Pikseļu formas jautājumi rastra attēlu reprezentācijai un apstrādei

Kārlis Freivalds

Paulis Ķikusts

Pikseļu formas nozīme

- Pikseļi ir rastra attēla galvenās sastāvdaļas.
- Klasisks rastra attēls ir kvadrātisku rūtiņu režģa virsotnēs centrēti vienmērīgi aizpildīti krāsu laukumiņi.
- Šie krāsu laukumiņi tad arī ir pikseļi, kuru konkrētā forma ir vienmērīgi krāsoti kvadrāti ar starojuma intensitāti $f(k, l)$ un ar malas garumu vienādu ar rastra soli.
- Sekojošais zīmējums ilustrē attēlu pie diviem šādu pikseļu izmēriem:

- Vai samierināties ar aso, vizuāli nepatīkamo robežu starp pikseļiem?
- Uz monitora ekrāna var samierināties, jo mūsdienu konstrukcijās pikseļu izmēri ir mazi un attēli tiek aplūkoti no pietiekoši liela attāluma.
- Uz papīra – nekādā gadījumā, jo šāds rokās turams attēls ir ļoti piemērots vissīkāko detaļu ievērošanai un neadekvātas detaļas izsauc spēcīgu vizuālu diskomfortu.

- Tātad pikseļu robežas jānogludina.
- Dabisks risinājums – piešķiram pareizas intensitātes režģa virsotņu punktiem, kas ir rastra galvenie punkti, un tīkamā veidā aizpildām telpu starp tiem.
- Citiem vārdiem – risinām interpolācijas uzdevumu.
- Kādu interpolācijas tehniku izvēlēties?
- Rastra regulārā uzbūve aicina vispirms pievērsties tieši uz to orientētiem regulāras interpolācijas mehānismiem.

- Šajā pētījumā mēs attēla starojuma intensitātes funkciju izteiksim sekojoši:

$$\sum_{k,l \in Z} z_{k,l} \cdot p(x-k, y-l),$$

kur $z_{k,l}$ ir starojuma intensitātes vērtības režģa virsotņu punktos, bet funkcija $p(x, y)$ definē pikseļu izskatu, abstrahējoties no to izmēriem.

- Funkcija $p(x, y)$ tad arī ir pikseļa forma, kuru konkretizējam vadoties no dažādiem apsvērumiem.
- Šis interpolācijas modelis atbilst arī plaši lietotajiem tehniskajiem attēlu veidošanas risinājumiem.

- Svarīga vienkāršojoša prasība ir nosacījums

$$p(x, y) = p(x) \cdot p(y).$$

- Piemēram,

$$p(x) = \begin{cases} 1, & \text{ja } |x| \leq \dfrac{1}{2} \\ 0, & \text{pret.gad.} \end{cases}$$

tagad apraksta jau skatītos kvadrātiskos laukumus ar asajām robežām.

- Aso robežu cēloņi ir pikseļa funkcijas *pārtrauktība* un dažādu pikseļu *savstarpējā izolētība*.
- Tāpēc aplūkosim vienkāršāko nepārtraukto gadījumu – t.s. *bilineāro interpolāciju*.
- To nodrošina sekojoša pikseļa funkcija:

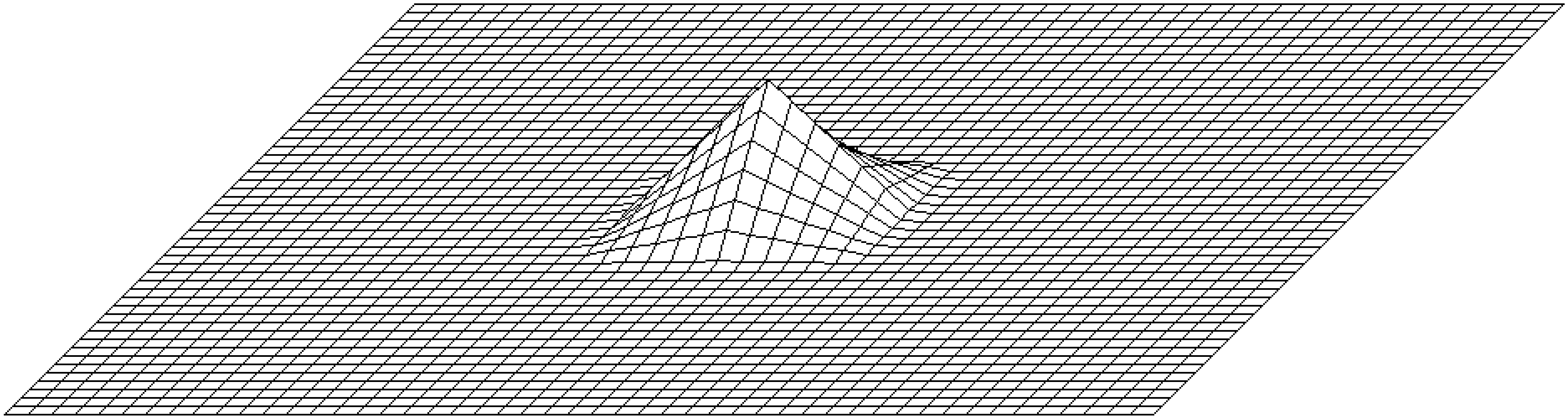
$$p(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{ja } |x| \le 1 \\ 0, & \text{pret.gad.} \end{cases}$$

- Būtiski, ka pie šādas pikseļa formas notiek blakus esošo pikseļu laukumiņu pārklāšanās, tātad pikseļi nav savstarpēji izolēti.

- Šeit redzams viena atsevišķa bilineārās interpolācijas pikseļa pilnas funkcijas

$$p(x, y) = p(x) \cdot p(y)$$

grafiks:



- Tagad atliek vien izvēlēties koeficientus $z_{k,l}$ iepriekš minētajā izteiksmē

$$\sum_{k,l \in Z} z_{k,l} \cdot p(x-k, y-l).$$

- Pirmā ideja ir ņemt

$$z_{k,l} = f(k, l).$$

- Ievērojot, ka $p(0, 0) = 1$, tas nozīmē, ka interpolētā attēla rastra virsotņu punktos mēs nodrošinām dotās vērtības $f(k, l)$.
- Sekojošais zīmējums ilustrē rezultātu pie jau redzētajiem diviem pikseļu izmēriem:

- Kā redzams, tad asās pikseļu robežas ir pilnīgi pazudušas!
- Tomēr, vai izvēle

$$z_{k,l} = f(k, l)$$

  ir labākā?
- Pieņemsim, ka vērtības $f(k, l)$ adekvāti raksturo oriģinālā fizikālā attēla spožuma sadalījumu – ir vienādas ar vidējo intensitāti režģa virsotņu rajonā.
- Šāda īpašība ir dabiska tehniskas sistēmas iegūtiem rastra attēliem.

- Vai mūsu nupat interpolētais attēls to nodrošina?
- Viegli redzēt, ka, atšķirībā no vienmērīgi krāsoto kvadrātisko laukumiņu gadījuma, nenodrošina gan!
- Tātad vērtības $z_{k,l}$ jāizvēlas rūpīgāk.
- Piemēram, prasīsim, lai interpolētajā attēlā

$$vid_{k,l} = f(k, l),$$

kur $vid_{k,l}$ nozīmē interpolētā attēla vidējo intensitāti vienības kvadrātā, kas centrēts rastra režģa virsotnē (k, l).

- Izteiksme

$$\sum_{k,l \in Z} z_{k,l} \cdot p(x-k, y-l)$$

ļauj lielumu $vid_{k,l}$ aprēķināt pavisam vienkārši:

$$vid_{k,l} = \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \int_{l-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} \sum_{i,j \in Z} z_{i,j} \cdot p(x-i, y-j)\, dxdy.$$

- Bilineārās interpolācijas gadījumā aprēķini dod sekojošu rezultātu:

$$vid_{k,l} = \frac{1}{64}\Big(z_{k-1,\,l+1} + 6\,z_{k,\,l+1} + z_{k+1,\,l+1} +$$
$$6\,z_{k-1,\,l} + 36\,z_{k,\,l} + 6\,z_{k+1,\,l} +$$
$$z_{k-1,\,l-1} + 6\,z_{k,\,l-1} + z_{k+1,\,l-1}\Big).$$

- Liekot $vid_{k,l}$ vietā $f(k, l)$, iegūstam viegli atrisināmu lineāru vienādojumu sistēmu attiecībā pret nezināmajiem $z_{k,l}$.
- Sekojošais zīmējums ilustrē jauno bilineārās interpolācijas rezultātu pie jau pazīstamajiem diviem pikseļu izmēriem:

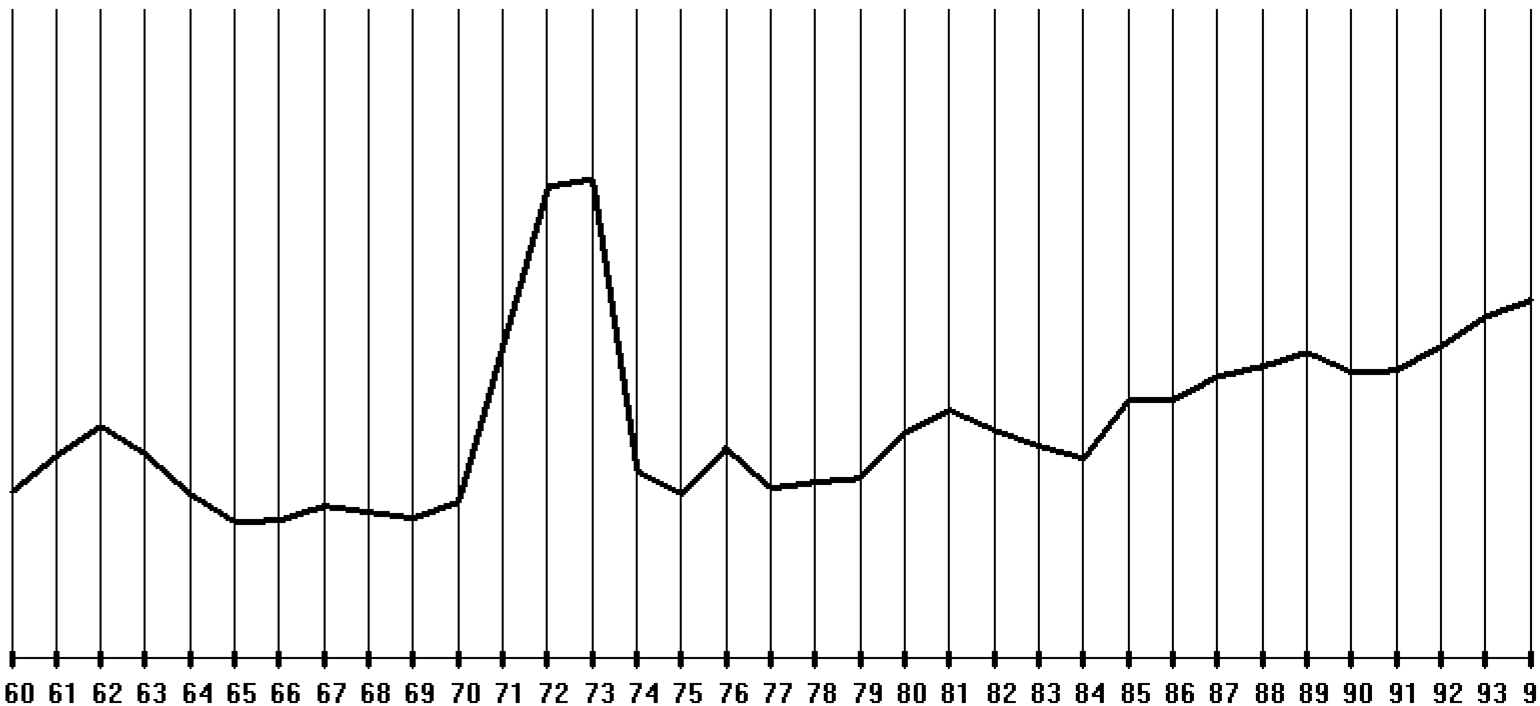

- Uzskatāmības labad aplūkosim arī vienlaicīgi visus trīs dažādi iegūtos interpolētos attēlus pie tiem pašiem diviem atšķirīgiem pikseļu izmēriem:

Gludākas interpolācijas nepieciešamība

- Tagad, kad ar bilineāro interpolāciju esam atbrīvojušies no asajām robežām starp pikseļiem, paskatīsim tuvāk, pie kā esam nonākuši.
- Vieglāk to darīt 1D gadījumā, kad mūsu interpolācijas izteiksme ir vienkāršojama un izsaka lineāro interpolāciju:

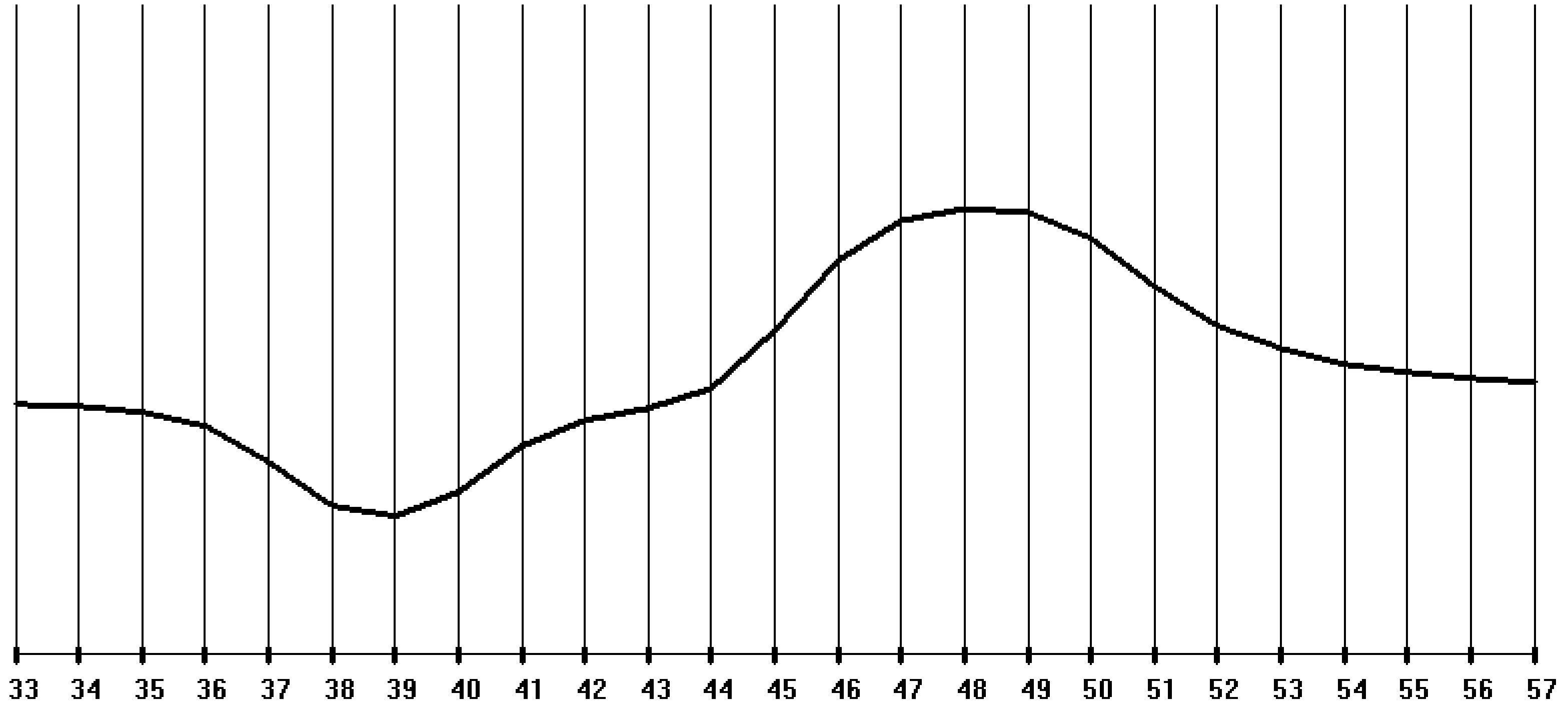
$$\sum_{k \in Z} z_k \cdot p(x-k).$$

- Zīmējums rāda reāla attēla lineāri interpolētas rindiņas fragmentu:



- Attēlos ir bieži sastopamas ļoti gludas intensitāšu izmaiņas, piemēram, debesis, virsmu ēnojumi vai kādi papildus mākslinieciski efekti:

- Tomēr lineārā interpolācija pat tik izteikti gludā gadījumā ir acīmredzami negluda:



- Gludas funkcijas tiek uzskatītas par vienkāršām. Tāpēc būtu labi tādas prast pēc iespējas precīzi interpolēt.
- Vismaz iesākumā, protams, jāaprobežojas ar kādas konkrētas klases funkcijām.
- 1D gadījumā dabiska gludu funkciju klase ir polinomi:

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_0.$$

- Tālāk interesēsimies par šādu polinomu interpolāciju ar pikseļiem.

- Interpolāciju ar pikseļiem prasa attēlu tehnoloģijas.
- Savukārt interpolācijas mūsdienu standarta tehnika ir *splaini*.
- Patvaļīgas funkcijas $f(x)$ interpolācija ar splainu ir summa

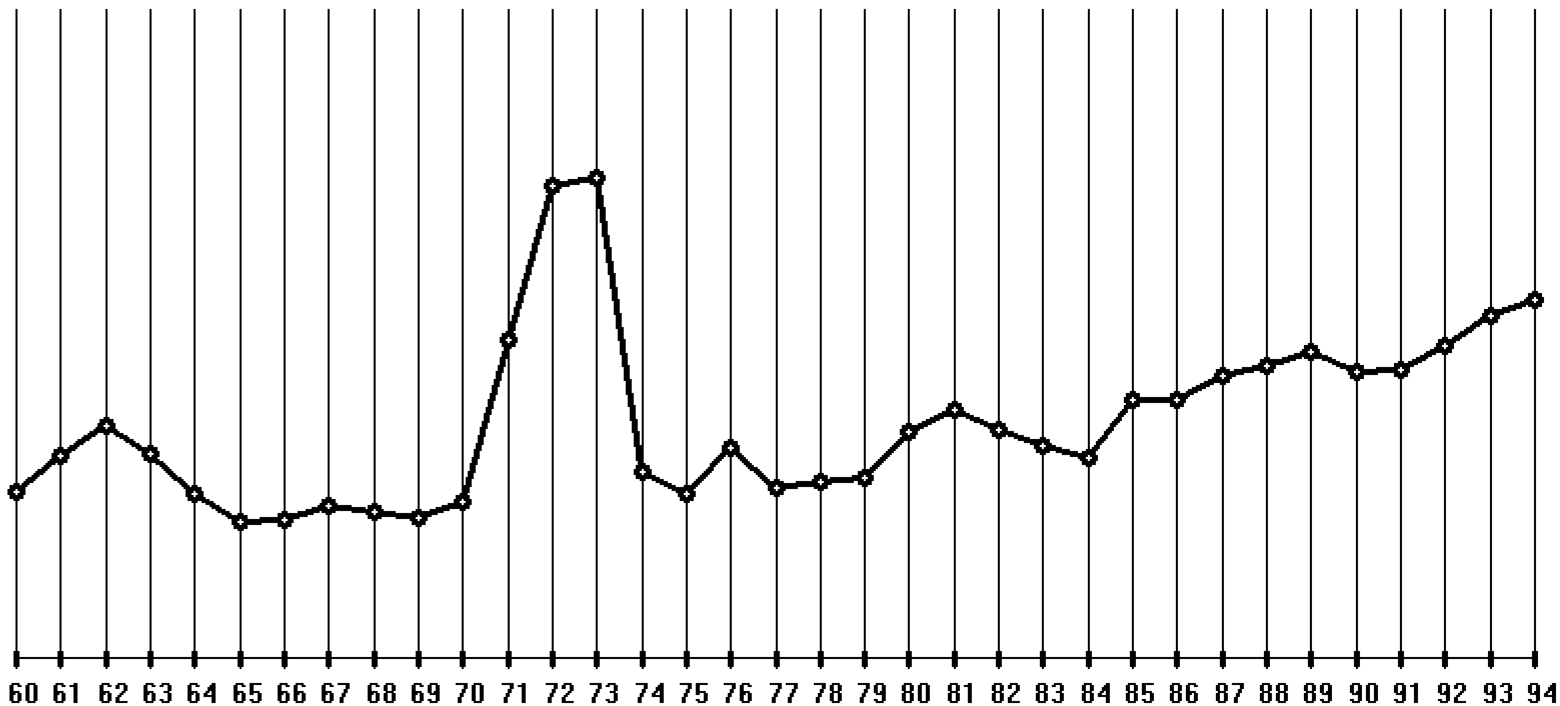
$$\sum_{k \in Z} s_k(x),$$

kur funkcija $s_k(x)$ apmierina nosacījumus

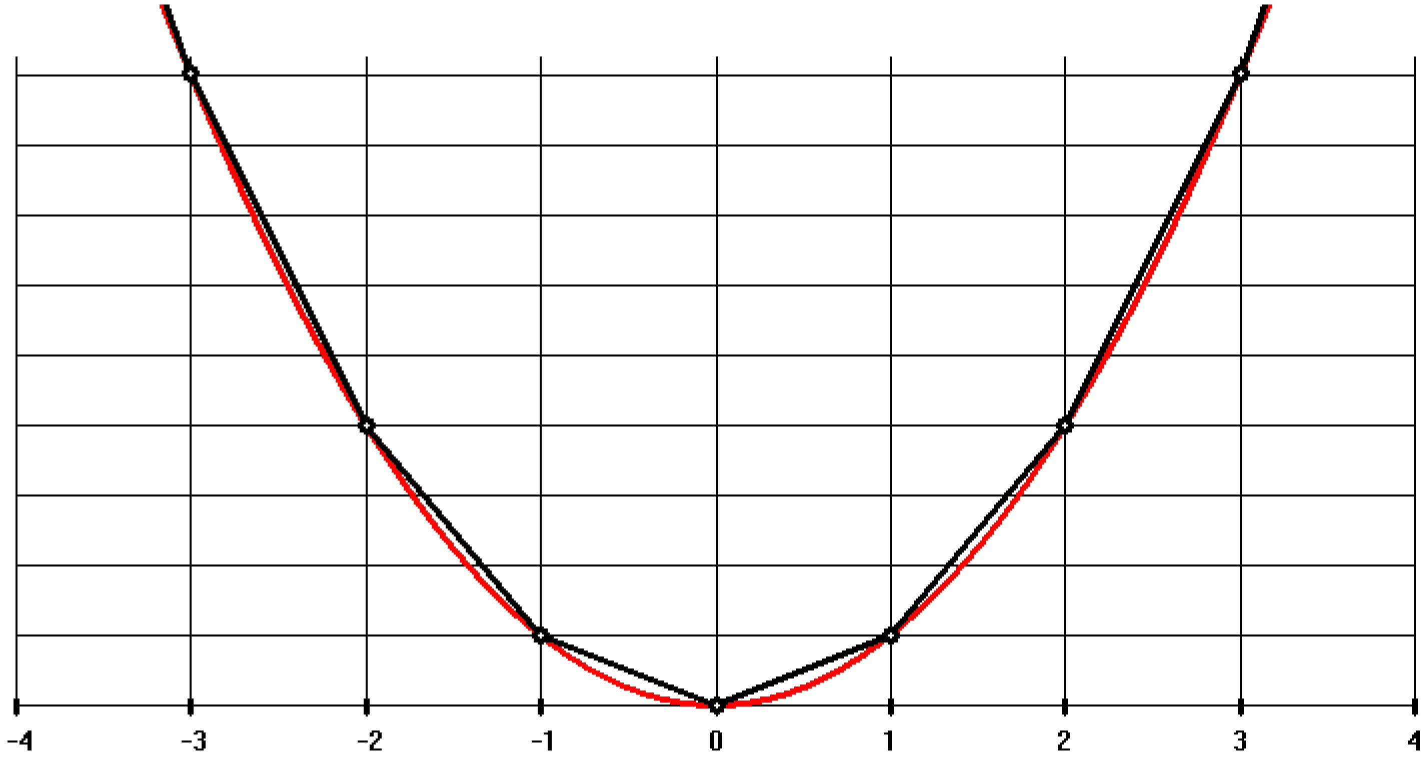
$$s_k(x) = 0, \text{ ja } x < k \text{ vai } x > k + 1,$$

$$s_k(k) = f(k) \text{ un } s_k(k + 1) = f(k + 1).$$

- Lineārā interpolācija ir tāda splaina konstruēšana, kura grafiks ir lauzta līnija no nogriežņiem, kas savieno dotās funkcijas blakus esošos mezglu punktus:



- Saprotams, ka lineāru funkciju šāds splains interpolē pilnīgi precīzi.
- Tomēr jau pie kvadrātiskas funkcijas redzamas nopietnas novirzes:



Augstāku pakāpju polinomiāli pikseļi

- Vispirms definēsim no Lagranža interpolācijas polinomiem veidotus splainus.
- Lagranža interpolācijas bāzes polinomi ir visiem labi pazīstami:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x-j}{i-j}, \; i = 0, 1, \ldots n.$$

- Mūs interesē neliela šo polinomu modifikācija

$$L_i(x) = \left[\prod_{\substack{j=-n_0 \\ j \neq i}}^{n-n_0} \frac{x-j}{i-j} \right]_{0,1}, i = -n_0, -n_0+1, \ldots n-n_0,$$

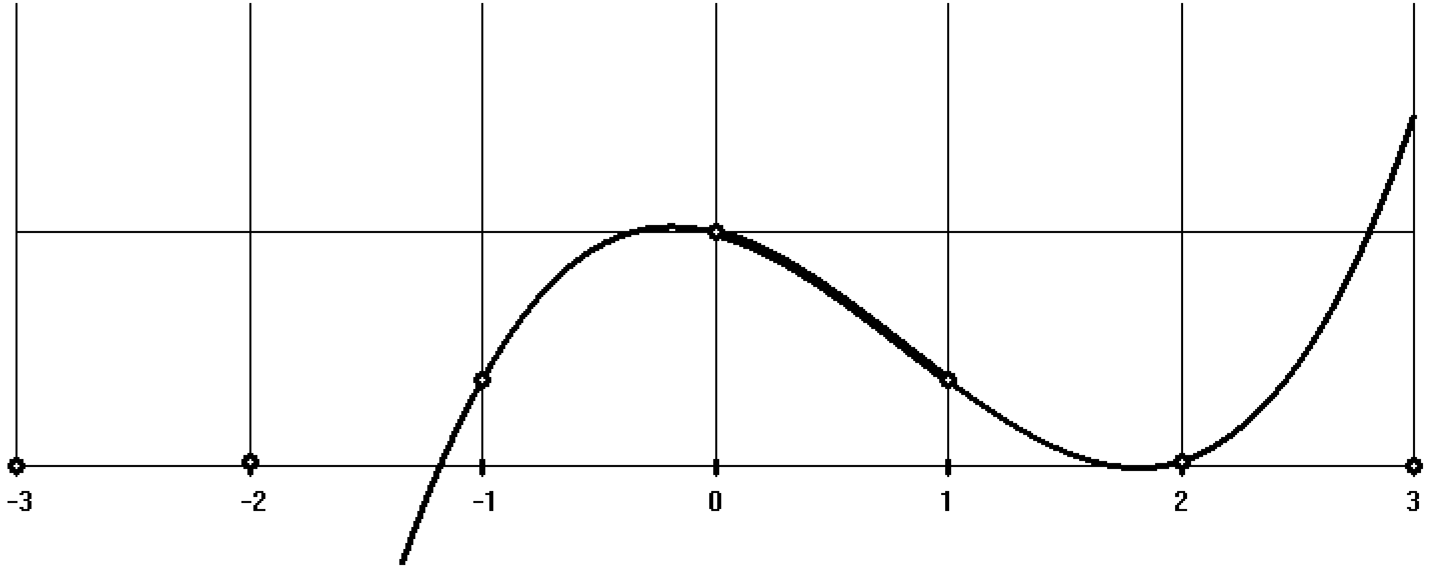
kur $0 \leq n_0 < n$,

bet simbols $[\ ]_{0,1}$ nozīmē, ka funkcija tiek rēķināta tikai segmentā [0, 1], ārpus tā piešķirot vērtību 0.

- Tādējādi segmentā [0, 1] funkciju $f(x)$ interpolē

$$\sum_{i=-n_0}^{n-n_0} f(i) \cdot L_i(x).$$

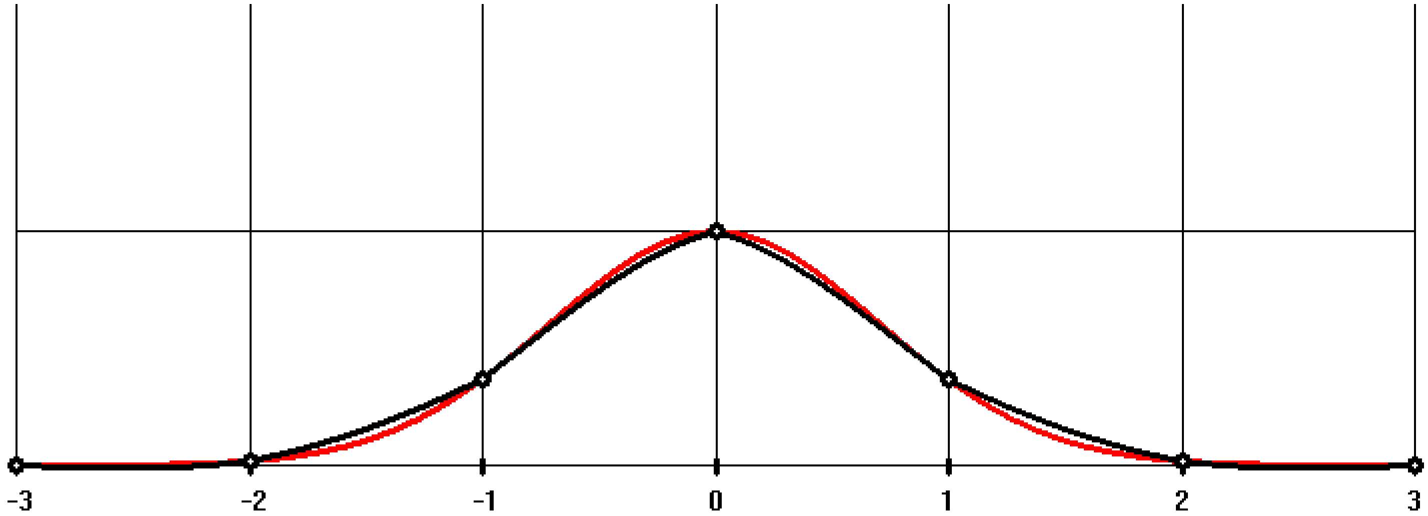
- Piemēram, $\exp(-x^2)$ pie $n = 3$, $n_0 = 1$:



- Savukārt pilns funkciju *f*(*x*) interpolējošs splains uzrakstāms formā

$$\sum_{k\in Z}\sum_{i=-n_0}^{n-n_0} f(k+i)\cdot L_i(x-k).$$

- Piemēram, $\exp(-x^2)$ pie $n = 3$, $n_0 = 1$:



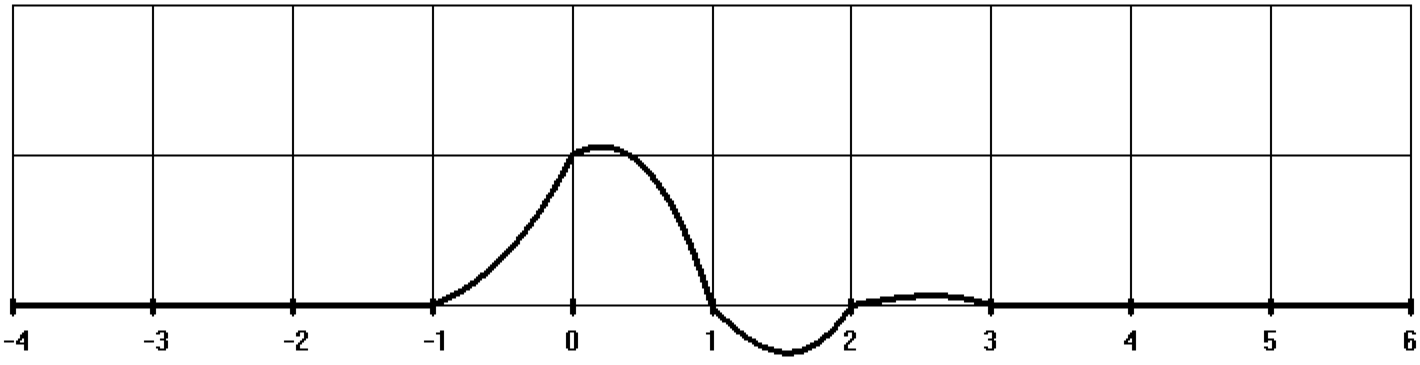
- Saprotams, ka katru *n*-tās pakāpes polinomu šāds no Lagranža interpolācijas polinomiem veidots splains interpolē pilnīgi precīzi, jo visi iesaistītie polinomi savstarpēji sakrīt.

- Pārgrupējot splaina izteiksmes saskaitāmos, atrodam sekojošu sakarību:

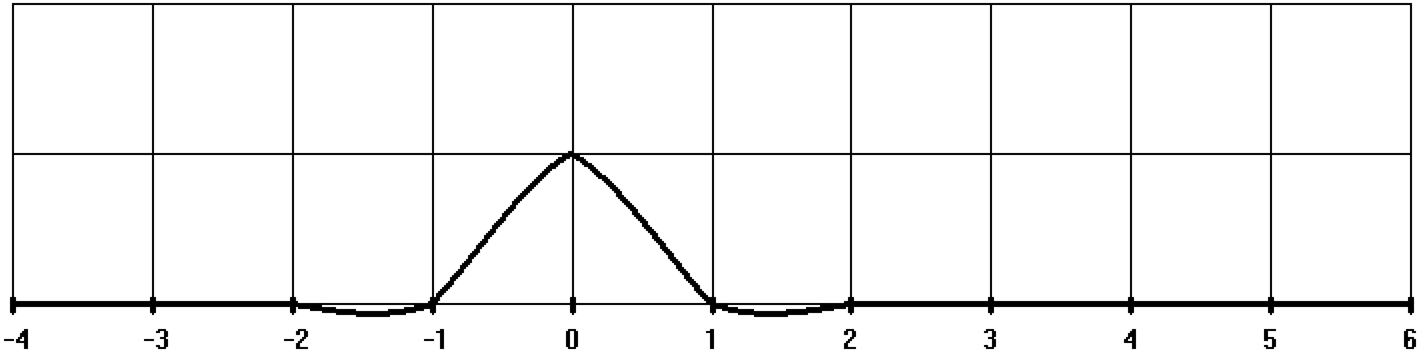
$$\sum_{k\in Z}\sum_{i=-n_0}^{n-n_0} f(k+i)\cdot L_i(x-k) = \sum_{k\in Z} f(k)\sum_{i=-n_0}^{n-n_0} L_i(x-k+i).$$

- Tas nozīmē interpolējošā splaina līdzvērtību interpolācijai pikseļu formā pie pikseļa funkcijas

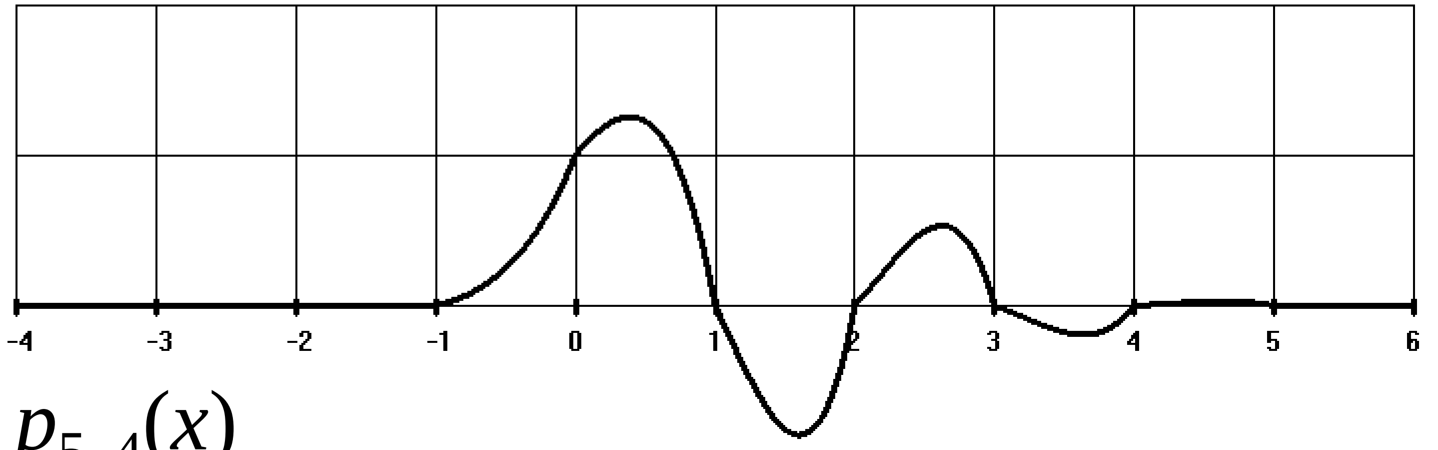
$$p_{n,n_0}(x) = \sum_{i=-n_0}^{n-n_0} L_i(x+i).$$



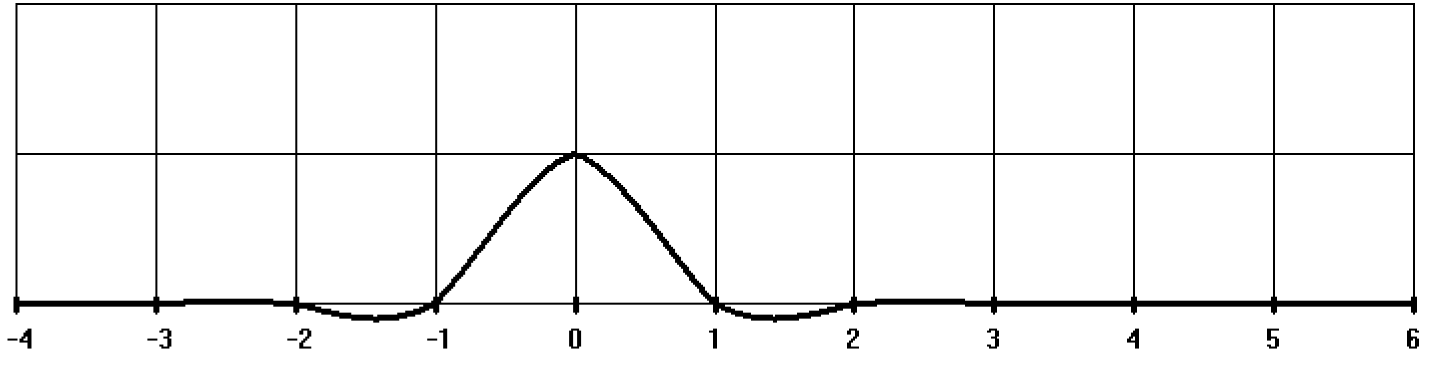
$p_{3,\,2}(x)$



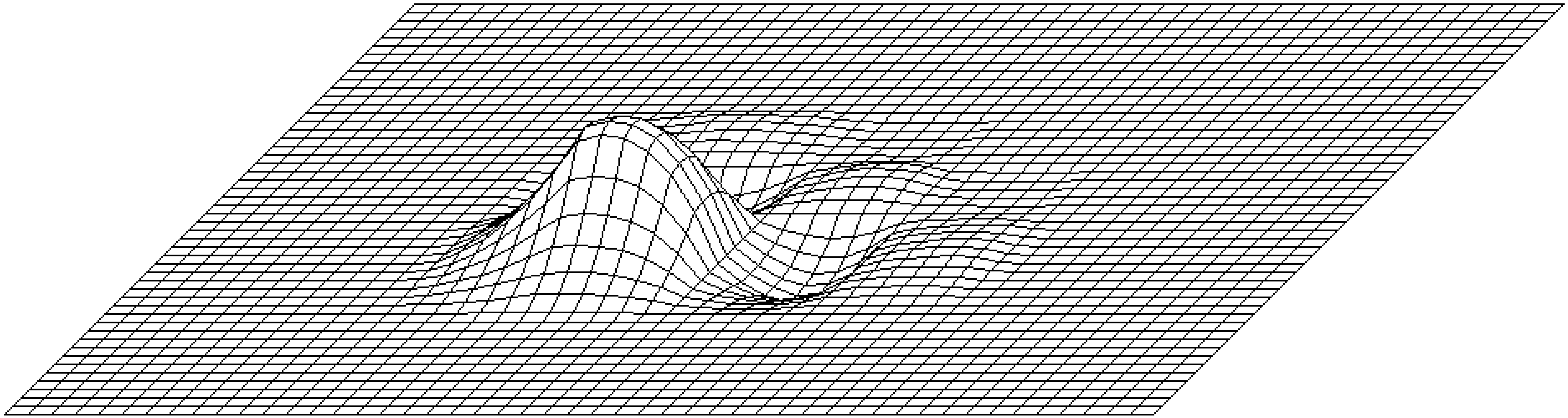
$p_{3,\,1}(x)$



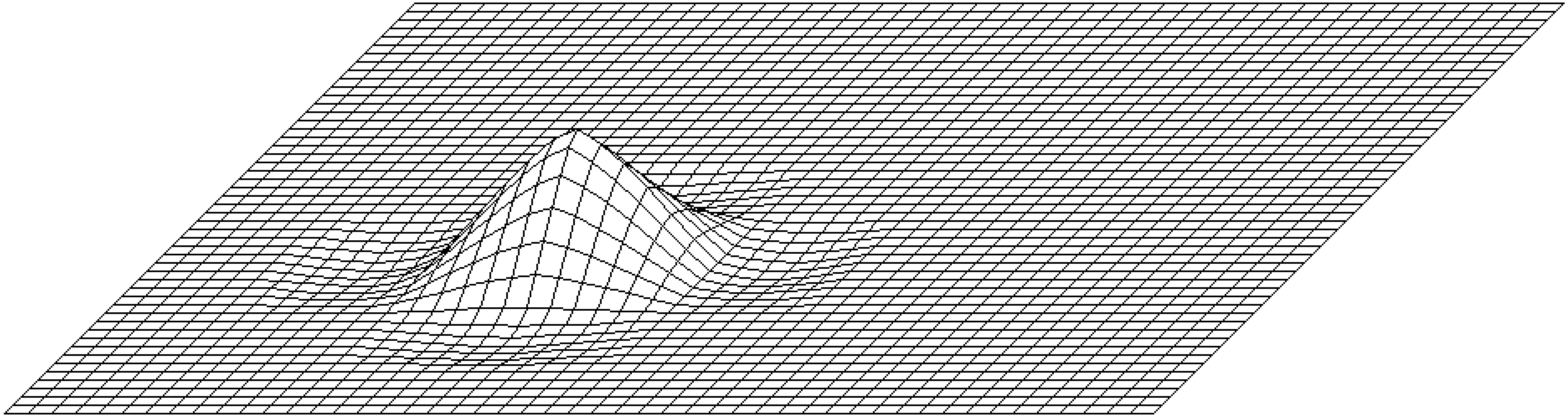
$p_{5,\,4}(x)$



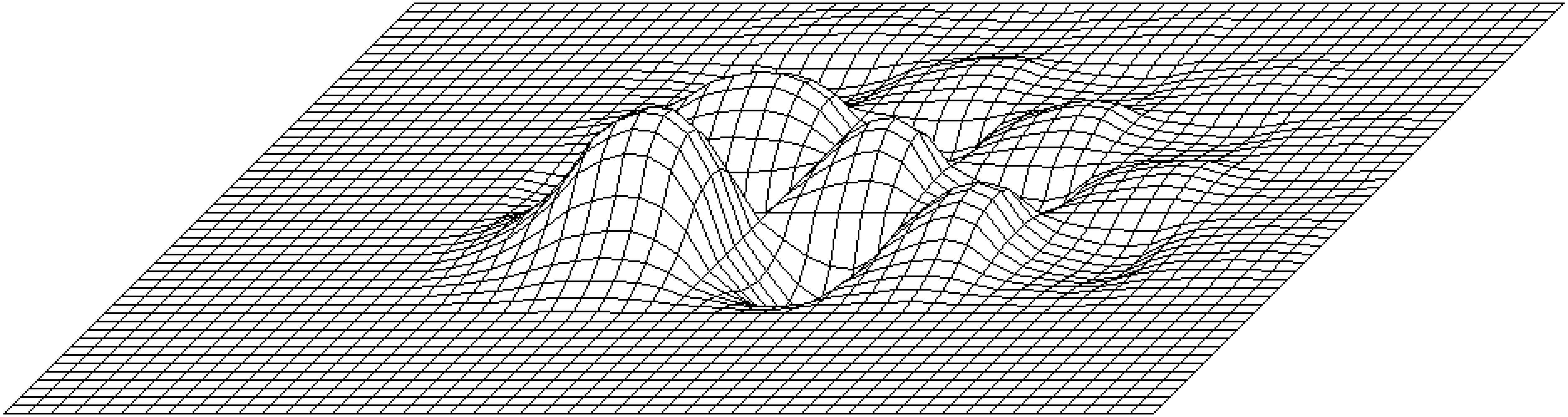
$p_{5,\,2}(x)$



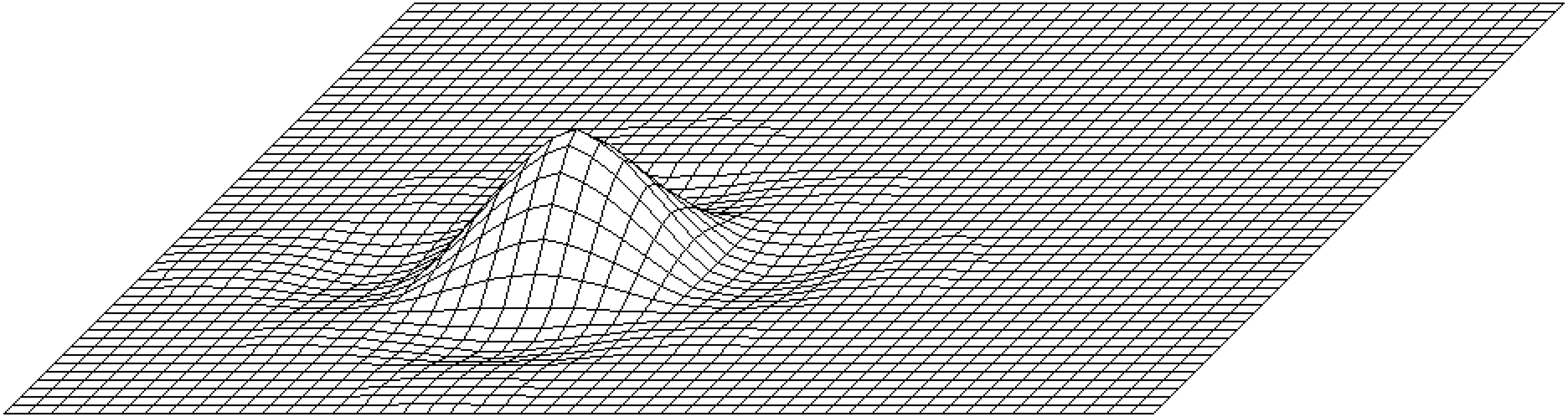
$$p_{3,\,2}(x) \cdot p_{3,\,2}(y)$$



$$p_{3,\,1}(x) \cdot p_{3,\,1}(y)$$



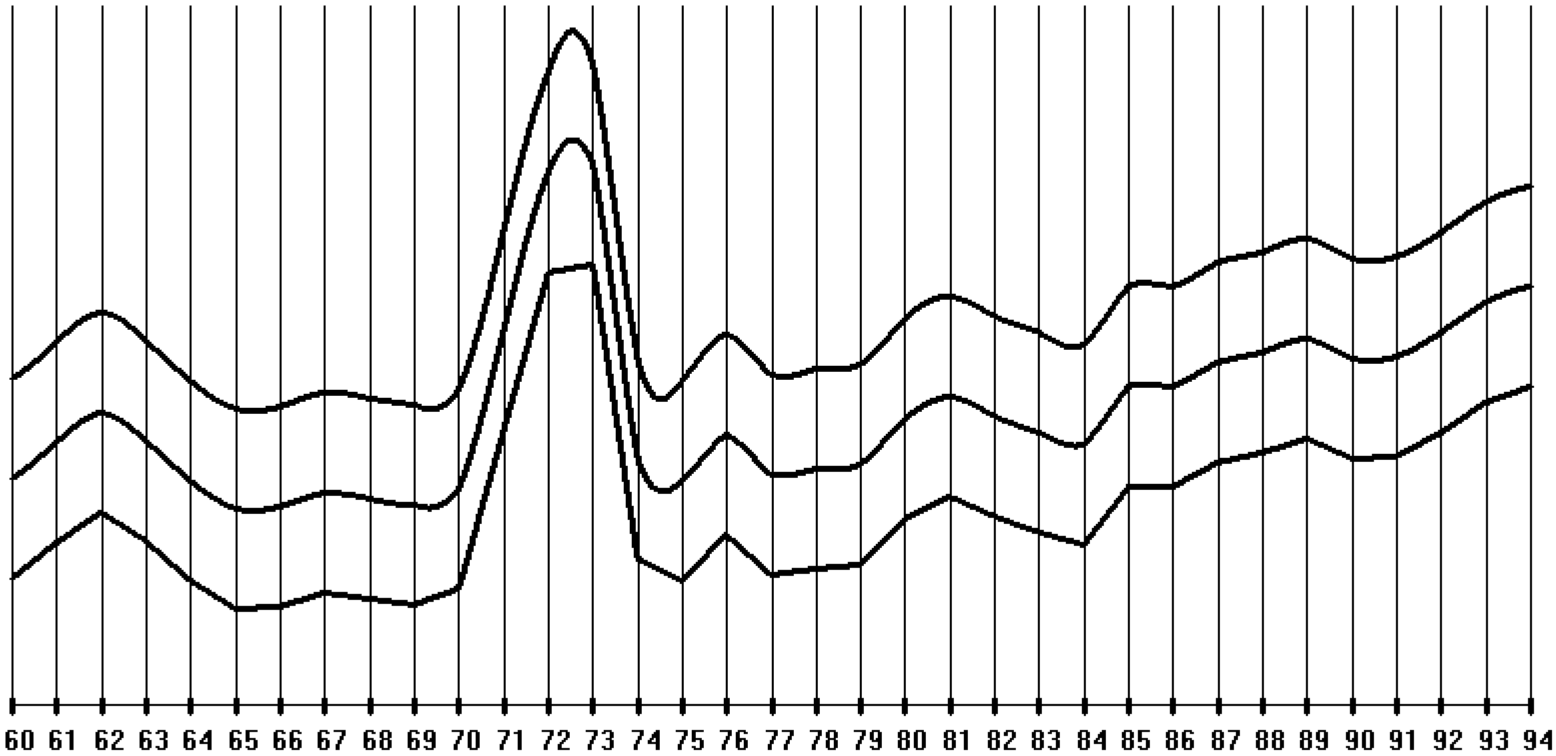
$$p_{5,4}(x) \cdot p_{5,4}(y)$$



$$p_{5,2}(x) \cdot p_{5,2}(y)$$

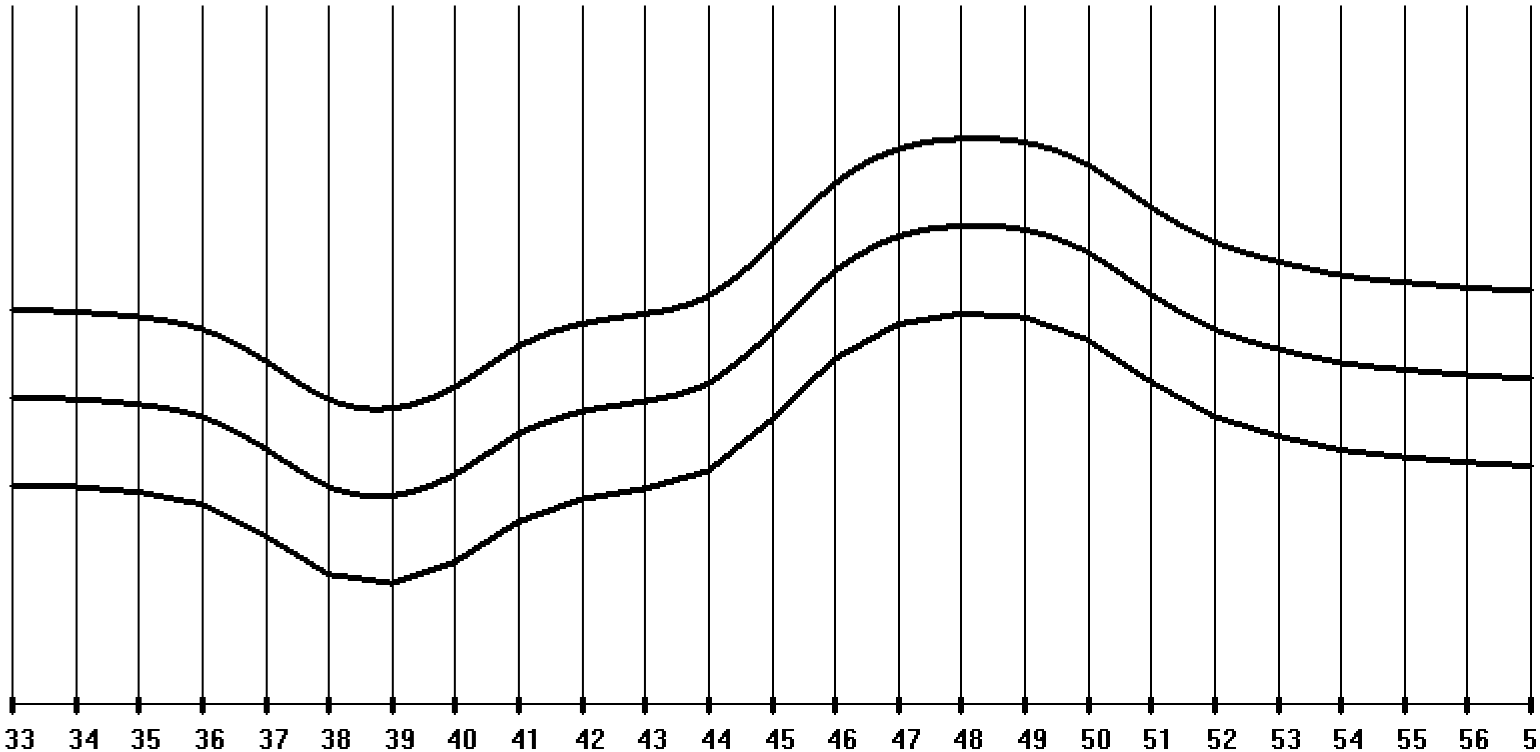
- 1D interpolācija pie dažādiem pikseļiem:

$$p_{1,\,0}(x),\, p_{3,\,1}(x),\, p_{5,\,2}(x)$$



- 1D interpolācija pie dažādiem pikseļiem:

$$p_{1,\,0}(x),\; p_{3,\,1}(x),\; p_{5,\,2}(x)$$



- Noslēgumā atceramies prasību, lai interpolētajā attēlā vidējā intensitāte vienības kvadrātā, kas centrēts rastra režģa virsotnē, būtu vienāda ar $f(k, l)$.
- Pēdējais zīmējums salīdzinājumam ilustrē vienu attiecīgo bilineārās ($p_{1,\,0}(x) \cdot p_{1,\,0}(y)$) interpolācijas rezultātu (pa kreisi) ar attēlu, kurā vidējās intensitātes prasība ir nodrošināta pie pikseļu funkcijas $p_{3,\,1}(x) \cdot p_{3,\,1}(y)$ (pa labi):