Paulis Ķikusts

1D polinomiālu funkciju precīzi interpolējoša pikseļa forma

Tehniskais pārskats, 2007. gada rudens, Rīga

Jautājuma nostādne

Principā, par pikseli mēs saucam patvaļīgu funkciju $p(x, y)$, kura kalpo par attēla intensitātes funkcijas $f(x, y)$ formētāju sekojošā veidā

$$f(x, y) = \sum_{k,l \in Z} f(k, l)\, p(x - k, y - l).$$

1D gadījumā tam atbilst

$$f(x) = \sum_{k \in Z} f(k)\, p(x - k) \qquad (1).$$

Redzam, ka izteiksme (1) nozīmē funkcijas $f(x)$ interpolāciju pēc dotām tās vērtībām $f(k)$ pie veselām argumenta vērtībām k. Turklāt nevis vienkāršu interpolāciju, kad tiek piedāvātas kaut kādas vērtības, kas aproksimē doto funkciju starp interpolācijas mezglu punktiem un sakrīt ar funkcijas vērtībām mezglu punktos, bet gan precīzi izsaka pašu funkciju pie visiem argumentiem – teiksim, ka mēs veicam *precīzu interpolāciju*.

Mūsu jautājums ir sekojošs – vai eksistē tādas funkcijas $p(x)$, kas saskaņā ar izteiksmi (1) ļauj precīzi interpolēt polinomus?

Turpmāk funkciju $p(x)$ sauksim par *precīzi interpolējošu funkciju*. Gadījumā, ja $p(x)$ nodrošina tikai interpolāciju, bet ne precīzu interpolāciju, tad to sauksim vienkārši par *interpolējošu funkciju*.

Savukārt pašu šo interpolāciju, kuras būtība ir vienas un tās pašas funkcijas $p(x)$ nobīžu lietošana, dēvēsim par *homogenu interpolāciju*.

Pirmās pakāpes polinoma interpolācija

Ņemsim sekojošu funkciju

$$p(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{ja } |x| \le 1 \\ 0, & \text{pret.gad.} \end{cases}. \qquad (2)$$

Viegli redzēt, ka $p(x)$ nodrošina patvaļīgas funkcijas interpolāciju, jo vienīgi k-tais izteiksmes (1) saskaitāmais piešķir tās vērtību punktā k, pie tam vienādu ar $f(k)$.

Aplūkosim interpolējošo izteiksmi (1) segmentā $[k, k + 1]$:

$$f(k)p(x - k) + f(k + 1)p(x - k - 1) = f(k)(1 - (x - k)) + f(k + 1)(1 + x - k - 1) =$$

$$f(k)(1 - (x - k)) + f(k + 1)(x - k).$$

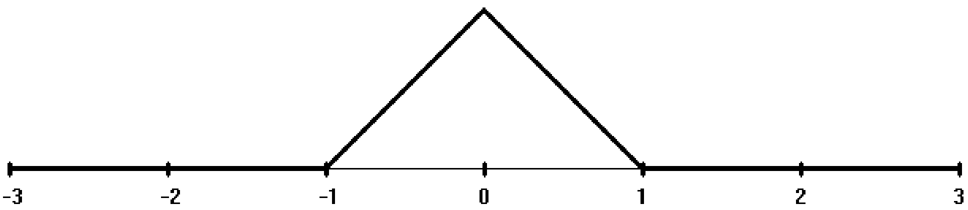
Redzam, ka šajā segmentā tā ir lineāra funkcija, kuras grafiks savieno vērtību punktus $f(k)$ un $f(k + 1)$, tātad $p(x)$ nodrošina tieši lineāru interpolāciju.

Acīmredzami, gadījumā, kad

$$f(x) = ax + b,$$

šī interpolācija ir precīza.

Vērts aplūkot arī interpolējošās funkcijas (2) grafiku



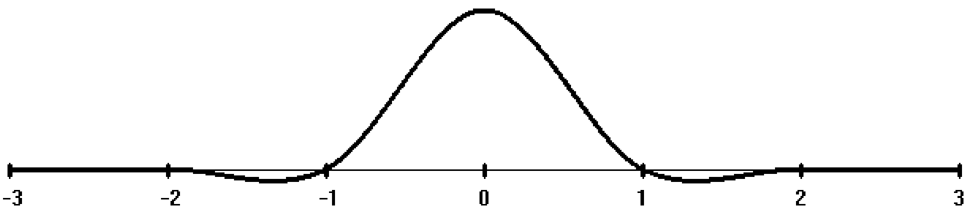
Pirmās pakāpes polinomu precīzi interpolējoša funkcija.

Otrās pakāpes polinoma interpolācija

Kārlim Freivaldam uz Ermita polinomu pamata izdevās izkombinēt sekojošu funkciju:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2(3|x| - 5) + 1, & \text{ja } |x| \le 1 \\ -\frac{1}{2}(|x| - 2)^2(|x| - 1), & \text{ja } |x| \le 2 \\ 0, & \text{pret.gad.} \end{cases} \qquad (3)$$

Šīs funkcijas grafiks:



Uz Ermita polinomu pamata konstruētā interpolējošā funkcija.

Tā kā funkcijas (3) centrālā vērtība ir 1, bet pārējos interpolācijas mezglu punktos 0, tad skaidrs, ka šī funkcija nodrošina jebkuras citas funkcijas interpolāciju saskaņā ar izteiksmi (1).

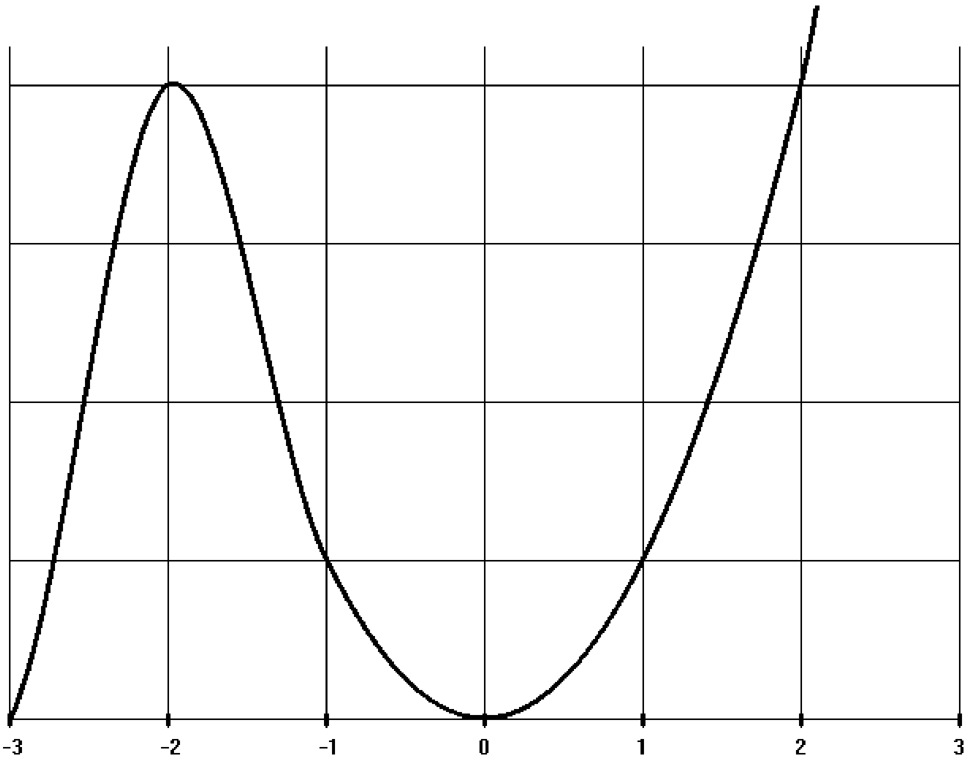
Savukārt eksperimenti liecina, ka pie kvadrātiskām funkcijām notiek precīza to interpolācija.

Piemēram, sekojošā zīmējumā redzam grafiku ar izteiksmi

$$4 \cdot p(x+2) + 1 \cdot p(x+1) + 0 \cdot p(x) + 1 \cdot p(x-1) + 4 \cdot p(x-2) + 9 \cdot p(x-3)$$

definētai funkcijai, kura segmentā [–1, 2] vismaz vizuāli precīzi interpolē funkciju

$$f(x) = x^2:$$



Mēģinājums interpolēt funkciju $f(x) = x^2$ segmentā [–1, 2].

Funkcija (3) vedina pievērsties vispārīgākām funkcijām, bet ar līdzīgu uzbūvi:

$$p(x) = \begin{cases} p1(x), & \text{ja } 1 < |x| \leq 2 \\ p2(x), & \text{ja } 0 < |x| \leq 1 \\ p3(x), & \text{ja } -1 < |x| \leq 0 \\ p4(x), & \text{ja } -2 < |x| \leq -1 \\ 0, & \text{pret.gad.} \end{cases}, \tag{4}$$

kur funkcijas $p1$, $p2$, $p3$, $p4$ ir kubiski polinomi, un izteikt vēlēšanos, lai lineāra kombinācija

$$f(-1) \cdot p(x+1) + f(0) \cdot p(x) + f(1) \cdot p(x-1) + f(2) \cdot p(x-2) \tag{5}$$

segmentā [–1, 1] precīzi interpolētu funkciju

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

pie patvaļīgiem a, b, c.

Nav grūti redzēt, ka tādā gadījumā izteiksme (1) interpolētu $ax^2 + bx + c$ pie visiem x.

Segmentā [–1, 1] izteiksme (5) ir pārrakstāma sekojoši:

$$f(-1)\cdot p1(x+1) + f(0)\cdot p2(x) + f(1)\cdot p3(x-1) + f(2)\cdot p4(x-2).$$

Četras nezināmās funkcijas meklēsim formā:

$$\begin{aligned}
p1(x+1) &= a1\cdot x^3 + b1\cdot x^2 + c1\cdot x + d1,\\
p2(x) &= a2\cdot x^3 + b2\cdot x^2 + c2\cdot x + d2,\\
p3(x-1) &= a3\cdot x^3 + b3\cdot x^2 + c3\cdot x + d3,\\
p4(x-2) &= a4\cdot x^3 + b4\cdot x^2 + c4\cdot x + d4.
\end{aligned}$$

kas nozīmē, ka pie patvaļīgiem x, a, b, c mēs prasām, lai būtu spēkā identitāte

$$\begin{aligned}
&(a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c)\cdot(a1\cdot x^3 + b1\cdot x^2 + c1\cdot x + d1) +\\
&(a\cdot(0)^2 + b\cdot(0) + c)\cdot(a2\cdot x^3 + b2\cdot x^2 + c2\cdot x + d2) +\\
&(a\cdot(1)^2 + b\cdot(1) + c)\cdot(a3\cdot x^3 + b3\cdot x^2 + c3\cdot x + d3) +\\
&(a\cdot(2)^2 + b\cdot(2) + c)\cdot(a4\cdot x^3 + b4\cdot x^2 + c4\cdot x + d4)
\end{aligned}$$

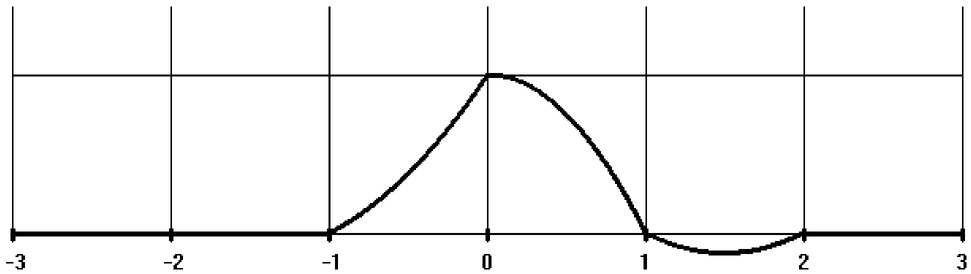
$$\equiv a\cdot x^2 + b\cdot x + c$$

Ar zināmu intelektuālu un fizisku piepūli atrodam sekojošas sakarības starp nezināmo kubisko polinomu 12 koeficientiem:

$$\begin{aligned}
&a1 = -a4,\ a2 = 3a4,\ a3 = -3a4,\\
&b1 = \frac{1}{2} - b4,\ b2 = -1 + 3b4,\ b3 = \frac{1}{2} - 3b4,\\
&c1 = -\frac{1}{2} - c4,\ c2 = 3c4,\ c3 = \frac{1}{2} - 3c4,\\
&d1 = -d4,\ d2 = 1 + 3d4,\ d3 = -3d4.
\end{aligned} \tag{6}$$

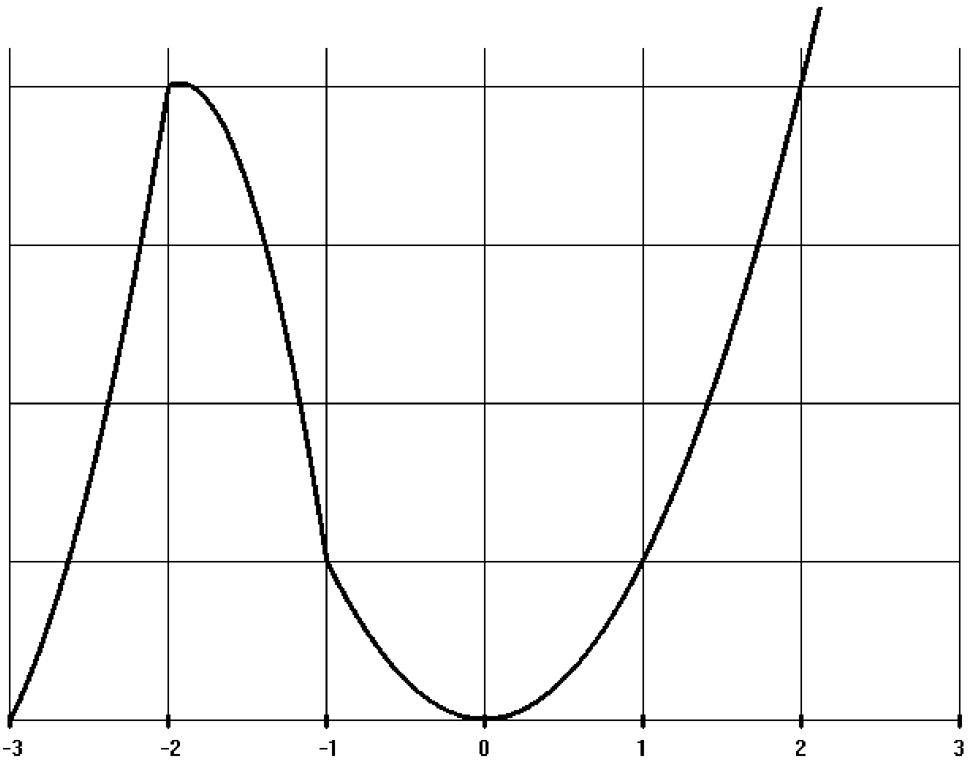
Interesanti, ka veselus četrus koeficientus mēs varam izvēlēties pilnīgi patvaļīgi – konkrētajā risinājumā tie ir $a4$, $b4$, $c4$ un $d4$.

Piemēram, ņemot $a4 = b4 = c4 = d4 = 0$, tiekam pie trim tīri kvadrātiskiem funkciju (4) sastādošajiem fragmentiem:



Aprēķinātā otrās pakāpes polinomu precīzi interpolējošā funkcija,
kas sastādīta no otrās pakāpes polinomiem.

Funkcija $f(x) = x^2$ segmentā [–1, 2] tagad tiek interpolēta precīzi un izskatās sekojoši:



Segmentā [–1, 2] precīzi interpolēta funkcija $f(x) = x^2$.

Uz Ermita polinomiem bāzēto funkciju (3) varam iegūt pie sekojošām brīvo koeficientu vērtībām:

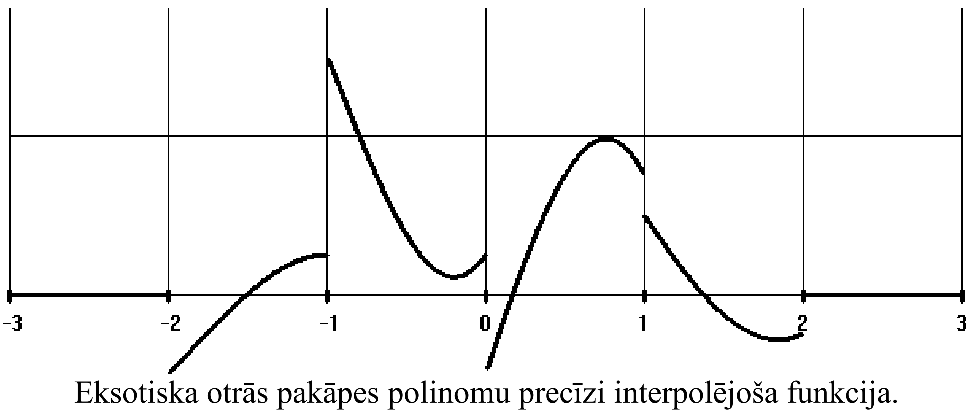
$$a4 = \frac{1}{2},\ b4 = -\frac{1}{2},\ c4 = d4 = 0,$$

un tātad funkcija (3) patiesi precīzi interpolē kvadrātisku funkciju.

Savukārt, pavisam patvaļīgi ņemot

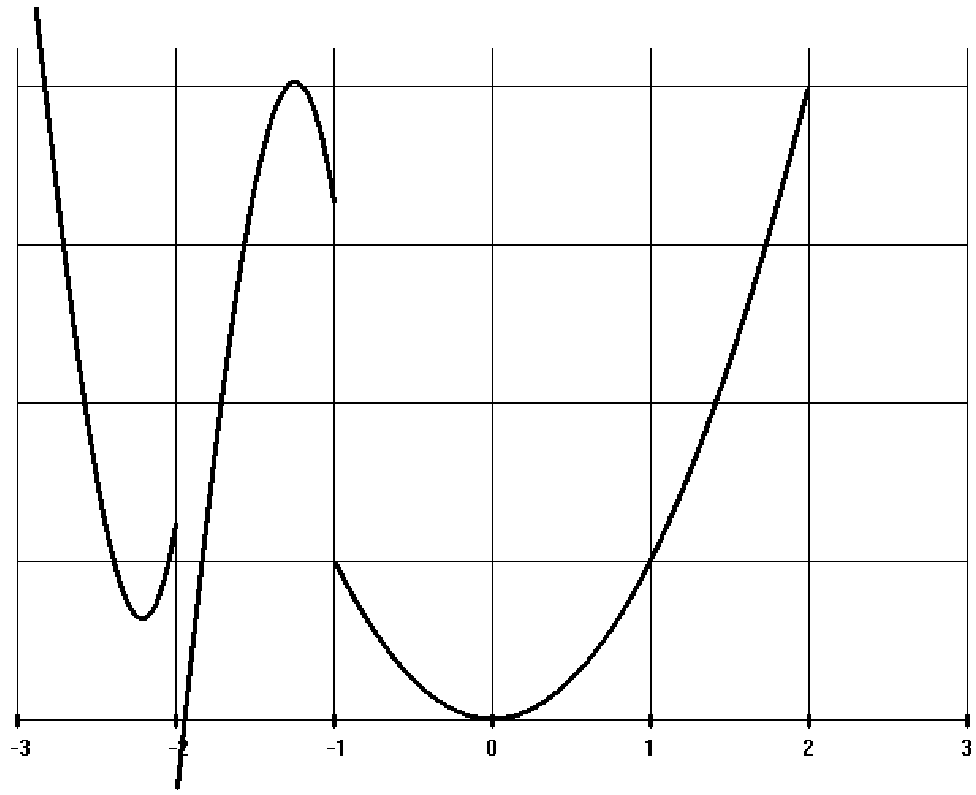
$$a4 = -\frac{1}{2},\ b4 = \frac{1}{4},\ c4 = 1,\ d4 = -\frac{1}{2},$$

iegūstam pavisam eksotisku funkciju:



Eksotiska otrās pakāpes polinomu precīzi interpolējoša funkcija.

Tomēr arī tagad funkcija $f(x) = x^2$ segmentā [–1, 2] tiek interpolēta precīzi:



Ar eksotisko funkciju segmentā [–1, 2] precīzi interpolēta funkcija $f(x) = x^2$.

Ierobežot pilnīgo patvaļu var ar dabisku ir prasību, lai interpolējošā funkcija būtu nepārtraukta.

Šai nolūkā vispirms izsakām mūsu izteiksmes (4) sastāvdaļas polinomu formā:

$$
\begin{aligned}
p1(x) &= a1\cdot(x-1)^3 + b1\cdot(x-1)^2 + c1\cdot(x-1) + d1,\\
p2(x) &= a2\cdot \mathrm{x}^3 + b2\cdot \mathrm{x}^2 + c2\cdot \mathrm{x} + d2,\\
p3(x) &= a3\cdot(x+1)^3 + b3\cdot(x+1)^2 + c3\cdot(x+1) + d3,\\
p4(x) &= a4\cdot(x+2)^3 + b4\cdot(x+2)^2 + c4\cdot(x+2) + d4.
\end{aligned}
$$

Interpolācijas mezglu punktos, ievērojot atrisinājuma sakarības (6), ir spēkā:

$$
\begin{aligned}
p1(2) &= -a4 - b4 - c4 - d4,\\
p1(1) &= -d4,\\
p2(1) &= 3a4 + 3b4 + 3c4 + 3d4,\\
p2(0) &= 1 + 3d4,\\
p3(0) &= -3a4 - 3b4 - 3c4 - 3d4 + 1,\\
p3(-1) &= -3d4,\\
p4(-1) &= a4 + b4 + c4 + d4,\\
p4(-2) &= d4.
\end{aligned}
$$

Nepārtrauktība prasa apmierināt sekojošus nosacījums:

$$
\begin{aligned}
p1(2) &= 0, \\
p1(1) &= p2(1), \\
p2(0) &= p3(0), \\
p3(-1) &= p4(-1), \\
p4(-2) &= 0.
\end{aligned}
$$

No pēdējās vienādības uzreiz izriet

$$d4 = 0,$$

bet pārējās vienādības precizējamas sekojoši:

$$
\begin{aligned}
p1(2) &= -a4 - b4 - c4 = 0, \\
p1(1) &= 0 = p2(1) = 3a4 + 3b4 + 3c4, \\
p2(0) &= 1 = p3(0) = -3a4 - 3b4 - 3c4 + 1, \\
p3(-1) &= 0 = p4(-1) = a4 + b4 + c4, \\
p4(-2) &= 0,
\end{aligned}
$$

kā rezultāts ir viena:

$$a4 + b4 + c4 = 0.$$

Redzam, ka pie šiem nosacījumiem pilnā funkcija $p(x)$ jau atklāti pieņem acīmredzami interpolējošu formu, jo

$$p2(0) = p3(0) = 1$$

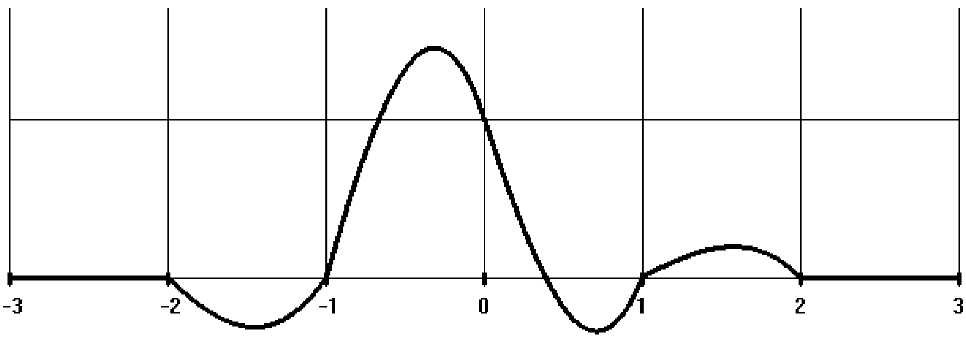
un

$$p1(2) = p1(1) = p2(1) = p3(-1) = p4(-1) = p4(-2) = 0.$$

Piemēram, pie

$$a4 = \frac{1}{2},\ b4 = \frac{1}{2},\ c4 = -1,\ d4 = 0$$

iegūstam sekojoša izskata funkciju:



Aprēķinātā nepārtrauktā otrās pakāpes polinomu precīzi interpolējošā funkcija.

Citas dabiskas prasības ir funkcijas $p(x)$ gludums vai simetrija.

Šai nolūkā polinomu formā izsakām izteiksmes (4) sastāvdaļu atvasinājumus:

$$p1'(x) = 3a1 \cdot (x-1)^2 + 2b1 \cdot (x-1) + c1,$$
$$p2'(x) = 3a2 \cdot \mathrm{x}^2 + 2b2 \cdot \mathrm{x} + c2,$$
$$p3'(x) = 3a3 \cdot (x+1)^2 + 2b3 \cdot (x+1) + c3,$$
$$p4'(x) = 3a4 \cdot (x+2)^2 + 2b4 \cdot (x+2) + c4.$$

Interpolācijas mezglu punktos, ievērojot atrisinājuma sakarības (6), ir spēkā:

$$p1'(2) = -3a4 - 2b4 - c4 + \frac{1}{2},$$
$$p1'(1) = -\frac{1}{2} - c4,$$
$$p2'(1) = 9a4 + 6b4 + 3c4 - 2,$$
$$p2'(0) = 3c4,$$
$$p3'(0) = -9a4 - 6b4 - 3c4 + \frac{3}{2},$$
$$p3'(-1) = \frac{1}{2} - 3c4,$$
$$p4'(-1) = 3a4 + 2b4 + c4,$$
$$p4'(-2) = c4.$$

Atkarībā no konkrētas intereses, mums tagad ir iespējams uzlikt cita veida nosacījumus koeficientiem

$$a4,\ b4,\ c4.$$

Piemēram, paprasīsim ne pārāk daudz – lai mūsu interpolējošā funkcija būtu gluda un simetriska nulles apkārtnē.

Tam nepieciešams tikai

$$p2'(0) = p3'(0) = 0,$$

kas nozīmē

$$c4 = 0 \text{ un } 9a4 + 6b4 = \frac{3}{2}.$$

Tomēr kopā ar nepārtrauktības sakarībām

$$d4 = 0 \text{ un } a4 + b4 + c4 = 0$$

nonākam pie vienīgā atrisinājuma

$$a4 = \frac{1}{2},\ b4 = -\frac{1}{2},\ c4 = d4 = 0,$$

kas, kā jau tika atzīmēts, dod uz Ermita polinomiem bāzēto funkciju (3).

Saprotams, ka nepārtrauktības, gluduma un simetrijas nosacījumus mūsu funkcijas $p(x)$ četru fragmentu starpā varam kombinēt arī citos veidos, tomēr attiecīgie izvedumi tad ir jāveic faktiskās nepieciešamības ietvaros.

Trešās pakāpes polinoma interpolācija

Iepriekš gūtā pieredze šim gadījumam rosina izmēģināt līdzīgas uzbūves funkciju:

$$p(x) = \begin{cases} p1(x), & \text{ja } 2 < |x| \le 3 \\ p2(x), & \text{ja } 1 < |x| \le 2 \\ p3(x), & \text{ja } 0 < |x| \le 1 \\ p4(x), & \text{ja } -1 < |x| \le 0 \\ p5(x), & \text{ja } -2 < |x| \le -1 \\ p6(x), & \text{ja } -3 < |x| \le -2 \\ 0, & \text{pret.gad.} \end{cases}$$

kur funkcijas $p1$, $p2$, $p3$, $p4$, $p5$, $p6$ ir piektās pakāpes polinomi, un izteikt vēlēšanos, lai lineāra kombinācija

$$f(-2)\cdot p(x+2) + f(-1)\cdot p(x+1) + f(0)\cdot p(x) +$$

$$f(1)\cdot p(x-1) + f(2)\cdot p(x-2) + f(3)\cdot p(x-3)$$

segmentā [–1, 1] precīzi interpolētu funkciju

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

pie patvaļīgiem a, b, c, d.

Attiecīgā identitāte ir sekojoša

$$\begin{aligned} &(a\cdot(-2)^3 + b\cdot(-2)^2 + c\cdot(-2) + d)\cdot(a1\cdot x^5 + b1\cdot x^4 + c1\cdot x^3 + d1\cdot x^2 + e1\cdot x + f1) + \\ &(a\cdot(-1)^3 + b\cdot(-1)^2 + c\cdot(-1) + d)\cdot(a2\cdot x^5 + b2\cdot x^4 + c2\cdot x^3 + d2\cdot x^2 + e2\cdot x + f2) + \\ &(a\cdot(0)^3 + b\cdot(0)^2 + c\cdot(0) + d)\cdot(a3\cdot x^5 + b3\cdot x^4 + c3\cdot x^3 + d3\cdot x^2 + e3\cdot x + f3) + \\ &(a\cdot(1)^3 + b\cdot(1)^2 + c\cdot(1) + d)\cdot(a4\cdot x^5 + b4\cdot x^4 + c4\cdot x^3 + d4\cdot x^2 + e4\cdot x + f4) + \\ &(a\cdot(2)^3 + b\cdot(2)^2 + c\cdot(2) + d)\cdot(a5\cdot x^5 + b5\cdot x^4 + c5\cdot x^3 + d5\cdot x^2 + e5\cdot x + f5) + \\ &(a\cdot(3)^3 + b\cdot(3)^2 + c\cdot(3) + d)\cdot(a6\cdot x^5 + b6\cdot x^4 + c6\cdot x^3 + d6\cdot x^2 + e6\cdot x + f6) \end{aligned}$$

$$\equiv a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c\cdot x + d$$

Saprotams, ka tādu uzdevumu risināt labāk uzticēt kādam automātiskam rīkam.

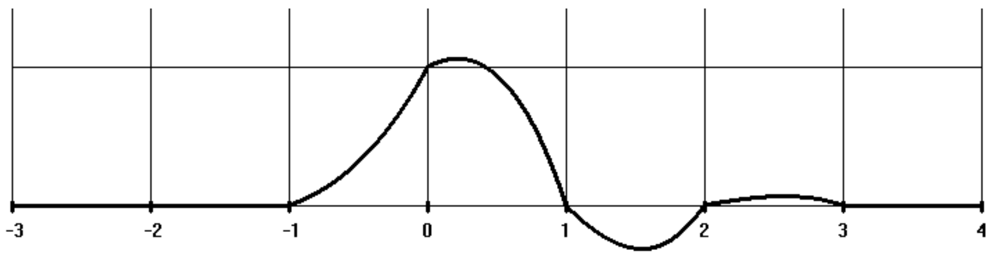
Zemāk redzams ar *Mathematica* iegūts risinājums:

$$
\begin{aligned}
&\{\{a1 \to a5 + 4\,a6,\ a2 \to -4\,a5 - 15\,a6,\ a3 \to 6\,a5 + 20\,a6,\\
&a4 \to -4\,a5 - 10\,a6,\ b1 \to b5 + 4\,b6,\ b2 \to -4\,b5 - 15\,b6,\\
&b3 \to 6\,b5 + 20\,b6,\ b4 \to -4\,b5 - 10\,b6,\ c1 \to -\frac{1}{6} + c5 + 4\,c6,\\
&c2 \to \frac{1}{2} - 4\,c5 - 15\,c6,\ c3 \to -\frac{1}{2} + 6\,c5 + 20\,c6,\\
&c4 \to \frac{1}{6} - 4\,c5 - 10\,c6,\ d1 \to d5 + 4\,d6,\ d2 \to \frac{1}{2} - 4\,d5 - 15\,d6,\\
&d3 \to -1 + 6\,d5 + 20\,d6,\ d4 \to \frac{1}{2} - 4\,d5 - 10\,d6,\\
&e1 \to \frac{1}{6} + e5 + 4\,e6,\ e2 \to -1 - 4\,e5 - 15\,e6,\\
&e3 \to \frac{1}{2} + 6\,e5 + 20\,e6,\ e4 \to \frac{1}{3} - 4\,e5 - 10\,e6,\ f1 \to f5 + 4\,f6,\\
&f2 \to -4\,f5 - 15\,f6,\ f3 \to 1 + 6\,f5 + 20\,f6,\ f4 \to -4\,f5 - 10\,f6\}\}
\end{aligned}
$$

Šoreiz pilnīgi patvaļīgi varam izvēlēties 10 koeficientus no pavisam 36 – konkrētajā risinājumā tie ir

$$a5, b5, c5, d5, e5, f5 \text{ un } a6, b6, c6, d6, e6, f6.$$

Ņemot tos visus vienādus ar 0, iegūstam interpolējošu funkciju, kuras visi fragmenti ir kubiski polinomi:



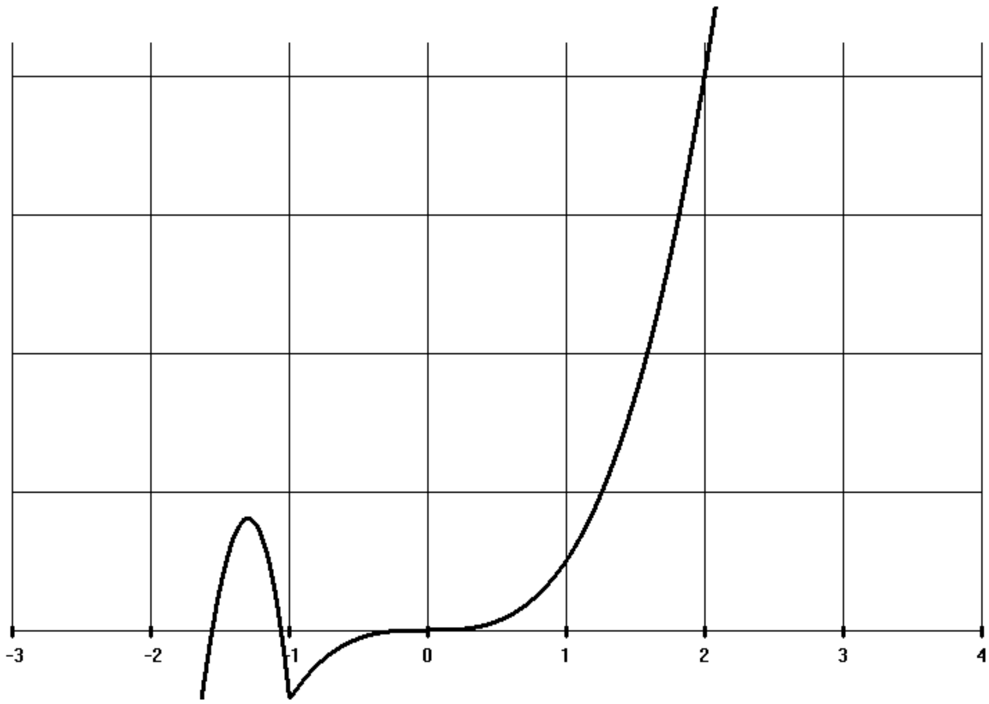
Aprēķinātā trešās pakāpes polinomu precīzi interpolējošā funkcija,
kas sastādīta no trešās pakāpes polinomiem.

Tagad, piemēram, pielietojot izteiksmi

$$-\frac{27}{2}p(x+3) - 4p(x+2) - \frac{1}{2}p(x+1) + 0p(x) + \frac{1}{2}p(x-1) + 4p(x-2) + \frac{27}{2}p(x-3),$$

segmentā [–1, 2] varam precīzi interpolēt funkciju

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3:$$



Segmentā [–1, 2] precīzi interpolēta funkcija $f(x) = \frac{1}{2}x^3$.

Speciāla gadījuma analīze patvaļīgas pakāpes polinomam

Augstāk atrastajiem polinomiem, kas sastādīja funkciju $p(x)$, daļu koeficientu varēja izvēlēties brīvi. Ņemot tos visus vienādus ar nulli, tika iegūti konkrēti n-tās pakāpes polinomi (n = 1, 2, 3), kuri ļāva precīzi interpolēt patvaļīgu attiecīgās pakāpes polinomu.

Aplūkosim šo gadījumu arī patvaļīgai pakāpei n.

Lai dažādu koeficientu indeksēšanas struktūra būtu regulārāka, prasīsim sekojošu nesimetrisku interpolējošās funkcijas formu:

$$p(x) = \begin{cases} p_0(x), & \text{ja } 0 < |x| \le 1 \\ p_1(x), & \text{ja } -1 < |x| \le 0 \\ p_2(x), & \text{ja } -2 < |x| \le -1 \\ \dots \\ p_n(x), & \text{ja } -n < |x| \le -(n-1) \\ 0, & \text{pret.gad.} \end{cases}. \tag{7}$$

Tā kā mūs interesē polinomu $p_i(x)$ nobīžu lineāras kombinācijas tieši segmentā [0, 1], tad prasīsim lai

$$p_i(x-i) = \sum_{j=0}^{n} a_{ij} x^j, \; i = 0, 1, \dots n,$$

ko uzskatāmības labad var uzrakstīt arī izvērsti:

$$p_0(x) = a_{00}x^0 + a_{01}x^1 + a_{02}x^2 + \dots\ a_{0n}x^n ,$$

$$p_1(x-1) = a_{10}x^0 + a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + \dots\ a_{1n}x^n ,$$

$$p_2(x-2) = a_{20}x^0 + a_{21}x^1 + a_{22}x^2 + \dots\ a_{2n}x^n$$

$$\dots$$

$$p_n(x-n) = a_{n0}x^0 + a_{n1}x^1 + a_{n2}x^2 + \dots\ a_{nn}x^n .$$

Mūsu meklējamie lielumi tad ir šo polinomu koeficienti, kuri apvienojami kopējā koeficientu matricā

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & & \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{8}$$

Interpolējamo polinomu pierakstīsim līdzīgi

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots\ a_nx^n . \tag{9}$$

Lai turpmākajās manipulācijās ar simboliem nebūtu problēmu, vienosimies, ka

$$x^0 = 1, \text{ ja } x = 0.$$

Tas, ko mēs prasām, ir atrast tādus koeficientus (8), katram n-tās pakāpes polinomam $f(x)$ (9) izpildītos identitāte

$$\sum_{i=0}^{n} f(i)p_i(x-i) \equiv f(x) ,$$

ko pārrakstām detalizētāk:

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k i^k\right)\left(\sum_{j=0}^{n} a_{ij}x^j\right) \equiv \sum_{j=0}^{n} a_j x^j .$$

Identitātes nosacījums vispirms prasa, lai sakristu koeficienti pie x pakāpēm, tāpēc pēdējo izteiksmi atbilstoši pārrakstām, manipulējot ar summas zīmēm:

$$\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k i^k\right)\right)x^j \equiv \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

un secinām prasību, kurai savukārt jāizpildās pie visiem a_j, j = 0, 1, 2, ... n:

$$\sum_{i=0}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k i^k\right) \equiv a_j . \tag{10}$$

Redzams, ka pēdējā sakarība nozīmē lineāru vienādojumu sistēmu attiecībā pret mūsu meklējamiem koeficientiem, bet ar bezgala daudz vienādojumiem.

Nav grūti noskaidrot, ka šai sistēmai lielākais lineāri neatkarīgo rindu skaits ir $(n+1)^2$, tāpēc, piemēroti izvēloties a_j, $j = 0, 1, 2, \dots n$, komplektus, varam tikt pie nesingulāras apakšsistēmas, kura ir viennozīmīgi atrisināma.

Interesanti, ka viens fiksēts koeficientu komplekts $a_0, a_1, a_2, \dots a_n$ dod vienu vienādojumu atsevišķi katrai nezināmo kolonai no matricas A (8), un šie vienādojumi atšķiras tikai ar to labajām pusēm.

Tātad atliek vien piemēroti izvēlēties koeficientu a_j komplektus, teiksim:

0-tais komplekts – (1, 0, 0, ... 0),
1-tais komplekts – (0, 1, 0, ... 0),
2-tais komplekts – (0, 0, 1, ... 0),
...
n-tais komplekts – (0, 0, 0, ... 1).

Citiem vārdiem, m-tā komplekta, $m = 0, 1, 2, \dots n$, j-to koeficientu ņemam vienādu ar Kronekera delta-funkcijas vērtību

$$\delta(j,m) = \begin{cases} 1, \text{ ja } j = m \\ 0, \text{ ja } j \neq m \end{cases}.$$

Ievietojot to izteiksmē (10), iegūstam vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k=0}^{n} \delta(k,m) \cdot i^k \right) = \delta(j,m) \\ m = 0,1,2,\dots n \end{cases},$$

kuru vēl varam būtiski vienkāršot:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n} a_{ij} i^m = \delta(j,m) \\ m = 0,1,2,\dots n \end{cases}.$$

Kā augstāk atzīmēts, viens fiksēts koeficientu komplekts $a_0, a_1, a_2, \dots a_n$, t.i. fiksēts m, dod vienu vienādojumu atsevišķi katrai nezināmo kolonai no matricas A (8), un šie vienādojumi atšķiras tikai ar to labajām pusēm, kuras, savukārt, tagad ir tikai 0 vai 1.

Tādējādi mēs pēdējo vienādojumu sistēmu matricu formā varam pierakstīt nedaudz netradicionāli:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n \\ 0 & 1 & 4 & \dots & n^2 \\ \dots \\ 0 & 1 & 2^n & \dots & n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Lietojot apzīmējumus, to pārrakstām sekojoši:

$$V(n) \cdot A = E(n),$$

kur ar $E(n)$ apzīmējam n-tās kārtas vienības matricu, bet ar $V(n)$ – n-tās kārtas matricu, kas redzamajā veidā ir sastādīta no nenegatīvo veselo skaitļu pakāpēm.

V(*n*) ir t.s. Vandermonda (Vandermonde) matrica, kuru vispārīgā veidā definē kā tādu matricu, kuras rindas vai kolonas ir ģeometriskās progresijas elementi.

Kas attiecas uz mūsu nezināmajiem koeficientiem, tad atliek vien formulēt rezultātu – matrica *A* ir Vandermonda matricas *V*(*n*) apgrieztā matrica:

$$A = V^{-1}(n).$$

Nobeigumā aplūkosim piemērus pie dažiem *n*:

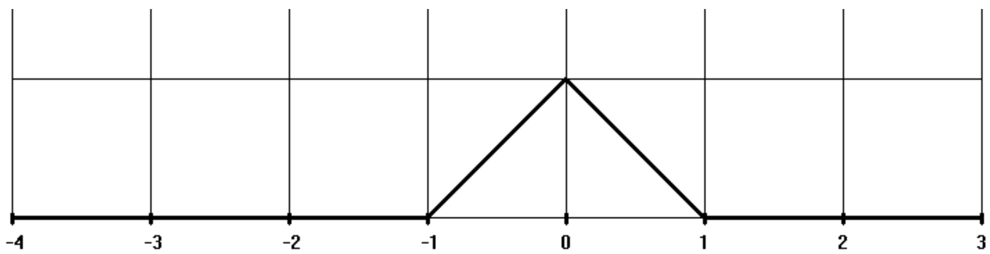
$$V^{-1}(1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$V^{-1}(2) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

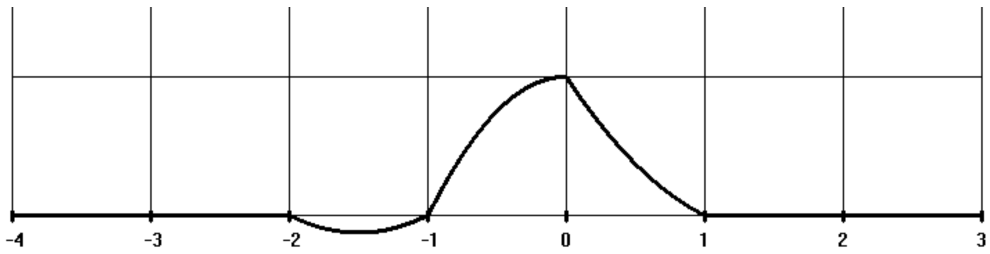
$$V^{-1}(3) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{11}{6} & 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

$$V^{-1}(4) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{25}{12} & \frac{35}{24} & -\frac{5}{12} & \frac{1}{24} \\ 0 & 4 & -\frac{13}{3} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & -3 & \frac{19}{4} & -2 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{7}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{11}{24} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{24} \end{pmatrix}.$$

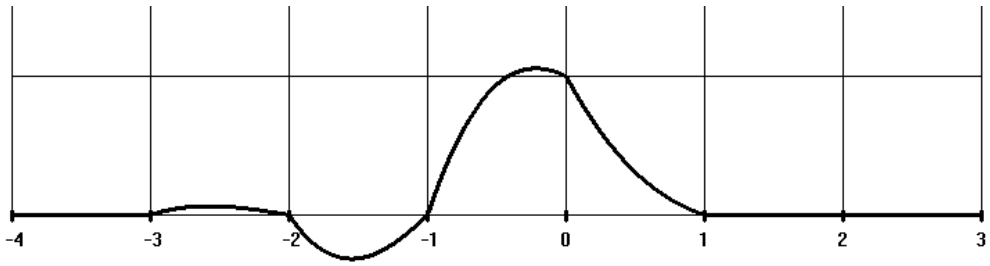
Attiecīgo interpolējošo funkciju *p*(*x*) (7) grafiki ir sekojoši:



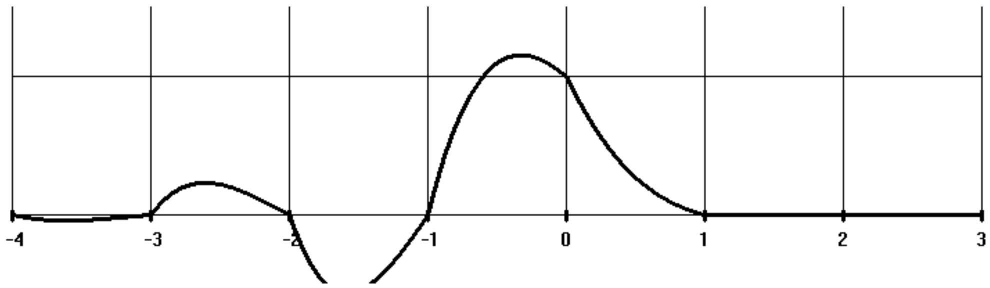
Pirmās pakāpes polinomu precīzi interpolējoša funkcija,
kas sastādīta no pirmās pakāpes polinomiem.



Otrās pakāpes polinomu precīzi interpolējoša funkcija,
kas sastādīta no otrās pakāpes polinomiem.



Trešās pakāpes polinomu precīzi interpolējoša funkcija,
kas sastādīta no trešās pakāpes polinomiem.



Ceturtās pakāpes polinomu precīzi interpolējoša funkcija,
kas sastādīta no ceturtās pakāpes polinomiem.