SUR LE PROBLÈME FONDAMENTAL DE LA THÉORIE DES FONCTIONS PERMUTABLES

<u>Thèse.</u>

présentée

<u>à la Faculté des Sciences de l'Université de Lettonie</u>

pour obtenir

<u>le grade de docteur ès sciences mathématiques</u>

Par Arvids LŪSIS

Riga, 1937.

Arvids LŪSIS

P E R M U T A B L O F U N K C I J U T E Ō R I J A S P A M A T P R O B L Ē M A

D i s e r t ā c i j a ,

matēmatikas zinātņu doktora grada

iegūšanai iesniegta

Latvijas Universitātes

Matēmatikas un dabas zinātņu fakultātei.

Rīgā, 1937.g.

S A T U R S.

--+o+--

TABLE DES MATIÈRES.

--+0+--

PERMUTABLO FUNKCIJU TEŌRIJAS PAMATPROBLĒMA.

I e v a d s.

Ar 1910. un 1911.g. darbiem /20/, /21/, /22/[+)] Volterra pamato pirmā veida kompozīcijas un permutablo funkciju teōriju, kuŗas sistēmatiskā izlietošana integrālvienādojumu un integrodiferenciālo vienādojumu atrisināšanā dota šī autora monografijās /23/ un /24/. No citiem autoriem, kuŗi drīz pēc minēto darbu publikācijas papildina Volterra teōriju, minēni G.C.Evans un J.Pérès. Pirmā autora darbi /3/, /4/ un /5/ skaŗ galvenā kārtā permutablo funkciju algebru un to izlietojumus, bet otrā autora darbs /11/ - analitiskas permutablas funkcijas. Ar 1916.g. memuāru /27/ Volterra ir stabilizējis permutablo funkciju analisi, ievedot vispārīgo kompozīcijas funkcijas jēdzienu. Tā kā pēdējais ir funkcionāla speciāls veids, tad permutablo funkciju teōrija ir ietilpināma modernajā funkcionālu teōrijā.[++)] Šāda uztvere atrodama modernajos Volterra un Pérès darbos /30/ un /31/, kā arī pirmā veida kompozīcijas un permutablo funkciju teōrijai veltītajā speciālā monografijā /28/.

Salīdzināms pārskats par minēto teōriju ir atrodams sekojošos atreferējumos: /2/, /6/, /17/, /25/.

No plašās pirmā veida permutablo funkciju teōrijas esmu šinī darbā izvēlējies tās p a m a t p r o b l ē m u : n o t e i k t v i s a s n e p ā r t r a u k t a s f u n k c i j a s $\varphi(x,y)$, k a s i r p e r m u t a b l a s a r d o t o f u n k c i j u $f(x,y)$, t. i. k a s a p m i e r i n a i n t e g r ā l s a k a r u

$$\int_y^x \varphi(x,s) f(s,y)\,ds = \int_y^x f(x,s)\,\varphi(s,y)\,ds \quad \text{jeb} \quad \overset{*}{\varphi}\overset{*}{f} = \overset{*}{f}\overset{*}{\varphi}.$$

Šī problēma ir diskutēta vispirms Volterra pamatdarbos /21/ un /22/, kur apskatīti gadījumi, kad $f(x,y)$ ir dotā pirmās, resp. otrās kārtas

---

+) Iekavās // skaitļi norāda darba numuru pieliktajā literātūras sarakstā.

++) Skat., piem., autora darbus: „Līniju funkcijas kā funkcijas jēdziena vispārinājums" (Acta Univ. Latviensis, t. XX, 1929.) un „Funkcionālu teōrijas principi" (I.M. Mēn., Nr.3, 1929.).

funkcija. Vispārīgajā gadījumā, kad funkcijas $f(x,y)$ kārta $n>2$ (n - vesels pozitīvs skaitlis), J.Pérès savā disertācijā /11/ ieved ierobežojumus, pieņemot doto un arī meklējamo funkciju par analitisku. Par minēto pamatproblēmu esmu rakstījis manās publikācijās /9/ un /10/,+) kas noder par bazi šī darba konstrukcijai.

Mani galvenie rezultāti un papildinājumi ir sekojoši. Lai ar jaunu metodi diskutētu pamatproblēmu, šī darba I nodalījumā (§ 4) esmu noteicis kompozīcijas inversijas simbola f^{*-1} izteiksmi vispārējā gadījumā, kad $f(x,y)$ ir n. kārtas un kanoniskās formas funkcija. Darba II nodalījumā minētā izteiksme izlietota pamatproblēmas redukcijai uz jauna tipa integrodiferenciāla vienādojuma atrisināšanu.

Izlietojot transformācijas kanoniskā formā (§ 3) un noslēgtā cikla grupas funkcijas, esmu devis (§ 5, 4. un 5.nod.) atklātu izteiksmi permutablām funkcijām ar pirmās kārtas, resp. n. kārtas funkciju, kas kanoniskā formā reducējas uz vienību, resp. kompozīcijas vienības pakāpi 1^{*n}.

Gadījumā, kad $f(x,y)$ ir pirmās, resp. otrās kārtas un kanoniskās formas funkcija, esmu atrisinājis (§ 6 un § 7) pamatproblēmu, izteicot jauno nezināmo funkciju

$$\psi(x,y) = \int_y^x \varphi(x,s) f(s,y)\,ds = \int_y^x f(x,s)\,\varphi(s,y)\,ds$$

formā

$$\psi(x,y) = \int_0^{x-y} \lambda(\xi)\, K(\xi; x,y)\,d\xi \qquad [\lambda = \lambda(x-y)]$$

un reducējot problēmu uz funkcijas $K(\xi;x,y)$ raksturīgā integrālvienādojuma atrisināšanu. Problēmā ar pirmās kārtas funkciju $f(x,y)$ (§ 6) ir precizēta atrisināšanas formula. Papildinot Volterra vispārīgos norādījumus esmu devis (§ 7) pilnīgu atrisinājumu problēmai ar otrās kārtas funkciju $f(x,y)$ un konstatējis, ka šinī gadījumā permutablām funkcijām $\varphi(x,y)$ derīga Volterra formula:

$$\varphi(x,y) = \lambda(x-y) + \int_0^{x-y} \lambda(\xi)\,\phi(\xi;x,y)\,d\xi.$$

Tādēļ funkciju $\varphi(x,y)$ īpašības, kas pamatojas uz šīs formulas (§ 6),

---

+) Ir atreferējums žurnālā „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik", Bd.56 II, lpp. 1022, Jahrgang 1930.

ir tādas pat kā funkcijām, kas permutablas ar pirmās kārtas funkciju. Bez tam abos minētos gadījumos ir sastādīti funkciju $K(\xi;x,y)$ un $\phi(\xi;x,y)$ noteikšanai jauni raksturīgi funkcionālvienādojumi.

Problēmā ar n. kārtas funkciju $f(x,y)$ (§ 8) norādu uz iespēju sastādītos jauna tipa integrodiferenciālos vienādojumos reducēt uz integrālvienādojumu. Diskutēju arī speciālu gadījumu, kad $f(x,y)$ ir noslēgtā cikla grupas funkcija:

$$f(x,y) = f(x-y).$$

Darba III nodalījumā (§ 10, 1.nod.) esmu izlietojis pamatproblēmā ar speciālu n. kārtas funkciju

$$f(x,y) = \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} + (x-y)^{2n}\omega(x,y)$$

t. s. Pérès transformācijas

$$\Omega(\lambda) = (\overset{x}{1}{}^{o} + \overset{x}{\alpha})\overset{x}{\lambda}(\overset{x}{1}{}^{o} + \overset{x}{\beta}) \qquad [(\overset{x}{1}{}^{o} + \overset{x}{\alpha})(\overset{x}{1}{}^{o} + \overset{x}{\beta}) = (\overset{x}{1}{}^{o} + \overset{x}{\beta})(\overset{x}{1}{}^{o} + \overset{x}{\alpha}) = \overset{x}{1}{}^{o}],$$

un no nosacījuma

$$f(x,y) = \Omega(\overset{x}{1}{}^{n})$$

esmu sastādījis funkciju $\alpha(x,y)$ un $\beta(x,y)$ noteikšanai integrodiferenciālos vienādojumus, kas vispārina J.Pérès atrastos pirmās kārtas funkcijas gadījumā. Ir dots (§ 10, 2.nod.) arī vispārinājums otrai J.Pérès metodei, kad transformācijas veidotājas funkciju $\phi(\xi;x,y)$ nosaka ar tās raksturīgo integrālvienādojumu. Darba noslēgumā Pérès transformācijas izlietotās kompozīcijas binomāla integrālvienādojuma atrisināšanā, un konstatētas permutablo funkciju raksturīgas grupu īpašības.

Manā habilitācijas darbā /8/ apskatīta galvenā kārtā permutablo funkciju izlietošana dažos integrālvienādojumu teōrijas jautājumos. Šinī darbā lietoju tādu pat funkciju dēfinīcijas apgabalu, un tādēļ te vajadzīgas formulas ir jāmodificē, salīdzinot ar Volterra un Pérès pamatdarbiem un manām publikācijām /9/ un /10/.

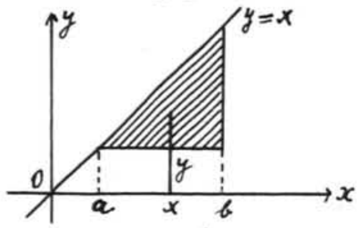
I. KOMPOZĪCIJAS UN PERMUTABLO FUNKCIJU DAŽAS VISPĀRĪGAS ĪPAŠĪBAS.

§ 1. Pirmā veida kompozīcija un permutabilitāte. Simbols $\overset{x}{1^{\circ}}$.

1. Turpmāk lietotas divu reālo mainīgo x, y funkcijas pieņemam par nepārtrauktām dēfinīcijas apgabalā

$$(A) \qquad a \le y \le x \le b,$$

kas attēlots ar zīmējumā nosvītroto trijstūri. Jautājumos, kur vajadzīgi šo funkciju parciālie atvasinājumi, pieņemam to eksistenci un nepārtrauktību dēfinīcijas apgabalā (A).



2. Ar divām funkcijām $f(x,y)$ un $\varphi(x,y)$, kā ar k o m p o n e n t ē m, izpildīto darbību

$$(1) \qquad \overset{x}{f}\overset{x}{\varphi} = \int_y^x f(x,s)\,\varphi(s,y)\,ds$$

sauc par p i r m ā v e i d a k o m p o z ī c i j u un atrasto funkciju $F(x,y) = \overset{x}{f}\overset{x}{\varphi}$ par doto funkciju r e z u l t a n t i. Ja $f(x,y)$ un $\varphi(x,y)$ ir nepārtrauktas funkcijas apgabalā (A), tad arī to rezultante $F(x,y)$ ir nepārtraukta funkcija tajā pat apgabalā. Turpmāk lietota vienīgi pirmā veida kompozīcija, tādēļ īsuma labad sauksim vienkārši par kompozīciju.

Kompozīcijai der d i s t r i b ū t ī v ā ī p a š ī b a:

$$\overset{x}{f}(\overset{x}{\varphi}+\overset{x}{\psi}) = \overset{x}{f}\overset{x}{\varphi}+\overset{x}{f}\overset{x}{\psi}, \qquad (\overset{x}{\varphi}+\overset{x}{\psi})\overset{x}{f} = \overset{x}{\varphi}\overset{x}{f}+\overset{x}{\psi}\overset{x}{f}$$

un a s o c i ā t ī v ā ī p a š ī b a:

$$(\overset{x}{f}\overset{x}{\varphi})\overset{x}{\psi} = \overset{x}{f}(\overset{x}{\varphi}\overset{x}{\psi}),$$

bet nepastāv vispārīgi k o m m ū t ā t ī v ā s ī p a š ī b a s:

3. Ja divu funkciju $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ kompozīcija ir kommūtātīva, t.i.

$$(2) \qquad \overset{x}{f}\overset{x}{\varphi} = \overset{x}{\varphi}\overset{x}{f} \quad \text{jeb} \quad \int_y^x f(x,s)\,\varphi(s,y)\,ds = \int_y^x \varphi(x,s)\,f(s,y)\,ds,$$

tad tādas funkcijas sauc par p e r m u t a b l ā m (pirmā veida). To rezultante $\overset{*}{F}=\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi}=\overset{*}{\varphi}\overset{*}{f}$ ir permutabla ar katru doto funkciju, jo, piem.

$$\overset{*}{F}\overset{*}{f}=(\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi})\overset{*}{f}=\overset{*}{f}(\overset{*}{\varphi}\overset{*}{f})=\overset{*}{f}\overset{*}{F}.$$

Gadījumā, kad $\varphi=f$, rodas kompozīcijas kvadrāts (otrā pakāpe)

$$\overset{*}{f}{}^{2}=\overset{*}{f}\overset{*}{f}=\int_y^x f(x,s)\,f(s,y)\,ds.$$

Sekojošās v e s e l ā s k o m p o z ī c i j a s p a k ā p e s dēfinē ar formulām:

$$\overset{*}{f}{}^{3}=\overset{*}{f}{}^{2}\overset{*}{f}=\overset{*}{f}\overset{*}{f}{}^{2},\ \ldots,\ \overset{*}{f}{}^{n}=\overset{*}{f}{}^{n-1}\overset{*}{f}.$$

Viegli pierādīt šo pakāpju kompozīcijas likumu

(3) $$\overset{*}{f}{}^{m}\overset{*}{f}{}^{n}=\overset{*}{f}{}^{n}\overset{*}{f}{}^{m}=\overset{*}{f}{}^{m+n}\quad (m,n\text{ - veseli pozitīvi skaitļi}).$$

Speciālā gadījumā, kad $f=1$, dabū vienības kompozīcijas pakāpes

(4) $$\overset{*}{1}{}^{2}=\frac{x-y}{1!},\ \overset{*}{1}{}^{3}=\frac{(x-y)^2}{2!},\ \ldots,\ \overset{*}{1}{}^{n}=\frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!}=\frac{(x-y)^{n-1}}{\Gamma(n)},$$

kur $\Gamma(n)$ apzīmē Eulera gamma funkciju.

Ja algebriskā polinomā

(5) $$\mathcal{P}(z)=\sum_{k=1}^{n}a_k z^k$$

apmaina mainīgā z pakāpes z^k pret funkcijas $f(x,y)$ kompozīcijas pakāpēm $\overset{*}{f}{}^{k}$, tad rodas k o m p o z ī c i j a s p o l i n o m s

(5') $$\mathcal{P}(\overset{*}{f})=\sum_{k=1}^{n}a_k\overset{*}{f}{}^{k},$$

kam kompozīcijas darbības ziņā ir formāla analoģija ar atbilstošu algebrisko polinomu. Kā robežgadījumi, kad $n\to\infty$, uzskatāma bezgalīgā rinda (parastā)

(6) $$\sum_{k=1}^{\infty}a_k z^k$$

un k o m p o z ī c i j a s r i n d a

(6') $$\sum_{k=1}^{\infty}a_k\overset{*}{f}{}^{k}.$$

Ir svarīga sekojošā teorēma:[1)] J a r i n d a (6) s a v i r z ā s p i e t i e k o š i m a z ā m $|z|$ n o z ī m ē m, t a d k o m p o z ī c i j a s r i n d a (6') s a v i r z a s a b s o l ū t i u n v i e n m ē r ī g i k a u t k ā d ā m g a l ī g ā m $|f|$ n o z ī m ē m.

P i e r ā d ī j u m a m konstatē novērtējumu

$$\left|\overset{x}{f}{}^{k}\right| < M^{k}\left|\overset{x}{1}{}^{k}\right| < M^{k}\frac{(b-a)^{k-1}}{(k-1)!} \qquad (k=1,2,\dots)$$

ja dēfinīcijas apgabalā (A) funkcijas $f(x,y)$ absolūtas vērtības augšējā robeža ir M, t.i.

$$|f| < M.$$

Ja rinda (6) savirzas, kad

$$|z| < R \qquad (R \neq 0 \text{ - pozitīvs skaitlis}),$$

tad pēc Cauchy-Hadamard teorēmas eksistē pozitīva konstante α tā, ka

$$|a_k| < \frac{\alpha}{R^k} \qquad (k = 1, 2, 3, \dots\dots).$$

Ievērojot pēdējo nevienlīdzību un minēto novērtējumu, atrod rindai (6') skaitlisko majorantu

$$\frac{\alpha M}{R}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}\left[\frac{M(b-a)}{R}\right]^{k-1} = \frac{\alpha M}{R}e^{\frac{M(b-a)}{R}},$$

kas savirzas (e - naturālā logaritma baze). No tā secina kompozīcijas rindas (6') absolūto un vienmērīgo konverģenci.

Šī rinda tad dēfinē nepārtrauktu funkciju, kas ir permutabla ar doto funkciju $f(x,y)$.

4. Lai kompozīcijai ar reizināšanas darbību aritmētikā būtu formāla analoģija, ir jālieto kompozīcijas teorijā vienības elements. Volterra savā memuārā /27/ ieved k o m p o z ī c i j a s n u l l e s p a k ā p e s simbolu $\overset{x}{f}{}^{0}$, kas ir permutabls ar k a t r u funkciju φ:

$$\overset{x}{f}{}^{0}\overset{x}{\varphi} = \overset{x}{\varphi}\overset{x}{f}{}^{0} = \varphi(x,y).$$

Šī simbola efekts nav atkarīgs no bazes funkcijas f izvēles; ērtības dēļ izvēlas par bazi 1, un raksta

(7) $$\overset{x}{f}{}^{0} = \overset{x}{1}{}^{0}.$$

---

1) Šīs teorēmas vispārinājumus un daudzus izlietojumus var atrast Volterra monografijā /24, IX un X nod./ un Volterra-Pérès monografijā /28, II nod./.

Simbolam ir pilnīgi formāls raksturs, un tas izdevīgs aprēķinu vienkāršošanai.

Ir sastādāmas simboliskās formas funkcijas

$$(8) \quad F = a1^{\overset{x}{}0} + f(x,y) \quad , \quad \phi = b1^{\overset{x}{}0} + \varphi(x,y),$$

kuŗu izteiksmēs a un b ir konstantes un $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ šo funkciju r ē g u l ā r a s d a ļ a s. Saka, ka dara funkcijas F k o m p o z ī c i j u p a l a b i ar ϕ, kad

$$\overset{x}{F}\overset{x}{\phi} = ab1^{\overset{x}{}0} + a\varphi + bf + \overset{x}{f}\overset{x}{\varphi},$$

bet k o m p o z ī c i j u p a k r e i s i, kad

$$\overset{x}{\phi}\overset{x}{F} = ab1^{\overset{x}{}0} + a\varphi + bf + \overset{x}{\varphi}\overset{x}{f}.$$

Gadījumā, kad rēgulārās daļas ir permutablas

$$\overset{x}{f}\overset{x}{\varphi} = \overset{x}{\varphi}\overset{x}{f},$$

arī simboliskās formas funkcijas (8) ir permutablas

$$\overset{x}{F}\overset{x}{\phi} = \overset{x}{\phi}\overset{x}{F}.$$

§ 2. Funkcijas kārta, karakteristika un diagonāle.

1. Dēfinīcija. J a f u n k c i j u $f(x,y)$ v a r i z t e i k t f o r m ā

$$(1) \qquad f(x,y) = \frac{(x-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, g(x,y),$$

k u ŗ ā α i r r e ā l s s k a i t l i s, k a s n a v n u l l e v a i v e s e l s n e g ā t ī v s s k a i t l i s, $\Gamma(\alpha)$ i r Eulera gamma funkcija un $g(x,y)$ i r n e p ā r t r a u k t a f u n k c i j a, k a s d ē f i n ī c i j a s a p g a b a l a (A) t a i s n e s p u n k t o s $y=x$ a t š ķ i ŗ a s n o n u l l e s:

$$g(x,x) \gtrless 0,$$

tad $f(x,y)$ sauc par rēgulārās kārtas α funkciju, $g(x,y)$ - par funkcijas $f(x,y)$ karakteristiku un $g(x,x)$ - par diagonāli.

Karakteristika $g(x,y)$ ir pirmās kārtas funkcija. Formulā (1) faktors

$$\frac{(x-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} = 1^{x\alpha} \tag{2}$$

ir izteicams ar vienības vispārināto kompozicijas pakāpi $1^{x\alpha}$. Tāpēc formulu (1) var pārrakstīt līdzvērtīgā formā

$$f(x,y) = 1^{x\alpha} \cdot g(x,y), \tag{1'}$$

kas derīga rēgulāras kārtas (α - nav nulle vai vesels negātīvs skaitlis) gadījumā.

Ir sekojošās divas teōrēmas:[2)] par resultantes kārtu un diagonālēm.

I Ja divu funkciju $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ kārtas α, β ir rēgulāras un arī summa $\alpha+\beta$ izteic rēgulāru kārtu, tad to resultantes $f^x\varphi^x$ kārta ir $\alpha+\beta$, un to diagonāļu reizinājums vienlīdzīgs ar resultantes diagonāli.

Apzīmējot funkcijas (1) diagonāli

$$g(x,x) = D(f)$$

un otrās funkcijas

$$\varphi(x,y) = \frac{(x-y)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \psi(x,y) = 1^{x\beta} \cdot \psi(x,y) \tag{3}$$

diagonāli

$$\psi(x,x) = D(\varphi),$$

var uzrakstīt teōrēmā minēto sakaru starp diagonālēm sekojoši:

$$D(f^x\varphi^x) = D(f) \cdot D(\varphi). \tag{4}$$

II Ja iepriekšējā teōrēmā minētās

---

2) Pierādījumu, gadījumā, kad $\alpha>0$, $\beta>0$, sk. piem. Volterra-Pérès monogrāfijā /28, lpp. 11 un 12/.

funkcijas $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ ir permutablas:

$$\overset{x}{f}\overset{x}{\varphi} = \overset{x}{\varphi}\overset{x}{f}$$

un to karakteristikām $g(x,y)$, $\psi(x,y)$ eksistē pirmās kārtas parciālie atvasinājumi, tad pastāv sekojošs sakars starp to diagonālēm:

$$(5) \qquad \frac{[g(x,x)]^{\frac{1}{\alpha}}}{[\psi(x,x)]^{\frac{1}{\beta}}} = const. \quad jeb \quad \frac{[D(f)]^{\frac{1}{\alpha}}}{[D(\varphi)]^{\frac{1}{\beta}}} = const.$$

Gadījumam, kad α un β ir negātīvi skaitļi (ne veseli), minētās teōrēmas pierādījis J.Pérès darbā /12/, modificējot šinī gadījumā kompozīcijas jēdzienu

$$(6) \qquad \overset{x}{f}\overset{x}{\varphi} = \left| \int_y^x f(x,s)\,\varphi(s,y)\,ds \right.$$

ar noteiktā integrāla galīgo daļu[3]

2. J.Pérès dēfinējumā funkcijas kārtu α, kas ir nulle vai vesels negātīvs skaitlis, sauc par singulāru. Iepriekšējā paragrafā lietotas simboliskās formas funkcija

$$F = a\overset{x}{1}{}^{0} + f(x,y)$$

ja a - konstante un $f(x,y)$ - rēgulārās kārtas funkcija, ir vispārīgais veids funkcijām, kam kārta ir nulle. Funkcijas, kam kārta ir vesels negātīvs skaitlis, apskatīsim 4. §-fā, ievedot kompozīcijas inversijas simbolu

$$\overset{x}{f}{}^{-1}.$$

§ 3. Transformācija kanoniskā formā.

1. Lai permutablo funkciju pamatproblēmas atrisināšanu vienkāršotu, Volterra un Pérès[4] reducē doto veselās pozitīvās kārtas funkciju t.s. kanoniskā formā ar speciālām transformācijām, kas nemaina kompozīciju.

---

3) Šo jēdzienu („partie finie") un apzīmējumu analizē ieveduši J.Hadamard (1905) un H.d'Adhémar.
4) Volterra-Pérès /28, lpp. 37 un 43/.

Apskatīsim vispirms tādu transformāciju gadījumā, kad ir dota pirmās kārtas funkcija $f(x,y)$, kurai eksistē nepārtraukti pirmie parciālie atvasinājumi pēc x un y. Apzīmēsim funkcijas:

(1) $$f(x,x) = a(x) \gtrless 0$$

un

(2) $$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y=x} = b(x).$$

Divu funkciju $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ kompozīcijas rezultanti

$$\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi} = \int_y^x f(x,s)\,\varphi(s,y)\,ds$$

ar mainīgo transformāciju

(3) $$x = \omega(\xi),\quad y = \omega(\eta),\quad s = \omega(\sigma)$$

pārveido par
$$\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi} = \int_\eta^\xi f\big(\omega(\xi), \omega(\sigma)\big)\,\varphi\big(\omega(\sigma), \omega(\eta)\big)\,\omega'(\sigma)\,d\sigma,$$

kad $\omega'(\sigma) \neq 0$. Ja ieved divas funkcijas $\alpha(\sigma)$, $\beta(\sigma)$ ar nosacījumu

(4) $$\alpha(\sigma)\,\beta(\sigma) = \omega'(\sigma) \quad \text{jeb} \quad \omega(\sigma) = \int \alpha(\sigma)\,\beta(\sigma)\,d\sigma$$

un sastāda funkcijas

(5) $$F(\xi,\eta) = \alpha(\xi)\beta(\eta)\,f\big(\omega(\xi), \omega(\eta)\big),\quad \Phi(\xi,\eta) = \alpha(\xi)\beta(\eta)\,\varphi\big(\omega(\xi), \omega(\eta)\big),$$

tad rezultanti
$$\overset{*}{F}\overset{*}{\Phi} = \alpha(\xi)\,\beta(\eta) \int_\eta^\xi f\big(\omega(\xi), \omega(\sigma)\big)\,\varphi\big(\omega(\sigma), \omega(\eta)\big)\,\alpha(\sigma)\,\beta(\sigma)\,d\sigma$$

var pēc sakara (4) izteikt ar rezultantes $\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi}$ transformēto funkciju

(6) $$\overset{*}{F}\overset{*}{\Phi} = \alpha(\xi)\,\beta(\eta)\,\left[\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi}\right]_{\substack{x=\omega(\xi)\\ y=\omega(\eta)}}$$

Tādā kārtā secinām, ka lietotā transformācija n e m a i n a k o m p o z ī c i j u .

Atradīsim transformāciju (3), ar kuru funkciju $f(x,y)$ reducē uz kanonisko formu, t.i. lai būtu izpildīti nosacījumi

(7) $$F(\xi,\xi) = 1,\quad \left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)_{\eta=\xi} = 0,\quad \left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)_{\eta=\xi} = 0.$$

Tā kā
$$F(\xi,\xi) = \alpha(\xi)\,\beta(\xi)\,f(x,x) = \omega'(\xi)\,a(x) = a(x)\,\frac{dx}{d\xi},$$

tad pirmo no nosacījumiem (7) var apmierināt, ja izvēlas

(8) $$\xi = \int a(x)\,dx.$$

Pēdējais sakars pilnīgi noteic inverso funkciju

$$x = \omega(\xi),$$

jo pēc hipotezes

$$a(x) \neq 0.$$

Tā kā

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)_{\eta=\xi} = \alpha'(\xi)\beta(\xi)a(x) + \alpha(\xi)\beta(\xi)b(x)\omega'(\xi)$$

un $\omega'(\xi) = \frac{dx}{d\xi}$, tad ar otro no nosacījumiem (7) sastāda funkcijas α noteikšanai diferenciālvienādojumu

$$a(x)\frac{d\alpha}{dx} + b(x)\alpha = 0,$$

no kura ar kvadratūru dabū

(9) $$\alpha = e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}$$ (e - naturālā log. baze).

Ievērojot (8), no sakara (4) atrod funkciju

(10) $$\beta = \frac{1}{a(x)\alpha} = \frac{1}{a(x)} e^{+\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}.$$

Piezīme: Trešais no noteikumiem (7) ir automatiski izpildīts, ja ir ievēroti pirmie divi.

2. Illustrēsim minēto transformāciju ar p i e m ē r u :

(11) $$f(x,y) = Ag(x) + Bg(y) \qquad (g(x) \neq 0),$$

ja $g(x)$ ir dotā funkcija un A, B - konstantes, kuŗu summa nav nulle:

$$A + B \neq 0.$$

Te vajadzīgās funkcijas ir

$$a(x) = f(x,x) = (A+B)g(x), \qquad b(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y=x} = Ag'(x).$$

Tādēļ

$$\frac{b(x)}{a(x)} = \frac{A}{A+B}\left[\ln|g(x)|\right]',$$

un no formulas (9) pēc kvadratūras dabū

$$\alpha = \left[g(x)\right]^{-\frac{A}{A+B}},$$

bet no (10) - funkciju

$$\beta = \frac{1}{A+B}\left[g(x)\right]^{-\frac{B}{A+B}}.$$

Tā tad (11) kanoniskās formas funkcija ir

(12) $$F(\xi,\eta) = \left[\alpha\beta f(x,y)\right]_{\substack{x=\omega(\xi)\\ y=\omega(\eta)}} = \frac{1}{A+B}\left[\frac{A g(x)+B g(y)}{\left(g(x)\right)^{\frac{A}{A+B}}\cdot\left(g(y)\right)^{\frac{B}{A+B}}}\right]_{\substack{x=\omega(\xi)\\ y=\omega(\eta)}},$$

kurā lietotās substitūcijas funkciju $\omega(\xi)$ noteic no sakara

(13) $$\xi = \int a(x)\,dx = (A+B)\int g(x)\,dx.$$

S p e c i ā l ā g a d ī j u m ā , kad

$$g(x) = x,$$

dotā funkcija ir lineāra

(11') $$f(x,y) = Ax + By,$$

un formula (13) top par

$$\xi = \frac{A+B}{2}x^2.$$

Tā tad šinī gadījumā formulā (12) jāievieto

$$x = \left(\frac{2}{A+B}\right)^{\frac{1}{2}}\xi^{\frac{1}{2}}, \qquad y = \left(\frac{2}{A+B}\right)^{\frac{1}{2}}\eta^{\frac{1}{2}};$$

tad rodas lineārai funkcijai atbilstoša kanoniskās formas funkcija

(12') $$F(\xi,\eta) = \frac{1}{A+B}\cdot\frac{A\xi^{\frac{1}{2}} + B\eta^{\frac{1}{2}}}{\xi^{\frac{A}{2(A+B)}}\cdot\eta^{\frac{B}{2(A+B)}}}.$$

Šādas funkcijas atsevišķs veids $(A+B=1)$ minēts Volterra-Pérès monogrāfijā /28, lpp. 51/.

3. Augstākās kārtas funkcijas transformācijai kanoniskā formā izlieto sekojošās formulas, kas izteic saliktās funkcijas atvasināšanas likumus. Ja dotā funkcijā $G(x)$ uzskata mainīgo x kā cita mainīgā ξ funkciju

$$x = \omega(\xi),$$

tad sastāda salikto funkciju

$$\bar{G}(\xi) = G(\omega(\xi)),$$

kuras atvasinājumus pēc jaunā argumenta ξ izteic ar formulām:

$$\frac{d\bar{G}}{d\xi} = \frac{dG}{dx}\cdot\omega'(\xi), \quad \frac{d^2\bar{G}}{d\xi^2} = \frac{d^2G}{dx^2}\left[\omega'(\xi)\right]^2 + \frac{dG}{dx}\cdot\omega''(\xi),$$

$$\frac{d^3\bar{G}}{d\xi^3} = \frac{d^3G}{dx^3}\left[\omega'(\xi)\right]^3 + 3\,\frac{d^2G}{dx^2}\,\omega'(\xi)\,\omega''(\xi) + \frac{dG}{dx}\,\omega'''(\xi),$$

. . . .

Vispārīgās formulas

$$(14)\qquad \frac{d^n\bar{G}}{d\xi^n} = \frac{d^nG}{dx^n}\left[\omega'(\xi)\right]^n + \frac{n(n-1)}{2}\,\frac{d^{n-1}G}{dx^{n-1}}\left[\omega'(\xi)\right]^{n-2}\omega''(\xi) + \dots + \frac{dG}{dx}\,\omega^{(n)}(\xi)$$

pareizību pierāda ar matēmatiskās indukcijas slēdzienu. Tiešām, pieņemot formulu pareizu ar n, sastāda ar atvasināšanu pēc ξ formulu

$$\frac{d^{n+1}\bar{G}}{d\xi^{n+1}} = \frac{d^{n+1}G}{dx^{n+1}}\left[\omega'(\xi)\right]^{n+1} + n\,\frac{d^nG}{dx^n}\left[\omega'(\xi)\right]^{n-1}\omega''(\xi) +$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2}\,\frac{d^nG}{dx^n}\left[\omega'(\xi)\right]^{n-1}\omega''(\xi) + \dots + \frac{dG}{dx}\,\omega^{(n+1)}(\xi)$$

jeb

$$\frac{d^{n+1}\bar{G}}{d\xi^{n+1}} = \frac{d^{n+1}G}{dx^{n+1}}\left[\omega'(\xi)\right]^{n+1} + \frac{(n+1)n}{2}\,\frac{d^nG}{dx^n}\left[\omega'(\xi)\right]^{n-1}\omega''(\xi) + \dots + \frac{dG}{dx}\,\omega^{(n+1)}(\xi),$$

kas rodas no (14) ar n apmaiņu pret $n+1$.

4. Ja n. kārtas funkcijas

$$(15)\qquad f(x,y) = \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!}\,g(x,y) \qquad (g(x,x) \neq 0)$$

karakteristika $g(x,y)$ ir diferencējama funkcija, tad dēfinīcijas apgabala taisnes $y=x$ punktos funkcija $f(x,y)$ un tās atvasinājumi līdz $(n-2)$. kārtai pieņem nulles nozīmi:+)

$$(16)\qquad \left[\frac{\partial^k f(x,y)}{\partial x^i\,\partial y^j}\right]_{y=x} = 0 \qquad \left(\begin{array}{l} i+j=k, \\ k=0,1,2,\dots,n-2 \end{array}\right),$$

bet $(n-1)$. kārtas atvasināto funkciju nozīmes

$$(17)\qquad \left(\frac{\partial^{n-1}f}{\partial x^{n-1}}\right)_{y=x} = -\left(\frac{\partial^{n-1}f}{\partial x^{n-2}\partial y}\right)_{y=x} = \dots = (-1)^{n-1}\left(\frac{\partial^{n-1}f}{\partial y^{n-1}}\right)_{y=x} = g(x,x) = a(x)$$

nav nulles ($a(x) \neq 0$). Apzīmēsim n. kārtas atvasinājumu nozīmes ar

$$(18)\qquad \left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right)_{y=x} = -\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}\right)_{y=x} = \dots = (-1)^n\left(\frac{\partial^n f}{\partial y^n}\right)_{y=x} = b(x).$$

+) Formulās (16) atvasinājums ar kārtu $k=0$ apzīmē pašu funkciju $f(x,y)$.

Par **k a n o n i s k ā s f o r m a s** funkciju $f(x,y)$ sauktu tad, ja būtu $a(x)=1$ un $b(x)=0$. Uz tādu formu var reducēt doto funkciju, lietojot transformāciju, kas noteikta ar formulām (3), (4) un (5). Sastādītai funkcijai $F(\xi,\eta)=\alpha(\xi)\beta(\eta)f(\omega(\xi),\omega(\eta))$ jāapmierina sekojoši nosacījumi:

$$\text{(16')}\qquad \left[\frac{\partial^k F(\xi,\eta)}{\partial\xi^i\partial\eta^j}\right]_{\eta=\xi}=0\qquad\left(\begin{matrix}i+j=k,\\ k=0,1,2,\dots,n-2\end{matrix}\right),$$

$$\text{(17')}\qquad \left(\frac{\partial^{n-1}F}{\partial\xi^{n-1}}\right)_{\eta=\xi}=-\left(\frac{\partial^{n-1}F}{\partial\xi^{n-2}\partial\eta}\right)_{\eta=\xi}=\dots=(-1)^{n-1}\left(\frac{\partial^{n-1}F}{\partial\eta^{n-1}}\right)_{\eta=\xi}=1,$$

$$\text{(18')}\qquad \left(\frac{\partial^{n}F}{\partial\xi^{n}}\right)_{\eta=\xi}=-\left(\frac{\partial^{n}F}{\partial\xi^{n-1}\partial\eta}\right)_{\eta=\xi}=\dots=(-1)^{n}\left(\frac{\partial^{n}F}{\partial\eta^{n}}\right)_{\eta=\xi}=0.$$

Tā kā pēc formulas (14) parauga var izteikt atvasinājumu

$$\frac{\partial^{n-1}F}{\partial\xi^{n-1}}=\alpha(\xi)\beta(\eta)\,\frac{\partial^{n-1}f}{\partial x^{n-1}}\left[\omega'(\xi)\right]^{n-1}+\dots,$$

tad

$$\left(\frac{\partial^{n-1}F}{\partial\xi^{n-1}}\right)_{\eta=\xi}=\alpha(\xi)\beta(\xi)\,a(x)\left[\omega'(\xi)\right]^{n-1}=a(x)\left[\omega'(\xi)\right]^{n};$$

un no nosacījuma

$$\left(\frac{\partial^{n-1}F}{\partial\xi^{n-1}}\right)_{\eta=\xi}=1,$$

ar mainīgo šķeršanas(?) operāciju un kvadratūru atrod

$$\text{(19)}\qquad \xi=\int\left[a(x)\right]^{\frac{1}{n}}dx.$$

No iepriekšējā sakara ir atrodama inversā funkcija

$$x=\omega(\xi),$$

kas lietojama transformācijas formulās (3).

Pēc Leibnica (<u>Leibniz</u>) reizinājuma atvasināšanas likuma un (14) sastāda atvasinājuma izteiksmi

$$\frac{\partial^n F}{\partial\xi^n}=\beta(\eta)\left\{\alpha(\xi)\left[\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(\omega')^n+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\partial^{n-1}f}{\partial x^{n-1}}(\omega')^{n-2}\omega''+\dots\right]+\right.$$
$$\left.+\,n\alpha'(\xi)\,\frac{\partial^{n-1}f}{\partial x^{n-1}}(\omega')^{n-1}+\dots\right\},$$

kurā citi locekļi satur funkcijas $f(x,y)$ zemākas kārtas atvasinājumus. No nosacījuma

$$\left(\frac{\partial^n F}{\partial \xi^n}\right)_{\eta=\xi} = 0$$

pēc pārveidojumiem atrod sakaru

$$\frac{\alpha'(\xi)}{\alpha(\xi)} \cdot \frac{1}{\omega'} + \frac{n-1}{2} \frac{\omega''}{\omega'^2} + \frac{b(x)}{n a(x)} = 0.$$

Ja te izteic

$$\omega' = \frac{dx}{d\xi} = \left[a(x)\right]^{-\frac{1}{n}},$$

ievedot mainīgo x, tad dabū pēc pārveidojumiem diferenciālvienādojumu

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dx} = \frac{n-1}{2n} \cdot \frac{d \ln|a|}{dx} - \frac{b(x)}{n a(x)},$$

no kura ar kvadrātūru atrod

(20) $$\alpha = \left[a(x)\right]^{\frac{n-1}{2n}} \cdot e^{-\int \frac{b(x)}{n a(x)} dx}.$$

Pēdīgi no sakara

$$\alpha \beta = \omega'$$

pēc α un ω' izteiksmju substitūcijas aprēķina funkciju

(21) $$\beta = \left[a(x)\right]^{-\frac{n+1}{2n}} \cdot e^{+\int \frac{b(x)}{n a(x)} dx}.$$

Ar šādām α un β izteiksmēm konstruētā funkcija

$$\alpha \beta f(x,y),$$

kurā jāievieto

$$x = \omega(\xi), \quad y = \omega(\eta),$$

aprēķinātu no (19), ir n. kārtas un kanoniskās formas funkcija $F(x,y)$.

§ 4. Kompozīcijas inversijas simbols $\overset{x}{f}{}^{-1}$.

1. Noteiktā integrāla inversijas problēmā (kad integrāla robežas ir mainīgas, ir jāatrisina pirmā veida lineārie Volterra integrālvienādojumi

(1) $$\int_y^x f(x,s)\, \varphi(s,y)\, ds = \psi(x,y),$$

(2) $$\int_y^x \varphi(x,s)\, f(s,y)\, ds = \psi(x,y),$$

ja ir dotas dēfinīcijas apgabalā

(A) $$a \leq y \leq x \leq b$$

funkcijas $f(x,y)$, $\psi(x,y)$ un jānoteic funkcija $\varphi(x,y)$. Ar kompozīcijas apzīmējumiem vienādojumus raksta formā

(1') $$\overset{x}{f}\,\overset{x}{\varphi} = \psi(x,y),$$

(2') $$\overset{x}{\varphi}\,\overset{x}{f} = \psi(x,y),$$

un tos sauc par s a b i e d r o t i e m v i e n ā d o j u m i e m.+)
Minēto integrālvienādojumu atrisinājumus attiecīgi izteic ar formulām

(3) $$\varphi(x,y) = \overset{x}{f}{}^{-1}\overset{x}{\psi}$$ (kompozīcija pa kreisi ar $\overset{x}{f}{}^{-1}$)

un

(4) $$\varphi(x,y) = \overset{x}{\psi}\,\overset{x}{f}{}^{-1}$$ (kompozīcija pa labi ar $\overset{x}{f}{}^{-1}$)

lietojot kopīgo k o m p o z ī c i j a s i n v e r s i j a s s i m b o l u $\overset{x}{f}{}^{-1}$, kas apmierina nosacījumus

(5) $$\overset{x}{f}\,\overset{x}{f}{}^{-1} = \overset{x}{f}{}^{-1}\overset{x}{f} = \overset{x}{f}{}^{0} = \overset{x}{1}{}^{0}.$$

2. Apskatīsim s p e c i ā l u g a d ī j u m u, kad f ir vienības vesela kompozīcijas pakāpe:

$$f = \overset{x}{1}{}^{n} = \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Šinī gadījumā kompozīcijas $\overset{x}{1}{}^{n}\overset{x}{\varphi}$, resp. $\overset{x}{\varphi}\,\overset{x}{1}{}^{n}$ var uztvert kā n kārtēju integrāciju, jo

$$\overset{x}{1}{}^{n}\overset{x}{\varphi} = \int_y^x \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi(s,y)\,ds = \int_y^x ds_1 \int_y^{s_1} ds_2 \dots \int_y^{s_{n-1}} \varphi(s_n,y)\,ds_n$$

un

$$\overset{x}{\varphi}\,\overset{x}{1}{}^{n} = \int_y^x \varphi(x,s)\frac{(s-y)^{n-1}}{(n-1)!}\,ds = \int_y^x ds_1 \int_{s_1}^x ds_2 \dots \int_{s_{n-1}}^x \varphi(x,s_n)\,ds_n.$$

Kad funkcijas $\psi(x,y)$ kārta ir

$$m > n,$$

tad sabiedrotos integrālvienādojumus

(6) $$\overset{x}{1}{}^{n}\overset{x}{\varphi} = \psi(x,y),$$

(6') $$\overset{x}{\varphi}\,\overset{x}{1}{}^{n} = \psi(x,y)$$

+) Équations associées ou adjointes.

atrisina pēc formulām

(7) $$\varphi = \frac{\partial^n \psi(x,y)}{\partial x^n},$$

(7') $$\varphi = (-1)^n \frac{\partial^n \psi(x,y)}{\partial y^n}.$$

Tā kā šos atrisinājumus var formāli izteikt arī ar

$$\varphi = \overset{x-n}{1}\,\overset{x}{\psi}, \quad \text{resp.} \quad \varphi = \overset{x}{\psi}\,\overset{x-n}{1},$$

tad kompozīcijas inversijas simbolam

$$\overset{x-1}{f} = \overset{x-n}{1}$$

der nosacījumi

(8) $$\overset{xn}{1}\,\overset{x-n}{1} = \overset{x-n}{1}\,\overset{xn}{1} = \overset{x0}{1}$$

un

(9) $$\begin{cases} \overset{x-n}{1}\,\overset{x}{\psi} = \dfrac{\partial^n \psi(x,y)}{\partial x^n} & \text{(kompozīcija pa kreisi)} \\ \overset{x}{\psi}\,\overset{x-n}{1} = (-1)^n \dfrac{\partial^n \psi(x,y)}{\partial y^n} & \text{(kompozīcija pa labi),} \end{cases}$$

ja funkcijas $\psi(x,y)$ kārta $m > n$.

Kad $\psi(x,y)$ ir n. kārtas un kanoniskās formas (§ 3) funkcija, t.i.

(10) $$\begin{cases} \left[\dfrac{\partial^k \psi(x,y)}{\partial x^i\, \partial y^j}\right]_{y=x} = 0 \qquad \left(\begin{matrix} i+j=k, \\ k = 0, 1, 2, \dots, n-2, n \end{matrix}\right) \\ \left(\dfrac{\partial^{n-1}\psi}{\partial x^{n-1}}\right)_{y=x} = -\left(\dfrac{\partial^{n-1}\psi}{\partial x^{n-2}\partial y}\right)_{y=x} = \dots = (-1)^{n-1}\left(\dfrac{\partial^{n-1}\psi}{\partial y^{n-1}}\right)_{y=x} = 1, \end{cases}$$

tad ar funkcijas parciāliem atvasinājumiem

(11) $$\psi_1(x,y) = \frac{\partial^n \psi}{\partial x^n}, \quad \psi_2(x,y) = (-1)^n \frac{\partial^n \psi}{\partial y^n}$$

var izteikt pašu funkciju divos veidos

(12) $$\begin{cases} \psi(x,y) = \overset{xn}{1} + \overset{xn}{1}\,\overset{x}{\psi_1} = \overset{xn}{1}\left(\overset{x0}{1} + \overset{x}{\psi_1}\right) \\ \psi(x,y) = \overset{xn}{1} + \overset{x}{\psi_2}\,\overset{xn}{1} = \left(\overset{x0}{1} + \overset{x}{\psi_2}\right)\overset{xn}{1}. \end{cases}$$

Salīdzinot ar (6), secinām inversijas simbola $\overset{x-n}{1}$ nosacījumus

(13) $$\begin{cases} \overset{x-n}{1}\,\overset{x}{\psi} = \overset{x0}{1} + \dfrac{\partial^n \psi}{\partial x^n} \\ \overset{x}{\psi}\,\overset{x-n}{1} = \overset{x0}{1} + (-1)^n \dfrac{\partial^n \psi}{\partial y^n}. \end{cases}$$

kas der tad, ja ψ ir n. kārtas un kanoniskās formas (10) funkcija.

3. Vispārīgajā gadījumā, kad $f(x,y)$ ir n. kārtas funkcija, kompozīcijas inversijas simbolu f^{x-1} var uzskatīt par singulāras kārtas $(-n)$ funkciju. Šādu funkciju vispārīgās izteiksmes ir devis J.Pérès[5] sekojošā veidā:

$$f^{x-1} = a_0(x)\, 1^{x-n} + a_1(x)\, 1^{x-n+1} + \dots + a_n(x)\, 1^{x_0} + F_1(x,y) \tag{14}$$

vai

$$f^{x-1} = b_0(y)\, 1^{x-n} + b_1(y)\, 1^{x-n+1} + \dots + b_n(y)\, 1^{x_0} + F_2(x,y). \tag{14'}$$

Te $F_1(x,y)$, $F_2(x,y)$ ir pozitīvas kārtas funkcijas, un citi locekļi ir funkciju

$$a_0(x),\ a_1(x), \dots,\ a_n(x);\quad b_0(y),\ b_1(y), \dots,\ b_n(y)$$

reizinājumi (bet ne kompozīcijas) ar simboliem

$$1^{x-n},\ 1^{x-n+1}, \dots,\ 1^{x_0}.$$

Kompozīciju aprēķinos ir izdevīgi lietot formu (14), kad jādara kompozīcija pa kreisi ar f^{x-1}, bet formu (14') kompozīcijā pa labi.

Noteiksim funkcijas

$$a_0(x), \dots, a_n(x);\ b_0(y), \dots, b_n(y);\ F_1(x,y),\ F_2(x,y),$$

pieņemot, ka dotai n. kārtas un kanoniskās formas funkcijai dēfinīcijas apgabalā (A) eksistē nepārtraukti parciālie atvasinājumi līdz kārtai $2n$ (ieskaitot).

Lai atrastu, piem., funkcijas $a_0(x), \dots, a_n(x);\ F_1(x,y)$, ievieto simbolisko izteiksmi (14) sakarā

$$f^{x-1} f^{x} = 1^{x_0}$$

un izpilda norādītās darbības pēc kompozīcijas likumiem (9) un (13). Rodas sakars

$$a_0(x)\, 1^{x_0} + a_0(x)\frac{\partial^n f}{\partial x^n} + a_1(x)\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}} + \dots + a_n(x) f(x,y) + \overset{x}{F_1}\overset{x}{f} = 1^{x_0},$$

no kura secina

$$a_0(x) \equiv 1.$$

Pēc vienkāršošanas dabū jaunu sakaru

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n} + a_1(x)\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}} + a_2(x)\frac{\partial^{n-2} f}{\partial x^{n-2}} + \dots + a_n(x) f(x,y) + \int_y^x F_1(x,s) f(s,y)\,ds = 0, \tag{15}$$

---

5) J.Pérès /12, § 3/ un Volterra-Pérès /28, Chap. VII/.

kas noder atlikušo funkciju $a_1(x), \ldots, a_n(x);\ F_1(x,y)$ noteikšanai.

Ja te izvēlas $y = x$ un ievēro funkcijas $f(x,y)$ kanoniskās formas nosacījumus

$$(16)\quad \begin{cases} \left[\dfrac{\partial^k f(x,y)}{\partial x^i \partial y^j}\right]_{y=x} = 0 & \begin{pmatrix} i+j=k, \\ k=0,1,2,\ldots,n-2,n \end{pmatrix} \\ \left(\dfrac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}}\right)_{y=x} = -\left(\dfrac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-2}\partial y}\right)_{y=x} = \ldots = (-1)^{n-1}\left(\dfrac{\partial^{n-1} f}{\partial y^{n-1}}\right)_{y=x} = 1, \end{cases}$$

tad atrod

$$a_1(x) \equiv 0.$$

Lai noteiktu $a_2(x)$, atvasina sakaru (15) pēc y un ieliek dabūtajā sakarā $y = x$. Ievērojot nosacījumus (16), atrod

$$a_2(x) = \left(\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^n \partial y}\right)_{y=x}.$$

Tamlīdzīgā kārtā turpinot, var noteikt funkcijas

$$a_3(x), \ldots, a_n(x),$$

lietojot dotās funkcijas $f(x,y)$ sekojošo augstākās kārtas parciālo atvasinājumu nozīmes, kad $y = x$. Pēdējās funkcijas $a_n(x)$ izteiksme satur $f(x,y)$ augstākās kārtas parciālo atvasinājumu

$$\left(\frac{\partial^{2n-1} f}{\partial x^n \partial y^{n-1}}\right)_{y=x}.$$

Vienādojums (15) attiecībā pret nezināmo funkciju $F_1(x,y)$ ir p i r m ā v e i d a lineārais Volterra integrālvienādojums. Lai to atrisinātu, atvasina atkārtoti n reiz pēc y šī vienādojuma abas puses. Tad rodas o t r ā v e i d a Volterra integrālvienādojums

$$(17)\quad F_1(x,y) + \int_y^x F_1(x,s)\, f_2(s,y)\, ds = H_1(x,y)$$

jeb

$$F_1(x,y) + \overset{x}{F_1} \overset{x}{f_2} = H_1(x,y),$$

ja apzīmē

$$f_2(x,y) = (-1)^n \frac{\partial^n f}{\partial y^n}$$

un

$$(18)\quad H_1(x,y) = (-1)^{n-1}\left[\frac{\partial^{2n} f}{\partial x^n \partial y^n} + a_2(x)\frac{\partial^{2n-2} f}{\partial x^{n-2}\partial y^n} + \ldots + a_n(x)\frac{\partial^n f}{\partial y^n}\right].$$

Lietojot simbolu $\overset{x_0}{1}$, integrālvienādojumu pārraksta formā

$$\overset{x}{F_1}(\overset{x_0}{1} + \overset{x}{f_2}) = H_1(x,y),$$

no kuŗas izteic atrisinājumu

$$F_1(x,y) = \overset{x}{H_1}(\overset{x_0}{1} + \overset{x}{f_2})^{-1}$$

ar rindu

(19) $$F_1(x,y) = H_1(x,y) - \overset{x}{H_1}\overset{x}{f_2} + \overset{x}{H_1}\overset{x}{f_2}\overset{x}{f_2} - \dots \quad \left[f_2 = (-1)^n \frac{\partial^n f}{\partial y^n} \right],$$

kas savirzas absolūti un vienmērīgi dēfinīcijas apgabalā (A) (skat. 1.§)

Tamlīdzīgā kārtā pēc izteiksmes (14') substitūcijas formulā

$$\overset{x}{f}\overset{x-1}{f} = \overset{x_0}{1}$$

atrod

$$b_0(y) \equiv 1$$

un sakaru

(15') $$(-1)^n \frac{\partial^n f}{\partial y^n} + (-1)^{n-1} b_1(y) \frac{\partial^{n-1} f}{\partial y^{n-1}} + (-1)^{n-2} b_2(y) \frac{\partial^{n-2} f}{\partial y^{n-2}} + \dots + b_n(y) f(x,y) +$$
$$+ \int_y^x f(x,s) F_2(s,y)\, ds = 0,$$

no kuŗa noteic funkcijas

$$b_1(y), \ b_2(y), \dots, \ b_n(y); \ F_2(x,y).$$

Liekot $y = x$ sakarā (15') un ievērojot kanoniskās formas nosacījumus (16), atrod

$$b_1(y) \equiv 0.$$

Ja sakaru (15') atvasina pēc x un dabūtajā formulā ievieto $y = x$, tad izteic funkciju

$$b_2(y) = (-1)^{n+1} \left(\frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^n \partial x} \right)_{y=x}.$$

Tādu procesu turpinot, dabū funkciju

$$b_3(y), \ \dots, \ b_n(y)$$

izteiksmes ar dotās funkcijas $f(x,y)$ parciālo atvasinājumu nozīmēm

$$\left(\frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^n \partial x} \right)_{y=x}, \ \left(\frac{\partial^{n+2} f}{\partial y^n \partial x^2} \right)_{y=x}, \ \dots, \ \left(\frac{\partial^{2n-1} f}{\partial y^n \partial x^{n-1}} \right)_{y=x}.$$

Pēc n kārtīgas atvasināšanas pēdīgi funkciju $F_2(x,y)$ atrod no otrā veida lineārā Volterra integrālvienādojuma

$$(17') \qquad F_2(x,y) + \int_y^x f_1(x,0)\, F_2(s,y)\,ds = H_2(x,y)$$

jeb

$$\left(\overset{x}{1}{}^{0} + \overset{x}{f_1}\right)\overset{x}{F_2} = H_2(x,y),$$

kurā apzīmē

$$f_1(x,y) = \frac{\partial^n f}{\partial x^n}$$

un

$$(18') \qquad H_2(x,y) = (-1)^{n-1}\frac{\partial^{2n} f}{\partial y^n \partial x^n} + (-1)^{n-3} b_2(y)\frac{\partial^{2n-2} f}{\partial y^{n-2}\partial x^n} + \dots - b_n(y)\frac{\partial^n f}{\partial x^n}.$$

Integrālvienādojuma (17') atrisinājumu

$$F_2(x,y) = \left(\overset{x}{1}{}^{0} + \overset{x}{f_1}\right)^{-1}\overset{x}{H_2}$$

izteic ar absolūti un vienmērīgi savirzāmu rindu

$$(19') \qquad F_2(x,y) = H_2(x,y) - \overset{x}{f_1}\overset{x}{H_2} + \overset{x}{f_1}\overset{x}{f_1}\overset{x}{H_2} - \dots \quad \left[f_1 = \frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right].$$

Tā tad kompozicijas inversijas simbola $\overset{x}{f}{}^{-1}$ izteiksmēs

$$(20) \qquad \overset{x}{f}{}^{-1} = \overset{x}{1}{}^{-n} + a_2(x)\overset{x}{1}{}^{-n+2} + \dots + a_n(x)\overset{x}{1}{}^{0} + F_1(x,y)$$

un

$$(20') \qquad \overset{x}{f}{}^{-1} = \overset{x}{1}{}^{-n} + b_2(y)\overset{x}{1}{}^{-n+2} + \dots + b_n(y)\overset{x}{1}{}^{0} + F_2(x,y)$$

visas funkcijas

$$a_2(x), \dots, a_n(x);\ b_2(y), \dots, b_n(y);\ F_1(x,y),\ F_2(x,y)$$

ir nosakāmas ar dotās n. kārtas un kanoniskās formas funkciju $f(x,y)$, kurai pēc hipotezes eksistē nepārtraukti atvasinājumi līdz kārtai $2n$.

4. Interesants ir s p e c i ā l s g a d ī j u m s , kad funkcijas

$$a_i(x) \equiv 0, \quad b_i(y) \equiv 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

No šo funkciju noteikšanas procesa viegli pierāda, ka šinī gadījumā n e p i e c i e š a m i e un p i e t i e k o š i nosacījumi ir sekojoši:

$$(21) \qquad \begin{cases} \left[\dfrac{\partial^k f(x,y)}{\partial x^i \partial y^j}\right]_{y=x} = 0 & \left(\begin{array}{l} i+j=k, \\ k = 0, 1, 2, \dots, n-2, n, n+1, \dots, 2n-1 \end{array}\right) \\ \left(\dfrac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}}\right)_{y=x} = -\left(\dfrac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-2}\partial y}\right)_{y=x} = \dots = (-1)^{n-1}\left(\dfrac{\partial^{n-1} f}{\partial y^{n-1}}\right)_{y=x} = 1. \end{cases}$$

Tā tad šinī gadījumā doto funkciju $f(x,y)$ var izteikt formā

$$(22)\qquad f(x,y) = \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} + (x-y)^{2n}\,\omega(x,y) = \overset{x}{1}{}^{n} + \overset{x}{1}{}^{2n+1}\cdot\omega_1(x,y)$$

ar nepārtrauktām funkcijām $\omega(x,y)$ un $\omega_1(x,y) = (2n)!\,\omega(x,y)$, kurām eksistē nepārtraukti atvasinājumi līdz kārtai $2n$.

Konstatēsim, ka šinī gadījumā kompozīcijas inversijas simbola $\overset{x}{f}{}^{-1}$ izteiksmēs (20) un (20') f u n k c i j a s $F_1(x,y)$ un $F_2(x,y)$ ir i d e n t i s k a s:

$$F_1(x,y) \equiv F_2(x,y).$$

Tiešām, no formulām (18) un (18') ar pieņemto hipotezi secina, ka funkcijas $H_1(x,y)$ un $H_2(x,y)$ ir identiskas ar funkciju

$$(23)\qquad H(x,y) = (-1)^{n-1}\frac{\partial^{2n} f}{\partial x^n\,\partial y^n}.$$

Ievērojot nosacījumus (21), var izteikt lietotās funkcijas

$$f_1(x,y) = \frac{\partial^n f}{\partial x^n}, \quad f_2(x,y) = (-1)^n\frac{\partial^n f}{\partial y^n}$$

ar funkciju $H(x,y)$ sekojošos veidos:

$$f_1(x,y) = -\overset{x}{H}\overset{x}{1}{}^{n}, \quad f_2(x,y) = -\overset{x}{1}{}^{n}\overset{x}{H}.$$

Formulas (19) un (19') ar tādām funkciju izteiksmēm rāda, ka tiešām $F_1(x,y)$ un $F_2(x,y)$ ir identiskas ar funkciju

$$(24)\qquad F(x,y) = H(x,y) + \overset{x}{H}\overset{x}{1}{}^{n}\overset{x}{H} + \overset{x}{H}\overset{x}{1}{}^{n}\overset{x}{H}\overset{x}{1}{}^{n}\overset{x}{H} + \dots$$

Dabūtā rinda savirzas absolūti un vienmērīgi dēfīnīcijas apgabalā (A).

Tā tad gadījumā, kad funkcija $f(x,y)$ apmierina nosacījumus (21), der sekojošā kompozīcijas inversijas simbola $\overset{x}{f}{}^{-1}$ formula

$$(25)\qquad \overset{x}{f}{}^{-1} = \overset{x}{1}{}^{-n} + F(x,y),$$

kas lietojama kā kompozīcijā pa kreisi vai pa labi.

Nosacījumus (21) apmierina katra pirmās kārtas ($n = 1$) un kanoniskās formas funkcija $f(x,y)$. Atrastā formula (25) vispārina J.Pérès[6] noteikto gadījumā, kad ir pirmās kārtas funkcija.

---

6) Volterra-Pérès monografijā /28, lpp. 40 un 106/ dotā formula atšķiras no atrastās ($n = 1$) vienīgi ar citādu to lietotu apzīmējumu.

<u>Piezīme</u>. Kad funkcijas ir

$$a_i(x) \equiv 0, \quad b_i(y) \equiv 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

pirmā veida Volterra integrālvienādojumi (15), resp. (15') attiecībā pret nezināmo funkciju $F_1(x,y)$, resp. $F_2(x,y)$ reducējas uz formu

$$\overset{x}{F_1}\overset{x}{f} + \frac{\partial^n f}{\partial x^n} = 0, \quad \text{resp.} \quad \overset{x}{f}\overset{x}{F_2} + (-1)^n \frac{\partial^n f}{\partial y^n} = 0,$$

un tiem ir kopīgs atrisinājums ar funkciju

$$F(x,y) = F_1(x,y) = F_2(x,y),$$

kas noteikta ar rindu (24). Tā tad var izteikt lietotās funkcijas

$$f_1(x,y) = \frac{\partial^n f}{\partial x^n}, \qquad f_2(x,y) = (-1)^n \frac{\partial^n f}{\partial y^n}$$

sekojošā veidā:

$$f_1(x,y) = -\overset{x}{F}\overset{x}{f}, \qquad f_2(x,y) = -\overset{x}{f}\overset{x}{F}.$$

Ja ievēro, ka n. kārtas un kanoniskās formas funkcijai $f(x,y)$, pēc formulu (12) parauga, der izteiksme

$$f(x,y) = \overset{x}{1}{}^{n} + \overset{x}{1}{}^{n}\overset{x}{f_1}, \quad \text{resp.} \quad f(x,y) = \overset{x}{1}{}^{n} + \overset{x}{f_2}\overset{x}{1}{}^{n},$$

tad ar atrastām f_1, resp. f_2 nozīmēm rodas formula

$$f(x,y) = \overset{x}{1}{}^{n} - \overset{x}{1}{}^{n}\overset{x}{F}\overset{x}{f}, \quad \text{resp.} \quad f(x,y) = \overset{x}{1}{}^{n} - \overset{x}{f}\overset{x}{F}\overset{x}{1}{}^{n},$$

ko var pārveidot par

$$(\overset{x}{1}{}^{0} + \overset{x}{1}{}^{n}\overset{x}{F})\overset{x}{f} = \overset{x}{1}{}^{n}, \quad \text{resp.} \quad \overset{x}{f}(\overset{x}{1}{}^{0} + \overset{x}{F}\overset{x}{1}{}^{n}) = \overset{x}{1}{}^{n}.$$

No pēdējām formulām dabū funkcijai

(26) $$f(x,y) = (\overset{x}{1}{}^{0} + \overset{x}{1}{}^{n}\overset{x}{F})^{-1}\overset{x}{1}{}^{n}, \quad \text{resp.} \quad f(x,y) = \overset{x}{1}{}^{n}(\overset{x}{1}{}^{0} + \overset{x}{F}\overset{x}{1}{}^{n})^{-1}$$

kopīgu izteiksmi ar rindu

(27) $$f(x,y) = \overset{x}{1}{}^{n} - \overset{x}{1}{}^{n}\overset{x}{F}\overset{x}{1}{}^{n} + \overset{x}{1}{}^{n}\overset{x}{F}\overset{x}{1}{}^{n}\overset{x}{F}\overset{x}{1}{}^{n} - \ldots,$$

kas savirzas absolūti un vienmērīgi dēfinīcijas apgabalā (A).

Pēdējos sakarus lietosim permutablo funkciju pamatproblēmas diskusijā ar <u>Pérès</u> transformācijām (§ 10).

II PERMUTABLO FUNKCIJU NOTEIKŠANAS PROBLĒMA.

§ 5. Problēmas simboliskie pamatvienādojumi. Noslēgtā cikla funkcijas.

1\. P a m a t p r o b l ē m ā ir jānoteic funkcijas $\varphi(x,y)$, kas ir permutablas ar doto funkciju $f(x,y)$, t.i. kas apmierina permutabilitātes nosacījumu

$$\int_y^x f(x,s)\varphi(s,y)\,ds = \int_y^x \varphi(x,s) f(s,y)\,ds \tag{1}$$

jeb

$$\overset{x}{f}\overset{x}{\varphi} = \overset{x}{\varphi}\overset{x}{f}.$$

Pēc Volterra metodes ieved jaunu nezināmo funkciju - rezultanti

$$\psi(x,y) = \overset{x}{f}\overset{x}{\varphi} = \overset{x}{\varphi}\overset{x}{f} \tag{2}$$

un sastāda palīga funkcionālvienādojumu, izslēdzot funkciju $\varphi(x,y)$. Ja ir zināms dotās funkcijas $f(x,y)$ kompozīcijas inversijas simbols $\overset{x}{f}{}^{-1}$, tad no sabiedrotā integrālvienādojuma

$$\overset{x}{f}\overset{x}{\varphi} = \psi(x,y) \quad , \text{ resp. } \quad \overset{x}{\varphi}\overset{x}{f} = \psi(x,y)$$

atrisināšanas formulas

$$\varphi(x,y) = \overset{x}{f}{}^{-1}\overset{x}{\psi} \quad , \text{ resp. } \quad \varphi(x,y) = \overset{x}{\psi}\overset{x}{f}{}^{-1} \tag{3}$$

pēc salīdzināšanas dabū funkcijas $\psi(x,y)$ s i m b o l i s k o f u n k c i o n ā l v i e n ā d o j u m u

$$\overset{x}{f}{}^{-1}\overset{x}{\psi} - \overset{x}{\psi}\overset{x}{f}{}^{-1} = 0. \tag{4}$$

Lietojot inversijas simbola $\overset{x}{f}{}^{-1}$ īpašību:

$$\overset{x}{f}\overset{x}{f}{}^{-1} = \overset{x}{f}{}^{-1}\overset{x}{f} = \overset{x}{1}{}^{0},$$

var (ja kompozīcija ar $\overset{x}{f}{}^{-1}$ ir atļauta) direkti no permutabilitātes sakara (1) atrast tāda pat veida kā (4), vienādojumu

$$\overset{x}{f}{}^{-1}\overset{x}{\varphi} - \overset{x}{\varphi}\overset{x}{f}{}^{-1} = 0, \tag{5}$$

ko apmierina meklējamā funkcija $\varphi(x,y)$.

Pamatproblēmā meklēsim n e p ā r t r a u k t a s funkcijas $\varphi(x,y)$ definīcijas apgabalā (A) $a \le y \le x \le b$. Tad pēc teorēmas par rezultantes kārtu (§ 2) secina, ka funkcijas $\psi(x,y)$ kārta ir augstāka par dotās funkcijas $f(x,y)$ kārtu. Tādēļ funkcijas $\psi(x,y)$

noteikšanai no simboliskā vienādojuma (4) ir jāievēro vajadzīgie palīga nosacījumi.

2. Atrisināsim pamatproblēmu gadījumā, kad

$$f(x,y) = \text{const}.$$

t.i. **noteiksim nepārtrauktas funkcijas** $\varphi(x,y)$, **kas permutablas ar konstanti.**

Problēmu nesašaurina, pieņemot konstanti par 1. Tad $\overset{x}{f}{}^{-1} = \overset{x}{1}{}^{-1}$, un rezultantes

(6) $$\psi(x,y) = \int_y^x \varphi(s,y)\,ds = \int_y^x \varphi(x,s)\,ds$$

simboliskais vienādojums

$$\overset{x}{1}{}^{-1}\overset{x}{\psi} - \overset{x}{\psi}\,\overset{x}{1}{}^{-1} = 0$$

top par lineāro parciālo diferenciālvienādojumu

(7) $$\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0,$$

ja ievēro simbola $\overset{x}{1}{}^{-1}$ operātīvo raksturu (§ 4, form. (9)). Ar diferenciālvienādojumu (7) noteic funkcijas formā

$$\psi(x,y) = \psi(x-y).$$

Tā kā

$$\varphi(x,y) = \overset{x}{1}{}^{-1}\overset{x}{\psi} = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \text{resp.} \quad \varphi(x,y) = \overset{x}{\psi}\,\overset{x}{1}{}^{-1} = -\frac{\partial\psi}{\partial y},$$

tad arī meklējamās funkcijas $\varphi(x,y)$ ir atkarīgas vienīgi no mainīgo diferences, t.i.

$$\varphi(x,y) = \varphi(x-y).$$

Šāda veida funkcijas Volterra nosauc par **noslēgta cikla funkcijām.** 7)

Konstatēsim, ka **tās veido funkciju grupu attiecībā pret kompozīciju.**

Tiešām, divu šādu funkciju

$$\varphi_1(x,y) = \varphi_1(x-y), \quad \varphi_2(x,y) = \varphi_2(x-y)$$

rezultantes

$$\overset{x}{\varphi_1}\,\overset{x}{\varphi_2} = \int_y^x \varphi_1(x-s)\,\varphi_2(s-y)\,ds = \int_0^{x-y} \varphi_1(x-y-\sigma)\,\varphi_2(\sigma)\,d\sigma$$

---

7) Nosaukums ir radies sakarā ar šādu funkciju izlietojumu matēmatiskajā fizikā, sk. Volterra monografijas /23/ un /24/.

un
$$\overset{\times}{\varphi}_2\overset{\times}{\varphi}_1 = \int_y^x \varphi_2(x-s)\,\varphi_1(s-y)\,ds = \int_0^{x-y} \varphi_1(x-y-\sigma_1)\,\varphi_2(\sigma_1)\,d\sigma_1$$
ir identiskas un arī ir noslēgta cikla funkcijas.

Nosacījums
$$\overset{\times}{\varphi}_1\overset{\times}{\varphi}_2 = \overset{\times}{\varphi}_2\overset{\times}{\varphi}_1$$
rāda, ka funkcijas φ_1, φ_2 ir permutablas.

Ir pierādīta sekojošā *teorēma*. *Visas funkcijas, kas permutablas ar konstanti (resp. 1), ir savā starpā permutablas funkcijas un veido t.s. noslēgtā cikla grupu.*

3. Noslēgta cikla grupai pieder arī funkcijas, kas permutablas ar speciālu n. kārtas funkciju
$$f(x,y) = \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} = \overset{\times}{1}^{n}.$$
To rezultante
$$\psi(x,y) = \overset{\times}{1}^{n}\overset{\times}{\varphi} = \overset{\times}{\varphi}\overset{\times}{1}^{n}$$
apmierina nosacījumus

$$\text{(8)}\qquad \left[\frac{\partial^k \psi(x,y)}{\partial x^i\,\partial y^j}\right]_{y=x} = 0 \qquad \left(\begin{matrix} i+j=k, \\ k=0,1,2,\dots,n-1 \end{matrix}\right)$$

un diferenciālvienādojumu

$$\text{(9)}\qquad \frac{\partial^n \psi}{\partial x^n} - (-1)^n \frac{\partial^n \psi}{\partial y^n} = 0,$$

ko dabū no vienādojuma (4) ar simbola
$$\overset{\times}{f}^{-1} = \overset{\times}{1}^{-n}$$
izteikto darbības rezultātu. Tuvāka diskusija[8] rāda, ka uzstādītai diferenciālvienādojuma (9) Cauchy problēmai (8) ir vienīgi atrisinājums - noslēgta cikla grupas funkcija
$$\psi(x,y) = \psi(x-y).$$
Tā kā
$$\varphi(x,y) = \overset{\times}{1}^{-n}\overset{\times}{\psi} = \frac{\partial^n\psi}{\partial x^n}, \quad \text{resp.} \quad \varphi(x,y) = \overset{\times}{\psi}\overset{\times}{1}^{-n} = (-1)^n \frac{\partial^n \psi}{\partial y^n},$$
tad arī meklējamā funkcija
$$\varphi(x,y) = \varphi(x-y)$$
ietilpst noslēgtā cikla grupā.

---

8) Sk. manu darbu /8, lpp. 634/.

4. N o t e i k s i m v i s a s p i r m ā s k ā r t a s f u n k c i j a s $f(x,y)$, k a s k a n o n i s k ā f o r m ā r e d u c ē j a s u z k o n s t a n t i , p r o t i - v i e n ī b u .

Kā zināms (§ 3), ar transformācijām

$$(10) \qquad x = \omega(\xi), \quad y = \omega(\eta),$$

izvēloties divas funkcijas $\alpha(\xi), \beta(\eta)$ ar noteikumu

$$(11) \qquad \alpha(\xi)\beta(\xi) = \omega'(\xi) = \frac{d\omega}{d\xi},$$

sastāda transformēto funkciju

$$(12) \qquad F(\xi,\eta) = \left[\alpha\beta f(x,y)\right]_{\substack{x=\omega(\xi)\\ y=\omega(\eta)}} = \alpha(\xi)\beta(\eta)\, f\big(\omega(\xi), \omega(\eta)\big).$$

Ja šīs funkcijas kanoniskā forma ir

$$F = 1,$$

tad n e p i e c i e š a m i jābūt dotai funkcijai $f(x,y)$ veidā

$$(13) \qquad f(x,y) = \frac{1}{\alpha\beta} = g(x)\, h(y),$$

kur

$$g(x) = \frac{1}{\alpha}, \qquad h(y) = \frac{1}{\beta}$$

ir atsevišķi katra argumenta x, resp. y funkcijas.

Konstatēsim, ka noteikums (13) ir a r ī p i e t i e k o š s, t.i. ka šāda funkcija kanoniskā formā reducējas uz konstanti - vienību. Pierādījumam izlieto (§ 3) kanonisko transformāciju, kurā funkcijas

$$(14) \qquad \alpha = e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}, \quad \beta = \frac{1}{a(x)}\, e^{+\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}$$

un

$$(15) \qquad \xi = \int a(x)\,dx$$

ir izteiktas ar

$$(16) \qquad a(x) = f(x,x), \quad b(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y=x}$$

Ar hipotēzi (13) atrod nozīmes

$$a(x) = g(x)\,h(x), \quad b(x) = g'(x)\,h(x);$$

tā tad aprēķinos vajadzīga daļa

$$\frac{b(x)}{a(x)} = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

un integrāls

$$\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx = \ln|g(x)|.$$

No formulām (14) dabū sakarus

$$\alpha(x) = \frac{1}{g(x)}, \qquad \beta(x) = \frac{1}{h(x)},$$

un tā tad tiešām transformētā funkcija pēc (12) formulas ir

$$F(\xi,\eta) = 1.$$

Argumenta sakaru pēc formulas (15) nosaka šinī gadījumā

(17) $$\xi = \int g(x)\,h(x)\,dx = \ell(x).$$

Tā kā ar konstanti

$$F(\xi,\eta) = 1$$

visas permutablas funkcijas ietilpst noslēgtā cikla grupā

$\theta(\xi-\eta)$ (θ - patvaļīga funkcija),

un lietota transformācija nemaina kompozīciju, tad **v i s a s f u n k c i j a s** $\varphi(x,y)$, **k a s p e r m u t a b l a s a r p i r m ā s k ā r t a s f u n k c i j u**

(13) $$f(x,y) = g(x)\,h(y) \qquad [g(x) \neq 0,\ h(y) \neq 0],$$

i z t e i c a r f o r m u l u

(18) $$\varphi(x,y) = g(x)\,h(y)\,\theta\,[\ell(x) - \ell(y)],$$

k u r $\ell(x)$ **a p z ī m ē f u n k c i j u (17).**

Var viegli **p ā r b a u d ī t**, ka funkcijas (18) ir permutablas ar (13). Tiešām, kompozīciju rezultantes

$$\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi} = g(x)\,h(y)\int_y^x g(s)\,h(s)\,\theta[\ell(s) - \ell(y)]\,ds,$$

resp.

$$\overset{*}{\varphi}\overset{*}{f} = g(x)\,h(y)\int_y^x g(s)\,h(s)\,\theta[\ell(x) - \ell(s)]\,ds$$

rodas identiskas ar funkciju

$$g(x)\,h(y)\int_0^L \theta(\sigma)\,d\sigma,$$

ja iepriekšējos integrālos dara substitūcijas

$$\ell(s) - \ell(y) = \sigma, \quad \text{resp.} \quad \ell(x) - \ell(s) = \sigma$$

un apzīmē funkciju

$$L(x,y) = \ell(x) - \ell(y).$$

Tamlīdzīgā kārtā konstatē, ka f u n k c i j a s (18) i r s a v ā s t a r p ā p e r m u t a b l a s , t.i., ja

$$\varphi_1(x,y) = g(x)\,h(y)\,\Theta_1[l(x)-l(y)], \quad \varphi_2(x,y) = g(x)\,h(y)\,\Theta_2[l(x)-l(y)],$$

tad

$$\overset{x}{\varphi_1}\,\overset{x}{\varphi_2} = \overset{x}{\varphi_2}\,\overset{x}{\varphi_1}.$$

Tiešām, kompozīciju rezultantes

$$\overset{x}{\varphi_1}\,\overset{x}{\varphi_2} = g(x)\,h(y)\int_y^x g(s)\,h(s)\,\Theta_1[l(x)-l(s)]\,\Theta_2[l(s)-l(y)]\,ds$$

un

$$\overset{x}{\varphi_2}\,\overset{x}{\varphi_1} = g(x)\,h(y)\int_y^x g(s)\,h(s)\,\Theta_2[l(x)-l(s)]\,\Theta_1[l(s)-l(y)]\,ds$$

ar minētām substitūcijām un apzīmējumu atrod vienlīdzīgas ar funkciju

$$g(x)\,h(y)\int_0^L \Theta_1(L-\sigma)\,\Theta_2(\sigma)\,d\sigma.$$

P i e m ē r s.[9] Noteikt funkcijas $\varphi(x,y)$, kas permutablas ar doto funkciju

(19) $$f(x,y) = x^m y^k.$$

Te funkcijas

$$g(x) = x^m, \quad h(y) = y^k$$

un

$$l(x) = \int g(x)\,h(x)\,dx = \int x^{m+k}\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{m+k+1}}{m+k+1}, & ja\ m+k \neq -1 \\ \ln|x|, & ja\ m+k = -1 \end{cases}$$

Tā tad ar (19) permutablas funkcijas noteic pēc formulām

(20) $$\varphi(x,y) = \begin{cases} x^m y^k\,\Theta\,(x^{m+k+1} - y^{m+k+1}), & ja\ m+k \neq -1 \\ x^m y^k\,\Theta[\ln|x| - \ln|y|], & ja\ m+k = -1, \end{cases}$$

ja pirmajā gadījumā konstanti $\dfrac{1}{m+k+1}$ ieskaita patvaļīgā funkcijā Θ.

5. Vispārinot iepriekšējos rezultātus, n o t e i k s i m v i s a s n. k ā r t a s f u n k c i j a s $f(x,y)$, k a s k a n o n i s k ā f o r m ā r e d u c ē j a s u z f u n k c i j u

(21) $$F(\xi,\eta) = \frac{(\xi-\eta)^{n-1}}{(n-1)!} = \overset{*}{1}{}^{n}$$

9) Minēts J.Pérès darbā /11, lpp. 60/.

No sakarības formulas (12) atrod

$$\left[f(x,y)\right]_{\substack{x=\omega(\xi)\\ y=\omega(\eta)}} = \frac{F(\xi,\eta)}{\alpha(\xi)\beta(\eta)} = \frac{(\xi-\eta)^{n-1}}{(n-1)!\,\alpha(\xi)\beta(\eta)}.$$

Ja lietojam inversās funkcijas

$$\xi = \lambda(x), \quad \eta = \lambda(y),$$

tad iepriekšējā formula dod sekojošu n e p i e c i e š a m u nosacījumu par funkcijas $f(x,y)$ veidu

(22) $$f(x,y) = g(x)\,h(y)\,\frac{[\lambda(x)-\lambda(y)]^{n-1}}{(n-1)!},$$

kur apzīmē

$$g(x) = \frac{1}{\alpha(\lambda(x))}, \quad h(y) = \frac{1}{\beta(\lambda(y))}.$$

Konstatēsim, ka ar pieņēmumu

(23) $$\lambda(x) = \ell(x) = \int g(x)\,h(x)\,dx$$

funkcijas (22) kanoniskā forma tiešām ir (21), t.i. ka n o s a c ī j u m s (22) ir p i e t i e k o š s.

Funkcijas $\lambda(x)$ noteikšanai jāievēro vispārīgās kanoniskās transformācijas (§ 3) sakars

(24) $$\xi = \int [a(x)]^{\frac{1}{n}}\,dx,$$

kur apzīmē

$$a(x) = \left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}}\right)_{y=x}.$$

Pēc saliktās funkcijas atvasināšanas formulas (§ 3, form. (14)) izteic parciālo atvasinājumu

$$\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}} = g(x)\,h(y)\left[\lambda'(x)\right]^{n-1} + \ldots \qquad \left(\lambda' = \frac{d\lambda}{dx}\right),$$

kuŗa vērtība ar $y = x$ ir

$$a(x) = g(x)\,h(x)\left[\lambda'(x)\right]^{n-1}.$$

Ja šādu $a(x)$ izteiksmi ievieto formulā (24) un ievēro sakaru

$$\frac{ds}{dx} = \lambda'(x),$$

tad pēc pārveidojumiem dabū

$$\lambda'(x) = g(x)\, h(x),$$

un tā tad

$$\lambda(x) = \int g(x)\, h(x)\, dx,$$

resp.

$$\lambda(x) = \ell(x).$$

Vispārīgajā kanoniskajā transformācijā (§ 3, 4.nod.) ir jālieto funkcijas

$$(25) \quad \alpha = [a(x)]^{\frac{n-1}{2n}} \cdot e^{-\int \frac{b(x)}{n\, a(x)} dx}, \quad \beta = [a(x)]^{-\frac{n+1}{2}} \cdot e^{+\int \frac{b(x)}{n\, a(x)} dx}$$

To palīga funkcijas

$$b(x) = \left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right)_{y=x}$$

noteikšanai sastāda parciālā atvasinājuma

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n} = h(y) \left\{ g(x) \cdot \frac{[\ell(x) - \ell(y)]^{n-1}}{(n-1)!} \right\}^{(n)}$$

atklātu izteiksmi

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n} = g(x)\, h(y) \left\{ \frac{[\ell(x) - \ell(y)]^{n-1}}{(n-1)!} \right\}^{(n)} + n\, g'(x)\, h(y) \left\{ \frac{[\ell(x) - \ell(y)]^{n-1}}{(n-1)!} \right\}^{(n-1)} + \dots,$$

izlietojot Leibnica reizinājuma atvasināšanas likumu. Ja pēdējās formulas labās puses locekļus figūriekavās izteic ar minēto saliktās funkcijas atvasināšanas likumu, tad pēc pārveidojumiem dabū

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n} = h(y) \left\{ \frac{n(n-1)}{2}\, g(x) [\ell'(x)]^{n-2} \ell''(x) + n\, g'(x) [\ell'(x)]^{n-1} + \dots \right\}.$$

Tā tad vajadzīgā funkcija ir

$$b(x) = n\, g(x)\, h(x) [\ell'(x)]^{n-1} \cdot \left\{ \frac{n-1}{2} \cdot \frac{\ell''(x)}{\ell'(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)} \right\}.$$

Tā kā
$$l'(x) = g(x)\,h(x) = [a(x)]^{\frac{1}{n}},$$
tad no iepriekšējās formulas pēc pārveidojumiem atrod daļu
$$\frac{b(x)}{n a(x)} = \frac{n+1}{2}\cdot\frac{g'(x)}{g(x)} + \frac{n-1}{2}\cdot\frac{h'(x)}{h(x)}.$$
Tā tad
$$e^{\int \frac{b(x)}{n a(x)}dx} = g^{\frac{n+1}{2}}\cdot h^{\frac{n-1}{2}},$$
un no (25) secina
$$\alpha = \frac{1}{g(x)}, \quad \beta = \frac{1}{h(y)}.$$
Tādēļ transformētā funkcija
$$F(\xi,\eta) = \left[\alpha\beta\, f(x,y)\right]_{\substack{x=\omega(\xi)\\ y=\omega(\eta)}},$$
Kad funkcija $f(x,y)$ apmierina nosacījumu (22), tiešām ir
$$F(\xi,\eta) = \frac{(\xi-\eta)^{n-1}}{(n-1)!} = \overset{x}{1}{}^{n}.$$
Tā kā ar pēdējo funkciju visas permutablas funkcijas

$\Theta(\xi-\eta)$ (θ - patvaļīgā funkcija)

ietilpst noslēgtā cikla grupā un lietotās transformācijas nemaina kompozīciju, tad ar funkciju (22) permutablām funkcijām $\varphi(x,y)$ ir vispārīgā forma

(26) $$\varphi(x,y) = g(x)\,h(y)\,\Theta[\lambda(x)-\lambda(y)],$$

kas sakrīt ar (18), jo der sakars

(23) $$\lambda(x) = l(x) = \int g(x)\,h(x)\,dx.$$

Permutabilitāti
$$\overset{x}{f}\overset{x}{\varphi} = \overset{x}{\varphi} f$$
viegli pārbauda, izteicot ar piemērotām substitūcijām kompozīciju rezultantes
$$\overset{x}{f}\overset{x}{\varphi} = g(x)\,h(y)\int_y^x \frac{[\lambda(x)-\lambda(s)]^{n-1}}{(n-1)!}\,\Theta[\lambda(s)-\lambda(y)]\,g(s)\,h(s)\,ds$$

un

$$\overset{*}{\varphi}\overset{x}{f} = g(x)h(y)\int_y^x \Theta[\lambda(x)-\lambda(s)]\frac{[\lambda(s)-\lambda(y)]^{n-1}}{(n-1)!}g(s)h(s)ds$$

ar vienu un to pašu funkciju

$$g(x)h(y)\int_0^L \frac{(L-\sigma)^{n-1}}{(n-1)!}\Theta(\sigma)d\sigma,$$

kur

$$L(x,y) = \lambda(x)-\lambda(y) = \mathcal{L}(x)-\mathcal{L}(y).$$

Funkciju (26) savstarpējā permutabilitāte jau konstatēta (4.nod.).

§ 6. Problēma ar pirmās kārtas funkciju.

1. Ievērojot kanoniskās transformācijas (§ 3) īpašības, permutablo funkciju noteikšanas problēmu ar pirmās kārtas funkciju $f(x,y)$ var reducēt uz tādu, kur $f(x,y)$ ir kanoniskās formas funkcija:

(1) $$f(x,x) = 1, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y=x} = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y=x} = 0.$$

Kad eksistē definīcijas apgabalā

(A) $$a \le y \le x \le b$$

šīs funkcijas nepārtraukts otrās kārtas atvasinājums

(2) $$H(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},$$

var sastādīt (§ 4) kompozīcijas inversijas simbolu

(3) $$\overset{x-1}{f} = \overset{x-1}{1} + F(x,y),$$

ja funkciju $F(x,y)$ aprēķina ar absolūti un vienmērīgi savirzāmu rindu

(4) $$F(x,y) = H(x,y) + \overset{x}{H}\overset{x}{1}\overset{x}{H} + \overset{x}{H}\overset{x}{1}\overset{x}{H}\overset{x}{1}\overset{x}{H} + \ldots \quad \left(H = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right).$$

Problēmas sabiedrotos integrālvienādojumus (§ 5)

(5) $$\overset{x}{f}\overset{x}{\varphi} = \psi(x,y)$$

un

(5') $$\overset{x}{\varphi}\overset{x}{f} = \psi(x,y)$$

atrisina attiecīgi ar formulām

$$\varphi(x,y) = \overset{x-1}{f}\,\overset{x}{\psi} = \overset{x-1}{1}\,\overset{x}{\psi} + \overset{x}{F}\,\overset{x}{\psi} \tag{6}$$

un

$$\varphi(x,y) = \overset{x}{\psi}\,\overset{x-1}{f} = \overset{x}{\psi}\,\overset{x-1}{1} + \overset{x}{\psi}\,\overset{x}{F} \tag{6'}$$

jeb atklātā veidā:

$$\varphi(x,y) = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \int_y^x F(x,s)\,\psi(s,y)\,ds \tag{7}$$

un

$$\varphi(x,y) = -\frac{\partial \psi}{\partial y} + \int_y^x \psi(x,s)\,F(s,y)\,ds. \tag{7'}$$

Salīdzinot (6) ar (6'), resp. (7) ar (7'), sastāda funkcijas

$$\psi(x,y) = \int_y^x f(x,s)\,\varphi(s,y)\,ds = \int_y^x \varphi(x,s)\,f(s,y)\,ds \tag{8}$$

noteikšanai simboliskās formas vienādojumu

$$\overset{x-1}{1}\,\overset{x}{\psi} - \overset{x}{\psi}\,\overset{x-1}{1} = \overset{x}{\psi}\,\overset{x}{F} - \overset{x}{F}\,\overset{x}{\psi}, \tag{9}$$

kas atklātā veidā dod *integrodiferenciālo vienādojumu*

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = \int_y^x \left[\psi(x,s)\,F(s,y) - F(x,s)\,\psi(s,y)\right] ds. \tag{9'}$$

No formulas (8) atrod palīga nosacījumu

$$\psi(x,x) = 0. \tag{10}$$

Tā tad, *problēma reducējas uz integrodiferenciālā vienādojuma (9') atrisināšanu, ja ievēro nosacījumu* (10).

2. Atrisināsim vienādojumu (9'), sekojot vispār Volterra norādītai metodei[10], bet precizējot atrisināšanas formulu.

Ar apzīmējumu

$$g(x,y) = \overset{x}{\psi}\,\overset{x}{F} - \overset{x}{F}\,\overset{x}{\psi} = \int_y^x \left[\psi(x,s)\,F(s,y) - F(x,s)\,\psi(s,y)\right] ds$$

vienādojumu (9') raksta formā

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = g(x,y). \tag{11}$$

---

10) Sk. Volterra /21/, Bompiani /1/, Pérès /11/ un monogrāfijas /24/ un /28/.

Ievedot jaunos mainīgos

(12) $$u = \frac{x-y}{2}, \quad v = \frac{x+y}{2},$$

sastāda funkcijas:

$$\bar{\psi}(u,v) = \psi(v+u, v-u), \quad \bar{g}(u,v) = g(v+u, v-u).$$

Tā kā $x = v + u, \ y = v - u$ un

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial v} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

tad vienādojums (11) ar jaunajiem mainīgiem top par

(11') $$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial v} = \bar{g}(u,v).$$

Nosacījumam (10) atbilst nosacījums

(10') $$\bar{\psi}(0,v) = 0$$

jo, kad $y = x$, ir $u = 0$. Diferenciālvienādojuma (11') partikulārais atrisinājums, kas apmierina nosacījumu (10'), ir funkcija

$$\int_{v_0}^{v} \bar{g}(u,t)\,dt,$$

jo der sakars

$$\bar{g}(0,v) = g(x,x) = 0.$$

Tā vispārīgais atrisinājums

$$\bar{\psi}(u,v) = \Theta(u) + \int_{v_0}^{v} \bar{g}(u,t)\,dt$$

satur vienu patvaļīgu noslēgta cikla grupas funkciju $\Theta(u)$, kam jāapmierina nosacījums

$$\Theta(0) = 0,$$

lai būtu izpildīta prasība (10'). Lietotā noteiktā integrāla apakšējā robeža ir mainīgā v fiksētā nozīme v_0 dēfinīcijas apgabalā.*)

Ievedot mainīgos $x = v+u, \ y = v-u$, atrod vienādojuma (11) atrisināšanas formulu

(13) $$\psi(x,y) = \Theta(u) + \int_{v_0}^{v} g(t+u, t-u)\,dt.$$

Pēc funkcijas $g(x,y)$ izteiksmes substitūcijas pēdējā formulā sastāda funkcijas $\psi(x,y)$ noteikšanai integrālvienādojumu

(14) $$\psi(x,y) = \Theta(u) + \int_{v_0}^{v} dt \int_{t-u}^{t+u} \left[\psi(t+u, s) F(s, t-u) - F(t+u, s)\psi(s, t-u)\right] ds,$$

---

*) Ar to atšķiras šī §-a atrisināšanas formulas no iepriekšējā piezīmē minēto autoru lietotām formulām.

kas ir e k v i v a l e n t s ar integrodiferenciālo vienādojumu (9') kopā ar Cauchy tipa nosacījumu (10), ja patvaļīgā noslēgta cikla grupas funkcija $\theta(u) = \theta\left(\frac{x-y}{2}\right)$ izvēlēta ar nosacījumu

$$\theta(0) = 0.$$

3. Pierādīsim integrālvienādojuma (14) atrisinājuma unitātes teōrēmu: Ja ir izvēlēta $\theta(u) = \theta\left(\frac{x-y}{2}\right)$ kā nepārtraukta, noslēgtā cikla grupas, funkcija un $F(x,y)$ i r d o t ā n e p ā r t r a u k t a f u n k c i j a d ē f ī n ī c i j a s a p g a b a l ā (A), t a d i n t e g r ā l v i e n ā d o j u m a m (14) e k s i s t ē a u g s t ā k a i s v i e n s a t r i s i n ā j u m s $\psi(x,y)$ k ā n e p ā r t r a u k t a f u n k c i j a š a j ā d ē f ī n ī c i j a s a p g a b a l ā .

Pieņemam pretējo, ka eksistē cits atrisinājums $\psi_0(x,y)$, kas apmierina minētos nosacījumus, tad diference

$$\Psi(x,y) = \psi(x,y) - \psi_0(x,y)$$

apmierina homogeno integrālvienādojumu

$$(15) \qquad \Psi(x,y) = \int_{v_0}^{v} dt \int_{t-u}^{t+u} \left[\Psi(t+u,s) F(s,t-u) - F(t+u,s) \Psi(s,t-u) \right] ds.$$

Pēc hipoteses $\Psi(x,y)$ ir divu nepārtrauktu funkciju diference; tādēļ

$$|\Psi(x,y)| < \mu,$$

kur μ ir konstante visā dēfīnīcijas apgabalā. Eksistē arī $|F(x,y)|$ augstākā robeža M, t.i.

$$|F(x,y)| < M.$$

No integrālvienādojuma (15) labās puses novērtējuma atrod

$$|\Psi(x,y)| < 2\mu M (b-a)(x-y).$$

Izlietojot pēdējo novērtējumu vienādojuma (15) labajai pusei, dabū jaunu novērtējumu

$$|\Psi(x,y)| < 4\mu M^2 (b-a)^2 \cdot \frac{(x-y)^2}{2!}.$$

Tamlīdzīgi atkārtojot novērtēšanas procesu, dabū vispārīgu formulu

$$|\Psi(x,y)| < \mu \cdot \frac{[2M(b-a)(x-y)]^n}{n!}.$$

Tā kā labajā pusē daļa neaprobežoti tuvojas nullei, kad $n \to \infty$, bet kreisā puse ir no n neatkarīgs lielums, tad identiski visā dēfinīcijas apgabalā jābūt funkcijai $\Psi(x,y)$ vienlīdzīgai nullei.
Tādēļ
$$\psi(x,y) \equiv \psi_0(x,y),$$
un atrisinājuma unitāte konstatēta.

P i e z ī m e . Minētā pierādījuma metode ir tāda pat, kādu lieto l i n e ā r o integrālvienādojumu teōrijā.

4. Integrālvienādojumu (14) atrisina ar p a k ā p e n i s k o t u v i n ā j u m u m e t o d i .

Funkcijas $\theta(u)$ vietā Volterra ieved citu noslēgta cikla grupas funkciju $\lambda(x-y)$, saistītu ar sakaru

$$\theta(u) = \int_0^{2u} \lambda(\xi)\,d\xi = \int_0^{x-y} \lambda(\xi)\,d\xi. \tag{16}$$

Tā kā meklējamā funkcija $\psi(x,y)$ apmierina nosacījumu
$$\psi(x,x) = 0,$$
tad meklēsim integrālvienādojuma (14) atrisinājumu formā

$$\psi(x,y) = \int_0^{x-y} \lambda(\xi)\, K(\xi;\, x,y)\,d\xi \tag{17}$$

ar nezināmo trīs argumentu funkciju $K(\xi;x,y)$, kas dēfinētā apgabalā

$$(A') \qquad a \leq y \leq x \leq b, \qquad 0 \leq \xi \leq x-y.$$

Sastādīsim $K(\xi;x,y)$ funkcionālvienādojumu, ievietojot pieņemto $\psi(x,y)$ izteiksmi (17) integrālvienādojumā (14). Pēc substitūcijas labajā pusē rodas locekļi ar integrāliem

$$J_1 = \int_{v_0}^{v} dt \int_{t-u}^{t+u} \psi(t+u,s)\,F(s,t-u)\,ds = \int_{v_0}^{v} dt \int_{t-u}^{t+u} F(s,t-u)\,ds \int_0^{t+u-s} \lambda(\xi)\, K(\xi;\, t+u,\, s)\,d\xi$$

un

$$J_2 = \int_{v_0}^{v} dt \int_{t-u}^{t+u} F(t+u,\, s)\,\psi(s,\, t-u)\,ds = \int_{v_0}^{v} dt \int_{t-u}^{t+u} F(t+u,s)\,ds \int_0^{s-t+u} \lambda(\xi)\, K(\xi;\, s,\, t-u)\,d\xi,$$

ko attiecīgi pārveido ar mainīgo substitūcijām

$$t+u-s = \sigma, \qquad \text{resp.} \quad s-t+u = \sigma.$$

Ja pēc tam dabūtajās izteiksmēs

$$J_1 = \int_{v_0}^{v} dt \int_0^{2u} F(t+u-\sigma,\, t-u)\,d\sigma \int_0^{\sigma} \lambda(\xi)\, K(\xi;\, t+u,\, t+u-\sigma)\,d\xi$$

un
$$J_2=\int_{v_0}^{v}dt\int_0^{2u}F(t+u,\ t-u+\sigma)\,d\sigma\int_0^{\sigma}\lambda(\xi)\,K(\xi;\ t-u+\sigma,\ t-u)\,d\xi$$
apmaina integrācijas kārtību (iekšējo pēc Dirichlet formulas), tad rodas
$$J_1=\int_0^{2u}\lambda(\xi)\,d\xi\int_{v_0}^{v}dt\int_{\xi}^{2u}K(\xi;\ t+u,\ t+u-\sigma)\,F(t+u-\sigma,\ t-u)\,d\sigma$$
un
$$J_2=\int_0^{2u}\lambda(\xi)\,d\xi\int_{v_0}^{v}dt\int_{\xi}^{2u}F(t+u,\ t-u+\sigma)\,K(\xi;\ t-u+\sigma,\ t-u)\,d\sigma.$$
Pēc šādiem pārveidojumiem no integrālvienādojuma (14) viegli sastāda funkcijas $K(\xi;x,y)$ funkcionālvienādojumu
$$K(\xi;x,y)=1+\int_{v_0}^{v}dt\int_{\xi}^{2u}\Big[K(\xi;\ t+u,\ t+u-s)\,F(t+u-s,\ t-u)-$$
$$-F(t+u,\ t-u+s)\,K(\xi;\ t-u+s,\ t-u)\Big]ds, \tag{18}$$
kas arī pieder integrālvienādojuma tipam.[11)]

Vienādojumu (18) atrisina ar pakāpeniskо tuvinājumu metodi, izteicot atrisinājumu ar rindu
$$K(\xi;x,y)=1+\sum_{n=1}^{\infty}K_n(\xi;x,y). \tag{19}$$
Pēc substitūcijas vienādojumā un salīdzināšanas rodas sakarības formula
$$K_1(\xi;x,y)=\int_{v_0}^{v}dt\int_{\xi}^{2u}\big[F(t+u-s,\ t-u)-F(t+u,\ t-u+s)\big]ds \tag{20}$$
un vispārīgā formula
$$K_{n+1}(\xi;x,y)=\int_{v_0}^{v}dt\int_{\xi}^{2u}\Big[K_n(\xi;t+u,\ t+u-s)\,F(t+u-s,\ t-u)-$$
$$-F(t+u,\ t-u+s)\,K_n(\xi;\ t-u+s,\ t-u)\Big]ds \tag{21}$$
$$(n=1,2,3,\dots).$$

Lietotās rindas (19) absolūtā un vienmērīgā konvergence definīcijas apgabalā
$$a\le y\le x\le b,\qquad 0\le\xi\le x-y \tag{A'}$$
viegli secināma no locekļu novērtējumu formulas
$$\big|K_1(\xi;x,y)\big|<2M(b-a)(x-y-\xi)$$

---

11) Šo vienādojumu min J. Pérès savā darbā /11, lpp. 37/.

un vispārējās formulas

$$|K_n(\xi;x,y)| < \frac{[2M(b-a)(x-y-\xi)]^n}{n!} \qquad (n=1,2,3,\dots),$$

kur M ir $|F(x,y)|$ augšējā robeža. Pēdējās formulas pareizību pierāda, lietojot rekurrences formulu (21).

Lai galīgi noteiktu funkcijas $\varphi(x,y)$, kas permutablas ar doto pirmās kārtas funkciju $f(x,y)$, ievieto formulā

(7) $$\varphi(x,y) = \frac{\partial\psi}{\partial x} + \int_y^x F(x,s)\,\psi(s,y)\,ds$$

vai (7') atrastās funkcijas $\psi(x,y)$ izteiksmē (17). Sastādam, piem., atvasinājumu

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \lambda(x-y)\,K(x-y;x,y) + \int_0^{x-y}\lambda(\xi)\,\frac{\partial K(\xi;x,y)}{\partial x}\,d\xi$$

jeb

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \lambda(x-y) + \int_0^{x-y}\lambda(\xi)\,\frac{\partial K(\xi;x,y)}{\partial x}\,d\xi,$$

jo no vienādojuma (18) atrod:

$$K(x-y;x,y) \equiv 1.$$

Formulas (7) labās puses otro locekli

$$\overset{x}{F}\overset{x}{\psi} = \int_0^{x-y} F(x,y+\sigma)\,\psi(y+\sigma,y)\,d\sigma$$

pēc izteiksmes (17) ievietošanas pārveido par

$$\overset{x}{F}\overset{x}{\psi} = \int_0^{x-y} F(x,y+\sigma)\,d\sigma\int_0^{\sigma}\lambda(\xi)\,K(\xi;y+\sigma,y)\,d\xi,$$

un ar integrācijas kārtības apmaiņu tas top par

$$\overset{x}{F}\overset{x}{\psi} = \int_0^{x-y}\lambda(\xi)\,d\xi\int_{y+\xi}^{x}F(x,s)\,K(\xi;s,y)\,ds.$$

Ievērojot atrastās izteiksmes, dabū no (7) formulas permutablās funkcijas

(22) $$\varphi(x,y) = \lambda(x-y) + \int_0^{x-y}\lambda(\xi)\,\Phi(\xi;x,y)\,d\xi,$$

izteiktus ar funkciju

(23) $$\Phi(\xi;x,y) = \frac{\partial K(\xi;x,y)}{\partial x} + \int_{y+\xi}^{x}F(x,s)\,K(\xi;s,y)\,ds.$$

Pēdējā funkcija ir definētā apgabalā (A') $a \le y \le x \le b,\ 0 \le \xi \le x-y$, un tās vērtība ir nulle, kad $\xi = x-y$, jo

$$\Phi(x-y;x,y) = \left[\frac{\partial K(\xi;x,y)}{\partial x}\right]_{\xi=x-y} = 0.$$

Formula (22) ar patvaļīgu noslēgta cikla grupas funkciju $\lambda(x-y)$ izteic visas funkcijas $\varphi(x,y)$, kas permutablas ar doto pirmās kārtas un kanoniskās formas funkciju $f(x,y)$, t. i. kas apmierina permutabilitātes nosacījumu

$$\int_y^x f(x,s)\varphi(s,y)ds = \int_y^x \varphi(x,s)f(s,y)ds \quad \text{jeb} \quad \overset{x}{f}\overset{x}{\varphi} = \overset{x}{\varphi}\overset{x}{f}. \tag{24}$$

Šādā veidā minētās permutablās funkcijas ir izteicis Volterra.

5. No Volterra formulas (22) secināmas sekojošas permutablo funkciju īpašības.

Eksistē viena un tikai viena permutablā funkcija (22), kas pieņem dotās vērtības dēfinīcijas trijstūra

$$a \leq y \leq x \leq b \tag{A}$$

malas $y=a$ punktos.

Šī īpašība konstatējama no tā apstākļa, ka rēgulāram otrā veida līneāram Volterra integrālvienādojumam

$$\varphi(x,a) = \lambda(x-a) + \int_0^{x-a}\lambda(\xi)\phi(\xi;x,a)d\xi$$

attiecībā pret nezināmo funkciju λ eksistē viens vienīgs atrisinājums, kad ir dotas funkcijas $\varphi(x,y)$ vērtības $\varphi(x,a)$ minētās malas $y=a$ punktos. Apmainot iepriekšējā vienādojumā x pret $x+a$ un apzīmējot

$$\varphi_0(x) = \varphi(x+a,a), \quad \phi_0(\xi;x) = \phi(\xi;x+a,a),$$

dabū Volterra vienādojumu

$$\lambda(x) + \int_0^x \lambda(\xi)\phi_0(\xi;x)d\xi = \varphi_0(x),$$

kam atrisinājumu

$$\lambda(x) = \varphi_0(x) + \int_0^x \varphi_0(\xi)\Gamma(\xi;x)d\xi$$

izteic ar resolventes funkciju

$$\Gamma(\xi;x) = -\phi_0(\xi;x) + \overset{x}{\phi}_0^{2} - \overset{x}{\phi}_0^{3} + \dots$$

Ar atrastās $\lambda(x)$ izteiksmes substitūciju formulā (22) rodas

$$\varphi(x,y) = \varphi_0(x-y) + \int_0^{x-y}\varphi_0(\xi)\Gamma(\xi;x-y)d\xi + \int_0^{x-y}\varphi_0(\xi)\phi(\xi;x,y)d\xi +$$
$$+ \int_0^{x-y}\phi(s;x,y)ds\int_0^{s}\varphi_0(\xi)\Gamma(\xi;s)d\xi$$

jeb
$$\varphi(x,y) = \varphi_0(x-y) + \int_0^{x-y} \varphi_0(\xi) L(\xi; x,y) d\xi,$$

ja iepriekšējās formulas pēdējā loceklī apmaina integrācijas kārtību un apzīmē

$$(25) \quad L(\xi; x,y) = \Gamma(\xi; x-y) + \phi(\xi; x,y) + \int_\xi^{x-y} \Gamma(\xi; s)\, \phi(s; x,y) ds$$

Galīgi ar funkcijas
$$\varphi_0(x) = \varphi(x+a, a)$$
ievietošanu dabū permutablo funkciju noteikšanas formulu

$$(26) \quad \varphi(x,y) = \varphi(x-y+a, a) + \int_0^{x-y} \varphi(\xi+a, a) L(\xi; x,y) d\xi.$$

Lietotai funkcijai $L(\xi; x,y)$ ir vērtība
$$L(x-y; x,y) = \Gamma(x-y; x-y) = -\phi_\circ(x-y; x-y) = 0.$$

S p e c i ā l ā g a d ī j u m ā , kad
$$\varphi(x,a) \equiv 0,$$
regulāram homogēnam Volterra integrālvienādojumam
$$\lambda(x-a) + \int_0^{x-a} \lambda(\xi) \phi(\xi; x, a) d\xi = 0$$
eksistē vienīgi triviālais atrisinājums
$$\lambda \equiv 0.$$
Tādēļ arī
$$\varphi(x,y) \equiv 0,$$
t. i. j a p e r m u t a b l ā s f u n k c i j a s v ē r t ī b a s d ē f i n ī c i j a s t r i j s t ū ŗ a (A) v i e n a s m a l a s $y=a$ p u n k t o s i r n u l l e s , t a d š ī f u n k c i j a i r i d e n t i s k i n u l l e v i s ā d ē f i n ī c i j a s t r i j s t ū r ī (A).

6. Formula (22) vai (26) rāda, ka permutablās funkcijas d i a g o n ā l e
$$\varphi(x,x) = \lambda(0) = \varphi(a,a) = c_\circ = \text{const.}$$
Šī īpašība ir vispārīgās permutablo funkciju diagonāļu īpašības (§ 2, form. (5)) atsevišķs gadījums, kad dotā funkcija $f(x,y)$ ir pirmās kārtas un kanoniskās formas funkcija.

Ja sastāda funkciju
$$g(x,y) = \varphi(x,y) - c_\circ f(x,y),$$

tad tā ir permutabla ar doto funkciju: $\overset{x}{g}\overset{x}{f}=\overset{x}{f}\overset{x}{g}$ un vismaz otrās kārtas funkcija, jo

$$g(x,x)=\varphi(x,x)-c_0=0 \qquad (f(x,x)=1).$$

Tādēļ pirmā veida Volterra integrālvienādojumam

$$(27) \qquad \int_y^x f(x,s)\,\varphi_1(s,y)\,ds = g(x,y) \quad \text{jeb} \quad \overset{x}{f}\overset{x}{\varphi_1}=g(x,y)$$

eksistē noteikts nepārtraukts atrisinājums

$$\varphi_1(x,y)=\overset{x-1}{f}\overset{x}{g}=\overset{-1}{f}\overset{x}{g}+\overset{x}{F}\overset{x}{g}$$

jeb

$$\varphi_1(x,y)=\frac{\partial g}{\partial x}+\int_y^x F(x,s)\,g(s,y)\,ds,$$

ja pieņem funkciju $\varphi(x,y)$, $f(x,y)$ atvasinājumu eksistenci un lieto $F(x,y)$ izteiksmi ar rindu

$$(4) \qquad F(x,y)=H(x,y)+\overset{x}{H}\overset{x}{1}\overset{x}{H}+\overset{x}{H}\overset{x}{1}\overset{x}{H}\overset{x}{1}\overset{x}{H}+\dots \qquad \left(H=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right).$$

Šis atrisinājums $\varphi_1(x,y)$ ir permutabla funkcija ar doto funkciju $f(x,y)$ (un ar $g(x,y)$).[12]

Tiešām, no integrālvienādojuma (27) pēc kompozīcijas sastāda vienlīdzības

$$\overset{x}{f}\overset{x}{\varphi_1}\overset{x}{f}=\overset{x}{g}\overset{x}{f}, \quad \overset{x}{f}\overset{x}{f}\overset{x}{\varphi_1}=\overset{x}{f}\overset{x}{g},$$

no kurām $f(x,y)$ un $g(x,y)$ permutabilitātes dēļ secina

$$\overset{x}{f}(\overset{x}{\varphi_1}\overset{x}{f})=\overset{x}{f}(\overset{x}{f}\overset{x}{\varphi_1}).$$

Tā tad pastāv permutabilitāte

$$\overset{x}{\varphi_1}\overset{x}{f}=\overset{x}{f}\overset{x}{\varphi_1} \quad \text{jeb} \quad \int_y^x \varphi_1(x,s)\,f(s,y)\,ds=\int_y^x f(x,s)\,\varphi_1(s,y)\,ds,$$

bet tad arī

$$\overset{x}{\varphi_1}\overset{x}{g}=\overset{x}{g}\overset{x}{\varphi_1}.$$

Izteicot funkciju

$$g(x,y)=\varphi(x,y)-c_0\,f(x,y)$$

no integrālvienādojuma (27) un pārveidojot, dabū formulu

$$(28) \qquad \varphi(x,y)=c_0 f(x,y)+\int_y^x f(x,s)\,\varphi_1(s,y)\,ds=c_0 f(x,y)+\int_y^x \varphi_1(x,s)\,f(s,y)\,ds,$$

kas analoga integrālrēķinu Lagrange formulai.

Izlietojot iepriekšējo formulu funkcijai $\varphi_1(x,y)$, izteic

$$\varphi_1(x,y)=c_1 f(x,y)+\overset{x}{f}\overset{x}{\varphi_2}=c_1 f(x,y)+\overset{x}{\varphi_2}\overset{x}{f}$$

---

12) Volterra /24, lpp. 165/.

ar jaunu permutablo funkciju $\varphi_2(x,y)$ un konstanti c_1.
Pēc substitūcijas formulā (28) rodas jauna formula

$$\varphi(x,y) = c_0 f(x,y) + c_1 f^{\overset{x}{2}} + f^{\overset{x}{2}} \overset{x}{\varphi_2} = c_0 f(x,y) + c_1 f^{\overset{x}{2}} + \varphi_2 \overset{x}{f}{}^{\overset{x}{2}}.$$

Tamlīdzīgi turpinot un pieņemot funkciju augstāko kārtu parciālo atvasinājumu eksistenci, dabū vispārīgo formulu (analogu Taylor formulai)

$$(29)\qquad \varphi(x,y) = c_0 f(x,y) + c_1 f^{\overset{x}{2}} + \dots + c_{n-1} f^{\overset{x}{n}} + f^{\overset{x}{n}} \overset{x}{\varphi_n}$$
$$= c_0 f(x,y) + c_1 f^{\overset{x}{2}} + \dots + c_{n-1} f^{\overset{x}{n}} + \varphi_n \overset{x}{f}{}^{\overset{x}{n}}$$

ar konstantēm $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ un funkciju $\varphi_n(x,y)$, kas permutabla ar $f(x,y)$, resp. $f^{\overset{x}{n}}$.

J.Pérès[13] ir pētījis funkcijas, kas noteiktas ar bezgalīgu rindu (analogu Taylor rindai)

$$(30)\qquad c_0 f(x,y) + c_1 f^{\overset{x}{2}} + \dots + c_n f^{\overset{x}{n+1}} + \dots$$

Viņa atrastais galvenais rezultāts ir sekojošais. *Visas analitiskās funkcijas, kas permutablas ar doto pirmās kārtas funkciju* $f(x,y)$, *dabū, sastādot visus attīstījumus rindās* (30), *kuŗos koeficienti* $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ *ir izvēlēti ar vienīgo nosacījumu, ka rinda*

$$(31)\qquad c_0 + c_1 \cdot \frac{z}{1!} + c_2 \frac{z^2}{2!} + \dots + c_n \cdot \frac{z^n}{n!} + \dots$$

savirzas.

7. *Gadījumā*, kad dotā funkcija $f(x,y)$ pieder *noslēgta cikla grupai*:

$$f(x,y) = f(x-y),$$

arī tās otrais atvasinājums

$$H(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -f''(x-y)$$

un līdzotā funkcija (4) ir šīs grupas funkcijas:

$$H(x,y) = H(x-y),\quad F(x,y) = F(x-y).$$

---

13) J.Pérès /11/. Minētā teorēma ir šī darba 79.lpp.

No formulas (20) šinī gadījumā atrod

$$\mathcal{K}_1(\xi; x,y) \equiv 0,$$

un tādēļ pēc vispārīgās rekurrences formulas (21) visas funkcijas

$$\mathcal{K}_n(\xi; x,y) \equiv 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

No formulas (19) dabū

$$\mathcal{K}(\xi; x,y) = 1,$$

bet no (23) - funkciju

$$\phi(\xi; x,y) = \int_{y+\xi}^{x} F(x-s)\,ds$$

jeb

$$\phi(\xi; x,y) = \int_{0}^{x-y-\xi} F(\sigma)\,d\sigma.$$

Ievērojot, ka šinī gadījumā ir

$$\phi(\xi; x,y) = \phi(x-y-\xi),$$

no Volterra formulas (22) secina permutablo funkciju

$$\varphi(x,y) = \lambda(x-y) + \int_0^{x-y} \lambda(\xi)\,\phi(x-y-\xi)\,d\xi$$

formu

$$\varphi(x,y) = \varphi(x-y),$$

kas rāda, ka ar $f(x-y)$ permutablās funkcijas arī pieder noslēgta cikla grupai.

Ir zināms (§ 5), ka noslēgta cikla grupas funkcijas ir savā starpā permutablas. Izlietojot Volterra formulu (22), Vessiot[14] pierāda sekojošu vispārīgo permutablo funkciju g r u p u ī p a - š ī b u : V i s a s f u n k c i j a s

$$(22) \qquad \varphi(x,y) = \lambda(x-y) + \int_0^{x-y} \lambda(\xi)\,\phi(\xi; x,y)\,d\xi,$$

k a s p e r m u t a b l a s a r v i e n u f u n k c i j u $f(x,y)$, i r s a v ā s t a r p ā p e r m u t a b l a s . Šo īpašību viegli var konstatēt, izlietojot t.s. Pérès t r a n s - f o r m ā c i j a s (§ 10).

8. Noslēdzot pamatproblēmas diskusiju, kad ir dota pirmās kārtas funkcija $f(x,y)$, sastādīsim funkcijām $\phi(\xi; x,y)$ un $\mathcal{K}(\xi; x,y)$ raksturīgos f u n k c i o n ā l v i e n ā d o j u m u s .

---

14) Vessiot /19/. Cits pierādījums ir Volterra darbā /27, lpp.174/.

Permutabilitātes nosacījumā

$$\overset{x}{\varphi}\overset{x}{f} = \overset{x}{f}\overset{x}{\varphi}$$

ievietojam $\varphi(x,y)$ izteiksmi no Volterra formulas (22). Ar mainīgo piemērotām substitūcijām un vajadzīgo integrācijas kārtības maiņu var izteikt kompozīciju resultantes

$$\overset{x}{\varphi}\overset{x}{f} = \int_y^x \varphi(x,s)\, f(s,y)\,ds, \qquad \overset{x}{f}\overset{x}{\varphi} = \int_y^x f(x,s)\,\varphi(s,y)\,ds$$

formā

$$(32) \qquad \overset{x}{\varphi}\overset{x}{f} = \int_0^{x-y} \lambda(\xi)\Big[f(x-\xi,y) + \int_y^{x-\xi} \phi(\xi;x,s)\, f(s,y)\,ds\Big]d\xi$$

un

$$(32') \qquad \overset{x}{f}\overset{x}{\varphi} = \int_0^{x-y} \lambda(\xi)\Big[f(x,y+\xi) + \int_{y+\xi}^{x} f(x,s)\,\phi(\xi;s,y)\,ds\Big]d\xi$$

Tādēļ no permutabilitātes (λ - patvaļīga funkcija) nosacījuma sastāda f u n k c i o n ā l v i e n ā d o j u m u

$$(33) \qquad f(x-\xi,y) + \int_y^{x-\xi} \phi(\xi;x,s)\, f(s,y)\,ds = f(x,y+\xi) + \int_{y+\xi}^{x} f(x,s)\,\phi(\xi;s,y)\,ds,$$

kas direkti saista funkciju $\phi(\xi;x,y)$ un doto funkciju $f(x,y)$.

Pamatproblēmas atrisināšanā ievestā funkcija

$$\psi(x,y) = \overset{x}{\varphi}\overset{x}{f} = \overset{x}{f}\overset{x}{\varphi}$$

arī ir permutabla ar funkciju $f(x,y)$, jo pastāv sakari

$$\overset{x}{\psi}\overset{x}{f} = \overset{x}{f}\overset{x}{\psi} = \overset{x}{f}\overset{x}{\varphi}\overset{x}{f}.$$

Tā kā pēc formulas

$$(17) \qquad \psi(x,y) = \int_0^{x-y} \lambda(\xi)\, K(\xi;x,y)\,d\xi,$$

tad kompozīciju resultantes $\overset{x}{\psi}\overset{x}{f}$ un $\overset{x}{f}\overset{x}{\psi}$ var izteikt sekojoši (līdzīgi (32) un (32')):

$$(34) \qquad \overset{x}{\psi}\overset{x}{f} = \int_0^{x-y} \lambda(\xi)\,d\xi \int_y^{x-\xi} K(\xi;x,s)\, f(s,y)\,ds$$

un

$$(34') \qquad \overset{x}{f}\overset{x}{\psi} = \int_0^{x-y} \lambda(\xi)\,d\xi \int_{y+\xi}^{x} f(x,s)\, K(\xi;s,y)\,ds.$$

No permutabilitātes nosacījuma $\overset{x}{\psi}\overset{x}{f} = \overset{x}{f}\overset{x}{\psi}$ sastāda funkcijas $K(\xi;x,y)$ funkcionālvienādojumu

$$(35)\qquad \int_{y}^{x-\xi} K(\xi;x,s)\,f(s,y)\,ds = \int_{y+\xi}^{x} f(x,s)\,K(\xi;s,y)\,ds.$$

Kā zināms, funkcija $\psi(x,y)$ apmierina integrodiferenciālo vienādojumu

$$(9)\qquad \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} = \overset{x}{\psi}\overset{x}{F} - \overset{x}{F}\overset{x}{\psi},$$

ja $F(x,y)$ noteic ar absolūti un vienmērīgi savirzāmu rindu

$$(4)\qquad F(x,y) = H(x,y) + \overset{x}{H}\overset{x}{1}\overset{x}{H} + \overset{x}{H}\overset{x}{1}\overset{x}{H}\overset{x}{1}\overset{x}{H} + \cdots \quad \left(H = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right).$$

Tā kā no (17) aprēķinātās atvasinātas funkcijas ir

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \lambda(x-y) + \int_0^{x-y} \lambda(\xi)\,\frac{\partial K(\xi;x,y)}{\partial x}\,d\xi, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = -\lambda(x-y) + \int_0^{x-y}\lambda(\xi)\,\frac{\partial K(\xi;x,y)}{\partial y}\,d\xi,$$

tad no vienādojuma (9) var sastādīt funkcijas $K(\xi;x,y)$ raksturīgo integrodiferenciālo vienādojumu

$$(36)\qquad \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) K(\xi;x,y) = \int_{y}^{x-\xi} K(\xi;x,s)\,F(s,y)\,ds - \int_{y+\xi}^{x} F(x,s)\,K(\xi;s,y)\,ds.$$

Pēdējais vienādojums, kopā ar nosacījumu

$$K(x-y;x,y) = 1,$$

ir ekvivalents atrisinātam integrālvienādojumam (18).

No permutabilitātes nosacījuma

$$\overset{x}{\varphi}\overset{x}{f} = \overset{x}{f}\overset{x}{\varphi},$$

kad funkcijai $\varphi(x,y)$ eksistē pirmās kārtas parciālie atvasinājumi, var dabūt sakaru

$$\overset{x}{f^{-1}}\overset{x}{\varphi} - \overset{x}{\varphi}\overset{x}{f^{-1}} = 0,$$

kas ar kompozīcijas inversijas simbola $\overset{x}{f^{-1}}$ izteiksmi

$$\overset{x}{f^{-1}} = \overset{x}{1^{-1}} + F(x,y)$$

top par integrodiferenciālo vienādojumu

$$(37)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \overset{x}{\varphi}\overset{x}{F} - \overset{x}{F}\overset{x}{\varphi},$$

analogu (9). Ja te ievieto $\overset{x}{\varphi}\overset{x}{F}$ un $\overset{x}{F}\overset{x}{\varphi}$ izteiksmes no (32) un (32') un atvasinājumu nozīmes

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \lambda'(x-y) + \int_0^{x-y}\lambda(\xi)\,\frac{\partial\phi(\xi;x,y)}{\partial x}\,d\xi, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\lambda'(x-y) + \int_0^{x-y}\lambda(\xi)\,\frac{\partial\phi(\xi;x,y)}{\partial y}\,d\xi,$$

tad var sastādīt funkcijas $\phi(\xi;x,y)$ *raksturīgo integrodiferenciālo vienādojumu*[15]

$$(38)\qquad \left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)\phi(\xi;x,y)=F(x-\xi,y)-F(x,y+\xi)+$$
$$+\int_{y}^{x-\xi}\phi(\xi;x,s)F(s,y)ds-\int_{y+\xi}^{x}F(x,s)\,\phi(\xi;s,y)ds.$$

Citāda veida funkcionālvienādojumi rodas, ja izteic funkciju

$$\psi(x,y)=\int_0^{x-y}\lambda(\xi)\,K(\xi;x,y)d\xi,$$

resp.

$$\varphi(x,y)=\lambda(x-y)+\int_0^{x-y}\lambda(\xi)\,\phi(\xi;x,y)d\xi$$

grupu īpašību (7.nod.). Lietojot citu patvaļīgu funkciju $\mu(x-y)$, dabū citu permutablo funkciju grupas funkciju

$$\psi'(x,y)=\int_0^{x-y}\mu(\eta)\,K(\eta;x,y)d\eta,$$

resp.

$$\varphi'(x,y)=\mu(x-y)+\int_0^{x-y}\mu(\eta)\,\phi(\eta;x,y)d\eta.$$

Funkciju $\psi(x,y)$, $\psi'(x,y)$ kompozīciju rezultantes $\overset{*}{\psi}\overset{*}{\psi}{}'$ un $\overset{*}{\psi}{}'\overset{*}{\psi}$ var izteikt ar piemērotām substitūcijām un integrācijas kārtības apmaiņu sekojošā veidā

$$\overset{*}{\psi}\overset{*}{\psi}{}'=\int_0^{x-y}\lambda(\xi)d\xi\int_0^{x-y-\xi}\mu(\eta)d\eta\int_{y+\eta}^{x-\xi}K(\xi;x,s)\,K(\eta;s,y)ds$$

un

$$\overset{*}{\psi}{}'\overset{*}{\psi}=\int_0^{x-y}\lambda(\xi)d\xi\int_0^{x-y-\xi}\mu(\eta)d\eta\int_{y+\xi}^{x-\eta}K(\eta;x,s)\,K(\xi;s,y)ds$$

No permutabilitātes nosacījuma

$$\overset{*}{\psi}\overset{*}{\psi}{}'=\overset{*}{\psi}{}'\overset{*}{\psi}$$

sastāda (λ un μ - patvaļīgas funkcijas) funkcijas $K(\xi;x,y)$ funkcionālvienādojumu

$$(39)\qquad \int_{y+\eta}^{x-\xi}K(\xi;x,s)\,K(\eta;s,y)ds=\int_{y+\xi}^{x-\eta}K(\eta;x,s)\,K(\xi;s,y)ds.$$

---

15) Ar citādiem apzīmējumiem šis vienādojums atrodams Volterra-Pérès darbā /28, lpp. 74/.

Tamlīdzīgu no sakara $\overset{x}{\varphi}\overset{x'}{\varphi} = \overset{x'}{\varphi}\overset{x}{\varphi}$

atrod otrās funkcijas $\phi(\xi; x, y)$ funkcionālvienādojumu[16]

$$(40)\qquad \phi(\xi; x, y+\eta) + \phi(\eta; x-\xi, y) + \int_{y+\eta}^{x-\xi} \phi(\xi; x, s)\phi(\eta; s, y)\,ds =$$

$$= \phi(\eta; x, y+\xi) + \phi(\xi; x-\eta, y) + \int_{y+\xi}^{x-\eta} \phi(\eta; x, s)\phi(\xi; s, y)\,ds.$$

§ 7. Problēma ar otrās kārtas funkciju.

1. Problēmu nesašaurinot, var pieņemt, ka dotā otrās kārtas funkcija $f(x,y)$ ir kanoniskā formā, t.i. der nosacījumi (§ 3):

$$(1)\qquad \begin{cases} f(x,x) = 0, & \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y=x} = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y=x} = 1, \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{y=x} = -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{y=x} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{y=x} = 0. \end{cases}$$

Kad dēfinīcijas apgabalā (A) eksistē funkcijai $f(x,y)$ parciālie atrisinājumi līdz ceturtai kārtai, var noteikt (§ 4) kompozīcijas inversijas simbolu $\overset{x}{f}{}^{-1}$ ar

$$(2)\qquad \overset{x}{f}{}^{-1} = \overset{x}{1}{}^{-2} + a(x)\overset{x}{1}{}^{0} + F_1(x,y)$$

vai

$$(2')\qquad \overset{x}{f}{}^{-1} = \overset{x}{1}{}^{-2} + b(y)\overset{x}{1}{}^{0} + F_2(x,y),$$

ja apzīmē funkcijas

$$(3)\qquad a(x) = a_2(x) = \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right)_{y=x}, \quad b(y) = b_2(y) = -\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}\right)_{y=x}$$

un

$$(4)\qquad F_1(x,y) = H_1(x,y) - \overset{x}{H_1}\overset{x}{f_2} + \overset{x}{H_1}\overset{x}{f_2}\overset{x}{f_2} - \dots$$

$$(4')\qquad F_2(x,y) = H_2(x,y) - \overset{x}{f_1}\overset{x}{H_2} + \overset{x}{f_1}\overset{x}{f_1}\overset{x}{H_2} - \dots$$

---

16) Šo vienādojumu ar citādiem apzīmējumiem min Volterra savā darbā /27, lpp. 174/.

Pēdējās divas rindas savirzas dēfinīcijas apgabalā (A) absolūti un vienmērīgi; to locekļos ir lietotas funkcijas

$$(5)\quad H_1(x,y) = -\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + a(x)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right), \quad H_2(x,y) = -\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + b(y)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)$$

un

$$(5')\quad f_1(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_2(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Atrisināsim permutablo funkciju $\varphi(x,y)$ noteikšanas problēmu vispirms s p e c i ā l ā   g a d ī j u m ā , kad

$$a(x) = 0, \quad b(y) = 0,$$

t.i. kad dotai funkcijai $f(x,y)$ ir forma

$$(6)\quad f(x,y) = (x-y) + (x-y)^4\,\omega(x,y).$$

Tad kompozīcijas inversijas simbolam ir kopīga izteiksme

$$(7)\quad \overset{x}{f}{}^{-1} = \overset{x}{1}{}^{-2} + F(x,y)$$

ar funkciju

$$(8)\quad F(x,y) = H(x,y) + \overset{x}{H}\,\overset{x}{1}{}^{2}\,\overset{x}{H} + \overset{x}{H}\,\overset{x}{1}{}^{2}\,\overset{x}{H}\,\overset{x}{1}{}^{2}\,\overset{x}{H} + \dots \quad \left(H = -\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\right).$$

Izteikumi (7) izlieto problēmas sabiedroto integrālvienādojumu

$$\overset{x}{f}\,\overset{x}{\varphi} = \psi(x,y), \qquad \overset{x}{\varphi}\,\overset{x}{f} = \psi(x,y)$$

atrisināšanai pēc formulām

$$(9)\quad \varphi(x,y) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \overset{x}{F}\,\overset{x}{\psi}, \qquad \varphi(x,y) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \overset{x}{\psi}\,\overset{x}{F}.$$

Pēc pēdējo formulu salīdzināšanas sastāda funkcijas

$$(10)\quad \psi(x,y) = \int_y^x f(x,s)\,\varphi(s,y)\,ds = \int_y^x \varphi(x,s)\,f(s,y)\,ds$$

i n t e g r o d i f e r e n c i ā l o   v i e n ā d o j u m u

$$(11)\quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \overset{x}{\psi}\,\overset{x}{F} - \overset{x}{F}\,\overset{x}{\psi} = \int_y^x \left[\psi(x,s)F(s,y) - F(x,s)\psi(s,y)\right] ds.$$

Tā kā $f(x,y)$ ir otrās kārtas funkcija, tad no (10) secina, ka $\psi(x,y)$ ir vismaz trešās kārtas funkcija, t.i. der nosacījumi

$$(12)\quad \psi(x,x) = 0, \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{y=x} = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{y=x} = 0.$$

Tādēļ ir jāatrisina vienādojums (11) kopā ar sākuma (Cauchy tipa) nosacījumiem (12) jeb - šī vienādojuma Cauchy p r o b l ē m a .

2. Tamlīdzīgi kā ar pirmās kārtas funkciju (§ 6) atradīsim diferenciālvienādojuma

(13) $$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = g(x,y)$$

atrisināšanas formulu, kad $\psi(x,y)$ apmierina nosacījumus (12) un apzīmē

(14) $$g(x,y) = \int_y^x [\psi(x,s)\, F(s,y) - F(x,s)\, \psi(s,y)]\, ds.$$

Ar jauniem mainīgiem

(15) $$u = \frac{x-y}{2}, \quad v = \frac{x+y}{2}$$

isteic vecos mainīgos

$$x = v+u, \quad y = v-u$$

un funkcijas

$$\psi(x,y) = \psi(v+u,\, v-u) = \bar{\psi}(u,v), \quad g(x,y) = g(v+u,\, v-u) = \bar{g}(u,v).$$

Ievērojot mainīgo transformācijas formulas, sastāda atvasinājumus

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial v} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

un

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial v\, \partial u} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}.$$

Tā tad vienādojums (13) reducējas uz formu

(16) $$\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial u\, \partial v} = \bar{g}(u,v),$$

ko var viegli integrēt sekojošā veidā:

$$\bar{\psi}(u,v) = \theta(u) + \gamma(v) + \int_{v_0}^{v} ds \int_0^u \bar{g}(t,s)\, dt$$

Ar sakarības formulām (15) dabū vienādojuma (13) vispārīgo atrisinājumu

(17) $$\psi(x,y) = \theta(u) + \gamma(v) + \int_{v_0}^{v} ds \int_0^u g(s+t,\, s-t)\, dt.$$

Te $\theta(u)$ un $\gamma(v)$ ir patvaļīgas attiecīgo argumentu funkcijas, un funkcija

(18) $$\psi_1(x,y) = \bar{\psi}_1(u,v) = \int_{v_0}^{v} ds \int_0^u g(s+t,\, s-t)\, dt$$

ir vienādojuma (13), resp. (16) partikulārais atrisinājums (integrālis).

Viegli pārbauda, ka pēdējais apmierina sākuma nosacījumus (12). Tiešām, kad $y = x$, tad $u = 0$, un no formulas (18) secina

$$\psi_1(x,x) = \bar{\psi}_1(0,v) = 0.$$

Ja sastāda atvasinājumus

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x} = \frac{1}{2}\int_0^u g(v+t,\, v-t)dt + \frac{1}{2}\int_{v_0}^{v} g(s+u,\, s-u)ds,$$

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial y} = \frac{1}{2}\int_0^u g(v+t,\, v-t)dt - \frac{1}{2}\int_{v_0}^{v} g(s+u,\, s-u)ds,$$

tad no šīm izteiksmēm atrod

$$\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)_{y=x} = -\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)_{y=x} = \frac{1}{2}\int_{v_0}^{v} g(s,s)ds = 0,$$

jo pēc formulas (14) ir

$$g(x,x) \equiv 0.$$

Lai vispārīgais atrisinājums, kad $y=x$, resp. $u=0,\ v=x$, apmierinātu nosacījumu

$$\psi(x,x) = 0,$$

ir jāprasa

$$\theta(0) + \gamma(x) = 0$$

jeb

$$\gamma(x) = -\,\theta(0) = \mathrm{const}.$$

Izvēloties vienu patvaļīgu funkciju $\theta(u)$ ar nosacījumu

$$(19)\qquad \theta(0) = 0, \quad \theta'(0) = 0,$$

atrod vienādojuma (13) vispārīgo atrisinājumu

$$(20)\qquad \psi(x,y) = \theta(u) + \int_{v_0}^{v} ds \int_0^u g(s+t,\, s-t)dt,$$

kas apmierina sākuma nosacījumus (12).

Ja formulā (20) ievieto $g(x,y)$ izteiksmi (14), tad sastāda integrālvienādojumu

$$(21)\qquad \psi(x,y) = \theta(u) + \int_{v_0}^{v} ds \int_0^u dt \int_{s-t}^{s+t} \left[\psi(s+t,\sigma)F(\sigma, s-t) - F(s+t,\sigma)\psi(\sigma, s-t)\right]d\sigma,$$

kas ekvivalents integrodiferenciālam vienādojumam (11) kopā ar sākuma nosacījumiem (12).

3. Pierādīsim tamlīdzīgi kā 6. §-fā atrisinājuma unitātes teorēmu: ja $\theta(u) = \theta\left(\frac{x-y}{2}\right)$ kopā ar savu atvasinājumu un $F(x,y)$ ir dotas nepārtrauktas funkcijas dēfinīcijas ap-

gabalā (A), tad integrālvienādojumam (21) eksistē augstākais viens atrisinājums $\psi(x,y)$ kā nepārtraukta funkcija šajā apgabalā.

Pieņemot pretējo, ka eksistē vēl otrs atrisinājums $\psi_0(x,y)$ ar minētiem nosacījumiem, sastāda diferences

$$\Psi(x,y) = \psi(x,y) - \psi_0(x,y)$$

noteikšanai homogenu integrālvienādojumu

$$(22) \qquad \Psi(x,y) = \int_{v_0}^{v} ds \int_0^u dt \int_{s-t}^{s+t} [\Psi(s+t,\sigma)F(\sigma,s-t) - F(s+t,\sigma)\Psi(\sigma,s-t)]\,d\sigma$$

Konstatēsim, kā ar minētiem nosacījumiem pēdējam vienādojumam ir vienīgais atrisinājums

$$\Psi(x,y) \equiv 0.$$

Lietojot dēfinīcijas apgabalā (A) nepārtraukto funkciju $F(x,y)$, $\Psi(x,y)$ absolūto vērtību augšējās robežas

$$M > |F(x,y)|, \quad \mu > |\Psi(x,y)|,$$

atrod no formulas (22) labās puses novērtēšanas jaunu novērtējumu

$$|\Psi(x,y)| < 2\mu M(v-v_0)\int_0^u 2t\,dt$$

jeb

$$|\Psi(x,y)| < \mu M(b-a)\cdot\frac{(x-y)^2}{2}.$$

Ar atrasto formulu vēlreiz novērtējot (22) labo pusi dabū

$$|\Psi(x,y)| < \mu M^2(b-a)^2\cdot\frac{(x-y)^4}{4!}.$$

Tamlīdzīgi turpinot, konstatēsim vispārīgo novērtējumu

$$(23) \qquad |\Psi(x,y)| < \mu M^n(b-a)^n\cdot\frac{(x-y)^{2n}}{(2n)!}$$

Tā pareizību pierāda ar matēmatiskās indukcijas slēdzienu. Tiešām, ja ar (23) novērtē (22) labo pusi, tad rodas jauns novērtējums

$$|\Psi(x,y)| < 2\mu M^{n+1}(b-a)^{n+1}\int_0^u \frac{(2t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\,dt$$

jeb

$$|\Psi(x,y)| < \mu M^{n+1}(b-a)^{n+1}\cdot\frac{(x-y)^{2n+2}}{(2n+2)!},$$

kas sastādāms no (23) ar n apmaiņu pret $n+1$.

Tā kā nevienlīdzības (23) labā puse, kad $n \to \infty$ neaprobežoti tuvojas nullei, bet kreisā puse ir no n neatkarīgs lielums, tad jābūt identiski $\Psi(x,y)$ nullei. Tā tad, abi pieņemtie atrisinājumi $\psi(x,y)$ un $\psi_0(x,y)$ sakrīt:

$$\psi(x,y) \equiv \psi_0(x,y),$$

resp. integrālvienādojuma (21) atrisinājuma unitāte konstatēta.

4. Ievērojot nosacījumus (12) un (19), izteicam funkciju

$$(24) \qquad \Theta(u) = \int_0^{2u} \mu(\xi)d\xi = \int_0^{x-y} \mu(\xi)d\xi$$

un integrālvienādojuma (21) atrisinājumu $\psi(x,y)$ formā

$$(25) \qquad \psi(x,y) = \int_0^{x-y} \mu(\xi) K(\xi; x,y) d\xi$$

ar jaunu patvaļīgu funkciju $\mu(\xi)$ (kam ir vērtība $\mu(0) = 0$) un jaunu nezināmo funkciju $K(\xi; x,y)$, dēfinētu apgabalā

$$(A') \qquad a \le y \le x \le b, \qquad 0 \le \xi \le x-y.$$

Pēc pieņemto izteiksmju (24) un (25) substitūcijas vienādojumā (21) rodas sakars

$$\int_0^{x-y} \mu(\xi) K(\xi; x,y) d\xi = \int_0^{x-y} \mu(\xi) d\xi + J_1 - J_2,$$

kurā apzīmē

$$J_1 = \int_{v_0}^{v} ds \int_0^{u} dt \int_{s-t}^{s+t} F(\sigma, s-t) d\sigma \int_0^{s+t-\sigma} \mu(\xi) K(\xi; s+t, \sigma) d\xi$$

un

$$J_2 = \int_{v_0}^{v} ds \int_0^{u} dt \int_{s-t}^{s+t} F(s+t, \sigma) d\sigma \int_0^{\sigma-s+t} \mu(\xi) K(\xi; \sigma, s-t) d\xi.$$

Ja pēdējos integrālos dara substitūcijas

$$s+t-\sigma = \tau, \qquad \text{resp.} \qquad \sigma - s + t = \tau,$$

tad dabū

$$J_1 = \int_{v_0}^{v} ds \int_0^{u} dt \int_0^{2t} F(s+t-\tau, s-t) d\tau \int_0^{\tau} \mu(\xi) K(\xi; s+t, s+t-\tau) d\xi$$

un

$$J_2 = \int_{v_0}^{v} ds \int_0^{u} dt \int_0^{2t} F(s+t, s-t+\tau) d\tau \int_0^{\tau} \mu(\xi) K(\xi; s-t+\tau, s-t) d\xi.$$

Pēc vairākkārtējas integrācijas kārtības apmaiņas (starpaprēķinos dara substitūciju $2t = t'$) izteic

$$J_1 = \int_0^{2u} \mu(\xi) d\xi \int_{v_0}^{v} ds \int_{\frac{\xi}{2}}^{u} dt \int_{\xi}^{2t} K(\xi; s+t, s+t-\tau) F(s+t-\tau, s-t) d\tau$$

un

$$J_2 = \int_0^{2u} \mu(\xi)d\xi \int_{v_0}^{v} ds \int_{\frac{\xi}{2}}^{u} dt \int_{\xi}^{2t} F(s+t, s-t+\tau)K(\xi; s-t+\tau, s-t)d\tau.$$

Ar atrastajām izteiksmēm no minētā sakara sastāda **f u n k c i j a s** $K(\xi; x,y)$ **i n t e g r ā l v i e n ā d o j u m u**

$$(26)\quad K(\xi; x,y) = 1 + \int_{v_0}^{v} ds \int_{\frac{\xi}{2}}^{u} dt \int_{\xi}^{2t} [K(\xi; s+t, s+t-\tau)F(s+t-\tau, s-t) - F(s+t, s-t+\tau)K(\xi; s-t+\tau, s-t)]d\tau.$$

Pēdējā vienādojuma atrisināšanai lieto **p a k ā p e n i s k o t u v i n ā j u m a m e t o d i**, izteicot atrisinājumu ar absolūti un vienmērīgi savirzāmu rindu

$$(27)\quad K(\xi; x,y) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} K_n(\xi; x,y).$$

Šīs rindas locekļus aprēķina pēc formulām

$$(21)\quad K_1(\xi; x,y) = \int_{v_0}^{v} ds \int_{\frac{\xi}{2}}^{u} dt \int_{\xi}^{2t} [F(s+t-\tau, s-t) - F(s+t, s-t+\tau)]d\tau$$

un

$$(29)\quad K_{n+1}(\xi; x,y) = \int_{v_0}^{v} ds \int_{\frac{\xi}{2}}^{u} dt \int_{\xi}^{2t} [K_n(\xi; s+t, s+t-\tau)F(s+t-\tau, s-t) - F(s+t, s-t+\tau)K_n(\xi; s-t+\tau, s-t)]d\tau$$

$(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Rindas (27) konvergence konstatējama ar locekļu novērtējumiem

$$|K_1(\xi; x,y)| < M(b-a) \cdot \frac{(x-y-\xi)^2}{2}$$

un vispārīgo

$$(30)\quad |K_n(\xi; x,y)| < M^n(b-a)^n \cdot \frac{(x-y-\xi)^{2n}}{(2n)!} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Pēdējās formulas pareizību pierāda ar indukcijas slēdzienu: no rekurrences sakara (29) dabū

$$|K_{n+1}(\xi; x,y)| < 2M^{n+1}(b-a)^{n+1} \int_{\frac{\xi}{2}}^{u} dt \int_{\xi}^{2t} \frac{(2\tau-\xi)^{2n}}{(2n)!} d\tau$$

jeb

$$|K_{n+1}(\xi; x,y)| < 2M^{n+1}(b-a)^{n+1} \int_{\frac{\xi}{2}}^{u} \frac{(2t-\xi)^{2n+1}}{(2n+1)!} dt;$$

aprēķinot pēdējo integrālu ar substitūciju

$$2t - \xi = \eta,$$

atrod galīgi novērtējumu

$$\left| K_{n+1}(\xi; x, y) \right| < M^{n+1} (b-a)^{n+1} \frac{(x-y-\xi)^{2n+2}}{(2n+2)!},$$

kas sastādāms no (30) ar η apmaiņu pret $n+1$.

Funkcijai $K(\xi; x, y)$ ir sekojošās īpašības. Liekot integrālvienādojumā (26)

$$\xi = 2u = x - y,$$

atrod nozīmi

(31) $$K(x-y; x, y) = 1.$$

Ja apzīmē ar

$$L(\xi; s, t, \tau) = K(\xi; s+t, s+t-\tau) F(s+t-\tau, s-t) - F(s+t, s-t+\tau) K(\xi; s-t+\tau, s-t)$$

un atvasina divreiz pēc x vienādojuma (26) abas puses, tad dabū

$$\frac{\partial K(\xi; x, y)}{\partial x} = \frac{1}{2} \int_{\frac{\xi}{2}}^{u} dt \int_{\xi}^{2u} L(\xi; v, t, \tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_{v_0}^{v} ds \int_{\xi}^{2u} L(\xi; s, u, \tau) d\tau,$$

$$\frac{\partial^2 K(\xi; x, y)}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \int_{\xi}^{2u} L(\xi; v, u, \tau) d\tau + \frac{1}{4} \int_{\frac{\xi}{2}}^{x} dt \int_{\xi}^{2t} \frac{\partial L(\xi; v, t, \tau)}{\partial v} d\tau +$$

$$+ \frac{1}{4} \int_{v_0}^{v} ds \int_{\xi}^{2u} \frac{\partial L(\xi; s, u, \tau)}{\partial u} d\tau + \frac{1}{2} \int_{v_0}^{v} L(\xi; s, u, 2u) ds.$$

Nozīmei $\xi = 2u = x - y$ atrod

(32) $$\left[\frac{\partial K(\xi; x, y)}{\partial x} \right]_{\xi = x-y} = 0$$

un

$$\left[\frac{\partial^2 K(\xi; x, y)}{\partial x^2} \right]_{\xi = x-y} = \frac{1}{2} \int_{v_0}^{v} L(2u; s, u, 2u) ds.$$

Tā kā $K(2u; x, y) = 1$ un

$$L(2u; s, u, 2u) = F(s-u, s-u) - F(s+u, s+u),$$

tad otrās kārtas parciālā atvasinājuma nozīme ir izteicama ar

(33) $$\left[\frac{\partial^2 K(\xi;x,y)}{\partial x^2}\right]_{\xi=x-y} = \frac{1}{2}\int_{v_0-u}^{v-u} F(\sigma,\sigma)d\sigma - \frac{1}{2}\int_{v_0+u}^{v+u} F(\sigma,\sigma)d\sigma.$$

5. Lai galīgi noteiktu funkcijas $\varphi(x,y)$, kas permutablas ar doto otrās kārtas funkciju $f(x,y)$, jāievieto atrastā funkcijas izteiksme

(25) $$\psi(x,y) = \int_0^{x-y} \mu(\xi)\, K(\xi;x,y)d\xi$$

vienā no (9) vienādojumiem, piem. formulā

$$\varphi(x,y) = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \int_y^x F(x,s)\psi(s,y)ds.$$

Var aprēķināt parciālos atvasinājumus

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \mu(x-y) + \int_0^{x-y}\mu(\xi)\frac{\partial K(\xi;x,y)}{\partial x}d\xi, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \mu'(x-y) + \int_0^{x-y}\mu(\xi)\frac{\partial^2 K(\xi;x,y)}{\partial x^2}d\xi,$$

ievērojot nozīmes (31) un (32). Kompozicijas rezultanti

$$\overset{x}{F}\overset{x}{\psi} = \int_y^x F(x,s)ds\int_0^{s-y}\mu(\xi)\, K(\xi;s,y)d\xi$$

ar mainīgo transformāciju un integrācijas kārtības apmaiņu var izteikt formā

$$\overset{x}{F}\overset{x}{\psi} = \int_0^{x-y}\mu(\xi)d\xi\int_{y+\xi}^x F(x,s)\, K(\xi;s,y)ds.$$

Tādēļ permutablās funkcijas $\varphi(x,y)$ aprēķina ar formulu

(34) $$\varphi(x,y) = \mu'(x-y) + \int_0^{x-y}\mu(\xi)\,\Psi(\xi;x,y)d\xi,$$

kurā apzīmē funkciju

(35) $$\Psi(\xi;x,y) = \frac{\partial^2 K(\xi;x,y)}{\partial x^2} + \int_{y+\xi}^x F(x,s)\, K(\xi;s,y)ds.$$

Galīgi var dabūt Volterra formulu (§ 6)

(36) $$\varphi(x,y) = \lambda(x-y) + \int_0^{x-y}\lambda(\xi)\,\phi(\xi;x,y)d\xi,$$

ja ieved jaunu noslēgta cikla grupas funkciju $\lambda(x-y)$ pēc sakarības formulas

(37) $$\mu(x-y) = \int_0^{x-y}\lambda(\xi)d\xi$$

un funkciju

$$(38) \qquad \phi(\xi;x,y)=\int_{\xi}^{x-y}\Psi(\eta;x,y)\,d\eta.$$

Tā tad, a r d o t o o t r ā s k ā r t a s f u n k c i j u

$$f(x,y)=(x-y)+(x-y)^4\,\omega(x,y)$$

v i s a s p e r m u t a b l ā s f u n k c i j a s $\varphi(x,y)$ a p r ē ķ i n a p ē c Volterra f o r m u l a s (36), k u r ā $\lambda(x-y)$ i r p a t v a ļ ī g i i z v ē l ē t a n o s l ē g t a c i k l a g r u p a s f u n k c i j a u n f u n k c i j u $\Phi(\xi;x,y)$ n o t e i c a r f o r m u l ā m (38) u n (35).

6. Te noteikto permutablo funkciju $\varphi(x,y)$ ī p a š ī b a s, kas pamatojas uz Volterra formulas (36), ir tādas pat kā problēmā ar pirmās kārtas funkciju (§ 6, 5.-7.nod.). Arī funkciju $K(\xi;x,y)$, $\phi(\xi;x,y)$ funkcionālvienādojumi

$$\int_{y}^{x-\xi}K(\xi;x,s)\,f(s,y)\,ds=\int_{y+\xi}^{x}f(x,s)\,K(\xi;s,y)\,ds$$

un

$$f(x-\xi,y)+\int_{y}^{x-\xi}\phi(\xi;x,s)\,f(s,y)\,ds=f(x,y+\xi)+\int_{y+\xi}^{x}f(x,s)\,\phi(\xi;s,y)\,ds$$

ir tie paši. Šo funkciju r a k s t u r ī g o s i n t e g r o - d i f e r e n c i ā l o s v i e n ā d o j u m u s sastāda no permutablo funkciju $\psi(x,y)$ un $\varphi(x,y)$ vienādojumiem

$$(11) \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\int_{y}^{x}[\psi(x,s)F(s,y)-F(x,s)\psi(s,y)]\,ds$$

un

$$(11') \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\int_{y}^{x}[\varphi(x,s)F(s,y)-F(x,s)\varphi(s,y)]\,ds,$$

ievietojot te $\psi(x,y)$, $\varphi(x,y)$ izteiksmes no formulām (25) un (36). Viegli atrod integrodiferenciālo vienādojumu

$$(39) \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)K(\xi;x,y)=\int_{y}^{x-\xi}K(\xi;x,s)\,F(s,y)\,ds-\int_{y+\xi}^{x}F(x,s)\,K(\xi;s,y)\,ds,$$

kas kopā ar nosacījumiem

$$K(x-y;x,y) = 1, \qquad \left[\frac{\partial K(\xi;x,y)}{\partial x}\right]_{\xi=x-y} = 0$$

ir ekvivalents integrālvienādojumam (26).

Pieņemot permutablo funkciju $\varphi(x,y)$ atvasinājumu eksistenci, no Volterra formulas (36) atrod

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \lambda'(x-y) + \int_0^{x-y}\lambda(\xi)\frac{\partial\phi(\xi;x,y)}{\partial x}d\xi, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\lambda'(x-y) + \int_0^{x-y}\lambda(\xi)\frac{\partial\phi(\xi;x,y)}{\partial y}d\xi$$

un

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \lambda''(x-y) + \lambda(x-y)\Psi(x-y;x,y) + \int_0^{x-y}\lambda(\xi)\frac{\partial^2\phi(\xi;x,y)}{\partial x^2}d\xi,$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \lambda''(x-y) + \lambda(x-y)\Psi(x-y;x,y) + \int_0^{x-y}\lambda(\xi)\frac{\partial^2\phi(\xi;x,y)}{\partial y^2}d\xi,$$

ja ievēro īpašības

$$\phi(x-y;x,y) = 0, \quad \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{\xi=x-y} = \Psi(x-y;x,y), \quad \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_{\xi=x-y} = -\Psi(x-y;x,y).$$

No vienādojuma (11') ar atrastām izteiksmēm un pārveidojumiem dabū funkcijas $\phi(\xi;x,y)$ integrodiferenciālo vienādojumu

(40) $$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\phi(\xi;x,y) = F(x-\xi,y) - F(x,y+\xi) + \int_y^{x-\xi}\phi(\xi;x,s)F(s,y)ds - \int_{y+\xi}^{x}F(x,s)\phi(\xi;s,y)ds.$$

7. **V i s p ā r ī g a j ā g a d ī j u m ā**, kad $f(x,y)$ ir dotā otrās kārtas un kanoniskās formas funkcija (1), ir lietojamas kompozīcijas inversijas simbola $\overset{x}{f}{}^{-1}$ vispārīgās izteiksmes

(2) $$\overset{x}{f}{}^{-1} = \overset{x}{1}{}^{-2} + a(x)\overset{x}{1}{}^{0} + F_1(x,y) \quad \text{(kompozīcijā pa kreisi)}$$

vai

(2') $$\overset{x}{f}{}^{-1} = \overset{x}{1}{}^{-2} + b(y)\overset{x}{1}{}^{0} + F_2(x,y) \quad \text{(kompozīcijā pa labi)}$$

ar funkcijām (3) un (4). Tad no formulām

(41) $$\varphi(x,y) = \overset{x}{f}{}^{-1}\overset{x}{\psi} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + a(x)\psi + \overset{x}{F_1}\overset{x}{\psi}$$

un

(41') $$\varphi(x,y) = \overset{x}{\psi}\overset{x}{f}{}^{-1} = \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + b(y)\psi + \overset{x}{\psi}\overset{x}{F_2}$$

pēc funkcijas $\varphi(x,y)$ izslēgšanas rodas problēmas integrodiferenciālais vienādojums[17])

$$(42)\qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = [b(y)-a(x)]\psi(x,y) + \int_y^x [\psi(x,s)F_2(s,y) - F_1(x,s)\psi(s,y)]\,ds.$$

Lai sastādītu ekvivalentu integrālvienādojumu, atrisināšanas formulā

$$(20)\qquad \psi(x,y) = \theta(u) + \int_{v_0}^{v} ds \int_0^u g(s+t,\, s-t)\,dt$$

ievieto funkcijas izteiksmi

$$g(x,y) = [b(y)-a(x)]\psi(x,y) + \overset{x}{\psi}\overset{x}{F_2} - \overset{x}{F_1}\overset{x}{\psi}.$$

Rodas vienādojums

$$(43)\qquad \psi(x,y) = \theta(u) + \int_{v_0}^{v} ds \int_0^u \Big\{[b(s-t) - a(s+t)]\psi(s+t,\, s-t) +$$

$$+ \int_{s-t}^{s+t} [\psi(s+t,\sigma)F_2(\sigma, s-t) - F_1(s+t,\sigma)\psi(\sigma, s-t)]\,d\sigma\Big\}dt,$$

kas vispārina integrālvienādojumu (21). Tamlīdzīgi kā pēdējam vienādojumam, atrisinājuma unitāti konstatē par vienādojumu (43). Pēc jau lietotām substitūcijām

$$\theta(u) = \int_0^{x-y} \mu(\xi)\,d\xi, \qquad \psi(x,y) = \int_0^{x-y} \mu(\xi)K(\xi;\, x,y)\,d\xi$$

un analogiem pārveidojumiem no (43) sastāda funkcijas $K(\xi;\, x,y)$ integrālvienādojumu

$$(44)\qquad K(\xi;\, x,y) = 1 + \int_{v_0}^{v} ds \int_{\frac{\xi}{2}}^{u} \Big\{[b(s-t) - a(s+t)]K(\xi;\, s+t,\, s-t) +$$

$$+ \int_{\xi}^{2t} [K(\xi;\, s+t,\, s+t-\tau)F_2(s+t-\tau,\, s-t) - F_1(s+t,\, s-t+\tau)K(\xi;\, s-t+\tau,\, s-t)]\,d\tau\Big\}dt,$$

kas vispārina vienādojumu (26). Var atrast ar pakāpenisko tuvinājumu metodi vienādojuma (44) atrisinājumu bezgalīgas rindas veidā

$$(45)\qquad K(\xi;\, x,y) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} K_n(\xi;\, x,y),$$

kas savirzas absolūti un vienmērīgi dēfinīcijas apgabalā

$$(A')\qquad a \le y \le x \le b, \qquad 0 \le \xi \le x-y.$$

No integrālvienādojuma (44) direkti atrod nozīmi

$$(46)\qquad K(x-y;\, x,y) = 1,$$

---

17) Vienādojums ir ekvivalents tam, ko sastāda V.Volterra savos darbos /22, § 3/ un /24, lpp. 169/.

bet ar atvasināšanu pēc x un substitūciju $\xi = x-y$ dabū

$$(47)\quad \left[\frac{\partial K(\xi;x,y)}{\partial x}\right]_{\xi=x-y} = \varkappa(x,y) = \frac{1}{2}\int_{v_0}^{v}\left[b(s-u) - a(s+u)\right]ds$$

jeb

$$\varkappa(x,y) = \frac{1}{2}\int_{v_0-u}^{v-u} b(\sigma)\,d\sigma - \frac{1}{2}\int_{v_0+u}^{v+u} a(\sigma)\,d\sigma.$$

Ievērojot nozīmes (46) un (47), atrod funkcijas

$$\psi(x,y) = \int_0^{x-y}\mu(\xi)\,K(\xi;x,y)\,d\xi$$

parciālo atvasinājumu izteiksmes

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \mu(x-y) + \int_0^{x-y}\mu(\xi)\,\frac{\partial K(\xi;x,y)}{\partial x}\,d\xi$$

un

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \mu'(x-y) + \varkappa(x,y)\,\mu(x-y) + \int_0^{x-y}\mu(\xi)\,\frac{\partial^2 K(\xi;x,y)}{\partial x^2}\,d\xi.$$

Pēc šo izteikumu substitūcijas formulā (41) un pārveidojumiem rodas permutablo funkciju $\varphi(x,y)$ forma

$$(48)\quad \varphi(x,y) = \mu'(x-y) + \varkappa(x,y)\,\mu(x-y) + \int_0^{x-y}\mu(\xi)\,\Psi(\xi;x,y)\,d\xi,$$

ja apzīmē funkciju

$$(49)\quad \Psi(\xi;x,y) = \frac{\partial^2 K(\xi;x,y)}{\partial x^2} + a(x)\,K(\xi;x,y) + \int_{y+\xi}^{x} F_1(x,s)\,K(\xi;s,y)\,ds.$$

Galīgi no (48) dabū <u>Volterra</u> formulu

$$(50)\quad \varphi(x,y) = \lambda(x-y) + \int_0^{x-y}\lambda(\xi)\,\Phi(\xi;x,y)\,d\xi,$$

lietojot funkcijas

$$\mu(x-y) = \int_0^{x-y}\lambda(\xi)\,d\xi$$

un

$$(51)\quad \Phi(\xi;x,y) = \varkappa(x,y) + \int_{\xi}^{x-y}\Psi(\eta;x,y)\,d\eta.$$

Arī vispārīgajā gadījumā permutablām funkcijām $\varphi(x,y)$ der īpašības, kas pamatojas uz Volterra formulas (50); var sastādīt šinī gadījumā funkciju $K(\xi;x,y)$ un $\Phi(\xi;x,y)$ integrodiferenciālos vienādojumus, kas vispārina vienādojumus (39) un (40).

8. **S p e c i ā l ā   g a d ī j u m ā ,   kad $f(x,y)$ ir   n o s l ē g t a   c i k l a   g r u p a s   f u n k c i j a**

$$f(x,y) = f(x-y),$$

lietotās funkcijas

$$(3)\qquad a(x) = \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right)_{y=x}, \quad b(y) = -\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}\right)_{y=x}$$

reducējas uz konstanti

$$a(x) \equiv b(y) \equiv -f'''(0),$$

bet funkcijas (5) ir identiskas

$$(52)\qquad H_1(x,y) = H_2(x,y) = H_0(x,y) = -f^{(4)}(x-y) + f'''(0)\, f''(x-y).$$

Tā kā funkcijas

$$H_0(x,y) = H_0(x-y), \quad f_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''(x-y), \quad f_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''(x-y)$$

pieder noslēgta cikla grupai un ir savā starpā permutablas, tad no formulām (4) secina, ka $F_1(x,y)$ un $F_2(x,y)$ ir identiskas:

$$(53)\qquad F_1(x,y) = F_2(x,y) = F_0(x,y) = H_0(x,y) - \overset{*}{H_0}\overset{*}{f''} + \overset{*}{H_0}\overset{*}{f''}\overset{*}{f''} - \ldots$$

Arī funkcija $F_0(x,y)$ pieder noslēgta cikla grupai:

$$F_0(x,y) = F_0(x-y).$$

Ievērojot minēto, konstatē, ka vienādojumi (42), (43), (44) šinī gadījumā attiecīgi reducējas uz vienādojumu (11), (21), (26) veidiem, kuŗos funkcija $F(x,y)$ apmainīta pret $F_0(x,y)$.
No rekurrences formulām (28) un (29) ar $F = F_0(x-y)$ secina:

$$K_n(\xi; x,y) \equiv 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Tā tad šinī gadījumā ir

$$K(\xi; x,y) \equiv 1,$$

bet pēc formulām (35) un (38) funkcijas

$$\Psi(\xi; x,y) = \int_0^{x-y-\xi} F_0(\sigma)\,d\sigma = \Psi(x-y-\xi)$$

un

$$\Phi(\xi; x,y) = \int_0^{x-y-\xi} \Psi(\eta)\,d\eta = \Phi(x-y-\xi).$$

Volterra formula (36) rāda, ka ar **d o t o o t r ā s k ā r t a s u n n o s l ē g t a c i k l a g r u p a s f u n k c i j u** $f(x-y)$ **v i s a s p e r m u t a b l a s f u n k c i j a s**

$$\varphi(x,y) = \varphi(x-y)$$

a r ī i e t i l p s t š a j ā g r u p ā .

§ 8. Problēma ar n. kārtas funkciju $(n>2)$.

1. Ar piemērotām transformācijām (§ 3) permutablo funkciju $\varphi(x,y)$ noteikšanas problēmu reducē uz tādu, kur dotā n. kārtas funkcija $f(x,y)$ ir k a n o n i s k ā f o r m ā , t.i. der nosacījumi

$$
(1)\quad \begin{cases} \left[\dfrac{\partial^k f(x,y)}{\partial x^i \partial y^j}\right]_{y=x} = 0 & \begin{pmatrix} i+j=k, \\ k=0,1,2,\dots,n-2,n \end{pmatrix} \\[2ex] \left(\dfrac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}}\right)_{y=x} = -\left(\dfrac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-2}\partial y}\right)_{y=x} = \dots = (-1)^{n-1}\left(\dfrac{\partial^{n-1} f}{\partial y^{n-1}}\right)_{y=x} = 1 . \end{cases}
$$

Ja dēfinīcijas apgabalā

$$
(A)\qquad a \leq y \leq x \leq b
$$

funkcijai $f(x,y)$ eksistē nepārtraukti atvasinājumi līdz kārtai $2n$ (ieskaitot), tad kompozīcijas inversijas simbolu $\overset{*}{f}{}^{-1}$ noteic (§ 4) ar formulām

$$
(2)\qquad \overset{*}{f}{}^{-1} = \overset{*}{1}{}^{-n} + a_2(x)\,\overset{*}{1}{}^{-n+2} + \dots + a_n(x)\,\overset{*}{1}{}^{0} + F_1(x,y)
$$

un

$$
(2')\qquad \overset{*}{f}{}^{-1} = \overset{*}{1}{}^{-n} + b_2(y)\,\overset{*}{1}{}^{-n+2} + \dots + b_n(y)\,\overset{*}{1}{}^{0} + F_2(x,y),
$$

kas lietojamas kompozīcijā ar šo simbolu pa kreisi, resp. pa labi. Šajās formulās funkcijas $a_2(x), \dots, a_n(x);\ b_2(y), \dots, b_n(y)$ ir izteicamas ar $f(x,y)$ parciālo atvasinājumu nozīmēm

$$
(3)\qquad a_2(x) = \left(\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^n \partial y}\right)_{y=x},\quad b_2(y) = (-1)^{n+1}\left(\frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^n \partial x}\right)_{y=x}, \dots
$$

un $F_1(x,y)$, $F_2(x,y)$ ar absolūti un vienmērīgi savirzāmām rindām

$$
(4)\qquad F_1(x,y) = H_1(x,y) - \overset{*}{H_1}\overset{*}{f_2} + \overset{*}{H_1}\overset{*}{f_2}\overset{*}{f_2} - \dots ,
$$

$$
(4')\qquad F_2(x,y) = H_2(x,y) - \overset{*}{f_1}\overset{*}{H_2} + \overset{*}{f_1}\overset{*}{f_1}\overset{*}{H_2} - \dots ,
$$

kurās apzīmē

$$
(5)\qquad H_1(x,y) = (-1)^{n-1}\left[\frac{\partial^{2n} f}{\partial x^n \partial y^n} + a_2(x)\frac{\partial^{2n-2} f}{\partial x^{n-2}\partial y^n} + \dots + a_n(x)\frac{\partial^n f}{\partial y^n}\right],
$$

$$
(5')\qquad H_2(x,y) = (-1)^{n-1}\frac{\partial^{2n} f}{\partial y^n \partial x^n} + (-1)^{n-3} b_2(y)\frac{\partial^{2n-2} f}{\partial y^{n-2}\partial x^n} + \dots + b_n(y)\frac{\partial^n f}{\partial x^n}
$$

un

$$
(6)\qquad f_1(x,y) = \frac{\partial^n f}{\partial x^n},\qquad f_2(x,y) = (-1)^n\frac{\partial^n f}{\partial y^n} .
$$

Lietojot kompozīcijas inversijas simbola $\overset{x}{f}{}^{-1}$ izteiksmes (2) un (2'), atrisina problēmas sabiedrotos integrālvienādojumus

$$\overset{x}{\dot{f}}\overset{x}{\varphi} = \psi(x,y), \qquad \overset{x}{\varphi}\overset{x}{f} = \psi(x,y)$$

ar formulām

$$(7) \qquad \varphi(x,y) = \overset{x}{f}{}^{-1}\overset{x}{\psi} = \frac{\partial^n \psi}{\partial x^n} + a_2(x)\frac{\partial^{n-2}\psi}{\partial x^{n-2}} + \ldots + a_n(x)\psi + \overset{x}{F_1}\overset{x}{\psi}$$

un

$$(7') \qquad \varphi(x,y) = \overset{x}{\psi}\overset{x}{f}{}^{-1} = (-1)^n \frac{\partial^n \psi}{\partial y^n} + (-1)^{n-2} b_2(y)\frac{\partial^{n-2}\psi}{\partial y^{n-2}} + \ldots + b_n(y)\psi + \overset{x}{\psi}\overset{x}{F_2}.$$

Salīdzinot abas pēdējās formulas, sastāda funkcijas

$$(8) \qquad \psi(x,y) = \int_y^x f(x,s)\,\varphi(s,y)\,ds = \int_y^x \varphi(x,s)\,f(s,y)\,ds$$

noteikšanai problēmas integrodiferenciālo vienādojumu

$$(9) \qquad \frac{\partial^n \psi}{\partial x^n} - (-1)^n \frac{\partial^n \psi}{\partial y^n} + \left[a_2(x)\frac{\partial^{n-2}\psi}{\partial x^{n-2}} - (-1)^{n-2} b_2(y)\frac{\partial^{n-2}\psi}{\partial y^{n-2}}\right] + \ldots +$$

$$+ \left[a_n(x) - b_n(y)\right]\psi(x,y) = \int_y^x \left[\psi(x,s)F_2(s,y) - F_1(x,s)\psi(s,y)\right]ds.$$

Tā kā $f(x,y)$ ir n. kārtas funkcija un $\varphi(x,y)$ - meklējamā nepārtraukta funkcija ar pozitīvu kārtu, tad funkcijas kārta ir augstāka par n ; no formulām (1) un (8) secina nosacījumus

$$(10) \qquad \left[\frac{\partial^k \psi(x,y)}{\partial x^i \partial y^j}\right]_{y=x} = 0 \qquad (i+j=k,\ k=0,1,2,\ldots,n-1).$$

Tā tad mūsu pamatproblēmā ir jāatrisina integrodiferenciālais vienādojums (9) kopā ar Cauchy tipa nosacījumiem (10),- citiem vārdiem, šī vienādojuma Cauchy problēma. Ja funkcijas $\psi(x,y)$ ir noteiktas, tad ar formulu (7) vai (7') aprēķina permutablās funkcijas $\varphi(x,y)$.

Speciālā gadījumā, kad

$$a_2(x) = b_2(y) = \ldots = a_n(x) = b_n(y) \equiv 0,$$

dotās funkcijas $f(x,y)$ forma (§ 4) ir

$$(11) \qquad f(x,y) = \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} + (x-y)^{2n}\omega(x,y),$$

un kompozīcijas inversijas simbolu $\overset{x}{f}{}^{-1}$ izteic ar formulu

(12) $$\overset{x}{f}{}^{-1} = \overset{x}{1}{}^{-n} + F(x,y),$$

kurā apzīmē

(13) $$F(x,y) = H(x,y) + \overset{x}{H}\overset{x}{1}{}^{n}\overset{x}{H} + \overset{x}{H}\overset{x}{1}{}^{n}\overset{x}{H}\overset{x}{1}{}^{n}\overset{x}{H} + \dots \qquad \left[H = (-1)^{n-1}\frac{\partial^{2n} f}{\partial x^n \partial y^n}\right].$$

Šinī gadījumā integrodiferenciālais vienādojums (9) vienkāršojas par

(14) $$\frac{\partial^n \psi}{\partial x^n} - (-1)^n \frac{\partial^n \psi}{\partial y^n} = \int_y^x [\psi(x,s) F(s,y) - F(x,s)\psi(s,y)]ds,$$

jo der identitātes

$$F_1(x,y) = F_2(x,y) = F(x,y).$$

Apzīmējot ar $g(x,y)$ vienādojumiem (9) un (14) labās puses

$$\overset{x}{\psi}\overset{x}{F_2} - \overset{x}{F_1}\overset{x}{\psi} \qquad \text{vai} \qquad \overset{x}{\psi}\overset{x}{F} - \overset{x}{F}\overset{x}{\psi},$$

var integrodiferenciālos vienādojumus (9) un (14) reducēt uz ekvivalentiem i n t e g r ā l v i e n ā d o j u m i e m , ja ir zināma Cauchy problēmas atrisināšanas formula[18] diferenciālvienādojumiem

(9') $$\frac{\partial^n \psi}{\partial x^n} - (-1)^n \frac{\partial^n \psi}{\partial y^n} + \left[a_2(x)\frac{\partial^{n-2}\psi}{\partial x^{n-2}} - (-1)^{n-2} b_2(y)\frac{\partial^{n-2}\psi}{\partial y^{n-2}}\right] + \dots + \left[a_n(x) - b_n(y)\right]\psi(x,y) = g(x,y)$$

vai

(14') $$\frac{\partial^n \psi}{\partial x^n} - (-1)^n \frac{\partial^n \psi}{\partial y^n} = g(x,y).$$

Šī redukcija ir iespējama tādēļ, ka funkcija $g(x,y)$ satur nezināmo funkciju $\psi(x,y)$ zem integrāla zīmes, bet n e tās parciālos atvasinājumus.

Turpretim ar Volterra un Pérès[19] metodi reducētu uz jaunu i n t e g r o d i f e r e n c i ā l u vienādojumu. Pérès savos darbos norāda uz grūtībām lietoto diferenciālvienādojumu Cauchy problēmas atrisināšanā, kad dotās funkcijas kārta $n > 2$, jo minēto vienādojumu karakteristikas tad ir imāgināras. Viņš ir pilnīgi diskutējis problēmu ar analitiskām funkcijām, lietojot kompleksos mainīgos.

---

18) Analitisko funkciju gadījumā šādu formulu vienādojumam (14') dod Pérès /11, lpp. 42/ un /26, lpp. 47/.
19) Sk. Pérès darbu /11, lpp. 41 un 48/.

2. Problēmas integrodiferenciālie vienādojumi (9), resp. (14) ir simboliskā sakara

$$\overset{x}{f}^{-1}\overset{x}{\psi} - \overset{x}{\psi}\overset{x}{f}^{-1} = 0$$

pārveidojumi, ja ievieto kompozīcijas inversijas simbola $\overset{x}{f}^{-1}$ izteiksmes (2), (2'), resp. (12). Funkcija $\psi(x,y)$ ir arī permutabla ar doto funkciju $f(x,y)$, jo

$$\overset{x}{f}\overset{x}{\psi} = \overset{x}{\psi}\overset{x}{f} = \overset{x}{f}\overset{x}{\varphi}\overset{x}{f}.$$

Tā kā no permutabilitātes nosacījuma

$$\overset{x}{f}\overset{x}{\varphi} = \overset{x}{\varphi}\overset{x}{f}$$

un sakariem

$$\overset{x}{f}\overset{x}{f}^{-1} = \overset{x}{f}^{-1}\overset{x}{f} = \overset{x}{1}^{0}$$

var atrast simbolisko formulu

$$\overset{x}{f}^{-1}\overset{x}{\varphi} - \overset{x}{\varphi}\overset{x}{f}^{-1} = 0,$$

kas analoga iepriekšējai, tad arī permutablās funkcijas $\varphi(x,y)$ apmierina integrodiferenciālo vienādojumu (9), resp. (14) (ja funkcijai $\varphi(x,y)$ eksistē vajadzīgie parciālie atvasinājumi). Tā tad minētie vienādojumi raksturo funkcijas, kas permutablas ar doto n. kārtas un kanoniskās formas funkciju $f(x,y)$.

3. Speciālā gadījumā, kad $f(x,y)$ ir noslēgta cikla grupas funkcija

$$f(x,y) = f(x-y),$$

no formulām (2) secina, ka $a_2(x),\dots,a_n(x);\ b_2(y),\dots,b_n(y)$ ir konstantes:

$$a_2 = b_2 = -f^{(n+1)}(0),\quad a_3 = b_3 = -f^{(n+2)}(0),\dots,\quad a_n = b_n = const.$$

Šinī gadījumā no formulām (5), (5') un (4), (4') secina vienlīdzības

$$H_1(x,y) = H_2(x,y) = H_0(x,y) = -\left[f^{(2n)}(x-y) + a_2 f^{(2n-2)}(x-y) + \dots + a_n f^{(n)}(x-y)\right]$$

un

$$F_1(x,y) = F_2(x,y) = F_0(x,y) = H_0(x,y) - \overset{x}{H_0}\overset{x}{f}^{(n)} + \overset{x}{H_0}\overset{x}{f}^{(n)}\overset{x}{f}^{(n)} - \dots,$$

ja ievēro, ka noslēgta cikla grupas funkcijas

$$H_0(x,y) = H_0(x-y),\quad f_1(x,y) = f_2(x,y) = f^{(n)}(x-y)$$

ir savā starpā permutablas funkcijas. Šinī gadījumā problēmas integrodiferenciālais vienādojums (9) top par

(15)
$$\frac{\partial^n \psi}{\partial x^n} - (-1)^n \frac{\partial^n \psi}{\partial y^n} + a_2 \left[\frac{\partial^{n-2} \psi}{\partial x^{n-2}} - (-1)^{n-2} \frac{\partial^{n-2} \psi}{\partial y^{n-2}} \right] + \dots +$$
$$+ a_{n-1} \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] = \int_y^x \left[\psi(x,s) F_0(s-y) - F_0(x-s) \psi(s,y) \right] ds.$$

Viegli pārbauda, ka šī vienādojuma atrisinājums ir noslēgta cikla grupas funkcija
$$\psi(x,y) = \psi(x-y).$$

No formulas (7) šinī gadījumā aprēķina permutablo funkciju
$$\varphi(x,y) = \frac{\partial^n \psi}{\partial x^n} + a_2 \frac{\partial^{n-2} \psi}{\partial x^{n-2}} + \dots + a_n \psi(x-y) + \int_y^x F_0(x-s) \psi(s-y) ds$$

arī kā noslēgtā cikla grupas funkcija
$$\varphi(x,y) = \varphi(x-y).$$

III PÉRÈS TRANSFORMĀCIJAS UN TO LIETOŠANA PAMATPROBLĒMĀ.

§ 9. Transformāciju veidotājas funkcijas funkcionālvienādojums un tā diskusija.

1. Iepriekšējā nodaļā (§§ 6 un 7) atradām, ka ar dotās pirmās vai otrās kārtas un kanoniskās formas funkciju visas permutablas funkcijas $\varphi(x,y)$ aprēķina pēc Volterra formulas

$$(1) \qquad \varphi(x,y) = \lambda(x-y) + \int_0^{x-y} \lambda(\xi)\phi(\xi;x,y)d\xi.$$

Šīs formulas labo pusi var uzskatīt par **f u n k c i o n ā l - t r a n s f o r m ā c i j u**

$$(2) \qquad \Omega(\lambda) = \lambda(x-y) + \int_0^{x-y} \lambda(\xi)\phi(\xi;x,y)d\xi,$$

ar kuŗu no noslēgta cikla grupas funkcijas $\lambda(x-y)$ rodas transformētā funkcija $\varphi(x,y)$. Volterra transformācijas (2) **v e i d o t ā j a f u n k c i j a** $\phi(\xi;x,y)$ (jeb **k o d o l s**) ir nepārtraukta funkcija, kas dēfinēta apgabalā

$$(A') \qquad a \le y \le x \le b, \qquad 0 \le \xi \le x-y$$

un kas permutablo funkciju problēmā ir noteiktā veidā sastādīta no dotās funkcijas.

Sekojot J.Pérès[20] norādījumiem, un papildinot viņa dažus rezultātus, konstatēsim vispirms Volterra transformāciju vispārīgās **Ī p a š ī b a s**, kad $\phi(\xi;x,y)$ ir vispār nepārtraukta funkcija apgabalā (A').

Meklēsim noslēgta cikla grupas funkcijas $\mu(x-y)$, kuŗu transformētā funkcija

$$(3) \qquad \mu(x-y) + \int_0^{x-y} \mu(\xi)\,\phi_0(\xi;x,y)d\xi$$

ar jaunu veidotāju funkciju $\phi_0(\xi;x,y)$ ir identiska ar (1). Ja sastādītā sakarā

$$\mu(x-y) + \int_0^{x-y} \mu(\xi)\phi_0(\xi;x,y)d\xi = \lambda(x-y) + \int_0^{x-y}\lambda(\xi)\phi(\xi;x,y)d\xi$$

pieņem $y = a = const.$ un tad apmaina x pret $x+a$, tad rodas attiecībā

---

20) J.Pérès /13/ un Volterra-Pérès /28, chap. IV). Minētos darbos lietots dēfinīcijas apgabals

$$a \le x \le y \le b, \qquad 0 \le \xi \le y-x.$$

pret $\mu(x)$ otrā veida lineārais Volterra integrālvienādojums

$$\mu(x)+\int_0^x \mu(\xi)\,\phi_0(\xi;x+a,a)\,d\xi = \lambda(x)+\int_0^x \lambda(\xi)\,\phi(\xi;x+a,a)\,d\xi,$$

kam atrisinājumu atrod formā

$$\mu(x)=\lambda(x)+\int_0^x \lambda(\xi)\,\Theta(\xi;x)\,d\xi$$

ar viegli sastādāmu funkciju $\Theta(\xi;x)$ no funkcijām ϕ un ϕ_0.

Pēc substitūcijas

(4) $$\mu(x-y)=\lambda(x-y)+\int_0^{x-y}\lambda(\xi)\,\Theta(\xi;x-y)\,d\xi$$

funkcija (3) top par (1), ja transformāciju veidotājas funkcijas saista ar sekojošu sakaru

(5) $$\phi(\xi;x,y)=\phi_0(\xi;x,y)+\Theta(\xi;x-y)+\int_\xi^{x-y}\Theta(\xi;s)\,\phi_0(s;x,y)\,ds.$$

Uzskatot $\Theta(\xi;x-y)$ par patvaļīgu funkciju, dabū Volterra transformāciju (2) veidotājas funkcijas $\phi(\xi;x,y)$ vispārīgo formu, kad ar vienu veidotājas funkciju $\phi_0(\xi;x,y)$ ir sastādīta tā pati transformētā funkcija.

2. Izlietojot to apstākli, ka Volterra transformāciju $\Omega(\lambda)$ veidotāja funkcija ir atkarīga no vienas patvaļīgas funkcijas, J.Pérès ir vispirms noteicis tādas transformācijas $\Omega(\lambda)$, kas divu noslēgta cikla grupas funkciju $\lambda(x-y)$, $\mu(x-y)$ transformācijas resultanti

$$\overset{*}{\Omega}(\lambda)\,\overset{*}{\Omega}(\mu)$$

izteic ar šo funkciju resultantes transformēto funkciju, t.i. der sakars

(6) $$\overset{*}{\Omega}(\lambda)\,\overset{*}{\Omega}(\mu)=\Omega(\overset{**}{\lambda\mu}).$$

Saka, ka šādas transformācijas nemaina kompozīciju, un tās sauksim par Pérès transformācijām.

No sakara (6) var sastādīt Pérès transformāciju veidotājas funkcijas $\phi(\xi;x,y)$ funkcionālvienādojuma, izteicot $\Omega(\lambda)$ ar (2) un $\Omega(\mu)$ ar

(2') $$\Omega(\mu)=\mu(x-y)+\int_0^{x-y}\mu(\xi)\,\phi(\xi;x,y)\,d\xi.$$

Pēc ievietošanas vienādojuma (6) kreiso pusi pārveido tāpat, kā 6.§-fa form. (40) pierādījumam, bet labo pusi

$$\Omega(\overset{x}{\lambda}\overset{x}{\mu}) = \overset{x}{\lambda}\overset{x}{\mu} + \int_0^{x-y} \phi(\xi; x, y)\,d\xi \int_0^{\xi} \lambda(s)\,\mu(\xi - s)\,ds$$

pēc integrācijas kārtības apmaiņas un piemērotām substitūcijām izteic ar

$$\Omega(\overset{x}{\lambda}\overset{x}{\mu}) = \overset{x}{\lambda}\overset{x}{\mu} + \int_0^{x-y} \lambda(\xi)\,d\xi \int_0^{x-y-\xi} \mu(\eta)\,\phi(\xi+\eta; x, y)\,d\eta.$$

Ja no dabūtās vienlīdzības abām pusēm atņem loceklī $\overset{x}{\lambda}\overset{x}{\mu}$ un ievēro, ka λ un μ ir divas p a t v a ļ ī g a s noslēgta cikla grupas funkcijas, tad secina f u n k c i o n ā l v i e n ā d o j u m u

$$\phi(\xi+\eta; x, y) = \phi(\xi; x, y+\eta) + \phi(\eta; x-\xi, y) + \int_{y+\eta}^{x-\xi} \phi(\xi; x, s)\,\phi(\eta; s, y)\,ds, \tag{7}$$

kas raksturo Pérès transformāciju veidotājas funkciju $\phi(\xi; x, y)$.
Pérès transformācijām ir tā svarīgā ī p a š ī b a , ka ar t ā m s a s t ā d ī t a s f u n k c i j a s (2) un (2') i r s a v ā s t a r p ā p e r m u t a b l a s . Tiešām, pastāv sakars

$$\overset{x}{\Omega}(\mu)\,\overset{x}{\Omega}(\lambda) = \Omega(\overset{x}{\mu}\overset{x}{\lambda}) = \Omega(\overset{x}{\lambda}\overset{x}{\mu}) = \overset{x}{\Omega}(\lambda)\,\overset{x}{\Omega}(\mu),$$

jo $\lambda(x-y)$, $\mu(x-y)$, kā noslēgta cikla grupas funkcijas, ir savā starpā permutablas.

Šo īpašību var konstatēt arī tā, ka formulā (7) apmaina savstarpēji ξ ar η; tad sastāda funkcijas $\phi(\xi; x, y)$ funkcionālvienādojumu (§ 6, form. (40)), kas raksturīgs permutablām funkcijām.

3. Vienādojuma (7) atrisināšanu pēc Pérès metodes v i s p ā r ī g a j ā g a d ī j u m ā reducē uz otrā veida lineārā Volterra integrālvienādojuma atrisināšanu sekojošā kārtā. Vienādojumā ievieto $y = a = const.$; pēc locekļa $\phi(\eta; x-\xi, a)$ pārnešanas pretējā pusē rodas

$$\phi(\xi; x, a+\eta) + \int_{a+\eta}^{x-\xi} \phi(\xi; x, s)\,\phi(\eta; s, a)\,ds = \phi(\xi+\eta; x, a) - \phi(\eta; x-\xi, a).$$

Ja te apmaina $a+\eta$ pret y un ieved funkciju

$$\alpha(x, y) = \phi(y-a; x, a), \tag{8}$$

tad attiecībā pret $\phi(\xi; x, y)$ dabū tiešām Volterra integrālvienādojumu

$$\phi(\xi; x, y) + \int_y^{x-\xi} \phi(\xi; x, s)\,\alpha(s, y)\,ds = \alpha(x, y+\xi) - \alpha(x-\xi, y).$$

Pēdējā vienādojuma atrisināšanai sastāda rezolventes funkciju

$$(9) \qquad \beta(x,y) = -\alpha(x,y) + \overset{x}{\alpha}{}^{2} - \overset{x}{\alpha}{}^{3} + \ldots ,$$

kam der sekojoši integrālsakari

$$(10) \qquad \alpha + \beta + \overset{x}{\alpha}\overset{x}{\beta} = \alpha + \beta + \overset{xx}{\beta\alpha} = 0$$

jeb

$$(10') \qquad (\overset{x}{1}{}^{o} + \overset{x}{\alpha})(\overset{x}{1}{}^{o} + \overset{x}{\beta}) = (\overset{x}{1}{}^{o} + \overset{x}{\beta})(\overset{x}{1}{}^{o} + \overset{x}{\alpha}) = \overset{x}{1}{}^{o}.$$

Minētā Volterra integrālvienādojuma atrisinājumu izteic ar

$$\phi(\xi;\, x,y) = \alpha(x, y+\xi) - \alpha(x-\xi, y) + \int_y^{x-\xi} [\alpha(x, s+\xi) - \alpha(x-\xi, s)]\beta(s,y)\,ds$$

jeb

$$(11) \qquad \phi(\xi;\, x,y) = \alpha(x, y+\xi) + \beta(x-\xi, y) + \int_y^{x-\xi} \alpha(x, s+\xi)\beta(s,y)\,ds,$$

ja ievēro sakarus (10).

Pēc atrastās veidotājas funkcijas izteiksmes (11) substitūcijas formulā (2) un pārveidojumiem dabū P é r è s t r a n s f o r m ā c i j u formu

$$\Omega(\lambda) = \lambda + \overset{x}{\alpha}\overset{x}{\lambda} + \overset{x}{\lambda}\overset{x}{\beta} + \overset{x}{\alpha}\overset{x}{\lambda}\overset{x}{\beta}$$

jeb

$$(12) \qquad \Omega(\lambda) = (\overset{x}{1}{}^{o} + \overset{x}{\alpha})\overset{x}{\lambda}(\overset{x}{1}{}^{o} + \overset{x}{\beta}).$$

Viegli pārbauda, ka transformācijas (12) n e m a i n a k o m p o z ī c i j u .

Tiešām, der sakari

$$\overset{x}{\Omega}(\lambda)\,\overset{x}{\Omega}(\mu) = (\overset{x}{1}{}^{o} + \overset{x}{\alpha})\overset{x}{\lambda}(\overset{x}{1}{}^{o} + \overset{x}{\beta})(\overset{x}{1}{}^{o} + \overset{x}{\alpha})\overset{x}{\mu}(\overset{x}{1}{}^{o} + \overset{x}{\beta})$$
$$= (\overset{x}{1}{}^{o} + \overset{x}{\alpha})\overset{xx}{\lambda\mu}(\overset{x}{1}{}^{o} + \overset{x}{\beta}),$$

ja ievēro nosacījumus (10').

Šajā pārbaudē var uzskatīt $\alpha(x,y)$ par p a t v a ļ ī g u funkciju, bet $\beta(x,y)$ noteiktu ar (9) vai (10), resp. (10'). Tā tad v i s a s V o l t e r r a t r a n s f o r m ā c i j a s (2), k a s n e m a i n a k o m p o z ī c i j u , jeb visas P é r è s t r a n s f o r m ā c i j a s n o t e i c a r f o r m u l u (12), kurā f u n k c i j a s $\alpha(x,y)$ u n $\beta(x,y)$ s a i s t ī t a s a r n o s a c ī j u m i e m (10), p i e t a m v i e n a n o t ā m i r p a t v a ļ ī g a.

Funkcionālvienādojuma (7) vispārīgais atrisinājums ir (11), kas satur vienu patvaļīgu funkciju, piem., $\alpha(x,y)$, bet $\beta(x,y)$ noteiktu ar (9).

4. Konstatēsim, ka formā (12) var attēlot vienu un to pašu funkciju bezgala daudzos veidos.

Ja formulā (12) $\alpha_0(x,y)$, $\beta_0(x,y)$ ir viens pāris funkciju, kas apmierina sakarus

$$(\overset{*0}{1}+\overset{*}{\alpha}_0)(\overset{*0}{1}+\overset{*}{\beta}_0)=(\overset{*0}{1}+\overset{*}{\beta}_0)(\overset{*0}{1}+\overset{*}{\alpha}_0)=\overset{*0}{1},$$

tad no salīdzināšanas rezultāta

$$(\overset{*0}{1}+\overset{*}{\alpha})\overset{*}{\lambda}(\overset{*0}{1}+\overset{*}{\beta})=(\overset{*0}{1}+\overset{*}{\alpha}_0)\overset{*}{\lambda}(\overset{*0}{1}+\overset{*}{\beta}_0)$$

ar piemērotām kompozicijām var secināt sakaru

$$\overset{*}{\gamma}\overset{*}{\lambda}=\overset{*}{\lambda}\overset{*}{\gamma},$$

ja izteic

$$\overset{*0}{1}+\alpha=(\overset{*0}{1}+\overset{*}{\alpha}_0)(\overset{*0}{1}+\overset{*}{\gamma}),\quad \overset{*0}{1}+\beta=(\overset{*0}{1}+\overset{*}{\delta})(\overset{*0}{1}+\overset{*}{\beta}_0)$$

ar funkcijām $\gamma(x,y)$, $\delta(x,y)$, izvēlētām ar nosacījumiem

$$(\overset{*0}{1}+\overset{*}{\gamma})(\overset{*0}{1}+\overset{*}{\delta})=(\overset{*0}{1}+\overset{*}{\delta})(\overset{*0}{1}+\overset{*}{\gamma})=\overset{*0}{1}.$$

Atrastais sakars rāda, ka $\gamma(x,y)$ un kopā ar to arī

$$\delta(x,y)=-\gamma(x,y)+\overset{*}{\gamma}{}^{2}-\overset{*}{\gamma}{}^{3}+\dots$$

ir noslēgta cikla grupas funkcijas

$$\gamma(x,y)=\gamma(x-y),\quad \delta(x,y)=\delta(x-y),$$

jo $\lambda(x-y)$ pieder šai grupai. Tā tad visas funkcijas $\alpha(x,y)$, $\beta(x,y)$, kas ar <u>Pérès</u> transformāciju (12) attēlo vienu un to pašu funkciju, ir aprēķināmas pēc formulām

$$\alpha(x,y)=\alpha_0(x,y)+\gamma(x-y)+\overset{*}{\alpha}_0\overset{*}{\gamma} \tag{13}$$

un

$$\beta(x,y)=\beta_0(x,y)+\delta(x-y)+\overset{*}{\delta}\overset{*}{\beta}_0, \tag{13'}$$

ja $\alpha_0(x,y)$, $\beta_0(x,y)$ ir šādu funkciju viens pāris, $\gamma(x-y)$ - patvaļīga noslēgta cikla grupas funkcija un $\delta(x-y)$ cita šīs grupas funkcija, saistīta ar sakariem

$$\gamma+\delta+\overset{*}{\gamma}\overset{*}{\delta}=\gamma+\delta+\overset{*}{\delta}\overset{*}{\gamma}=0. \tag{14}$$

Patvaļīgo funkciju $\gamma(x-y)$ var v i e n n o z ī m ī g i noteikt, prasot, lai dotai nozīmei $y = a = \text{const.}$ būtu funkcijas $\alpha(x,y)$ vērtība $\alpha(x,a)$ fiksēta, piem.,

$$\alpha(x,a) = 0.$$

Tiešām, ar šādu nosacījumu sastāda otrā veida lineāro Volterra integrālvienādojumu

$$\gamma(x-a) + \int_a^x \alpha_0(x,s)\gamma(s-a)\,ds = -\alpha_0(x,a)$$

jeb

$$\gamma(x) + \int_0^x \alpha_0(x+a,s)\gamma(s)\,ds = -\alpha_0(x+a,a),$$

kuŗa vienīgais atrisinājums ir

$$\gamma(x) = -\alpha_0(x+a,a) - \int_0^x \beta_0(x+a,s)\alpha_0(s+a,a)\,ds.$$

Formula (9) rāda, ka ar tādu $\gamma(x-y)$ arī

$$\beta(x,a) = 0.$$

Tādēļ no atrisināšanas formulas (11) secina lietoto sakaru

$$\phi(y-a;x,a) = \alpha(x,y).$$

5. Funkcionālvienādojuma

(7) $$\phi(\xi+\eta;x,y) = \phi(\xi;x,y+\eta) + \phi(\eta;x-\xi,y) + \int_{y+\eta}^{x-\xi}\phi(\xi;x,s)\phi(\eta;s,y)\,ds$$

otrā J. Pérès atrisināšanas metode ir lietojama g a d ī j u m ā,[21] kad eksistē

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\phi(\xi;x,y).$$

Te (7) atrisināšanu reducē uz viena integrālvienādojuma atrisināšanu.

Vispirms no vienādojuma (7), kad $\xi = \eta = 0$ sastāda funkcijas $\phi(0;x,y) = \varphi(x,y)$ noteikšanai kompozīcijas kvadrātvienādojumu

$$\varphi(x,y) + \overset{x}{\varphi}{}^{2} = 0,$$

kam ir vienīgais atrisinājums

$$\varphi(x,y) = \phi(0;x,y) = 0.$$

Modificējot Pérès metodi definīcijas apgabalam

(A') $$a \le y \le x \le b, \qquad 0 \le \xi \le x-y,$$

ievedam vienādojumā (7) funkciju

(15) $$\Psi(\xi;x,y) = \phi(\xi;x+\xi,y),$$

iepriekš apmainot x pret $x+\xi$ un y pret $y-\eta$:

$$\phi(\xi+\eta;x+\xi,y-\eta) = \phi(\xi;x+\xi,y) + \phi(\eta;x,y-\eta) + \int_y^x \phi(\xi;x+\xi,s)\phi(\eta;s,y-\eta)\,ds.$$

---

21) J. Pérès /13/. Volterra-Pérès darbā /28/ tad transformācijas nosauktas par r e g u l ā r ā m.

No iepriekšējā sastāda jaunu vienādojumu

$$\Psi(\xi+\eta;\, x-\eta,\, y-\eta) = \Psi(\xi;\, x,y) + \phi(\eta;\, x,\, y-\eta) + \int_y^x \Psi(\xi;\, x,s)\, \phi(\eta;\, s,\, y-\eta)\, ds,$$

no kuŗa ar atvasināšanu pēc ξ rodas

$$\frac{\partial \Psi(\xi+\eta;\, x-\eta,\, y-\eta)}{\partial(\xi+\eta)} = \frac{\partial \Psi(\xi;\, x,y)}{\partial \xi} + \int_\eta^x \frac{\partial \Psi(\xi;\, x,s)}{\partial \xi}\, \phi(\eta;\, s,\, y-\eta)\, ds.$$

Liekot te $\xi = 0$ un apmainot x pret $x+\eta$, y pret $y+\eta$, dabū integro-diferenciālu vienādojumu

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \Psi(\eta;\, x,y) = g(x+\eta,\, y+\eta) + \int_{y+\eta}^{x+\eta} g(x+\eta,\, s)\, \phi(\eta;\, s,y)\, ds$$

jeb

(16) $$\frac{\partial}{\partial \eta} \Psi(\eta;\, x,y) = g(x+\eta,\, y+\eta) + \int_y^x g(x+\eta,\, t+\eta)\, \Psi(\eta;\, t,y)\, dt,$$

ja apzīmē funkciju

(17) $$g(x,y) = \left[\frac{\partial \Psi(\xi;\, x,y)}{\partial \xi} \right]_{\xi=0}$$

Tā kā

$$\Psi(0;\, x,y) = \phi(0;\, x,y) = 0,$$

tad sastādītais integrodiferenciālais vienādojums ir ekvivalents ar integrālvienādojumu

(18) $$\Psi(\eta;\, x,y) = \int_0^\eta g(x+\eta_1,\, y+\eta_1)\, d\eta_1 + \int_0^\eta d\eta_1 \int_y^x g(x+\eta_1,\, s+\eta_1)\, \Psi(\eta_1;\, s,y)\, ds.$$

Pierādīsim atrisinājuma <u>unitātes teōrēmu</u>: vienādojumam (18) ar doto nepārtraukto funkciju g eksistē augstākais viens atrisinājums $\Psi(\eta;\, x,y)$ kā nepārtraukta funkcija apgabalā

(A') $$a \le y \le x \le b, \qquad 0 \le \eta \le x-y.$$

Ja pieņemtu pretējo, ka bez $\Psi(\eta;\, x,y)$ ir vēl otrs atrisinājums $\Psi_0(\eta;\, x,y)$, tad diference

$$\bar{\Psi}(\eta;\, x,y) = \Psi(\eta;\, x,y) - \Psi_0(\eta;\, x,y)$$

apmierina homogenu integrālvienādojumu

(19) $$\bar{\Psi}(\eta;\, x,y) = \int_0^\eta d\eta_1 \int_y^x g(x+\eta_1,\, s+\eta_1)\, \bar{\Psi}(\eta_1;\, s,y)\, ds.$$

Ja ar M un μ apzīmē sekojošo nepārtraukto funkciju absolūto vērtību augšējās robežas:

$$|g(x,y)| < M, \quad |\bar{\Psi}(\eta; x,y)| < \mu$$

un novērtē formulas (19) labo pusi, tad dabū nevienlīdzību

$$|\bar{\Psi}(\eta; x,y)| < M\mu \cdot \eta(x-y).$$

No jauna atkārtoti novērtējot, dabū vispārīgo formulu

$$|\bar{\Psi}(\eta; x,y)| < M^n \mu^n \cdot \frac{\eta^n}{n!} \frac{(x-y)^n}{n!},$$

no kuŗas robežgadījumā, kad $n \to \infty$, secina

$$\bar{\Psi}(\eta; x,y) \equiv 0.$$

Tā tad abiem pieņemtiem atrisinājumiem jābūt identiskiem:

$$\Psi(\eta; x,y) \equiv \Psi_0(\eta; x,y).$$

Vienādojuma (18) vienīgo atrisinājumu var konstruēt ar p a k ā p e n i s k o t u v i n ā j u m u metodi, lietojot rindu

$$\Psi(\eta; x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(\eta; x,y),$$

kuŗas locekļus noteic ar formulām

$$\Psi_n(\eta; x,y) = \int_0^{\eta} d\eta_1 \int_0^{\eta_1} d\eta_2 \dots \int_0^{\eta_{n-1}} d\eta_n \, \overset{x}{g}_{\eta_1} \overset{x}{g}_{\eta_2} \dots \overset{x}{g}_{\eta_n} (x,y) \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

ja apzīmē

$$g_\eta(x,y) = g(x+\eta, y+\eta).$$

Minētās rindas absolūtā un vienmērīgā konvergence dēfinīcijas apgabalā (A') konstatējama ar locekļu novērtējumu formulām

$$|\Psi_n| < M^n \frac{\eta^n}{n!} \cdot \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Tā kā

$$\phi(\xi; x,y) = \Psi(\xi; x-\xi, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(\xi; x-\xi, y),$$

tad funkcionālvienādojuma (7) vispārīgais atrisinājums šinī gadījumā ir

$$\phi(\xi; x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\xi} d\eta_1 \int_0^{\eta_1} d\eta_2 \dots \int_0^{\eta_{n-1}} d\eta_n \, \overset{x}{g}_{\eta_1} \overset{x}{g}_{\eta_2} \dots \overset{x}{g}_{\eta_n} (x-\xi, y), \tag{20}$$

ja $g(x,y)$ uzskata par patvaļīgu funkciju.

No vienādojumiem (16) un (18) ar x apmaiņu pret $x-\eta$ un η pret ξ sastāda funkcijas $\phi(\xi; x,y)$ noteikšanai ekvivalentos vienādojumus

$$(21)\qquad \left(\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\phi(\xi;x,y) = g(x,y+\xi) + \int_{y+\xi}^{x} g(x,s)\,\phi(\xi;s,y)\,ds$$

un

$$(22)\qquad \phi(\xi;x,y) = \int_0^{\xi} g(x-\xi+\eta,\,y+\eta)\,d\eta + \int_0^{\xi} d\eta \int_y^{x-\xi} g(x-\xi+\eta,\,s+\eta)\,\phi(\eta;s+\eta,y)\,ds.$$

6. No vienādojuma (21) viegli sastādā sakarā starp iepriekšējās atrisināšanas metodēs lietotām funkcijām $g(x,y)$ un $\alpha(x,y) = \phi(y-a;x,a)$.

Ja vienādojumā (21) liek $y=a$ un apmaina ξ pret $y-a$, tad tiešām rodas meklētais sakars

$$(23)\qquad \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)\alpha(x,y) = g(x,y) + \int_y^x g(x,s)\,\alpha(s,y)\,ds.$$

Attiecībā pret dotām funkcijām

$$\alpha(x,y),\quad \alpha'(x,y) = \frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\alpha}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)\alpha(x,y)$$

un nezināmo funkciju $g(x,y)$ vienādojums (23) ir otrā veida lineārais Volterra integrālvienādojums, kam atrisinājumu izteic formula

$$(24)\qquad g(x,y) = \alpha'(x,y) + \int_y^x \alpha'(x,s)\,\beta(s,y)\,ds$$

ar rezoltántes funkciju

$$\beta(x,y) = -\alpha(x,y) + \overset{x}{\alpha}{}^{2} - \overset{x}{\alpha}{}^{3} + \dots$$

Ja turpretim uzskata $g(x,y)$ par zināmu, bet $\alpha(x,y)$ par nezināmo funkciju, tad sakars (23) ir integrodiferenciāls vienādojums, kam pēc (20) formulas ir speciālais atrisinājums

$$(25)\qquad \alpha_0(x,y) = \phi(y-a;x,a) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{y-a} d\eta_1 \int_0^{\eta_1} d\eta_2 \dots \int_0^{\eta_{n-1}} d\eta_n\, \overset{x}{g}_{\eta_1} \overset{x}{g}_{\eta_2} \dots \overset{x}{g}_{\eta_n}(x-y+a,\,a)$$

un vispārīgais atrisinājums

$$(13)\qquad \alpha(x,y) = \alpha_0(x,y) + \gamma(x-y) + \overset{x}{\alpha}_0 \overset{x}{\gamma}$$

ar vienu patvaļīgu noslēgta cikla grupas funkciju $\gamma(x-y)$.

§ 10. Permutablo funkciju noteikšana ar Pérès transformācijām un šo funkciju grupu īpašības.

1. Lai noteiktu funkcijas $\varphi(x,y)$, kas permutablas ar doto n. kārtas (n - vesels pozitīvs skaitlis) un kanoniskās formas funkciju $f(x,y)$, meklēsim funkcijas $\alpha(x,y)$, $\beta(x,y)$, ar kurām izteic $f(x,y)$ Pérès transformācijas formā

(1) $$f(x,y) = \Omega(\overset{x_n}{1}) = (\overset{x_0}{1} + \overset{x}{\alpha})\overset{x_n}{1}(\overset{x_0}{1} + \overset{x}{\beta}).$$

Zinot šādas funkcijas $\alpha(x,y)$ un $\beta(x,y)$, var atrast (§ 9) Volterra transformācijas

(2) $$f(x,y) = \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} + \int_0^{x-y} \frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!}\,\phi(\xi; x,y)\,d\xi$$

veidotājas funkciju

(3) $$\phi(\xi; x,y) = \alpha(x, y+\xi) + \beta(x-\xi, y) + \int_y^{x-\xi} \alpha(x, s+\xi)\beta(s,y)\,ds.$$

Apskatīsim g a d ī j u m u , kad dotās funkcijas forma ir

(4) $$f(x,y) = \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} + (x-y)^{2n}\omega(x,y),$$

ja $\omega(x,y)$ ir nepārtraukta funkcija kopā ar tās parciāliem atvasinājumiem līdz kārtai $2n$. Kā zināms (§ 4, 4.nod.) šinī gadījumā funkcijai $f(x,y)$ eksistē attīstījums absolūti un vienmērīgi savirzāmā rindā

(5) $$f(x,y) = \overset{x_n}{1} - \overset{x_n}{1}\overset{x}{F}\overset{x_n}{1} + \overset{x_n}{1}\overset{x}{F}\overset{x_n}{1}\overset{x}{F}\overset{x_n}{1} - \dots,$$

ja $F(x,y)$ noteic ar citu rindu

(6) $$F(x,y) = H(x,y) + \overset{x}{H}\overset{x_n}{1}\overset{x}{H} + \overset{x}{H}\overset{x_n}{1}\overset{x}{H}\overset{x_n}{1}\overset{x}{H} + \dots \quad \left[H = (-1)^{n-1}\frac{\partial^{2n} f}{\partial x^n \partial y^n}\right].$$

Rinda (5) ir divu simbolisko izteiksmju:

(7) $$f(x,y) = (\overset{x_0}{1} + \overset{x_n}{1}\overset{x}{F})^{-1}\overset{x_n}{1}$$

un

(7') $$f(x,y) = \overset{x_n}{1}(\overset{x_0}{1} + \overset{x}{F}\overset{x_n}{1})^{-1}$$

kopīgais attīstījums.

Lai sastādītu vienādojumu vienas funkcijas, piem., $\alpha(x,y)$ noteikšanai, formulas (1) abās pusēs dara kompozīciju p a l a b i ar $\overset{x_0}{1} + \alpha$.

Tā kā pastāv sakari

$$(8)\qquad (\overset{x_0}{1}+\overset{x}{\alpha})(\overset{x_0}{1}+\overset{x}{\beta}) = (\overset{x_0}{1}+\overset{x}{\beta})(\overset{x_0}{1}+\overset{x}{\alpha}) = \overset{x_0}{1},$$

tad dabūtais vienādojums vienkāršojas par

$$\overset{x}{f}(\overset{x_0}{1}+\overset{x}{\alpha}) = (\overset{x_0}{1}+\overset{x}{\alpha})\overset{x_n}{1}.$$

Ja te ievieto $f(x,y)$ izteiksmi (7) un dara kompozīciju pa k r e i s i ar $\overset{x_0}{1}+\overset{x_n}{1}\overset{x}{F}$, tad rodas vienādojums

$$\overset{x_n}{1}(\overset{x_0}{1}+\overset{x}{\alpha}) = (\overset{x_0}{1}+\overset{x_n}{1}\overset{x}{F})(\overset{x_0}{1}+\overset{x}{\alpha})\overset{x_n}{1}$$

jeb

$$\overset{x_n}{1}\overset{x}{\alpha} - \overset{x}{\alpha}\overset{x_n}{1} = \overset{x_n}{1}(\overset{x}{F}+\overset{x}{F}\overset{x}{\alpha})\overset{x_n}{1}.$$

Dabūtais vienādojums ir ekvivalents ar simboliskās formas vienādojumu

$$\overset{x-n}{1}\overset{x}{\alpha} - \overset{x}{\alpha}\overset{x-n}{1} = -F - \overset{x}{F}\overset{x}{\alpha},$$

ko atklāti izteic kā i n t e g r o d i f e r e n c i ā l o v i e n ā d o j u m u

$$(9)\qquad \frac{\partial^n \alpha}{\partial x^n} - (-1)^n \frac{\partial^n \alpha}{\partial y^n} = -F(x,y) - \int_y^x F(x,s)\,\alpha(s,y)\,ds.$$

Tamlīdzīgā kārtā no (1) pēc kompozīcijas pa k r e i s i ar $\overset{x_0}{1}+\beta$ un izteiksmes (7') ievietošanas dabū pēc pārveidojumiem vienādojumu

$$\overset{x}{\beta}\overset{x_n}{1} - \overset{x_n}{1}\overset{x}{\beta} = \overset{x_n}{1}(\overset{x}{F}+\overset{x}{\beta}\overset{x}{F})\overset{x_n}{1},$$

kas ekvivalents ar simboliskās formas vienādojumu

$$\overset{x-n}{1}\overset{x}{\beta} - \overset{x}{\beta}\overset{x-n}{1} = F + \overset{x}{\beta}\overset{x}{F}$$

jeb integrodiferenciālo vienādojumu

$$(9')\qquad \frac{\partial^n \beta}{\partial x^n} - (-1)^n \frac{\partial^n \beta}{\partial y^n} = F(x,y) + \int_y^x \beta(x,s)\,F(s,y)\,ds.$$

Lai noteiktu Volterra transformācijai (2) veidotājas funkciju (3), pietiek atrisināt vienu no sastādītiem integrodiferenciāliem vienādojumiem, piem. (9). No sakariem (8) tad var atrast otru funkciju

$$\beta(x,y) = -\alpha(x,y) + \overset{x}{\alpha}{}^2 - \overset{x}{\alpha}{}^3 + \dots$$

Vienādojumi (9) un (9') vispārina tos, ko sastādījis J.Pérès[22] pirmās kārtas funkcijas $f(x,y)$ gadījumā. Pēdējā gadījumā, kad $n=1$, vienā-

---

22) Volterra-Pérès monografija /28, lpp. 72 un 75/.

dojums (9) top par

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\alpha}{\partial y} = -F(x,y) - \int_y^x F(x,s)\,\alpha(s,y)\,ds,$$

kas identisks ar iepriekšējā §-fā atrisināto integrodiferenciālo vienādojumu (23), ja

$$g(x,y) = -F(x,y).$$

Lietojot $\alpha(x,y)$ un $\beta(x,y)$ nozīmes, kas apmierina vienādojumus (9) un (9'), meklēsim ar doto n. kārtas funkciju (1) permutablās funkcijas $\varphi(x,y)$, izteiktas Pérès transformāciju formā

(10) $$\varphi(x,y) = \Omega(\lambda) = (\overset{x}{1}{}^{0} + \overset{x}{\alpha})\,\overset{x}{\lambda}\,(\overset{x}{1}{}^{0} + \overset{x}{\beta}).$$

Funkciju permutabilitātei

$$\overset{x}{f}\overset{x}{\varphi} = \overset{x}{\varphi}\overset{x}{f}$$

ir nepieciešams un pietiekošs nosacījums

$$\overset{x}{\lambda}\,\overset{x}{1}{}^{n} = \overset{x}{1}{}^{n}\,\overset{x}{\lambda}.$$

Tā kā ar vienādības kompozīcijas pakāpē $\overset{x}{1}{}^{n}$ permutablās funkcijas pieder noslēgtā cikla grupai (§ 5), tad atrastais nosacījums rāda, ka

$$\lambda(x,y) = \lambda(x-y).$$

Tā tad, ja izvēlas patvaļīgu noslēgta cikla grupas funkciju $\lambda(x-y)$ formulā (10), tad dabū visas funkcijas, kas permutablas ar n. kārtas un kanoniskās formas funkciju (4).

Ievērojot noslēgtā cikla grupas funkciju savstarpējo permutabilitāti un Pérès transformāciju izomorfismu (§ 9), secina permutablo funkciju (10) svarīgu grupu īpašību: funkcijas, kas permutablas ar n. kārtas un kanoniskās formas funkciju (4), ir savā starpā permutablas.

2. Vispārinot metodi, ko J. Pérès[23] lieto pirmās kārtas funkcijai, meklēsim transformācijas (2) veidotājas funkcijas $\phi(\xi;x,y)$ izteiksmē (§ 9)

(11) $$\phi(\xi;x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\xi}d\eta_1\int_0^{\eta_1}d\eta_2\cdots\int_0^{\eta_{n-1}}d\eta_n\,\overset{x}{g}_{\eta_1}\overset{x}{g}_{\eta_2}\cdots\overset{x}{g}_{\eta_n}(x-\xi,y)$$

---

23) J. Pérès /13/ un Volterra-Pérès /28, lpp. 65/.

nezināmo funkciju $g(x,y)$. Ir ērtāki lietot funkcijas $\phi(\xi;x,y)$ integrālvienādojumu

(12) $$\phi(\xi;x,y) = \int_0^{\xi} g(x-\xi+\eta,\, y+\eta)\,d\eta + \int_0^{\xi} d\eta \int_y^{x-\xi} g(x-\xi+\eta,\, s+\eta)\,\phi(\eta;\, s+\eta,\, y)\,ds$$

un izteikt funkciju (2) formā

(13) $$f(x,y) = \overset{x}{1}{}^{n} + K_n(x,y)$$

ar ievesto funkciju

(14) $$K_n(x,y) = \int_0^{x-y} \frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!}\,\phi(\xi;x,y)\,d\xi .$$

Ievietojot pēdējā formulā $\phi(\xi;x,y)$ izteiksmi no (12), dabū formulu

$$K_n(x,y) = J_1 + J_2,$$

ja apzīmē

$$J_1 = \int_0^{x-y} \frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!}\,d\xi \int_0^{\xi} g(x-\xi+\eta,\, y+\eta)\,d\eta$$

un

$$J_2 = \int_0^{x-y} \frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!}\,d\xi \int_0^{\xi} d\eta \int_y^{x-\xi} g(x-\xi+\eta,\, s+\eta)\,\phi(\eta;\, s+\eta,\, y)\,ds .$$

Pārveidosim, piem., pirmo izteiksmi J_1, apmainot vispirms integrācijas kārtību:

$$J_1 = \int_0^{x-y} d\eta \int_{\eta}^{x-y} \frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!}\, g(x-\xi+\eta,\, y+\eta)\,d\xi$$

Pēc tam ar sekojošām substitūcijām

$$x-\xi+\eta = s, \qquad y+\eta = t$$

dabū

$$J_1 = \int_y^{x} dt \int_t^{x} g(s,t)\,\frac{(x-s+t-y)^{n-1}}{(n-1)!}\,ds .$$

Ja te pēc binoma formulas izteic

$$\frac{(x-s+t-y)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(x-s)^{n-2}}{(n-2)!}(t-y) + \dots + \frac{(t-y)^{n-1}}{(n-1)!}$$

un ieved vienības kompozīcijas pakāpes, tad atrod:

$$J_1 = \overset{x}{1}{}^{n}\, g\, \overset{x}{1} + \overset{x}{1}{}^{n-1}\, g\, \overset{x}{1}{}^{2} + \dots + \overset{x}{1}\, g\, \overset{x}{1}{}^{n} .$$

Ar tamlīdzīgiem pārveidojumiem dabū

$$J_2 = \overset{x}{1}{}^{n}\overset{x}{g}\overset{x}{K}_1 + \overset{x}{1}{}^{n-1}\overset{x}{g}\overset{x}{K}_2 + \dots + \overset{x}{1}\overset{x}{g}\overset{x}{K}_n,$$

ja apzīmē

$$K_p(x,y) = \int_0^{x-y} \frac{\xi^{p-1}}{(p-1)!}\,\phi(\xi;x,y)\,d\xi \quad (p = 1,2,3,\dots,n).$$

Tā tad pēc formulas (13) atrod sakaru

$$f = \overset{x}{1}{}^{n} + \overset{x}{1}{}^{n}\overset{x}{g}(\overset{x}{1} + \overset{x}{K}_1) + \overset{x}{1}{}^{n-1}\overset{x}{g}(\overset{x}{1}{}^{2} + \overset{x}{K}_2) + \dots + \overset{x}{1}\overset{x}{g}(\overset{x}{1}{}^{n} + \overset{x}{K}_n)$$

jeb

(15) $$f_n = \overset{x}{1}{}^{n} + \overset{x}{1}{}^{n}\overset{x}{g}\overset{x}{f}_1 + \overset{x}{1}{}^{n-1}\overset{x}{g}\overset{x}{f}_2 + \dots + \overset{x}{1}\overset{x}{g}\overset{x}{f}_n,$$

ja apzīmē

(16) $$f_p(x,y) = \overset{x}{1}{}^{p} + K_p(x,y) = \frac{(x-y)^{p-1}}{(p-1)!} + \int_0^{x-y}\frac{\xi^{p-1}}{(p-1)!}\,\phi(\xi;x,y)\,d\xi \quad (p=1,2,\dots,n)$$

un pieņem simmetrijas dēļ

$$f_n(x,y) = f(x,y).$$

Tā kā var izteikt ar Pérès transformācijām

$$f_1(x,y) = \Omega(\overset{x}{1}),\quad f_2(x,y) = \Omega(\overset{x}{1}{}^{2}),\ \dots,\ f_n(x,y) = \Omega(\overset{x}{1}{}^{n}),$$

tad der sakari

$$f_2(x,y) = \overset{x}{f}_1{}^{2},\ \dots,\ f_n(x,y) = \overset{x}{f}_1{}^{n}.$$

Tā tad formula (15) galīgi dod sekojošu sakaru

(17) $$\overset{x}{1}{}^{n}\overset{x}{g}\overset{x}{f}_1 + \overset{x}{1}{}^{n-1}\overset{x}{g}\overset{x}{f}_1{}^{2} + \dots + \overset{x}{1}\overset{x}{g}\overset{x}{f}_1{}^{n} = \overset{x}{f}_1{}^{n} - \overset{x}{1}{}^{n},$$

kas saista nezināmo funkciju $g(x,y)$ un

(18) $$f_1(x,y) = \Omega(\overset{x}{1}) = 1 + \int_0^{x-y}\phi(\xi;x,y)\,d\xi$$

Tā kā

$$\overset{x}{f}_1{}^{n} = f(x,y),$$

tad funkcija (18) ir *kompozīcijas binomālā integrālvienādojuma*

(19) $$\overset{x}{\psi}{}^{n} = f(x,y)$$

atrisinājums, kam diagonāle

$$\psi(x,x) = f_1(x,x) = 1.$$

Tā tad permutablo funkciju noteikšana n. kārtas un kanoniskās formas funkcijai $f(x,y)$ pēc lietotās metodes reducējas vispārīgajā gadījumā uz kompozīcijas binomāla integrālvienādojuma (19) un īpatnējā integrālvienādojuma (17) atrisināšanu.

Speciālajā gadījumā, kad $f(x,y)$ ir pirmās kārtas $(n=1)$ un kanoniskās formas funkcija, ir jāatrisina vienīgi integrālvienādojums

$$\overset{x}{1}\overset{x}{g}\overset{x}{f} = f - 1,$$

kas pēc funkcijas $f(x,y)$ izteiksmes

$$f(x,y) = 1 - \overset{x}{1}\overset{x}{H}\overset{x}{1} \qquad \left(H = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)$$

substitūcijas un pārveidojumiem top par

$$\overset{x}{1}\overset{x}{g}\left(\overset{x}{1}{}^{0} - \overset{x}{1}\overset{x}{H}\right)\overset{x}{1} = -\overset{x}{1}\overset{x}{H}\overset{x}{1}.$$

Pēdējo vienādojumu ar atvasināšanu pēc x un y reducē formā

$$\overset{x}{g}\left(\overset{x}{1}{}^{0} - \overset{x}{1}\overset{x}{H}\right) = -H,$$

no kuŗas galīgi izteic

$$g(x,y) = -\overset{x}{H}\left(\overset{x}{1}{}^{0} - \overset{x}{1}\overset{x}{H}\right)^{-1} = -\left[H(x,y) + \overset{x}{H}\overset{x}{1}\overset{x}{H} + \overset{x}{H}\overset{x}{1}\overset{x}{H}\overset{x}{1}\overset{x}{H} + \cdots\right].$$

Salīdzinot ar funkcijas (6) attīstījumu, konstatē, ka

$$g(x,y) = -F(x,y).$$

Tā tad visas funkcijas, kas permutablas ar doto pirmās kārtas un kanoniskās formas funkciju $f(x,y)$, aprēķina ar Pérès transformācijām

(20) $$\varphi(x,y) = \Omega(\lambda) = \lambda(x-y) + \int_0^{x-y} \lambda(\xi)\, \phi(\xi; x,y)\, d\xi,$$

kuŗu veidotājas funkciju aprēķina ar

(21) $$\phi(\xi; x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\xi} d\eta_1 \int_0^{\eta_1} d\eta_2 \cdots \int_0^{\eta_{n-1}} d\eta_n\, \overset{x}{F}_{\eta_1} \overset{x}{F}_{\eta_2} \cdots \overset{x}{F}_{\eta_n} (x-\xi, y),$$

j a a p z ī m ē

$$F(x,y) = H(x,y) + \overset{x}{H}\overset{x}{1}\overset{x}{H} + \overset{x}{H}\overset{x}{1}\overset{x}{H}\overset{x}{1}\overset{x}{H} + \ldots \quad \left(H = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)$$

u n

$$F_\eta(x,y) = F(x+\eta,\ y+\eta).$$

3. Kompozīcijas binomālā integrālvienādojuma (19) atrisinājumu

$$\psi(x,y) = f^{\overset{x}{\frac{1}{n}}}$$

sauc par k o m p o z ī c i j a s   p a k ā p i   a r   d a ļ u   k ā p i n ā t ā j u $\frac{1}{n}$. Ja $f(x,y)$ ir n. kārtas funkcija, tad $\psi = f^{\overset{x}{\frac{1}{n}}}$ ir pirmās kārtas funkcija (§ 2).

Integrālvienādojumu (19) var atrisināt vienmēr tad, kad dotā funkcija $f(x,y)$ ir attēlota ar Pérès transformāciju

$$(1) \qquad f(x,y) = \Omega(\overset{x}{1}{}^{n}) = (\overset{x}{1}{}^{0} + \overset{x}{\alpha})\,\overset{x}{1}{}^{n}(\overset{x}{1}{}^{0} + \overset{x}{\beta})$$

vai

$$(2) \qquad f(x,y) = \overset{x}{1}{}^{n} + \int_0^{x-y} \frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!}\,\phi(\xi; x,y)\,d\xi,$$

piemēram, kad $f(x,y)$ ir formā (4). Izlietojot Pérès transformāciju īpašības un vienības n. sakni ε jeb algebriskā binomālā vienādojuma

$$\varepsilon^n = 1$$

atrisinājumu, atrod integrālvienādojuma (19) atrisinājumus

$$(22) \qquad \psi(x,y) = f^{\overset{x}{\frac{1}{n}}} = \varepsilon\,\Omega(\overset{x}{1}),$$

kur speciālais atrisinājums

$$\Omega(\overset{x}{1}) = (\overset{x}{1}{}^{0} + \overset{x}{\alpha})\,\overset{x}{1}\,(\overset{x}{1}{}^{0} + \overset{x}{\beta})$$

jeb

$$\Omega(\overset{x}{1}) = 1 + \int_0^{x-y} \phi(\xi; x,y)\,d\xi$$

ir izteikts ar formulas (1), resp. (2) funkcijām $\alpha, \beta;\ \phi(\xi; x,y)$.

Saknes ε dažādām n nozīmēm atbilst integrālvienādojuma (19) n dažādi atrisinājumi, resp. kompozīcijas pakāpes $f^{\overset{x}{\frac{1}{n}}}$ dažādas n nozīmes. Funkcijas (22) diagonāle ir konstanta un vienlīdzīga ar ε :

$$\psi(x,x) = \varepsilon.$$

Volterra[24] ir uzstādījis jautājumu: vai funkcijas, kas ir permutablas ar doto funkciju $f(x,y)$, ir arī permutablas ar tās kompozīcijas pakāpi $f^{\frac{1}{n}}$? Gadījumā, kad funkcijas $f(x,y)$ forma ir (4), no formulas (22) secina, ka minētajam jautājumam ir pozitīva atbilde.

--+o+--

---

24) Volterra /29/. Šo jautājumu esmu diskutējis arī savā darbā /8, § 3/.

SUR LE PROBLÈME FONDAMENTAL DE LA THÉORIE DES FONCTIONS PERMUTABLES.

(Résumé)

Dans l'Introduction je donne un aperçu court sur le développement de la théorie de composition et de fonctions permutables de première espèce, et j'annonce mes résultats nouveaux exposés dans ce travail. Comme il s'agit ici toujours de la composition et des fonctions permutables de première espèce, ces notions sont nommées plus brèvement: la c o m p o s i t i o n et les f o n c t i o n s p e r m u t a b l e s.

Ce travail est une extension considérable de ma Note /9/ +) et de mon Mémoire /10/ sur la recherche des fonctions permutables.

Dans la suite les fonctions envisagées de deux variables x et y seront supposées continues dans un domaine tel que

$$(A) \qquad a \leq y \leq x \leq b,$$

et ces fonctions admettent les dérivées partielles, continues dans le domaine (A) jusqu'à l'ordre déterminé. Puisque ce domaine diffère de celui-ci, pris dans mes publications /9/ et /10/ et dans les travaux fondamentaux de M.M. V o l t e r r a et P é r è s , il faut modifier convenablement toutes les formules employées.

§§ 1 et 2.

Dans ces premiers paragraphes ++) je rappelle les notions et les propriétés fondamentales, de la composition et des fonctions permutables, nécessaires pour la suite.

+) Ici et plus bas les numéros, figurant entre crochets, renvoient à l'Index bibliographique, placé à fin du travail.

++) Les numéros des formules et des citations renvoient au texte en langue lettonne.

§ 3.

Ce paragraphe est consacré à l'établissement des formules explicites des transformations qui mettent une fonction du premier ordre (n° 1) et en général d'ordre n entier positif (n° 4) sous forme canonique.

Le cas d'une fonction $f(x,y)$ du premier ordre est illustré par un exemple (11), auquel correspond la forme canonique (12) avec la relation (13). Cet exemple renferme, comme cas particulier, la fonction linéaire (11').

Pour établir les formules générales (19), (20) et (21) des transformations j'ai donné un lemme (n° 4, formule (14)) sur la dérivation d'une fonction composée.

§ 4.

Dans ce paragraphe la détermination du symbole $\overset{x}{f}{}^{-1}$ d'inversion de la composition est faite comme dans mes publications /9/ et /10/. Ce symbole donne (n° 1) la solution formelle des équations intégrales a s s o c i é e s (ou adjointes) (1) et (2) par les formules (3) et (4).

Dans le c a s p a r t i c u l i e r (n° 2) où $f = \overset{x}{1}{}^{n}$ on a respectivement les formules fondamentales (9) ou (13) de composition à gauche ou à droite avec $\overset{x}{1}{}^{-n}$, lorsque la fonction $\psi(x,y)$ est d'ordre supérieur à n ou d'ordre n, et du type canonique.

Dans le c a s g é n é r a l (n° 3) d'une fonction $f(x,y)$ d'ordre entier positif n le symbole $\overset{x}{f}{}^{-1}$ peut être regardé comme une fonction d'ordre singulière $(-n)$ au sens de M. P é r è s [5]. L'expression générale de telles fonctions est (14) ou (14') avec les fonctions $F_1(x,y)$ et $F_2(x,y)$ d'ordre positif, et les autres termes, représentant le produit et n o n la composition des fonctions $a_0(x), \dots, a_n(x); b_0(y), \dots, b_n(y)$ par

$$\overset{x}{1}{}^{-n}, \dots, \overset{x}{1}{}^{0}.$$

En supposant la fonction donnée $f(x,y)$ sous forme canonique (16) et dérivable jusqu'à l'ordre $2n$, je donne le procédé suivant pour déterminer les fonctions employées dans les expressions (14) et (14'). Par la substitution de l'expression (14) dans la relation $f^{-1}f = 1^{0}$ on tire, en vertu des conditions (16),

$$a_0(x) \equiv 1, \quad a_1(x) \equiv 0.$$

En dérivant successivement tous les membres de la relation obtenue (15) par rapport à y et en posant $y = x$ on détermine les fonctions suivantes $a_2(x), \ldots, a_n(x)$ par emploi des dérivées partielles de $f(x,y)$ jusqu'à l'ordre $2n-1$ où l'on a $y = x$. De la relation (15) on forme l'équation intégrale (17) avec la fonction (18) d'où immédiatement la représentation de la fonction $F_1(x,y)$ par la série (19) qui converge absolument et uniformément dans le domaine (A).

De la même façon, en partant de la relation $\overset{x}{f}\overset{x}{f}^{-1} = \overset{x}{1}^{0}$ et de l'expression (14') on obtient les valeurs de

$$b_0(y) \equiv 1, \; b_1(y) \equiv 0, \; b_2(y), \ldots, \; b_n(y)$$

et la fonction $F_2(x,y)$, celle-ci étant représentée par la série (19') où $H_2(x,y)$ désigne la fonction (18')

À la fin du paragraphe (n^0 4) est examiné le c a s p a r t i c u l i e r où

$$a_i(x) \equiv 0, \quad b_i(y) \equiv 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Il a lieu pour une fonction $f(x,y)$ qui peut être mise sous forme (22) où $\omega(x,y)$ est une fonction continue, dérivable jusqu'à l'ordre $2n$. Dans ce cas-là les fonctions (18) et (18') sont identiques à la fonction (23), et de même les fonctions (19) et (19') à la fonction (24). Donc on obtient l'expression (25) commune du symbole f^{-1} qui généralise celle que M. P é r è s [6] a établie pour la fonction du premier ordre. On peut trouver la relation (27), utile pour la suite (§ 10), entre la fonction donnée (22) et la fonction (24).

Les expressions obtenues du symbole f^{-1} seront employées dans le <u>Chapitre</u> suivant pour discuter d'après une nouvelle méthode le <u>problème</u>

<u>fondamental</u>: trouver et étudier toutes les fonctions $\varphi(x,y)$ permutables avec une fonction donnée $f(x,y)$.

§ 5.

À l'origine du paragraphe (n^o 1) je forme les équations symboliques (4) et (5) du problème fondamental, en introduisant d'après un artifice, dû à M. Volterra, la fonction inconnue auxiliaire (2).

Après avoir déterminé (n^{os} 2 et 3) les fonctions permutables avec l'unité ou en général avec 1^{*n}, et après avoir constaté leur propriété du groupe, je pose (n^{os} 4 et 5) le problème suivant: À déterminer toutes les fonctions $f(x,y)$ de premier ou, en général, d'ordre n qui se réduisent respectivement sous la forme canonique à l'unité ou à 1^{*n}. En employant les formules de transformations (§ 3) il est facile de démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour telles fonctions est (13) dans le cas d'une fonction du premier ordre et (22) avec (23) dans le cas général.

Parce que ces transformations conservent la composition et les fonctions permutables avec l'unité (ou avec 1^{*n}) forment le groupe du cycle fermé, on obtient par la formule (18), où θ est arbitraire, toutes les fonctions permutables avec (13) ou (22). Il est facile de vérifier que les fonctions (18) sont permutables entre elles.

§ 6.

Tout d'abord (n^o 1) le problème fondamental dans le cas d'une fonction $f(x,y)$ du premier ordre et de forme canonique (1) est réduit à la résolution de l'équation intégro-différentielle (9'), jointe à la condition (10). D'après la méthode de M. Volterra [10] on forme par le changement des variables (12) l'équation intégrale

(14) (où θ est une fonction arbitraire telle que $\theta(0)=0$) est équivalente à l'équation précédente. Dans la formule (14) et dans les suivantes je donne une explication différente des ouvrages cités[10], en employant toujours l'intégrale définie entre les limites v_0 et v.

Après avoir démontré (n° 3) le théorème d'unicité pour la solution de l'équation intégrale, (14), je rattache (n° 4) le problème fondamental à la résolution de l'autre équation intégrale (18) qui caractérise la fonction $K(\xi; x, y)$, introduite par (17). La résolution effective de l'équation (18) est faite par la méthode des approximations successives: on obtient la solution (d'ailleurs unique) par la série (19) qui converge absolument et uniformément dans un domaine tel que

$$(A') \qquad a \le y \le x \le b, \qquad 0 \le \xi \le x-y.$$

Par la substitution (17) dans la formule (7) /ou (7')/ on trouve toutes les fonctions permutables $\varphi(x,y)$, représentées par la formule (22), due à M. V o l t e r r a , en désignant par $\lambda(x-y)$ une fonction arbitraire du groupe du cycle fermé et en formant le noyau (ou la fonction génératrice) $\phi(\xi; x, y)$ à partir de $K(\xi; x, y)$ et de $f(x,y)$ par les formules (23) et (4).

Ensuite (n^{os} 5 - 7) je rappelle les propriétés, basées sur la formule (22), des fonctions $\varphi(x,y)$ permutables avec $f(x,y)$. Je donne (n° 5) une généralisation suivante: i l e x i s t e u n e f o n c t i o n p e r m u t a b l e $\varphi(x,y)$ e t u n e s e u - l e q u i p r e n d , p o u r $y=a$ (c. à. d. sur un côté du triangle (A)) d e s v a l e u r s a s s i g n é e s d ' a v a n c e . La formule (22) peut être remplacée par (26) où la fonction $L(\xi; x, y)$ est formée par (25) à partir du noyau $\phi(\xi, x, y)$ et de la résolvante $\Gamma(\xi; x)$ d'une équation intégrale de Volterra.

En particulier, si la fonction $\varphi(x,y)$ s'annule pour $y=\alpha$, elle est nul idéntiquement dans tout le domaine d'existence (A).

Dans le n° 6 sont aussi rappellés les résultats principaux, dus à M. P é r è s[13] sur les fonctions permutables analytiques.

A la fin du paragraphe (n° 8) je forme les équations fonctionnelles diverses qui caractérisent les fonctions employées $K(\xi; x, y)$ et

$\phi(\xi; x, y)$. De la condition de permutabilité

$$\overset{*}{\varphi}\overset{*}{f} = \overset{*}{f}\overset{*}{\varphi} \quad \text{ou} \quad \overset{*}{\psi}\overset{*}{f} = \overset{*}{f}\overset{*}{\psi}$$

on obtient l'équation fonctionnelle (33) ou (35). En partant des équations intégro-différentielles (9) et (37) on trouve les équations intégro-différentielles nouvelles (36) et (38). De la permutabilité mutuelle des fonctions $\psi(x,y)$ ou $\varphi(x,y)$ on forme les équations fonctionnelles (39) ou (40)[16].

§ 7.

En complétant les indications générales, dues à M. Volterra[17], et en généralisant la méthode du paragraphe précédent je donne dans ce paragraphe-ci la résolution complète du problème fondamental dans le cas d'une fonction $f(x,y)$ donnée du second ordre.

Tout d'abord (n^{os} 1 - 6) est examiné le cas particulier où $f(x,y)$ est du type spécial (6). Par emploi de l'expression (7) avec (8), on forme dans ce cas l'équation intégro-différentielle fondamentale (11), jointe aux conditions (12). Par le changement des variables (15) l'équation précédente se réduit à l'équation intégrale équivalente (21) où $\theta(u)$ est une fonction arbitraire, vérifiant les conditions (19). L'unicité de la solution de (21) est démontrée (n° 3) par la méthode analogue à celle qu'on emploie dans la théorie des équations intégrales linéaires de Volterra.

En mettant les fonctions $\theta(u)$ et $\psi(x,y)$ sous forme (24) et (25) on déduit (n° 4) de l'équation intégrale (21) une autre équation intégrale (26) qui caractérise la fonction $K(\xi; x, y)$. Pour résoudre l'équation précédente on emploie la méthode des approximations successives. La convergence de la série (27) est assurée par les inégalités (30) où les fonctions $K_n(\xi; x, y)$ sont données par les formules (28) et (29) de recurrence.

En vertu des valeurs (31), (32) et des relations (9), (25) on obtient les fonctions permutables $\varphi(x,y)$ sous la forme (34) où la fonction $\Psi(\xi; x, y)$ est donnée par (35). Finalement on peut mettre les fonctions permutables $\varphi(x,y)$ sous forme (36), due à M. V o l t e r r a dans le cas d'une fonction donnée du premier ordre, en introduisant les nouvelles fonctions $\lambda(x-y)$ et $\phi(s;x,y)$ par (37) et (38).

Donc toutes les propriétés, qui sont basées sur la formule (36), sont les mêmes que pour les fonctions permutables avec une fonction donnée du premier ordre (§ 6, n^{os} 5 - 7). Aussi les équations fonctionnelles /§ 6, form. (33) et (35)/ qui caractérisent les fonctions $K(s;x,y)$ et $\phi(s;x,y)$ sont les mêmes; mais les équations intégro - différentielles correspondantes se généralisent ici en (39) et (40).

Dans le c a s g é n é r a l d'une fonction quelconque $f(x,y)$ du second ordre et du type canonique en forme (n° 7), par emploi des expressions générales (2) et (2') du symbole f^{x-1}, l'équation intégro - différentielle (42) du problème. Celle-ci, jointe aux conditions (12), est équivalente à l'équation intégrale (43) qui généralise (21). On obtient, comme dans le cas particulier, l'équation (44) qui caractérise la fonction $K(s;x,y)$ et qui généralise l'équation (26). Par la même méthode des approximations successives on pourrait déterminer la solution unique, exprimée par la série (45) convergente. On retombe à la même forme (50) des fonctions permutables $\varphi(x,y)$, en prenant les expressions (49) et (51) les fonctions $\Psi(s;x,y)$ et $\phi(s;x,y)$.

Donc les propriétés mentionnées des fonctions permutables $\varphi(x,y)$ sont valables aussi dans le cas général. La fin du paragraphe (n° 8) est consacrée à l'étude d'un c a s p a r t i c u l i e r où la fonction $f(x,y)$ est du groupe du cycle fermé. Dans ce cas les fonctions (3) se réduisent à constantes, et on a les identités (52) et (53). En vertu de cela, on constate facilment que dans ce cas les fonctions permutables $\varphi(x,y)$ appartiennent aussi au groupe du cycle fermé.

§ 8.

À l'origine de ce paragraphe (n° 1) est établie l'équation intégro - différentielle (9) du problème fondamental dans le cas d'une fonction donnée $f(x,y)$ d'ordre entier positif n et de forme canonique, en employant les expressions générales (2) et (2') du symbole f^{x-1}. Pour la fonction du type spécial (11) on a l'équation correspondante (14) plus simple. En vertu des conditions (10), il faut donc résoudre le problème de Cauchy pour les équations intégro - différentielles (9) ou (14). En désignant $g(x,y)$ le second membre des équations (9) ou (14) on peut remplacer ces équations par des équations intégrales équivalentes, si l'on peut résoudre le problème de Cauchy pour les équations différentielles (9') ou (14') et les conditions aux limites (10).

Au contraire, par le procédé employé par M. Pérès[19] on serait ramené à une nouvelle équation intégro - différentielle. Les difficultés du problème dans le cas général $n>2$ proviennent de ce que les équations différentielles (9') et (14') ont des caractéristiques imaginaires. C'est pourquoi M. Pérès a traité le problème pour des fonctions permutables analytiques.

Je remarque (n^0 2) que les équations intégro - différentielles (9) ou (14) où la fonction $\psi(x,y)$ est remplacée par $\varphi(x,y)$ caractérisent aussi les fonctions $\varphi(x,y)$ permutables avec $f(x,y)$. À la fin de paragraphe (n^0 3) on examine le cas où $f(x,y)$ est une fonction du groupe du cycle fermé. On a dans ce cas les constantes égales:

$$a_2 = b_2, \ldots, \quad a_n = b_n,$$

et évidemment l'équation intégro - différentielle correspondante (15) admet la solution

$$\psi(x,y) = \psi(x-y).$$

En vertu de la relation (7) entre les fonctions $\psi(x,y)$ et $\varphi(x,y)$ on conclut aisément que les fonctions $\varphi(x,y)$ permutables avec $f(x-y)$ appartiennent aussi au groupe du cycle fermé.

§ 9.

Dans ce paragraphe j'expose, avec des compléments faciles, les résultats dus à M. Pérès[20] sur les transformations $\Omega(\lambda)$ qui conservent la composition (transformations de

M. P é r è s), en modifiant le domaine d'existence de la fonction génératrice (ou noyau) $\phi(\xi;x,y)$ en

$$(A') \qquad a \leq y \leq x \leq b, \qquad 0 \leq \xi \leq x-y.$$

Pour ce domaine on établit à partir de la condition (6) l ' é q u a t i o n f o n c t i o n n e l l e (7) qui caractérise la fonction $\phi(\xi;x,y)$. La solution g é n é r a l e de (7) est donnée par la formule (11) où les fonctions $\alpha(x,y)$ et $\beta(x,y)$ sont liées par les relations (10) ou (10'), l'une de cettes fonctions étant a r b i t r a i r e . On a la forme générale (12) des transformations de M. P é r è s .

On peut mettre (n° 4) celles-ci sous forme (12) d'une infinité de manières: si dans une telle transformation α_0 et β_0 font une paire des fonctions, vérifiant les relations de la forme (10), on obtient toutes les représentations par les formules (13) et (13') où les fonctions $\gamma(x-y)$ et $\delta(x-y)$ du groupe du cycle fermé sont liées par les relations (14), l'une de cettes fonctions étant arbitraire.

Je rappelle (n° 5) pour le domaine (A') la s e c o n d e m é t h o d e due à M. P é r è s [21] pour la résolution de l'équation (7). Par l'introduction d'une fonction auxiliaire (15) on forme une équation intégro - différentielle (17) et une équation intégrale (18) équivalente à la précédente. Après avoir démontré le théorème d'unicité et d'existence de la solution par la méthode des approximations successives on obtient la solution de (7) sous forme (20) où $g(x,y)$ est une fonction arbitraire.

À la fin (n° 6) est étudiée la relation (23) qui existe entre les deux fonctions $\alpha(x,y)$ et $g(x,y)$ employées dans les deux méthodes de résolution précédentes.

§ 10.

Dans ce paragraphe je donne les généralisations au cas d'une fonction $f(x,y)$ d'ordre entier positif n , des résultats que M. P é r è s [22] a exposés pour le problème fondamental dans le cas d'une fonction du premier ordre.

Pour résoudre le problème fondamental dans le cas général d'une fonction $f(x,y)$ d'ordre n et du type canonique il suffit de mettre $f(x,y)$ sous forme d'une transformation (1) ou (2) de M. P é r è s .

Dans le n° 1 j'établie pour le t y p e s p é c i a l (4) les équations intégro - différentielles (9) et (9') qui sont vérifiées par les fonctions cherchées $\alpha(x,y)$ et $\beta(x,y)$ figurant dans la formule (1). Si l'on a résolu, par exemple, l'équation (9) on peut former directement $\beta(x,y)$ par emploi des relations (8) et la fonction génératrice $\phi(s,x,y)$ au moyen de l'expression (3).

Pour que la fonction (10) soit permutable avec (1) il est nécessaire et suffisant que $\lambda(x,y)$ soit permutable avec 1^{*n}. Donc $\lambda(x,y) = \lambda(x-y)$ doit être choisie du groupe du cycle formé pour former toutes les fonctions permutables $\varphi(x,y)$.

Par la représentation (10) on établie très facilment le <u>théorème général</u> sur la propriété du groupe: l e s f o n c t i o n s $\varphi(x,y)$ p e r m u t a b l e s a v e c u n e f o n c t i o n $f(x,y)$ d ' o r d r e n e t d u t y p e (4) s o n t p e r m u t a b l e s e n t r e e l l e s .

Pour le cas $n = 1$ ce théorème est énoncé pour la première fois par M. V e s s i o t [14].

Dans le n° 2 je donne la généralisation, en cas d'une fonction $f(x,y)$, d'ordre n et de forme canonique quelconque, suivant une autre méthode, due à M. P é r è s [23] pour la fonction du premier ordre. Pour determiner la fonction $g(x,y)$ dans l'expression (11) il est préférable d'employer l'équation intégrale (12). En mettant la fonction $f(x,y)$ donnée sous forme (13) avec (14) et en appliquant la substitution (12) on établit, après quelques transformations, la relation (15) avec (16). Il en résulte la relation (17) qui lie seulement deux fonctions $g(x,y)$ et $f_1(x,y)$, cette dernière étant donnée par (18).

Il est évident que la fonction (18) est une solution particulière (avec la diagonale égale à l'unité) de l'équation intégrale binome (19) de composition. La relation (17) par rapport à l'inconnue $g(x,y)$ est une équation intégrale du type spécial.

Donc, d a n s l e c a s g é n é r a l d ' u n e fonction d'ordre $n>1$ et de forme canonique, le problème fondamental d'après la méthode précédente se réduit à la résolution de l'équation intégrale binome (19) de composition et d'une autre équation intégrale du type spécial (17).

Dans le cas $n = 1$ on a seulement besoin de résoudre l'équation (17) d'où l'on obtient

$$g(x,y) = -F(x,y),$$

la fonction $F(x,y)$ étant définie par la série (6).

À la fin du paragraphe (n° 3) je donne la solution de l'équation intégrale binome (19) de composition par emploi des transformations de M. Pérès.

Toutes les fois qu'on a la représentation (1) ou (2), par exemple, pour la fonction $f(x,y)$ du type spécial (4), la solution de (19) est donnée par (22) où ε désigne la racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité.

M. Volterra[24] a posé la question suivante: Les fonctions permutables avec une fonction donnée $\underset{x}{f}(x,y)$, sont elles aussi permutables avec la puissance fractionnaire $f^{\frac{1}{n}}$ de composition? Il est évident que dans le cas mentionné précédemment la réponse doit être affirmative.

---+0+---

LITERĀTŪRAS SARAKSTS. - INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

1. Bompiani (E.) - Sopra le funzioni permutabili. (Rend.Ac.Lincei, vol. XIX, ser. 5ª, 1910).
2. Davis (H.T.) - The present status of integral equations. (Indiana Univ. Stud., n° 70, 1926).
3. Evans (G.C.) - Sopra algebra delle funzioni permutabili. (Mem.Ac.Lincei, vol. VIII, serie 5ª, 1911).
4. Evans (G.C.) - L'algebra delle funzioni permutabili e non permutabili. (Rend. Circ. Mat. Palermo, vol.XXXIV, 1912).
5. Evans (G.C.) - Theory and application of functionals, including integral equations. (Amer. Math. Soc., Cambridge Colloqium, 1918).
6. Hellinger (E.) Toeplitz (O.) - Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten. (Enzykl. der Math. Wiss.; Bd. II C 13).
7. Lalesco (T.) - Introduction à la théorie des équations intégrales. (Paris, 1912).
8. Lūsis (A.) - Permutablas funkcijas un Volterra integrālvienādojums (Sur les fonctions permutables et l'équation intégrale de Volterra, Acta Univ. Latviensis, t. XVII, 1927).
9. Lūsis (A.) - Sur la recherche des fonctions permutables de 1ière espèce avec une fonction donnée. (Rend.Ac. Lincei, vol. XI, serie 6ª, 1930).
10. Lūsis (A.) - Sur la recherche des fonctions permutables de première espèce. (Annales Fac. Sc. Toulouse, t. XXII, 1930).
11. Pérès (J.) - Sur les fonctions permutables de première espèce de M. Vito Volterra. (Thèse, Journ. de Math., 7ième série, vol. I, 1915).
12. Pérès (J.) - Sur la composition de 1ière espèce: les fonctions d'ordre quelconque et leur composition (2 notes). (Rend.Ac.Lincei, vol. XXVI, serie 5ª, 1917).
13. Pérès (J.) - Sur certaines transformations fonctionnelles et leur application à la théorie des fonctions permutables. (Ann. Ecole Normale supér., vol.XXXVI, 1919).
14. Pérès (J.) - Sur les transformations qui conservent la composition. (Bull. Soc. Math. France, vol.XLVII, 1919).
15. Pérès (J.) - Sulla teoria delle funzioni permutabili. (Rend. Seminario Mat., Roma, vol. VI, 1920).
16. Pérès (J.) - Quelques complements sur les transformations qui conservent la composition. (Rend.Ac.Lincei, serie 5ª, vol. XXXIII, 1924).

17. Soula (J.) - L'équation intégrale de première espèce à limites fixes et les fonctions permutables à limites fixes. (Mémorial des Sc. Math., fasc. LXXX, 1936).

18. Vessiot (E.) - Sur les groupes fonctionnels et les équations intégro - différentielles linéaires. (C.R.Acad.Sc., Paris, Vol. 154, 1912).

19. Vessiot (E.) - Sur les fonctions permutables et les groupes continus de transformations fonctionnelles linéaires. (C.R.Acad.Sc., Paris, vol. 154, 1912).

20. Volterra (V.) - Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro - differenziali. (Rend.Ac.Lincei, 5ª serie, vol. XIX, 1910).

21. Volterra (V.) - Sopra le funzioni permutabili. (Rend.Ac.Lincei, serie 5ª, vol. XIX, 1910).

22. Volterra (V.) - Contributo allo studio delle funzioni permutabili. (Rend.Ac.Lincei, serie 5ª, vol. XX, 1911).

23. Volterra (V.) - Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro - différentielles. (Coll. Borel, Paris, 1913).

24. Volterra (V.) - Leçons sur les fonctions de lignes. (Coll. Borel, Paris, 1913).

25. Volterra (V.) - Les problèmes qui ressortent du concept de fonction de ligne. (Sitzungsber. Berliner Math. Ges., XIII J.g., 1914).

26. Volterra (V.) - The theory of permutable functions. (Princeton, 1915).

27. Volterra (V.) - Teoria delle potenze, dei logaritmi e delle funzioni di composizione. (Memorie Ac.Lincei, serie 5ª, vol. XI, 1916).

28. Volterra (V.) et Pérès (J.) - Leçons sur la composition et les fonctions permutables. (Coll. Borel, Paris, 1924).

29. Volterra (V.) - Sur les fonctions permutables. (Bull. Soc. Math. France, vol. LII, 1924).

30. Volterra (V.) - Theory of functionals and of integral and integro - differential equations. (London, 1930).

31. Volterra (V.) et Pérès (J.) - Théorie générale des fonctionnelles. (Coll. Borel, t. I, Paris, 1936).

--+0+--

A. Lūsis.

„Permutablo funkciju teōrijas pamatproblēma".

Slēdzieni.

1. Vispārīgajā gadījumā, kad $f(x, y)$ ir n. kārtas (n — vesels pozitīvs skaitlis) un kanoniskās formas funkcija, kompozīcijas inversijas simbolu $\overset{*}{f}{}^{-1}$ noteic ar formulām

$$\overset{*}{f}{}^{-1} = \overset{*}{1}{}^{-n} + a_2(x)\overset{*}{1}{}^{-n+2} + \ldots + a_n(x)\overset{*}{1}{}^{0} + F_1(x, y) \tag{1}$$

un

$$\overset{*}{f}{}^{-1} = \overset{*}{1}{}^{-n} + b_2(y)\overset{*}{1}{}^{-n+2} + \ldots + b_n(y)\overset{*}{1}{}^{0} + F_2(x, y), \tag{1'}$$

kuŗās funkcijas

$$a_2(x), \ldots, a_n(x); \quad b_2(y), \ldots, b_n(y); \quad F_1(x, y), \quad F_2(x, y) \tag{2}$$

ir aprēķināmas ar doto funkciju $f(x, y)$ un tās parciāliem atvasinājumiem līdz kārtai $2n$.

Speciālā veida funkcijai

$$f(x, y) = \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} + (x-y)^{2n}\,\omega(x, y) \tag{3}$$

der simbola $\overset{*}{f}{}^{-1}$ kopīga izteiksme

$$\overset{*}{f}{}^{-1} = \overset{*}{1}{}^{-n} + F(x, y), \tag{4}$$

kuŗā funkciju $F(x, y)$ noteic ar absolūti un vienmērīgi savirzāmu rindu

$$F(x,y) = H(x,y) + \overset{*}{H}\overset{*}{1}{}^{n}\overset{*}{H} + \overset{*}{H}\overset{*}{1}{}^{n}\overset{*}{H}\overset{*}{1}{}^{n}\overset{*}{H} + \ldots \left[H = (-1)^n \frac{\partial^{2n} f}{\partial x^n\,\partial y^n}\right]. \tag{5}$$

2. Visas nepārtrauktas funkcijas $\varphi(x, y)$, kas permutablas ar pirmās kārtas funkciju

$$f(x, y) = g(x)\,h(y) \qquad [g(x) \neq 0, \quad h(x) \neq 0] \tag{6}$$

vai ar augstākās kārtas funkciju

$$f(x, y) = g(x)\,h(y)\frac{[l(x) - l(y)]^{n-1}}{(n-1)!} \tag{6'}$$

ir aprēķināmas pēc formulas

$$\varphi(x, y) = g(x)\,h(y)\,\Theta\,[l(x) - l(y)], \tag{7}$$

kuŗā Θ apzīmē patvaļīgu funkciju un $l(x)$ — funkciju

$$l(x) = \int g(x)\,h(x)\,dx. \tag{8}$$

3. Gadījumos, kad $f(x, y)$ ir dotā pirmās vai otrās kārtas un un kanoniskās formas funkcija, pamatproblēmu (noteikt visas funkcijas $\varphi(x, y)$, kas permutablas ar $f(x, y)$) var reducēt uz funkcijas $K(\xi; x, y)$ raksturīgā integrālvienādojuma atrisināšanu, lietojot jaunās nezināmās funkcijas

$$\psi(x, y) = \int_y^x \varphi(x, s)\,f(s, y)\,ds = \int_y^x f(x, s)\,\varphi(s, y)\,ds \tag{9}$$

izteiksmi

$$\psi(x, y) = \int_y^x \lambda(\xi)\,K(\xi; x, y)\,d\xi \qquad [\lambda = \lambda(x - y)]. \tag{10}$$

Minētajam integrālvienādojumam ar vajadzīgiem nosacījumiem eksistē viens vienīgs nepārtraukts atrisinājums.

4. Visas nepārtrauktas funkcijas $\varphi(x, y)$, kas permutablas ar doto **otrās** kārtas un kanoniskās formas funkciju $f(x, y)$, ir aprēķināmas pēc *Volterra* formulas

$$(11)\qquad \varphi(x, y) = \lambda(x - y) + \int_0^{x-y} \lambda(\xi)\, \Phi(\xi;\, x, y)\, d\xi,$$

kurā $\lambda(x - y)$ ir patvaļīga noslēgta cikla grupas funkcija un kodols (jeb veidotājas funkcija) $\Phi(\xi;\, x, y)$ sastādāms no dotās funkcijas $f(x, y)$. Visas funkciju $\varphi(x, y)$ īpašības, kas pamatojas uz formulu (11), ir tādas pat kā funkcijām, kas permutablas ar pirmās kārtas funkciju.

5. Pamatproblēmu **vispārīgajā gadījumā**, kad $f(x, y)$ ir dotā n. kārtas un kanoniskās formas funkcija, var reducēt uz integrālvienādojuma atrisināšanu, lietojot funkcijas (9) simbolisko pamatvienādojumu

$$(12)\qquad \overset{*}{f}{}^{-1}\, \overset{*}{\psi} - \overset{*}{\psi}\, \overset{*}{f}{}^{-1} = 0.$$

Simboliskā vienādojuma tips (12) un tā atklātais veids ar integrodiferenciālo vienādojumu ir raksturīgs arī funkcijām $\varphi(x, y)$, kas permutablas ar $f(x, y)$.

Speciālajā gadījumā, kad $f(x, y)$ ir noslēgta cikla grupas funkcija, arī $\varphi(x, y)$ pieder šai grupai.

6. **Gadījumā**, kad dotai funkcijai

$$(13)\qquad f(x, y) = \Omega(\overset{*}{1}{}^{n})$$

ir speciāls veids (3), pamatproblēmu ar *Pérès* transformācijām

$$(14)\qquad \Omega(\lambda) = (\overset{*}{1}{}^{0} + \overset{*}{\alpha})\, \overset{*}{\lambda}\, (\overset{*}{1}{}^{0} + \overset{*}{\beta}) \qquad [(\overset{*}{1}{}^{0} + \overset{*}{\alpha})(\overset{*}{1}{}^{0} + \overset{*}{\beta}) = (\overset{*}{1}{}^{0} + \overset{*}{\beta})(\overset{*}{1}{}^{0} + \overset{*}{\alpha}) = \overset{*}{1}{}^{0}]$$

reducē uz integrodiferenciālā vienādojuma

$$(15)\qquad \frac{\partial^n \alpha}{\partial x^n} - (-1)^n \frac{\partial^n \alpha}{\partial y^n} = -F(x, y) - \int_y^x F(x, s)\, \alpha(s, y)\, ds$$

vai

$$(15')\qquad \frac{\partial^n \beta}{\partial x^n} - (-1)^n \frac{\partial^n \beta}{\partial y^n} = F(x, y) + \int_y^x \beta(x, s)\, F(s, y)\, ds$$

atrisināšanu, ja $F(x, y)$ apzīmē funkciju (5).

7. **Vispārīgajā gadījumā**, kad $f(x, y)$ ir n. kārtas ($n > 1$) un kanoniskās formas funkcija, pamatproblēma pēc vispārinātās *Pérès* metodes reducējama uz kompozīcijas binomālā integrālvienādojuma

$$(16)\qquad \overset{*}{\psi}{}^{n} = f(x, y)$$

un īpatnējā integrālvienādojuma

$$(17)\qquad \overset{*}{1}{}^{n}\, \overset{*}{g}\, \overset{*}{f}_1 + \overset{*}{1}{}^{n-1}\, \overset{*}{g}\, \overset{*}{f}{}_1^2 + \ldots + \overset{*}{1}\, \overset{*}{g}\, \overset{*}{f}{}_1^n = \overset{*}{f}{}_1^n - \overset{*}{1}{}^{n}$$

atrisināšanu, ja par nezināmo funkciju uzskata $\psi(x, y)$, resp. $g(x, y)$ un ar $f_1(x, y)$ apzīmē vienādojuma (16) partikulāro atrisinājumu, kam diagonāle $f_1(x, x) = 1$.

8. Visos gadījumos, kad n. kārtas un kanoniskās formas funkciju $f(x, y)$ var attēlot ar *Pérès* transformāciju (13), funkcijas, kas permutablas ar $f(x, y)$, ir arī permutablas ar tās kompozīcijas pakāpi $\overset{*}{f}{}^{\frac{1}{n}}$.

„Sur le problème fondamental de la théorie des fonctions permutables."

Conclusions*).

1. Dans le cas général d'une fonction $f(x, y)$ d'ordre entier positif n et de forme canonique on peut exprimer le symbole $\overset{*}{f}{}^{-1}$ d'inversion de la composition par les formules (1) et (1') où les fonctions (2) sont déterminées par emploi de la fonction $f(x, y)$ et de ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre $2n$.

   Pour le type spécial (3) il existe l'expression commune (4) où la fonction $F(x, y)$ est représentée par la série (5) absolument et uniformément convergente.

2. Toutes les fonctions continues $\varphi(x, y)$ permutables avec la fonction (6) du premier ordre ou avec la fonction (6') d'ordre supérieur sont représentées par (7) où Θ est une fonction arbitraire et $l(x)$ est donnée par (8).

3. En le cas d'une fonction donnée $f(x, y)$ de premier et de second ordre on peut réduire le problème fondamental (trouver toutes les fonctions $\varphi(x, y)$ permutables avec $f(x, y)$) par l'introduction d'une inconnue auxiliaire (9) et son expression (10) à la résolution de l'équation intégrale qui caractérise la fonction $K(\xi; x, y)$. L'équation intégrale mentionnée admet, à des conditions convenables, une solution continue et une seule.

4. Toutes les fonctions continues $\varphi(x, y)$ permutables avec une fonction $f(x, y)$ du second ordre peuvent être exprimées par la formule (11) due à M. *Volterra* en désignant par $\lambda(x-y)$ une fonction arbitraire du groupe du cycle fermé et en formant le noyau (ou la fonction génératrice) $\Phi(\xi; x, y)$ à partir de la fonction donnée $f(x, y)$. Toutes les propriétés des fonctions $\varphi(x, y)$ qui reposent sur la formule (11) sont les mêmes que celles des fonctions permutables avec une fonction du premier ordre.

5. On peut réduire le problème fondamental dans le cas général d'une fonction donnée $f(x, y)$ d'ordre n et de forme canonique à la résolution d'une équation intégrale en partant de l'équation symbolique (12) qui est vérifiée par les fonctions (9).

   L'équation symbolique du type (12), ainsi que sa forme explicite par une équation intégro-différentielle, caractérise aussi les fonctions $\varphi(x, y)$ permutables avec $f(x, y)$.

   Dans le cas particulier où $f(x, y)$ est une fonction du groupe du cycle fermé, les fonctions $\varphi(x, y)$ appartiennent au même groupe.

---

*) Les numéros des formules et des expressions employées plus bas renvoient au texte en langue lettonne.

6. En se servant des transformations (14) de M. *Pérès* on peut réduire le problème fondamental dans le cas particulier d'une fonction donnée (13) sous forme (3) à la résolution des équations intégro-différentielles (15) ou (15′) où $F(x, y)$ est la fonction (5).

7. En généralisant une méthode de M. *Pérès*, on peut réduire le problème fondamental dans le cas général d'une fonction donnée $f(x, y)$ d'ordre n $(n > 1)$ et de forme canonique à la résolution d'une équation intégrale binome (16) de composition et d'une équation intégrale du type spécial (17) où les inconnues sont respectivement $\psi(x, y)$, $g(x, y)$ et où $f_1(x, y)$ est la solution particulière de (16) telle que la diagonale $f_1(x, x) = 1$.

8. Toutes les fois qu'on peut représenter la fonction $f(x, y)$ d'ordre n et de forme canonique par la transformation (13) de M. *Pérès* les fonctions permutables avec $f(x, y)$ sont aussi permutables avec la puissance fractionnaire $\overset{*}{f}{}^{\frac{1}{n}}$ de composition.

R. Ekis, J. Kronis un b. grām. sp. Jelgavā, Cakstes bulv. 10.