UNIVERSITÄT IN RIGA

WISSENSCHAFTLICHE ABHANDLUNGEN

NEUE FOLGE DER ACTA UNIVERSITATIS LATVIENSIS

KLASSE DER MECHANISCHEN FAKULTÄT

UNIVERSITĀTE RĪGĀ

ZINĀTNISKIE RAKSTI

LATVIJAS UNIVERSITĀTES RAKSTU TURPINĀJUMS

MECHANIKAS FAKULTĀTES SERIJA

BAND 1. SĒJUMS

Nr. 1

A. VĪTOLS

# Kāds uz mazu galējo vērtību diferenču jēdziena dibināts paņēmiens līmeņu līkņu uzbūvei dabiskās strāvās

RIGA
LATVJU GRĀMATA
1943

Rb 420

# Kāds uz mazu galējo vērtību diferenču jēdziena dibināts paņēmiens līmeņu līkņu uzbūvei dabiskās strāvās.

*A. Vītols.*

Šī problēma ir ekvivalenta problēmai par dotās strāvas gultnes pildījumu pie zināmiem $Q$ un strāvas gultni raksturojošiem fizikāliem (Chézy resp. berzes) koeficientiem. Gultnes ģeometriskie elementi ir uzņemtie profili līdz ar pēdējo savstarpīgo novietojumu telpā. Šo novietojumu var iedomāties reālizētu ar strāvas dibens līnijas kā kādas telpas līknes fiksēšanu telpā. Šī fiksēšana var notikt šādējādi: Plānā var novilkt dibens dziļāko punktu ģeometriskās vietas projekciju uz kādu horizontālu plāksni (sk. 1. skicē punktēto līniju).

Kad šī projekcija ir novilkta, tad kāda profila dibens punkta $A_{n-2}$ stāvotne ir noteikta ar šī punkta $A_{n-2}$ atstatumu no kāda sākuma šķēliena — repera — un punkta $A_{n-2}$ dziļumu $H_{n-2}$ zem min. horizontālas plāksnes (sk. 2. skici, kas attēlo iztaisnoto cilindrisko projekcijas virsmu).

Problēmas atrisinājumu par strāvas dotās gultnes pildījumu dabā sniedz pazīstamais D. Bernoulli potamohidrauliskais līdzojums, ja ir zināmi strāvas $Q$ un gultni raksturojošie koeficienti:

$$y_n - y = \alpha'\left(\frac{v_n^2}{2g} + \frac{v^2}{2g}\right) + \int_{s}^{s_n} \frac{v^2}{C^2R}\, ds \quad . \; . \; . \; . \; . \; (1),$$

kur apzīmē:

$y$ — kāda strāvas līmeņa punkta ordināti, skaitītu no brīvi izvēlētas horizontālas plāksnes uz leju;

$v$ — strāvas vidējo ātrumu šķēlienā, kuŗa līmeņa ordināte ir $y$;

$\alpha'$ — Coriolis'a resp. Boussinesq'a koeficientu;

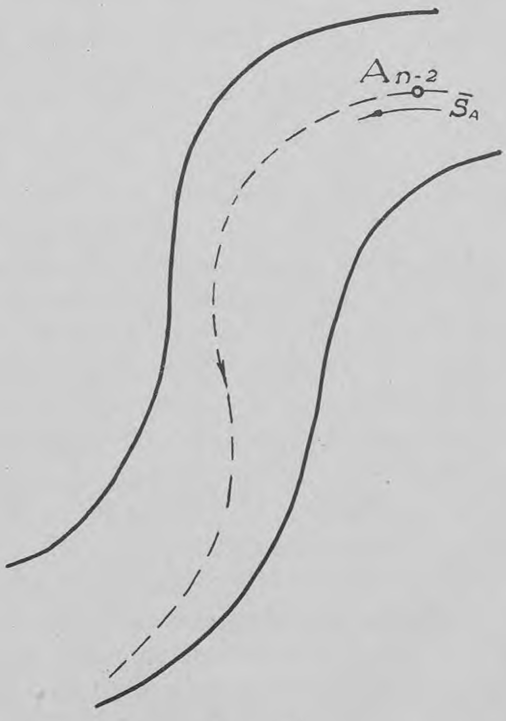
$C$ — Chézy koeficientu;

$R$ — strāvas min. šķēliena hidraulisko radiusu;

$s$ — min. šķēliena atstatumu pa strāvu gar 1. sk. punktēto līkni no kāda brīvi vēlēta sākuma šķēliena, kā repera;

$ds$— min. atstatuma bezgalīgi mazu elementu.

Kā no uzrakstītā līdzojuma (1.) izriet, problēmas noteiktam atrisinājumam ir vajadzīgs, lai kādā šķēlienā, kuŗa kārtas numurs ir $n$, visi




1. skice.

elementi būtu zināmi, t. i. lai tiktu doti $s_n$, $y_n$, $v_n$, $\omega_n$, $\pi_n$, kur $\omega$ apzīmē strāvas šķēlienu, sauktu arī dažreiz par dzīvo šķēlienu, un $\pi$ — šķēliena apslapināto perimetru. Līmeņa atzīmi $y_n$ parasti noteic recipienta, kuŗā strāva ieplūst (ezers, jūŗa), līmeņa atzīme, bet hidrotechnikā praktiska nozīme ir problēmai par strāvas gultnes pildījumu, kuŗu ir radījis kāds strāvas traucēklis, piem., sprosts, gultnes izbagarējums (upju rēgulēšanas problēma meliorācijā) u. t. t. Sevišķa nozīme piekrīt jautājumam par strāvas līmeni tā tipa dabiskās strāvās, kuŗas mēs esam nosaukuši par „upēm" St — Venant'a klasifikācijas nozīmē. (Kritiskais dziļums $h_k$, kuŗu noteic $1 - \frac{\alpha' Q^2 b_k}{g\omega_k^3} = 0$, mazāks par dziļumu, kuŗu noteic $C_0^2 R_0 \omega_0^2 i_0 - Q^2 = 0$, tas ir par normālo dziļumu $h_0$, $h_k < h_0$.)

D. Bernoulli līdzojuma ērtai pielietošanai ir izdevīgi pēdējā ievest $Q$ ar strāvas kontinuitātes līdzojuma $Q = \omega v$ palīdzību. Šī operācija līdz ar Manninga-Strickler'a hipotezi $C = {}^1/_n R^{1/6} = kR^{1/6}$ noved pie šāda Bernoulli līdzojuma veida:

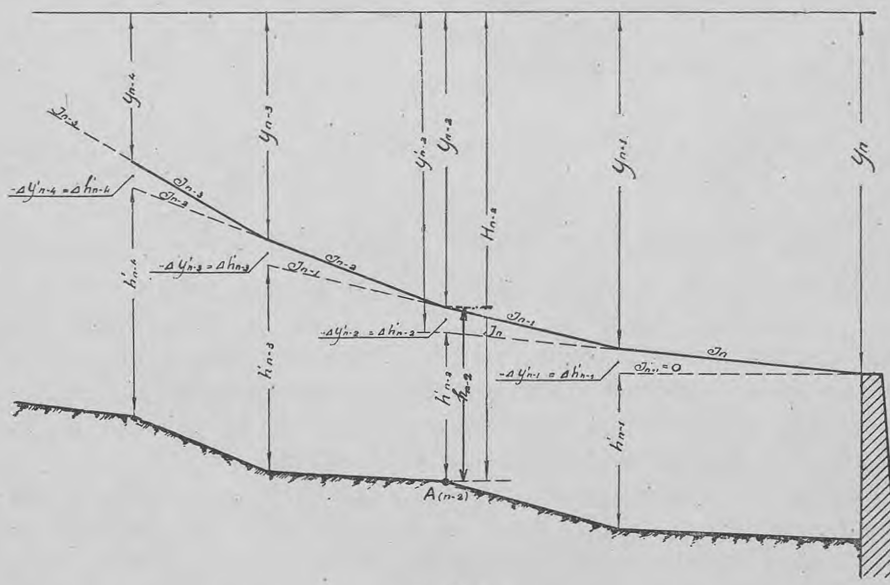
$$\frac{y_n - y}{Q^2} = \frac{\alpha'}{2g}\left(\frac{1}{\omega_n^2} - \frac{1}{\omega^2}\right) + \frac{1}{k^2}\int_s^{s_n} \frac{\pi^{4/3}}{\omega^{10/3}} ds \quad \ldots\ldots (2).$$

Katrā šķēlienā $\omega$ un $\pi$ un tāpat gultnes funkcija $\frac{\pi^{4/3}}{\omega^{10/3}}$ ir funkcijas no $y$ resp. $h$ un $s$ (sk. 2. sk.), jo katrā šķēlienā pastāv sakarība: $y_{n-1} + h_{n-1} = H_{n-1}(s)$; $y_{n-2} + h_{n-2} = H_{n-2}(s)$, $y + h = H(s)$, kur simbols $H(s)$ apzīmē funkciju no $s$ (sk. 2. sk.). Funkcija $H(s)$ ir zināma dibens līnijas līdzojuma veidā, kuŗu dod ģeodētiskie upes gultnes uzņemšanas darbi. Uzejot kādā šķēlienā $\omega$ jeb $\pi$, kā funkciju no $h$, skaitītu no šķēliena visdziļākā punkta, tā kā $(\omega)_{h=0} = (\pi)_{h=0} = 0$, ar sakarības $y + h = H(s)$ palīdzību var $h$ izslēgt, jo $h = H(s) - y$, un iegūt funkcijas $\omega(h) = \omega\{H(s) - y\}$ un $\pi(h) = \pi\{H(s) - y\}$, kas skaidri izpauž faktu, ka strāvas šķēlienu ģeometriskie elementi ir divu argumentu, $y$ resp. $h$ un $s$, funkcijas arī tad, ja mēs šīs funkcijas izteicam kā funkcijas tikai no $y$ resp. $h$.

Mūsu uzdevums, uziet dotās upes gultnes pildījumu resp. strāvas līmeni pie dotiem $Q$ un hidrauliskiem koeficientiem, būs veikts, ja mums izdosies uziet $y$ resp. $h$, kā tādas funkcijas no $s$, kas pārvērš D. Bernoulli līdzojumu identitātē, pie kam kā vienīgais neatkarīgais lielums būs $s$. Tā kā meklējamā funkcija $y(s)$ resp. $h(s)$ Bernoulli līdzojumā atrodas zem integrāļa simbola $\left(\int_{s_{n-2}}^{s_{n-1}} \frac{\pi^{4/3}}{\omega^{10/3}} ds\right)$, tad Bernoulli līdzojums ir tā saucamais integrāllīdzojums, ar kuŗa atrisināšanu nodarbosimies. Uz priekšu raksta saīsināšanas labad ievedīsim simbolu

$\frac{\pi^{4/3}}{\omega^{10/3}}(h) = \psi(h)$, arī vienkārši $\psi$, paturot prātā, ka $\psi(h)$ ir $y$ un $s$ funkcija un otrādi, $\psi(y)$ ir $h$ un $s$ funkcija.

Tā kā $\omega(h)$, $\pi(h)$ un $\psi(h)$ būs zināms tikai uzņemtajos šķēlienos, tad starp šiem šķēlieniem jāpieņem kādu hipotezi par funkcijas $\psi(h)$ maiņu, cita līdzekļa dabiskām, irrēgulārām gultnēm neatliek. Šo funk-

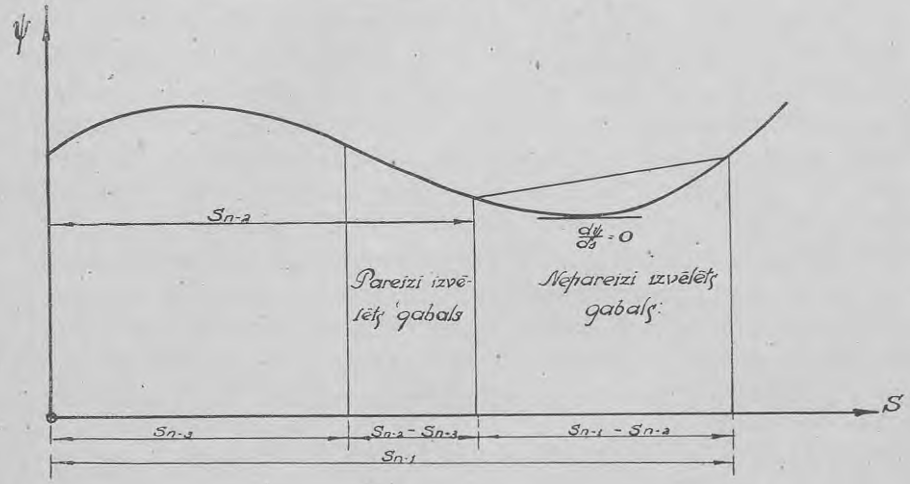



2. skice.

ciju mēs tagad iedomāsimies kā funkciju vienīgi no $s$, kas nozīmē, ka līdz ar to mēs esam pieņēmuši kādu hipotezi par $y$ kā funkciju no $s$. Ja šī hipoteze pārvērtīs Bernoulli līdzojumu identitātē, tad uzdevums ir atrisināts. Ja mēs būtu uzņēmuši pietiekoši lielu profilu skaitu, tad varētu pieņemt, ka $\psi(h)$ starp uzņemtiem šķēlieniem mainās pēc taisnes likuma. Ja tas ir tā, tad $\int_{s_{n-2}}^{s_{n-1}} \frac{\pi^{4/3}}{\omega^{10/3}} ds$ var izteikt kā trapeces $\left\{\left(\frac{\pi^{4/3}}{\omega^{10/3}}\right)_{n-1} + \left(\frac{\pi^{4/3}}{\omega^{10/3}}\right)_{n-2}\right\} \cdot \frac{(s_{n-1} - s_{n-2})}{2}$ laukumu; t. i. $\int_{s_{n-2}}^{s_{n-1}} \frac{\pi^{4/3}}{\omega^{10/3}} ds =$

$= N\left\{\left(\frac{\pi^{4/3}}{\omega^{10/3}}\right)_{n-1} + \left(\frac{\pi^{4/3}}{\omega^{10/3}}\right)_{n-2}\right\} \cdot \frac{s_{n-1} - s_{n-2}}{2}$, kur $N$ ir korektūras koeficients, kuŗam pēc iespējas jābūt tuvam 1, $N = 1$. Ķāda būs faktiskā $N$ vērtība, mūsu rīcībā nav līdzekļu par to spriest.

Strāva katrā ziņā ir jāsaskalda īsākos gabalos, lai pēc iespējas $N$ būtu tuvs 1, kas būs tad, ja funkcija $\psi$ integrācijas robežās būs monotona, t. i. starp izvēlētiem šķēlieniem nedrīkst būt punkti ar $\frac{d\psi}{ds} = 0$ (sk. 3. sk.), atskaitot varbūt vietējas funkcijas $\psi$ sīkos vilnīšus.




3. skice.

Sakarā ar tikko konstatētiem apstākļiem D. Bernoulli līdzojums iegūst galīgu veidu:

$$\frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{Q^2} = \frac{\alpha^1}{2g}\left(\frac{1}{\omega^2_{n-1}} - \frac{1}{\omega^2_{n-2}}\right) + (\psi_{n-1} + \psi_{n-2})\frac{(s_{n-1} - s_{n-2})}{2k^2} \quad (3).$$

Šinī līdzojumā ir zināmi visi lielumi ar indeku $(n-1)$ un bez tam $\frac{(s_{n-1} - s_{n-2})}{2k^2}$; meklēts tiek $y_{n-2}$, līdz ar ko arī visas $y_{n-2}$ funkcijas, kā $\omega_{n-2}$, $\psi_{n-2}$, pie kam šo funkciju nozīmēm piemīt tikai palīgloma $y_{n-2}$ uzmeklēšanā.

Tagad metīsim skatu uz līdz šim lietotu līmeņa līknes uzbūves paņēmienu dabiskās gultnēs. Citēsim saīsināti uzbūves veidu pēc profesora A. N. Achutina „Рабочая книга по специальному курсу гидравлики" Ленинград, 1931. 43. lpp.: pēc uzņemtiem šķērsprofiliem uzbūvē funkciju līknes: $b$ (upes platums) $= b(y)$, $\omega = \omega(y)$, $C = C(y)$. Kad šīs līknes ir uzbūvētas, tad ņem vērā strāvas gabalu starp 2 šķērsprofiliem un piemēro D. Bernoulli līdzojumu šādā veidā:

$$\frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{Q^2} = \frac{\alpha^1}{2g}\left(\frac{1}{\omega_{n-1}^2} - \frac{1}{\omega_{n-2}^2}\right) + \frac{b\,(s_{n-1} - s_{n-2})}{C^2\omega^3} \quad . \; . (4),$$

kur

$$b = \frac{b_{n-1} + b_{n-2}}{2}, \quad \omega = \frac{\omega_{n-1} + \omega_{n-2}}{2} \text{ un } C = \frac{C_{n-1} + C_{n-2}}{2}.$$

Zinot līmeņa atzīmi $y_{n-1}$ šķēlienā $(n-1)$ un līdz ar to arī visus lielumus $b_{n-1}$, $\omega_{n-1}$ un $C_{n-1}$, kuŗi no $y_{n-1}$ resp. $h_{n-1}$ ir atkarīgi, piešķiŗ $y_{n-2}$ kādu brīvi, patvaļīgi, izvēlētu nozīmi, līdz ar to arī $b_{n-2}$, $\omega_{n-2}$ un $C_{n-2}$ attiecīgās nozīmes ir noteiktas. Ievietojot iegūtās, tagad visas zināmās, nozīmes Bernoulli līdzojumā (4), ir jāpanāk identitāte. Ja identitāte nav sasniegta, tad jāpiešķiŗ $y_{n-2}$ jaunu nozīmi un visas kalkulācijas jāatkārto tālāk, kamēr identitāte būs panākta. Tā $y$ vērtība, kuŗa pārvērš Bernoulli līdzojumu identitātē, ir līmeņa atzīme nākamā, skaitot no sprosta pret strāvas virzienu, šķēlienā, kuŗu izlietojam kā bazi nākamā posma līmeņa noteikšanai. Kā redzams, šis paņēmiens ir ļoti gaŗlaicīgs un smags, prasa lielu darbu un laika patēriņu. Neatkarīgi no šiem apstākļiem būtu jāaizrāda vēl uz vienu, un, proti, sekojošu: „vecais" paņēmiens operē, kā redzējām, ar vidējiem lielumiem $\omega = \frac{\omega_{n-1} + \omega_{n-2}}{2}$, $b = \frac{b_{n-1} + b_{n-2}}{2}$ un $C = \frac{C_{n-1} + C_{n-2}}{2}$, nerunājot par $\pi$ atvietošanu ar $b$, kas ne vienmēr būs pielaižams. Šie vidējie lielumi ietilpst Bernoulli līdzojuma (4) enerģijas zudumu loceklī $\frac{b\,(s_{n-1} - s_{n-2})}{C^2\omega^3}$. Šo locekli ir jākonfrontē ar mūsu integrāli:

$$\frac{N}{k^2}\int_{s_{n-2}}^{s_{n-1}} \frac{\pi^{4/3}}{\omega^{10/3}}\,ds = N\left[\left(\frac{\pi^{4/3}}{\omega^{10/3}}\right)_{n-1} + \left(\frac{\pi^{4/3}}{\omega^{10/3}}\right)_{n-2}\right] \cdot \frac{(s_{n-1} - s_{n-2})}{2\,k^2}.$$

Ir saprotams, ka šīs izteiksmes nav identiskas. Patiesi, ievedot $\pi = b\,(1 + \varepsilon)$, kur $\varepsilon$ ir kāds pozitīvs, gan relātīvi mazs, lielums un izteicot *Chézy* $C$ ar Manninga-Strickler'a hipotezi: $C = kR^{1/6} = k\left(\frac{\omega}{b}\right)^{1/6} = k\left\{\frac{\omega\,(1 + \varepsilon)}{\pi}\right\}^{1/6}$, iegūstam:

$$\frac{b\,(s_{n-1}-s_{n-2})}{C^2\,\omega^3}=\frac{(b_{n-1}+b_{n-2})\,(s_{n-1}-s_{n-2})\,.\,4\,.\,8}{2k^2\,(C_{n-1}+C_{n-2})^2\,(\omega_{n-1}+\omega_{n-2})^3}=$$

$$=\frac{\left[\left(\frac{\pi}{1+\varepsilon}\right)_{n-1}+\left(\frac{\pi}{1+\varepsilon}\right)_{n-2}\right]\frac{(s_{n-1}-s_{n-2})}{2}\,.\,32}{k^2\left[\left\{\frac{\omega(1+\varepsilon)}{\pi}\right\}_{n-1}^{1/3}+\left\{\frac{\omega(1+\varepsilon)}{\pi}\right\}_{n-2}^{1/3}+2\left\{\frac{\omega(1+\varepsilon)}{\pi}\right\}_{n-1}^{1/6}\left\{\frac{\omega(1+\varepsilon)}{\pi}\right\}_{n-2}^{1/6}\right](\omega_{n-1}+\omega_{n-2})^3}.$$

Konfrontēšanai paliek izteiksmes:

$$\frac{\left[\left(\frac{\pi}{1+\varepsilon}\right)_{n-1}\left(\frac{\pi}{1+\varepsilon}\right)_{n-2}\right].\,32}{\left[\left\{\frac{\omega\,(1+\varepsilon)}{\pi}\right\}_{n-1}^{1/3}+\left\{\frac{\omega\,(1+\varepsilon)}{\pi}\right\}_{n-2}^{1/3}+2\left\{\frac{\omega\,(1+\varepsilon)}{\pi}\right\}^{1/6}\right](\omega_{n-1}+\omega_{n-2})^3}$$

un

$$N\left[\left(\frac{\pi^{4/3}}{\omega^{10/3}}\right)_{n-1}+\left(\frac{\pi^{4/3}}{\omega^{10/3}}\right)_{n-2}\right],$$

kas nekādā ziņā nav identiskas, un jautājums paceļas, kuŗa no šīm izteiksmēm ir korrektāka un loģiskāka. Kā rādās, pirmā izteiksme ir patvaļīgāka un tālāka no reāliem apstākļiem.

Tomēr min. profesors Achutins ibidem par „veco" paņēmienu nodod sekojošu liecību: „krievu beidzamo gadu praksē šī metode ir iekaŗojusi plašu pielietošanas lauku. Volchovas un Sviras hidroelektrisko staciju uzstādinājumu līknes arī ir ar šīs metodes palīdzību aprēķinātas. Volchovas stacijas uzstādinājuma līknes vēlāka pārbaude dabā pierādīja pilnīgi apmierinošu aprēķināto un patieso līmeņa atzīmju sakrišanu".

Tomēr paliek fakts, ka līmeņa līkņu aprēķināšanu pie „vecās" metodes, kuŗu raksturo sukcesīvas aproksimācijas ceļš līdz ar funkciju $\omega$, $b$ un $C$ uzbūvi katrā šķēlienā, kaut arī gaidāmā uzstādinājuma robežās, prasa lielu darba un laika patēriņu. Tādēļ autors proponē savu paņēmienu, ar kuŗa palīdzību tiek radīts viens līmeņa līdzojums ar vienu nezināmo, kuŗu var ērti uziet. Šo paņēmienu īsos vilcienos var raksturot tā: iepriekšēja posma līmeņa kritumu $I_n$, kas jau ir uziets, turpina uz augšu (pret strāvas virzienu) līdz nākamam šķēlienam ar numuru, teiksim $(n-2)$, un atzīmējam šinī šķēlienā ordinātes $y_{n-2}$ krustojuma punktu ar iepriekšējā posma līmeņa līnijas taisni (sk. 2. sk.). Pieņemsim, ka $y_{n-2}$ un līnijas ar kritumu $I_n$ (iepriekšējā posma kritums) krustojuma punkta ordināte ir $y'_{n-2}$ (sk. 2. sk.), tad, tā kā $y'_{n-2}+h'_{n-2}=H_{n-2}(s)$, tad $h'_{n-2}$ ir zināms, un līdz ar to ir zināmi visi ģeometriskie elementi šķēlienā

($n$—2) pie līmeņa, kuŗu noteic $y'_{n-2}$. Bet ne $y'_{n-2}$, nedz $h'_{n-2}$ nav īstie, bet aptuvenie, kas atšķiŗas no patiesiem par kādām nelielām vērtībām, kuŗas var iegūt, ja piešķiŗ $h'_{n-2}$ pieaugumu $\Delta h'_{n-2}$ resp. $y'_{n-2}$ pieaugumu $-\Delta y'_{n-2} = \Delta h'_{n-2}$, jo $\Delta(y'_{n-2} + h'_{n-2}) = \Delta y'_{n-2} + \Delta h'_{n-2} = 0$, no kurienes: $\Delta h'_{n-2} = -\Delta y'_{n-2}$. Tātad līdzojuma (3) visus lielumus ar indeku ($n$—2) var iegūt, uzejot šos lielumus pie līmeņa atzīmes $y'_{n-2}$ un pieskaitot šiem lielumiem vērtības, kuŗas iegūsim, piešķiŗot $h'_{n-2}$ dziļuma pieaugumu $\Delta h'_{n-2}$. Pieņemot, ka šis dziļuma pieaugums būs relātīvi mazs, visu lielumu ar indeku ($n$—2) pieaugumus varēsim izskaitļot kā šo lielumu diferenciāļus pēc $h'_{n-2}$. Sakarā ar šo atzinumu līdzojumu (3) ir jādiferencē pēc $h'_{n-2}$, atvietojot diferencēšanas simbolu $d$ ar simbolu $\Delta$, ar ko gribam pasvītrot, ka $\Delta$ apzīmē samērā mazu, bet ne bezgalīgi mazu lielumu. Tādā ceļā mēs iegūsim līneāru attiecībā pret $\Delta h'$ līdzojumu ar vienu nezināmo, kuŗu varēsim viegli atrisināt

No 2. skices seko, ka

$$y_{n-2} = y_{n-1} - I_n (s_{n-1} - s_{n-2}) - \Delta h'_{n-2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

un

$$\frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{Q^2} = \frac{y_{n-1} - y_{n-1} + I_n (s_{n-1} - s_{n-2}) + \Delta h'_{n-2}}{Q^2} = $$
$$= \frac{I_n (s_{n-1} - s_{n-2}) + \Delta h'_{n-2}}{Q^2}.$$

Piegriezīsim vērību indeku secībai loceklī $\frac{I_n (s_{n-1} - s_{n-2})}{Q^2}$, kuŗa ir: $n$, ($n$—1) un ($n$—2). Ja mēs apskatītu pirmo posmu, skaitot no sprosta uz augšu, tad še šis loceklis būtu $\frac{I_{n+1} (s_n - s_{n-1})}{Q^2} = 0$, jo $I_{n+1}$ varētu pieņemt: $I_{n+1} = 0$. Varētu arī $I_{n+1}$ piešķirt kādu stipri mazu, brīvi vēlētu vērtību. Uz 2. skices iepriekšējo posmu līmeņu līniju turpinājumi ir punktēti. Tālāk:

$$\frac{1}{\omega^2_{n-2}} = \frac{1}{\omega'^2_{n-2}} + \Delta \frac{1}{\omega'^2_{n-2}} = \frac{1}{\omega'^2_{n-2}} - \frac{2\Delta\omega'_{n-2}}{\omega'^3_{n-2}} = \frac{1}{\omega'^2_{n-2}} - \frac{2b'_{n-2}\,\Delta h'_{n-2}}{\omega'^3_{n-2}},$$

kur $b'_{n-2}$ ir strāvas platums šķēlienā ($n$—2) pie līmeņa $y'_{n-2}$ un

$$\frac{1}{\omega^2_{n-1}} - \frac{1}{\omega^2_{n-2}} = \frac{1}{\omega^2_{n-1}} - \frac{1}{\omega'^2_{n-1}} + \frac{2b'_{n-2}\,\Delta h'_{n-2}}{\omega'^3_{n-2}}.$$

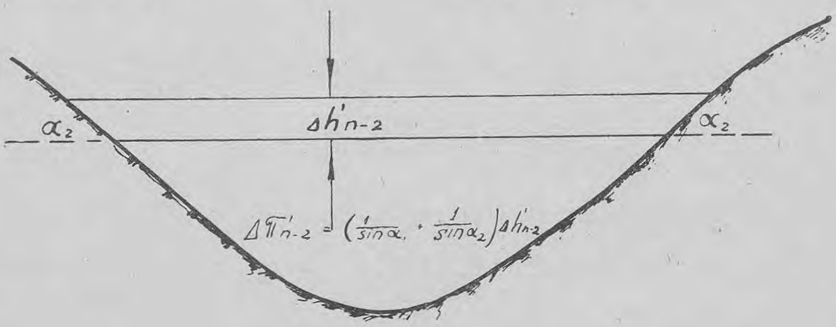
Tāpat: $\psi_{n-2} = \psi'_{n-2} + \Delta\psi'_{n-2} = \psi'_{n-2} + \Delta \left(\frac{\pi'^{4/3}}{\omega'^{10/3}}\right)_{n-2} = \psi'_{n-2} +$

$$+\left(\frac{{}^4/_3\,\pi'^{1/3}\,\omega'^{10/3}\,\Delta\,\pi' - {}^{10}/_3\,\omega'^{7/3}\,\pi'^{4/3}\,\Delta\,\omega'}{\omega'^{20/3}}\right)_{n-2} = \psi'_{n-2} + \frac{\pi'^{4/3}_{n-2}}{\omega'^{10/3}_{n-2}}\,.$$

$$\cdot\frac{4\,\omega'_{n-2}\,\pi'^{-1}_{n-2}\left(\dfrac{1}{\sin\alpha_1}+\dfrac{1}{\sin\alpha_2}\right)\Delta\,h'_{n-2} - 10\,b'_{n-2}\,\Delta\,h'_{n-2}}{3\,\omega'_{n-2}} = \psi'_{n-2} +$$

$$+\psi'_{n-2}\,.\left(\frac{4\,\omega'\,\pi'^{-1}\,.\,f\,(\alpha) - 10\,b'}{3\,\omega'}\right)_{n-2}\ \Delta\,h'_{n-2}\ \text{(sk. 4 sk.), kur}\ f\,.\,(\alpha) =$$

$$=\left(\frac{1}{\sin\alpha_1}+\frac{1}{\sin\alpha_2}\right),\ \text{pie kam}\ \min f(\alpha) = \left(\frac{1}{\sin\alpha_1}+\frac{1}{\sin\alpha_2}\right) = 2, \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2}\cdot$$




4. skice.

$$\text{Tagad:}\ \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{Q^2} = \frac{I_n\,(s_{n-1} - s_{n-2})}{Q^2} + \frac{\Delta\,h'_{n-2}}{Q^2} = \frac{\alpha'}{2g}\left(\frac{1}{\omega^2_{n-1}} - \frac{1}{\omega^2_{n-2}}\right) +$$

$$+\ (\psi_{n-1} + \psi_{n-2})\,\frac{(s_{n-1} - s_{n-2})}{2\,k^2} = \frac{\alpha'}{2g}\left(\frac{1}{\omega^2_{n-1}} - \frac{1}{\omega'^2_{n-2}}\right) + \frac{\alpha'\,2\,b'_{n-2}}{2g\,\omega'^3_{n-2}}\,\Delta\,h'_{n-2} +$$

$$+\ (\psi_{n-1} + \psi'_{n-2})\ .\ \frac{(s_{n-1} - s_{n-2})}{2\,k^2} + \psi'_{n-2}\ \Omega'_{n-2}\,\Delta\,h'_{n-2},\ \text{kur}\ \Omega'_{n-2} =$$

$$= \left(\frac{4\,\omega'\,\pi'^{-1}\,f\,(\alpha) - 10\,b'}{3\,\omega'}\right)_{n-2}.$$

Sagrupējot locekļus ar $\Delta\,h'_{n-2}$ un brīvos no $\Delta\,h'_{n-2}$, iegūstam:

$$\left(\frac{1}{Q^2} - \frac{\alpha'}{2g}\,.\,\frac{2\,b'_{n-2}}{\omega'^3_{n-2}} - \psi'_{n-2}\,\Omega'_{n-2}\right)\Delta\,h'_{n-2} = A_{n-2}\,\Delta\,h'_{n-2} =$$

$$= \frac{\alpha'}{2\,g}\left(\frac{1}{\omega^2_{n-1}} - \frac{1}{\omega'^2_{n-2}}\right) + (\psi_{n-1} + \psi'_{n-2})\,\frac{s_{n-1} - s_{n-2}}{2\,k^2} -$$

$$\frac{I_n(s_{n-1} - s_{n-2})}{Q^2} = B_{n-2}\ \ .\ .\ .\ .\ .\ \ .\ \ (6),$$

no kurienes: $\Delta h'_{n-2} = \frac{B_{n-2}}{A_{n-2}}$; pēc kam saskaņā ar (5): $y_{n-2} = y_{n-1} - I_n (s_{n-1} - s_{n-2}) - \Delta h'_{n-2}$, bet līmeņa galīgais kritums $I_{n-1}$, kuŗu jāieved arī nākamā posma aplēsē, ir

$$I_{n-1} = \frac{I_n (s_{n-1} - s_{n-2}) + \Delta h'_{n-2}}{s_{n-1} - s_{n-2}} = I_n + \frac{\Delta h'_{n-2}}{s_{n-1} - s_{n-2}} \quad . \quad . \quad (7).$$

Noteikuši līmeņa atzīmi $y_{n-2}$ šķēlienā $(n-2)$, turpinām tādā pašā ceļā, kā augstāk noskaidrots, atzīmes $y_{n-3}$ uzmeklēšanu pēc formulām:

$$\Delta h'_{n-3} = \frac{B_{n-3}}{A_{n-3}} =$$

$$= \frac{\frac{\alpha'}{2g}\left(\frac{1}{\omega^2_{n-2}} - \frac{1}{\omega'^2_{n-3}}\right) + (\psi_{n-2} + \psi'_{n-3})\frac{s_{n-2} - s_{n-3}}{2k^2} - \frac{I_{n-1}(s_{n-2} - s_{n-3})}{Q^2}}{\frac{1}{Q^2} - \frac{\alpha'}{2g} \cdot \frac{2b'_{n-3}}{\omega'^3_{n-3}} - \psi'_{n-3} \cdot \Omega'_{n-3}} \quad (6^{bis})$$

$$y_{n-3} = y_{n-2} - I_{n-1}(s_{n-2} - s_{n-3}) - \Delta' h_{n-3} \,.\, (5^{bis}) \text{ un}$$

$$I_{n-2} = \frac{I_{n-1}(s_{n-2} - s_{n-3}) + \Delta h'_{n-3}}{s_{n-2} - s_{n-3}} = I_{n-1} + \frac{\Delta h'_{n-3}}{s_{n-2} - s_{n-3}} \quad (7^{bis}).$$

## Paņēmiena priekšrocības.

Katrā šķēlienā jāuziet tikai pa vienai dziļuma $h'$ funkcijai, $\omega'$, $\pi'$ un $b'$, no kuŗām sastādās savkārt funkcijas $\psi'$, $\Omega'$, $\frac{1}{\omega'^2}$ un $\frac{b'}{\omega'^3}$, kas ietilpst līdzojumā (6). Kas attiecas uz minēto funkciju vērtībām, atbilstošām izlabotām par $\Delta h'$ dziļumam $h$ resp. $y$, tad, kā rāda iepriekšējās operācijas, šīs vērtības var sastādīt no vērtībām, atbilstošām $h'$, ar diferenciāļa jēdziena palīdzību, un tādēļ nav nepieciešams sastādīt šīs funkcijas tieši. Saprotams, ka conditio sine qua non paliek, ka dziļuma $h'$ korriģējumi $\Delta h'$ ir relātīvi mazi lielumi (par šo jautājumu sk. zemāk). Tāpat ērtības interesēs nav nepieciešams punktētām līnijām piešķirt taisni iepriekšējā posma kritumu, kuŗu varētu noapaļot uz augšu.

Iegūtais līdzojums (6), kā redzējām, ir lineārs un satur tikai vienu nezināmo $\Delta h'$, un tādēļ proponējamais paņēmiens, kā rādās, pelna ievērību no laika un darba ekonomijas viedokļa.

## Paņēmiena matēmatiskā pamatojuma elementi.

Taylor'a formula skan:

$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = hf'(x) + \frac{h^2}{1\,.\,2} f''(x + \Theta x)$, kur $\Theta$ apzīmē koeficientu ar skaitlisku vērtību: $0 < \Theta < 1$ un $h$ kādu neatkarīgā mainīgā $x$ patvaļīgu pieaugumu. Pieskaņojot Taylor'a formulu mūsu gadījumam, jāpieņem $x$ vietā $h$ un $h$ vietā $\Delta h$, tā ka:

$$\Delta f(h) = f'(h)\,.\,\Delta h + \frac{(\Delta h)^2}{1\,.\,2} f''(h + \Theta\,.\,\Delta h) = \Delta h \left\{ f'(h) + \frac{\Delta h}{1\,.\,2} (f''(h) + \Theta\,.\,\Delta h) \right\}.$$

Ja $\Delta h$ ir pietiekoši mazs lielums, tad varētu pieņemt:

$$f''(h + \Theta \Delta h) = f''(h) + \Theta\,.\,f'''(h)\,.\,\Delta h \text{ un:}$$

$$\Delta f(h) = \Delta h \left\{ f'(h) + \frac{\Delta h}{2} (f''(h) + \Theta f'''(h) \Delta h) \right\} =$$

$$= f'(h) \Delta h \left\{ 1 + \left[ \frac{f''(h)}{2f'(h)} + \frac{\Theta f'''(h)\,.\,\Delta h}{2f'(h)} \right] \Delta h \right\} =$$

$$= f'(h) \Delta h \left\{ 1 + \frac{f''(h)}{2f'(h)} \left[ 1 + \frac{\Theta\,.\,f'''(h) \Delta h}{f''(h)} \right] \Delta h \right\}.$$

Ja $\frac{\Theta\,.\,f'''(h)}{f''(h)} \Delta h$ samērā pret 1 ir niecīgs, tad var pielīdzināt $\Delta f(h) = f'(h) \Delta h \left( 1 + \frac{f''(h)}{2f'(h)} \Delta h \right)$. Ja tālāk $\frac{f''(h)}{2f'(h)} \Delta h$ samērā pret 1 arī ir niecīgs lielums, tad beidzot var pieņemt $\Delta f(h) = f'(h) \Delta h$. Uz šīs formulas pamatojas proponētais paņēmiens.

Parastas formas gultnēs šīs formulas pielietošana ir pielaižama. Strāvas funkcijas, kas tiek diferencētas, ir $\frac{1}{\omega^2}$ un $\frac{\pi^{4/3}}{\omega^{10/3}} = \psi$. Mēs jau konstatējām, ka funkcijā $\psi'$ ietilpst savkārt funkcija $f(\alpha)$, kuŗas minimālā vērtība ir min $f(\alpha) = 2$, $\alpha = \pi/_2$, bet maksimumam nav robežu. Funkcijā $\frac{1}{\omega^2}$ šī parādība izpaužas $f''(\alpha) = \left(\frac{1}{\omega^2}\right)''$, kur parādās $\operatorname{cotg}\alpha_1 + \operatorname{cotg}\alpha_2 = \psi(\alpha)$. Šīs funkcijas minimums ir: $\min \psi(\alpha) = 0$, bet maksimumam arī nav robežu. Ievērojami lielas nozīmes funkcijas $f(\alpha)$ un $\psi(\alpha)$ var iegūt pie dziļumiem $h$, ar kuŗiem sākas upes izeja no krastiem. Saprotams, ka šinīs izņēmuma gadījumos no proponētā paņēmiena būtu jāatsakās, bet tad arī katram citam paņēmienam stātos ceļā zināmas grūtības.

## Piemērs.

Pieņemsim:

1) $Q = 500\ {}^{m^3}/_{sec}$, $Q^2 = 500^2\ {}^{m^6}/_{sec^2} = 25 \,.\, 10^4 = \frac{10^6}{4}$; $\frac{1}{Q^2} = \frac{4}{10^6}$;

2) $(s_{n-1} - s_{n-2}) = 2000\,\mathrm{m} = 2 \,.\, 10^3$ (pie šī atstatuma izvēles ir jāvadās no apsvērumiem par funkcijas $\psi$ monotonību $\left(\frac{d\psi}{d\varphi} \neq 0 \text{ visā posmā}\right)$;

3) $k^2 = 1000 = 10^3$;

4) $\omega'_{n-2} = 10^3$ (šī nozīme tiek uzieta, ievelkot šķēlienā $(n-2)$ līmeni $y'_{n-2}$, ko noteic iepriekšējā posma līmeņa kritums $I_n$; kad šis līmenis ir zināms, tad ir zināms arī šķēliena max $h'_{n-2}$, tālāk apzīmēts vienkārši ar $h'_{n-2} = H^{(s)}_{n-2} - y'_{n-2}$, pie kam $H^{(s)}_{n-2}$ nozīme ir iegūta ģeodētiskā ceļā);

5) $\pi'_{n-2} = b'_{n-2}$ (tāpat $h'_{n-2}$ funkcijas) $= 125 = 5^3$;

6) $\psi'_{n-2} = \left(\frac{\pi'^{4/3}}{\omega'^{10/3}}\right)_{n-2} = \frac{5^{3 \cdot 4/3}}{10^{3 \cdot 10/3}} = \frac{5^4}{10^{10}}$;

7) $\psi_{n-1} = \psi'_{n-2} \,.\, 0{,}8$;

8) $\omega_{n-1} = \omega'_{n-2} \,.\, 1{,}2$;

Funkcijas $\psi$ var sastādīt arī ar nomogrammas palīdzību, kas šim darbam tiek pievienota.

9) $f(\alpha)_{n-2} = \left(\frac{1}{\sin\alpha_1} + \frac{1}{\sin\alpha_2}\right)_{n-2} = 4$;

10) $I_n = 0$;

11) $N = 1$.

Sastādīsim $A_{n-2}$ izteiksmi:

$$A_{n-2}=\frac{1}{Q^2}-\frac{\alpha'}{2g}\frac{2b'_{n-2}}{\omega'^3_{n-2}}-\psi'_{n-2}\,.\,\Omega'_{n-2}\,;\quad \frac{1}{Q^2}=\frac{4}{10^6};$$

$$-\frac{\alpha'}{2g}\frac{2b'_{n-2}}{\omega'^3_{n-2}}=\frac{-0{,}056\,.\,2\,.\,125}{10^9}=\frac{-0{,}112\,.\,125}{10^9}=\frac{-14}{10^9};$$

$$\Omega'_{n-2}=\left(\frac{4\,.\,\omega'\,\pi'^{-1}f(\alpha)-10b'}{3\,\omega'}\right)_{n-2}=\frac{\frac{4\,.\,10^3}{5^3}\,.\,4-10\,.\,125}{3\,.\,10^3}=\frac{16.8-1250}{3\,.\,10^3}=$$

$$=-\frac{(1250-128)}{3\,.\,10^3}=\frac{-1122}{3\,.\,10^3}=-\frac{374}{10^3};$$

$$-\psi'_{n-2}\,\Omega'_{n-2}=\frac{+\,.\,5^4}{10^{10}}\,.\,\frac{374}{10^3}=\frac{625\,.\,374}{10^{13}}=\frac{233{,}75}{10^{10}};$$

$$A_{n-2}=\frac{4}{10^6}-\frac{14}{10^9}+\frac{233{,}75}{10^{10}}+\frac{40000+233{,}75-140}{10^{10}}=$$

$$=\frac{40233{,}75-140}{10^{10}}=\frac{40093{,}75}{10^{10}}=A_{n-2}$$

Sastādīsim $B_{n-2}$ izteiksmi:

$$B_{n-2}=\frac{\alpha'}{2g}\left(\frac{1}{\omega^2_{n-1}}-\frac{1}{\omega'^2_{n-2}}\right)+(\psi_{n-1}+\psi'_{n-2})\frac{s_{n-1}-s_{n-2}}{2k^2}-\frac{I_n\,(s_{n-1}-s_{n-2})}{Q^2};$$

$$\frac{\alpha'}{2g}\left(\frac{1}{\omega^2_{n-1}}-\frac{1}{\omega'^2_{n-2}}\right)=\frac{\alpha'}{2g}\frac{1}{\omega'^2_{n-2}}\left(\frac{\omega'^2_{n-2}}{\omega^2_{n-1}}-1\right)=\frac{\alpha'}{2g}\frac{1}{\omega'^2_{n-2}}\left(\frac{1}{1{,}20^2}-1\right)=$$

$$=-\frac{\alpha'}{2g\,\omega'^2_{n-2}}\,.\,\frac{0{,}44}{1{,}44}=-\frac{0{,}056\,.\,44}{10^6\,.\,144}=-\frac{0{,}056\,.\,11}{10^6\,.\,36}=$$

$$=-\frac{56\,.\,11}{10^9\,.\,36}=-\frac{14\,.\,11}{10^9\,.\,9}=-\frac{154}{10^9\,.\,9}\approx-\frac{17\,.\,10}{10^9};$$

$$(\psi_{n-1}+\psi'_{n-2})\left(\frac{s_{n-1}-s_{n-2}}{2\,k^2}\right)=\frac{5^4\,.\,1{,}80}{10^{10}}\,.\,\frac{2000}{2000}=\frac{625\,.\,1{,}8}{10^{10}}=\frac{1125}{10^{10}}.$$

$$\frac{-I_n\,(s_{n-1}-s_{n-2})}{Q^2}=0 \text{ un}$$

$$B_{n-2}=\frac{-171+1125}{10^{10}}=\frac{1125-171}{10^{10}}=\frac{954}{10^{10}}$$

un saskaņā ar līdzojumu (6): $\Delta h'_{n-2}=\frac{B_{n-2}}{A_{n-2}}=\frac{954}{40093{,}75}=0{,}0238$ m.

Kā redzams, nākamā posmā uz augšu varēs pieņemt

$$I_{n-1}=\frac{0{,}0238}{s_{n-1}-s_{n-2}}\approx\frac{0{,}024}{2\,.\,10^3}=\frac{12}{10^6}=12\,.\,10^6.$$

(Par noapaļošanas motīviem skat. augstāk.)

# Ein besonderes Verfahren zum Aufbau der Staukurven in irregulären Flussläufen.

## Autoreferat.

Das bis jetzt zu diesem Zweck verwendete Verfahren der sukzessiven Approximation ist sehr langwierig und zeitraubend. Es bestand darin, dass man in einem Querschnitte stromaufwärts die Kote des Wasserspiegels willkürlich wählte und dann dieselbe mittelst der potamohydraulischen Gleichung von D. Bernoulli nachprüfte, ob die letztere sich in die Identität verwandelte oder nicht. Wenn nicht, dann wurde eine neue Kote gewählt und die Operation wiederholt, bis die anzustrebende Identität zustande kam.

Das vom Autor hier vorgeschlagene Verfahren stützt sich auf die Idee der endlichen Differenzen: man differenziert die bekannte potamohydraulische Gleichung von D. Bernoulli und man ersetzt die unendlich kleinen Differenziale der hydraulischen Grössen durch „endliche sehr kleine Differenzen". Durch diese Operation gelangt man jedesma zu einer linearen Gleichung mit nur einer unbekannten Grösse, die dann inbezug auf diese Grösse aufgelöst wird, um die gesuchte Kote des Wasserspiegels zu erhalten, was sehr bequem ist. Es wird weiter gezeigt, dass die Bernoullische Gleichung mit der unbekannten Kote des Wasserspiegels ihrem Wesen nach eine Integralgleichung ist, deren Theorie in der modernen Mathematik viel Aufmerksamkeit gewidmet ist. Das vom Autor vorgeschlagene Verfahren kann also als Lösung derselben gelten.

Die Vorzüge des Verfahrens liegen auf der Hand. An Hand eines Zahlenbeispiels wird das Verfahren beleuchtet. Zum ersten Mal mit Erfolg wurde dasselbe beim Aufbau der Staukurven für das lettische Kraftwerk Kegums — wohl noch nicht in der endgültigen Gestalt dieses Aufsatzes — angewendet.

Das Verfahren ist schon vom Autor, als Leiter des Lehrstuhles für Hydraulik in der Universität in Riga, in den Kursus der speziellen Hydraulik aufgenommen und schon vorgetragen worden.

15,-

AFV Nr. II/00854. Eksemplāru skaits 1100. Papīrs iespiežamais H 1 c 45 kg, 67 X 95 cm, no Jaunciema papīra fabrikas. Iespiests un brošēts Latvijas vērtspapīru spiestuvē 1943. g. Nr. 24607. V 1135.