Par Diraka magnētisko monopolu un Hopfa šķiedrojumu

ZuRD seminārs

Dainis Zeps

dainize@mii.lu.lv

Science and Religion Dialogue interdisciplinary group, University of Latvia

2012.16.11.

Abstract

On Dirac magnetic monopole and Hopf fibration

In this educational paper we consider the Dirac magnetic monopole as a solution of Maxwell equations in analogy of the solution for point electric charge. Vectorial potential for the static charge free Maxwell equations would give null solution, and we follow the Dirac solution to join the charge reference with infinite far point with the Dirac string to make the space topologically simply connected with trivial second homotopy group. We find two solutions for monopole that do not agree between themselves. Besides, in spherical coordinates these solutions don't depend from the radiuss. These are motives to apply for Dirac magnetic monopole a Hopf mapping and corresponding topology. We follow the line of Naber's explanations in (1) with aim to clarify things for ourselves in where necessary. We conclude that the Dirac monopole do all work of electromagnetic field in a sense it establishes necesary space and conditions for its existence in the sense we see these things reflected in our physical theory of electromagnetism. Moreover, this model principally works for other Hopf homotopies too, e.g., at least in the case of mapping $S^7 \to S^4$ too.

Key words: Maxwell equations, Dirac magnetic monopole, vectorial potential, Hopf map, Hopf principal bundle, Hopf fibration, gauge connection

Ievads

Lai noskatāmies Niles Johnson (2) demonstrējumu:

http://www.youtube.com/watch?v=AKotMPGFJYk&feature=related

Vai šīs lekcijas no (3):

http://www.youtube.com/watch?v=ZkRXV620Uvs&list=UUd830OiK7-Pk7vST8LFVe3A&index=4&feature=plcp;

http://www.youtube.com/watch?v=MwOjeSZ1-tE

Cik mums ir svarīgi kaut ko zināt no matemātikas un fizikās? Nu vispirms no to ciešā kopsakara noteikti, bet ievērojot arī mūsu atšķirīgo izglītotību gan vienā gan otrā priekšmetā mums varētu būt apgrūtināti atrast to kopīgo formātu, kā par šīm lietām runāt. Tomēr diskusijas formā varam pēc šāda formāta tiekties un runāt gan pietiekami konkrēti, gan arī pieejami vairākumam un vairākumā situāciju. Mums vienmēr noderīgās nostādnes ir atrodamas Wigner rakstā (1) un Diraka rakstā (2). No vienkāršākās vai gandrīz populārās literatūras šajā virzienā mēs zinām Huang (3) un Penrose (4). Tehniskais populārais līmenis atrodams Lyons (5). Vienkāršākais matemātiskais līmenis fiziķiem atrodams Raševskis (6), Nakahara (7), Isham (8), Naber (9). Matemātiski pieejamā formā ir Landau (10), Penrose un Rindler (11). Jau grūtāk pieejamā literatūra matemātikā būs Marathe (12), Naber (13), Anastassiu (14). Tehniski grūti pieejams būs Naber (15) un (16). Fiziķiem patiks Huang (17) un līdzīga literatūra.

No Naber grāmatas (13) ievada, sk. vii lpp:

> Matemātika un fizikā ir gājusi savus nošķirtus ceļus jau tuvu gadsimtam un ir laiks tam likt beigties. Neviena no tām vairs nevar atļauties neievērot otras problēmas un uzstādījumus. Kāpēc Diraka magnētiskais monopols ir viens pret vienu atbilstībā ar principālo $U(1)$-saišķi pār S^2? Kāpēc Higgs lauks klasificējas pēc topoloģiskajiem tipiem? Kas lika Donaldsonam 1980. gadā meklēt Yang-Mills fizikas vienādojumos atslēgu, lai atšifrētu gludo 4-manifoldu noslēpumus, un kāda fizikāla nojauta kvantu lauku teorijā noveda Witten, četrpadsmit gadus vēlāk, ierosināt nesalīdzināmi vienkāršākos, bet ekvivalentos, Seiberg-Witten vienādojumus kā alternatīvu? Mēs nedomājam šeit atbildēt uz šiem jautājumiem, bet tikai lai veicinātu gaisotni, kurā gan matemātiķi gan fiziķi atzītu nepieciešamību pēc atbildēm.

Jau grāmatā (18) Naber rāda šo viņa jauno ceļu un viņa jauno programātisko uzstādījumu, to lietojot Hawking-Penrose teorēmai par singularitātēm relativitātes teorijā. Bet to te netirzāsim, jo būs pārāk sarežģīti priekš nematemātiska klāstījuma. Pieturēsimies Naber grāmatai (9), no kuras ievada aplūkosim vienkāršāko piemēru, Diraka magnētisko monopolu (19) un Hopfa homotopiju.

Diraka magnētiskais monopols

Kulona likums elektriskā lādiņa q radītam elektriskajam laukam $\vec{E}$: $\vec{E}=(q/\rho^2)\hat{e}_\rho, \rho\neq 0$. Magnētiskais lauks $\vec{B}$ būs identisks nullei: $\vec{B}=\vec{0}, \rho\neq 0$. Elektriskais un magnētiskais lauks apmierina apgabalā $\Re^3-\{(0,0,0)\}$ Maksvela (static, source-free) vienādojumus: $\operatorname{div}\vec{E}=0; \operatorname{div}\vec{B}=0; \operatorname{curl}\vec{E}=0; \operatorname{curl}\vec{B}=0$, $\vec{0}=\{0,0,0\}$ ir atskaitīta, jo tur atrodas elektriskais lādiņš.

Lai arī magnētiskais analogs elektriskajam lādiņam dabā nav konstatēts, Diraks iedomājās to ņemamu vērā un veikt analogu attiecīgu rēķinu, ievedot tādējādi „magnētisko monopolu":

$$\vec{E}=\vec{0}, \vec{B}=\frac{g}{\rho^2}\hat{e}_\rho, \rho\neq 0.$$

Maksvela vienādojumi būs spēkā tajā pašā statiskajā bezavotu formā apgabalā ārpus nulles, kur lādiņš atrodas. Šajā apgabalā eksistē skalārais potenciāls $V(\rho,\phi,\theta)=-g/\rho$. Skalārais potenciāls ir svarīgs elektriskajam laukam, bet magnētiskajam laukam svarīgāks vektoriālais potenciāls, vektora lauks $\vec{A}$, lai izpildās $curl\vec{A}=\vec{B}$, bet apgabalā $\Re^3-\vec{0}$ vektoriālais potenciāls neeksistē. Vajadzētu izpildīties nosacījumam, ka jebkurš atvērts apgabals satur tikai savus punktus. $\Re^3-\vec{0}$ acīmredzami to neizpilda, jo var ietvert sākuma punktu. Vai citādi. Otrā homotopiju grupa nav triviāla, bet vektoriālā potenciāla eksistencei vajadzētu, lai $\pi_2(U)=0$ jebkuram vaļējam apgabalam U .

Lai U ir vaļējs vienkārši sakarīgs apgabals telpā $\Re^3$ un $\vec{F}$ ir gluds vektora lauks apgabalā U . Ja $div\vec{F}=0$ apgabalā U un ja otrā homotopijas grupa $\pi_2(U)$ ir triviāla, tad eksistē gluds vektora lauks $\vec{A}$ apgabalā U , ka izpildās $\operatorname{curl}\vec{A}=\vec{F}$.

Nu re. Visa vaina izrādījās slēpjas apgabala $\Re^3-\vec{0}$ topoloģijā. Šāds apgabals topoloģiski gan ir vienkārši sakarīgs, t.i., fundamentālā grupa ir triviāla, bet otrā homotopijas grupa ir netriviāla, jo eksistē virsma (šajā gadījumā ap $\vec{0}$), kura nav savelkama punktā.

Ko darīja Diraks? Viņš izdomāja Diraka stīgu, scilicet, savienoja nulles punktu ar bezgalīgi tālo punktu – tīri topoloģiska operācija, bet tā telpu pārvērta topoloģiski vienkārši sakarīgā telpā ar triviālu otro homotopijas grupu, priekš kuras jau vektoriālais potenciāls eksistēja. Nepozitīvā z ass ir Diraka stīga $Z_-=\{(0,0,z)\in\Re^3 : z\leq 0\}$. Apgabalā $U_+=\Re^3-Z_-$ jau vektoriālais potenciāls eksistē un tas ir vienāds ar

$$\vec{A}_+(\rho,\phi,\theta) = \frac{g}{\rho\sin\varphi}(1-\cos\varphi)\hat{e}_\theta .$$

Tas pats jādara nenegatīvajai z asij: $Z_+ = \{(0,0,z) \in \Re^3 : z \geq 0\}$, $U_- = \Re^3 - Z_+$ un

$$\vec{A}_-(\rho,\phi,\theta) = \frac{-g}{\rho\sin\varphi}(1+\cos\varphi)\hat{e}_\theta .$$

Abi domēni kopā $\vec{A}_\pm$ aizpilda $\Re^3 - 0 = U_+ \cup U$ apgabalu. Pārklājumā $U_+ \cap U_-$ atrisinājumi $\vec{A}_+$ un $\vec{A}_-$ nesakrīt, jo citādi vektoriālais potenciāls būtu bijis jāeksistē topoloģiski vienkārši nesakarīgajam apgabalam. Un tiešām atrisinājumi atšķiras, dodot

$$\vec{A}_+ - \vec{A}_- = (2g/\rho\sin\varphi)\hat{e}_\rho = \nabla(2g\theta)$$

pārklājumā $U_+ \cap U_-$. Bet kāpēc bija jāceļ satraukums, ja zināms, ka vektoriālais potenciāls uzvedas šādi: $curl\vec{A} = \vec{B} = curl(\vec{A} + \nabla\Omega)$ pie jebkuras reālas gludas funkcijas Ω? Izrādās, ka kvantu mehānikā tā vairs nav, un tas arī izšķīra visu. KM Aharonov Bohm izdomātais eksperiments, kas 1960. gadā arī tika apstiprināts eksperimentāli, parādīja, ka vektora potenciāls var eksistēt un eksistē arī, kad magnētiskais lauks ir identisks ar nulli, un tur izšķirošu lomu spēlē daļiņu kompleksās fāzes, jo tieši fāzes ir tās, kas arī „mijiedarbojas”, kad daļiņas mijiedarbojas. Potenciāla gadījumā noteicošās ir fāzes.

Kas no tā iznāk? Šredingera vienādojums te ienes savas korekcijas, kuras mēs varētu attēlot šādi:

$$\vec{A} \to \vec{A} + \nabla\Omega \Rightarrow \psi \to e^{iq\Omega}\psi ,$$

proti, reālās funkcijas gradientu pavada imaginārā fāzes izmaiņa. Kāda tā būtu $\Omega = 2g\theta$ gadījumā? Katrā gadījumā viļņu funkcijām sanāktu šāda attiecība $\psi_+ = e^{i(2qg\theta)}\psi_-$. Pie $e^{i(4qg\pi)} = 1$ un nosacījuma $qg = \frac{1}{2}n$ viļņu funkcija būs viena visam apgabalam, un tas ir slavenais Diraka kvantēšanas nosacījums. Tas nozīmētu, ja šāds magnētiskais monopols eksistētu, tad tā lādiņam jābūt kvantētam pēc šāda nosacījuma.

Tālāk tiks rādīts, ka Diraka šis kvantēšanas nosacījums ir fizikālā manifestācija tīri topoloģiskam faktam, kas saistīts ar principālo S^1- saišķu pār S^2 klasifikāciju pēc riņķa līnijas S^1 fundamentālās grupas $\pi_1(S^1)$.

Vektoriālo potenciālu vēl var pārrakstīt *formu* formā, $dA = F$, kur A ir 1-forma un F 2-forma:

$$F = (g/\rho^3)(xdy \wedge dz + ydx \wedge dz + zdx \wedge dy),$$

$$\phi_S^{-1}(x,y) = (\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}) = (\frac{z+\bar{z}}{z\bar{z}+1}, \frac{z-\bar{z}}{i(z\bar{z}+1)}, \frac{z\bar{z}-1}{z\bar{z}+1}),$$

$$A_+ = \frac{g}{\rho}\frac{1}{z+\rho}(xdy - ydx) = g(1-\cos\phi)d\theta$$

$$A_- = \frac{g}{\rho}\frac{1}{z-\rho}(xdy - ydx) = -g(1+\cos\phi)d\theta .$$

Labās puses izteikses sfēriskajās koordinātēs nesatur ρ, t.i., izteiksmes rēķināmas uz S^2 $\Re^3$ vietā. Šim faktam izrādās izšķiroša nozīme. Magnētiskā monopola topoloģiju aprakstīs attiecīgi saišķis virs S^2.

Hopfa saišķis

1931. gadā reizē ar Diraka rakstu par magnētisko monopolu parādījās Hopfa raksts par sfēru augstākajām homotopijas grupām.

Lai iedomājamies apkārtnes uz 2-sfēras un projecējam to punktus no sfēras telpā/plaknē $\Re^2$ kas iet caur sfēras centru parastajā veidā ar staru no ziemeļpola ($\{0,0,1)\}$) kā no apkārtnes U_S un dienvidpola($\{0,0,-1)\}$) kā no apkārtnes U_N .

Komponentei no U_S būs attēlojums uz $\Re^2$ $\phi_{S,i} = \frac{p^i}{1-p^3}$ Apgrieztā funkcija gan nav simetriska pēc indeksiem:

$$\phi_S^{-1}(x,y) = (\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}) = (\frac{z+\bar{z}}{z\bar{z}+1}, \frac{z-\bar{z}}{i(z\bar{z}+1)}, \frac{z\bar{z}-1}{z\bar{z}+1})$$

kur $z = x+iy$. $\phi_S(p)$ ir homemorfisms no $\Re^3$ bez zed pozitīvās ass attēlojuma, kas ierobežots uz U_S , uz $\Re^2$. Līdzīgi, izslēdzot dienvidpolu, dabūtu attēlojumu $\phi_{N,i} = \frac{p^i}{1+p^3}$. Punktiem $p \in U_S \cap U_N$ ar $\phi_S(p) = z$ būs $\phi_N(p) = 1/\bar{z}$.

Lai darām to pašu 3-sfērai telpā $\Re^4$ vai labāk C^2: $z_1^2 + z_2^2 = 1$ ir S^3 punkti. Ja identificējam punktus ar vienādu attiecību z_1/z_2 tad dabūjam kompleksu skaitli, kam atbilstošie zedi veidos orbītu telpā S^3, kas pati ir riņķis S^1. Kāds ir šis attēlojums? Izrādās ļoti vienkāršs: attēlojums, kas identificē riņķi ar punktu ir šāds:

$$ir : S^3 \times S^3 \to S^2 : (z_1, z_2) \mapsto (\phi_S)^{-1}(z_1/z_2) \ .$$

Šis attēlojums ir Hopfa attēlojums vienā no tā iespējamajām formām. Tas attēlo orbītu S^1 telpā S^3 par punktu telpā S^2 .

Lai to paskaidrojam precīzāk. Definēsim attēlojumu $P : S^3 \to S^2$, projekcijas operatoru, sekojoši

$P(z^1, z^2) = (\phi_S^*)^{-1}(\dfrac{z^1}{z^2})$. Tas arī ir Hopfa attēlojums

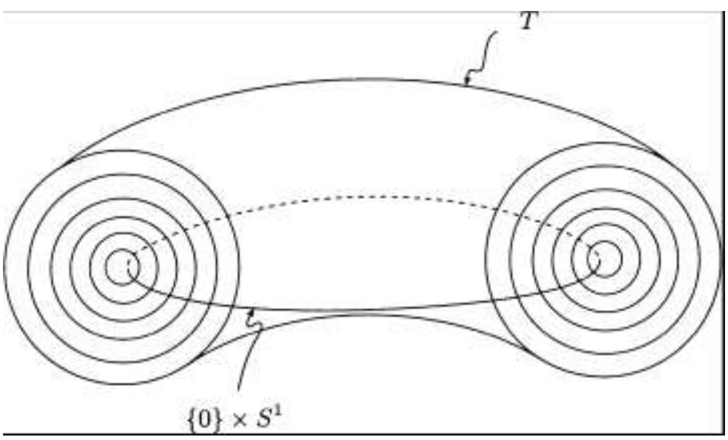
Izmantojot iepriekšējo var iegūt

$$P(z^1, z^2) = (z^1\overline{z}^2 + z^2\overline{z}^1, -\mathbf{i}z^1\overline{z}^2 + \mathbf{i}z^2\overline{z}^1, \left|z^1\right|^2 + \left|z^2\right|^2) \ .$$

To pārrakstot reālajās koorinātēs iegūstam

$$P(x^1, x^2, x^3, x^4) = (2x^1x^2 + 2y^1y^2, 2x^2y^1 - 2x^2y^1, (x^1)^2 + (y^1)^2 - (x^2)^2 - (y^2)^2) .$$

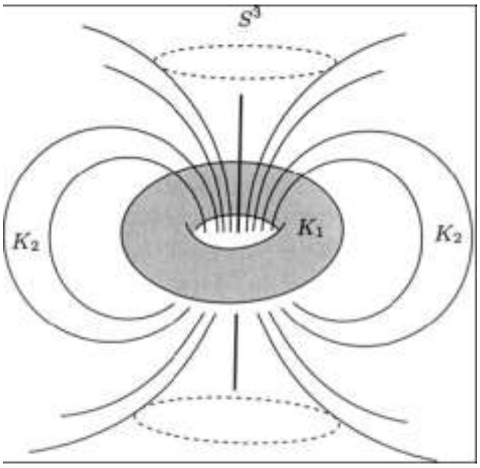
Daži autori ar šo formulu iesāk un tā definē Hopfa attēlojumu, piemēram, Lyons (5), sk. 2. lpp. Pārrakstot punktam P uz S^3 polārajās koordinātēs $(z^1, z^2) = (\cos(\phi/2)e^{\mathbf{i}\xi_1}, \sin(\phi/2)e^{\mathbf{i}\xi_2})$, iegūsim Hopfa attēlojumu $P(\phi, \xi_1, \xi_2) = (\sin\phi\cos(\xi_1 - \xi_2), \sin\phi\sin(\xi_1 - \xi_2), \cos\phi) = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$, kur $\theta = \xi_1 - \xi_2$. Punkts uz S^2 iznāk standarta sfēriskajās koordinātēs. $\theta = \xi_1 - \xi_2$ ir fiksēts šķiedrai, kur $e^{\mathbf{i}\phi}$ pārskraidīs visu šķiedu. Bet projekcijas operatoram argumenti doti diviem kompleksajiem skaitļiem.



Aplūkosim, kā nonākt pie S^3 starpdalošā tora T , sk. attēlā augstāk. T ir virsma, tors, kur zedi ir vienādi pēc normas, kur tora iekšpusi aizpildīs $|z_1| \le |z_2|$ un tora ārpusi otrādie. Tilpums tora T iekšpusē K_1 un ārpusē K_2, sk. attēlā zemāk. Pats tors T izskatās šādi:

$$T = \{(\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\mathbf{i}\xi_1}, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\mathbf{i}\xi_2}) : \xi_1, \xi_2 \in \Re\} \ .$$

Ko projekcijas operators dara? Punkti uz S^3 ar fiksētu zedu normu attiecību attēlojas kā viens punkts uz S^2 , bet paši šie punkti veido grupas $U(1)$ orbītu. Kompleksie pāri ar normām attiecīgi $(0,1)$ un $(1,0)$ veido divas orbītas, viena tora iekšpusē, iedomājies kā deģenerēto toru (sk. bildē augstāk), un otra – tora ārpusē orbīta caur bezgalīgi tālo punktu, otrs deģenerētais tors, sk. attēlā zemāk.



Kā darbojas grupa $U(1)$ sfērā S^3 ? Ja $g \in U(1)$ tad punkts $p = (z_1, z_2)$ uz S^3 paliek uz sfēras, ja uz to iedarbojas $g \in U(1)$ kā grupas elements: $p \cdot g = (z_1, z_2) \cdot g = (z_1 g, z_2 g)$. Viegli seko, ka attēlojums $(p, g) \to p \cdot g$ ir Li grupas $U(1)$ darbība no labās puses manifoldā S^3. Svarīgākais secinājums no šāda ieveduma ir, ka grupas darbības orbīta ir riņķis S^1 . Visi punkti uz 3-sfēras sadalās ekvivalences klasēs, pa orbītām: divas orbītas vai nu sakrīt vai ir distinktas; tas nu attiecas uz 1-sfērām 3-sfēras telpā, tātad 3-sfēra faktorizējas pa 1-sfērām tām identificējoties pārejot 2-sfērā. 1-sfēras ir lielie riņķi 3-sfērā, vēl jāpiezīmē. Tas tad nu ir tas Hopfa šķiedrojums, ko redzam vizualizācijās.

Ar Hopfa saišķa palīdzību paskaidrosim, kas ir saišķis vispārīgāk arī.

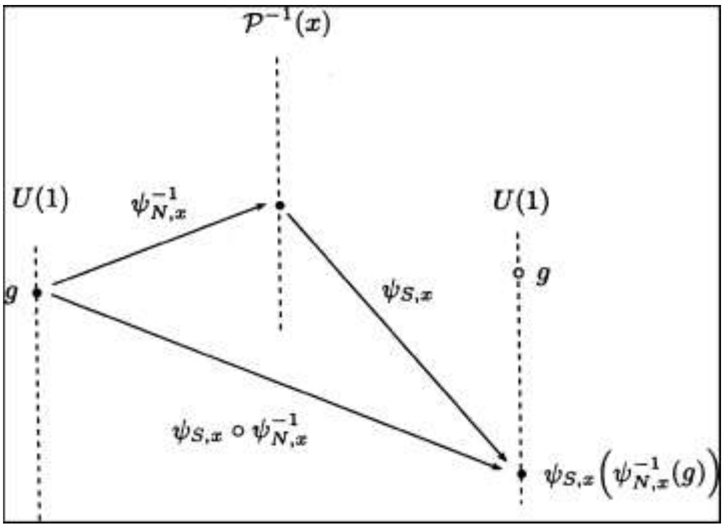
Definēsim principālo saišķi kā manifoldu S^3 (saišķa universālā telpa - total space), manifoldu S^2 (saišķa bāze), projekcijas operatoru – gludu attēlojumu $P: S^3 \to S^2$ un

Li grupu, $U(1)$, kas darbojas saišķa telpā: $((z^1, z^2), g) \mapsto (z^1, z^2)\cdot g = (z^1 g, z^2 g)$, pie kam jāizpildās diviem nosacījumiem:

1) Li grupas darbība saišķa telpā saglabā projekcijas operatora šķiedras, t.i.: visiem punktiem p un grupas elementiem g $P(p\cdot g) = P(p)$, t.i. projekcijas operators grupas orbītu projecē par vienu punktu, un tikai (lpp.216, lemma 4.1.1 (9));
2) (Lokālā trivialitāte) Katram S^2 punktam x_0 eksistē atvērta apkārtne V un difeomorfisms $\Psi : P^{-1}(V) \to V \times G : p \mapsto (P(p), \psi(p))$, kur funkcija $\psi : P^{-1}(V) \to G$ apmierina nosacījumu $\psi(p\cdot g) = \psi(p) g$ visiem punktiem un grupas elementiem.

Prasība 2) šķiet komplicētāka, bet tā vajadzīga, lai formāli nofiksētu faktu, ka principālais saišķis vienmēr lokāli ir „eiklīdisks”, t.i., universālais manifolds ir lokāli difeomorfs bāzes manifolda „eiklīdiskai” apkārtnei reizinātai ar Lī grupas elementa „eiklīdisku” darbību. Tā arī ir principālā saišķa visa būtība. Piemēram, triviālais $U(1)$ -saišķis virs S^2 ar standarta projektīvo operatoru, bijekciju $P : S^2 \times U(1) \to S^2$ iztiek ar vienu apkārtni $V = S^2$, t.i., tas ir globāli triviāls.

Difeomorfismi $\Psi : P^{-1}(V) \to V \times U(1)$ saucas saišķa lokālās trivializācijas un apkārtes V saucas lokālās trivializācijas apkārtnes. Jāseko, kā notiek pārejas starp dažādām šīm apkārtnēm. Lai definējam $\psi_{S,x} = \psi_S \mid P^{-1}(x)$ un $\psi_{N,x} = \psi_N \mid P^{-1}(x)$. Tad kompozīcija $\psi_{S,x} \circ \psi_{N,x}^{-1} : U(1) \to U(1)$ ir difeomorfisms, kas rāda, kā divas definētās lokālās trivializācijas „salīmē” $U(1)$, sk. attēlu zemāk.



Attēls 3.

Lai šīs funkcijas aplūkojam tuvāk. Uzrakstīsim šādas pareizas sakarības:

$\psi_S(z^1,z^2)=(z^1/z^2,z^2/|z^2|)$ un $\psi_N(z^1,z^2)=(z^2/z^1,z^1/|z^1|)$. Tādā gadījumā attiecīgās apgrieztās funkcijas būtu $\Psi_S^{-1}(x,g\frac{z^2}{|z^2|}g)=(z^1,z^2)\cdot g$ un $\Psi_S^{-1}(x,g)=(z^1,z^2)\cdot(g\frac{|z^2|}{z^2})$ un līdzīgi ziemeļu puslodei.

Hopfa saišķa tranzitīvās funkcijas $g_{SN}(x)=\frac{z^2/|z^2|}{z^1/|z^1|}$ un $g_{NS}(x)=\frac{z^1/|z^1|}{z^2/|z^2|}=(g_{SN}(x))^{-1}$,

Tām jāsanāk tādām, ievērojot to sakaru ar ψ funkcijām: $\psi_{S,x}\circ\psi^{-1}{}_{N,x}(g)=g_{SN}(x)g$ un $\psi_{N,x}\circ\psi^{-1}{}_{S,x}(g)=g_{NS}(x)g$. Tranzitīvās funkcijas vēl var uzrakstīt sfēriskajās koordinātēs:

$$g_{SN}(\sin\phi\cos\theta,\sin\phi\sin\theta,\cos\theta)=e^{-\mathrm{i}\theta}$$

$$g_{NS}(\sin\phi\cos\theta,\sin\phi\sin\theta,\cos\theta)=e^{\mathrm{i}\theta}$$

Tieši tādas pašas pārejas mēs redzējām pie vektoriālā potenciāla magnētiskajam monopolam. Nu re kā sakrita!

Ko var redzēt attēlā 3 no rēķinātā? Attēlotas trīs šķiedras 3-sfērā, vidējo nosaka elements x bāzē, kreiso – kāda grupas elementa g darbība uz vidējo šķiedru (kas nojauc starpību $\xi_1-\xi_2$), kur šo pāreju rēķina $\psi_{N,x}(g)$ un labo – grupas elementa $\psi_{N,x}^{-1}(g)$ darbība, tā ka pāreju no labās uz kreiso šķiedru rēķina pārejas funkcija $g_{SN}(x)$. Tādā veidā arī darbojas taises grupa $U(1)$, kas nodrošina pāreju no vienas šķiedras uz otru. Te kaut kā arī jāsanāk tai globālajai saistei: ja paņemsim šķiedru 3-sfērā, tad visa grupa šo šķiedru izdancinās pa visu 3-sfēru, to pārklājot. Pieliksim 2-sfērai kādā „sākuma" punktā tangento plakni ar grupu $U(1)$ piesaistot šim sākumam grupas vienības elementu, un ... kaut kas šādā stilā jādara. Atbilstošā Li algebra būs taises saiste.

Principālā saišķa saiste

Mums būs jādarbojas ar tādām lietām kā taise (gauge) un taises saiste (gauge connection) vai taises lauks (gauge field).

Kā pie tā nonākam? Ar lokāli darbojošamies Lī grupām mums dažkārt nepietiek un vēlamies ko globālu. Izrādās, ka Lī grupām līdzi ejošās Lī algebras dažkārt tieši to dara – darbojas globāli. Tā tas būs arī Hopfa saišķa gadījumā. Monopola potenciāla gadījumā Lī algebra determinējas globāli, vai formāliem vārdiem monopola potenciāls viennozīmīgi determinē Lī algebru kā 1-formu ω virs S^3. To nodrošina fakts, ka Hopfa tranzitīvās funkcijas sakrita ar to, kā mainās monopola potenciāls attiecīgajā pārejā. Te darbojas tā viennozīmīgā atbilstība, ko Naber piesauca sākumā Diraka monopola un Hopfa saišķa gadījumā.

Šīs 1-formas kā Lī algebras (vai attiecīgās ceļa pacelšanas (path lifting) procedūras vai atbilstošās distribūcijas pār saišķa telpu) sauc par saistēm saišķī (vai, fizikālajā literatūrā, taises lauki). Secinājums ir tāds, ka Hopfa saišķis pieļauj saisti ω, kuras apraksts1-formu izteiksmē telpā S^2 sakrīt precīzi ar Diraka monopola (imagināro) potenciālu. Atbilstošā ceļa pacelšanas procedūra telpā S^3 „dara" to, kas jādara monopola klasiskajam vektora potenciālam.

Par principālā saišķa saisti no citiem avotiem

Vispirms no Lyons (6) Hopfa attēlojums izteikts ar kvaternioniem:

$r \mapsto R_r(P_0) = r\mathbf{i}\bar{r}$: ja vienības quaternions punktu $(1,0,0) \in S^2$ pārceļ uz P, Hopfa attēlojums pārceļ r uz P. $h^{-1}(1,0,0) = (\cos t, \sin t, 0, 0), t \in \Re$.

Heyley (19) citē Trautman: Saišķa P grupas G un g: g ir identificējama ar autP apakšgrupu.

Huang (17). Elektromagnētiskais potenciāls ir reprezentēts ar tā saucamo saisti saišķī P(M,U(1)). Pamatā saiste šķiedru saišķī E ir likums, kurš katram punktam no bāzes telpas M liek atbilstībā gludu līkni caur m ar klasi atbilstošu gludu līkņu telpā E, katru caur katru puktu šķiedrā virs m, zināmu kā tā horizontālo liftu/pacēlumu.Tas to dara specificējot kura komponente uzskatāma kā horizontālā komponente katram vektoram katrā punktā u piederošam E, jo katrs tāds vektors norāda, kādā viedā kāda līkne caur u tiek vadīta/novirzīta. Tas viss definē to, kas ir tas, kam priekš katra punkta šķiedrā Fm virs katra punkta m ie M jābūt izlīdzinātam ar attiecīgo punktu katrā no šķiedrām Fm' virs kaimiņu punkta m' bāzē M. Vertikālā komponente katram vektoram E katrā punktā telpā E ir viegli specificēta bez kāda tāda likuma: tā ir definēta ar tangenti pie u līknei šķiedrā Fm, kur m=pi(u). Bet ar to nepietiek, lai fiksētu horizontālo komponenti, jo šķiedru saišķis nedefinē nekādā veidā ortogonalitāti ie E. Saiste pievieno tālāko ģeometrisko struktūru, kas nodrošina to darīt gludi katrā punktā u. To visu precīzi definē ar 1-formām kā Li algebrām.

No Manin (19) grāmatas: Runājot ģeometriski katrā punktā x piederošam F saiste izdala d-dimensiju tangentes horizontālu virzienu apakštelpu , kura $d\pi$ projecē izomorfi uz tangento telpu punktā $\pi(x) \in M$ pi(x) , kur d=dim M.

Lekcijas internetā par Hopfa šķiedrojumu

Ieteicams noskatīties Johnson (19) veidoto Hopfa saišķa demonstrējuma programmu http://www.youtube.com/watch?v=AKotMPGFJYk&feature=related, kas atrodama vietnē http://www.nilesjohnson.net/hopf.html. Vai arī no http://knotplot.com http://www.youtube.com/watch?v=P3k4DaRu9vs&feature=related.

Vēl pieejams sekojošais:

Divas interneta lekcijas vietnē IsAllAboutMath.com (20):

1.daļa:

http://www.youtube.com/watch?v=ZkRXV620Uvs&list=UUd830OiK7-Pk7vST8LFVe3A&index=4&feature=plcp;

2.daļa:

http://www.youtube.com/watch?v=MwOjeSZ1-tE

Te vēl kas cits:

http://www.youtube.com/watch?v=P3k4DaRu9vs&feature=related.

Secinājumi

Jāmācās matemātika. Nu jā, tas ir viens lielais secinājums. Bet vēl?

Secinājumi pa īstam ir grandiozi. Pirmkārt jau liekas, ka tas tikai piemērs ar vienu lādiņu, magnētisko monopolu. Bet patiesībā šis lādiņš izdara to, ko darītu visa elektromagnētiskā mašinērija. Šeit jau viss ir. Šis lādiņš parāda, kur „dzīvo" elektromagnēsms, proti, 4-dimensiju telpā, kur darbojas Lorenca transformācijas, un taises lauks $U(1)$ Hopfa $S^3 \to S^2$ saišķī. Vairāk jau nekā nav. Un to Gregory Naber izsaka vārdiem: Diraka magnētiskais monopols un Hopfa attēlojums ir viens un tas pats. Viņš negrib izdarīt secinājumu un ļauj to darīt fiziķiem.

Par lādiņu un tā kvantēšanu vēl būtiskāk nekā citās lietās darbojas Hopfa topoloģija. Ko fiziķi runāja par lādiņu pirms to cieši saistīja ar Hopfa taises lauku? To varam labi redzēt Huang grāmatās (4; 17) . (4), 70 lpp. mēs lasām: „Lādiņš ir taises transformācijas ģenerators (generator of gauge transformations). Baigi labi, ne!? Otrā pieeja jau saistīta ar Diraka magnētisko monopolu; (4), 91. lpp. lasām par Diraka stīgu. Nu tas jau ir tuvāk mums, bet vēl aizvien kā to atklāja Diraks bez kopsakara ar Hopfa atklājumu. Pirmā nostāja it kā nav kopsakarā ar kvantu mehāniku, bet tomēr tās ietekmēta, jo bez tās diez vai tā nostādne būtu tāda. Otra, Diraka pieeja, jau skaidri nāk no kvantu mehāniskās izpratnes. Bet nu iedomājamies šīs lietas liktas kopsakarā ar Hopfa saišķi un attiecīgo taises lauku. Te nekā no kvantu mehānikas nav; tikai tīra topoloģija. Pie kam ļoti vienkārša: lādiņa kvantēšanu prasa taises grupas $U(1)$

darbība, bet šīs grupas pirmā homotopiskā grupa ir netriviāla, $\pi_1(S^1)$ ir veselie skaitļi. Tas arī iemesls lādiņa kvantēšanai. Ja aizmirstam par kvantu mehāniku, bet zinām tikai Diraka monopola kopsakaru ar $U(1)$ darbību Hopfa saišķī, tad viss mums ir. Pārsteidzoši! Kā to visu saprast?

Bet atgriezīsimies pie Naber programātiskās nostādnes un sakritības monopola un topoloģijas sakarā. Kā šāda sakritība var rasties? Mēģināsim minēt. Elektromagnētisms izmanto „nišu" dabā, kuru matemātiski var raksturot kā Lorenca grupu un Hopfa saistes lauku. Matemātika tātad precīzi raksturo „nišu", kur mīt elektromagnētisms, un vārds „precīzi" nozīmē to, ka elektromagnētisms ar to arī izteikts – nekā cita jau aiz tā vairs neslēpjas. Nu tā – zināma patvaļa šajā spriedumā, bet uz šo brīdi mēs tieša tā to arī redzam.

Bet ir iespējams arī cits uzstādījums un pat ticamāks. Nekādas sakritības nav. Matemātiskais ceļš parāda to, ko mēs no elektromagnētisma – vai kas aiz šā fenomena slēpjas – redzam. Matemātika ir tā acs, kas redz un ir arī mērs tam, cik mēs redzam. Ja kas tur ir vairāk aiz tā, ko redzam, tad uz šo brīdi tas ir viss – mēs redzam tik, cik redzam, kas ir attiecīgais matemātiskais aparāts – un tas ir elektromagnētisms.

Tālāk mēs jautāsim, no kurienes šī redzētspēja, ko saucam par matemātiku? Nu jautājums pats jau vedinās uz labām un sakarīgām atbildēm.

Dixi.

Literatūra

1. **Naber, Gregory L.** *Topology, Geometry and Gauge fields. Foundations.* : Springer, 2011.

2. **Johnson, Niles.** *A Visualization of the Hopf fibration.* Ohio State University, Newark : http://www.nilesjohnson.net/hopf.html, . 2012-10-04, last update.

3. **Leys, Jos and Ghys, Etienne, Alvarez Aurelien.** *Fibration, Fibration Continued.* : in Is All About Math. http://www.isallaboutmath.com/index.aspx.

4. **Wigner, E.** *The unreasonable effectiveness of Mathematics in the natural science.* 1960. pp. 1-14. www.math.ucdavis.edu/~mduchin/111/readings/hamming.pdf.

5. **Dirac, P.A.M.** *The relation between mathematics and physics.* Edinburg : Proceedings of the Royal Society, A, vol 59, (1938-39), pp. 122-129, 1939.

6. **Huang, Kerson.** *Fundamental Forces of Nature. The Story of Gauge Fields.* Singapore : World Scientific, 2007.

7. **Penrose, Roger.** *The Road to Reality. A Complete Guide to the Laws of the Universe.* New Yourk : Vintage Books, 2007.

8. **Lyons, David W.** *An Elementary Introduction to the Hopf Fibration.* AMS : Mathematics Magazine, 2003. Vol. 76(2). 76(2), 87-98.

9. **Rashewsky, Peter.** *Rieman Geometry and Tensor Analysis. In Russian.* 1967.

10. **Nakahara, M.** *Geometry, Topology and Physics.* New York : Taylor & Francis, 2003.

11. **Isham, Chris J.** *Modern Differential Geometry for Physicists.* New Jersey : World Scientific, 2003.

12. **Landau, L.D. un E.M., Lifshitz.** *Mechanics, in Russian.* M : Gosizd. fiz.mat.lit., 1958.

13. **Penrose, Rogen and Rindler, Wolfgang.** *Spinors and Space-Time: Volume 1, Two-Spinor Calculus and Relativistic Fields (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).* London : Cambridge University Press, 1987.

14. **Marathe, K.B. and Martucci, G.** *The Mathematical Foundations of Gauge Theories.* Amsterdam : North Holland, 1992.

15. **Naber, Gregory L.** *Topology, Geometry and Gauge Fields. Interactions.* : Springer, 2011.

16. **Anastassiou, George A., Mallios, Anastasios.** *Modern Differential Geometry in Gauge Theories: Maxwell Fields, Volume I.* : Birkhäuser, 2005.

17. **Naber, Gregory L.** *Topology, Geometry and Physics: Background for the Witten Conjecture, part I.* : Journal of Geometry and Symmetry in Physics, Vol. 2, 2004. 27-123.

18. —. *Topology, Geometry and Physics: Background for the Witten Conjecture II.* : Journal of Geometry and Symmetry in Physics, Vol. 3, 2005. 1-83..

19. **Huang, Kerson.** *Quarks, Leptons and Gauge Fields.* Singapore : Worlds Scientific Publishing Co Pte. Ltd, 1982.

20. **Naber, Gregory L.** *Space time and Singularities. An Introduction.* : Cambridge University Press, 1988.

21. **Dirac, P.A.M.** *The Theory of Magnetic Poles.* Princeton, New Jersey, Institute for Advanced Study : Physical Review, 1948. Vol 74, Num 7, 14pp.

22. **Healey, Richard.** *Gauging What's Real. The Conceptual Foundations of Contemporary Gauge Theories.* : Oxford University Press, 2007. 297pp.

23. **Manin, Yuri I.** *Gauge Fields and Complex Geometry.* transl. from Russian by N. Koblitz, J.R.King : Sringer Verlag, 1988. Russ.orig. 1984.

24. **Jost, Juergen.** *Riemannian Geometry and Geometric Analysis.* : Springer, 2011. 611 pp..

25. **Boothby, William M.** *An Introduction to Differential Manifolds and Riemaannian Geometry. Revised Second Edition.* : Academic Press, 2003. 419pp.

26. **Bleecker, David.** *Gauge Theory and Variational Principles.* Mineola, NY : Dover Publications, Inc., 1981.

27. **Cīrulis, T and V., Neimanis.** *Differential Geometry.* Riga : in Latvian, Diferenciālā ģeometrija, 1990. Zvaigze.

28. **Girard, Patrick R.** *Quaternions, Clifford Algebras and Relativistic Physics.* Basel : Birkhauser, 2007.

29. **Wiki.** *Hopf_fibration.* 2011. http://en.wikipedia.org/wiki/Hopf_fibration.

30. **Schutz, Bernard.** *Geometrical Methods of Mathematical Physics.* : Cambridge University Press, 1988. 250pp.