen ist als Grundregel eine Kombination von Sternen, die nach Norden und Süden gemessen worden sind, angenommen. Beim Gebrauch des Universalinstrumentes oder Höhenkreises gibt es im ganzen für beide Sterne in beiden Kreisstellungen vier Beobachtungen der Zenitdistanzen.

Für das Verzeichnis der beobachteten Sternpaare nach der Pewzow'schen Methode sind die Ephemeriden von *Seliwerstow*<sup>4</sup> verwendet worden.

Mit dem Sextanten sind nur die hellsten Sterne oder die Sonne im künstlichen Horizont beobachtet worden, wobei das Instrument im Stativ befestigt wurde.

Bei der Beobachtung der Pewzow'schen Sternpaare sind die Momente, wenn der Stern die Fäden des Instrumentes bissizierte, mit Hilfe des Tasters auf dem Chronograph verzeichnet; die H. T. Libelle ist bei jedem Stern, bei jedem Faden abgelesen worden. Bei den übrigen Beobachtungen ist die Zeit mit dem Vierzehntelschläger nach der „Aug- und Ohrmethode“ notiert worden.

<sup>4</sup> И. Селиверстов, Эфемериды звезд для определения широты по соответственным высотам, Москва, 1912.



#### 4. Die Berechnung der Beobachtungen.

1. Die beobachteten Horrebow-Talcott'schen Sternpaare sind nach folgender Formel berechnet:

$$\varphi = \frac{1}{2} (\delta_s + \delta_n) + \frac{1}{2} R (m_o - m_w) + \frac{1}{2} (r_s - r_n)^5, \dots (4)$$

wo  $\delta_s$  und  $\delta_n$  die Deklinationen der beobachteten Süd- resp. Nordsterne sind,  $R$  — der Wert der Schraubenrevolution des Mikrometers,  $m_o$  und  $m_w$  — die Ablesungen des Mikrometers bei den Ost- und West-Stellungen des Okulares d. Instrumentes, die auf die Differenz der Neigung des Instrumentes und der Krümmung der Parallele verbessert sind,  $r_s$  und  $r_n$  — Refraktionswerte der Süd- und Nordsterne.

2. Die Pewzow'schen Sternpaare:

$$\text{tang } \varphi = \frac{\cos \delta_s \cos t_s - \cos \delta_n \cos t_n}{\sin \delta_n - \sin \delta_s}, \dots (5)$$

wo  $t_s = T_s + \Delta T - \alpha_s$  und  $t_n = T_n + \Delta T - \alpha_n$ , dabei sind  $\delta_s$  und  $\delta_n$ ,  $\alpha_s$  und  $\alpha_n$ ,  $t_s$  und  $t_n$ ,  $T_s$  und  $T_n$  — die Deklinationen der beobachteten Süd- resp. Nordsterne, Rektaszensionen, Stundenwinkel und Momente, in denen die Sterne ein und denselben Faden des Instrumentes bissetzten;  $\Delta T$  — die Uhrkorrektur.

Die Korrektur auf die Neigung ist nach folgender Formel gefunden:

$$\Delta i = \frac{i_n - i_s}{15 \cos \varphi \sin A z_n}, \dots (6)$$

$\Delta i$  ist für jeden Faden einzeln gerechnet worden.

3. Die absoluten Zenitdistanzen der Polaris:

$$\varphi = (90^\circ - z) - p \cdot \cos t + \frac{1}{2} p^2 \sin^2 1'' \cdot \text{tang } \varphi \cdot \sin^2 t + \frac{1}{6} p^3 \cdot \sin^2 1'' (1 + 3 \text{ tang}^2 \varphi) \cdot \sin^2 t \cdot \cos t^5, \dots (7)$$

wo  $p$  die Polardistanz der Polaris in Bogensekunden ausgedrückt ist.

<sup>5</sup> Th. Albrecht, Formeln und Hilfstafeln für geographische Ortsbestimmungen, Leipzig, 1908.

4. Die nebenmeridionalen resp. meridionalen Zenitdistanzen:

$$\varphi = \delta + z - \frac{\cos \varphi \cdot \cos \delta}{\sin(\varphi - \delta)} \cdot \frac{2 \sin^2 \frac{t}{2}}{\sin 1''} + \left[ \frac{(\cos \varphi \cdot \cos \delta)^2}{\sin^2(\varphi - \delta)} \operatorname{ctg}(\varphi - \delta) \cdot \frac{2 \sin^4 \frac{t}{2}}{\sin 1''} \right]^{\frac{5}{2}} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \varphi = \delta + z_m \\ \varphi = 180^\circ - \delta - z_m \end{cases} \quad (8')$$

Die Korrekturen der astronomischen Uhr Riefler 435 sind nach FLE (Paris) rhythm. Radio Zeitsignalen bestimmt, wonach bei dem Vergleich der Uhr mit dem Vierzehntelschläger, die Korrektur des letzteren gefunden ist.

Die Koordinaten der Sterne (auch der Sonne) sind *in allen Fällen nach Eichelbergers System berechnet*, indem nur die ersten Differenzen beachtet wurden.

Die Beobachtungen sind mit der Genauigkeit bis auf  $0''.1$  berechnet, außer den Sextantmessungen, die mit der Genauigkeit bis auf  $1''$  berechnet worden sind.

Die gegenseitigen Stellungen der Beobachtungspfeiler der Instrumente in der Polhöhe unterscheiden sich nicht mehr als einige tausendstel einer Sekunde, daher sind sie auch nicht, bei dem Vergleich der entsprechenden Polhöhen, die aus den Beobachtungen verschiedener Instrumente auf verschiedenen Pfeiler gewonnen sind, auf einen bestimmten Ort zentriert. Die zu verschiedenen Zeiten bestimmten Breiten sind auch nicht auf eine mittlere Erdpolstellung reduziert, denn diese Korrektur ist im Vergleich mit der Präzision des gesuchten Breitenresultates unbedeutend.

Der mittlere Fehler der gefundenen Resultate  $\varepsilon_0$  (der mittlere quadratische Fehler der mittleren arithmetischen Größe) ist nach der Formel

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_1}{\pm \sqrt{n}}$$

berechnet, wo  $\varepsilon_1$  der mittlere Fehler einer Beobachtung ist und wiederum nach der Formel

$$\varepsilon_1 = \pm \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n-1}}$$

berechnet wird, wenn die Größen  $n$  und  $v_i$  die Beobachtungsanzahl und die Differenzen, zwischen der mittleren arithmetischen Größe und jedem einzelnen Beobachtungsergebnis, bezeichnen.

## 5. Die Beobachtungsergebnisse.

## I. Die Horrebow-Talcott Methode.

Die Polhöhe ist nach der H.-T. Methode mit dem Durchgangsinstrument von *Heyde* bestimmt worden. Die Beobachtung der Sterne und die Berechnung der erhaltenen Resultate, ebenso die Bestimmung der Instrumentkonstanten, sind in Übereinstimmung mit der Instruktion der internationalen Breitenbestimmung<sup>6</sup> ausgeführt worden.

Die beobachteten Sternpaare:

Nr. 1	$\xi$ Cygni	$3^m.9$	$\alpha_{1927.0} = 21^h 2^m.2$	$\delta_{1927.0} = 43^\circ 38'$	$z_m = 13^\circ 18'$	$\Delta z = 2'$
	$\beta$ Cephei	3.3	21 27.7	70 14		
2	20 Cephei	5.4	22 2.8	62 26	5 17	24
	3 Lacertae	4.6	22 20.7	51 52		
3	10 Lacertae	4.9	22 36.0	38 40	18 10	14
	$\pi$ Cephei	4.7	23 5.6	75 00		
4	$\xi$ Cassiopeiae	3.7	0 32.9	53 30	13 25	5
	$\gamma$ Cassiopeiae	2.3	0 52.3	60 19		

Beobachtungsergebnisse:

Datum	Nr. der Sternpaare	$\varphi$ <sup>7</sup>	$v$	$v^2$
1927. August 18	1	$56^\circ 57' 7''.9$	+ 0.2	0.04
	3	9.2	- 1.1	1.21
August 19	1	8.0	+ 0.1	0.01
	2	7.8	+ 0.3	0.09
	3	7.7	+ 0.4	0.16
	4	7.8	+ 0.3	0.09
		$56^\circ 57' 8''.1$		

Der mittlere Fehler der mittleren arithmetischen Größe,  $\varepsilon_{\varphi_0} = \pm 0''.2$ .

Der mittlere Fehler des gegebenen Resultates eines

Sternpaares,  $\varepsilon_{\varphi_0} = \pm 0''.6$ .

Der mittlere Fehler des gegebenen Resultates einer

Kombination (die Einstellungen zweier *N* und zweier *S* Sterne),  $\varepsilon_{\varphi_0} = \pm 0''.8$ .

<sup>6</sup> *Th. Albrecht*, Anleitung zum Gebrauche des Zenitteleskops auf den Internationalen Breitenstationen, Centralbureau der Internationalen Erdmessung, Neue Folge der Veröffentlichungen Nr. 4, Berlin, 1902.

<sup>7</sup> Alle Sternpaare haben 4 Mikrometerablesungen bei jeder Kreisstellung.

II. Die Pewzow'sche Methode.

Die Polhöhe ist nach Pewzow'scher Methode mit den Universalinstrumenten von Hildebrand und Kern bestimmt worden.

a) Universalinstrument von Hildebrand.

Die beobachteten Sternpaare:

Nr. 1	$\beta$ Lyrae	3 <sup>m</sup>	$\alpha_{1927.0} = 18^h 47^m.4$	$\delta_{1927.0} = 33^\circ 17'$
	$\beta$ Cephei	3.3	21 27.7	70 14
2	$\sigma$ Herculis	3.8	18 4.7	28 45
	$\beta$ Ursae Min.	2.0	14 50.9	74 27
3	$\gamma$ Cygni	2.2	20 19.6	40 1
	11 Cephei	4.8	21 40.9	70 58
4	$\epsilon$ Cygni	2.5	20 43.2	33 42
	$\pi$ Cephei	4.6	23 5.6	75 0
5	$\zeta$ Aquilae	3.0	19 2.1	13 45
	$\alpha$ Draconis	3.8	12 30.4	70 11
6	15 Cygni	5.0	19 41.6	37 11
	$\chi$ Draconis	3.7	18 22.4	72 42

Beobachtungsergebnisse:

Datum	Nr. der Sternpaare	$\varphi^s$	$v$	$v^2$
1927. Juni 19	1	56° 57' 8".4	-0.2	0.04
Juli 10	2	8.2	± 0.0	0.00
	3	9.1	-0.9	0.81
	4	7.9	+0.3	0.09
Juli 14	5	7.6	+0.6	0.36
	6	8.8	-0.6	0.36
August 15	1	8.6	-0.4	0.16
	2	8.4	-0.2	0.04
	3	7.8	+0.4	0.16
	5	7.2	+1.0	1.00
		56° 57' 8".2		

$$\epsilon_{\varphi_0} = \pm 0''.2$$

$$\epsilon_{\varphi_{20}} = \pm 0''.6$$

$$\epsilon_{\varphi_4} = \pm 1''.3$$

$\varphi^s$  — das arithmetische Mittel von 10 Fadenbeobachtungen.

Zur Illustration können noch die Resultate, die aus den Beobachtungen eines Sternpaares bei jedem einzelnen Faden gewonnen sind, angeführt werden.

Sternpaar № 1, 1927. Juni 19<sup>9</sup>:

Nr. des Fadens	$\varphi$	$v$	$v^2$
II	56° 57' 8".7	- 0.3	0.09
III	7.7	+ 0.7	0.49
IV	8.3	+ 0.1	0.01
V	8.4	± 0.0	0.00
VI	9.7	- 1.3	1.69
VII	9.5	- 1.1	1.21
VIII	6.4	+ 2.0	4.00
IX	7.8	+ 0.6	0.36
X	8.5	- 0.1	0.01
XI	8.9	- 0.5	0.25
	<u>56° 57' 8".4</u>		

$$\varepsilon_{\varphi_{20}} = \pm 0".3$$

#### b) Universalinstrument von Kern.

Die Nr.Nr. der beobachteten Sternpaare nach dem angeführten Verzeichnis.

Datum	Nr. der Sternpaare	$\varphi^{10}$	$v$	$v^2$
1926. Juli 14	2	56° 57' 8".1	- 0.3	0.09
	3	8.3	- 0.5	0.25
	4	7.2	+ 0.6	0.36
	6	7.6	+ 0.2	0.04
Juli 17	5	7.8	± 0.0	0.00
		<u>56° 57' 7".8</u>		

$$\varepsilon_{\varphi_6} = \pm 0".2$$

$$\varepsilon_{\varphi_{16}} = \pm 0".5$$

$$\varepsilon_{\varphi_4} = \pm 0".9$$

<sup>9</sup> Die innere Übereinstimmung dieses Sternpaares ist von allen beobachteten Paaren die schlechteste.

<sup>10</sup>  $\varphi$  — das arithmetische Mittel von 8 Fadenbeobachtungen.



### III. Die Messungen der absoluten Zenitdistanzen der Sterne.

Die Beobachtungen der nebenmeridionalen Zenitdistanzen der Sterne, die nach Süden hin kulminieren, sind mit den Beobachtungen der Polaris verbunden und das Mittel aus der Kombination der Beobachtungsergebnisse der Nord- und Südsterne gegeben (beide Sterne in den Kreisstellungen  $L$  und  $R$ ).

Nach dieser Methode sind die Beobachtungen mit dem a) Universalinstrument von Hildebrand und b) Höhenkreis von Sartorius-Werke ausgeführt worden.

#### a) Universalinstrument von Hildebrand.

Die Beobachtungsergebnisse:

Datum	Stern-name	$\varphi^n$ (Mittel von Kreis $L$ und $R$ )	Stern-name	$\varphi^s$ (Mittel von Kreis $L$ und $R$ )	$\varphi = \frac{1}{2}(\varphi^n + \varphi^s)$	$v$	$v^2$
1927. Juni 17	Polaris	56° 57' 8".4	$\epsilon$ Cygni	56° 57' 7".0	56° 57' 7".7	+ 0.2	0.04
	"	10.4	"	7.2	8.8	- 0.9	0.81
	"	8.7	"	7.5	8.1	- 0.2	0.04
	"	7.2	"	8.2	7.7	+ 0.2	0.04
	"	9.2	"	6.8	8.0	- 0.1	0.01
Juni 27	Polaris	9.0	$\gamma$ Lyrae	8.1	8.6	- 0.7	0.49
	"	8.1	"	7.6	7.8	+ 0.1	0.01
	"	7.8	"	7.2	7.5	+ 0.4	0.16
	"	8.3	"	6.0	7.2	+ 0.7	0.49
	"	9.4	"	6.2	7.8	+ 0.1	0.01
Juni 28	Polaris	7.3	$\zeta$ Cygni	8.0	7.6	+ 0.3	0.09
	"	8.4	"	8.6	8.5	- 0.6	0.36
	"	9.8	"	6.7	8.3	- 0.4	0.16
	"	7.9	"	6.2	7.0	+ 0.9	0.81
	"	7.0	"	9.4	8.2	- 0.3	0.09
						56° 47' 7".9	

$$\epsilon\varphi_0 = \pm 0".1$$

$$\epsilon\varphi_4 = \pm 0".5$$

## b) Sartorius-Werke Höhenkreis.

Die Beobachtungsergebnisse:

Datum	Stern- name	$\varphi^n$ (Mittel von Kreis L und R)	Stern- name	$\varphi^s$ (Mittel von Kreis L und R)	$\varphi = \frac{1}{2}(\varphi^n + \varphi^s)$	$v$	$v^2$
1927. Juli 9	Polaris	56° 57' 7".9	$\gamma$ Cygni	56° 57' 8".0	56° 57' 8".0	-0.2	0.04
	"	8.3	"	6.2	7.2	+0.6	0.36
	"	8.6	"	6.2	7.4	+0.4	0.16
	"	10.2	"	8.3	9.3	-1.5	2.25
	"	10.0	"	7.5	8.7	-0.9	0.81
August 14	Polaris	9.0	$\alpha$ Lyrae	6.9	8.0	-0.2	0.04
	"	7.0	"	6.4	6.7	+1.1	1.21
	"	6.3	"	9.5	7.9	-0.1	0.01
	"	6.5	"	7.1	6.8	+1.0	1.00
	"	8.0	"	7.2	7.6	+0.2	0.04
August 17	Polaris	9.8	$\alpha$ Cygni	6.8	8.3	-0.5	0.25
	"	8.7	"	7.1	7.9	-0.1	0.01
	"	8.2	"	7.0	7.6	+0.2	0.04
	"	9.2	"	7.1	8.1	-0.3	0.09
	"	7.2	"	7.4	7.3	+0.5	0.25
					56° 57' 7".8		

$$\varepsilon_{\varphi_0} = \pm 0''.2$$

$$\varepsilon_{\varphi_1} = \pm 0''.7$$

## c) Der Sextant.

Die nebenmeridionalen resp. meridionalen Höhen der Sterne sind zur Bestimmung der Polhöhe des Ortes mit zwei Sextanten gemessen worden (siehe § 1, P. 5 und 6). Bei dem Vergleich der Sextanten untereinander, erwies es sich, daß sie, was die Qualität anbetrifft, sich nicht merkbar voneinander unterscheiden. Die Vergrößerungen der beiden Sextanten der gebrauchten astronomischen Fernröhre waren gleich; auch die Präzision der Ablesung war ungefähr ein und dieselbe. Aus diesem Grunde wurden die Beobachtungen, die entweder mit dem einen oder anderen Sextanten ausgeführt wurden, nicht getrennt. Im ganzen sind 100 Nord- und Südsterne-Beobachtungen ausgeführt worden.

Die beobachteten Sterne nach *N* sind: Polaris und  $\alpha$  Aurigae in unterer Kulmination; nach *S* — die Sonne,  $\alpha$  Aquilae und  $\alpha$  Lyrae.

Wegen der großen Anzahl der Beobachtungen werden die gefundenen Resultate im einzelnen nicht erwähnt. Das arithmetische Mittel, das Resultat von allen 100 Nord- und Südsterne-Observationen ist folgendes:

$$\begin{aligned}\varphi &= 56^{\circ} 57' 8'' \\ \varepsilon_{\varphi_0} &= \pm 0''.7 \\ \varepsilon_{\varphi_2} &= \pm 5'' \\ (\varepsilon_{\varphi_4} &= \pm 4'')\end{aligned}$$

Zur Illustration sollen die mittleren  $\varphi$  Größen, die aus verschiedenen Beobachtungsperioden gewonnen sind, von denen jede ungefähr 25 Sternbeobachtungen umfaßt, erwähnt werden.

Beobachtungszeit	Die Anzahl der beobachteten Sterne	$\varphi = \frac{1}{2}(\varphi'' + \varphi^s)$	$\varepsilon_{\varphi_0}$	$\varepsilon_{\varphi_2}$
1922. Mai 3 — Juni 30	24	$56^{\circ} 57' 8''$	$\pm 2''$	$\pm 6''$
Juli 4 — Juli 19	26	9	$\pm 1$	$\pm 5$
1925. August 16 — August 20	20	7	$\pm 2$	$\pm 6$
August 24 — August 30	30	8	$\pm 1$	$\pm 5$

Von den gefundenen Resultaten, die bei Gebrauch verschiedener Instrumente nach den erwähnten Methoden gewonnen worden sind, erhalten wir folgende Daten für die Polhöhe der Sternwarte der Lettländischen Universität mit dem mittleren Fehler  $\pm 1''$ :

Nach der *Pewzow'schen Methode*:

- a) Universalinstrument von Hildebrand  $56^{\circ} 57' 8''.2$   
(beobachtet sind 20 Sterne, bzw. 10 Sternpaare)
- b) Universalinstrument von Kern  $7.8$   
(beobachtet sind 10 Sterne, bzw. 5 Sternpaare).

Nach den *Messungen der absoluten Zenitdistanzen*:

- a) Universalinstrument von Hildebrand  $56^{\circ} 57' 7''.9$   
(beobachtet sind 30 Sterne)
- b) Höhenkreis von Sartorius-Werke  $7.8$   
(beobachtet sind 30 Sterne)
- c) Sextant  $8$   
(beobachtet sind 100 Sterne).

Nach der *Horrebow-Talcott Methode*:

- Durchgangsinstrument von Heyde  $56^{\circ} 57' 8''.1$   
(beobachtet sind 12 Sterne, bzw. 6 Sternpaare).

Wenn man das Gewicht der einzelnen Resultate nicht berücksichtigt und von ihnen bloß das arithmetische Mittel nimmt, erhält man die Polhöhe der Sternwarte der Lettländischen Universität (Refraktorturm) auf eine ganze Bogensekunde abgerundet

$$\varphi = 56^{\circ} 57' 8'' \text{ N (System von Eichelberger).}$$

Die Polhöhe ist nicht nur mit dem mittleren Fehler, sondern auch mit der Genauigkeit bis auf  $1''$  gegen den wirklichen Wert der Breite, der in späteren Jahren mit speziell zu diesem Zwecke angeordneten Beobachtungen bestimmt worden ist, erhalten worden.

## 6. Die Schlußfolgerungen.

1. Um die Polhöhe des Ortes mit dem mittleren Fehler  $\pm 1''$  zu bestimmen, dann ist es notwendig:

a) mit dem *Universalinstrument*, das den gebrauchten gleichwertig wäre, nach *Pewzow'scher Methode*, ein Sternpaar zu beobachten, wobei beide Sterne auf eine größere Anzahl von Fäden beobachtet würden. Um sich vollkommener von den verschiedenartigen systematischen Fehlern resp. Einflüssen des Instrumentes zu befreien, wäre es doch ratsam *mehr* als ein Sternpaar zu beobachten, und dabei wenigstens in zwei verschiedenen Beobachtungsnächten;

b) mit dem *Universalinstrument*, das den oben erwähnten gleichwertig wäre, nach *Messungen der absoluten Zenitdistanzen* der Sterne — *eine N und S Sternkombination* (zwei N und zwei S Sternbeobachtungen). Sicherheitshalber ist es ratsam, die Beobachtungszahl zu vergrößern und auch dieselben in mehreren Nächten auszuführen;

c) mit dem *Höhenkreis*, der dem gebrauchten gleichwertig wäre (Sartorius-Werke Nr. 2107) — *eine (zwei) N und S Sternkombination(en)* [mit gleicher Anmerkung, wie bei a) und b)];

d) mit dem *Durchgangsinstrument* Heyde Nr. 9096, nach der *Horrebow-Talcott Methode* — *ein Sternpaar*, jeder Stern mit 4 Mikrometer Einstellungen [mit Anmerkung wie bei a) und b)];

e) mit dem *Sextant* mittleren Qualität, *indem die N und S Sternbeobachtungen kombiniert werden* — genügen 'zusammen 50 N und S Sternbeobachtungen resp. 25 Kombinationen.

2. Beim Vergleich der mittleren Fehler — der aus den Resultaten der Messungen der Zenitdistanzen der Sterne gefundenen und der theoretisch

berechneten — sieht man, daß die Übereinstimmung ziemlich gut ist. Wenn man die Resultate, die mit der Pewzow'schen Methode erreicht worden sind, betrachtet, dann sieht man, daß dieselben, bei gleicher Anzahl der beobachteten Sterne in der Hinsicht der Präzision nicht mit den gegebenen Resultaten der direkten Messungen konkurrieren können, — und bei einer minderen Beobachtungsanzahl ist den direkten Messungen den indirekten gegenüber der Vorzug zu geben, gewiß wenn die direkten Messungen in angedeuteter Ordnung ( $N$  und  $S$  und beiden Kreislagen) und mit betreffenden Instrumenten ausgeführt worden sind.

3. Die Polhöhe des Refraktorturmes der Lettländischen Universitäts Sternwarte ist  $56^{\circ} 57' 8'' N$ .

Der Fakultät vorgelegt den 8. Februar 1940.



Par mērijumu skaitu, kāds nepieciešams, lai noteiktu vietas ģeografisko platumu ar vidējo kļūdu  $\pm 1''$ .

### Kopsavilkums.

*Sergejs Slaucītājs.*

Šī darba pamatmērķis bij noskaidrot, cik mērijumu nepieciešami jāizdara, lai noteiktu vietas ģeografisko platumu ar pareizību līdz vienai loka sekundeī pēc vairākām metodēm, izmantojot dažādus pārnēsamus instrumentus.

Instrumentu atrašanās vietas novērojumos bij Latvijas Universitātes Astronomiskās observatorijas novērošanas pamati, tādēļ atrastie rezultāti, starp citu, nosaka arī observatorijas ģeografisko platumu ar augstāk minēto pareizību.

Izmantoti četru tipu pārnēsamie instrumenti: pasažinstrumenti, universalinstrumenti, augstumu riņķis un sekstānts, un ģeografiskais platumu atrasts pēc sekošām metodēm: *Horrebow-Talcott'a*, *Pevcova*, *Polaris* absolutajām zenitdistancēm un spīdekļu tuvmeridionalajām resp. meridionalajām zenitdistancēm (augstumiem).

1. nodalījumā dots īss instrumentu apraksts un to konstantes; 2. nod. aplūkota novērojumu rezultātu sagaidamā pareizība; 3. nod. aprakstīta novērojumu gaita un iekārtojums; 4. nod. — novērojumu aprēķināšana; 5. nod. doti novērojumu rezultāti un 6. nodalījumā — sekojošie slēdzieni:

1. Lai noteiktu vietas ģeografisko platumu ar vid. kļūdu  $\pm 1''$ , tad nepieciešami:

a) ar *universalinstrumentu*, kas līdzvērtīgs izmēģinājumiem, pēc *Pevcova metodes* novērot *vienu* zvaigžņu pāri, novērojot abas zvaigznes uz lielāka skaita pavedienu. Lai pilnīgāk izbēgtu no dažāda veida sistematiskajām instrumenta kļūdām resp. ietekmēm, ieteicams novērot vairāk par *vienu* zvaigžņu pāri un pie tam, vismaz, divos atsevišķos paņēmienos — novērojumu naktīs;

b) ar *universalinstrumentu*, līdzīgu augstāk minētajiem, pēc *zvaigžņu absolūto zenitdistancu mērijumiem* — *vienu N un S zvaigžņu kom-*

*binējumu* (divi *N* un divi *S* zvaigžņu novērojumi). Drošības labā ieteicams novērojumu skaitu palielināt un tos iekārtot vairākos paņēmienos;

c) ar *augstumu riņķi*, kas līdzvērtīgs izmēģinātajam (Sartorius-Werke Nr 2107) — *vienu (divus) N un S zvaigžņu kombinējumu(s)*; piezīme, kas pie p. p. a) un b);

d) ar *pasāžinstrumentu* Heyde Nr 9096, pēc *Horrebow-Talcott'a* metodes — *vienu zvaigžņu pāri*, katrai zvaigznei 4 mikrometra iestādījumi; piezīme, kas pie p. p. a) un b);

e) ar vidējā labuma *sekstantu*, kombinējot *N un S zvaigžņu novērojumus* — pietiekoši izpildīt *kopā 50 N un S zvaigžņu novērojumus*, resp. *25 kombinējumus*, vairākos paņēmienos.

2. Salīdzinot spidekļu tiešo zenitdistanču mērījumu doto rezultātu vidējo kļūdu, kas atrasta no novērojumu datiem, ar teoretiski aprēķināto, saskaņa pietiekoši laba.

Aplūkojot rezultātus, kas sasniegti ar *Pevcova* metodi, redzam, ka tie precizitātes ziņā pie vienāda novēroto zvaigžņu skaita nevar konkurēt tiešo mērījumu dotos rezultātus — un pie mazāka novērojumu skaita, direktajiem mērījumiem dodama priekšroka pret indirektajiem, protams, direktos mērījumus izpildot aizrādītā kārtībā un ar attiecīgiem instrumentiem.

3. *Latvijas Universitātes Astronomiskās observatorijas* refraktora torņa *ģeografiskais platums ir 56° 57' 8" N.*

## On the Number of Photoelectrons and Recoil Electrons produced by X-rays in Air.

By J. Fridrichsons.

The electron tracks produced by X-rays in a Wilson expansion chamber are of two distinct types, as shown by *C. T. R. Wilson*<sup>1</sup> and *Bothe*<sup>2</sup>.

The difference is explained by the two different processes in which they are generated. Photoelectrons produced by absorption of an X-ray quantum give rise to comparatively long tracks the length of which depends on the wave-length of the X-rays and on the nature of the gas used, whereas the recoil electrons generated by the scattering of X-ray quanta produce relatively short tracks (except when the wave-lengths are very short), called by Wilson "sphere" or "fish" tracks.

As the number of photoelectrons and recoil electrons is proportional to the absorption coefficient  $\tau$  of the gas used and to the scattering coefficient  $\sigma$ , respectively, it follows that the ratio of the number of both types of tracks observed in an expansion chamber, provided they can be distinguished, gives us a mean to determine the ratio of the coefficients  $\sigma$  and  $\tau$ .

Such determinations were carried out by *Compton* and *Simon*<sup>3</sup>, *Ikeuti*<sup>4</sup>, *Nuttall* and *Williams*<sup>5</sup> and recently by *Trueblood* and *Loughridge*<sup>6</sup>.

Before considering the results of these investigations it must be

<sup>1</sup> *C. T. R. Wilson*, Proc. Roy. Soc. **104**. 1. 1923.

<sup>2</sup> *W. Bothe*, Zs. f. Phys. **16**. 239. 1923.

<sup>3</sup> *H. Compton* and *Simon*, Phys. Rev. **25**. 306. 1925.

<sup>4</sup> *H. Ikeuti*, C. R. **180**. 1257. 1925.

<sup>5</sup> *J. Nuttall* and *E. Williams*, Phil. Mag. **1**. 1217. 1926.

<sup>6</sup> *H. Trueblood* and *D. Loughridge*, Phys. Rev. **54**. 545. 1938.

pointed out that in order to get reliable results by this method, following conditions must be taken in account:

1. As the number of respective tracks in each expansion, all conditions being kept unvaried, is a matter of probability, dependable results are to be expected only as a statistical means of a very large number of observations.

2. As the absorption coefficient  $\tau$  varies with  $\lambda^3$ , small changes in  $\lambda$  produce considerable changes in  $\tau$  and therefore also in the number of photoelectron tracks  $N_p$ . Therefore the wave-length of the X-rays used should be known as accurately as possible and must be kept unvaried throughout the time of the experiment.

3. It must be considered that not every scattered quantum does give rise to a recoil electron track in the chamber. In order to leave the atom and give a distinguishable track the electron must possess a sufficient amount of energy depending on the gas used in the chamber. Therefore in each case there must be determined a correction factor  $f$  to be put in the relation

$$\frac{N_c}{N_p} = f \frac{\sigma}{\tau}$$

(Where  $N_p$  denotes the number of photoelectrons and  $N_c$  the number of recoil electrons.)

The results obtained with the expansion chamber can be compared with other experimental data most reliably in the region of wave-lengths between approx. 1 and 0,1 Å units. The coefficients of the empirical X-ray extinction formulas of the type

$$\mu_m = \tau + \sigma = A\lambda^a Z^b + BZ^c$$

in this region of wave-lengths are known with sufficient accuracy for all the elements in question and so it is possible to determine  $\tau$  and  $\sigma$  and also  $\frac{\sigma}{\tau}$ . By calculating on certain assumptions the correction factor  $f$  for each case it is therefore possible to compare the  $\frac{N_c}{N_p}$  obtained in the expansion chamber with  $f \cdot \frac{\sigma}{\tau}$ .

The results of the above mentioned authors, although they agree in first approximation with the results obtained from the extinction measurements for  $f \cdot \frac{\sigma}{\tau}$ , show nevertheless a peculiar systematic diffe-

rence. The data given by Compton and Simon and by Nuttall and Williams show that for longer wave-lengths the ratio  $\frac{N_c}{N_p}$  is on the average slightly less than  $f \frac{\sigma}{\tau}$ , whereas for shorter wave-lengths it exceeds  $f \frac{\sigma}{\tau}$ . For instance the lastmentioned authors get for  $\lambda = 0,709 \text{ \AA}$  in oxygen  $\frac{N_c}{N_p} = 0,127$  compared with  $f \frac{\sigma}{\tau} = 0,142$ , and for  $\lambda = 0,35 \text{ \AA}$  in air  $\frac{N_c}{N_p} = 1,67$  compared with  $f \frac{\sigma}{\tau} = 1,48$ . Ikeuti using only one wave-length  $\lambda \approx 0,2 \text{ \AA}$  obtains  $\frac{N_c}{N_p} = 11$ , agreeing exactly with the corresponding  $f \frac{\sigma}{\tau}$ . On the other hand, Trueblood and Loughridge using much shorter wave-length ( $\lambda \approx 0,02 \text{ \AA}$ ) find  $\frac{N_c}{N_p}$  some 50 times less than  $f \frac{\sigma}{\tau}$  (calculated from the theoretical quantum-mechanical expressions of Sauter and Klein-Nishina). Although the first discrepancies can be explained by statistical errors (particularly for the results of Compton and Simon, where the number of tracks in each case was less than 100), it would nevertheless be desirable to repeat these experiments, to get more information on the reliability of the method and on the reproductibility of the results.

The present paper therefore deals with the determination of  $\frac{N_c}{N_p}$  in air for two wave-lengths,  $\lambda \approx 0,45 \text{ \AA}$  and  $\lambda \approx 0,35 \text{ \AA}$ , using several sets of observations under identical conditions.

It is planned to continue these determinations with shorter wave-lengths with the purpose to clarify the large discrepancy of the last mentioned experimenters.

### Experimental arrangement.

The expansion chamber used was of the rubber diaphragm type and its cross-section is shown diagrammatically in Fig. 1.

The lower part of the chamber consists of an aluminium cylindrical body *A*. The rubber diaphragm *H* (0,3 mm thick) is pressed between *A* and a ring *C* which fits in an annular groove in *A*. The inner space of *A* is closed from below by plate *B*, containing the compressed air inlet *M* and the expansion outlet *N*. The expansion outlet is closed by a lid *O*, held in its place by the spiralcam *R*.

The upper part of the chamber is formed by a glass ring *D* covered by a plane glass plate *G*. The glass ring contains two diametri-



cally opposed windows closed with aluminium foil, through which the X-ray beam can enter and leave the chamber.

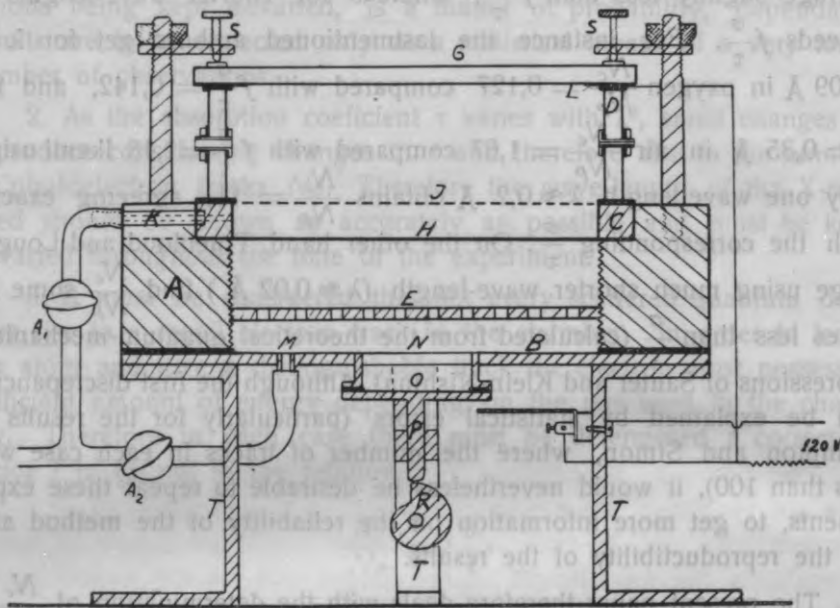


Fig. 1.

The upward motion of the diaphragm is restricted by a wire gauze *J* covered with black cloth, to reduce turbulence and to obtain the necessary dark background. The downward motion of the diaphragm is determined by the position of the perforated disc *E* which can be moved up and down in the inner space of *A*.

The upper part of the chamber is kept at a slight excess pressure to move the diaphragm down till *E*. This excess pressure is applied through the inlet *K* and amounts to several cm Hg.

By connecting inlet *M* to a suitable line of compressed air the diaphragm is raised to the gauze *J* and the gas in the space above the diaphragm is compressed. The expansion is produced by turning the axis of spiralcam *R* that releases the lid *O* of the expansion outlet.

The expansion ratio is determined by the position of the perforated disc *E*, and using water and alcohol mixture (4 parts water and

1 part alcohol) expansion ratios 1,16—1,18 gave the best results. The rate of the expansion can be varied by suitably adjusting the pressure differences in the upper and lower parts of the chamber to give well defined tracks.

To remove the ions already formed, an electric field of 40 V/cm is applied between a tinfoil ring  $L$  below the plate  $G$  and the metallic body of the chamber. Immediately after the expansion the lid  $O$  touches a contact spring  $R_1$  and so shortcircuits the field, preventing the distortion of the tracks just formed.

To obtain a short flash of X-rays through the chamber just after the expansion, a switch on the axis of the cam  $R$  actuates an electromagnetic X-ray shutter shown diagrammatically in Fig. 2. The shutter

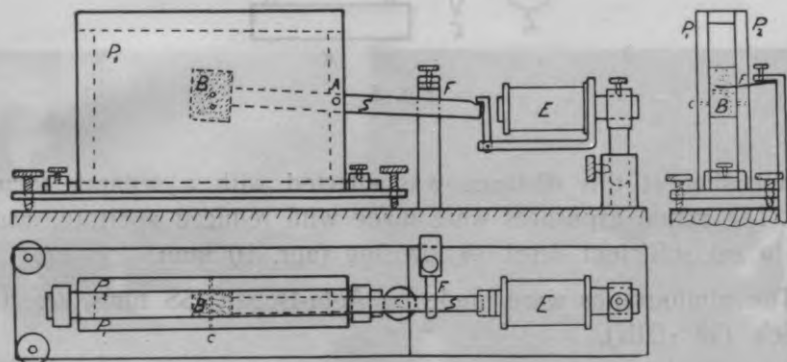


Fig. 2.

is formed by two lead plates  $P_1$  and  $P_2$ , 0,5 cm thick. Between the plates moves a lead block  $B$  fastened to a shaft  $S$ , which can turn around point  $A$ . A small hole (0,5 mm) passes through  $P_1$  and  $P_2$  and also through  $B$ . Shaft  $S$  is held in raised position by a notch in the anchor of electromagnet  $E$ . In this position the hole in  $B$  is above that in  $P$  and the X-rays are barred from the chamber. As the switch on the axis of  $R$  activates the electromagnet  $E$ , shaft  $S$  falls down and both holes coincide a moment, allowing a short flash of X-rays to pass into the chamber. By altering the position of the switch on the axis of  $R$ , the instant of the X-ray flash can be accurately timed.

As the block  $B$  moves down farther, shaft  $S$  comes in contact

with a regulable spring  $F$  and so closes a circuit of a second electro-magnet, which actuates the shutter of the photographic camera.

The camera used for photographing the tracks was a Contax I with a Sonnar object lens — maximal aperture  $F:1,5$  and focal distance 5 cm. It was placed 24 cm from the center of the chamber at an angle of  $60^\circ$  with the direction of the illuminating light beam (Fig. 3).

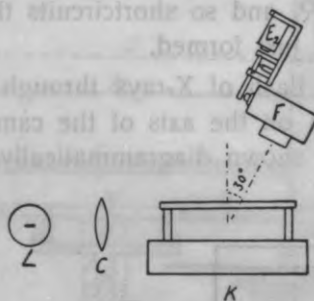


Fig. 3.

The focusing at this distance was effected with a separate focusing ring. The actual exposures were made with reduced aperture, usually  $F:2$ , to get sufficient depth of focusing (apr. 10 mm).

The photographs were made on Agfa-Isopan ISS films, sensitivity  $28^\circ$  Sch. ( $18^\circ$  DIN).

The source of X-rays was a Coolidge tube with tungsten anticathode, connected to a high tension transformer equipment.

The results of the present paper were obtained with filtered X-ray radiation, although it is planned in the further investigations to use spectroscopically resolved monochromatic radiations. The filtering was effected with  $Al$  and  $Cu$  filters, the necessary thickness being evaluated from the absorption coefficient of the material and from the distribution curves of the continuous X-ray radiation at the given tension (using *Ulrey's*<sup>7</sup> experimental results and *Kuhlenkampff's*<sup>8</sup> distribution expression), so as to get a band of wave-lengths not exceeding  $0,05 \text{ \AA}$  around the wave-length of the maximal intensity.

<sup>7</sup> C. T. Ulrey, Phys. Rev. 11, 401, 1918.

<sup>8</sup> H. Kuhlenkampff, Ann. der Phys. 69, 548, 1922.

For the illumination of the tracks in the chamber an automatically initiated condensed high tension mercury spark discharge was used at first, but subsequently it was found, that owing to the high powered camera lens sufficient illumination for obtaining good photographs of the tracks could be effected by a 500 W incandescent lamp. By projecting the image of the filament with a cylindrical lens into the center of the chamber a narrow sheaf of light was formed, giving good photographs with  $\frac{1}{10}$  sec exposures.

Stray light was eliminated by placing the expansion chamber together with the photographic camera into a box lined with lead, also preventing stray X-rays from reaching the chamber.

The arrangement of the various parts is shown in Fig. 4. (without the cover box and the camera) and schematically in Fig. 5.



Fig. 4.

All the operations of an expansion cycle occur automatically in the necessary sequence and time intervals by turning the axis of spiralcam *R*, once the position of the axis switch and the camera switch *F* is correctly adjusted by trial.

220 exposures were taken with this arrangement in 7 series, using two different wave-lengths of X-ray radiation. From these photographs 3150 recoil and photoelectron tracks were counted.

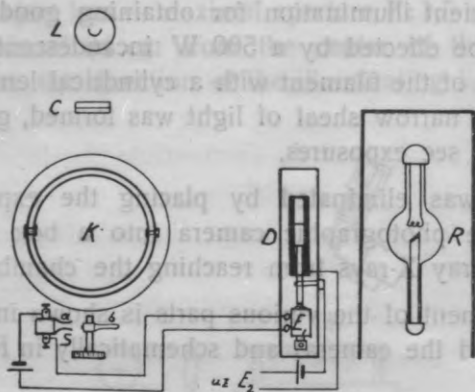


Fig. 5.

The results of the counts are given in the following table.  $N_{tot}$  denotes the total number of tracks in each series,  $N_p$  — the respective number of photoelectrons,  $N_C$  — that of the recoil electrons. The value of  $\frac{\sigma}{\tau}$  is calculated from the expression

$$\mu_m = k_1 Z^3 \lambda^3 + \sigma_m$$

using *Hewlett's*<sup>9</sup> values for  $k_1$  and  $\sigma_m$  ( $k_1$  for oxygen —  $5,20 \cdot 10^{-3}$ , for nitrogen —  $5,77 \cdot 10^{-3}$  and  $\sigma_m$  — 0,165).

The correction factor  $f$  is evaluated using expressions derived by *Nuttall* and *Williams*<sup>10</sup>.

$V_{(kV)}$	$\lambda_{eff}$	$N_{tot}$	$N_p$	$N_C$	$\frac{N_C}{N_p}$	$\frac{\sigma}{\tau}$	$f$	$f \cdot \frac{\sigma}{\tau}$	Intensity
40	0,45	697	387	297	0,77	0,92	0,9	0,83	Strong
"	"	594	327	267	0,81	"	"	"	"
"	"	557	301	247	0,82	"	"	"	"
"	"	286	160	126	0,79	"	"	"	Weak
"	"	283	156	127	0,81	"	"	"	"
52	0,35	574	230	344	1,50	1,57	0,94	1,48	Strong
"	"	158	62	96	1,55	"	"	"	Weak
W. and N.	0,35	222	83	139	1,67	"	"	"	"

<sup>9</sup> C. W. Hewlett, Phys. Rev. 17. 284. 1921.

<sup>10</sup> l. c.



As can be seen, the experimental value of  $\frac{N_c}{N_p}$  does not differ from the calculated value of  $f \cdot \frac{\sigma}{\tau}$  more than by 6%. The weighed mean for  $\lambda = 0,45$  is  $\frac{N_c}{N_p} = 0,8$ , differing from  $f \cdot \frac{\sigma}{\tau}$  only by 4%, and for  $\lambda = 0,35$  the difference is only 2%. Although there exists a discrepancy in the same sense as in the results of Nuttall and Williams (shown for comparison in the last horizontal row of the table), the difference is much less. The consistency of the results in the different series of measurements shows that the method used can be depended upon.

I take the opportunity to express my gratitude to Prof. Fr. Gulbis for his constant interest in the work and to the Fund of Scientific Research of the University for a grant enabling the purchase of the photographic camera.

Presented to the Faculty March 1940.

## Par X-staru radīto fotoelektronu un izkļādes elektronu skaitu gaisā.

J. Fridrihsons.

X-staru radīto fotoelektronu un izkļādes elektronu skaita attiecība *Wilson'a* ekspansijas kamerā dod iespēju noteikt attiecīgam X-staru viļņa garumam un dotai gāzei absorbcijas un izkļādes koeficientu attiecību. Šai metodei liela nozīme sevišķi pie īsiem viļņu garumiem, kur koeficientu noteikšana ar citām metodēm rada lielas grūtības. Tā kā šī virzienā ir ļoti maz pētījumu un no tiem nevar secināt metodes noteiktību, tad šī darbā, kas domāts ievadam tālākiem pētījumiem, noteikta diviem X-staru viļņu garumiem (0,35 Å un 0,45 Å) izkļādes un fotoelektronu skaita attiecība  $\frac{N_c}{N_p}$  no 220 uzņēmumiem 7 atsevišķās novērojumu serijs, saskaitot pavisam 3150 ceļus. Tabulā sakopotie rezultāti rāda, ka eksperimentāli atrastā attiecība labi saskan ar izkļādes un absorbcijas koeficientu attiecību, kas aprēķināta no X-staru vājināšanās izteiksmēm, un ka atsevišķo novērojumu serijs rezultāti dod kļūdu robežās sakrītošus skaitļus.

λ, Å	N <sub>c</sub>	N <sub>p</sub>	N <sub>c</sub> /N <sub>p</sub>	N <sub>c</sub> /N <sub>p</sub> (aprēķināta)
0,35	280	37	7,57	7,5
	284	40	7,10	
	320	40	8,00	
	296	40	7,40	
	353	45	7,84	
	374	49	7,63	
	385	52	7,40	
0,45	220	85	2,59	2,5
	220	85	2,59	

Phys. Rev. 57, 2632 (1940)

P. L. W.  
1940

LUR mat. III.

AUL math. III.

Nr. 9. E. Fogels. Über die Möglichkeit diophantischer Gleichungen in relativ quadratischen Zahlenkörpern. . . . . 273  
 Diofantisko vienādojumu atrisinājumi relatīvi kvadrātiskos skaitļu laukos . . . . . 283

Nr. 10. E. Fogels. On Average Values of Arithmetical Functions . . . . . 285  
 Aritmetisko funkciju caurmēra vērtības . . . . . 311

Nr. 11. S. Vasiļevskis. Scheme for the Solution of Normal Equations on the Calculating Machine 315  
 Shēma normalnolīdzinājumu atrisināšanai ar reizināmo mašīnu . . . . . 324

Nr. 12. A. Brikmānis. The Graphical and Analytical Results if Latitude and Longitude are determined by the Method of Equal Altitudes 325  
 Grafiski un analītiski atrastie rezultāti, nosakot vietas ģeogrāfiskās koordinātas pēc vienādo augstumu metodes . . . . . 340

Nr. 13. Sergejs Slaucītājs. Über die Beobachtungsanzahl, die für die Bestimmung der Polhöhe eines Ortes notwendig wäre, wenn das Resultat mit dem mittleren Fehler  $\pm 1''$  genau sein soll. . . . . 343  
 Par mērijumu skaitu, kāds nepieciešams, lai noteiktu vietas ģeogrāfisko platumu ar vidējo kļūdu  $\pm 1''$  . . . . . 361

Nr. 14. J. Fridrihsons. On the Number of Photoelectrons and Recoil Electrons produced by X-rays in Air . . . . . 363  
 Par X-staru radīto fotoelektronu un izkļādes elektronu skaitu gaisā . . . . . 368d

LATVIJAS UNIVERSITĀTES BIBLIOTĒKA



0509079459

LB bibliotēka



220041777

249456