UNIVERSITÄT IN RIGA

WISSENSCHAFTLICHE ABHANDLUNGEN

NEUE FOLGE DER ACTA UNIVERSITATIS LATVIENSIS

KLASSE DER MATHEMATISCHEN ABTEILUNG DER FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND NATURWISSENSCHAFTEN

UNIVERSITĀTE RĪGĀ

ZINĀTNISKIE RAKSTI

LATVIJAS UNIVERSITĀTES RAKSTU TURPINĀJUMS

MATĒMATIKAS UN DABAS ZINĀTŅU FAKULTĀTES MATĒMATIKAS NODAĻAS SERIJA

BAND 1. SĒJUMS

Nr. 2

E. FOGELS

Zur Arithmetik quadratischer Zahlenkörper

RIGA
LATVJU GRĀMATA
1943

Zur Arithmetik quadratischer Zahlenkörper

von *E. Fogels.*

Einleitung.

Im vorliegenden Artikel behandle ich einen Fall des folgenden allgemeinen Problems. Es sei x eine positive Zahl, $\mathfrak{M}_x$ eine durch x bestimmte Menge ganzer Zahlen α eines gegebenen Körpers und $f(\alpha)$ eine Funktion, die für alle α der Menge definiert ist. Es wird nach dem Mittelwert der Funktion in der Menge für unbegrenzt wachsendes x gefragt.

Der gesuchte Wert hängt im allgemeinen sowohl von dem Körper als auch von der Menge ab.

Ich betrachte speziell den Körper $K(\sqrt{-5})$, d. h. die Zahlen

$$\alpha = a + b\sqrt{-5}$$

mit rationalen a, b. Ich nenne eine ganze Zahl α *normal*, falls sie (von der Reihenfolge der Faktoren und assoziierten Faktoren abgesehen) auf eine einzige Weise in Primzahlen des Körpers zerlegbar ist, und *anormal* im entgegengesetzten Falle. Beispielsweise sind alle Primzahlen des Körpers normal; 6 ist dagegen eine anormale Zahl.

Das Problem löse ich für die Funktion

$$f(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \alpha \text{ normal} \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

und die Menge der natürlichen Zahlen $\leqslant x$, sowie auch für die Menge aller ganzen Zahlen α, deren Normen $N\alpha$ die Zahl x nicht überschreiten. In beiden Fällen wird bewiesen, daß der Mittelwert der Funktion $f(\alpha)$ mit unbegrenzt wachsendem x gegen Null strebt. Mit anderen Worten, die Dichte der normalen Zahlen ist gleich Null oder auch — *fast alle Zahlen des Körpers* $K(\sqrt{-5})$ *sind anormal.*

Dieses Ergebnis kenne ich schon seit 1939. Ob es aber neu ist, ist mir nicht zu ermitteln gelungen.

Zum Beweis benutze ich die Kummerschen idealen Zahlen, von denen alles Nötige in den Paragraphen 3 und 4 ausgeführt wird. Der Inhalt dieser Paragraphen ist nicht neu; mir ist aber keine Quelle bekannt, wo derselbe auf die gleiche Weise entwickelt wäre. Einen Hinweis auf den von mir beschrittenen Weg habe ich bei Mordell (5) gefunden.

Die Methode läßt sich auf andere quadratische Körper übertragen, wenigstens auf diejenigen, wo die entsprechenden quadratischen Formen in jedem Genus eine einzige Klasse besitzen [1]. In reellen quadratischen Körpern kommt jedoch eine Komplikation wegen der unendlich vielen Einheiten hinzu.

Bezeichnungen.

Unter Körper verstehen wir stets den Körper $K(\sqrt{-5})$. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bezeichnen ganze Zahlen dieses Körpers. $\bar{\alpha}$ bedeutet die zu α konjugiert-komplexe Zahl. Als Norm $N\alpha$ der Zahl $\alpha = a + b\sqrt{-5}$ wird der Ausdruck $\alpha\bar{\alpha} = a^2 + 5b^2$ bezeichnet.

Überall, wo die lateinischen Buchstaben nicht als Funktionensymbole gebraucht werden und auch nichts anderes bemerkt ist, bedeuten sie ganze rationale Zahlen. p, q, r mit und ohne Indizes seien positive Primzahlen, wobei stets

$$\left.\begin{aligned} p &\equiv 1,\ 9 \\ q &\equiv 3,\ 7 \\ r &\equiv 11,\ 13,\ 17,\ 19 \end{aligned}\right\} \pmod{20}.$$

Das Produkt aller in einer zu 10 teilerfremden Zahl $m \geqslant 1$ enthaltenen p wird mit P bezeichnet; falls m durch kein p teilbar ist, verstehen wir unter P die Zahl 1. Q und R sind entsprechend die Produkte aller in m enthaltenen q bzw. r; möglicherweise ist $Q = 1$, $R = 1$. Es ist also

$$\begin{aligned} m &= p_1^{a_1} \ldots q_1^{b_1} \ldots r_1^{c_1} \ldots (a_1, b_1, c_1 \ldots \geqslant 1) \\ &= P\,Q\,R. \end{aligned}$$

(a, b) bezeichnet den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen a, b. Ist $\alpha = a + b\sqrt{-5}$, so setzen wir $(a, b) = T(\alpha)$.

---

[1] S. z. B. Dickson-Bodewig (1) S. 84.

$d|a$ ist die Bezeichnung für *d teilt a*.
$e, e_1, \ldots$ sind positive Teiler der Zahl 10.
$d(n)$ bezeichnet die Anzahl der positiven Teiler der Zahl n.
$\left(\frac{a}{b}\right)$ ist das Jacobische Symbol.

$F(n)$ sei die Anzahl aller Darstellungen der Zahl n durch die Form x^2+5y^2.

§ 1. Hilfssätze aus der Theorie der quadratischen Formen.

Hilfssatz 1. *Ist eine Quadratzahl A^2 durch die Form x^2+5y^2 eigentlich (d. h. mit teilerfremden x, y) darstellbar, so ist $A=PQ$.*

Beweis. Ist $x^2+5y^2 \equiv 0$ mod 4 oder 25, so ist x und y durch 2 bzw. 5 teilbar. Da $\left(\frac{-5}{r}\right)=-1$ ist, so kann dieselbe Kongruenz mod r^2 nur dann bestehen, wenn $r|x$ und $r|y$.

In der Theorie der binären quadratischen Formen[2] wird bewiesen der

Hilfssatz 2. *Die Anzahl der Darstellungen der Zahl*

$$n=2^a 5^b m=2^a 5^b PQR$$

durch die Form x^2+5y^2 ist gleich

$$F(n)=\left\{1+(-1)^a\left(\frac{m}{5}\right)\right\}\sum_{d|m}\left(\frac{-5}{d}\right)$$

$$=\left\{1+(-1)^a\left(\frac{m}{5}\right)\right\}\sum_{k=0}^{a_1}\left(\frac{-5}{p_1}\right)^k\ldots\sum_{k=0}^{b_1}\left(\frac{-5}{q_1}\right)^k\ldots\sum_{k=0}^{c_1}\left(\frac{-5}{r_1}\right)^k\ldots. \quad (1)$$

Da

$$\left(\frac{-5}{p}\right)=\left(\frac{-5}{q}\right)=1,\quad \left(\frac{-5}{r}\right)=-1,$$

$$\left(\frac{m}{5}\right)=\begin{cases}1 \text{ für } m\equiv 1,\ 9,\ 11,\ 19\\ -1 \text{ für } m\equiv 3,\ 7,\ 13,\ 17\end{cases}\pmod{20}$$

ist, so folgen hieraus die weiteren zwei Hilfssätze.

Hilfssatz 3. *Es sei $a=0$ oder 1, $n=2^aQ$ und $F(n)>0$. Dann ist die Anzahl der Primfaktoren der Zahl n eine gerade Zahl.*

---

[2] Vgl. z. B. Dickson-Bodewig (1) S. 81.

Hilfssatz 4. *Aus* $n = 2^a 5^b PQR$, $F(n) > 0$ *folgt* $R = R_1^2$.

Ist dabei $Q = 1$, *so muss* a *gerade sein; gesetzt* $a = 2a'$,

$$n = 2^{2a'} 5^b P R_1^2,$$

ist

$$F(n) = 2d(P). \tag{2}$$

Ist dagegen $Q = q$, *so muss* a *ungerade sein; gesetzt* $a = 2a' + 1$,

$$n = 2^{2a'+1} 5^b P q R,$$

ist

$$F(n) = 4d(P). \tag{3}$$

§ 2. Hilfssätze über einfache Zahlen.

Für $\gamma = x + y\sqrt{-5}$ ist die Funktion T durch $T(\gamma) = (x, y)$ definiert. Setzen wir

$$\alpha = a_1 + a_2\sqrt{-5},$$
$$\beta = b_1 + b_2\sqrt{-5}$$

und $\gamma = x + y\sqrt{-5} = \alpha\beta$, so folgt aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= a_1 b_1 - 5a_2 b_2 \\ y &= a_1 b_2 + a_2 b_1 \end{aligned} \tag{4}$$

das Ergebnis

$$T(\alpha\beta) \geqslant T(\alpha) T(\beta). \tag{5}$$

Die ganzen Zahlen α mit $T(\alpha) = 1$ nennen wir *einfache Zahlen.* Einige Bedingungen, unter denen sich die einfachen Zahlen durch Multiplikation reproduzieren, werden in den folgenden Hilfssätzen gegeben.

Hilfssatz 5. *Sind die Normen* $N\alpha = A$ *und* $N\beta = B$ *der einfachen Zahlen* $\alpha = a_1 + a_2\sqrt{-5}$, $\beta = b_1 + b_2\sqrt{-5}$ *teilerfremd, so ist auch das Produkt* $\alpha\beta$ *einfach.*

Beweis. Setzen wir $\alpha\beta = x + y\sqrt{-5}$, so bestehen nebst (4) die Gleichungen

$$a_1 x + 5a_2 y = b_1 A,$$
$$-a_2 x + a_1 y = b_2 A,$$

woraus

$$(x, y) \mid b_1 A, \quad (x, y) \mid b_2 A$$

und also auch

$$(x, y) \mid A$$

folgt. In gleicher Weise beweist man auch $(x, y) \mid B$. Da $(A, B) = 1$ ist, so folgt hieraus $(x, y) = 1$.

Bemerkung zur Formel (5). Sind die Normen der ganzen Zahlen α, β teilerfremd, so ist

$$T(\alpha\beta) = T(\alpha)T(\beta).$$

Zum Beweise benutzen wir die Darstellung $\alpha = T(\alpha)\alpha_1$, $\beta = T(\beta)\beta_1$, wo α_1, β_1 den Voraussetzungen des vorigen Satzes genügen, und die Gleichung

$$T(\alpha\beta) = T(\alpha)T(\beta)T(\alpha_1\beta_1).$$

Hilfssatz 6. *Ist die Norm der einfachen Zahl α zu 10 teilerfremd, so sind auch die Potenzen $\alpha^k (k \geqslant 0)$ einfache Zahlen.*

Beweis. Es sei $\alpha = a + b\sqrt{-5}$. Dann ist die Zahl $\alpha^2 = (a^2 - 5b^2) + 2ab\sqrt{-5}$ einfach und $N(\alpha^2) = (N\alpha)^2$ zu 10 teilerfremd. Infolgedessen ist auch die Zahl α^4 einfach. Das Induktionsverfahren beweist nun, daß alle Potenzen α^{2^n} einfache Zahlen sind.

Wir setzen nun voraus, daß die Potenz α^k nicht einfach ist, und bestimmen eine Zahl n, für die $2^n > k$ ist. Die Gleichung

$$\alpha^{2^n} = \alpha^k \cdot \alpha^{2^n - k}$$

nebst (5) zeigt dann, daß auch α^{2^n} keine einfache Zahl sein kann.

Um einen weiteren Satz über einfache Zahlen zu beweisen, benötigen wir folgende drei Hilfssätze.

Hilfssatz 7. *Sind α_1, α_2 . . ., $\alpha_{F(a)}$ alle ganzen Zahlen, deren Norm gleich $a > 0$ ist und $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{F(b)}$ alle diejenigen der Norm $b > 0$, und ist ausserdem $(a, b) = 1$, so sind alle ganzen Zahlen, deren Norm gleich ab ist, unter den Produkten*

$$\alpha_k \beta_l \begin{cases} k = 1, 2, \ldots, F(a) \\ l = 1, 2, \ldots, F(b) \end{cases} \tag{6}$$

enthalten.

Beweis. Bedeuten α, α'; β, β' beliebige Zahlen α_k, β_l und wird $\alpha\beta = \alpha'\beta'$ vorausgesetzt, so besteht die Gleichung

$$\xi\eta = 1, \tag{7}$$

wo $\xi = \frac{\alpha}{\alpha'}$ und $\eta = \frac{\beta}{\beta'}$ Zahlen des Körpers $K(\sqrt{-5})$ sind, deren Norm gleich 1 ist. Wegen (7) müssen ξ, η konjugiert-komplexe Zahlen sein. Deswegen setzen wir

$$\xi = s_1 + s_2\sqrt{-5}, \quad \eta = s_1 - s_2\sqrt{-5},$$

wo s_1, s_2 rationale Zahlen sind. Werden diese als reduzierte Brüche geschrieben, so müssen die Nenner sowohl Teiler der Zahl a, als auch der Zahl b sein, wegen

$$\xi = \frac{\alpha\bar{\alpha}'}{a}, \quad \eta = \frac{\beta\bar{\beta}'}{b}.$$

Da $(a, b) = 1$ ist, so müssen s_1, s_2 ganze Zahlen, also (wegen $N\xi = N\eta = 1$) $s_1 = \pm 1$, $s_2 = 0$ sein. Aus $\alpha\beta = \alpha'\beta'$ folgt daher

$$\alpha' = \alpha, \ \beta' = \beta \text{ oder } \alpha' = -\alpha, \ \beta' = -\beta.$$

Unter den Produkten (6) sind also $\frac{1}{2} F(a) F(b)$ verschiedene, und alle haben die Norm ab. Nach (1) aber gibt es im ganzen ebensoviele ganze Zahlen, deren Norm gleich ab ist.

Um alle ganzen Zahlen von der gegebenen Norm n zu bestimmen, genügt es nach dem eben bewiesenen Satze diejenigen Zahlen α zu kennen, deren Norm gleich der Potenz g^k einer Primzahl g ist. Diese Zahlen bestimmen wir durch die weiteren zwei Hilfssätze.

Hilfssatz 8. *Alle ganzen Zahlen, deren Norm gleich p^k ist, sind unter den Zahlen*

$$\begin{cases} \gamma^k, \ p\gamma^{k-2}, \ \ldots, \ p^{\frac{k-1}{2}}\gamma \ \text{(für ungerades } k) \\ \pm\gamma^k, \ \pm p\gamma^{k-2}, \ \ldots, \ \pm p^{\frac{k}{2}-1}\gamma^2, \ \pm p^{\frac{k}{2}} \ \text{(für gerades } k) \end{cases} \tag{8}$$

enthalten; γ durchläuft hier die vier Zahlen $\pm\gamma$, $\pm\bar{\gamma}$, deren Norm gleich p ist.

B e w e i s. Alle Zahlen (8) haben die Norm p^k, und ihre Anzahl ist gleich der durch (1) bestimmten Zahl $F(p^k) = 2(k+1)$. Nach dem Hilfssatze 6 ist es auch leicht zu sehen, daß je zwei der Zahlen (8) verschieden sind.

Auf die gleiche Weise beweist man den

Hilfssatz 9. *Ist $N\gamma = q^2$, so stellen die Zahlen*

$$\gamma^k, \ q\gamma^{k-1}, \ q^2\gamma^{k-2}, \ \ldots, \ q^{k-1}\gamma, \ q^k \tag{9}$$

nebst ihren konjugierten und assoziierten Zahlen alle ganzen Zahlen der Norm q^{2k} dar.

Hilfssatz 10. *Es seien α und β einfache Zahlen, deren Normen Quadrate sind:*

$$N\alpha = A^2, \quad N\beta = B^2.$$

Dann ist $T(\alpha\beta)$ ein rationales Quadrat.

Beweis. Sind A, B teilerfremd, so ist $T(\alpha\beta) = 1$ nach dem Hilfssatz 5. Im Falle $(A, B) > 1$ seien g^a, g^b die höchsten Potenzen einer Primzahl g, die in A bzw. B aufgehen. Nach dem Hilfssatz 1 ist $g = p$ oder $g = q$.

Werden α und β auf Grund der Hilfssätze 7 — 9 als Produkt der Zahlen γ dargestellt, so enthält α im Falle $g = p$ einen Faktor γ^{2a} und β einen Faktor γ_1^{2b}, wo $\gamma_1 = \pm\gamma$ oder $\pm\bar{\gamma}$ und $N\gamma = p$ ist. $\alpha\beta$ enthält dann den bis auf das Vorzeichen bestimmten Faktor

$$\begin{cases} \gamma^{2(a+b)}, \text{ falls } \gamma_1 = \pm\gamma \text{ ist} \\ p^{2b}\,\gamma^{2(a-b)}, \text{ falls } \gamma_1 = \pm\bar{\gamma},\ a \geqq b \\ p^{2a}\,\gamma^{2(b-a)}, \text{ falls } \gamma_1 = \pm\bar{\gamma},\ b > a. \end{cases}$$

In jedem Fall ist dieser Faktor von der Gestalt $G^2\gamma'$, wo G ganz rational ist und γ' eine einfache Zahl, deren Norm gleich einer Potenz der Primzahl g ist. Dasselbe Ergebnis bleibt nach dem Hilfssatz 9 auch im Falle $g = q$ bestehen.

Wird derselbe Schluß für alle Primteiler der Zahl (A, B) wiederholt und werden danach noch diejenigen (einfachen) Faktoren γ hinzugefügt, die durch die höchsten Potenzen der übrigen Primteiler der Zahl A^2B^2 bestimmt werden, so erhält man den Satz durch wiederholte Anwendung des Hilfssatzes 5.

§ 3. Hilfssätze über ideale Zahlen.

Ist α eine ganze Zahl, die den Bedingungen

$$N\alpha = A^2, \tag{10}$$

$$T(\alpha) = e\,d^2 \tag{11}$$

genügt, so wird die eindeutig bestimmte Quadratwurzel $\tau = \sqrt{\alpha}$ eine *ideale Zahl* in bezug auf den Körper genannt.

$\sqrt{-1}$ ist die *ideale Einheit.* Die Zahlen τ und $\tau\sqrt{-1}$ werden *ideal assoziiert* genannt.

Jede ganze Körperzahl $\alpha = a + b\sqrt{-5}$ ist zugleich eine ideale Zahl $= \sqrt{x + y\sqrt{-5}}$ mit

$$x = a^2 - 5b^2, \quad y = 2ab. \tag{12}$$

Denn es ist $N(x + y\sqrt{-5}) = (N\alpha)^2$, und zufolge der Gleichungen (12) und

$$ay - 2bx = 10\,b^3$$

ist $(x, y) = e(a, b)^2$

Das Umgekehrte läßt sich natürlich nicht beweisen. Es gibt ideale Zahlen (beispielsweise $\sqrt{-1}$), die keine Zahlen des Körpers sind. Diese letzteren nennen wir *eigentlich ideale Zahlen.*

Hilfssatz 11. *Das Produkt der idealen Zahlen* $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$ *ist wieder eine ideale Zahl.*

Beweis. Die Zahl $\xi = \sqrt{\alpha\beta}$ genügt der Bedingung (10), denn es ist $N(\alpha\beta) = N\alpha \,.\, N\beta$ und $N\alpha = A^2$, $N\beta = B^2$.

Um auch die Bedingung (11) für die Zahl ξ nachzuprüfen, benutzen wir die Darstellung

$$\alpha = T(\alpha)\,\alpha_1, \quad \beta = T(\beta)\,\beta_1,$$

wo α_1, β_1 einfache Zahlen sind und $N\alpha_1 = A_1^2$, $N\beta_1 = B_1^2$ ist. Nach dem Hilfssatze 10 ist daher $T(\alpha_1\beta_1) = c^2$. Da nun

$$T(\alpha\beta) = T(\alpha)\,T(\beta)\,T(\alpha_1\beta_1)$$

und außerdem

$$T(\alpha) = ed^2, \quad T(\beta) = e_1 d_1^2,$$

so ist die Bedingung (11) für die Zahl ξ erfüllt.

Auf Grund des letzten Hilfssatzes nennen wir

$$\pi = \sqrt{\alpha} \tag{13}$$

eine *ideale Primzahl,* falls π nicht in ideale Faktoren (von der idealen Einheit abgesehen) zerlegt werden kann. Es ist unser nächstes Ziel, alle idealen Primzahlen zu bestimmen. Zu dem Zweck unterscheiden wir zwei Fälle, je nachdem in (13) $T(\alpha) > 1$ oder $T(\alpha) = 1$ ist.

1. Es sei zuerst $T(\alpha) = ed^2 > 1$. Da nun $\alpha = T(\alpha)\,\alpha_1$, wo $T(\alpha_1) = 1$ und $N\alpha_1 = A_1^2$, so ist die Zahl π in die idealen Faktoren

$$\pi = d \,.\, \sqrt{e} \,.\, \sqrt{\alpha_1}$$

zerlegbar. Damit π eine Primzahl ist, müssen zwei von diesen Faktoren den absoluten Betrag 1 haben. Wegen $T(\alpha) > 1$ ist aber nicht zugleich $|e| = |d| = 1$, und es sind nur die Fälle $|d| = |\alpha_1| = 1$ und $|e| = |\alpha_1| = 1$ zu untersuchen. Die erste dieser Voraussetzungen führt uns zu den idealen Primzahlen

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt{5}, \tag{14}$$

von denen die letzte zu der Körperzahl $\sqrt{-5}$ assoziiert ist.

Ist im Falle der zweiten Voraussetzung ($|e| = |\alpha_1| = 1$) π unzerlegbar, so muß d eine von 2 und 5 verschiedene Primzahl sein. Wäre d^2 durch die Form $x^2 + 5y^2$ eigentlich darstellbar, so gäbe es eine einfache Zahl α, die der Bedingung $\alpha\bar{\alpha} = d^2$ oder $N\alpha = d$ genügt; π wäre dann zusammengesetzt $= \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\bar{\alpha}}$. Für ein unzerlegbares π soll also d eine Primzahl r sein. Die Zahlen

$$\pi = r \tag{15}$$

sind also ideale und zugleich auch rationale Primzahlen.

2. Es sei nun $T(\alpha) = 1$ und folglich (nach dem Hilfssatz 1) $N\alpha = (PQ)^2$. Wird die Zahl α durch Potenzen der einfachen Zahlen γ aus den Hilfssätzen 8, 9 dargestellt, so gelangt man auch zu einer Zerlegung der Zahl π. Die unzerlegbaren π haben also die Gestalt

$$\pi = \sqrt{\gamma^k},$$

wo $N\gamma = p$ oder q^2 und k eine möglichst kleine Zahl $\geqq 1$ ist. Damit die Bedingung (10) erfüllt wäre, muß im ersten Falle ($N\gamma = p$) $k = 2$ sein; im zweiten Falle ($N\gamma = q^2$) genügt schon $k = 1$. Es gibt also außer (14) und (15) noch die idealen Primzahlen

$$\pi = \sqrt{\gamma} \quad (N\gamma = q^2) \tag{16}$$

und

$$\pi = \gamma \quad (N\gamma = p) \tag{17}$$

In beiden Fällen sind γ einfache Zahlen (also gewiß nicht rationale), von denen jede vier Werte ($\pm\gamma$, $\pm\bar{\gamma}$) annehmen kann.

Diese Überlegungen beweisen den

Hilfssatz 12. *Jede eigentlich ideale Primzahl (in bezug auf den Körper) ist ideal assoziiert zu einer der Zahlen*

$$\sqrt{2}, \sqrt{\gamma}, \sqrt{\bar{\gamma}}, \tag{18}$$

wo γ eine einfache Zahl mit $N\gamma = q^2$ ist.

§ 4. Fundamentalsatz der Arithmetik der idealen Zahlen.

Der Satz lautet: *Die Zerlegung jeder idealen Zahl in ideale Primzahlen ist (von der Reihenfolge der Faktoren und den ideal assoziierten Faktoren abgesehen) eindeutig.*

Die Hauptschwierigkeit besteht in dem Beweise des Analogons zu dem bekannten Hilfssatz aus der Theorie der rationalen Zahlen:

Ist das Produkt ab durch eine Primzahl g teilbar, so ist wenigstens einer der Faktoren durch g teilbar. Aus diesem Analogon folgt dann der Fundamentalsatz auf die gleiche Weise, wie es im Fall der Körper $K(\sqrt{-1})$ oder $K(\sqrt{-3})$ geschieht[3]. Für den Körper $K(\sqrt{-5})$ gilt dieser Hilfssatz nicht und zugleich auch nicht der Fundamentalsatz für Primzahlen des Körpers. Es gilt jedoch der

Hilfssatz 13. *Ist das Produkt der idealen Zahlen*

$$\sqrt{\alpha}\,\sqrt{\beta}$$

durch die Primzahl π teilbar, so ist wenigstens ein Faktor durch π teilbar.

Die Teilbarkeit der idealen Zahlen wird wie üblich definiert: Die Zahl τ ist durch die Zahl τ_1 teilbar, falls es eine ideale Zahl τ_2 gibt, die der Gleichung $\tau = \tau_1 \tau_2$ genügt.

Beweis. Die möglichen Formen der Zahl π sind nach § 3

$$\sqrt{2},\ \sqrt{5},\ r,\ \sqrt{a+b\sqrt{-5}},$$

wo $a^2+5b^2=p^2$ oder q^2 und $b \neq 0$ ist. Diesen Fällen entsprechend setzen wir

$$g = \begin{cases} 2 & \text{falls } \pi = \sqrt{2} \\ 5 & \text{falls } \pi = \sqrt{5} \\ r^2 & \text{falls } \pi = r \\ p^2 \text{ bzw. } q^2 & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Ist eine der Zahlen $T(\alpha)$, $T(\beta)$ durch g teilbar, so folgt der Satz unmittelbar. Denn es besteht, wenn $\alpha = g\alpha_1$ gesetzt wird und $\sqrt{\alpha_1}$ den Bedingungen einer idealen Zahl genügt, die Gleichung

$$\sqrt{\alpha} = \sqrt{g}\,.\,\sqrt{\alpha_1} = \begin{cases} \pi\,.\sqrt{\alpha_1} & \text{für } \pi = \sqrt{2},\ \sqrt{5},\ r \\ \pi\,.\,\pi\,.\sqrt{\alpha_1} & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Diese Bemerkung genügt, um den Satz für $\pi = \sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, r zu beweisen. Denn aus der Voraussetzung

$$\sqrt{\alpha}\,.\,\sqrt{\beta} = \pi\sqrt{\delta} \tag{19}$$

(wo $\sqrt{\delta}$ für eine ideale Zahl gesetzt ist) folgt die Gleichung

$$N\alpha\,.\,N\beta = g^2\,.\,N\delta.$$

Einer der Faktoren zur Linken, sagen wir $N\alpha$, ist dann durch g teilbar. Da $g = 2$, 5 oder r^2 und $N\alpha = A^2$ ist, so muß nach dem

[3] Vgl. dazu z. B. E. Landau (2) S. 5—22.

Hilfssatz 1 und (11) auch $T(\alpha)$ durch g teilbar sein. Aus dem Bewiesenen folgt dann $\pi \mid \alpha$.

Wir betrachten nun den Fall

$$\pi = \sqrt{\gamma},$$

$$\gamma = a + b\sqrt{-5},\ T(\gamma) = 1,\ N\gamma = a^2 + 5b^2 = p^2,$$

vorausgesetzt, daß weder $T(\alpha)$ noch $T(\beta)$ durch p^2 teilbar ist. Wegen $T(\alpha) = ed^2$, $T(\beta) = e_1 d_1^2$ ist dieses gleichbedeutend mit der Bedingung, daß die Zahlen $T(\alpha)$, $T(\beta)$ *zu p teilerfremd sind.*

Setzen wir in (19)

$$\alpha = x_1 + y_1\sqrt{-5},\ \beta = x_2 + y_2\sqrt{-5},\ \delta = u + v\sqrt{-5},$$

$$X = x_1 x_2 - 5y_1 y_2,\ Y = x_1 y_2 + x_2 y_1, \tag{20}$$

so folgen die Beziehungen

$$X = au - 5bv,$$
$$Y = av + bu,$$

woraus

$$\begin{aligned} -bX + aY &= p^2 v, \\ aX + 5bY &= p^2 u. \end{aligned} \tag{21}$$

Die erste der Formeln (21) wird nun als Kongruenz $bX - aY \equiv 0 \pmod{p^2}$ geschrieben und darin die Werte (20) für X, Y gesetzt. Dann wird noch mit b multipliziert und das Ergebnis zu der Kongruenz $(a^2 + 5b^2)y_1 y_2 \equiv 0 \pmod{p^2}$ addiert. So gelangt man zu der Formel

$$(ay_1 - bx_1)(ay_2 - bx_2) \equiv 0 \pmod{p^2}. \tag{22}$$

Unser nächstes Ziel ist zu beweisen, daß ein Klammerausdruck auf der linken Seite der letzten Formel durch p^2 teilbar ist. Zu dem Zweck setzen wir das Entgegengesetzte voraus. Dann ist jeder Klammerausdruck durch p teilbar, also auch

$$ay_1 - bx_1 \equiv 0 \pmod{p}$$

oder

$$ay_1 \equiv bx_1 \pmod{p}.$$

Durch Quadrieren erhalten wir hieraus die Kongruenzen

$$a^2 y_1^2 - 2abx_1 y_1 + b^2 x_1^2 \equiv 0 \pmod{p^2} \tag{23}$$

und

$$b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Aus der letzteren folgt, wegen $-a^2 y_1^2 \equiv 5 b^2 y_1^2 \pmod p$,

$$b^2 (x_1^2 + 5 y_1^2) \equiv 0 \pmod p$$

oder

$$x_1^2 + 5 y_1^2 \equiv 0 \pmod p. \tag{24}$$

Wegen $x_1^2 + 5 y_1^2 = A^2$ ist es gestattet, in der letzten Kongruenz mod p^2 statt mod p zu setzen. Zugleich gilt dann auch die Kongruenz

$$-b^2 x_1^2 - 5 b^2 y_1^2 \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

Wird diese zu (23) addiert, so entsteht die Kongruenz

$$(a^2 - 5 b^2) y_1^2 - 2 a b x_1 y_1 \equiv 0 \pmod{p^2}$$

oder

$$y_1 \{(a^2 - 5 b^2) y_1 - 2 a b x_1\} \equiv 0 \pmod{p^2}. \tag{25}$$

Weiter unterscheiden wir zwei Fälle, je nachdem y_1 durch p teilbar oder nicht teilbar ist.

1. Es sei $p \mid y_1$. Wegen (24) ist dann auch $p \mid x_1$ und zugleich $p \mid T(\alpha)$, was einer früheren Voraussetzung widerspricht.

2. Es ist also y_1 zu p teilerfremd. Wegen (25) ist dann

$$2 a b x_1 \equiv (a^2 - 5 b^2) y_1 \pmod{p^2},$$

$$2 a (a y_1 - b x_1) = 2 a^2 y_1 - 2 a b x_1 \equiv 2 a^2 y_1 - (a^2 - 5 b^2) y_1 =$$

$$= y_1 (a^2 + 5 b^2) \equiv 0 \pmod{p^2}$$

und zugleich

$$a y_1 - b x_1 \equiv 0 \pmod{p^2}. \tag{26}$$

Damit ist es bewiesen, daß ein Klammerausdruck in (22) durch p^2 teilbar ist. Man kann vorraussetzen, daß dieses der erste ist. Dann ist (26) wahr und daraus folgt

$$a (a x_1 + 5 b y_1) \equiv -5 b^2 x_1 + 5 a b y_1 = 5 b (a y_1 - b x_1) \equiv 0 \pmod{p^2},$$

d. h.

$$a x_1 + 5 b y_1 \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

Es gibt also ganze Zahlen k, l, die den Gleichungen

$$\begin{aligned} a x_1 + 5 b y_1 &= p^2 k \\ -b x_1 + a y_1 &= p^2 l \end{aligned} \tag{27}$$

genügen. Gesetzt $\alpha_1 = k + l \sqrt{-5}$, ist wegen

$$(a+b\sqrt{-5})(k+l\sqrt{-5}) = ak-5bl+(al+bk)\sqrt{-5}$$
$$= a\frac{ax_1+5by_1}{p^2} - 5b\frac{-bx_1+ay_1}{p^2} +$$
$$+\frac{a(-bx_1+ay_1)+b(ax_1+5by_1)}{p^2}\sqrt{-5}$$
$$= x_1+y_1\sqrt{-5}$$

oder

$$\gamma\alpha_1 = \alpha \tag{28}$$

auch

$$\sqrt{\alpha} = \pi\sqrt{\alpha_1}.$$

Es bleibt nur noch zu zeigen, daß $\sqrt{\alpha_1}$ den Bedingungen einer idealen Zahl genügt. In der Tat ist erstens nach (28)

$$N\alpha_1 = \frac{N\alpha}{N\gamma} = \left(\frac{A}{p}\right)^2.$$

Zweitens sieht man aus der Formel (27) und deren Umgestaltung

$$\begin{cases} ak-5bl = x_1 \\ bk+al = y_1, \end{cases}$$

daß sowohl

$$(x_1, y_1) \mid p^2k, \ (x_1, y_1) \mid p^2l$$

als auch

$$(k, l) \mid x_1, \ (k, l) \mid y_1.$$

Anders geschrieben:

$$(k, l) \mid (x_1, y_1) \mid p^2(k, l).$$

Da nach der Voraussetzung $(x_1, y_1) = T(\alpha)$ zu p teilerfremd ist, so folgt hieraus

$$(k, l) \mid (x_1, y_1) \mid (k, l)$$

oder

$$T(\alpha_1) \mid T(\alpha) \mid T(\alpha_1).$$

Das letztere ist aber mit $T(\alpha_1) = T(\alpha)$ gleichbedeutend.

Damit ist bewiesen, daß $\sqrt{\alpha_1}$ den Bedingungen (10), (11) genügt; $\sqrt{\alpha}$ ist also durch π teilbar.

Der Beweis benutzt in bezug auf die Primzahl p nur die Voraussetzung, daß p^2 durch die Form x^2+5y^2 eigentlich darstellbar sei. Es bleibt also auch im Falle der idealen Primzahl $\pi = \sqrt{\gamma}$, $N\gamma = q^2$ bestehen.

§ 5. Die unzerlegbaren Zahlen des Körpers.

Wir bestimmen nun vom Standpunkt der idealen Arithmetik die unzerlegbaren Körperzahlen. Zu dem Zweck beweisen wir zuerst die folgenden zwei Hilfssätze.

Hilfssatz 14. *Die Anzahl der eigentlich idealen Faktoren einer Körperzahl α ist eine gerade Zahl.*

Beweis. Da eine gerade Potenz einer eigentlich idealen Zahl eine Zahl des Körpers ist, sei es uns gestattet, uns auf solche Zahlen α zu beschränken, deren Faktorenzerlegung nur die ersten Potenzen eigentlich idealer Primzahlen enthält:

$$\alpha = x + y\sqrt{-5} = \pi_1 \pi_2 \ldots \pi_k.$$

Nach dem Multiplizieren mit den konjugiert-komplexen Faktoren folgt hieraus die Gleichung

$$x^2 + 5y^2 = g_1 g_2 \ldots g_k, \tag{29}$$

wo

$$g_l = \begin{cases} 2 \text{ für } \pi_l = \sqrt{2} \\ q_l \text{ für } \pi_l = \sqrt{\gamma},\ N\gamma = q_l^2. \end{cases}$$

Damit die Gleichung (29) bestehen könne, ist es nach dem Hilfssatz 3 notwendig, daß k eine gerade Zahl wäre. Daß diese Bedingung im gewissen Sinne auch hinreichend ist, zeigt der folgende

Hilfssatz 15. *Jedes Produkt, das eine gerade Anzahl der eigentlich idealen Primzahlen* (18) *enthält, ist entweder eine Körperzahl oder zu einer solchen ideal assoziiert.*

Beweis. Für jedes Paar q_1, q_2 der Primzahlen q gibt es nach dem Hilfssatze 2 acht Darstellungen

$$q_1 q_2 = x^2 + 5y^2,$$

von denen jede eine Zahl $\alpha = x + y\sqrt{-5}$ des Körpers bestimmt. Diese sind Produkte der idealen Primfaktoren

$$\pi_1 = \sqrt{\gamma_1},\ \pi_2 = \sqrt{\gamma_2}$$
$$(N\gamma_1 = q_1^2,\ N\gamma_2 = q_2^2).$$

Es gibt 4 verschiedene π_1 und ebensoviele π_2, so daß im ganzen 16 Produkte $\pi_1 \pi_2$ entstehen. Diese lassen sich in 8 Paare ideal assoziierter Zahlen verbinden. Da jedes Paar höchstens eine Körperzahl enthält und alle 8 Paare 8 dieser Zahlen enthalten, so gibt es in jedem Paare genau eine Körperzahl. Jedes Produkt $\pi_1 \pi_2$ ist also entweder eine Zahl α des Körpers, oder es unterscheidet sich von α durch den Faktor $\sqrt{-1}$.

Eine gleiche Überlegung zeigt, daß dasselbe Ergebnis auch im Falle der Faktoren

$$\pi_1 = \sqrt{2},\ \pi_2 = \sqrt{\gamma}\ (N\gamma = q^2)$$

bestehen bleibt. Zum Beweise benutzen wir π_1 nebst seiner assoziierten Zahl $\sqrt{-2}$. Es gibt dann im ganzen 8 verschiedene Produkte $\pi_1 \pi_2$, und 4 von diesen sind Zahlen des Körpers.

Eine unmittelbare Folge hieraus ist der

Hilfssatz 16. *Alle unzerlegbaren Zahlen des Körpers sind*

1) *die idealen Primzahlen* $\sqrt{-5}$, r, γ $(N\gamma = p)$, *sowie*

2) *das Produkt (ev. das ideal-assoziierte) zweier gleicher oder verschiedener eigentlich idealer Primzahlen* $\sqrt{2}$, $\sqrt{\gamma}$ $(N\gamma = q^2)$.

§ 6. Hilfssätze über normale Zahlen.

Wir sind nun imstande den Grund der vieldeutigen Primfaktorenzerlegung im Körper $K(\sqrt{-5})$ zu ermitteln. Enthält eine Zahl α des Körpers die eigentlich idealen Primzahlen in solcher Anzahl, die es gestattet sie auf s verschiedene Arten zu paaren, so hat auch α s verschiedene Primfaktorenzerlegungen im Körper. So gibt es z. B. für die Zahl

$$\alpha = (\sqrt{2})^2 (\sqrt{2 + \sqrt{-5}})^2$$

die zwei verschiedenen Zerlegungen

$$\alpha = (\sqrt{2}\sqrt{2})(\sqrt{2+\sqrt{-5}}\sqrt{2+\sqrt{-5}}) = 2\,(2+\sqrt{-5})$$

und

$$\alpha = (\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{-5}})(\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{-5}}) =$$
$$= (\sqrt{4+2\sqrt{-5}})^2 = -(\sqrt{-4-2\sqrt{-5}})^2 = -(1-\sqrt{-5})^2.$$

Hilfssatz 17. *Damit die Zahl* α *normal ist, ist es notwendig und hinreichend, dass entweder*

I. *die (bis auf assoziierte Faktoren bestimmte) ideale Primfaktorenzerlegung der Zahl α höchstens eine einzige Zahl* (18) *(in gerader Potenz) oder*

II. α *nur zwei verschiedene Zahlen* (18), *und zwar eine von ihnen in erster Potenz enthält.*

Beweis. Ist keine der Bedingungen I, II erfüllt, so enthält α entweder

III. die Quadrate zweier nichtassoziierter Faktoren π_1, π_2 der Gestalt (18), die sich dann auf zweierlei Weise zu Paaren binden lassen:

$$(\pi_1 \pi_1)(\pi_2 \pi_2), \quad (\pi_1 \pi_2)(\pi_1 \pi_2),$$

oder

IV. zwei erste Potenzen und ein Quadrat der idealen Primzahlen (18); dann gibt es zwei verschiedene Verbindungen

$$(\pi_1 \pi_2)(\pi_3 \pi_3), \quad (\pi_1 \pi_3)(\pi_2 \pi_3),$$

oder endlich

V. erste Potenzen vier nichtassoziierter Faktoren (18); diese lassen sich dann auf dreierlei Weise verbinden:

$$(\pi_1 \pi_2)(\pi_3 \pi_4), \quad (\pi_1 \pi_3)(\pi_2 \pi_4), \quad (\pi_1 \pi_4)(\pi_2 \pi_3).$$

Ist also weder die Bedingung I noch II erfüllt, so gibt es wenigstens zwei verschiedene Zerlegungen der Zahl α in unzerlegbare Zahlen des Körpers. Alle normalen Zahlen des Körpers sind also unter I, II enthalten.

Der Beweis zeigt zugleich, daß man *Zahlen α konstruieren kann, für die die Anzahl der verschiedenen Zerlegungen in unzerlegbare Zahlen des Körpers jede beliebige Grenze überschreitet.*

Nun stellen wir die Frage, welches die ganzen rationalen und normalen Zahlen in bezug auf den Körper $K(\sqrt{-5})$ sind. Es ist leicht zu sehen, daß jedes solches n einer der folgenden zwei Bedingungen genügt:

Entweder enthält die rationale Primfaktorenzerlegung der Zahl n kein q. Im Falle eines ungeraden n sind dann alle idealen Faktoren von n uneigentlich; für gerades n liegt aber der Fall I vor.

Oder n ist eine ungerade Zahl, deren rationale Primfaktorenzerlegung nur die erste Potenz eines einzigen q enthält. Dieses entspricht dem Falle II.

Jede andere Zahl n enthält entweder zwei gleiche oder verschiedene Primzahlen q, was dem Falle III bzw. V entspricht, oder sie enthält nur ein einziges q, aber noch die Primzahl 2; dann liegt der Fall IV vor.

Damit ist bewiesen der

Hilfssatz 18. *Die ganzen rationalen und normalen Zahlen des Körpers* $K(\sqrt{-5})$ *sind*

$$n = 2^a 5^b PR$$

und (30)

$$n = 5^b PqR$$
$$(a, b \geqslant 0).$$

Um nun einen entsprechenden Satz zu beweisen, der die Anzahl $A(n)$ der normalen Körperzahlen α mit gegebener Norm $N\alpha = n$ bestimmt, führen wir zuerst einige Bezeichnungen ein.

α_1 bezeichne in diesem Paragraphen eine ganze Zahl, deren ideale Primfaktoren alle uneigentlich sind. Zu jedem gegebenen $N\alpha_1 = = A_1 = 5^b PR_1^2$ gibt es nach (2) $F(A_1) = 2d(P)$ verschiedene ganze Zahlen α_1.

π, π_1 bezeichne beliebige zwei von $\sqrt{2}$ verschiedene nichtassoziierte eigentlich ideale Primzahlen.

Die ganzen Zahlen, deren ideale Primfaktoren alle eigentlich sind, bezeichnen wir mit α_2. Es gilt dann der

Hilfssatz 19. *Es sei* $c = c(A_2)$ *die Anzahl der normalen Lösungen der Gleichung*

$$\alpha_2 \bar{\alpha}_2 = A_2. \tag{31}$$

Für

$$A_2 = q^{2k},\ 2q^{2k-1},\ qq_1^{2k-1}\ (k \geqslant 1)$$

ist dann

$$0 < c \leqslant 8. \tag{32}$$

Beweis. Im Falle $A_2 = q^{2k} = \pi^{2k}\bar{\pi}^{2k}$ ist nach dem Hilfssatz 17 die Zahl $\alpha_2 = \pi^l \bar{\pi}^h$ $(h + l = 2k)$ dann und nur dann normal, wenn der kleinste der Exponenten h, l gleich 0 oder 1 ist. Betrachten wir die Zahl π als vierwertig, so können wir uns auf den Fall $h \leqslant l$ beschränken. Da $h = 0$ höchstens vier verschiedene $\alpha_2 = \pi^{2k} = = (a + b\sqrt{-5})^k$ liefert und dieselbe Abschätzung auch im Falle $h = 1$, $\alpha_2 = \bar{\pi}\pi^{2k-1} = (\pi\bar{\pi})(\pi^2)^{k-1}$ gilt, so ist der Satz für $A_2 = q^{2k}$ bewiesen.

Es sei weiter $A_2 = 2q^{2k-1} = (\sqrt{2})^2 (\pi\bar{\pi})^{2k-1}$. Ist nun $\alpha_2 = \sqrt{2}\pi^l\bar{\pi}^h$ $(h + l = 2k - 1)$ normal, so muß $hl = 0$ sein, was höchstens vier verschiedene $\alpha_2 = (\sqrt{2}\pi)(\pi^2)^{k-1}$ liefert[4].

Nun setzen wir $A_2 = q q_1^{2k-1} = \pi\bar{\pi}(\pi_1\bar{\pi}_1)^{2k-1}$. Nach dem schon betrachteten Fall $A_2 = q^{2h}$ können wir π, π_1 als nichtkonjugierte Zahlen (also $q_1 \neq q$) voraussetzen. Die normalen Lösungen der Gleichung (31) sind dann die Zahlen $\alpha_2 = (\pi\pi_1)(\pi_1^2)^{k-1}$, unter denen höchstens 8 verschiedene sind[4].

Damit ist der Satz bewiesen.

Vorausgesetzt, daß $\alpha = \alpha_1\alpha_2$ normal ist, bestimmen wir die Norm

$$N\alpha = n = A_1 A_2$$

und danach alle zu diesem n gehörigen normalen Zahlen α.

Nach dem Hilfssatz 17 ist α_2 gleich einer der Zahlen

$$\alpha_2 = 2^h,\quad \pi(\sqrt{2})^{2k-1},\quad \sqrt{2}\pi^{2k-1},\quad \pi\pi_1^{2k-1},\quad \pi^{2k},$$
$$(h \geqslant 0,\ k \geqslant 1)$$

die wir jede einzeln betrachten.

Es sei zuerst $\alpha_2 = 2^h (h \geqslant 0)$. Dann ist die Zahl $n = 2^{2h} A_1$ normal, und zugleich ist auch jedes α mit $\alpha\bar{\alpha} = n$ eine normale Zahl. Ihre Anzahl $F(n)$ ist durch (2) bestimmt.

Im Falle $\alpha_2 = (\sqrt{2})^{2k-1}\pi (k \geqslant 1)$ ist $n = 2^{2k-1} q A_1$. Die Gleichung $n = \alpha\bar{\alpha}$ kann nur durch die Zahlen $\alpha = 2^{k-1}(\sqrt{2}\pi)\alpha_1$ gelöst werden, die nach dem Hilfssatz 17 normal sind. Die Gesamtzahl aller Lösungen $F(n)$ ist durch (3) bestimmt.

Die Voraussetzung $\alpha_2 = \pi^{2k}$ führt uns zu der Zahl $n = q^{2k} A_1$. Zugleich mit $\alpha = \alpha_1\alpha_2$ ist auch die Zahl α_2 normal, und zu jedem der (nach dem Hilfssatz 19 bestimmten) c normalen α_2 mit $\alpha_2\bar{\alpha}_2 = q^{2k}$ gibt es $F(A_1)$ verschiedene Zahlen α_1. Deswegen gibt es (vgl. den Hilfssatz 7) genau $\frac{1}{2}\, cF(A_1)$ verschiedene normale Zahlen, deren Norm gleich $n = q^{2k} A_1$ ist.

Dasselbe Resultat bleibt auch in den zwei übrigen Fällen bestehen, wo

$$\alpha_2 = \sqrt{2}\pi^{2k-1},\quad n = 2q^{2k-1} A_1,$$

bzw.

$$\alpha_2 = \pi\pi_1^{2k-1},\quad n = q q_1^{2k-1} A_1\ (k \geqslant 1).$$

---

[4] Vgl. den Beweis des Hilfssatzes 15.

Alles zusammen beweist den

Hilfssatz 20. *Die Anzahl der verschiedenen normalen* α *mit* $N\alpha = n$ *ist gleich*

$$A(n) = \begin{cases} 2d(P) & \text{für } n = 2^{2a} 5^b P R_1^2 \\ 4d(P) & \text{für } n = 2^{2a+1} 5^b P q R_1^2 \\ cd(P) \begin{cases} \text{für } n = 5^b P q^{2k} R_1^2 \\ \text{für } n = 2 . 5^b P q^{2a+1} R_1^2 \\ \text{für } n = 5^b P q q_1^{2a+1} R_1^2 \end{cases} \end{cases} \tag{33}$$

$$(a,\ b \geqslant 0,\ k \geqslant 1,\ 0 < c \leqslant 8).$$

Für alle andern n *ist* $A(n) = 0$.

§ 7. Hilfssätze aus der Theorie der Primzahlenverteilung.

Einige Bezeichnungen werden von nun an geändert. Weiterhin ist x eine reelle Veränderliche > 0; $c, c_1, c_2, \ldots$ sind positive Konstanten. g durchläuft alle natürlichen Primzahlen.

In Übereinstimmung mit den Bezeichnungen von *S.* 24 durchlaufen p, q und r alle Primzahlen gewisser arithmetischer Progressionen der Differenz $d = 20$. q_1 verläuft die Primzahlen $q \equiv 3 \pmod{20}$, q_2 die Primzahlen $q \equiv 7 \pmod{20}$. h bezeichne die Anzahl der reduzierten Klassen mod d; in dem betrachteten Falle ist also $h = 8$.

Die analytischen Funktionen $f_1(s), f_2(s), \ldots$ der komplexen Veränderlichen $s = \sigma + it$ werden wie folgt definiert:

$$f_1(s) = 1 + 2^{-s} + 2^{-2s} + \ldots = \frac{1}{1 - 2^{-s}}\ (\sigma > 0),$$

$$f_2(s) = 1 + 5^{-s} + 5^{-2s} + \ldots = \frac{1}{1 - 5^{-s}}\ (\sigma > 0),$$

$$\left.\begin{aligned} P(s) &= \prod_p (1 + p^{-s} + p^{-2s} + \ldots) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}\ (\sigma > 1), \\ R(s) &= \prod_r (1 + r^{-2s} + r^{-4s} + \ldots) = \prod_r \frac{1}{1 - r^{-2s}} \left(\sigma > \frac{1}{2}\right), \\ Q_1(s) &= \prod_{q_1} (1 + q_1^{-s} + q_1^{-2s} + \ldots) = \prod_{q_1} \frac{1}{1 - q_1^{-s}}\ (\sigma > 1), \\ Q_2(s) &= \prod_{q_2} (1 + q_2^{-s} + q_2^{-2s} + \ldots) = \prod_{q_2} \frac{1}{1 - q_2^{-s}}\ (\sigma > 1), \end{aligned}\right. \tag{34}$$

$$\mathfrak{F}_1(s) = f_1(s) f_2(s) (P(s))^2 Q_1(s) R(s),$$
$$\mathfrak{F}_2(s) = f_1(s) f_2(s) (P(s))^2 Q_2(s) R(s).$$

Wird die Entwicklung der Funktionen $\mathfrak{F}_k (k = 1, 2)$ als die für $\sigma > 1$ konvergierende Dirichletsche Reihe

$$\mathfrak{F}_k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Theta_k(n)}{n^s}$$

geschrieben, so gilt für die Koeffizienten $\Theta_k(n)$ der folgende

Hilfssatz 21. *Abgesehen von den Zahlen*

$$n = 5^b P q q_1^{2a+1} R_1^2, \quad q \not\equiv q_1 \pmod{20},$$

ist für alle andern durch (33) *bestimmten* n *wenigstens ein* $\Theta_k(n)$ *von Null verschieden.*

Ist $\Theta_k(n)$ *für* $n = 2^a 5^b PQR$ *von Null verschieden, so ist es gleich* $d(P)$.

Der Beweis wird durch Multiplikation der einzelnen Faktoren von $\mathfrak{F}_k$ erreicht. Ähnliche Beispiele findet man z. B. bei Hardy and Wright (4) Ch. XVII.

Wir bezeichnen nun mit λ eine durch die Funktion $\mathfrak{F}_k(s)$ folgendermaßen bestimmte ganze rationale Zahl. Es wird die Anzahl der mod d nichtkongruenten Primzahlen über diejenigen Faktoren (34) der Funktion $\mathfrak{F}_k(s)$ summiert, die für $s = 1$ divergieren; die Multiplizität des Faktors $P(s)$ wird in Betracht gezogen. Es ist also bei unserer Definition der Primzahlen p, q, r sowohl im Falle $\mathfrak{F}_1$ wie auch $\mathfrak{F}_2$ die Zahl λ gleich 5.

Unter diesen Voraussetzungen besteht der

Hilfssatz 22. *Wird für* $k = 1, 2$

$$\sum_{n \leqq x} \Theta_k(n) = A_k(x)$$

gesetzt, so ist für ein von x *unabhängiges* $c > 0$

$$A_k(x) \sim c x \log^{\frac{\lambda}{h} - 1} x \quad (x \to \infty). \tag{35}$$

Den Beweis eines derartigen Satzes für eine andere Funktion $\mathfrak{F}(s)$ findet man ausführlich bei Landau (3) S. 641—669. Auf dieselbe Weise findet man eine asymptotische Formel für die Anzahl der Zahlen $2^a 5^b PR \leqq x$, die wir nur als eine Ungleichung des folgenden Hilfssatzes benutzen werden.

Hilfssatz 23. *Wird die Anzahl der Zahlen* $l = 2^a 5^b PR \leqslant x$ $(a, b \geqslant 0)$ *durch* $\varphi(x)$ *bezeichnet, so gibt es positive Konstanten* c_1, c_2, *für die*

$$\varphi(x) < \begin{cases} c_1 x, \text{ wenn } 1 \leqslant x \leqslant x_0 \\ c_2 \dfrac{x}{\sqrt[4]{\log x}}, \text{ wenn } x > x_0. \end{cases} \tag{36}$$

Hilfssatz 24. *Durchläuft* g *die natürlichen Primzahlen, so ist für ein konstantes* B

$$\sum_{g \leqslant x} \frac{1}{g} = \log\log x + B + O\left(\frac{1}{\log x}\right). \tag{37}$$

Den Beweis findet man z. B. bei Landau (3) S. 100—103.

Hilfssatz 25. *Es sei* ε *eine Funktion von* x, *die für alle grossen* x *den Ungleichungen*

$$c_3 \log^{-1} x < \varepsilon < \frac{1}{2}$$

genügt. Dann ist

$$\sum_{x^{1-\varepsilon} < g \leqslant x} \frac{1}{g} = O(\varepsilon). \tag{38}$$

Beweis. Wegen (37) ist

$$\sum_{x^{1-\varepsilon} < g \leqslant x} \frac{1}{g} = \log\log x - \log\log x^{1-\varepsilon} + O(\log^{-1} x) =$$

$$= -\log(1-\varepsilon) + O(\log^{-1} x) = O(\varepsilon).$$

§ 8. Satz über die Anzahl der normalen natürlichen Zahlen.

Die Anzahl der normalen natürlichen Zahlen $n \leqslant x$ sei mit $\nu(x)$ bezeichnet. Da nach dem Hilfssatz 18 jedes normale $n \leqslant x$ entweder eine der $\varphi(x)$ Zahlen l des Hilfssatzes 23 ist, oder die Form lq hat, so ist es offenbar, daß

$$\nu(x) = \varphi(x) + \sum_{q \leqslant x} \varphi\left(\frac{x}{q}\right).$$

Zum Abschätzen der letzten Summe setzen wir

$$\varepsilon = \frac{(\log\log x)^{\frac{4}{5}}}{(\log x)^{\frac{1}{5}}} \tag{39}$$

und wählen x groß genug, damit $\varepsilon < \frac{1}{2}$ wird; dann sind die Voraussetzungen des Hilfssatzes 25 erfüllt. Zerlegen wir nun die Summe

$$S = \sum_{q \leqslant x} \varphi\left(\frac{x}{q}\right) = \sum_{1 \leqslant \frac{x}{q} < x^{\varepsilon}} + \sum_{x^{\varepsilon} \leqslant \frac{x}{q} < x} = S_1 + S_2,$$

und benutzen (36) mit $x_0 = x^{\varepsilon}$, so folgt nach (37), (38)

$$S_1 = \sum_{1 \leqslant \frac{x}{q} < x^{\varepsilon}} \varphi\left(\frac{x}{q}\right) < c_1 x \sum_{x^{1-\varepsilon} < q \leqslant x} \frac{1}{q} \leqslant c_1 x \sum_{x^{1-\varepsilon} < g \leqslant x} \frac{1}{g} = O(\varepsilon x),$$

$$S_2 = \sum_{x^{\varepsilon} \leqslant \frac{x}{q} < x} \varphi\left(\frac{x}{q}\right) < c_2 \frac{x}{\sqrt[4]{\log x^{\varepsilon}}} \sum_{q \leqslant x^{1-\varepsilon}} \frac{1}{q} \leqslant c_2 \frac{x}{\sqrt[4]{\varepsilon \log x}} \sum_{g \leqslant x} \frac{1}{g} =$$

$$= O\left(x \frac{\log \log x}{\sqrt[4]{\varepsilon \log x}}\right) = O(\varepsilon x).$$

Damit ist bewiesen der

Satz 1. *Wird* ε *durch* (39) *bestimmt, so kann die Anzahl* $\nu(x)$ *der normalen natürlichen Zahlen* $\leqslant x$ *des Körpers* $K(\sqrt{-5})$ *durch*

$$\nu(x) = O(\varepsilon x) \tag{40}$$

abgeschätzt werden.

§ 9. Satz über die Anzahl der normalen Körperzahlen.

Es sei $\nu_1(x)$ die Anzahl der normalen Zahlen α des Körpers, die der Bedingung $N\alpha \leqslant x$ genügen. Diejenigen unter diesen Zahlen α, deren Normen sich von $5^b P q_1 q_2^{2a+1} R_1^2$, $5^b P q_2 q_1^{2a+1} R_1^2$ unterscheiden, sind nach den Hilfssätzen 20, 21, 22 unter den

$$\psi(x) = 8\,(A_1(x) + A_2(x)) \sim c_4 x \log^{-\frac{3}{8}} x \;(x \to \infty)$$

Zahlen enthalten. Wir benutzen nur die Ungleichungen

$$\psi(x) < \begin{cases} c_5 x \text{ für } 1 \leqslant x \leqslant x_0 \\ c_6 \dfrac{x}{\log^{\frac{3}{8}} x} \text{ für } x > x_0. \end{cases} \tag{41}$$

Da durch $\psi(x)$ zu jedem $n = 5^b P q^{2a+1} R_1^2 \leqslant x$ gerade $8d(P) \geqslant \geqslant cd(P)$ Zahlen mitgezählt sind, die auf dieses n zurückgehen, so ist es offenbar, daß

$$\nu_1(x) \leqslant \psi(x) + \sum_{q \leqslant x} \psi\left(\frac{x}{q}\right).$$

Setzen wir

$$\varepsilon = \frac{(\log\log x)^{\frac{8}{11}}}{(\log x)^{\frac{3}{11}}}, \tag{42}$$

so sind für alle genügend großen x die Bedingungen des Hilfssatzes 25 erfüllt. Wir zerlegen nun die Summe

$$S = \sum_{q \leqslant x} \psi\left(\frac{x}{q}\right) = \sum_{1 \leqslant \frac{x}{q} < x^\varepsilon} + \sum_{x^\varepsilon \leqslant \frac{x}{q} < x} = S_1 + S_2$$

und benutzen (40) mit $x_0 = x^\varepsilon$. Dann folgt nach (37), (38)

$$S_1 = \sum_{1 \leqslant \frac{x}{q} < x^\varepsilon} \psi\left(\frac{x}{q}\right) < c_5 x \sum_{x^{1-\varepsilon} < q \leqslant x} \frac{1}{q} \leqslant c_5 x \sum_{x^{1-\varepsilon} < g \leqslant x} \frac{1}{g} = O(\varepsilon x),$$

$$S_2 = \sum_{x^\varepsilon \leqslant \frac{x}{q} < x} \psi\left(\frac{x}{q}\right) < c_6 \frac{x}{(\log x^\varepsilon)^{\frac{3}{8}}} \sum_{q \leqslant x^{1-\varepsilon}} \frac{1}{q} \leqslant c_6 \frac{x}{(\varepsilon \log x)^{\frac{3}{8}}} \sum_{g \leqslant x} \frac{1}{g} =$$

$$= O\, x \frac{\log\log x}{(\varepsilon \log x)^{\frac{3}{8}}} = O(\varepsilon x).$$

Es gilt also der

Satz 2. *Wird* ε *durch* (42) *bestimmt, so besteht für die Anzahl* $\nu_1(x)$ *der normalen Zahlen* α *des Körpers* $K(\sqrt{-5})$, *deren Normen nicht* x *überschreiten, die Abschätzung*

$$\nu_1(x) = O(\varepsilon x). \tag{43}$$

Da die Anzahl aller ganzen Zahlen α des Körpers $K(\sqrt{-5})$ mit $N\alpha \leqslant x$ als die Anzahl der Gitterpunkte in der Ellipse $u^2 + 5v^2 \leqslant x$, asymptotisch gleich $\frac{\pi}{\sqrt{5}} x$ ist, folgt hieraus das in der Einleitung formulierte Ergebnis über die Dichte der normalen Zahlen des Körpers.

Anmerkung. Begnügen wir uns mit etwas schwächer abnehmenden Werten von ε, so können die Beweise der Sätze 1, 2 direkt auf den des Hilfssatzes 22 reduziert werden. Zum Beweise des Satzes 1 benutzen wir dann die Funktionen

$$\mathfrak{F}_{11}(s) = f_1(s) f_2(s) P(s) \prod_{q_1} (1 + q_1^{-s}) \prod_{r} \frac{1}{1 - r^{-s}} = \sum \frac{\Theta_{11}(n)}{n^s} \quad (\sigma > 1)$$

$$\mathfrak{F}_{12}(s) = f_1(s) f_2(s) P(s) \prod_{q_2} (1 + q_2^{-s}) \prod_{r} \frac{1}{1 - r^{-s}} = \sum \frac{\Theta_{12}(n)}{n^s} \quad (\sigma > 1),$$

deren Entwicklungskoeffizienten $\Theta_{11}(n)$, $\Theta_{12}(n)$ nur die Werte 0 oder 1 annehmen können, und für alle n des Hilfssatzes 18 ist $\Theta_{11}(n) = 1$ oder $\Theta_{12}(n) = 1$ oder beides. Daraus folgt nach dem Hilfssatze 22 das Ergebnis (40) mit $\varepsilon = \log^{-\frac{1}{8}} x$.

Auf die gleiche Weise beweist man (43) mit $\varepsilon = \log^{-\frac{1}{4}} x$, wenn man die Funktionen $\mathfrak{F}_1(s)$, $\mathfrak{F}_2(s)$,

$$\mathfrak{F}_3(s) = f_1(s) f_2(s) (P(s))^2 R(s) \prod_{q_1} (1 + q_1^{-s}) \prod_{q_2} \frac{1 + q_2^{-s}}{1 - q_2^{-2s}} \quad (\sigma > 1),$$

$$\mathfrak{F}_4(s) = f_1(s) f_2(s) (P(s))^2 R(s) \prod_{q_2} (1 + q_2^{-s}) \prod_{q_1} \frac{1 + q_1^{-s}}{1 - q_1^{-2s}} \quad (\sigma > 1)$$

benutzt.

LITERATUR.

1. Dickson-Bodewig, Einführung in die Zahlentheorie (1931).
2. E. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie III. (1927).
3. E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen I., II. (1909).
4. G. H. Hardy and E. M. Wright, An Introduction to the Theory of Numbers (1938).
5. L. J. Mordell, Three Lectures on Fermat's last Theorem (1921. French edition 1929).

Der Fakultät vorgelegt den 30. Dez. 1941.

Pētījums par aritmētiku kvadrātiskā skaitļu laukā.

Kopsavilkums.

Šinī darbā apskatīts lauks $K(\sqrt{-5})$, kuŗa veselie skaitļi α tiek saukti par *normāliem*, ja tie laukā sadalāmi pirmreizinātājos viennozīmīgi, un par *anormāliem* pretējā gadījumā. 1. teorēma (§ 8) pierāda, ka laukā normālo dabisko skaitļu $n \leqslant x$ ir $O(\varepsilon x)$, kur ε dots ar formulu (39). 2. teorēma (§ 9) pierāda analogu rezultātu par lauka veselajiem skaitļiem α, kuŗu norma $\leqslant x$; tagad ε dots ar formulu (42), un tas ir mazāks kā iepriekšējā gadījumā. Citiem vārdiem teorēma izteic, ka *gandrīz visi lauka $K(\sqrt{-5})$ skaitļi ir anormāli.*

1. § minēts kvadrātisko formu teorijā pazīstams rezultāts par skaitļa n visu attēlojumu skaitu $F(n)$ formā $x^2 + 5y^2$ (2. lemma) un tā secinājumi.

2. § definēta veselā skaitļa $\alpha = a + b\sqrt{-5}$ funkcija $T(\alpha)$, kas ir skaitļu a, b lielākais kopīgais dalītājs; ja $T(\alpha) = 1$, α sauc par *vienkāršu* skaitli. Galvenais rezultāts (10. lemma) izteic, ka $T(\alpha\beta)$ ir racionāls kvadrāts, ja α, β ir vienkārši skaitļi, kuŗu normas kvadrāti.

3. § definē *ideālo skaitli* $\sqrt{\alpha}$ ar lauka veselo skaitli α, kas izpilda nosacījumus (10), (11); $\sqrt{\alpha}$ sauc par *īsti* ideālu skaitli, ja tas nav lauka skaitlis. 12. lemma izteic visus īsti ideālos pirmskaitļus ar formulu (18).

4. § pierāda pamatteorēmu, ka ideālie skaitļi ir sadalāmi pirmreizinātājos viennozīmīgi.

5. § (16. lemma) apskata lauka nesadalāmos skaitļus.

6. § (17. lemma) dod nepieciešamo un pietiekošo nosacījumu, kad lauka skaitlis α ir normāls. 18. lemma dod lauka visus normālos racionālos skaitļus. 20. lemma noteic dotai normai n atbilstošo normālo skaitļu α skaitu.

7. § apskata lemmas par pirmskaitļu sadalījumu. Galvenā rezultāta (22. lemmas) pierādījumu, kas izlieto komplekso integrēšanu, devis Landavs.

1941. g. 30. dec.

12,-

AFV Nr. II/00854. Eksemplāru skaits 1100. Papīrs iespiežamais H 1 c 45 kg, 67 × 95 cm, no Jaunciema papīra fabrikas. Iespiests un brošēts Latvijas vērtspapīru spiestuvē 1943. g. Nr. 24673. V 88.