

UNIVERSITÄT IN RIGA

WISSENSCHAFTLICHE
ABHANDLUNGEN

NEUE FOLGE DER ACTA UNIVERSITATIS LATVIENSIS

KLASSE DER MATHEMATISCHEN ABTEILUNG
DER FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
UND NATURWISSENSCHAFTEN

UNIVERSITĀTE RĪGĀ

ZINĀTNISKIE
RAKSTI

LATVIJAS UNIVERSITĀTES RAKSTU TURPINĀJUMS

MATĒMATIKAS UN DABAS ZINĀTĒNU
FAKULTĀTES MATĒMATIKAS
NODALĀS SERIJA

BAND **1.** SĒJUMS

Nr. 1

N. BRĀZMA

Über eine Riemannsche Fläche

RIGA
LATVJU GRĀMATA
1943

UDK 517

Br. 260

PLW

144d

8

L'U ZINĀTNISKĀ
BIBLIOTĒKA
93-7736

Über eine Riemannsche Fläche.

Von N. Bräzma.

Einleitung.

Es werden in der Elektrotechnik Funktionen angewandt, die man Reaktanzen nennt, und die durch den Besitz einer Partialbruchzerlegung der Form

$$\mathfrak{B}(\lambda) = A_0 \frac{1}{\lambda} + A_1 \frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega_1^2} + \dots + A_n \frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega_n^2} + A_\infty \lambda \dots \quad (1)$$

charakterisiert werden können, wobei $A_0 \geq 0$, $A_1 > 0$, \dots , $A_n > 0$, $A_\infty \geq 0$ und $\omega_1 > 0$, \dots , $\omega_n > 0$ sind [2]¹. In der mathematischen Literatur sind derartige Funktionen als diejenigen der Klasse \mathcal{Q} bekannt [1].

Man kann in dem Ausdruck (1) die Partialbrüche auf denselben Nenner bringen. Danach kann der Zähler in Faktoren der Gestalt, die wir weiter unten angeben, zerlegt werden.

Es ist zu beachten, daß alle Pole der Funktion (1) auf der imaginären λ -Achse liegen, und daß diese Funktion auf derselben Achse im positiv-imaginären Sinne beständig zunimmt². Daraus folgt, daß zwischen je zwei benachbarten Polen eine Nullstelle auf der imaginären λ -Achse liegt. Bestimmt man alsdann die Anzahl aller Nullstellen der Funktion (1), indem man den Grad des Zählers in Betracht zieht, so stellt es sich heraus, daß außer den erwähnten Nullstellen keine anderen vorhanden sind. Außerdem liegen diese Nullstellen und Pole symmetrisch zum Nullpunkt, weil die Funktion (1) eine ungerade ist.

¹ Eine Zahl in eckigen Klammern weist auf die entsprechende, am Ende des Aufsatzes erwähnte Literatur hin.

² Das heißt, es besteht $\frac{d\mathfrak{B}(\omega)}{d\omega} > 0$, falls man Bezeichnungen $\lambda = i\omega$, $\mathfrak{B}(\lambda) = i\mathfrak{Q}(\omega)$ einführt, wobei ω und $\mathfrak{Q}(\omega)$ reell sind.

Auf Grund dieser Betrachtungen ergibt sich die Funktion (1) in einer der folgenden Gestalten:

$$\mathfrak{W}(\lambda) = C \left. \frac{(\lambda^2 + \Omega_1^2) \dots (\lambda^2 + \Omega_{n+1}^2)}{\lambda(\lambda^2 + \omega_1^2) \dots (\lambda^2 + \omega_n^2)} \right\} \dots \dots (2_1)$$

$$0 < \Omega_1 < \omega_1 < \Omega_2 < \omega_2 < \dots < \omega_n < \Omega_{n+1} < \infty$$

(für den Fall $A_0 \neq 0, A_\infty \neq 0$);

$$\mathfrak{W}(\lambda) = C \left. \frac{\lambda(\lambda^2 + \Omega_1^2) \dots (\lambda^2 + \Omega_n^2)}{(\lambda^2 + \omega_1^2) \dots (\lambda^2 + \omega_n^2)} \right\} \dots \dots (2_2)$$

$$0 < \omega_1 < \Omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n < \Omega_n < \infty$$

(im Falle $A_0 = 0, A_\infty \neq 0$);

$$\mathfrak{W}(\lambda) = C \left. \frac{(\lambda^2 + \Omega_1^2) \dots (\lambda^2 + \Omega_n^2)}{\lambda(\lambda^2 + \omega_1^2) \dots (\lambda^2 + \omega_n^2)} \right\} \dots \dots (2_3)$$

$$0 < \Omega_1 < \omega_1 < \Omega_2 < \dots < \Omega_n < \omega_n < \infty$$

(falls $A_0 \neq 0, A_\infty = 0$);

$$\mathfrak{W}(\lambda) = C \left. \frac{\lambda(\lambda^2 + \Omega_1^2) \dots (\lambda^2 + \Omega_{n-1}^2)}{(\lambda^2 + \omega_1^2) \dots (\lambda^2 + \omega_n^2)} \right\} \dots \dots (2_4)$$

$$0 < \omega_1 < \Omega_1 < \omega_2 < \dots < \Omega_{n-1} < \omega_n < \infty$$

(falls $A_0 = 0, A_\infty = 0$).

Zu bemerken ist, daß in allen letzten Formeln (2₁)—(2₄) die Konstante C positiv ist, weil die Formel (1), für $\lambda > 0$, die Ungleichung $\mathfrak{W} > 0$ ergibt.

Man kann zeigen, daß jede Funktion der Gestalt (2₁)—(2₄) mit $C > 0$ eine Reaktanz ist. Daraus folgt, daß mit $\mathfrak{W}(\lambda)$ auch $1/\mathfrak{W}(\lambda)$ eine Reaktanz ist.

Es werden in der Elektrotechnik auch Funktionen folgender Gestalt angewandt:

$$\mathfrak{Q}(\lambda) = \sqrt{\mathfrak{W}_1 \cdot \mathfrak{W}_2 \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots} \quad (3)$$

also ein geometrisches Mittel aus zwei Reaktanzen. Z. B. in dem Aufsatz [3] von H. Piloty — S. 93, findet man

$$\text{Lotg } g = \sqrt{\mathfrak{W}_{11} \cdot \mathfrak{G}_{11}},$$

$$\mathfrak{Z}_1 = \sqrt{\mathfrak{W}_{11}/\mathfrak{G}_{11}} = \sqrt{\mathfrak{W}_{11} \cdot 1/\mathfrak{G}_{11}}$$

als Funktionen jener Gestalt (3). (Hier stellen $\mathfrak{W}_{11}, \mathfrak{G}_{11}$ und infolgedessen auch $1/\mathfrak{G}_{11}$ Reaktanzen dar.)

Auf der imaginären λ -Achse sind die Reaktanzen \mathfrak{W}_1 und \mathfrak{W}_2 stets imaginär und haben bei einem bestimmten λ -Werte entweder gleiches oder verschiedenes Vorzeichen. Im ersten Falle ist $\Omega(\lambda)$ imaginär, im letzten Falle reell. Um die Zweideutigkeit der Wurzel zu beseitigen, setzt H. Piloty in demselben Aufsatz [3] fest, daß jeweils der Hauptwert des geometrischen Mittels genommen werden soll, d. h. wenn beide Faktoren positiv- bzw. negativ-imaginär sind, soll auch das Mittel positiv- bzw. negativ-imaginär sein, und daß das Mittel positiv-reell sein soll, wenn beide Faktoren verschiedene Zeichen haben.

Weiter wird in demselben Aufsatz darauf hingewiesen (Fußnote S. 94), daß die obige Festsetzung der Vorzeichen mathematisch darauf hinausläuft, die Riemannsche Fläche der Funktion (3) in geeigneter Weise aufzuschneiden und das geeignete Blatt zu nehmen.

Danach folgen viele Eigenschaften der Funktionen $\text{Log } g$, \mathfrak{S}_1 usw. Doch sind diese Eigenschaften aus der obigen Festsetzung der Vorzeichen schwer abzuleiten, dagegen gelingt das ohne Schwierigkeiten, wenn man die Eigenschaften der Riemannschen Fläche in Betracht nimmt.

Zweifellos sind die genannten Eigenschaften der Riemannschen Fläche dem Verfasser der Schrift [3] H. Piloty bekannt, und auch Cauer erwähnt dieselben [1, S. 9]. Doch, soweit es mir bekannt ist, sind die in Frage kommenden Eigenschaften der Riemannschen Fläche noch nirgends in vollständiger Bearbeitung veröffentlicht. Auch der Umstand, daß die Verfasser der Schriften [1] und [3] sich auf keine anderen Quellen in bezug auf die letztgenannte Riemannsche Fläche berufen, scheint die obige Vermutung zu bestätigen.

Aus den erwähnten Gründen fühle ich mich in gewissem Sinne berechtigt, die Eigenschaften der Riemannschen Fläche der Funktion (3) in ausführlicher Bearbeitung mindestens zu Lehrzwecken veröffentlichen zu dürfen.

In § 1 wird gezeigt, wie man das geeignete Blatt der Riemannschen Fläche wählt. In den nächsten Paragraphen werden die Eigenschaften der Funktion (3), auf dem gewählten Blatt, auseinandergesetzt. Diese Eigenschaften stimmen einerseits mit der Festsetzung der Vorzeichen im Aufsätze [3] überein. Aber andererseits folgert man aus diesen Eigenschaften leicht viele andere, von H. Piloty in demselben

Aufsatz weiterhin behandelte Eigenschaften der Funktionen von der Form (3).

Es sei noch bemerkt, daß Funktionen der Gestalt (3), deren Vorzeichen auf die obenerwähnte Weise gewählt sind, als Cauersche positive \mathcal{Q} -Funktionen [3], auch als Funktionen der Klasse \mathcal{Q} bekannt sind [1].

§ 1. Herstellung des geeigneten Blattes der Riemannschen Fläche.

Multipliziert man zwei Funktionen \mathcal{W}_1 und \mathcal{W}_2 der Gestalt (2₁) — (2₄) miteinander, so können manche Faktoren sich aufheben, andere Faktoren können in der ersten Potenz bleiben, die übrigen dagegen ins Quadrat erhoben werden.

Zieht man die Quadratwurzel aus dem Produkte $\mathcal{W}_1 \cdot \mathcal{W}_2$, so ergeben die in der ersten Potenz vorkommenden Faktoren die Quadratwurzel $\sqrt{\mathcal{W}^*}$ aus einer Funktion \mathcal{W}^* . Die Gestalt der letztgenannten ist den Ausdrücken (2₁) — (2₄) ähnlich, mit dem Unterschied, daß keine einfache Beziehung in Form von Ungleichungen zwischen den Nullstellen und Polen der Funktion \mathcal{W}^* vorhanden ist und außerdem \mathcal{W}^* keinen Faktor λ enthält.

Die Faktoren der zweiten Potenz des Produktes $\mathcal{W}_1 \cdot \mathcal{W}_2$ ergeben im Gegenteil eine rationale Funktion \mathcal{W}^{**} , deren Gestalt auch den Ausdrücken (2₁) — (2₄) ähnlich ist. Auch bei \mathcal{W}^{**} besteht keine einfache Beziehung zwischen Nullstellen und Polen.

Hiernach gestaltet sich der Ausdruck der Funktion $\mathcal{Q}(\lambda)$ folgendermaßen:

$$\mathcal{Q}(\lambda) = \mathcal{W}^{**} \sqrt{\mathcal{W}^*} = \mathcal{W}^{**}(\lambda) \sqrt{\mathcal{W}^*(\lambda)}. \dots \dots (4)$$

Stellen wir die Riemannsche Fläche der Funktion $\sqrt{\mathcal{W}^*}$ her. Alle Verzweigungspunkte dieser Funktion — die Nullstellen und Pole der Funktion \mathcal{W}^* — liegen auf der imaginären λ -Achse. Die Riemannsche Fläche selbst besteht aus zwei Blättern.

Es sollen die Punkte A und B — auf der negativ- bzw. positiv-imaginären λ -Achse dem Anfangspunkte O am nächsten liegende Verzweigungspunkte sein. Die Punkte B, C, D, E, \dots sollen auf der positiv-imaginären λ -Achse ³ aufeinander folgende Verzweigungs-

³ D. h. auf der imaginären λ -Achse oberhalb des Anfangspunktes.

punkte sein. (Dem Leser wird empfohlen, sich ein Modell der Fläche zu entwerfen.)

Wählen wir die Riemannsche Fläche so, daß längs der Strecken AB, CD, \dots die rechte obere Halbebene mit der linken untern Halbebene und die rechte untere mit der linken oberen verbunden sind. Demzufolge gehen zwischen den Punkten B und C die rechte obere Halbebene in die linke obere und die rechte untere in die linke untere Halbebene über.

Würde man die Riemannsche Fläche so wählen, daß längs der Strecke AB die rechte obere Halbebene mit der linken oberen verbunden wäre, so könnte die weitere Ausführung keine wesentlichen Änderungen ergeben.

Untersuchen wir näher die Funktionen \mathfrak{W}^* und \mathfrak{W}^{**} :

$$\mathfrak{W}^* = C^* \frac{(\lambda^2 + \Omega_{\alpha'}^2)(\lambda^2 + \Omega_{\beta'}^2) \dots (\lambda^2 + \Omega_{\nu'}^2)}{(\lambda^2 + \omega_{\alpha}^2)(\lambda^2 + \omega_{\beta}^2) \dots (\lambda^2 + \omega_{\nu}^2)} \dots \dots (5)$$

$$\mathfrak{W}^{**} = \frac{\lambda^{\varkappa} (\lambda^2 + \Omega_{\alpha''}^2)(\lambda^2 + \Omega_{\beta''}^2) \dots (\lambda^2 + \Omega_{\nu''}^2)}{(\lambda^2 + \omega_{\alpha''}^2)(\lambda^2 + \omega_{\beta''}^2) \dots (\lambda^2 + \omega_{\nu''}^2)} \dots \dots (6)$$

Dabei ist $C^* > 0$ als Produkt von zwei positiven Konstanten, dagegen ist $\varkappa = 0$ oder ± 1 .

Falls λ rein imaginär ist, sind einige Klammern im Ausdrucke der Funktion \mathfrak{W}^* positiv, andere dagegen — negativ. Es soll sich der λ -Punkt auf der imaginären Achse bewegen. Überschreitet er eine Nullstelle oder einen Pol der Funktion \mathfrak{W}^* , so wechselt eine Klammer ihr Zeichen, dagegen ändern sich die Zeichen aller übrigen Klammern nicht. Deshalb wechselt die Funktion \mathfrak{W}^* ihr Zeichen, falls λ auf der imaginären Achse eine Nullstelle oder einen Pol dieser Funktion überschreitet.

Also zerteilen die Nullstellen und Pole der Funktion \mathfrak{W}^* — die Verzweigungspunkte der Funktion $\sqrt{\mathfrak{W}^*}$ — die imaginäre λ -Achse in Intervalle mit $\mathfrak{W}^* > 0$ und in solche mit $\mathfrak{W}^* < 0$, also in Intervalle mit reellem $\sqrt{\mathfrak{W}^*}$ und Intervalle mit imaginärem $\sqrt{\mathfrak{W}^*}$.

Auf der positiv-reellen λ -Achse ist $\mathfrak{W}^* > 0$, und deshalb ist $\sqrt{\mathfrak{W}^*}$ daselbst reell. Auf einem Blatt der Riemannschen Fläche — man kann annehmen, daß dieses Blatt sich rechts von der imaginären

λ -Achse oben befindet — ist auf der positiv-reellen λ -Achse $\sqrt{\mathfrak{W}^*} > 0$, dagegen auf derselben Achse des anderen Blattes ist $\sqrt{\mathfrak{W}^*} < 0$.

Es ist zu beachten, daß man im Punkte $\lambda = 0$ $\mathfrak{W}^* \neq 0, \neq \infty$ hat. Wegen der gewählten Gestalt der Fläche ist auf der negativ-reellen λ -Achse des unteren Blattes $\sqrt{\mathfrak{W}^*} > 0$, dagegen ist daselbst auf dem oberen Blatt $\sqrt{\mathfrak{W}^*} < 0$.

Weiterhin behandeln wir die zwei möglichen Fälle $\kappa = 0$ und $\kappa = \pm 1$ einzeln.

1. Im ersten Falle ($\kappa = 0$) schneiden wir die Riemannsche Fläche längs den Intervallen AB, CD, \dots auf und behalten nur das obere Blatt.

Da auf der positiv-reellen λ -Achse $\sqrt{\mathfrak{W}^*} > 0$ und im Punkte O $\sqrt{\mathfrak{W}^*} \neq 0, \neq \infty$ ist, so ist auch im Punkte O : $\sqrt{\mathfrak{W}^*} > 0$, falls man zu diesem Punkte von der rechten Seite gelangt. Deshalb ist die Funktion $\sqrt{\mathfrak{W}^*}$ im Intervall AB reell (aber nicht imaginär) und außerdem positiv (falls man die Strecke AB als zur rechten Halbebene gehörig ansieht).

Dagegen ist auf der negativ-reellen λ -Achse $\sqrt{\mathfrak{W}^*} < 0$. Im Punkte O hat man deshalb $\sqrt{\mathfrak{W}^*} < 0$, falls man diesen Punkt von der linken Seite erreicht. Auch im Intervall AB ist jetzt die Funktion $\sqrt{\mathfrak{W}^*}$ negativ (falls man die Strecke AB als zur linken Halbebene gehörig ansieht).

Um diese Funktion $\sqrt{\mathfrak{W}^*}$ im Intervall AB eindeutig zu bestimmen, behalten wir auf der Strecke AB nur ein Ufer des Blattes. Welches? Darüber werden wir erst später entscheiden.

Im Intervall BC ist die Funktion rein imaginär, dagegen im Intervall CD — welches wieder aus zwei Exemplaren besteht, von denen wir später nur eins beibehalten werden — ist dieselbe Funktion $\sqrt{\mathfrak{W}^*}$ wieder reell, usw.

Weiter besprechen wir die Zeichen der Funktion \mathfrak{W}^{**} . Da wir jetzt den Fall $\kappa = 0$ behandeln, so folgt aus der Formel (6), daß auf der reellen λ -Achse $\mathfrak{W}^{**} > 0$, dagegen auf der imaginären λ -Achse \mathfrak{W}^{**} reell ist.

Der Vergleich der Zeicheneigenschaften der Funktionen $\sqrt{\mathfrak{W}^*}$ und \mathfrak{W}^{**} ergibt folgendes:

Die Funktion

$$\mathfrak{Q}(\lambda) = \mathfrak{W}^{**} \sqrt{\mathfrak{W}^*} \dots \dots \dots (4)$$

ist positiv auf der positiv-reellen λ -Achse, — negativ auf der negativ-reellen λ -Achse, im Intervall AB — reell, im Intervall BC — imaginär, im Intervall CD — reell, usw.

Alle Nullstellen und Pole der Funktion \mathfrak{W}^{**} liegen auf der imaginären λ -Achse. Weder eine Nullstelle noch ein Pol fällt aber mit einem Verzweigungspunkte der Funktion $\sqrt{\mathfrak{W}^*}$ zusammen. So kann es z. B. vorkommen, daß die Funktion \mathfrak{W}^{**} Nullstellen und Pole im Intervall BC besitzt⁴. In diesen Punkten ändert die Funktion \mathfrak{W}^{**} ihr Vorzeichen auf das entgegengesetzte. Dasselbe geschieht dort auch mit der Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda) = \mathfrak{W}^{**} \sqrt{\mathfrak{W}^*}$.

Wir einigen uns, in den Intervallen der imaginären λ -Achse mit reellem $\mathfrak{Q}(\lambda)$ (d. h. in den Intervallen AB, CD, \dots) nur dasjenige Ufer beizubehalten, auf dem $\mathfrak{Q}(\lambda)$ positiv ist⁵. Damit ist diese Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$ (die in allen soeben genannten Intervallen der imaginären λ -Achse positiv ist) auf der ganzen λ -Ebene eindeutig definiert.

2. Jetzt behandeln wir den zweiten Fall: $\varkappa = \pm 1$. Diesmal schneiden wir die Riemannsche Fläche längs den Intervallen BC, DE, \dots auf. Danach behalten wir rechts von der imaginären λ -Achse die obere Halbebene der Riemannschen Fläche, dagegen die untere Halbebene — links von der imaginären λ -Achse.

Auf der ganzen reellen λ -Achse ist jetzt $\sqrt{\mathfrak{W}^*} > 0$. Im Intervall AB ist die Funktion $\sqrt{\mathfrak{W}^*}$ reell, weil sie im Punkte O reell und $\neq 0, \neq \infty$ ist. Im Intervall BC (das jetzt aus zwei Exemplaren besteht, von welchen wir später nur eins behalten werden) ist die Funktion $\sqrt{\mathfrak{W}^*}$ imaginär. Im Intervall CD ist diese Funktion wieder reell usw.

Die Formel (6) zeigt mit $\varkappa = \pm 1$, daß die Funktion \mathfrak{W}^{**} jetzt folgende Zeicheneigenschaften besitzt. Es ist $\mathfrak{W}^{**} > 0$ auf der positiv-reellen λ -Achse, $\mathfrak{W}^{**} < 0$ auf der negativ-reellen λ -Achse, $\mathfrak{W}^{**} = 0$ oder $= \infty$ im Punkte O , dagegen ist \mathfrak{W}^{**} auf der imaginären λ -Achse imaginär.

⁴ Es wird jedoch später gezeigt (§ 2), daß in den Intervallen der imaginären λ -Achse mit reellem $\mathfrak{Q}(\lambda)$ (d. h. in den Intervallen AB, CD, \dots) die Funktion \mathfrak{W}^{**} und damit auch die Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$ keine Nullstellen und Pole besitzt.

⁵ Später wird es sich erweisen, daß dieses Ufer ohne Zweifel das rechte ist (§ 3).

Der Vergleich der Zeicheneigenschaften der Funktionen $\sqrt{\mathfrak{W}^*}$ und \mathfrak{W}^{**} ergibt folgendes:

Die Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda) = \mathfrak{W}^{**} \sqrt{\mathfrak{W}^*}$ ist positiv auf der positiv-reellen λ -Achse, — negativ auf der negativ-reellen λ -Achse, $\mathfrak{Q} = 0$ oder $= \infty$ im Punkte O , im Intervall AB — imaginär, im Intervall BC — reell, im Intervall CD — imaginär usw.

Auch jetzt einigen wir uns, in den Intervallen der imaginären λ -Achse mit reellem $\mathfrak{Q}(\lambda)$ (z. B. im Intervall BC) nur dasjenige Ufer beizubehalten, auf welchem $\mathfrak{Q}(\lambda)$ positiv ist⁵. Damit ist diese Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$ auf der ganzen λ -Ebene eindeutig definiert.

In beiden Fällen ($\kappa = 0$ und $\kappa = \pm 1$) ist die Riemannsche Fläche längs den Intervallen der imaginären λ -Achse mit reellem $\mathfrak{Q}(\lambda)$ aufgeschnitten und ein Blatt mit folgenden Eigenschaften gewählt:

Die Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$ ist für jeden komplexen λ -Wert eindeutig definiert. Es ist $\mathfrak{Q}(\lambda) > 0$ auf der positiv-reellen λ -Achse, $\mathfrak{Q}(\lambda) < 0$ auf der negativ-reellen λ -Achse, dagegen folgen auf der imaginären λ -Achse abwechselnd Intervalle mit reellem $\mathfrak{Q}(\lambda)$ (in diesen ist sogar $\mathfrak{Q}(\lambda) > 0$) und Intervalle mit imaginärem $\mathfrak{Q}(\lambda)$.

§ 2. Intervalle der imaginären λ -Achse mit positivem $\mathfrak{Q}(\lambda)$.

In diesem Paragraphen wird nachgewiesen, daß in den Intervallen der imaginären λ -Achse mit positivem $\mathfrak{Q}(\lambda)$ diese Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$ weder Nullstellen noch Pole besitzt.

Betrachten wir die Zerlegungen der Gestalt (2₁) — (2₄) für die Funktionen $\mathfrak{W}_1(\lambda)$ und $\mathfrak{W}_2(\lambda)$. Denjenigen und nur denjenigen von den Faktoren, die bloß bei einer der beiden Funktionen \mathfrak{W}_1 oder \mathfrak{W}_2 vorkommen, entsprechen Verzweigungspunkte der Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda) = \sqrt{\mathfrak{W}_1 \cdot \mathfrak{W}_2}$.

Kommt dagegen ein Faktor gleichzeitig in den Ausdrücken der beiden Funktionen \mathfrak{W}_1 und \mathfrak{W}_2 vor, so sind folgende drei Fälle möglich:

a) Dem Faktor entspricht eine Nullstelle der beiden Funktionen \mathfrak{W}_1 und \mathfrak{W}_2 . Dann ist dieser Punkt auch eine Nullstelle der Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$.

b) Dem Faktor entspricht ein Pol der beiden Funktionen \mathfrak{W}_1 und \mathfrak{W}_2 . Dann ist dieser Punkt auch ein Pol der Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$.

c) Dem Faktor entspricht eine Nullstelle der einen Funktion, dagegen ein Pol der anderen Funktion. Dann ist dieser Punkt weder eine Nullstelle noch ein Pol der Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$, weil jetzt in dem Ausdruck dieser Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$ die entsprechenden Faktoren sich gegenseitig aufheben.

Betrachten wir jetzt ein Intervall der imaginären λ -Achse mit positivem $\mathfrak{Q}(\lambda)$ und in diesem Intervall einen Punkt $i\lambda_k$, dem in den Ausdrücken der beiden Funktionen \mathfrak{W}_1 und \mathfrak{W}_2 ein Faktor $(\lambda^2 + \lambda_k^2)$ entspricht⁶. (Es darf auch $i\lambda_k$ der Anfangspunkt sein, dem alsdann in den Ausdrücken der beiden Funktionen \mathfrak{W}_1 und \mathfrak{W}_2 der Faktor λ entspricht.)

Es wird bewiesen, daß ein solcher Faktor $(\lambda^2 + \lambda_k^2)$ bzw. λ im Ausdruck einer der Funktionen \mathfrak{W}_1 oder \mathfrak{W}_2 im Zähler, dagegen im Ausdruck der anderen im Nenner vorkommt. Demzufolge wird sich ein solcher Faktor im Ausdrucke der Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$ aufheben, und der Punkt $i\lambda_k$ wird sich weder als Nullstelle noch als Pol dieser Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$ erweisen. Daraus wird man schließlich folgern, daß in den Intervallen der imaginären λ -Achse mit positivem $\mathfrak{Q}(\lambda)$ diese Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$ weder Nullstellen noch Pole besitzt, was zu beweisen ist.

Beweis. Betrachten wir folgende zwei Eigenschaften der Funktionen \mathfrak{W}_1 und \mathfrak{W}_2 :

1. Auf der imaginären λ -Achse nehmen diese beiden Funktionen beständig in positiv-imaginärem Sinne zu (s. Einleitung).

2. In den Intervallen der imaginären λ -Achse mit reellem $\mathfrak{Q}(\lambda)$ haben beide Funktionen \mathfrak{W}_1 und \mathfrak{W}_2 verschiedene Vorzeichen (weil diese beiden Funktionen daselbst rein imaginär sind).

Aus diesen zwei Eigenschaften kann man folgern, daß der Punkt $i\lambda_k$ keine Nullstelle für beide Funktionen \mathfrak{W}_1 und \mathfrak{W}_2 sein kann.

⁶ λ_k kann $+\omega_k$, $-\omega_k$, $+\Omega_k$ oder $-\Omega_k$ bedeuten.

Wäre der Punkt $i\lambda_k$ wirklich eine solche Nullstelle, so könnte man aus der ersten Eigenschaft folgern, daß oberhalb des Punktes $i\lambda_k$, in der Nähe desselben, die beiden Funktionen positiv-imaginär sind, was der zweiten Eigenschaft widerspricht.

Ebenso kann der Punkt $i\lambda_k$ kein Pol für beide Funktionen \mathfrak{W}_1 und \mathfrak{W}_2 sein. Wäre der Punkt $i\lambda_k$ ein Pol dieser Art, so würde aus der ersten Eigenschaft folgen, daß oberhalb des Punktes $i\lambda_k$, in der Nähe desselben, diese beiden Funktionen negativ-imaginär sind, was wiederum der zweiten Eigenschaft widerspricht.

Es bleibt nur die dritte Möglichkeit übrig: für eine der Funktionen \mathfrak{W}_1 oder \mathfrak{W}_2 ist der Punkt $i\lambda_k$ eine Nullstelle, dagegen für die andere — ein Pol. In diesem Falle folgt aus der ersten Eigenschaft, daß eine der Funktionen oberhalb des Punktes $i\lambda_k$, in der Nähe desselben, positiv-imaginär, die andere negativ-imaginär ist. Das stimmt mit der zweiten Eigenschaft überein. Eine ebensolche Übereinstimmung ergibt sich auch unterhalb des Punktes $i\lambda_k$.

Aber bei dieser dritten Möglichkeit ist der Punkt $i\lambda_k$ weder Nullstelle noch Pol für die Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$. Hiermit ist der gewünschte Beweis zum Abschluß gebracht.

§ 3. Intervalle der imaginären λ -Achse mit positivem $\mathfrak{Q}(\lambda)$.

(Fortsetzung.)

Es wird in diesem Paragraphen gezeigt, daß auf dem hergestellten Blatte der Riemannschen Fläche in den Intervallen der imaginären λ -Achse mit $\mathfrak{Q}(\lambda) > 0$ das rechte Ufer beibehalten ist. D. h. in diese Intervalle des ausgewählten Blattes kann der λ -Punkt nur von der rechten Seite gelangen, aber nicht von der linken.

Kehren wir zu dem Anfangsausdruck der Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$ zurück: $\mathfrak{Q}(\lambda) = \sqrt{\mathfrak{W}_1 \cdot \mathfrak{W}_2}$. Das Vorzeichen der Quadratwurzel ist bereits genau bestimmt, weil die Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$ schon im Vorhergehenden eindeutig definiert ist.

Die komplexen Funktionen $\mathfrak{W}_1(\lambda)$ und $\mathfrak{W}_2(\lambda)$ stellen wir in exponentieller Form dar:

$$\mathfrak{W}_1(\lambda) = \rho_1(\lambda) e^{i\varphi_1(\lambda)}, \quad \mathfrak{W}_2(\lambda) = \rho_2(\lambda) e^{i\varphi_2(\lambda)}.$$

Daraus folgt:

$$\mathfrak{Q}(\lambda) = \sqrt{\rho_1(\lambda) \cdot \rho_2(\lambda)} e^{\frac{1}{2} i[\varphi_1(\lambda) + \varphi_2(\lambda)] + im\pi} \dots (7)$$

$m = 0$ oder 1 .

Suchen wir den richtigen m -Wert zu ermitteln. Auf der positiv-reellen λ -Achse hat man: $\mathfrak{W}_1 > 0$ und $\mathfrak{W}_2 > 0$; deshalb ist daselbst $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$. Außerdem ist ebenda $\mathfrak{Q}(\lambda) > 0$. Hiernach ergibt sich aus der Formel (7), daß für reelle λ -Werte die Ungleichung

$$\sqrt{\rho_1(\lambda) \cdot \rho_2(\lambda)} e^{im\pi} > 0$$

besteht, woraus sich $m = 0$ ergibt. Dieser m -Wert gilt auf dem ganzen gewählten Blatte der Riemannschen Fläche, weil auf demselben die Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$ stetig ist. Setzt man den gefundenen m -Wert in (7) ein, so ergibt sich:

$$\mathfrak{Q}(\lambda) = \sqrt{\rho_1(\lambda) \cdot \rho_2(\lambda)} e^{\frac{1}{2}i[\varphi_1(\lambda) + \varphi_2(\lambda)]} \dots \dots \dots (8)$$

Es ist folgende Eigenschaft zu beachten: Die Funktionen \mathfrak{W}_1 und \mathfrak{W}_2 besitzen auf der rechten Halbebene ($\Re \lambda > 0$) positive reelle Teile $\Re \mathfrak{W}_1(\lambda) > 0$ bzw. $\Re \mathfrak{W}_2(\lambda) > 0$. Diese Eigenschaft wird folgendermaßen erwiesen.

Zerlegt man die Funktionen \mathfrak{W}_1 und \mathfrak{W}_2 in Partialbrüche, so erweist sich der reelle Teil jedes einzelnen Bruches auf der rechten Halbebene positiv. Deshalb sind auch die reellen Teile der Summen der Partialbrüche, d. h. die reellen Teile der Funktionen \mathfrak{W}_1 und \mathfrak{W}_2 , daselbst positiv.

Aus der soeben nachgewiesenen Eigenschaft der Funktionen \mathfrak{W}_1 und \mathfrak{W}_2 folgt, daß in der rechten Halbebene

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi_1(\lambda) < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi_2(\lambda) < \frac{\pi}{2}$$

ist, woraus sich weiter die Ungleichung

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2} [\varphi_1(\lambda) + \varphi_2(\lambda)] < \frac{\pi}{2}$$

ergibt, d. h. auch die Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$ besitzt auf der rechten Halbebene den positiven reellen Teil:

$$\Re \mathfrak{Q}(\lambda) > 0, \text{ falls } \Re \lambda > 0. \dots \dots \dots (9)$$

Es soll jetzt der λ -Punkt von der rechten Halbebene in das Intervall der imaginären λ -Achse mit reellem $\mathfrak{Q}(\lambda)$ hineingelangen. Der reelle Teil dieser Funktion — $\Re \mathfrak{Q}(\lambda)$ — ändert sich dabei stetig. Da aber auf der rechten Halbebene überall $\Re \mathfrak{Q}(\lambda) > 0$ ist, so bleibt auch auf der imaginären λ -Achse $\Re \mathfrak{Q}(\lambda) > 0$ oder wird daselbst $\Re \mathfrak{Q}(\lambda) = 0$.

Es ist zu beachten, daß auf der imaginären λ -Achse $\Re \mathfrak{Q}(\lambda)$ nur in den Intervallen mit imaginärem $\mathfrak{Q}(\lambda)$ gleich Null ist. Dagegen ist $\Re \mathfrak{Q}(\lambda) = \mathfrak{Q}(\lambda) \neq 0$ in den Intervallen derselben Achse mit reellem $\mathfrak{Q}(\lambda)$.

Deshalb ist $\Re \mathfrak{Q}(\lambda) = \mathfrak{Q}(\lambda) > 0$, falls der λ -Punkt von der rechten Halbebene in das Intervall der imaginären λ -Achse mit reellem $\mathfrak{Q}(\lambda)$ hineingelangt. Also ein solches Intervall gehört zu dem hergestellten Blatt der Riemannschen Fläche (§ 1).

Da aber dieses Intervall von der rechten Seite erreichbar ist, so gehört es zu dem rechten Ufer des hergestellten Blattes.

Damit ist folgendes bewiesen. Die Intervalle der imaginären λ -Achse mit positivem $\mathfrak{Q}(\lambda)$ gehören zu dem rechten Ufer des hergestellten Blattes der Riemannschen Fläche.

§ 4. Verzweigungspunkte, Nullstellen und Pole auf der imaginären λ -Achse.

In diesem Paragraphen behandeln wir die Zeicheneigenschaften der Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$ auf der imaginären λ -Achse, wenn der λ -Punkt Verzweigungspunkte, Nullstellen und Pole überschreitet. Diese Eigenschaften werden uns in dem nächsten Paragraphen von Nutzen sein, wenn wir die Eigenschaften der Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$ in den Intervallen mit imaginärem $\mathfrak{Q}(\lambda)$ behandeln werden.

Es sind mehrere Fälle möglich, je nach dem Sinne des zu überschreitenden Punktes.

1. Erster Fall. Der zu überschreitende Punkt $i\lambda_k$ ist eine Nullstelle nur für eine der Funktionen \mathfrak{W}_1 oder \mathfrak{W}_2 ⁷, z. B. für die Funktion $\mathfrak{W}_1(\lambda)$, dagegen für die andere Funktion — $\mathfrak{W}_2(\lambda)$ — ist dieser Punkt $i\lambda_k$ weder eine Nullstelle noch ein Pol. Das bedeutet:

$\mathfrak{W}_1(\lambda) = (\lambda - i\lambda_k) \mathfrak{R}_1(\lambda)$; $\mathfrak{R}_1(i\lambda_k) \neq 0, \neq \infty$; $\mathfrak{W}_2(i\lambda_k) \neq 0, \neq \infty$.
Also:

$$\mathfrak{Q}(\lambda) = \sqrt{(\lambda - i\lambda_k) [\mathfrak{R}_1(\lambda) \cdot \mathfrak{W}_2(\lambda)]}.$$

In der rechten Halbebene nehmen wir einen kleinen Kreisbogen mit dem Mittelpunkt $i\lambda_k$. Es sollen M bzw. N Punkte sein, in

⁷ λ_k kann also $+\Omega_k$ oder $-\Omega_k$ bedeuten.

welchen der genannte Kreisbogen die imaginäre λ -Achse unten bzw. oben trifft. Den Radius ε dieses Kreisbogens wählen wir so klein, daß alle übrigen Nullstellen und Pole der Funktionen \mathfrak{W}_1 und \mathfrak{W}_2 außerhalb der Strecke MN bleiben.

Lassen wir jetzt den λ -Punkt sich auf dem Kreisbogen von M bis N bewegen. Es ist zu beachten, daß diese Bewegung zulässig ist, weil der Zugang zu der imaginären λ -Achse von der rechten Seite her überall zulässig ist (§ 3).

Den Punkten des Bogens MN entsprechen komplexe Zahlen

$$\lambda = i\lambda_k + \varepsilon e^{i\varphi_k(\lambda)}.$$

Falls der λ -Punkt sich auf erwähnte Weise auf dem Bogen bewegt, so ändert sich $\varphi_k(\lambda)$ von $-\frac{\pi}{2}$ (im Punkte M) bis $+\frac{\pi}{2}$ (im Punkte N). Also wächst $\varphi_k(\lambda)$ um den Wert π .

Auch das Produkt $\mathfrak{R}_1(\lambda) \cdot \mathfrak{W}_2(\lambda)$ schreiben wir in exponentieller Form:

$$\mathfrak{R}_1(\lambda) \mathfrak{W}_2(\lambda) = \rho(\lambda) e^{i\varphi(\lambda)}.$$

Diesmal kehrt, bei der Bewegung des λ -Punktes auf die erwähnte Weise von M bis N , der Wert von $\varphi(\lambda)$ zu seinem Anfangswerte zurück. Davon überzeugt man sich, falls man den Zähler und Nenner der rationalen Funktion $\mathfrak{R}_1(\lambda) \mathfrak{W}_2(\lambda)$ in Faktoren ersten Grades zerlegt denkt; dann kehrt der Arcus von jedem Faktor bei der beschriebenen Bewegung von M bis N zu seinem Anfangswerte zurück, und dasselbe gilt auch für die rationale Funktion $\mathfrak{R}_1(\lambda) \mathfrak{W}_2(\lambda)$ selbst.

Für die Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$ erhält man jetzt folgenden Ausdruck:

$$\mathfrak{Q}(\lambda) = \sqrt{\varepsilon \cdot \rho(\lambda)} e^{\frac{1}{2} i[\varphi_k(\lambda) + \varphi(\lambda)] + im\pi}.$$

(Hier muß man für m den Wert 0 oder 1 so wählen, daß im Punkte M die Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$ das richtige Vorzeichen hat. Aber welcher Wert der richtige ist, das ist hier nicht wesentlich.)

Der Arcus

$$\frac{1}{2} \left[\varphi_k(\lambda) + \varphi(\lambda) \right] + m\pi$$

des letzten Ausdrucks wächst um den Wert $\frac{\pi}{2}$, falls der λ -Punkt sich auf die beschriebene Weise bewegt. Was hat das zu bedeuten?

Falls im Punkte M $\Omega(\lambda) > 0$ ist, so ist die Funktion $\Omega(\lambda)$ positiv-imaginär im Punkte N . Falls dagegen im Punkte M diese Funktion $\Omega(\lambda)$ negativ-imaginär ist, so ist im Punkte N $\Omega(\lambda) > 0$, usw.

2. Auf ähnliche Weise kann man den zweiten Fall behandeln, sobald der zu überschreitende Punkt $i\lambda_k$ ein Pol nur für eine der Funktionen \mathfrak{W}_1 oder \mathfrak{W}_2 ist⁸, z. B. für die Funktion $\mathfrak{W}_1(\lambda)$, dagegen für die andere Funktion $-\mathfrak{W}_2(\lambda)$ — dieser Punkt $i\lambda_k$ weder eine Nullstelle noch ein Pol ist. Diesmal ergibt sich:

$$\mathfrak{W}_1(\lambda) = \frac{1}{\lambda - i\lambda_k} \mathfrak{R}_1(\lambda),$$

$$\mathfrak{R}_1(i\lambda_k) \neq 0, \neq \infty, \quad \mathfrak{W}_2(i\lambda_k) \neq 0, \neq \infty$$

und

$$\Omega(\lambda) = \sqrt{\frac{1}{\lambda - i\lambda_k} [\mathfrak{R}_1(\lambda) \cdot \mathfrak{W}_2(\lambda)]}.$$

Ebenso wie im ersten Fall soll auch jetzt der λ -Punkt sich auf einem kleinen Kreisbogen, dessen Mittelpunkt der zu betrachtende Punkt $i\lambda_k$ ist, von M bis N bewegen. Wir bezeichnen:

$$\lambda = i\lambda_k + \varepsilon e^{i\varphi_k(\lambda)}, \quad \mathfrak{R}_1(\lambda) \mathfrak{W}_2(\lambda) = \rho(\lambda) e^{i\varphi(\lambda)}.$$

Die Veränderung der beiden Arcus $\varphi_k(\lambda)$ und $\varphi(\lambda)$ ist dieselbe wie im ersten Fall. Dagegen hat die Funktion $\Omega(\lambda)$ jetzt den folgenden Ausdruck:

$$\Omega(\lambda) = \sqrt{\frac{\rho(\lambda)}{\varepsilon} e^{\frac{1}{2}i[\varphi(\lambda) - \varphi_k(\lambda)] + im\pi}}.$$

(Auch hier muß man den richtigen m -Wert wählen, ebenso wie im ersten Fall.)

Diesmal vermindert sich der Arcus der Funktion $\Omega(\lambda)$ um den Wert $\frac{\pi}{2}$, falls der λ -Punkt sich auf die beschriebene Weise bewegt. Das bedeutet folgendes. Falls im Punkte M $\Omega(\lambda) > 0$ ist, so ist die Funktion $\Omega(\lambda)$ negativ-imaginär im Punkte N . Ist dagegen im Punkte M diese Funktion positiv-imaginär, so ergibt sich im Punkte N $\Omega(\lambda) > 0$, usw.

⁸ Jetzt kann λ_k also $+\omega_k$ oder $-\omega_k$ bedeuten.

3. Dritter Fall: Der Punkt $i\lambda_k$ ist eine Nullstelle für beide Funktionen \mathfrak{W}_1 und \mathfrak{W}_2 . Also:

$$\mathfrak{W}_1(\lambda) = (\lambda - i\lambda_k) \mathfrak{R}_1(\lambda), \quad \mathfrak{R}_1(i\lambda_k) \neq 0, \neq \infty;$$

$$\mathfrak{W}_2(\lambda) = (\lambda - i\lambda_k) \mathfrak{R}_2(\lambda), \quad \mathfrak{R}_2(i\lambda_k) \neq 0, \neq \infty.$$

Deshalb:

$$\mathfrak{Q}(\lambda) = \sqrt{(\lambda - i\lambda_k)^2 [\mathfrak{R}_1(\lambda) \cdot \mathfrak{R}_2(\lambda)]}.$$

In den Punkten des früher angewiesenen Bogens MN brauchen wir den früher angewandten ähnliche Bezeichnungen:

$$\lambda = i\lambda_k + \varepsilon e^{i\varphi_k(\lambda)}, \quad \mathfrak{R}_1(\lambda) \mathfrak{R}_2(\lambda) = \rho(\lambda) e^{i\varphi(\lambda)},$$

woraus folgt:

$$\mathfrak{Q}(\lambda) = \varepsilon \sqrt{\rho(\lambda)} e^{i[\varphi_k(\lambda) + \frac{1}{2}\varphi(\lambda)] + im\pi}$$

($m = 0$ oder 1).

Jetzt wächst der Arcus der Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$ um den Wert π , falls der λ -Punkt sich auf die frühere Weise bewegt. Daraus ersieht man, daß die Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$ in den Punkten M und N entgegengesetzte Zeichen hat. Z. B., falls im Punkte M die Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$ positiv-imaginär ist, so ist sie negativ-imaginär im Punkte N .

4. Vierter Fall: Der Punkt $i\lambda_k$ ist ein Pol für beide Funktionen \mathfrak{W}_1 und \mathfrak{W}_2 . Diesmal vermindert sich der Arcus der Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$ um den Wert π , falls der λ -Punkt sich auf die früher erwähnte Weise auf dem Kreisbogen bewegt. Deshalb hat auch diesmal die Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$ in den Punkten M und N entgegengesetzte Zeichen.

5. Endlich, fünfter Fall: der zu überschreitende Punkt $i\lambda_k$ ist eine Nullstelle für die eine und ein Pol für die andere der Funktionen \mathfrak{W}_1 und \mathfrak{W}_2 . Aber jetzt ist dieser Punkt $i\lambda_k$ weder eine Nullstelle, noch ein Pol oder ein Verzweigungspunkt für die Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$, und deshalb ändert sich im Punkte $i\lambda_k$ die Zeicheneigenschaft der Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$ nicht. Z. B., falls im Punkte M $\mathfrak{Q}(\lambda) > 0$ ist, muß im Punkte N ebenfalls $\mathfrak{Q}(\lambda) > 0$ sein.

§ 5. Intervalle der imaginären λ -Achse mit imaginärem $\mathfrak{Q}(\lambda)$.

Man soll sich an folgendes erinnern. In den Intervallen der imaginären λ -Achse mit imaginärem $\mathfrak{Q}(\lambda)$ sind die Funktionen \mathfrak{W}_1 und \mathfrak{W}_2 imaginär mit gleichen Vorzeichen.

In diesem Paragraphen wird gezeigt, daß auf der imaginären λ -Achse des hergestellten Blattes der Riemannschen Fläche die Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$ in denjenigen Intervallen positiv-imaginär ist, wo \mathfrak{W}_1 und \mathfrak{W}_2 positiv-imaginär sind; dagegen ist diese Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$ dort negativ-imaginär, wo \mathfrak{W}_1 und \mathfrak{W}_2 negativ-imaginär sind.

Betrachten wir ein Intervall der imaginären λ -Achse mit imaginärem $\mathfrak{Q}(\lambda)$.

Im allgemeinen Fall schließt sich diesem Intervall ein anderes Intervall mit $\mathfrak{Q}(\lambda) > 0$ von unten an. Es soll $i\lambda_k$ der gemeinsame Grenzpunkt sein. Dann ist $i\lambda_k$ ein Verzweigungspunkt der Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$, und es gibt zwei Möglichkeiten: 1. $\mathfrak{Q}(i\lambda_k) = 0$ oder 2. $\mathfrak{Q}(i\lambda_k) = \infty$.

1. Zuerst behandeln wir die erste Möglichkeit $\mathfrak{Q}(i\lambda_k) = 0$. Es soll der λ -Punkt sich vom Intervall mit $\mathfrak{Q}(\lambda) > 0$ — über den Punkt $i\lambda_k$ — in das zu betrachtende Intervall mit imaginärem $\mathfrak{Q}(\lambda)$ emporbewegen. Der erste Fall des vorigen Paragraphen zeigt uns, daß in dem angegebenen Intervall mit imaginärem $\mathfrak{Q}(\lambda)$ die Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$ positiv-imaginär wird.

Es ist zu beachten, daß der Punkt $i\lambda_k$ eine Nullstelle für eine der Funktionen \mathfrak{W}_1 oder \mathfrak{W}_2 ist, z. B. es soll $\mathfrak{W}_1(i\lambda_k) = 0$. Außerdem ist zu beachten, daß die Funktionen \mathfrak{W}_1 und \mathfrak{W}_2 auf der imaginären λ -Achse beständig im positiv-imaginären Sinne zunehmen.

Infolge der soeben angegebenen Eigenschaften, ist auf der imaginären λ -Achse oberhalb des Punktes $i\lambda_k$, in der Nähe desselben, die Funktion \mathfrak{W}_1 positiv-imaginär. Aber daselbst ist auch \mathfrak{W}_2 positiv-imaginär, weil im Intervalle mit imaginärem $\mathfrak{Q}(\lambda)$ die Funktionen \mathfrak{W}_1 und \mathfrak{W}_2 imaginär mit gleichen Vorzeichen sind.

Also oberhalb des Punktes $i\lambda_k$, in der Nähe desselben, sind alle drei Funktionen $\mathfrak{Q}(\lambda)$, \mathfrak{W}_1 und \mathfrak{W}_2 positiv-imaginär.

2. Jetzt behandeln wir die zweite Möglichkeit $\mathfrak{Q}(i\lambda_k) = \infty$. Es soll auch jetzt der λ -Punkt sich vom Intervall mit $\mathfrak{Q}(\lambda) > 0$ — über den Punkt $i\lambda_k$ — in das zu betrachtende Intervall mit imaginärem $\mathfrak{Q}(\lambda)$ emporbewegen. Der zweite Fall des vorigen Paragraphen zeigt uns, daß in dem angegebenen Intervall mit imaginärem $\mathfrak{Q}(\lambda)$ die Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$ jetzt negativ-imaginär wird.

In diesem Falle ist der Punkt $i\lambda_k$ ein Pol für eine der Funktionen \mathfrak{W}_1 oder \mathfrak{W}_2 , z. B. es soll $\mathfrak{W}_1(i\lambda_k) = \infty$ sein. Deshalb ist auf der

imaginären λ -Achse oberhalb des Punktes $i\lambda_k$, in der Nähe desselben, die Funktion \mathfrak{W}_1 negativ-imaginär. Aber daselbst ist auch \mathfrak{W}_2 negativ-imaginär, weil dort \mathfrak{W}_1 und \mathfrak{W}_2 imaginär mit gleichen Vorzeichen sind.

Also diesmal erweisen sich auf der imaginären λ -Achse oberhalb des Punktes $i\lambda_k$, in der Nähe desselben, alle drei Funktionen $\mathfrak{Q}(\lambda)$, \mathfrak{W}_1 und \mathfrak{W}_2 negativ-imaginär.

Falls im zu betrachtenden Intervall mit imaginärem $\mathfrak{Q}(\lambda)$ oberhalb des Punktes $i\lambda_k$ die Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$ Nullstellen bzw. Pole besitzt, sind diese Punkte auch Nullstellen bzw. Pole für beide Funktionen \mathfrak{W}_1 und \mathfrak{W}_2 . Beim Überschreiten eines solchen Punktes ändern alle drei Funktionen $\mathfrak{Q}(\lambda)$, \mathfrak{W}_1 und \mathfrak{W}_2 gleichzeitig ihre Vorzeichen auf die entgegengesetzten (für die Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$ ist diese Änderung des Vorzeichens in dem dritten und vierten Falle des vorigen Paragraphen gezeigt). Also in jedem Punkte des zu betrachtenden Intervalls mit imaginärem $\mathfrak{Q}(\lambda)$ sind alle drei Funktionen $\mathfrak{Q}(\lambda)$, \mathfrak{W}_1 und \mathfrak{W}_2 gleichzeitig positiv-imaginär oder gleichzeitig negativ-imaginär.

Damit ist der allgemeine Fall behandelt, in dem ein anderes Intervall mit $\mathfrak{Q}(\lambda) > 0$ sich an das zu betrachtende Intervall von unten anschließt.

Aber es kann vorkommen, daß unter dem zu betrachtenden Intervall kein Intervall mit $\mathfrak{Q}(\lambda) > 0$ vorhanden ist. Dieser Fall liegt dann vor, wenn das zu betrachtende Intervall bis ins $-i\infty$ reicht. Jetzt schließt sich an das letzterwähnte Intervall von oben ein solches mit $\mathfrak{Q}(\lambda) > 0$ an, wenn nicht der Ausnahmefall stattfindet, in dem auf der ganzen imaginären λ -Achse $\mathfrak{Q}(\lambda)$ imaginär ist. Aber diesen Ausnahmefall werden wir später behandeln.

Es soll jetzt $i\lambda_k$ der obere Grenzpunkt des zu betrachtenden Intervalls mit imaginärem $\mathfrak{Q}(\lambda)$ sein. Wieder ist $i\lambda_k$ ein Verzweigungspunkt der Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$, und es bestehen zwei Möglichkeiten: 1'. $\mathfrak{Q}(i\lambda_k) = 0$ oder 2'. $\mathfrak{Q}(i\lambda_k) = \infty$.

1'. Im ersten Fall soll der λ -Punkt sich von dem zu betrachtenden Intervall über den Punkt $i\lambda_k$ in das Intervall mit $\mathfrak{Q}(\lambda) > 0$ emporbewegen. Der erste Fall des vorigen Paragraphen zeigt uns, daß in dem zu betrachtenden Intervall mit imaginärem $\mathfrak{Q}(\lambda)$ diese Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$ negativ-imaginär ist.

Der Punkt $i\lambda_k$ ist eine Nullstelle für eine der Funktionen \mathfrak{W}_1

oder \mathfrak{W}_2 , z. B. es soll $\mathfrak{W}_1(i\lambda_k) = 0$ sein. Deshalb ist auf der imaginären λ -Achse unterhalb des Punktes $i\lambda_k$, in der Nähe desselben, die Funktion \mathfrak{W}_1 negativ-imaginär. Aber daselbst ist auch \mathfrak{W}_2 negativ-imaginär, weil dort \mathfrak{W}_1 und \mathfrak{W}_2 imaginär mit gleichen Zeichen sind.

Also jetzt sind auf der imaginären λ -Achse unterhalb des Punktes $i\lambda_k$, in der Nähe desselben, alle drei Funktionen $\mathfrak{Q}(\lambda)$, \mathfrak{W}_1 und \mathfrak{W}_2 negativ-imaginär.

2'. Gleicherweise erweist sich im zweiten Fall auf der imaginären λ -Achse unterhalb des Punktes $i\lambda_k$, in der Nähe desselben, die Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$ positiv-imaginär. Auch \mathfrak{W}_1 und \mathfrak{W}_2 erweisen sich daselbst positiv-imaginär.

Ebenso wie im allgemeinen Falle sind auch jetzt bei den Möglichkeiten 1' und 2' alle drei Funktionen $\mathfrak{Q}(\lambda)$, \mathfrak{W}_1 und \mathfrak{W}_2 gleichzeitig positiv-imaginär oder gleichzeitig negativ-imaginär in jedem Punkte des zu betrachtenden Intervalls mit imaginärem $\mathfrak{Q}(\lambda)$.

Es ist noch der Ausnahmefall übrig geblieben, in dem $\mathfrak{Q}(\lambda)$ auf der ganzen imaginären λ -Achse imaginär ist.

Es sei $i\lambda_k$ eine Nullstelle für eine der Funktionen \mathfrak{W}_1 oder \mathfrak{W}_2 . Dann ist derselbe Punkt eine Nullstelle auch für die andere von den genannten Funktionen, weil jetzt $\mathfrak{Q}(\lambda)$ keine Verzweigungspunkte besitzt, und außerdem, weil in der Nähe des Punktes $i\lambda_k$ die Funktionen \mathfrak{W}_1 und \mathfrak{W}_2 imaginär mit gleichen Zeichen sind.

Ebenso falls $i\lambda_k$ ein Pol für eine der Funktionen \mathfrak{W}_1 oder \mathfrak{W}_2 ist, stellt derselbe Punkt einen Pol auch für die andere von den genannten Funktionen dar.

Es stellt sich heraus, daß beide Funktionen \mathfrak{W}_1 und \mathfrak{W}_2 dieselben Nullstellen und Pole besitzen. Demzufolge besitzen die beiden Funktionen \mathfrak{W}_1 und \mathfrak{W}_2 denselben Ausdruck der Gestalt (2₁) — (2₄). Nur die positive Konstante C darf für jede dieser Funktionen eine andere sein. Also diesmal ist $\mathfrak{W}_2 = c \mathfrak{W}_1$ ($c > 0$), und daraus

$$\mathfrak{Q}(\lambda) = \sqrt{c} \mathfrak{W}_1^2 = \sqrt{c} \mathfrak{W}_1(\lambda).$$

Es soll gezeigt werden, daß die Wurzel \sqrt{c} hier positiv zu nehmen ist.

Auf der positiv-reellen λ -Achse ist $\mathfrak{W}_1(\lambda) > 0$ und $\mathfrak{Q}(\lambda) > 0$. Deshalb muß man auf dieser Achse $+\sqrt{c}$ nehmen. Da aber \mathfrak{W}_1 und

\mathfrak{Q} stetige Funktionen auf der ganzen λ -Ebene sind, so ist derselbe Wert $+\sqrt{c}$ auf der ganzen λ -Ebene zu wählen.

Auch in diesem Ausnahmefalle, ebenso wie in allen vorigen Fällen, sind in jedem Intervall der imaginären λ -Achse mit imaginärem $\mathfrak{Q}(\lambda)$ alle drei Funktionen $\mathfrak{Q}(\lambda)$, $\mathfrak{W}_1(\lambda)$ und $\mathfrak{W}_2(\lambda)$ gleichzeitig positiv-imaginär oder gleichzeitig negativ-imaginär.

Damit ist die am Anfang dieses Paragraphen erwähnte Eigenschaft bewiesen.

Beweisen wir noch die folgende Eigenschaft:

In den Intervallen mit imaginärem $\mathfrak{Q}(\lambda)$, nimmt diese Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$ beständig im positiv-imaginären Sinne zu.⁹

Um dies zu beweisen, beachten wir, daß auf der imaginären λ -Achse \mathfrak{W}_1 und \mathfrak{W}_2 im positiv-imaginären Sinne beständig zunehmen.

Zuerst betrachten wir ein Intervall der imaginären λ -Achse, wo alle drei Funktionen $\mathfrak{Q}(\lambda)$, $\mathfrak{W}_1(\lambda)$ und $\mathfrak{W}_2(\lambda)$ positiv-imaginär sind. In diesem Intervall nehmen die Moduln $|\mathfrak{W}_1|$ und $|\mathfrak{W}_2|$ beständig zu, falls der λ -Punkt sich nach oben bewegt. Die Formel $\mathfrak{Q}(\lambda) = \sqrt{\mathfrak{W}_1 \mathfrak{W}_2}$ zeigt, daß daselbst auch $|\mathfrak{Q}(\lambda)|$ beständig zunimmt. Demzufolge nimmt ebenda die Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$ beständig im positiv-imaginären Sinne zu, weil dort $\mathfrak{Q}(\lambda)$ positiv-imaginär ist.

Jetzt betrachten wir ein Intervall der imaginären λ -Achse, wo alle drei Funktionen $\mathfrak{Q}(\lambda)$, $\mathfrak{W}_1(\lambda)$ und $\mathfrak{W}_2(\lambda)$ negativ-imaginär sind. In diesem Intervall nehmen die Moduln $|\mathfrak{W}_1|$ und $|\mathfrak{W}_2|$ beständig ab, falls der λ -Punkt sich nach oben bewegt. Daselbst nimmt auch $|\mathfrak{Q}(\lambda)|$ beständig ab. Demzufolge nimmt die Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$ daselbst beständig im positiv-imaginären Sinne zu.

Damit ist die Monotonieeigenschaft der Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$ in den Intervallen der imaginären λ -Achse mit imaginärem $\mathfrak{Q}(\lambda)$ bewiesen.

Es sei bemerkt, daß in den entsprechenden Punkten der beiden Blätter der Riemannschen Fläche die Werte der Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$ sich nur durch entgegengesetzte Vorzeichen unterscheiden. Deshalb nimmt auf dem beiseite gelassenen Blatt der Riemannschen Fläche, in den Intervallen der imaginären λ -Achse mit imaginärem $\mathfrak{Q}(\lambda)$, diese Funktion beständig im positiv-imaginären Sinne ab.

⁹ In dem Aufsatz [3] wird anstatt des Ausdrucks „nimmt im positiv-imaginären Sinne beständig zu“ auch der Ausdruck: „verläuft reaktanzartig“ gebraucht.

Schlussbemerkungen.

Für die Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$ ist ein Blatt der Riemannschen Fläche mit folgenden Eigenschaften hergestellt:

1. Auf diesem Blatte ist die Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$ für jeden komplexen λ -Wert eindeutig definiert (§ 1).

2. Dieses Blatt ist auch folgendermaßen herstellbar. Die Riemannsche Fläche der Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$ schneidet man längs den Intervallen der imaginären λ -Achse mit reellem $\mathfrak{Q}(\lambda)$ auf (§ 1). Danach nimmt man dasjenige Blatt, auf dem in den Intervallen der imaginären λ -Achse mit imaginärem $\mathfrak{Q}(\lambda)$, die Funktion $\mathfrak{Q}(\lambda)$ im positiv-imaginären Sinne beständig zunimmt (Ende des § 5). Außerdem behält man dasjenige Ufer in den Intervallen der imaginären λ -Achse mit reellem $\mathfrak{Q}(\lambda)$, auf welchem $\mathfrak{Q}(\lambda) > 0$ ist (§ 1). (Dieses Ufer erwies sich als das rechte, § 3).

3. Auf der imaginären λ -Achse (dort sind die Funktionen \mathfrak{W}_1 und \mathfrak{W}_2 rein imaginär) ist die Zweideutigkeit der Wurzel $\sqrt{\mathfrak{W}_1\mathfrak{W}_2}$ durch die Festsetzung beseitigt, daß jeweils der Hauptwert des geometrischen Mittels genommen werden soll, d. h. wenn beide Faktoren positiv- bzw. negativ- imaginär sind, soll auch das Mittel positiv bzw. negativ-imaginär sein (§ 5), und daß das Mittel positiv reell sein soll, wenn beide Faktoren verschiedene Zeichen haben (§ 1).

Der 2. Punkt der Schlussbemerkungen stimmt mit dem Hinweise im Aufsatz [3] (Fußnote der S. 94) in bezug auf das Blatt der Riemannschen Fläche überein. Dagegen enthält der 3. Punkt die Festsetzung der Zeichen, die sich auf Seite 93 desselben Aufsatzes befindet. Im vorliegenden Aufsatz ist gezeigt, wie die Festsetzung der Zeichen aus der Wahl des geeigneten Blattes der Riemannschen Fläche gefolgert wird.

Riga, den 28. Oktober 1941.

LITERATUR.

- [1] Cauer (W.) — Ein Interpolationsproblem mit Funktionen mit positivem Realteil. *Mathematische Zeitschrift*, 38. Band, 1933.
- [2] Foster (R.) — A reactance Theorem. *The Bell System Technical Journal*, 1924.
- [3] Piloty (H.) — Über Reaktanz-Vierpole. *Elektrische Nachrichten-Technik*, Band 14, 1937.

Īpašības kādai speciālai Riemann'a virsai.

Kopsavilkums.

Elektrotehnikā tiek lietotas funkcijas, kas ir raksturojamas ar izteiksmēm (1) vai $(2_1) - (2_4)^{10}$ un kas tiek sauktas par reaktancēm. Tiek lietotas arī funkcijas ar izteiksmi (3) — kvadrātsaknes no divu reaktanču reizinājumiem.

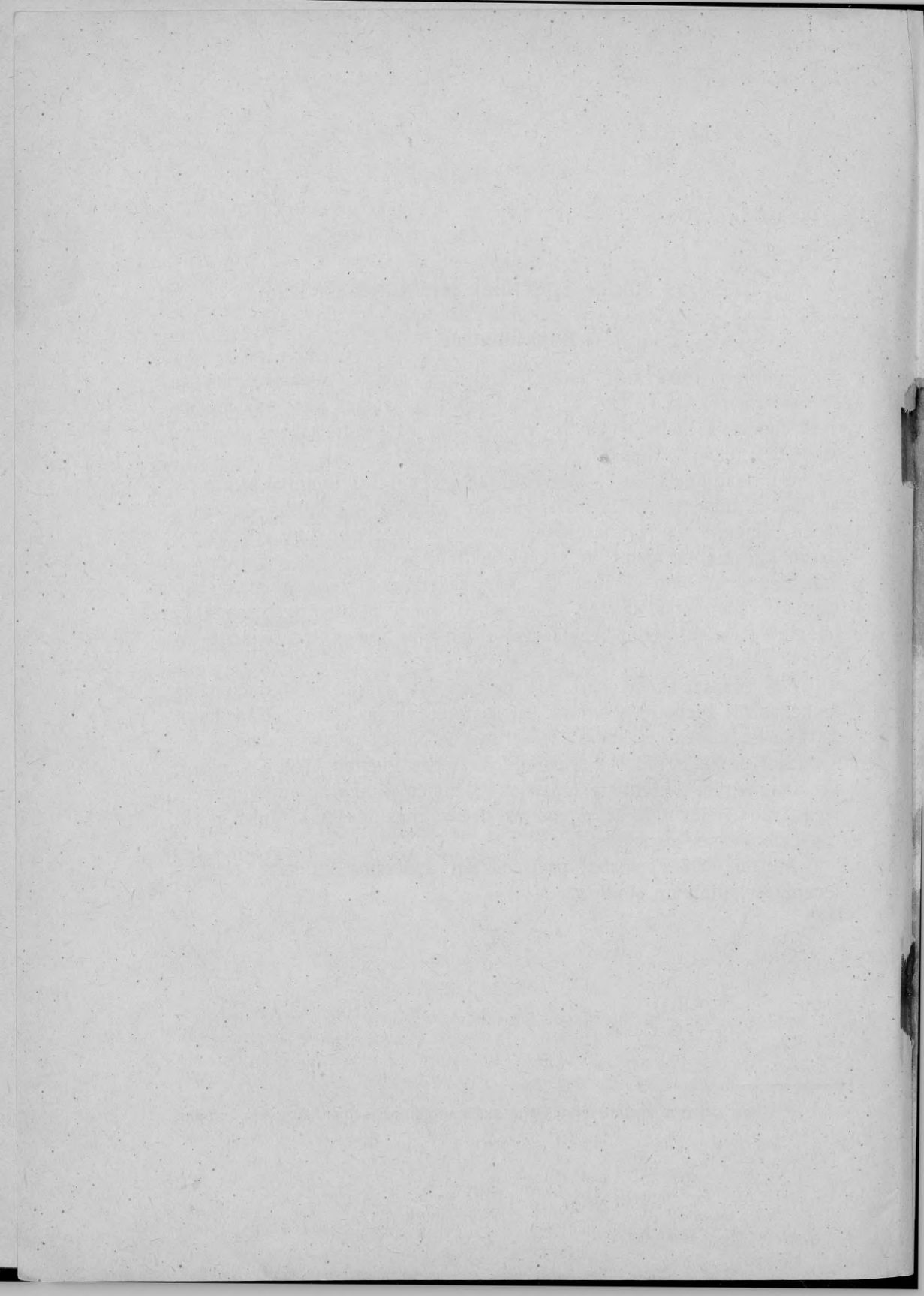
Uz imaginārās ass λ -plāksnē reaktances ir tīri imagināras. Līdz ar to tur funkcija (3) ir reāla vai tīri imagināra, atkarībā no reaktanču zīmēm. Lai kvadrātsaknei tad būtu noteikta zīme, H. Piloty darbā [3] vienojas ņemt to saknes vērtību, ko sauc par ģeometriskā vidusskaitļa galveno vērtību: Ja abas reaktances ir reizē pozitīvi resp. negatīvi imagināras, tad arī funkcija (3) jāņem pozitīvi resp. negatīvi imagināra; ja turpretim reaktancēm ir pretējas zīmes, tad funkcija (3) jāņem pozitīva.

Bet kvadrātsaknei zīmi var noteikt arī citādi. No irracionālās funkcijas (3) Riemann'a virsas var paturēt vienu loksni. Tad katrā šīs loksnes punktā funkcijas (3) vērtībai ir pilnīgi noteikta zīme.

Šinī darbā ir rādīts, ka, pareizi izvēloties Riemann'a virsas loksni, tīri imaginārām λ -vērtībām funkcijas (3) zīmes saskan ar augšā minēto vienošanos. Bez tam ir pierādītas dažas citas īpašības funkcijai (3) izvēlētās loksnes punktos.

Minētās virsas īpašību pazīšana ļoti atvieglo attiecīgo elektrotehnikas jautājumu studijas.

¹⁰ Cipari iekavās apzīmē iepriekšējā tekstā ar tādu pašu ciparu apzīmēto formulu.



10,-

LU bibliotēka



930007736

57196

P $\frac{LW}{144d}$

AFV Nr. II/00854. Eksemplāru skaits 1100. Papīrs iespiežamais H 1 c 45 kg, 67 × 95 cm, no Jaunciema papīra fabrikas. Iespiests un brošēts Latvijas vērtspapīru spiestuvē 1943. g. Nr. 24610. V 88.