Ernests Fogels

P Ē T Ī J U M I P A R A S I M P T O T I S K I V I E N M Ē R Ī G I S A D A L Ī T U S K A I T Ļ U V I R K N Ē M

Disertācija,

iesniegta 6.maijā 1943.g. Universitātei Rīgā matēmatisko zinātņu doktora grāda iegūšanai.

S A T U R S

L I T E R Ā T Ū R A

[1] I.M.Vinogradow - Some theorems concerning the theory of primes, Мат. Сборник, 2(44)(1937),179-194.

[2] И.М.Виноградов - Новая оценка одной суммы, содержащей простые числа, Мат. Сборник, 2(44)(1937),783-792.

[3] - Новий метод в аналитической теории чисел, Труды мат. института им.Стеклова X(1937),1-122.

[4] - Некоторые общие леммы и их применение к оценке тригонометрических сум, Мат.Сборник,3(45)(1938), 435-470.

[5] - Основы теории чисел (1940).

[6] А.А.Райков - О мультипликативных базисах натурального ряда, Мат. Сборник, 3(45)(1938),569-575.

[7] - О распределение чисел, простые делители которых принадлежат заданной арифметической прогрессии, Мат. Сборник, 4(46)(1938),563-568.

[8] E. Landau - Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, I, II(1909).

[9] - Gelöste und ungelöste Probleme aus der Theorie der Primzahlverteilung und der Riemannschen Zetafunktion, Proc. 5.int. congress of math.,Cambridge 1912,I, 93-108.

[10] -Über einige Summen,die von Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion abhängen, Acta Mathematica 35(1912),271-294.

[11] G.Hoheisel - Primzahlprobleme in der Analysis, Berliner Sitzungsberichte (1930),580-588.

[12] H.Heilbronn -Über den Primzahlsatz von Herrn Hoheisel, Math. Zeitschrift, 36(1933),394-423.

[13] A.E.Ingham -The distribution of prime numbers (1932).

[14] - On the difference between consecutive primes, Quart. J. of Math., 8(1937),255-266.

[15] E.Fogels - On average values of arithmetical functions, Latvijas Universitātes Raksti,Mat.Dabas zin.ser.III,10(1940)285-313

[16] G.H.Hardy and J.E.Littlewood - Some problems of diophantine approximation, Proc.5.int.congress of math. Cambridge, 1912, I, 223-229.

[17] H.Weyl - Über die Gleichverteilung von Zahlen mod.Eins, Math. Ann. 77(1916),313-352.

[18] J.F.Koksma - Diophantische Approximationen (1936).

[19] J.G.van der Corput - Diophantische Approximationen, C.R. congrès intern. math. Oslo I(1936),249-260.

[20] G.H.Hardy and E.M.Wright - An introduction to the theory of numbers (1938).

[21] N.Tchudakoff - On the difference between two neighbouring prime numbers, Мат. Сборник, 1(43)(1936),799-814.

§ 1.

I E V A D S

1. Šinī darbā ir apskatīti jautājumi par asimptotiski vienmērīgi sadalītām skaitļu virknēm, ko definē šādi.

Ja dota noslēgtā intervalla 0,1 bezgalīga skaitļu virkne

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots,$$

šī intervalla pastāvīgs skaitlis γ, un G apzīmē skaitļu

$$x_n \leq \gamma \quad (n \leq N)$$

skaitu, pie kam katram γ ir

$$\lim_{N\to\infty} \frac{G}{N} = \gamma,$$

tad saka, ka skaitļi x_n ir sadalīti vienības intervallā a s i m p t o t i s k i v i e n m ē r ī g i. No šīs definīcijas seko, ka vienmērīgās sadalīšanas gadījumā arī vienības intervalla katrā apakšintervallā, kuŗa garums γ, ir $\sim N\gamma$ virknes skaitļu x_n ar $n \leq N$.

Kad $y_1, y_2, \dots$ ir reāli skaitļi, kas nepieder vienības intervallam, tad visiem n=1,2,... izteic

$$y_n = a_n + x_n,$$

kur a_n ir lielākais veselais skaitlis $\leq y_n$, un $0 \leq x_n < 1$; raksta

$$x_n = \{y_n\}.$$

Ja šinī gadījumā skaitļi x_n ir sadalīti vienības intervallā asimptotiski vienmērīgi, tad saka, ka skaitļi y_n ir sadalīti asimptotiski vienmērīgi m o d 1.

Pirmie autori, kas plašākā mērogā pētīja jautājumus par skaitļu vienmērīgo sadalīšanos, bija Hardī un Litlvuds[1] ap 1912.g. un Veils[2] ap 1914.g. Vispārīgu pārskatu par problēmām, kādas šajā pētījumu laukā ir apskatītas līdz pēdējam laikam, dod Koksma [18], lp.86-96 un van der Corput [19]. Atzīmēšu te tikai dažus atsevišķus rezultātus salīdzināšanai ar šī darba saturu.

Kopš 1914.g. ir pazīstams t.s. V e i l a k r i t ē r i j s: Lai reālo skaitļu virkne (y_n) būtu sadalīta asimptotiski vienmērīgi mod 1, nepieciešami un pietiekoši, ka katram veselam skaitlim $h \neq 0$ ir

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} e^{2\pi i h y_n} = 0.$$

Lietojot Veila kritēriju viegli pierāda[3], ka katram reālam irracionālam α skaitļi

---

[1] sal. Hardy and Littlewood [16].

[2] H. Weyl [17]

[3] sk. 1.lemmu.

$$\{\alpha n\}$$

ir sadalīti mod 1 asimptotiski vienmērīgi, kad n mainās pa dabīgajiem skaitļiem (vai aritmētisko progresiju). Arī pierāda vienmērīgo sadalīšanos skaitļiem

$$\{\alpha d\},$$

kad d mainās pa polinoma f(x) vērtībām, piemēram, kad $d=x^{k}$($x=1,2,\ldots$, k pastāvīgs dabīgais skaitlis). Šī un daudz citu analitiskās skaitļu teōrijas rezultātu pierādījumi atkarīgi no summas

$$\sum_{x\leq N} e^{2\pi i f(x)} \qquad [f(x) \text{ reāla funkcija}]$$

novērtējuma lieliem N. Šāda tipa summas sauc par V e i l a summām vai arī par trigonometriskām summām.

Kad d mainās pa skaitļiem, kas aug daudz straujāk kā polinoma vērtības, piemēram, kad $d = 2^{n}$ un n mainās pa dabīgajiem skaitļiem, tad var konstruēt irracionalitātes α, kam skaitļi $\{\alpha d\}$ nav vienmērīgi sadalīti; piemēram skaitļiem $d = 2^{n}$ tāds ir $\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k^2}$.

Bet arī var uzrādīt lēni augošu dabīgo skaitļu virknes (d), kam skaitļi $\{\alpha d\}$ nav vienmērīgi sadalīti. Ja piemēram izvēlas irracionālu skaitli β un ar d apzīmē dabīgos skaitļus, kam $\{\beta d\}\leq\gamma$ (γ pozitīvs irracionāls skaitlis <1), tad viegli pierāda, ka skaitļi

$$\{\alpha d\}$$

ir sadalīti nevienmērīgi katram $\alpha = \beta r$, kur r pastāvīgs racionāls skaitlis; šis apgalvojums acīmredzams, kad r=1.

Tā tad skaitļu $\{\alpha d\}$ vienmērīgā sadalīšanās lielā mērā atkarīga no skaitļu d aritmētiskajām īpašībām. Tādēļ p i r m ā p r o b l ē m a, kuras atrisināšanai veltīta šī darba viena daļa, ir sekojošā:

Uzrādīt iespējami plašas skaitļu d un irracionalitātu α klases, kam skaitļi $\{\alpha d\}$ ir sadalīti vienmērīgi.

Vinogradovs bija pirmais, kas 1937.g. deva novērtējumu trigonometriskai summai

$$S = \sum_{p\leq N} e^{2\pi i\alpha h p},$$

kur p mainās pa visiem pirmskaitļiem, un izlietoja šo novērtējumu Goldbacha teōrēmas pierādīšanai. Te kā blakus rezultāts sekoja skaitļu $\{\alpha p\}$ vienmērīgā sadalīšanās plašai irracionālo skaitļu α klasei[4].

Šinī darbā izlietoju Vinogradova metodes lai pierādītu skaitļu $\{\alpha d\}$ vienmērīgo sadalīšanos, kad d mainās pa skaitļiem, kuŗu sadalījums dabisko skaitļu rindā tikpat nepārskatāms kā pirmskaitļu sadalījums. Tādi ir piemēram dabīgie skaitļi, kam pāŗu skaits pirmreizinātāju, dabīgie skaitļi, kas uzrakstāmi ar divu kvadrātu summu, un vēl daudz citas skaitļu virknes, kuŗu piemēri doti pie VI teōrēmas.

Tikai nedaudz vispārinot Vinogradova argumentus bija iespējams pierādīt skaitļu $\{\alpha p\}$ vienmērīgo sadalīšanos, kad p mainās pa doto

[4] sal. šī darba teōrēmas IV un V.

a r i t m ē t i s k o   p r o g r e s i j u   pirmskaitļiem[4]. Bet piemēram gadījums, kad p mainās tikai pa tiem pirmskaitļiem p_{2n}, kuri pirmskaitļu dabīgajā sakārtojumā $p_1, p_2, \ldots$ atrodas pāŗu vietās, bez jaunām metodēm neliekas atrisināms.

Speciāla tipa irracionalitātēm α (t.s. Liuviļa transcendentiem skaitļiem), kas neizpilda zināmus nosacījumus[5], no šinī darbā pierādītajiem rezultātiem seko skaitļu

$$\{\alpha d\}, \quad d \leq N$$

vienmērīgā sadalīšanās tikai tad, ja N tuvojas bezgalībai pa speciāli konstruētu skaitļu virkni, atkarīgu no α.

2. Šī darba   o t r a   p r o b l ē m a   ir skaitļu $\{\alpha d\}$ asimptotiskā sadalījuma iespējami precīzs apraksts jeb atlikuma locekļa

$$G - N\gamma$$

iespējami ass novērtējums. Tāda veida rezultāts ir VII teōrēma.

3. T r e š o   p r o b l ē m u, kam šinī darbā esmu pieskāries, var formulēt šādi:

Ja skaitļi $\{\alpha d\}$, $d \leq N$ ir sadalīti asimptotiski vienmērīgi, tad jānoteic iespējami mazs (no N atkarīgs) x tā, lai arī skaitļi

$$\{\alpha d\}, \quad N < d \leq N + x$$

būtu sadalīti asimptotiski vienmērīgi.

Rezultāti, kādus var tiešā ceļā secināt no sadalījuma ar atlikuma locekli, nedod tik labus x novērtējumus, kādus esmu VIII un IX teōrēmā pierādījis ar citu metodi. Šim līdzīgs gadījums pirmskaitļu teōrijā ir   H o h e i s e l a   t e ō r ē m a. Ar patreizējo matēmatiku nav iespējams pirmskaitļu sadalījuma formulā

$$\pi(N) = \mathrm{Li}(N) + r(N)$$

/kur $\pi(N)$ izteic pirmskaitļu skaitu, kas nepārsniedz N un Li ir integrālais logaritms/ pierādīt atlikuma locekļa novērtējumu

$$r(N) < N^{\delta} \quad (N > c_0 > 1)$$

ar konstantu $\delta < 1$. Tādēļ no šīs formulas tiešā ceļā nevar secināt rezultātu, ka intervallā

$$N, \quad N+x$$

ir vismaz viens pirmskaitlis, kad N pietiekoši liels, $x = N^{\theta}$, θ pozitīva konstante <1. Bet ar speciālu metodi Hoheiselam 1930.g. tādu rezultātu izdevās pierādīt[6]. Kaut arī Hoheisela konstante θ

[5] sal. šī darba IV teōrēmu.

[6] Hoheisel [11].

$(= 1 - \frac{1}{33000})$ bija "tikko" mazāka par 1, tomēr tanī laikā šo rezultātu atzina par ievērojamu panākumu. Pie šīs konstantes samazināšanas pirmskaitļu rindas gadījumā[7] un analogu rezultātu pierādīšanas citām skaitļu virknēm (d) esmu strādājis savā agrākajā darbā[8].

No Hoheisela teorēmas ar uzlabotu θ [7] arī ir atkarīgi šī darba VIII un IX teorēmu pierādījumi. Pēc šīm teorēmām, kad d piemēram mainās pa visiem (vai aritmētiskās progresijas) pirmskaitļiem, der

$$x = N^{\frac{7}{8}+\varepsilon}, \text{ ja } \alpha \text{ kvadrātiska irracionālitāte},$$

$$x = N^{\frac{15}{16}+\varepsilon}, \text{ ja } \alpha \text{ bikvadrātiska irracionālitāte},$$

bet kad d mainās (piemēram) pa aritmētiskās progresijas skaitļiem, kam pāru skaits pirmreizinātāju, var likt

$$x = N^{\frac{11}{12}+\varepsilon}, \text{ ja } \alpha \text{ kvadrātiska irracionālitāte}$$

(ε patvaļīgi maza pozitīva konstante).

4. Apskatīsim tagad pierādīto rezultātu kādu izlietojumu, kuŗa dēļ jautājumi par minēto skaitļu vienmērīgo sadalījumu var saistīt skaitļu teorētiķa interesi.

Kopš pētījumi par pirmskaitļu (vai citu aritmētiski definētu skaitļu d) sadalījumu d a b ī g o s k a i t ļ u r i n d ā un a r i t m ē t i s k ā p r o g r e s i j ā ir novesti līdz tādai stadijai, ka rezultātu visniecīgākie uzlabojumi panākami tikai viskomplicētākām metodēm, bet šo jautājumu pētīšanā augstākas pakāpes progresijās, piemēram skaitļu rindā

$$n^2 + 1 \ (n=1,2,\dots)$$

mūsu dienu matēmatika pilnīgi bezspēcīga[9], rodas vajadzība pēc tādām veselo skaitļu progresijām, kas minēto jautājumu pētīšanai nav gluži nepieejamas. Un tagad pēc augšā izteiktajiem rezultātiem par skaitļu $\{\alpha d\}$ vienmērīgo sadalīšanos kā tādu progresiju piemērus var minēt skaitļu virknes

$$[\alpha n],$$

$$[\alpha n] + [\beta n],$$

$$[\alpha[\beta n]], \qquad \text{u.t.t.},$$

kur α, β reāli irracionāli skaitļi, n mainās pa visiem dabīgajiem skaitļiem un $[x]$ apzīmē lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz x. Katra no šīm rindām izturās līdzīgi aritmētiskai progresijai, kuŗas diference svārstās. Piemēram pirmajai progresijai ir divas diferences: $[\alpha]$ un $[\alpha+1]$, kamēr otrajai vispārīgā gadījumā ir četras diferences.

[7] sal. šī darba 25.lemmu.

[8] Fogels [15].

[9] sal. Landau [9], lp.106.

Apskatīsim piemēra dēļ tikai progresiju

$$[\alpha n], \quad n = 1,2,\ldots,N,$$

pieņemot, ka irracionālais skaitlis $\alpha > 1$ (resp. skaitlis N) izpilda vajadzīgos ierobežojumus[5]. Tad šos ierobežojumus izpilda arī $\frac{1}{\alpha}$, jo skaitļu α un $\frac{1}{\alpha}$ attīstījumi nepārtrauktā daļā atšķiras tikai ar pirmo kvocientu. Tādēļ skaitļi $\{\frac{1}{\alpha}p\}$, kad p mainās pa visiem (vai dotā aritmētiskās progresijas) pirmskaitļiem $\leq P$, ir sadalīti asimptotiski vienmērīgi un nevienlīdzībai

$$\{\tfrac{1}{\alpha}p\} > 1 - \tfrac{1}{\alpha} \qquad (i)$$

ir $\sim \frac{1}{\alpha}\pi(P)$ atrisinājumu. Nevienlīdzību (i) pārveidojot par

$$1 > \tfrac{1}{\alpha}p - [\tfrac{1}{\alpha}p] > 1 - \tfrac{1}{\alpha}$$

jeb

$$p < \alpha([\tfrac{1}{\alpha}p] + 1) < p+1,$$

secina

$$[\alpha n] = p, \qquad (ii)$$

kad $n = [\frac{1}{\alpha}p]+1$. Apgrieztā kārtā no (ii) seko (i), kādēļ skaitļu $n \leq N$, kam der (ii), ir

$$\sim \tfrac{1}{\alpha}\pi(\alpha N) \sim \pi(N).$$

Tā tad pirmskaitļu skaits dabīgo skaitļu rindā $1,2,\ldots,N$ un pirmskaitļu skaits progresijā

$$[\alpha n], \quad n=1,2,\ldots,N$$

ir asimptotiski ekvivalenti, kad α reāls algebrisks skaitlis.

Līdzīgā kārtā no iepriekšējā punktā minētiem rezultātiem secina, ka kvadrātiskām irracionālitātēm α, α' (kad $\alpha + \alpha'$ nav racionāls skaitlis progresijās

$$[\alpha n], \quad N < n \leq N+x, \quad x = N^{\frac{7}{8}+\varepsilon},$$

$$[\alpha n] + [\alpha' n], \quad N < n \leq N+x, \quad x = N^{\frac{15}{16}+\varepsilon}$$

ir $\sim \dfrac{x}{\log N}$ pirmskaitļu, progresijā

$$[\alpha n], \quad N < n \leq N+x, \quad x = N^{\frac{11}{12}+\varepsilon}$$

ir $\sim \frac{1}{2}x$ skaitļu, kuŗiem ir pāŗu skaits pirmreizinātāju, u.t.t. Šos rezultātus citādi formulējot var teikt, ka pietiekoši lielam N intervallā

$$N^9, \quad (N+1)^9$$

atrodas vismaz viens pirmskaitlis p formā $[\alpha n]$, intervallā

$$N^{17}, \quad (N+1)^{17}$$

atrodas vismaz viens pirmskaitlis, kas pieder progresijai $[\alpha n] + [\alpha' n]$, intervallā

$$N^{13}, \quad (N+1)^{13}$$

atrodas progresijas $[\alpha n]$ vismaz viens skaitlis d, kam ir pāru skaits pirmreizinātāju, u.t.t. Šie rezultāti der arī tad, ja vēl pievieno nosacījumu par p, resp. d piederību dotai aritmētiskai progresijai.

Ja atmet nosacījumu par skaitļu p un d piederību progresijai $[\alpha n]$ (paturot, ja patīk, piederību aritmētiskai progresijai), tad, kā esmu pierādījis savā agrāk citētā darbā, vismaz viens p, resp. d, atrodas jau intervallā

$$N^3, \quad (N+1)^3.$$

Jautājums, vai tas atrodas arī intervallā N^2, $(N+1)^2$, ir vēl arvien neizšķirts kaut arī tā atrisinājumu meklē[9] jau 30 gadu.

5. Šinī darbā lietotā pierādīšanas metode pieder Vinogradovam; tās pamatā ir Švarca-Koši nevienlīdzība un novērtējamo summu lietderīga saskaldīšana, kas bieži prasa daudz asprātības. Visi lietotie līdzekļi ir elementāri, tas nozīmē, pieder reālā argumenta funkciju teōrijai. Izņēmums tomēr ir 25. lemma, kuŗas pierādījums elementāriem līdzekļiem neliekas iespējams. Tāds spriedums tādēļ izsakāms arī par teorēmām VIII, IX un XI, kuŗu pierādīšanai šī lemma vajadzīga.

Visu darbu esmu iedalījis paragrafos pēc pierādīšanas līdzekļiem vai arī pēc apskatāmās vielas. Katra paragrafa sākumā dots pārskats par tā saturu un pierādāmo teōrēmu savstarpējo atkarību.

A p z ī m ē j u m i

Ja x reāls skaitlis, tad

$[x]$ apzīmē lielāko veselo skaitli $\leq x$,

$\{x\} = x - [x]$,

(x) izteic x attālumu līdz tuvākajam veselajam skaitlim, t.i. $\min(\{x\}, 1-\{x\})$.

$c, c_0, c_1, c_2, \ldots$ ir pozitīvas konstantes.

$\theta, \theta', \theta'', \ldots$ apzīmē reālus skaitļus ar absolūto vērtību <1.

$\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon_1', \varepsilon'', \ldots$ ir patvaļīgi mazas pozitīvas konstantes.

N un **P** - pietiekoši lieli skaitļi ($>c_0>1$), kas var neaprobežoti palielināties,

$\mu = \log N$.

Pozitīvam A apzīmējumi

$$B \ll A, \qquad A \gg B, \qquad B = O(A)$$

ir līdzvērtīgi un izteic, ka attiecība $\frac{|B|}{A}$ ir aprobežota. Kad X, Y pozitīvi skaitļi un ν reāla konstante, no $\ll$ definīcijas seko turpmāk bieži lietotās īpašības

$$X + Y \ll \max(X, Y),$$

$$(X + Y)^\nu \ll X^\nu + Y^\nu.$$

Apzīmējums $B=o(A)$ līdzvērtīgs ar $B=A\delta$, kur δ bezgalīgi mazs.

(a,b) apzīmē dabīgo skaitļu a,b lielāko kopīgo dalītāju, $n|d$ izteic, ka n dalās ar d, bet $n \nmid d$ - ka n nedalās ar d.

$\lambda(n)$ ir Liuviļa funkcija, definēta dabīgajiem skaitļiem ar nosacījumu $\lambda(n) = (-1)^{\rho}$, kur ρ ir n visu vienādo vai dažādo pirmreizinātāju skaits, un $\lambda(1) = 1$.

$\mu(n)$ ir Möbius funkcija

$$= \begin{cases} \lambda(n), \text{ ja } n \text{ nedalās ar kvadrātu} > 1 \\ 0 \text{ pretējā gadījumā.} \end{cases}$$

Definē $\varepsilon_n = 1$, ja n pieder dotajām aritmētiskām progresijām (ar diferenci k) un 0 pārējiem skaitļiem, t.i.

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, \text{ ja } n \equiv n_1, \ldots, n_a \pmod k, \; a \leq k \\ 0 \text{ pretējā gadījumā,} \end{cases}$$

un pieņem

$$1 \leq k \ll 1.$$

α apzīmē reālu irracionālu skaitli. Izvēloties reālu $\tau \geqslant 1$ viennozīmīgi izteic[10]

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q\tau}, \quad (a,q)=1, \; 1 \leq q \leq \tau. \tag{1'}$$

Kad $q = \tau$, dabū α attēlojumu

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad q > 0, \; (a,q) = 1 \tag{1}$$

ar kuru definēti skaitļi q. Kad dots α attēlojums nepārtrauktā daļā

$$\alpha = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \ldots}} \tag{2}$$

($k_0, k_1, \ldots$ veseli skaitļi $\geqslant 0$), definē

$$\begin{matrix} a_{-1} = 1, & a_0 = k_0, & a_n = k_n a_{n-1} + a_{n-2} \\ q_{-1} = 0, & q_0 = 1, & q_n = k_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{matrix} \quad (n \geqslant 1),$$

tad dabū skaitļa α attēlojumus (1), ja liek[11]

$$a = a_n, \quad q = q_n \; (n \geqslant 1).$$

Apzīmējumi $\sum\limits_{n \leq N}$, $\sum\limits_{d \leq N}$

izteic, ka apskatāmās summās n (un tāpat m) mainās pa visiem dabīgajiem skaitļiem, kas nepārsniedz N, kamēr d mainās pa virknes (d) skaitļiem $\leq N$.

[10] sk. Виноградов [5], lp.16.

[11] sk. piem. Hardy and Wright [20], lp.137.

§ 2.

DAŽAS VISPĀRĪGAS LEMMAS

Šinī paragrafā pierādītas vai citētas lemmas, kas vajadzīgas visā tālākā darbā. 1. un 10. lemma pieder Veilam un 2. ir pirmās vispārinājums. Vinogradovam pieder 3.,4.,7.,8. lemma un pārējo lemmu pierādīšanas līdzekļi. Lemmu atkarība (uzrādot iekavās lemmas, no kurām atkarīga priekš iekavas stāvošā) ir šāda:

2(1); 4(3); 5(4,2); 6(5); 9(8); 10(9).

6. lemma šinī darbā tiek vairākkārt izlietota, kādēļ tās pierādīšanai vajadzīgās lemmas 1-5 dotas ar visiem pierādījumiem. Bez tam 3.lemmas pierādījuma pēdējo daļu izlieto kā metodi 19.lemmā.

Ekonomijas dēļ šinī darbā 10. lemma pierādīta kā 9. lemmas sekas. Chronologiski 10.lemma (Veila kritērijs) ir pazīstama jau sen, kamēr 9. lemma literātūrā nav atrodama.

1. lemma:

$$\left| \sum_{x<n\leq x+N} e^{2\pi i\alpha n} \right| \leq \min\left(N, \frac{1}{2(\alpha)} \right)$$

Pierādījums:

$$\left|\sum_{x<n\leq x+N} e^{2\pi i\alpha n}\right| = \left|\frac{e^{2\pi i\alpha x}(e^{2\pi i\alpha N}-1)}{e^{2\pi i\alpha}-1}\right| = \frac{|e^{2\pi i\alpha N}-1|}{|2ie^{\pi i\alpha}\sin\pi\alpha|} \leq \frac{1}{|\sin\pi\alpha|} = \frac{1}{\sin\pi(\alpha)} < \frac{1}{2(\alpha)},$$

jo $\sin\pi x > 2x$, kad $0 < x < \frac{1}{2}$.

2. lemma. Apzīmējot

$$S = \sum_{x<n\leq x+N} \varepsilon_n e^{2\pi i\alpha n}$$

der novērtējums

$$|S| \leq \min\left(\frac{a}{k} N, \frac{a}{2(\alpha k)} \right).$$

Pierādījumam S sadala summās

$$S = \sum_{n\equiv n_1} + \ldots + \sum_{n\equiv n_a},$$

no kurām katrai atsevišķi lieto iepriekšējās lemmas rezultātu ar $k\alpha$ α vietā un N/k N vietā.

3. lemma[12]. Ja $U \geq 1$,

[12] Vinogradow [1], Lemma 1.

m vesels >1, $(m,q)=\delta$, $m=m_1\delta$, $q=q_1\delta$,

$$\Omega = \sum_{h=f+1}^{f+q'} \min\left(U, \frac{1}{2(\alpha mh)}\right),$$

$0 < q' \leq q_1$, $-V < f+1 \leq f+q' \leq V$, $q_0 = \min(q_1, V)$,

tad

$$\Omega \ll \left(\frac{m_1 q_0}{\tau} + 1\right)U + q_1 \log q_1 \,.$$

Ja $m=1$, $f=0$, $q' < q$, $q' \leq \frac{1}{2}\tau$,

tad

$$\Omega \ll q \log q \,.$$

P i e r ā d ī j u m s.

1. Pierādot lemmas pirmo daļu liekam $h=f+h_1$, $\alpha mf = \beta$ un ar veselu skaitli b izteicam

$$\beta = \frac{b}{q_1} + \frac{\theta'}{q_1} \,.$$

Tad

$$(\alpha mh) = (\alpha m h_1 + \beta) = \left(\frac{a m_1 h_1}{q_1} + \frac{\theta m_1 h_1}{q_1 \tau} + \frac{b}{q_1} + \frac{\theta'}{q_1}\right) = \left(\frac{\rho + \theta'' \rho'}{q_1}\right),$$

kur ρ ir skaitļa $a m_1 h_1 + b$ absolūti mazākā atlikuma (mod q_1) absolūtā vērtība un

$$\rho' = \frac{m_1 q_0}{\tau} + 1, \quad q_0 = q_1 \,.$$

Tā ka $(a m_1, q_1)=1$, kad h_1 mainās pa dabīgajiem skaitļiem $\leq q_1$, ρ var pieņemt jebkuru no vērtībām $0,\ldots,[\frac{1}{2}q_1]$ ne vairāk kā divreiz.

2. Pieņemsim vispirms $q_1 > 2(\rho' + 2)$. Tad Ω locekļus ar $\rho = 0,\ldots,[\rho' + 1]$ atvietojam ar U, bet locekļus, kur

$$\rho = [\rho' + 1] + s, \quad s > 0 \left(\text{un } s \leq \tfrac{1}{2} q_1 - [\rho' + 1] < \tfrac{1}{2} q_1 - 1\right)$$

atvietojam ar

$$\frac{1}{2\left(\frac{\rho + \theta''\rho'}{q_1}\right)} \,.$$

Ievērojam, ka pēc pieņēmuma ir $\rho - \rho' > 1$, $\rho + \rho' < \frac{1}{2} q_1 + (\frac{1}{2} q_1 - 1) < q_1$. Tādēļ

no $\frac{\rho + \theta''\rho'}{q_1} \leq \frac{1}{2}$ seko $\left(\frac{\rho + \theta''\rho'}{q_1}\right) = \frac{\rho + \theta''\rho'}{q_1} \geqslant \frac{\rho - \rho'}{q_1}$ (>0)

un no $\frac{\rho + \theta''\rho'}{q_1} > \frac{1}{2}$ seko $\left(\frac{\rho + \theta''\rho'}{q_1}\right) = 1 - \frac{\rho + \theta''\rho'}{q_1} = \frac{(q_1 - \rho) - \theta''\rho'}{q_1} \geqslant \frac{\rho - \theta''\rho'}{q_1} \geqslant \frac{\rho - \rho'}{q_1}$.

Abos gadījumos ir

$$\frac{1}{2\left(\frac{\rho + \theta''\rho'}{q_1}\right)} \leq \frac{1}{2\frac{\rho - \rho'}{q_1}} < \frac{1}{2\frac{s}{q_1}} = \frac{q_1}{2s}.$$

Tā ka

$$\sum_{s=1}^{\frac{1}{2}q_1-1}\frac{1}{s} < \sum_{s=1}^{\frac{1}{2}q_1-1}\log\frac{2s+1}{2s-1} < \log q_1, \qquad \text{jo} \quad 2s+1 < q_1-1,$$

ir

$$\Omega < 2(\rho'+2)U + \sum_{s=1}^{\frac{1}{2}q_1-1}\frac{q_1}{s} < (2\,\frac{m_1 q_0}{\tau} + 4)U + q_1\log q_1 .$$

3. Ja $q_1 < 2(\rho'+2)$, der tas pats novērtējums, jo tagad

$$\Omega \leq q_1 U < 2(\rho'+2)U.$$

Ar to lemma pierādīta gadījumam $q_0 = q_1$.

4. Ja $q_0 = V$, izteic

$$(\alpha m h) = \left(\frac{a m_1 h}{q_1} + \frac{\theta m_1 h}{q_1 \tau}\right) = \left(\frac{\rho + \theta''\rho'}{q_1}\right),$$

kur

$$\rho' = \frac{m_1 q_0}{\tau}, \qquad q_0 = V.$$

Tālāk atkārto agrākos spriedumus un pierāda rezultātu

$$\Omega < 2(\rho'+2)U + q_1\log q_1 < (2\frac{m_1 q_0}{\tau} + 4)U + q_1\log q_1 .$$

5. Beidzot, kad $m=1$, $f=0$, $q' < q$, $\frac{q'}{\tau} \leq \frac{1}{2}$, tad

$$(\alpha h) = \left(\frac{ah + \frac{1}{2}\theta'}{q}\right) = \left(\frac{\rho + \frac{1}{2}\theta''}{q}\right),$$

kur ρ vienīgās vērtības var būt $\rho = 1, 2, \ldots, [\frac{1}{2}q]$. Tādēļ

$$\left(\frac{\rho + \frac{1}{2}\theta''}{q}\right) \geq \left(\frac{\rho - \frac{1}{2}}{q}\right) \quad \text{un} \qquad \Omega \ll \sum_{\rho=1}^{\frac{1}{2}q}\frac{q}{\rho - \frac{1}{2}} \ll q\log q .$$

4. l e m m a.[13] Ja $U \geq 1$,

W vesels skaitlis > 1,
m vesels skaitlis > 0,
$\delta = (m,q)$, $m = m_1\delta$, $q = q_1\delta$,

$$H = \sum_{h=-W}^{W}\min\left(U, \frac{1}{2(\alpha m h)}\right),$$

tad

$$H \ll UW\left(\frac{\log q}{U} + \frac{1}{W} + \frac{1}{q_1} + \frac{q_1\log q_1}{UW} + \frac{m_1}{\tau}\right).$$

P i e r ā d ī j u m s.

Apskatām vispirms gadījumu, kad $W \geq q$. Tad H sadala $\ll \frac{W}{q_1}$ summās ar

[13] Vinogradow [1], Lemma 2.

formu

$$\Omega = \sum_{h=f}^{f+q'} \min\left(U, \frac{1}{2(\alpha m h)} \right), \qquad 0 < q' \leq q_1 .$$

Katru no šīm summām novērtē ar iepriekšējo lemmu lietojot $q_0=q_1$; dabū rezultātu

$$H \ll \frac{W}{q_1}\left[\left(\frac{m_1 q_1}{\tau} +1\right)U + q_1 \log q_1\right] = UW\left(\frac{m_1}{\tau} + \frac{1}{q_1} + \frac{\log q_1}{U}\right),$$

kas lemmu šinī gadījumā pierāda.

Kad $W < q_1$, tad lieto iepriekšējās lemmas pirmo gadījumu ar $H = \Omega$, $V = W$, $q_0 = W$ un dabū rezultātu

$$H \ll \left(\frac{m_1 W}{\tau} +1\right)U + q_1 \log q_1 = UW\left(\frac{m_1}{\tau} + \frac{1}{W} + \frac{q_1 \log q_1}{UW}\right) .$$

Ar to lemma pierādīta.

5. l e m m a.[14] Ja

(x) un (y) ir augošu veselu pozitīvu skaitļu virknes,

m vesels skaitlis >0,

$\delta = (m,q)$, $m = m_1\delta$, $q = q_1\delta$,

$0 \leq N' < N_1$, $1 < U < N_1$,

$T = \sum_x \sum_y \varepsilon_{xy} e^{2\pi i \alpha m x y}$, kur x mainās pa virknes (x) skaitļiem, kam $U < x \leq U_1$, $U_1 < 2U$, un katram tādam x y mainās pa skaitļiem (y), kam $N' < xy \leq N_1$,

tad

$$T \ll N_1 \sqrt{\frac{\log q_1}{U} + \frac{U}{N_1} + \frac{1}{q_1} + \frac{q_1 \log q_1}{N_1} + \frac{m_1}{\tau}} . \qquad (3)$$

P i e r ā d ī j u m s. Lietojot Švarca-Košī nevienlīdzības speciālo gadījumu

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq \sqrt{n(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)}$$

izteic

$$T \ll \sum_x \left|\sum_y\right| \ll \sqrt{U \sum_x \left| \sum_y \varepsilon_{xy} e^{2\pi i \alpha m x y}\right|^2} \ll \sqrt{U \sum_{U<\xi\leq U_1} \left| \sum_y \varepsilon_{xy} e^{2\pi i \alpha m \xi y}\right|^2} .$$

Pēdējā summā ξ mainās pa visiem dabīgajiem skaitļiem robežās U, U_1 un katram tādam ξ y mainās pa skaitļiem (y), kam $N' < y \leq N_1$. Liekot lai y_1 neatkarīgi no y mainās pa tiem pašiem skaitļiem izteic

$$T \ll \sqrt{U \sum_\xi \sum_y \sum_{y_1} \varepsilon_{\xi y} \cdot \varepsilon_{\xi y_1} e^{2\pi i \alpha m \xi (y-y_1)}} .$$

Izdarām vispirms summēšanu attiecībā uz y un y_1; tie mainās robežās

[14] Vinogradovs [1] pierāda šo lemmu, kad $\varepsilon_n=1$ visiem n.

$$0 < y \leq W, \qquad 0 < y \leq W, \quad \text{kur} \quad W = \left[\frac{N_1}{U}\right].$$

Katram tādam pārim y, y_1 atbilst tikai tās ξ vērtības, kam der reizē nevienlīdzības

$$N' < \xi y \leq N_1, \quad N' < \xi y_1 \leq N, \quad U < \xi \leq U_1.$$

Tā tad ξ mainās pa visiem veselajiem skaitļiem intervallā

$$\eta < \xi \leq \eta_1, \quad \eta = \max\left(\frac{N'}{y}, \frac{N'}{y_1}, U\right), \quad \eta_1 = \min\left(\frac{N_1}{y}, \frac{N_1}{y_1}, U_1\right)$$

(ja tur ir veseli skaitļi). Tādēļ

$$T \ll \sqrt{U \sum_{y} \sum_{y_1} \sum_{\eta < \xi \leq \eta_1} \varepsilon_{y\xi} \varepsilon_{y_1\xi} e^{2\pi i \alpha m (y-y_1)\xi}} \ll \sqrt{U \sum_{y} \sum_{y_1} \min\left(U, \frac{1}{2(\alpha m(y-y_1))}\right)}$$

(pēc 2.lemmas). Tā ka $-W < y-y_1 < W$, un Diofanta vienādojuma $y-y_1 = h$ atrisinājumu skaits ir $\ll W$, seko novērtējums

$$T \ll \sqrt{UW \sum_{-W \leq h \leq W} \min\left(U, \frac{1}{2(\alpha m h)}\right)}.$$

Pēc iepriekšējās lemmas zemradikāla summa ir

$$\ll UW\left(\frac{\log q_1}{U} + \frac{1}{W} + \frac{1}{q_1} + \frac{q_1 \log q_1}{UW} + \frac{m_1}{\tau}\right).$$

No šejienes ievērojot, ka $UW \leq N_1$, $N_1 < 2UW$, lemma seko.

6. l e m m a.[14] Ja

(x) un (y) ir augošu veselu pozitīvu skaitļu virknes,

$\delta = (m, q)$, $m = m_1\delta$, $q = q_1\delta$,

$0 \leq N' \leq N_1$, N_1 pietiekoši liels skaitlis, $\mu_1 = \log N_1$,

$1 < U_0 < U_1 \leq N_1$,

$\tau \leq N_1$,

$T = \sum_{x} \sum_{y} \varepsilon_{xy} e^{2\pi i \alpha m x y}$, kur x mainās pa virknes (x) skaitļiem, kam $U_0 < x \leq U_1$ un katram tādam x y mainās pa skaitļiem (y), kam $N' < xy \leq N_1$,

tad

$$T \ll N_1 \sqrt{\frac{\mu_1^2}{U_0} + \frac{U_1\mu_1}{N_1} + \frac{q_1\mu_1^3}{N_1} + \frac{\mu_1^2}{q_1} + \frac{m_1\mu_1^2}{\tau}}$$

Speciālā gadījumā, kad $q = \tau$, $N_1 \leq N$, tad

$$T \ll N_1\mu \sqrt{\frac{1}{U_0} + \frac{U_1}{N_1} + \frac{q\mu}{N_1} + \frac{m}{q}}. \tag{4}$$

P i e r ā d ī j u m s. Intervallu $U_0 < x \leq U$ sadala $k+1 \ll \mu_1$ intervallos

$$U_0 < x \leq 2U_0, \quad 2U_0 < x \leq 4U_0, \ldots, 2^k U_0 < x \leq U_1 \; (2^{k+1}U_0 \geq U_1).$$

Atbilstoši tam summa T sadalās tāda pat skaita summās T_s, kas izpilda iepriekšējās lemmas nosacījumus; intervallam

$$2^s U_0 < x \leq U_1', \quad U_1' \leq 2^{s+1} U_0$$

atbilstošie radikāla (3) lielumi ir

$$\frac{\log q_1}{U} \ll \frac{\mu_1}{2^s U_0}, \quad \frac{U}{N_1} \ll \frac{2^s U_0}{N_1}, \quad \frac{q_1 \log q_1}{N_1} \ll \frac{q_1 \mu_1}{N_1},$$

kādēļ

$$T_s^2 \ll N_1^2 \left(\frac{\mu_1}{2^s U} + \frac{2^s U_0}{N_1} + \frac{1}{q_1} + \frac{q_1 \mu_1}{N_1} + \frac{m_1}{\tau} \right).$$

Lietojot Švarca-Koši nevienlīdzību dabū rezultātu

$$T = \sum_{s=0}^{k} T_s \leq \sqrt{(k+1) \sum_s T_s^2} \ll N_1 \sqrt{\mu_1 \left(\frac{\mu_1}{U_0} + \frac{U_1}{N_1} + \mu_1 \left(\frac{1}{q_1} + \frac{q_1 \mu_1}{N_1} + \frac{m_1}{\tau} \right) \right)},$$

kas lemmu pierāda.

7. l e m m a. Ja

n vesels pastāvīgs skaitlis ≥ 2,
$f(x) = \alpha x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} x$, $\alpha, \ldots, \alpha_{n-1}$ reāli skaitļi,
m vesels skaitlis > 0,
$0 < U_0 < U_1 < N$,

$T = \sum_u \sum_v e^{2\pi i m f(uv)}$, kur u mainās pa veselu skaitļu virknes (u) skaitļiem robežās $U_0 < u \leq U_1$ un katram tādam u v mainās pa veselu skaitļu virknes (v) skaitļiem robežās $0 < v \leq \frac{N}{u}$,

tad

$$T \ll N_\mu \left(\frac{m U_1^n}{N^n} + \frac{m}{q} + \frac{q}{N^n} + \frac{1}{U_0^n} \right)^\gamma \tag{5}$$

ar

$$\gamma = \frac{1}{19{,}6\, n^6 (\log n)^2} \ (n > 2).$$

Labākas γ vērtības, kad $2 \leq n \leq 14$, dod sekojošā tabula

n	γ	n	γ
		8	$8{,}79 \cdot 10^{-8}$
2	$1{,}04 \cdot 10^{-3}$	9	$2{,}68 \cdot 10^{-8}$
3	$1{,}42 \cdot 10^{-4}$	10	$1{,}12 \cdot 10^{-8}$
4	$2{,}48 \cdot 10^{-5}$	11	$5{,}70 \cdot 10^{-9}$
5	$5{,}06 \cdot 10^{-6}$	12	$3{,}06 \cdot 10^{-9}$
6	$1{,}18 \cdot 10^{-6}$	13	$1{,}72 \cdot 10^{-9}$
7	$3{,}10 \cdot 10^{-7}$	14	$9{,}89 \cdot 10^{-10}$.

Šī ir Виноградов [4], Лемма 8 speciāls gadījums.

8. **l e m m a.** Ja r vesels pastāvīgs skaitlis $\geqslant 1$,

$$0 < \Delta < \tfrac{1}{2}, \qquad 0 \leqslant B-A \leqslant 1-2\Delta,$$

tad eksistē periodiska funkcija $\psi(x)$ ar periodu 1 un sekojošām īpašībām:

1) $\psi(x)=1$, ja $A \leq x \leq B$,
2) $0 \leqslant \psi(x) \leq 1$, ja $A-\Delta \leq x \leq A$, $B \leq x \leq B+\Delta$,
3) $\psi(x)=0$, ja $B+\Delta \leq x \leq 1+A-\Delta$,
4) $\psi(x)$ var attīstīt Furjē rindā

$$\psi(x) = B-A+\Delta + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m \cos 2\pi mx + b_m \sin 2\pi mx),$$

kur

$$a_m \ll \frac{1}{m}, \quad b_m \ll \frac{1}{m}, \text{ ja } m < \frac{1}{\Delta},$$

$$a_m \ll \Delta, \quad b_m \ll \Delta, \text{ ja } m < \frac{1}{\Delta}, \quad A=B,$$

$$a_m \ll \frac{1}{\Delta^r m^{r+1}}, \quad b_m \ll \frac{1}{\Delta^r m^{r+1}}, \quad \text{ja } m \geqslant \frac{1}{\Delta}.$$

P i e r ā d ī j u m s: Виноградов[4], Лемма 14.

9. **l e m m a.** Ja $f(x)$ reāla funkcija, definēta visiem ~~dabīgajiem skaitļiem~~, $\Delta>0$, $\Delta_0>0$, m un x apzīmē dabīgos skaitļus,

$$\sum_{x \leq P} e^{2\pi i m f(x)} \ll P\Delta_0 \quad \text{visiem} \quad m < \Delta^{-2} \qquad (6)$$

un dotam pozitīvam $\gamma < 1$ G izteic rindas

$$\{f(x)\}, \quad x=1,2,\ldots,P$$

daļu skaitu, kas pieder noslēgtajam intervallam $0,\gamma$, tad

$$G = P\gamma + O(P\Delta + P\Delta_0 \log \Delta^{-1}). \qquad (7)$$

P i e r ā d ī j u m s[15]. Var pieņemt $\Delta < \frac{1}{3}$, jo pretējā gadījumā lemma acīmredzama. Tad izvēloties reālos skaitļus A,B ar nosacījumu $0 \leq B-A \leq 1-2\Delta$ konstruē funkciju

$$\psi(f(x)) = 1, \quad \text{ja } A \leq f(x) \leq B \pmod 1,$$
$$0 \leq \psi(f(x)) \leq 1, \quad \text{ja } A-\Delta \leq f(x) \leq A, \quad B \leq f(x) \leq B+\Delta \pmod 1,$$
$$\psi(f(x)) = 0, \quad \text{ja } B+\Delta \leq f(x) \leq 1+A-\Delta \pmod 1$$

attīstāmu rindā

$$\psi(f(x)) = B-A+\Delta + \sum_{m=1}^{\infty}\big(a_m \cos 2\pi m f(x) + b_m \sin 2\pi m f(x)\big), \qquad (8)$$

ar

$$a_m \ll \frac{1}{m}, \quad b_m \ll \frac{1}{m}, \quad \text{ja } m < \frac{1}{\Delta},$$

$$a_m \ll \frac{1}{\Delta m^2}, \quad b_m \ll \frac{1}{\Delta m^2}, \quad \text{ja } m \geqslant \frac{1}{\Delta}.$$

[15] Pierādījuma metode pēc Виноградов [4], lp.103-105.

Summējot (8) pa $x=1,2,\dots,P$ izteic

$$\sum_{x=1}^{P}\Psi(f(x)) = P(B-A+\Delta) + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m S_m' + b_m S_m''),$$

kur

$$S_m' = \sum_{x=1}^{P}\cos 2\pi m f(x), \quad S_m'' = \sum_{x=1}^{P}\sin 2\pi m f(x)$$

un/pēc(6)/

$$\begin{matrix} S_m' \\ S_m'' \end{matrix} \ll \begin{cases} P\Delta_0, & \text{ja } m < \frac{1}{\Delta^2} \\ P, & \text{ja } m \geq \frac{1}{\Delta^2} \end{cases}.$$

Ievērojot a, b novērtējumus izteic

$$\sum_{m=1}^{\infty}(a_m S_m' + b_m S_m'') \ll \sum_{m<\frac{1}{\Delta}}\frac{P\Delta_0}{m} + \sum_{\frac{1}{\Delta}\leq m<\frac{1}{\Delta^2}}\frac{P\Delta_0}{\Delta m^2} + \sum_{m\geq\frac{1}{\Delta^2}}\frac{P}{\Delta m^2}$$

$$\ll P\Delta_0\log\Delta^{-1} + P\Delta_0 + P\Delta,$$

kādēļ

$$\sum_{x\leq P}\Psi(f(x)) = P(B-A+\Delta) + O(P\Delta + P\Delta_0\log\Delta^{-1}). \qquad (9)$$

No šejienes liekot

$$A = \alpha,\ B = \alpha + \Delta \ (\alpha \text{ jebkurš reālais skaitlis})$$

atbilstošai funkcijai $\Psi_1(f(x))$ ir

$$\sum_{x\leq P}\Psi_1(f(x)) = 2P\Delta + O(P\Delta + P\Delta_0\log\Delta^{-1})$$

$$\ll P\Delta + P\Delta_0\log\Delta^{-1},$$

pie kam

$$\Psi_1(f(x)) = 1, \text{ ja } \alpha \leq f(x) \leq \alpha + \Delta \pmod 1.$$

Pēdējā nosacījuma speciāli gadījumi ir

$$A-\Delta \leq f(x) \leq A, \quad B \leq f(x) \leq B+\Delta \pmod 1 \qquad (10)$$

un ar tiem pielāgotām funkcijām $\Psi_1(f(x))$ pierāda, ka rindas

$$f(x), \quad x=1,2,\dots,P$$

to skaitļu skaits, kuŗi izpilda vienu no nosacījumiem (10), ir $\ll P\Delta + P\Delta_0\log\Delta^{-1}$. No šejienes seko, ka definējot funkciju

$$\chi(f(x)) = \begin{cases} 1, & \text{ja } A \leq f(x) \leq B \pmod 1, \\ 0, & \text{jo } B < f(x) < 1+A \pmod 1 \end{cases}$$

pēc (9) ir

$$\sum_{x\leq P}\chi f(x) = P(B-A+\Delta) + O(P\Delta + P\Delta_0\log\Delta^{-1}).$$

Liekot te $A=0$, $B=\gamma$ teorēma seko.

10.1 e m m a (Veila kritērijs). Ja $(x_n) = x_1, x_2, \dots$ ir reālu skaitļu virkne un katram veselam pastāvīgam $h>0$ ir

$$\sum_{n\leq P} e^{2\pi i h x_n} = o(P), \qquad (11)$$

tad skaitļi x_n ir sadalīti asimptotiski vienmērīgi (mod 1).

P i e r ā d ī j u m s. Ar G apzīmējam rindas (x_n), $n \leq P$ to skaitļu skaitu, kas attiecībā uz mod 1 atrodas noslēgtajā intervallā $0, \gamma$ $(0 \leq \gamma \leq 1)$ un ar $P\Delta_0(h)$ apzīmējam summas

$$\sum_{n \leq P} e^{2\pi i h x_n}$$

absolūto vērtību; pēc lemmas nosacījuma $\Delta_0(h) \to 0$, kad $P \to \infty$ un h pastāvīgs.

Izvēloties patvaļīgi mazu pozitīvu ε apskata h vērtības $< \varepsilon^{-2}$ un definē P funkciju

$$\Delta_0 = \max_{h < \varepsilon^{-2}} \Delta_0(h),$$

kas $\to 0$, kad $P \to \infty$. Tādēļ, kad P ir pietiekoši liels, tad $\Delta_0 \log \varepsilon^{-1} < \varepsilon$ un formulā (7) atlikuma loceklis ir $O(P\varepsilon)$. Tā ka ε var pēc patikas samazināt pie kam O konstantes paliek aprobežotas, formula (7) lemmu pierāda.

Pierādījumu, ka arī apgrieztā kārtā no skaitļu x_n mod 1 asimptotiski vienmērīgā sadalījuma seko (11), sk. piem. Koksma[18], lp.91.

§ 3.

VIENMĒRĪGAIS SADALĪJUMS PIETIEKOŠI BLĪVĀM SKAITĻU VIRKNĒM

Šinī paragrafā teorēmas I un II pierāda skaitļu $\{\alpha d\}$ vienmērīgo sadalīšanos pieņemot, ka skaitļu (d) virkne ir pietiekoši blīva. Noteiktāki sakot ir vajadzīgs, ka skaitļu $d \leq N$ sakits nav zemākas kārtas lieluma, kā $N\mu^{-\delta}$ (δ pozitīva konstante <1) un ka α izpilda zināmus ierobežojumus (14),(14') pēc kuriem α dabu noteic IV teorēma. III teorēma apskata skaitļu d konkretu piemēru, kas teorēmas I, II nosacījumus izpilda.

Teorēmu I un II galvenais pierādīšanas līdzeklis ir lemmas 6 un 7, kas pieder Vinogradovam.

Lemmu un teorēmu atkarība šāda:

13(11,12), 15(6,14), 16(7,14), I(10,11,13,15), II(10,11,13,16), III(I,II,17).

11. l e m m a. Ja p mainās pa pirmskaitļiem, tad ar piemērotu konstanti B ir

$$\sum_{p\leq N}\frac{1}{p} = \log\log N + B + O\left(\frac{1}{\log N}\right).$$

P i e r ā d ī j u m u sk. piem. Landau [8], lp.100-103 vai Ingham [13], lp.22. Šo rezultātu pirmais pierādījis Mertens 1874. g.

12. l e m m a. Ja

$|a_n| < c.\log n$ visiem $n \geqslant 2$,

$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$, $s = \sigma + it$, $\sigma > 1$,

$T > 0$, $x > 2$, $1 < \eta < 2$,

$(\eta - 1)\sum\frac{|a_n|}{n^\eta}$ apskatāmiem η aprobežots,

tad der novērtējums

$$\left|\int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti}\frac{x^s}{s}f(s)\,ds - 2\pi i\sum_{n\leq x}a_n\right| < c_1\left(\frac{x^\eta}{T(\eta-1)} + \frac{x\log^2 x}{T} + \log x\right),$$

kur konstante c_1 atkarīga no $f(s)$, bet neatkarīga no T, x, η.

P i e r ā d ī j u m s: Landau [10], Hilfssatz 3.

13. l e m m a. Ja

$1 < H \leq e^{\sqrt{\mu}}$,

$0 < N_1 \leq N$, $\log N_1 = \mu + O(\sqrt{\mu})$,

F apzīmē to dabīgo skaitļu $\leq N_1$ skaitu, kuŗu visi pirmreizinātāji nepārsniedz H,

tad

$$F \ll N_1 H^{-1}\mu^2.$$

P i e r ā d ī j u m s. Kvadrātbrīvajiem skaitļiem Vinogradovs [3], lp.110 šo novērtējumu pierāda ļoti elementāri. Pierādījums, kuŗu se dodu vispārīgam gadījumam, izlieto komplekso integrēšanu.

Pēc iepriekšējās lemmas ir

$$F \ll \left| \int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti} \frac{N_1^s}{s} f(s)\, ds \right| + \frac{N_1^\eta}{T(\eta-1)} + \frac{N_1\mu^2}{T} + \mu ,$$

kur

$$1 < \eta < 2,$$

$$f(s) = \prod_{p\leq H} \frac{1}{1-p^{-s}},$$

$s = \sigma + it$ un integrācijas ceļš taisne.

Liekam

$$\eta = 1 + \mu^{-1}, \quad T = H;$$

tad

$$F \ll \left| \int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti} \frac{N_1^s}{s} f(s)\, ds \right| + N_1 H^{-1} \mu^2.$$

No

$$\log f(s) = -\sum_{p\leq H} \log\left(1-\frac{1}{p^s}\right) = \sum_{p\leq H}\left(\frac{1}{p^s} + \frac{1}{2p^{2s}} + \frac{1}{3p^{3s}} + \ldots\right),$$

kad

$$\sigma \geqslant \sigma_0 = 1 - (\log H)^{-1}$$

novērtē

$$|\log f(s)| \leq \sum_{p\leq H} p^{-\sigma} + O(1) \leq \sum_{p\leq H} p^{-\sigma_0} + O(1) = \sum_{p\leq H} \frac{p^{1-\sigma_0}}{p} + O(1)$$

$$\leq H^{1-\sigma_0} \sum_{p\leq H} \frac{1}{p} + O(1) = e \sum_{p\leq H}\frac{1}{p} + O(1).$$

Tagad pēc 11.lemmas

$$|\log f(s)| \leq e \log\log H + O(1) \leq \frac{e}{2} \log\mu + O(1)$$

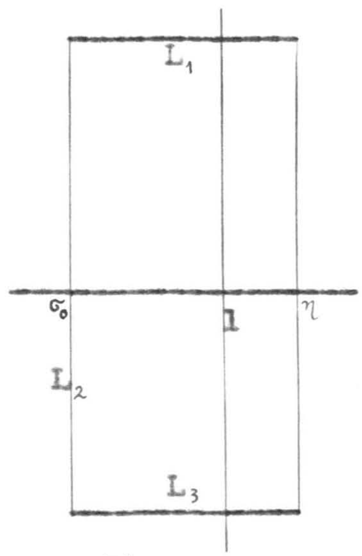
kādēļ arī

$$|R\log f(s)| \leq \frac{e}{2} \log\mu + O(1)$$

un

$$|f(s)| = e^{R\log f(s)} \leq (e^{\log\mu})^{\frac{e}{2}} . O(1)$$

$$\ll \mu^{\frac{e}{2}} \leq \mu^{\frac{3}{2}} .$$



Lietojot Koši teorēmu integrācijas ceļu $\eta - Hi$, $\eta + Hi$ atvieto ar L_1, L_2, L_3 (sk.zīm.). Uz L_1 un L_3 ir $\frac{1}{s} \ll H^{-1}$, $N_1^s \ll N_1$, kādēļ atbilstošās integrāla daļas ir

$$\left.\begin{matrix} I_1 \\ I_3 \end{matrix}\right\} \ll N_1 H^{-1} \mu^{\frac{3}{2}} \int_{\sigma_0}^{\eta} d\sigma = N_1 H^{-1} \mu^{\frac{3}{2}} (\eta - \sigma_0) \ll N_1 H^{-1} \mu^{\frac{3}{2}} .$$

Ceļam L_2 atbilstošo integrālu I_2 sadala daļās $I_{21} = \int_{\sigma_0}^{\sigma_0+iH}$ un $I_{22} = \int_{\sigma_0}^{\sigma_0-iH}$, kas abas novērtējamas vienādi. Tā ka

$$I_{21} \ll N_1^{\sigma_0} \max|f(s)| \left|\int_0^H \frac{dt}{|\sigma_0+it|}\right| \ll N_1 e^{-\frac{\log N_1}{\log H}} \cdot \mu^{\frac{3}{2}} \cdot \log H$$

$$\ll N_1 e^{-\frac{\mu+O(\sqrt{\mu})}{\sqrt{\mu}}} \cdot \mu^2 \ll N_1 e^{-\sqrt{\mu}} \cdot \mu^2 \ll N_1 H^{-1} \mu^2,$$

no šejienes lemma seko.

14. l e m m a. Ja

$1 < U_0 \leq U_1 \leq N_1 \leq N, \quad 1 \leq N' < N_1,$

$Y = N_1 U_0^{-1},$

$p, p', \ldots$ apzīmē patvaļīgi izvēlētas pirmskaitļu klases (p) skaitļus, kas apmierina nevienlīdzības $U_0 < p \leq U_1$,

(d) apzīmē veselu pozitīvu skaitļu virkni, kuŗas katrs skaitlis d dalās ar vismaz vienu p, pie kam, ja virkne (d) satur skaitli px, tā satur arī skaitli $p'x$ katram p' un veselam x,

$F(n)$ ir veseliem skaitļiem n definēta kompleksa funkcija ar absolūto vērtību 1,

$T = \sum_{N' < d \leq N_1} F(d),$

kad u mainās pa veselu skaitļu virknes (u) skaitļiem u robežās $U_0 < u \leq U_1$ un katram u v mainās pa veselu skaitļu virknes (v) skaitļiem v, kam $0 < v < N_1/u$, der novērtējums

$$\sum_u \sum_v F(uv) \ll X,$$

kur X atkarīgs no skaitļiem U_0, U_1, N_1, bet nav atkarīgs no virknēm $(u), (v)$,

tad

$$T \ll X \log\mu + Y\mu .$$

P i e r ā d ī j u m s. Visus skaitļus d sadala $\ll \mu$ klasēs tā, ka k. klases skaitļi satur tieši k vienādus vai dažādus p; atbilstoši šim sadalījumam izteic

$$T = \sum_k T_k .$$

T_1 skaitļus d dabū katru vienreiz uzrakstot visus iespējamos produktus uv, kur u mainās pa skaitļiem p un v katram tādam u mainās pa noteiktu veselu skaitļu virkni (δ) robežās $\frac{N'}{u} < v \leq \frac{N_1}{u}$. Šo virkni (δ) dabū, ja uzraksta virknes (d) visus skaitļus, kas dalās ar viena vienīga p pirmo pakāpi, tos daļa ar p un izlasa visus dažādos rezultātus, ko sakārto pēc lieluma. No šejienes

$$T_1 = \sum_u \sum_v F(uv) \ll X.$$

Lai dabūtu T_2 skaitļus d, uzraksta produktus uv, kur u mainās pa skaitļiem p un v katram tādam u mainās pa zināma veselu skaitļu virkni

(δ') robežās $\frac{N'}{u} < v \leq \frac{N_1}{u}$. Šī virkne ($\delta'$) satur visus iespējamos reizinājumus $p\delta$, kur p mainās pa skaitļiem(p) un δ pa skaitļiem (δ). Katrs T_2 skaitlis d, kas nedalās ar p, attēlojas ar produktu uv tieši divreiz; šiem d atbilstošo T_2 daļu apzīmējam ar T_{22}. Kad d dalās ar p^2, tad d attēlojas ar produktu uv vienreiz un T_2 atbilstošo daļu apzīmējam ar T_{21}; tās locekļu skaits ir

$$\sum_p \left[\frac{N_1}{p^2}\right] \leq N_1 \sum_{U_0 < n \leq U_1} \frac{1}{n^2} \ll N_1 U_0^{-1} = Y,$$

kādēļ arī $T_{21} \ll Y$. No šejienes seko

$$T_2 = T_{22} + T_{21} = \tfrac{1}{2}\left(\sum_u \sum_v F(uv) + T_{21}\right)$$

$$\ll \tfrac{1}{2}X + Y.$$

Lai dabūtu T_3 skaitļus d, uzraksta produktus uv, kur u mainās kā agrāk un v katram u mainās pa veselu skaitļu virkni (δ'') robežās $\frac{N'}{u}$, $\frac{N_1}{u}$. Šī virkne (δ'') satur visus iespējamos reizinājumus $p\delta'$, kur p mainās pa pirmskaitļiem(p) un δ' pa skaitļiem(δ'). Sadalām T_3 summā $T_3 = T_{33} + T_{32} + T_{31}$, kur T_{33} satur T_3 visus locekļus, kur d nedalās ar p^2 un tādēļ attēlojas ar produktu uv tieši 3 veidos. T_{32} un T_{31} satur T locekļus, kur d attēlojas ar produktu uv divos, resp. vienā veidā; šie d dalās ar p^2 resp. p^3 un to skaits $\ll Y$. No tā seko novērtējums

$$T_3 = T_{33} + T_{32} + T_{31} = \tfrac{1}{3}\left(\sum_u \sum_v F(uv) + T_{32} + 2T_{31}\right) = \tfrac{1}{3}\sum_u \sum_v F(uv) + \tfrac{1}{3}T_{32} + \tfrac{2}{3}T_{31}$$

$$\ll \tfrac{1}{3}X + Y.$$

Līdzīgi novērtē pārējos T_k un pierāda rezultātu

$$T = \sum_k T_k \ll \sum_k \left(\tfrac{1}{k}X + Y\right) \ll X \log\mu + Y\mu .$$

P i e z ī m e. Lemma paliek pareiza un tās pierādījums pat vienkāršojas, ja p visur apzīmē zināmas klases pirmskaitļu augstākās pakāpes, kādās var būt skaitļu d dalītājas. Ar šo interpretāciju der arī visi tālākie rezultāti, kas seko no 14. lemmas.

15. l e m m a. Ja

$1 < H \leq e^{\sqrt{\mu}}$,

$0 \leq N' \leq N_1 \leq N$,

$H < q \leq NH^{-1}$,

ν konstante ≤ 1,

(d) veselu skaitļu virkne, definēta kā iepriekšējā lemmā pieņemot $U_0 = H$, $U_1 = NH^{-\nu}$,

m vesels skaitlis > 0,

$\rho = \varepsilon_d$ (visiem d) vai $\rho = \varepsilon_{md}$ (visiem d),

$F(d) = \rho e^{2\pi i \alpha m d}$,

$T = \sum_{N' < d \leq N_1} F(d)$,

tad

$$T \ll N_1 H^{-\frac{1}{2}} \sqrt{m + \frac{N}{N} H^{1-\nu}}\ \mu^{\frac{3}{2}} \log\mu \qquad (12)$$

P i e r ā d ī j u m s seko no iepriekšējās lemmas, kur pēc 6.lemmas ir

$$X \ll N_1\mu^{\frac{3}{2}} \sqrt{H^{-1} + \frac{N}{N_1}H^{-\nu} + mH^{-1} + \frac{m}{N}H} \ll N_1\mu^{\frac{3}{2}} H^{-\frac{1}{2}} \sqrt{m + \frac{N}{N_1} H^{1-\nu}},$$

$$Y = N_1 H^{-1}.$$

16.l e m m a. Ja

$1 < H \leq e^{\sqrt{\mu}}$,

n vesels skaitlis $\geqslant 2$,

$f(x) = \alpha x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} x$, $\alpha, \ldots, \alpha_{n-1}$ reāli,

skaitļi d definēti kā 14.lemmā pieņemot $U_0 = H$, $U_1 = NH^{-1}$,

m vesels skaitlis >0,

$F(d) = e^{2\pi i m f(d)}$,

$T = \sum_{d \leq N} F(d)$,

tad

$$T \ll N\,(mH^{-n} + \frac{m}{q} + \frac{q}{N^n})^{\gamma}\ \mu\log\mu,$$

kur γ definēts ar 7.lemmu.

P i e r ā d ī j u m s seko no 14.lemmas, kur pēc 7.lemmas ir

$$X \ll N\mu(mH^{-n} + \frac{m}{q} + \frac{q}{N^n} + H^{-n})^{\gamma}, \quad Y = NH^{-1}.$$

I.t e ō r ē m a. Ja

$p, p', \ldots$ apzīmē patvaļīgi izvēlētas pirmskaitļu klases (p) skaitļus,

(d) ir veselu pozitīvu skaitļu virkne, kuŗas katrs skaitlis d dalās ar vismaz vienu p, pie kam, ja virkne (d) satur skaitli px, tā satur arī skaitli $p'x$ katram p' un veselam x,

δ pozitīva konstante <1,

$$\Delta = \Delta(N) = \sum_{d \leq N} \varepsilon_d \geqslant cN\mu^{-\delta}, \qquad (13)$$

α reāls skaitlis, pie kam visiem lieliem N eksistē attēlojumi (1) ar

$$\mu^6 < q \leq N\mu^{-6}, \qquad (14)$$

tad skaitļi

$$\{\alpha d\},$$

kur d mainās pa virknes (d) skaitļiem, kam $\varepsilon_d = 1$, ir sadalīti asimptotiski vienmērīgi.

P i e r ā d ī j u m s. Skaitļus (d) sadalām trijās klasēs

$$(d) = (d_0) + (d_1) + (d_2)$$

tā,ka (d_0) satur skaitļus d, kuŗu visi pirmreizinātāji nepārsniedz $H = \mu^6$; tādu $d \leq N$ pēc 13. lemmas ir $\ll N\mu^{-4} = o(\Delta)$. Klase (d_1) satur skaitļus d, kas dalās ar $p > N\mu^{-6}$; tādu $d \leq N$ skaits pēc 11. lemmas novērtējams ar

$$\sum_{p > N\mu^{-6}} \left[\frac{N}{p}\right] \leq N \sum_{N\mu^{-6} < p \leq N} \frac{1}{p} = N\left(\log\log N - \log\log N\mu^{-6}\right) + O(N\mu^{-1})$$

$$= -N \log\left(1 - \frac{6 \log \mu}{\mu}\right) + O(N\mu^{-1}) \sim \frac{6N \log \mu}{\mu} = o(\Delta).$$

Klase (d_2) satur skaitļus d, kas izpilda 15. lemmas nosacījumus ar $H = \mu^6$, $\nu = 1$, $N_1 = N$, $N' = H$, kādēļ šiem d atbilstošā summa

$$T = \sum_{d \leq N} \varepsilon_d e^{2\pi i \alpha m d}$$

novērtējama

$$\ll N\sqrt{m}\,\mu^{-\frac{3}{2}} \log \mu = o(\Delta)$$

visiem $m \ll \mu$. Tā ka otrās klases skaitļu $d \leq N$ ar $\varepsilon_d = 1$ ir $\sim \Delta$, pēc Veila kritērija (10. lemma) šiem d skaitļi $\{\alpha d\}$ ir sadalīti asimptotiski vienmērīgi. No tā arī teorēma seko, jo "gandrīz visi" d pieder klasei (d_2).

II. t e o r ē m a. Ja

skaitļi d definēti kā iepriekšējā teorēmā,

γ definēts ar 7. lemmu,

δ pozitīva konstante < 1,

$$\Delta = \Delta(N) = \sum_{d \leq N} 1 \geq cN\mu^{-\delta}, \qquad (13')$$

n vesels skaitlis ≥ 2,

$f(x) = \alpha x^n + \ldots + \alpha_{n-1} x$, $\alpha, \ldots, \alpha_{n-1}$ reāli skaitļi,

visiem lieliem N eksistē α attēlojumi (1) ar

$$\mu^{\frac{2}{\gamma}} < q \leq N\mu^{-\frac{2}{\gamma}}, \qquad (14')$$

tad skaitļi

$$\{f(d)\}$$

ir sadalīti asimptotiski vienmērīgi.

P i e r ā d ī j u m a m lieto 16. lemmu ar $H = \mu^{\frac{2}{\gamma}}$ un atkārto līdzīgus spriedumus kā I. teorēmas pierādījumā.

Var uzrādīt ļoti daudzas aritmētikā svarīgas skaitļu virknes (d), kas izpilda nosacījumu (13) un kuŗām tā tad der iepriekšējās teorēmas. Atzīmēsim te tikai vienu piemēru; citi piemēri apskatīti pie VI teorēmas.

17. l e m m a. Ja

p_n apzīmē n. pirmskaitli pirmskaitļu dabīgajā sakārtojumā,

a apzīmē dabīgos skaitļus, kas veido aritmētisko progresiju $a_0 + kx$ ar diferenci $k \geq 1$,

d mainās pa dabīgajiem skaitļiem, kuŗu visi pirmreizinātāji ir p_a,

tad

$$\Delta = \Delta(N) = \sum_{d \leq N} 1 \sim cN\mu^{-(1-\frac{1}{k})} .$$

P i e r ā d ī j u m s: Райков [6] §2, [7] §3.

III. t e ō r ē m a. Ja

p_n apzīmē n. pirmskaitli visu pirmskaitļu dabīgajā sakārtojumā,

a mainās pa dabīgo skaitļu virkni (a) ar pozitīvu blīvumu, t.i. eksistē pozitīva konstante λ tā, ka $\sum_{a \leq x} 1 > \lambda x$ visiem $x > x_0 > 1$,

d mainās pa dabīgajiem skaitļiem, kuŗu visi pirmreizinātāji ir p_a,

$f(x)$ definēts kā II teōrēmā un izpilda nosacījumu (14′),

α izpilda nosacījumu (14),

tad skaitļi

$$\{\alpha d\}, \quad \text{resp.} \quad \{f(d)\}$$

ir sadalīti asimptotiski vienmērīgi.

P i e r ā d ī j u m s. Ja virknes (a) pēc lieluma sakārtotie skaitļi ir $a_1, a_2, \ldots$, tad konstruē veselu skaitļu aritmētisko progresiju $(b) = b_1, b_2, \ldots$ ar diferenci k tā, ka visiem n ir $b_n \gg a_n$. Pēc iepriekšējās lemmas dabīgo skaitļu $\leq N$, kuru visi pirmreizinātāji

atrodas rindā $p_{b_1}, p_{b_2}, \ldots$ ir $\sim cN\mu^{-(1-\frac{1}{k})}$. Tā ka katram skaitlim $m = p_{b_i} p_{b_j} \ldots p_{b_l}$ kura pirmreizinātāji ir formā p_b, var viennozīmīgi piekārtot skaitli $d = p_{a_i} p_{a_j} \ldots p_{a_l} \leq m$, kuŗa visi pirmreizinātāji ir formā p_a, seko, ka

$$\sum_{d \leq N} 1 > c' N\mu^{-(1-\frac{1}{k})} ,$$

ar ko teōrēma pierādīta.

P i e z ī m e. Ievērojot, ka dažādās aritmētiskās progresijās ar vienu un to pašu diferenci ir asimptotiski vienāds pirmskaitļu skaits[16], seko, ka III teōrēma paliek pareiza, kad $p_1, p_2, \ldots$ apzīmē ne visus, bet tikai dotai (vai dotām) aritmētiskām progresijām piederīgos pirmskaitļus sakārtotus pēc lieluma.

Beidzot, lai raksturotu tuvāk irracionālos skaitļus α, kas apmierina nosacījumus (14) vai (14′), pierādīsim sekojošo

IV. t e ō r ē m u. Ja

a, b pozitīvas konstantes, $a > 1$,

$$a^b < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{15}$$

[16] sal. Landau [8], lp. 458-469.

α irracionāls skaitlis, pie kam vai nu α ir algebrisks vai α nepārtrauktās daļas attīstījuma (2) visi kvocienti k_n apmierina nosacījumu

$$k_n \ll e^{a^n}, \qquad (16)$$

tad visiem lieliem N eksistē α attēlojumi (1) ar

$$\mu^b < q \leq N\mu^{-b} . \qquad (17)$$

P i e r ā d ī j u m s. Pirmkārt pieņemsim ,ka N patvaļīgi liels un α sekojošo tuvinājumu daļu $\frac{a_{n-1}}{q_{n-1}}, \frac{a_n}{q_n}$ saucēji q_{n-1}, q_n apmierina nevienlīdzības

$$q_{n-1} \leq \mu^b , \quad q_n > \sqrt{N},$$

no kurienes

$$q_n > e^{\frac{1}{2}\mu} > e^{\frac{1}{2}\sqrt[b]{q_{n-1}}} .$$

Tā ka[17]

$$\left|\alpha - \frac{a_{n-1}}{q_{n-1}}\right| < \frac{1}{q_{n-1}q_n} ,$$

no šejienes ar $q=q_{n-1}$ seko α approksimācija

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| < e^{-q^c} \quad (c \text{ konstante} < \tfrac{1}{b}),$$

kāda pēc Liuviļa teorēmas[18] algebriskam α nav iespējama. Skaitļus α, kam šāda approksimācija iespējama, sauc par Liuviļa transcendentiem skaitļiem. Hardī, Litlvuds un citi autori[19], kas irracionālitātes iedala klasēs pēc iespējamās approksimācijas pakāpes, šos sauc par irracionālitātēm ar tipu II.

Otrkārt pieņemsim, ka patvaļīgi lieliem N ir α sekojoši tuvināto daļu saucēji q_{n-1}, q_n, kas apmierina nevienlīdzības

$$q_{n-1} \leq \mu^b , \qquad q_n > N\mu^{-b} .$$

Tad

$$k_n = \frac{q_n - q_{n-2}}{q_{n-1}} > \frac{N\mu^{-b} - \mu^b}{\mu^b} = N\mu^{-2b} - 1 > \tfrac{1}{2}N\mu^{-2b} . \qquad (18)$$

Lielāko n vērtību dabūjam pieņemot, ka $k_1=k_2=\ldots=k_{n-1}=1$. Tad $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$ ir Fibonači rindas 1,1,2,3,5,8,... locekļi un[20]

$$q_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right) > \frac{1}{3}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \qquad (n > n_0).$$

No šejienes, ja n ir lielākais dabīgais skaitlis, kam $q_{n-1} \leq \mu^b$,tad arī

[17] sk. Виноградов [5] ,lp.16 vai Hardy and Wright [20] ,lp.137.
[18] sk. piem. Hardy and Wright [20] ,lp.160.
[19] sk. piem. Koksma [18] ,lp.26-28.
[20] sk. piem. Hardy and Wright [20] ,lp.147.

$$\frac{2}{3(1+\sqrt{5})}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n < \mu^b ,$$

no kurienes

$$n < \frac{b \log\mu + \log 3\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}} .$$

Pēc (15) ir $\log a \cdot \frac{b}{\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}} < 1$, kādēļ

$$\mu^{\log a \cdot \frac{b}{\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}}} \; a^{\frac{\log 3\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}}} = o(\mu - 2b \log\mu)$$

jeb

$$a^n = o(\mu - 2b.\log\mu),$$

no kurienes

$$e^{a^n} = o(e^{\mu - 2b.\log\mu})$$

jeb

$$k_n = o(N\mu^{-2b}).$$

Pēdējais rezultāts ir pretrunā ar (18), ar ko (17) pierādīts.

§ 4.

VIENMĒRĪGĀ SADALĪJUMA GADĪJUMS, KAD SKAITĻI d DALĀS AR ARITMĒTISKO PROGRESIJU PIRMSKAITĻIEM

Iepriekšējā paragrafā I.teorēma pierādīja skaitļu $\{\alpha d\}$ vienmērīgo sadalījumu pieņemot, ka (d) veselu pozitīvu skaitļu virkne, kas līdz ar skaitli px satur arī skaitli $p'x$, kad p,p' ir pilnīgi patvaļīgas pirmskaitļu klases skaitļi, un skaitļu d virkne ir pietiekoši blīva. Šinī un nākošajā paragrafā nosacījums par virknes (d) blīvumu atkrīt un tā vietā stājas pieņēmums, ka p,p' ir doto aritmētisko progresiju pirmskaitļi. No tā seko, ka skaitļu $d \leq N$ ir $\gg N\mu^{-1}$ (kad progresiju diference $k \ll 1$).

Šī paragrafa rezultātu galvenais pierādīšanas līdzeklis ir 19. lemma, kas pierādīta pēc Vinogradow [1], Theorem 1 parauga.

Lemmu un teorēmu atkarība šāda:

$$19(2,3,13,15,18),\ 20(19),\ V(10,20),\ 21(13,20),\ VI(\overset{10,}{21}).$$

18. l e m m a. Ja

$\sqrt{N} \leq N_0 \leq N$,

$\mu(n)$ ir Möbius funkcija,

$f(n)$ ir visiem dabīgajiem skaitļiem definēta kompleksa funkcija,

δ mainās pa dabīgajiem skaitļiem ieskaitot 1, kuŗu visi pirmreizinātāji nepārsniedz N_0,

p mainās pa visiem pozitīvajiem pirmskaitļiem,

tad

$$f(1) + \sum_{N_0 < p \leq N} f(p) = \sum_{\delta \leq N} \mu(\delta) \sum_{1 \leq m \leq \frac{N}{\delta}} f(m\delta). \tag{19}$$

Pierādījums. Mainot summēšanas kārtību raksta

$$S = \sum_{\delta \leq N} \mu(\delta) \sum_{m\delta \leq N} f(m\delta) = \sum_{a \leq N} f(a) \sum_{a|\delta} \mu(\delta).$$

Pēc Möbius funkcijas īpašībām pēdējā summa ir

1, kad $a=1$,

bet 0, kad $a > 1$ un δ mainās pa a v i s i e m dalītājiem, t.i., kad a nedalās ar $p > N_0$. Pretējā gadījumā izteic $a=pb(p > N_0)$ un pārveido

$$S = f(1) + \sum_{pb \leq N} f(pb) \sum_{b|\delta} \mu(\delta).$$

Tā ka $b \leq \frac{N}{p} < \sqrt{N} \leq N_0$, b nedalās ne ar vienu pirmskaitli $> N_0$, kādēļ pēdējā summā δ mainās pa b visiem dalītājiem. Tādēļ šī summa ir 1, kad $b=1$, un 0, kad $b > 1$, un seko rezultāts

$$S = f(1) + \sum_{N_0 < p \leq N} f(p).$$

19. l e m m a. Ja

$\mu^2 \leq H \leq e^{\sqrt{\mu}}$,

ν konstante ≤ 1,

$\sqrt{N} \leq N_0 \leq NH^{-\nu}$, $NH^{-\frac{2}{3}} \leq N_1 \leq N$,

$H < q \leq \tau = NH^{-1}$,

h vesels skaitlis > 0,

$f(n) = \varepsilon_n e^{2\pi i \alpha hn}$,

p mainās pa visiem pirmskaitļiem,

$S = \sum_{N_0 < p \leq N_1} f(p)$,

tad

$$S \ll N_1 H^{-\frac{1}{3}} \sqrt{h + \frac{N}{N_1} H^{1+\nu}}\, \mu^{\frac{3}{2}} \log\mu + N_1 H^{-1} h^2 \mu . \qquad (20)$$

P i e r ā d ī j u m s. 1. Pēc iepriekšējās lemmas izteic

$$S = \sum_{\delta \leq N_1} \mu(\delta) \sum_{1 \leq m \leq \frac{N_1}{\delta}} f(m\delta) + O(1);$$

te δ mainās pa skaitļu virkni, kas satur 1 un dabīgos skaitļus, kuŗu visi pirmreizinātāji nepārsniedz N_0.

Vispirms novērtējam S daļu S_1, kur $\delta \leq \tau_1 = N_1 H^{-\frac{1}{3}}$. Pēc 2. lemmas ir

$$S \ll \sum_{\delta \leq \tau_1} \Big| \sum_{m \leq \frac{N_1}{\delta}} \varepsilon_{m\delta} e^{2\pi i \alpha hm\delta} \Big| \leq \sum_{\delta \leq \tau_1} \min \Big(\frac{N_1}{\delta}, \frac{a}{2(\alpha hk\delta)} \Big)$$

$$= \sum_{hk\delta \leq \frac{1}{2}q} + \sum_{\frac{q}{2hk} < \delta \leq \tau_1} = S_{11} + S_{12} .$$

Spriežot līdzīgi kā 3. lemmas pierādījuma pēdējā daļā novērtē

$$S_{11} \ll q \log q \ll NH^{-1}\mu \ll N_1 H^{-\frac{1}{3}}\mu .$$

2. Summu S_{12} sadala $\ll \frac{\tau_1}{q}$ summās ar vispārīgo veidu

$$\Omega = \sum_{d_0 < \delta \leq d_0 + q'} \min\Big(\frac{N_1}{\delta}, \frac{a}{2(\alpha hk\delta)}\Big) \ll \sum_{\delta} \min\Big(\frac{N}{d_0}, \frac{1}{2(\alpha hk\delta)}\Big), \quad q' \leq q$$

par d_0 izvēloties skaitļus

$$\Big[\frac{q}{2hk}\Big], \Big[\frac{q}{2hk}\Big] + q, \ldots, \Big[\frac{q}{2hk}\Big] + s_1 q$$

ar lielāko s_1, kam $\Big[\frac{q}{2hk}\Big] + s_1 q < \tau_1$. Pēc 3. lemmas ir

$$\Omega \ll \Big(\frac{hkq}{\tau} + 1\Big)\frac{N_1}{d_0} + q \log q \ll \frac{hkN_1}{d_0} + q \log q,$$

kādēļ

$$S_{12} = \sum \Omega \ll \frac{h^2 k^2 N_1}{q} + \sum_{s=1}^{s_1} \frac{hkN_1}{qs} + \frac{\tau_1}{q} . q \log q \ll N_1 H^{-1}(h^2 + h\mu) + N_1 H^{-\frac{1}{3}}\mu$$

$$\ll N_1 H^{-\frac{1}{3}}\mu + N_1 H^{-1} h^2 \mu$$

un

$$S = \sum_{\tau_1 < \delta \leq N_1} \mu(\delta) \sum_{1 \leq m \leq \frac{N_1}{\delta}} f(m\delta) + O(N_1 H^{-\frac{1}{3}} + N_1 H^{-1} h^2 \mu).$$

3.Sadalot visus δ divās klasēs (δ_0) un (δ_1) tā, ka visiem pirmās klases skaitļiem ir $\mu(\delta)=1$ un otrās klases skaitļiem $\mu(\delta)=-1$, pēdējās formulas galveno locekli izteic ar starpību

$$T_0 - T_1 ,$$

kur

$$T_0 = \sum_{(\delta_0)} \sum_{m} f(m\delta), \qquad T_1 = \sum_{(\delta_1)} \sum_{m} f(m\delta).$$

Mainot summēšanas kārtību izteic

$$T_0 = \sum_{1 \leq m < \frac{N_1}{\tau}} T(m), \quad T(m) = \sum_{\tau_1 < \delta < \frac{N_1}{m}} f(m\delta).$$

Pēdējo summu sadala divās daļās $T'(m)$ un $T''(m)$ tā, ka pirmā satura tikai tos δ, kuŗu visi pirmreizinātāji nepārsniedz H. Pēc 13.lemmas $T''(m)$ locekļu skaits $\ll \frac{N_1}{m} H^{-1} \mu^2$ un pēc 15.lemmas(liekot m vietā mh un N_1 vietā $\frac{N_1}{m}$) der novērtējums

$$T''(m) \ll \frac{N_1}{m} H^{-\frac{1}{2}} \sqrt{mh + m\frac{N}{N_1} H^{1-\nu}}\, \mu^{\frac{3}{2}} \log\mu \ll \frac{N_1}{\sqrt{m}} H^{-\frac{1}{2}} \sqrt{h + \frac{N}{N_1} H^{1-\nu}}\, \mu^{\frac{3}{2}} \log\mu ,$$

no kurienes

$$T(m) \ll \frac{N_1}{\sqrt{m}} H^{-\frac{1}{2}} \sqrt{h + \frac{N}{N_1} H^{1-\nu}}\, \mu^{\frac{3}{2}} \log\mu + \frac{N_1}{m} H^{-1} \mu^2$$

un

$$T = \sum_{m < H^{\frac{1}{3}}} T(m) \ll N_1 H^{-\frac{1}{3}} \sqrt{h + \frac{N}{N_1} H^{1-\nu}}\, \mu^{\frac{3}{2}} \log\mu + N_1 H^{-1} \mu^{\frac{5}{2}}$$

$$\ll N_1 H^{-\frac{1}{3}} \sqrt{h + \frac{N}{N_1} H^{1-\nu}}\, \mu^{\frac{3}{2}} \log\mu .$$

Tāds pat novērtējums der arī summai T_1, ar ko lemma pierādīta.

20.l e m m a. Ja

$\mu^2 \leq H \leq e^{\sqrt{\mu}}$,

h dabīgais skaitlis $\leq H^{\frac{4}{9}}$,

$H < q \leq NH^{-1}$,

p mainās pa visiem pirmskaitļiem,

tad

$$\sum_{p \leq N} \varepsilon_p e^{2\pi i \alpha h p} \ll NH^{-\frac{1}{3}} h^{\frac{1}{2}} \mu^{\frac{3}{2}} \log\mu .$$

P i e r ā d ī j u m s: Iepriekšējā lemma ar $\nu=1$, $N_0=\sqrt{N}$, $N_1=N$. Kad $h \leq H^{\frac{4}{9}}$, tad $H^{-1}h^2 = H^{-1} h^{\frac{3}{2}} h^{\frac{1}{2}} \leq H^{-1}(H^{\frac{4}{9}})^{\frac{3}{2}} h^{\frac{1}{2}} = H^{-\frac{1}{3}} h^{\frac{1}{2}}$.

V. t e ō r ē m a. Ja p mainās pa dotu aritmētisko progresiju pirmskaitļiem un visiem $N > c_0$ eksistē α attēlojums (1) ar

$$\mu^8 < q \leq N\mu^{-8}, \tag{14*}$$

tad skaitļi

$$\{\alpha p\}$$

ir sadalīti asimptotiski vienmērīgi.

P i e r ā d ī j u m s: Veila kritērijs un iepriekšējā lemma ar $H=\mu^8$.

21.l e m m a. Ja

$p, p', \ldots$ apzīmē patvaļīgus pirmskaitļus, kas pieder dotām aritmētiskām progresijām ar diferenci $k \ll 1$,

(d) apzīmē veselu pozitīvu skaitļu virkni, kuras katrs skaitlis dalās ar vismaz vienu p, pie kam, ja virkne (d) satur skaitli px, tā satur arī skaitli $p'x$ katram p' un veselam x,

$\mu^2 \leq H \prec \frac{1}{2}e^{\sqrt{\mu}}$,

$H < q \leq NH^{-1}$,

h vesels pozitīvs skaitlis $< H^{\frac{1}{3}}$,

$f(n) = \varepsilon_n e^{2\pi i\alpha hn}$,

$S = \sum_{d\leq N} f(d)$,

tad

$$S \ll NH^{-\frac{1}{6}}\sqrt{h}\,\mu^{\frac{3}{2}}\log\mu, \text{ ja } h \leq H^{\frac{1}{9}}, \tag{21}$$

$$S \ll NH^{-\frac{1}{9}}\,\mu^{\frac{3}{2}}\log\mu, \text{ ja } h \leq H^{\frac{2}{9}}. \tag{22}$$

P i e r ā d ī j u m s. Summu S saskalda summās

$$S = \sum_{d\leq N} f(d) = \sum_{d\nmid p>H} + \sum_{d|p>H} = S_1 + S_2;$$

lietojot 13.lemmu novērtē

$$S_1 \ll NH^{-1}\mu^2.$$

Izvēloties pozitīvu $\nu < \frac{4}{9}$ summu S_2 saskalda summās

$$S_2 = \sum_{d\nmid p>NH^{-\nu}} + \sum_{d|p>NH^{-\nu}} = S_2' + S_2'';$$

lietojot 15.lemmu ar $N_1=N$, $\rho = \varepsilon_d$, $m=h$ novērtē

$$S_2' \ll NH^{-\frac{1}{2}}\sqrt{h + H^{1-\nu}}\,\mu^{\frac{3}{2}}\log\mu \ll NH^{-\frac{\nu}{2}}\mu^{\frac{3}{2}}\log\mu.$$

Novērtējot summu S_2'' izteic $d=\delta p$, $p > NH^{-\nu}$ un pārveido

$$S_2'' = \sum_{p\delta\leq N} f(p\delta) = \sum_{\delta<H^{\nu}}\ \sum_{NH^{-\nu}<p\leq\frac{N}{\delta}} f(p\delta) = \sum_{\delta<H^{\nu}} T_\delta,$$

kur

$$T_\delta = \sum_{NH^{-\nu}<p\leq\frac{N}{\delta}} f(p\delta) = \sum_{p\leq\frac{N}{\delta}} - \sum_{p\leq NH^{-\nu}} = T_\delta' - T_\delta''.$$

Pieņemot

$$\mu^2 \leq H \leq e^{\sqrt{\log(Ne^{-\frac{1}{2}\sqrt{\mu}})}} \geq \frac{1}{2}e^{\sqrt{\mu}},$$

$$h \leq H^{\frac{4}{9}-\nu},$$

T'_δ un T''_δ novērtēšanai var lietot 20.lemmu, kurh vietā jāliek $h\delta$ un N vietā N/δ, resp. $NH^{-\nu}$; dabū novērtējumus

$$T'_\delta = \sum_{p \le \frac{N}{\delta}} f(p\delta) \ll \frac{N}{\delta} H^{-\frac{1}{3}} \sqrt{h\delta}\, \mu^{\frac{3}{2}} \log\mu,$$

$$T''_\delta = \sum_{p \le NH^{-\nu}} f(p\delta) \ll NH^{-\nu-\frac{1}{3}} \sqrt{h\delta}\, \mu^{\frac{3}{2}} \log\mu,$$

$$T_\delta \ll \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}} + H^{-\frac{\nu}{2}}\right) NH^{-\frac{1}{3}} \sqrt{h}\, \mu^{\frac{3}{2}} \log\mu,$$

$$S'' = \sum_{\delta \le H^\nu} T_\delta \ll NH^{-\frac{1}{3}+\frac{\nu}{2}} \sqrt{h}\, \mu^{\frac{3}{2}} \log\mu.$$

No šejienes izvēloties $\nu = \frac{1}{3}$ un $\nu = \frac{2}{9}$ novērtējumi (21) un (22) seko.

VI. t e ō r ē m a. Ja

(d) apzīmē veselu pozitīvu skaitļu virkni, kuŗas katrs skaitlis dalās ar aritmētisko progresiju

$$kx + \ell_1, \ldots, kx + \ell_b \; (b \le k \ll 1)$$

vismaz vienu pirmskaitli, pie kam, ja p un p' ir šo progresiju patvaļīgi pirmskaitļi un virkne (d) satur skaitli px, tā satur arī skaitli $p'x$ katram p' un veselam x,

visiem $N > c_0$ eksistē α attēlojumi (1) ar

$$\mu^{16} < q \le N\mu^{-16}, \qquad (14^{**})$$

tad skaitļi

$$\{\alpha d\},$$

kur d mainās pa virknes (d) skaitļiem, kas pieder vajadzīgām aritmētiskām progresijām ar diferenci k (pieņemot, ka tādi d ir), ir sadalīti asimptotiski vienmērīgi.

P i e r ā d ī j u m a m ievēro, ka to skaitļu $d \le N$ skaits, kas pieder vajadzīgajām progresijām, ir $\gg$ kā progresijas $kx+\ell$ pirmskaitļu $p \le N$ skaits $\gg N\mu^{-1}$. No šejienes teōrēma seko pēc Veila kritērija un formulas (21). Formulu (22) izdevīgi lietot sadalījuma atlikuma locekļa novērtēšanai /sal. 9. lemmu/.

Apskatīsim skaitļu (d) p i e m ē r u s, kam der VI. teōrēma.

1) d ir skaitļi (event. kvadrātbrīvie skaitļi), kuŗu visi pirmreizinātāji pieder dotai vai dotām aritmētiskām progresijām ar diferenci $k \ge 1$. Kas $k=1$ un d ir kvadrātbrīvi skaitļi, var pierādīt asākus novērtējumus kā (21), (22) lietojot formulai (19) līdzīgu transformāciju

$$\sum_{d \le N} f(d) = \sum_{\delta \le \sqrt{N}} \mu(\delta) \sum_{1 \le m \le \frac{N}{\delta^2}} f(m\delta^2).$$

2) d mainās pa visiem skaitļiem, kas uzrakstāmi ar divu kvadrātu summu. Katrs tāds d vai nu dalās ar pirmskaitli $p \equiv 1 \pmod 4$ vai pretējā gadījumā $d=n^2$ vai $d=2n^2$ un tādu $d \le N$ ir $\ll \sqrt{N}$. Tādēļ arī skaitļiem d, kas uzrakstāmi ar divu kvadrātu summu, der novērtējumi (21), (22) un teōrēma par skaitļu $\{\alpha d\}$ vienmērīgo sadalīšanos.

Līdzīgs rezultāts par skaitļu $\{\alpha d\}$ vienmērīgo sadalīšanos der arī, kad d mainās pa skaitļiem, kas uzrakstāmi ar triju kvadrātu summu, t.i. pa visiem dabīgajiem skaitļiem n izņemot skaitļus $4^a(8b+7)$ /a,b veseli skaitļi $\geqslant 0$/. Šinī gadījumā pat pierādījums vienkāršāks un trigonometriskās summas $\sum e^{2\pi i\alpha hd}$ novērtējums asāks.

3) d mainās pa dabīgajiem skaitļiem, kuŗu pirmreizinātāju skaits ir $a \geqslant 1$(resp. $\leqslant a$), piemēram $a=2$.

4) d ir dabīgie skaitļi (event. kvadrātbrīvi), kuŗu pirmreizinātāju skaits ievērojot vairākkārtējos ir kāds no augošās dabīgo skaitļu virknes

$$(a) = a_1, a_2, a_3, \ldots$$

skaitļiem. Piemēram

d ir skaitļi, kam $\mu(d) = +1$ (resp. -1)

vai

d ir skaitļi, kam $\lambda(d) = +1$ (resp. -1).

Šajos gadījumos virkne (a) satur visus pāŗu (resp. nepāŗu) skaitļus $\geqslant 0$. Rezultāts der arī, kad d mainās pa skaitļiem d ar $\mu(d)=0$; pierādījumam ievēro, ka šo skaitļu kopa ir visu dabīgo skaitļu kopas un kvadrātbrīvo skaitļu kopas diference.

Beidzot teorēma par skaitļu $\{\alpha d\}$ vienmērīgo sadalīšanos un novērtējumi (21),(22) der arī tad, kad virkne (a) izteic skaitļu d d a ž ā d o pirmskaitļu skaitu; pierādījumam izlieto 14.lemmas piezīmi.

§ 5.

REZULTĀTU UZLABOJUMI SPECIĀLU KLASU IRRACIONĀLITĀTĒM

Šinī paragrafā lemmas 23 un 24 dod trigonometrisko summu novērtējumus, kas visām irracionalitātēm ar tipu I ir labāki par iepriekšējā paragrafa novērtējumiem. Jo zemākas pakāpes ir α iespējamās approksimācijas ar racionāliem skaitļiem, jo labāki ir vienmērīgā sadalījuma atlikuma locekļa novērtējumi un citi līdzīgie rezultāti (sal. teorēmas VIII un IX).

Galvenais pierādīšanas līdzeklis šinī paragrafā ir 23.lemma, kas pierādīta pēc Vinogradova darba[2] parauga.

Lemmu un teorēmu atkarība šāda:

22(6), 23(6,22), 24(6,22,23), VII(9,23,24), VIII(10,23,24,25),
IX(VIII).

22.l e m m a. Ja

ρ patvaļīgi maza pozitīva konstante, $r = 1+\rho$,
$d_1 \geqslant N^{\frac{3}{4}}$, $d_1 \leq N_1 \leq N$,
(d) dabīgo skaitļu virkne, kas līdz ar px satur arī skaitli $p'x$ katram veselam x un visiem pirmskaitļiem $p, p' \leq \sqrt{N}$; neviens d nedalās ar $p > \sqrt{N}$,
m, h veseli skaitļi > 0,
$f(n) = \varepsilon_n e^{2\pi i\alpha hn}$,

tad

$$T(m) = \sum_{d_1 < d \leq N_1} f(md) \ll N_1 e^{\varepsilon\sqrt[3]{\mu}} \sqrt{d^{-\frac{1}{3r}} + \frac{q}{N_1} + \frac{hm}{q}} \quad . \tag{23}$$

P i e r ā d ī j u m s. 1. Ievērojam, ka d dalās tikai ar pirmskaitļiem $p \leq \sqrt{N}$ un $d_1 \geqslant N^{\frac{3}{4}}$, kādēļ katram $d > d_1$ ir vismaz divi pirmreizinātāji.

Visus pirmskaitļus $p \leq \sqrt{N}$ sadalām τ grupās[21] liekot s. grupā skaitļus p, kas ieslēgti intervallā

$$2^{r^{s-1}} \leq p < 2^{r^s} .$$

Grupu skaitu τ noteic kā lielāko veselo skaitli, kam $2^{r^{\tau-1}} < \sqrt{N}$, no kurienes

$$r^{\tau-1} < \frac{\mu}{2\log 2} , \quad r^{\tau} < \mu \quad (\text{pieņemot } r < 2\log 2),$$

$$\tau < \frac{\log \mu}{\log r} .$$

Ar σ apzīmējot skaitļa $d \leq N$ pirmreizinātāju skaitu no $2^{\sigma} \leq N$ novērtē $\sigma \leq \frac{\mu}{\log 2}$.

[21] Te un turpmāk τ nozīme neatkarīga no α attēlojuma(1').

Visus apskatāmos d sadalām klasēs liekot vienā un tanī pat klasē tos d, kuŗu pirmreizinātāji pa pirmskaitļu grupām sadalās vienādi. Visu klasu skaitu D novērtē ar

$$D < (\max\sigma)^{\tau} < \left(\frac{\mu}{\log 2}\right)^{\frac{\log\mu}{\log r}} \ll e^{\varepsilon'\sqrt[3]{\mu}} .$$

2. Novērtēsim summas $T(m)$ daļu Ω, kas atbilst patvaļīgai d vērtību klasei. Tās jebkuŗš d uzrakstāms formā

$$d = f_1 f_2 \dots f_{\tau} ,$$

kur $f_s\,(s=1,2,\dots,\tau)$ apzīmē s. pirmskaitļu grupai piederīgo skaitļa d faktoru reizinājumu; $f_s=1$, ja tādu d faktoru nav. Ar ℓ_s apzīmējam f_s pirmreizinātāju skaitu. Tad liekot

$$\varphi_s = 2^{r^{s-1}\ell_s} , \qquad F_s = 2^{r^{s}\ell_s}$$

acīmredzot ir

$$\varphi_s \leq f_s < F_s .$$

Skaitļus

$$\varphi_1 ,\dots ,\varphi_{\tau}$$
$$f_1 ,\dots ,f_{\tau}$$
$$F_1 ,\dots ,F_{\tau}$$

sakārtotus pēc lieluma nedilstoši apzīmējam ar

$$\gamma_1 ,\dots ,\gamma_{\tau}$$
$$g_1 ,\dots ,g_{\tau}$$
$$G_1 ,\dots ,G_{\tau}$$

un attiecīgi izmainām arī skaitļu p grupu numerus; tad

$$d = g_1 \dots g_{\tau} , \qquad \gamma_s \leq g_s < G_s = \gamma_s^{\,r} ,$$

$$\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots \leq \gamma_{\tau} .$$

Ar ν apzīmējam lielāko dabīgo skaitli $\leq \tau$, kam

$$G_1 \dots G_{\nu-1} \leq d_1^{\frac{1}{3}}$$

(lasot formulas kreiso pusi par 1, ja $\nu=1$).

3. Apskatīsim vispirms gadījumu $\nu < \tau$.
Liekam

$$u = g_1 \dots g_{\nu} , \qquad v = g_{\nu+1} \dots g_{\tau} ,$$
$$u_1 = \gamma_1 \dots \gamma_{\nu} , \qquad v_1 = \gamma_{\nu+1} \dots \gamma_{\tau} ,$$
$$u_2 = G_1 \dots G_{\nu} , \qquad v_2 = G_{\nu+1} \dots G_{\tau} ;$$

tad

$$(u_1 v_1)^r = u_2 v_2 ,$$

$$d_1 < uv \leq N_1 .$$

Tā ka $v_2 \geqslant G_\tau$ un skaitļu G_s virkne nedilstoša, der nevienlīdzība $G_s \leq v_2$. Pēc ν definīcijas

$$u_2 \leq d_1^{\frac{1}{3}} G_\nu \leq d_1^{\frac{1}{3}} v_2$$

un

$$d_1^{\frac{1}{3}} < u_2 \leq d_1^{\frac{1}{3}} v_2 ,$$

no kurienes

$$u_2 v_2 \leq d_1^{\frac{1}{3}} v_2^2$$

un (ievērojot, ka $d_1 < uv < u_2 v_2$) arī $\qquad d_1 < d_1^{\frac{1}{3}} v_2^2$.

Dalot pēdējo nevienlīdzību ar $d_1^{\frac{1}{3}}$ un velkot kvadrātsakni dabū nevienlīdzību

$$d_1^{\frac{1}{3}} < v_2 = v_1^r \leq v^r ,$$

no kurienes

$$v > d_1^{\frac{1}{3r}} ,$$

$$u \leq \frac{N_1}{v} < N_1 d_1^{-\frac{1}{3r}} ;$$

tā ka

$$u^r \geqslant u_1^r = u_2 > d_1^{\frac{1}{3}} ,$$

der nevienlīdzība

$$u > d_1^{\frac{1}{3r}} .$$

Tā tad ir

$$d = uv, \quad d_1^{\frac{1}{3r}} < u < N_1 d_1^{-\frac{1}{3r}} ,$$

un

$$\Omega = \sum_u \sum_v f(muv),$$

kur u mainās pa augšā apskatītā veida skaitļiem($=g_1 \ldots g_\nu$) robežās $d_1^{\frac{1}{3r}} < u < N_1 d_1^{-\frac{1}{3r}}$ un v katram tādam u mainās pa skaitļiem v($=g_{\nu+1} \ldots g_\tau$) robežās $\frac{d_1}{u} < v \leq \frac{N_1}{u}$. Lietojot 6.lemmas formulu(4) novērtē

$$\Omega \ll N_1 \mu \sqrt{d_1^{-\frac{1}{3r}} + \frac{q\mu}{N_1} + \frac{hm}{q}} .$$

4. Tagad apskatīsim gadījumu $\nu = \tau$.

Skaitļa g_τ pirmreizinātāju skaitu ℓ_τ apzīmējam vienkāršības dēļ ar χ un liekam $\chi_1 = [\frac{\chi}{2}]$. Tā ka

$$G_1 \ldots G_{\tau-1} \leq d_1^{\frac{1}{3}} ,$$

seko nevienlīdzības

$$g_\tau > d_1^{\frac{2}{3}} \geqslant N^{\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}} = N^{\frac{1}{2}} ,$$

kādēļ $\chi \geqslant 2$, $\chi_1 \geqslant 1$.

Tagad katru d attēlojam ar reizinājumu d=uv, kur u satur τ .grupas χ_1 pirmreizinātājus un visu pārējo grupu pirmreizinātājus, kamēr v satur $\chi - \chi_1$ atlikušos τ.grupas pirmreizinātājus. Tādā kārtā d var sadalīt faktoros c=c(d) veidos, kur

$$1 \leq c \leq c_1 = \binom{\chi}{\chi_1} \leq \chi^{\chi_1} < (\tfrac{3}{2}\mu)^\mu$$

(jo $\chi < \frac{\mu}{\log 2} < \frac{3}{2}\mu$). Kad d ir k v a d r ā t b r i v i s k a i t ļ i[22],

[22] Vai arī, kad lemas formulējumā un pierādījumā p visur apzīmē pirmskaitļu pakāpes un attiecībā uz viena un tā paša pirmskaitļa pakāpēm (p) klasei uzliek tādus ierobežojumus, ka klases dažādo skaitļu reizinājumi vienmēr ir dažādi.

tad c_1 ir c vienīgā vērtība. Tādēļ šo gadījumu apskatām vispirms. Izsakām

$$\Omega = \frac{1}{c_1}\Omega' \quad , \quad \Omega' = \sum_u \sum_v f(muv),$$

kur u un v mainās pa visiem augšā apskatītā veida skaitļiem, $uv = d$, $d_1 < uv \leq N_1$ un $(u,v) = 1$.

Noteiksim robežas, kādās mainās u. Liekam

$$g_\tau = p_1 \ldots p_\chi \, , \quad u = \frac{d}{g_\tau} p_1 \ldots p_{\chi_1} \, , \quad v = p_{\chi_1+1} \ldots p_\chi \, ;$$

tad

$$u \geqslant p_1 \ldots p_{\chi_1} \, .$$

Tā ka g_τ katrs pirmreizinātājs p ieslēgts robežās A, A^r un u satur χ_1 tādus p, tad

$$u > A^{\chi_1}, \qquad v < A^{r(\chi-\chi_1)},$$

no kurienes

$$A > v^{\frac{1}{r(\chi-\chi_1)}} \qquad \text{un} \qquad u > v^{\frac{\chi_1}{r(\chi-\chi_1)}} \geqslant v^{\frac{1}{2r}},$$

kādēļ

$$v < u^{2r}.$$

Tā ka $uv > d_1$, arī $u \cdot u^{2r} > d_1$, $u^{3r} > d_1$ un

$$u > d_1^{\frac{1}{3r}} \, .$$

Ievērojot, ka g_τ satur χ pirmskaitļus, katru $< A^r$, seko $g_\tau < A^{r\chi}$ un $A > g_\tau^{\frac{1}{r\chi}}$,

$$v \geqslant A^{\chi-\chi_1} > g_\tau^{\frac{\chi-\chi_1}{r\chi}} > g_\tau^{\frac{1}{2r}} \, .$$

No $g_\tau > d_1^{\frac{2}{3}}$ seko $v > d_1^{\frac{1}{3r}}$.

No $uv \leq N_1$ seko $u < N_1 d_1^{-\frac{1}{3r}}$, tā tad

$$d_1^{\frac{1}{3r}} < u < N_1 d_1^{-\frac{1}{3r}} \, .$$

Ievērojot, ka pēc Mobius funkcijas īpašības ir

$$\sum_{v',v',\delta} \mu(\delta) f(u'\delta . v'\delta) = \sum_{u,v} f(uv) \sum_{\substack{u|\delta \\ v|\delta}} \mu(\delta) = \sum_{\substack{u_1,v_1 \\ (u_1,v_1)=1}} f(u_1 v_1),$$

izteic

$$\Omega' = \sum_{g_\tau|\delta} \mu(\delta)\Omega'_\delta \, , \quad \Omega'_\delta = \sum_{v'} \sum_{v'} f(m\,\delta^2 u'v');$$

te δ mainās pa g_τ visiem dalītājiem un katram tādam δ u' un v' mainās pa to skaitļu u,v dalījumiem ar δ, kas abi ar δ dalās.

Izvēloties patvaļīgu δ novērtēsim Ω'_δ; pie tam ievērojam, ka u' mainās pa skaitļiem

$$\frac{d_1^{\frac{1}{3r}}}{\delta} < u' < \frac{N_1 d_1^{-\frac{1}{3r}}}{\delta}$$

un v' katram tādam u' mainās pa skaitļiem(v'),kam $\frac{d_1}{\delta} < u'v' \leq \frac{N_1}{\delta^2}$.

Pieņemot

$$\delta \leq \delta_1 = \min\left(d_1^{\frac{1}{3r}} , \sqrt{\frac{N_1}{q}} \right)$$

ir

$$q < \frac{N_1}{\delta^2} \, , \qquad \frac{N_1 d_1^{-\frac{1}{3r}}}{\delta} < \frac{N_1}{\delta^2}$$

un tāděļ var lietot 6.lemmu ar kuŗu(liekot m vietā $hm\delta^2$) novērtē

$$\Omega'_\delta \ll \frac{N_1}{\delta^2}\mu^{\frac{3}{2}}\sqrt{\delta d_1^{-\frac{1}{3r}} + \frac{N_1 d_1^{-\frac{1}{3r}}}{\delta}\left(\frac{N_1}{\delta^2}\right)^{-1} + \frac{q\delta^2}{N_1} + \frac{hm\delta^2}{q}}$$

$$\ll \frac{N_1}{\delta^2}\mu^{\frac{3}{2}}\sqrt{\delta d_1^{-\frac{1}{3r}} + \frac{q\delta^2}{N_1} + \frac{hm\delta^2}{q}} \ll \frac{N_1}{\delta}\mu^{\frac{3}{2}}\sqrt{d_1^{-\frac{1}{3r}} + \frac{q}{N_1} + \frac{hm}{q}} .$$

Kad $\delta > \delta_1$, var lietot to pašu novērtējumu, jo tad

$$\Omega'_\delta \ll \sum_{u'} \frac{N_1}{\delta^2 u} \ll \frac{N_1}{\delta^2}\mu < \frac{N_1\mu}{\delta\delta_1} \ll \frac{N_1\mu}{\delta}\sqrt{d_1^{-\frac{1}{3r}} + \frac{q}{N_1}} .$$

Tāděļ

$$\Omega' \ll N_1\mu^{\frac{5}{2}}\sqrt{d_1^{-\frac{1}{3r}} + \frac{q}{N_1} + \frac{hm}{q}}$$

un

$$\Omega \ll N_1\mu^{\frac{5}{2}}\sqrt{d_1^{-\frac{1}{3r}} + \frac{q}{N_1} + \frac{hm}{q}} .$$

5.Kad d n a v k v a d r ā t b r ī v i skaitļi, apskatām Ω daļu $\Omega_{\Delta c}$, kas atbilst tiem skaitļiem d, kur $(u,v)=\Delta$ un kam ir viens un tas pats attēlojumu $d=uv$ skaits $c \geqslant 1$. Tad liekot $u=\Delta u_1$, $v=\Delta v_1$ ir $(u_1,v_1)=1$ un izteic

$$\Omega = \sum_\Delta \sum_c \tfrac{1}{c}\Omega_{\Delta c} .$$

Summu

$$\Omega_{\Delta c} = \sum_{u_1}\sum_{v_1} f(m\Delta^2 u_1 v_1), \quad (u_1,v_1)=1$$

novērtē līdzīgi kā Ω'. Tagad N_1 vietā stājas $\frac{N_1}{\Delta^2}$, m vietā $m\Delta^2$ un der nevienlīdzības

$$\frac{d_1^{\frac{1}{3r}}}{\Delta} < u_1 < N_1\frac{d_1^{-\frac{1}{3r}}}{\Delta} , \qquad \frac{d_1}{\Delta^2} < u_1 v_1 \leq \frac{N_1}{\Delta^2} ,$$

kāděļ pēc Ω' novērtējuma parauga

$$\Omega_{\Delta c} \ll \frac{N_1}{\Delta^2}\mu^{\frac{5}{2}}\sqrt{\Delta d_1^{-\frac{1}{3r}} + \frac{q\Delta^2}{N_1} + \frac{hm\Delta^2}{q}} \ll \frac{1}{\Delta}U,$$

kur

$$U = N_1\mu^{\frac{5}{2}}\sqrt{d_1^{-\frac{1}{3r}} + \frac{q}{N_1} + \frac{hm}{q}} .$$

No šejienes

$$\Omega = \sum_\Delta \sum_c \frac{1}{c}\Omega_{\Delta c} \ll \sum_\Delta \sum_{c \leq c_1} \frac{1}{\Delta c} U \ll \sum_\Delta \frac{1}{\Delta} U\mu\log\mu \ll U\mu^2\log\mu$$

$$\ll N_1\mu^5\sqrt{d_1^{-\frac{1}{3r}} + \frac{q}{N_1} + \frac{hm}{q}} ,$$

un lemma seko.

23.l e m m a. Ja

$q \leq N$, $Q = \min(q, \frac{N}{q})$,

h vesels pozitīvs skaitlis $< \frac{1}{2}Q$,

$$f(n) = \varepsilon_n e^{2\pi i\alpha hn},$$

p mainās pa visiem pirmskaitļiem,

$$S = \sum_{p\le N} f(p),$$

tad

$$S \ll N\mu(Q^{-\frac{1}{4}+\varepsilon} + q^{-\frac{1}{4}+\varepsilon}\sqrt[4]{h}), \qquad (24)$$

$$S \ll N\mu Q^{-\frac{1}{4}+\varepsilon}\sqrt[4]{h}, \qquad (25)$$

$$S \ll N\mu Q^{-\frac{1}{6}+\varepsilon} \quad (h \le Q^{\frac{1}{3}}). \qquad (26)$$

P i e r ā d ī j u m s. 1. Aprobežosimies ar lemmas pierādījumu gadījumā, kad $e^{\sqrt[3]{\mu}} < q \le Ne^{-\sqrt[3]{\mu}}$ jeb

$$e^{\sqrt[3]{\mu}} \le Q \le \sqrt{N}. \qquad (27)$$

Ar $Q < e^{\sqrt[3]{\mu}}$ lemma vai nu acīmredzama (kad $Q \le \mu^2$) vai seko no 20. lemmas (kad $\mu^2 < q \le e^{\sqrt[3]{\mu}}$); šie gadījumi mūsu tālākajiem izlietojumiem nav svarīgi.

2. Lietojot 18. lemmu ar $N_0 = \sqrt{N}$ izteic

$$S = \sum_{\delta\le N} \mu(\delta)\, S_\delta + O(\sqrt{N}), \qquad S_\delta = \sum_{1\le m\le \frac{N}{\delta}} f(m\delta),$$

kur δ mainās pa dabīgajiem skaitļiem, kuru visi pirmreizinātāji ir $\le\sqrt{N}$.

Summas S daļu S_0 ar $\delta \le \frac{q}{2hk}$ novērtē līdzīgi kā 19. lemmā ar

$$S_0 \ll q\log q \ll q\mu = N\mu\frac{q}{N} \le N\mu Q^{-1}.$$

3. Novērtējot S atlikušo daļu S_1 ar $\frac{q}{2hk} < \delta \le N$ izteic

$$S_1 = T_0 - T_1, \quad T_0 = \sum_{(\delta_0)} S_\delta, \quad T_1 = \sum_{(\delta_1)} S_\delta,$$

kur (δ_0) un (δ_1) ir skaitļu δ virknes, kas apmierina nosacījumus

$$\mu(\delta_0) = 1, \quad \mu(\delta_1) = -1, \quad \frac{q}{2hk} < \delta < N.$$

Summas T_0 un T_1 novērtē līdzīgi; tādēļ apskatīsim tikai pirmo.

Novērtēsim vispirms T_0 daļu T_0', kur

$$\frac{q}{2hk} < \delta \le d_1,$$

definējot d_1 ar nevienlīdzībām

$$q \le d_1 \le N, \quad d_1 \ge N^{\frac{3}{4}}. \qquad (28)$$

Tā ka

$$T_0' = \sum_\delta\sum_m f(m\delta),$$

kur δ mainās pa virknes (δ_0) skaitļiem robežās $\frac{q}{2hk} < \delta \le d_1$ un m katram δ mainās pa dabīgajiem skaitļiem $\le \frac{N}{\delta}$, pēc 6. lemmas ir

$$T_0' \ll N\mu\sqrt{\frac{h}{q} + \frac{d_1}{N} + \frac{q\mu}{N}} \ll N\mu^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{h}{q} + \frac{d_1}{N}}.$$

4. T_0 atlikušā daļa ir summa

$$T_0'' = \sum_{\delta}\sum_{m} f(\delta m),$$

kur δ mainās pa skaitļiem (δ_0) robežās $d_1 < \delta \leq N$ un katram δ m mainās pa dabīgajiem skaitļiem $m \leq N/\delta$. Mainot summēšanas kārtību izteic

$$T_0'' = \sum_{m} T(m), \qquad T(m) = \sum_{\delta} f(m\delta),$$

kur m mainās pa skaitļiem $m=1,2,\dots,\left[\frac{N}{d_1}\right]$ un δ katram m mainās pa skaitļiem (δ_0) robežās $d_1 < \delta \leq N_1$, $N_1 = \frac{N}{m}$. Pēc iepriekšējās lemmas der novērtējums

$$T(m) \ll \frac{N}{m} e^{\varepsilon'\sqrt[3]{\mu}} \sqrt{d_1^{-\frac{1}{3r}} + \frac{qm}{N} + \frac{hm}{q}},$$

no kurienes

$$T_0'' \ll N\mu e^{\varepsilon'\sqrt[3]{\mu}} \sqrt{d_1^{-\frac{1}{3r}} + \frac{qm_0}{N} + \frac{hm_0}{q}}, \quad m_0 = \frac{N}{d_1},$$

un

$$S \ll N\mu Q^{-1} + N\mu^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{h}{q} + \frac{d_1}{N}} + N\mu e^{\varepsilon'\sqrt[3]{\mu}}\sqrt{d_1^{-\frac{1}{3r}} + \frac{q}{d_1} + \frac{hN}{d_1 q}}$$

$$\ll N\mu Q^{-1} + N e^{\varepsilon_1'\sqrt[3]{\mu}}\sqrt{d_1^{-\frac{1}{3r}} + \frac{d_1}{N} + \frac{q}{d_1} + \frac{hN}{d_1 q}}.$$

5. Tagad izvēlamies

$$d_1 = \sqrt{N\left(q + \frac{Nh}{q}\right)}, \tag{29}$$

kas nosacījumus (28) izpilda. Tiešām, $d_1 > \sqrt{Nq} > q$, un tā ka $h < \frac{1}{2}q$, $q < \frac{1}{2}N$, arī $d_1 < N$. Ievērojot, ka pozitīvu skaitļu vidējais aritmētiskais nav mazāks par vidējo geometrisko, seko

$$d_1 \geq \sqrt{N\sqrt{2q \cdot \frac{2Nh}{q}}} > N^{\frac{3}{4}}.$$

Pēc (29) ir

$$\frac{d_1}{N} = \frac{q}{d_1} + \frac{hN}{d_1 q},$$

kādēļ

$$S \ll N\mu Q^{-1} + N e^{\varepsilon''\sqrt[3]{\mu}}\sqrt{d_1^{-\frac{1}{3r}} + \frac{d_1}{N}}. \tag{30}$$

Ievērojot, ka pēc (29),(27) un Q definīcijas ir

$$d_1 \leq \sqrt{N\left(q + \frac{N}{q}\right)h} \leq \sqrt{N.2Q.h},$$

$$\frac{d_1}{N} \leq \frac{\sqrt{2Qh}}{\sqrt{N}} < \sqrt{2hQ}.Q^{-1} \ll Q^{-\frac{1}{2}}\sqrt{h},$$

$$d_1 > \sqrt{Nq} \geq Q\sqrt{q} \geq Q\sqrt{Q},$$

$$d_1^{-\frac{1}{3r}} < Q^{-\frac{1}{2r}} = Q^{-\frac{1}{2}+\varepsilon''},$$

$$e^{\varepsilon''\sqrt[3]{\mu}} \ll Q^{\varepsilon_1''},$$

no šejienes dabū novērtējumu (25), kuŗa tiešas sekas ir (26).

Formulu (24) pierāda ievērojot, ka pēc (30) un (29) ir

$$S \ll Ne^{\varepsilon''\sqrt[3]{\mu}}\sqrt{d_1^{-\frac{1}{3r}}} + Ne^{\varepsilon''\sqrt[3]{\mu}}\sqrt{\frac{d_1}{N}}$$

un

$$\frac{d_1}{N} = \sqrt{\frac{h}{q} + \frac{q}{N}} \leq \sqrt{\frac{h}{q}}\ .$$

24.1 e m m a. Ja

skaitļu virkne (d) definēta kā 21.lemmā,

$q \leq N, \quad Q = \min(q, \ \frac{N}{q}),$

h vesels pozitīvs skaitlis $< \frac{1}{2}Q^{\frac{1}{3}}$,

$f(n) = \varepsilon_n e^{2\pi i\alpha hn}$,

$T = \sum\limits_{d \leq N} f(d),$

tad

$$T \ll N\mu^{\frac{3}{2}} Q^{-\frac{1}{6}+\varepsilon}\sqrt[4]{h}, \tag{31}$$

$$T \ll N\mu^{\frac{3}{2}} Q^{-\frac{1}{8}+\varepsilon} \quad (h \leq Q^{\frac{1}{3}}). \tag{32}$$

P i e r ā d ī j u m s. Iepriekšējās lemmas pierādījumā minēto iemeslu dēļ apskatīsim tikai gadījumu, kad Q apmierina nevienlīdzības (27).

Summu T saskaldām summās T_0, T_1 sekojošā veidā:

$$T = \sum_{d \leq N} f(d) = \sum_{\substack{d \leq N \\ d \nmid p > \sqrt{N}}} + \sum_{\substack{d \leq N \\ d | p > \sqrt{N}}} = T_0 + T_1\ .$$

Lietojot formulu (23) ar $N_1 = N$, $m=1$ un d_1 vērtību (29) līdzīgi kā iepriekšējās lemmas pierādījumā novērtē

$$T_0 \ll d_1 + \sum_{d_1 < d \leq N} f(d) \ll NQ^{-\frac{1}{2}}\sqrt{h} + Ne^{\varepsilon'\sqrt[3]{\mu}}\sqrt{d_1^{-\frac{1}{3r}} + \frac{q}{N} + \frac{h}{q}}$$

$$\ll NQ^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\sqrt{h} + NQ^{-\frac{1}{4}+\varepsilon}\sqrt[4]{h} \ll NQ^{-\frac{1}{4}+\varepsilon}\sqrt[4]{h}$$

(jo $\frac{1}{q} \leq Q^{-1}$). Izvēloties pozitīvu konstanti $\nu \leq \frac{1}{3}$ liekam $N_0 = NQ^{-\nu}$ un saskaldām summu

$$T_1 = \sum_{\substack{d \leq N \\ d|p > \sqrt{N}}} f(d) = \sum_{\substack{d \leq N \\ d|p \\ \sqrt{N} < p \leq N_0}} + \sum_{\substack{d \leq N \\ d|p > N_0}} = T_1' + T_1''$$

Summu T_1' attēlo formā

$$T_1' = \sum_u \sum_v f(uv),$$

kur u mainās pa aritmētisko progresiju $kx+\ell_1, \ldots, kx+\ell_\nu$ pirmskaitļiem robežās $\sqrt{N}$, N_0, un v katram u mainās robežās $1 \leq v \leq N/u$ pa to skaitļu d dalījumiem ar u, kuŗi ar u dalās. Lietojot 6.lemmu ar $N_1 = N$, $m = h \leq Q^{\frac{1}{3}}$, novērtē

$$T_1' \ll N\mu\sqrt{N^{-\frac{1}{2}} + Q^{-\nu} + \frac{q\mu}{N} + \frac{Q^{\frac{1}{3}}}{q}} \ll N\mu^{\frac{3}{2}}Q^{-\frac{\nu}{2}}\ .$$

Summu T_1'' saskalda šādi:

$$T_1'' = \sum_{\substack{N_0 < d \le N \\ d|p > N_0}} f(d) = \sum_{\delta \le Q^\nu} \sum_{N_0 < p \le \frac{N}{\delta}} f(p\delta) = \sum_{\delta \le Q^\nu} \Big(\sum_{p \le \frac{N}{\delta}} - \sum_{p \le N_0} \Big) = \sum_{\delta \le Q^\nu} (A_\delta - B)$$

liekot

$$A_\delta = \sum_{p \le \frac{N}{\delta}} f(\delta p), \quad B = \sum_{p \le N_0} f(\delta p).$$

Apzīmējot $Q_\delta = \min(q, \frac{N}{\delta q})$ ir $Q_\delta \geqslant \frac{Q}{\delta}$ un $h\delta \le \frac{1}{2} Q_\delta$, kādēļ A_δ un B novērtēšanai var lietot formulu (24) pēc kuras, tā ka $q \geqslant Q$, ir

$$A_\delta \ll \frac{N}{\delta}\mu\Big(\big(\frac{Q}{\delta}\big)^{-\frac{1}{4}+\varepsilon'} + q^{-\frac{1}{4}+\varepsilon'} \sqrt[4]{h\delta} \Big) \ll N\mu Q^{-\frac{1}{4}+\varepsilon'} \delta^{-\frac{3}{4}} \sqrt[4]{h},$$

$$B \ll N\mu Q^{-\frac{1}{4}+\varepsilon'} Q^{-\frac{3}{4}\nu} \sqrt[4]{h}$$

un

$$T_1'' \ll N\mu Q^{-\frac{1}{4}+\varepsilon'} \sqrt[4]{h} \sum_{\delta \le Q^\nu} (\delta^{-\frac{3}{4}} + Q^{-\frac{3}{4}\nu}) \ll N\mu Q^{-\frac{1}{4}+\frac{\nu}{4}+\varepsilon'} \sqrt[4]{h},$$

$$T = T_0 + T_1' + T_1'' \ll N\mu Q^{-\frac{1}{4}+\frac{\nu}{4}+\varepsilon'} \sqrt[4]{h} + N\mu^{\frac{3}{2}} Q^{-\frac{\nu}{2}}.$$

No šejienes izvēloties $\nu = \frac{1}{3}$ un $\nu = \frac{1}{4}$ novērtējumi (31),(32) seko.

VII. t e o r ē m a. Ja

γ pozitīvs skaitlis ≤ 1, x_1 reāls skaitlis,

p mainās pa doto aritmētisko progresiju pirmskaitļiem un P izteic tādu $p \le N$ skaitu,

d mainās pa VI. teorēmā definētajiem skaitļiem, kas pieder vajadzīgām aritmētiskām progresijām un P_1 izteic tādu $d \le N$ skaitu,

$q \le N$, $R = \min(q, \frac{P}{q})$, $R_1 = \min(q, \frac{P_1}{q})$,

G izteic skaitļu $\{\alpha p\}$, $p \le N$ skaitu, kas atrodas noslēgtā intervallā $x_1, x_1 + \gamma \pmod 1$,

G_1 izteic skaitļu $\{\alpha d\}$, $d \le N$ skaitu, kas atrodas noslēgtā intervallā $x_1, x_1 + \gamma \pmod 1$,

tad

$$G = \gamma P + O(PR^{-\frac{1}{6}+\varepsilon} \log^3 P), \tag{33}$$

$$G_1 = \gamma P_1 + O(P_1 R_1^{-\frac{1}{8}+\varepsilon} \log^{\frac{7}{2}} P_1). \tag{34}$$

P i e r ā d ī j u m s izlieto formulas (26),(32) un 9. lemmu, kur skaitļu p gadījumā ir

$$P \gg N\mu^{-1}, \quad \Delta_0 = \frac{N}{P}\mu Q^{-\frac{1}{6}+\varepsilon}, \quad \Delta = Q^{-\frac{1}{6}}, \quad \mu \ll \log P, \quad Q = \min(q, \frac{N}{q}) \geqslant R,$$

un skaitļiem d (ar P_1 P vietā)

$$P_1 \gg N\mu^{-1}, \quad \Delta_0 = \frac{N}{P_1}\mu^{\frac{3}{2}} Q^{-\frac{1}{8}+\varepsilon}, \quad \Delta = Q^{-\frac{1}{8}}, \quad \mu \ll \log P_1, \quad Q = \min(q, \frac{N}{q}) \geqslant R_1.$$

25. l e m m a. Ja p mainās pa pirmskaitļiem $\equiv \ell \pmod k$, $(k, \ell) = 1$, $1 \le k \ll 1$,

$$x \geqslant N^{\frac{48}{77}+\varepsilon},$$

tad
$$\sum_{N<p\leq N+x} 1 \sim x\mu^{-1}. \tag{35}$$

P i e r ā d ī j u m u gadījumā, kad k=1, sk. Ingham [14] vai Fogels [15]. Pēdējā darbā lietotās Rīmana ζ-funkcijas īpašības der arī Dirichlē L-funkcijām, kas stājas pirmās vietā, kad $k>1$. Sal. arī Heilbronn [12], Tchudakoff [21].

VIII. t e ō r ē m a. Ja

p mainās pa doto aritmētisko progresiju pirmskaitļiem,

d mainās pa VI. teōrēmā definētās virknes (d) skaitļiem, kuŗi pieder vajadzīgām aritmētiskām progresijām,

$q \leq N$, $Q = \min(q, \frac{N}{q}) \geqslant e^{\sqrt[3]{\mu}}$,

x un x′ ir iespējami mazi skaitļi, ar kādiem daļskaitļi

$$\begin{aligned} &\{\alpha p\}, \quad N<p\leq N+x, \\ &\{\alpha d\}, \quad N<d\leq N+x' \end{aligned} \tag{36}$$

ir sadalīti asimptotiski vienmērīgi,

tad
$$x = NQ^{-\frac{1}{4}+\varepsilon}, \qquad x' = NQ^{-\frac{1}{6}+\varepsilon}. \tag{37}$$

Ja α nepārtrauktās daļas attīstījuma (2) kvocienti k_n katram pastāvīgam pozitīvam ε izpilda nosacījumu

$$k_n \ll e^{\varepsilon n}, \tag{38}$$

tad
$$x = N^{\frac{7}{8}+\varepsilon}, \qquad x' = N^{\frac{11}{12}+\varepsilon}. \tag{39}$$

P i e z ī m e. No rezultāta, ka skaitļi $\{\alpha p\}$, $\{\alpha d\}$ ir vienmērīgi sadalīti /sal. teōrēmas I-VI/ nevar secināt labākus rezultātus kā $x=\varepsilon N$, $x'=\varepsilon N$ ar patvaļīgi mazu bet pastāvīgu ε. Arī no VII. teōrēmas (un 25. lemmas) tiešā ceļā nevar secināt neko labāku kā

$$x \ll NQ^{-\frac{1}{6}+\varepsilon}, \qquad x' \ll NQ^{-\frac{1}{8}+\varepsilon}.$$

P i e r ā d ī j u m s. Tā ka $Q \leq \sqrt{N}$, ar (37) definētās x, x′ vērtības ir $> N^{\frac{7}{8}}$, kādēļ pēc 25. lemmas intervallā N, N+x ir $P \gg x\mu^{-1}$ skaitļu p un intervallā N, N+x′ ir $P_1 \gg x'\mu^{-1}$ skaitļu d, kamēr pēc (25) un (26) ar $h < Q^{\varepsilon'}$ ir

$$\sum_{N<p\leq N+x} \varepsilon_p e^{2\pi i\alpha hp} \ll NQ^{-\frac{1}{4}+2\varepsilon'} = xQ^{-\varepsilon+2\varepsilon'} \ll P\mu Q^{-\varepsilon+2\varepsilon'} = o(P),$$

ja izvēlas $\varepsilon > 2\varepsilon'$, un līdzīgi

$$\sum_{N<d\leq N+x'} \varepsilon_d e^{2\pi i\alpha hd} = o(P_1).$$

No šejienes teōrēmas pirmā puse seko pēc Veila kritērija.

Lai pierādītu teōrēmas otru pusi, ar $\frac{a_1}{q_1}, \frac{a_2}{q_2}, \ldots$ apzīmējot α tuvinājumu daļas pieņemam

$$q_{n-1} < \sqrt{N}, \quad q_n \geqslant \sqrt{N}.$$

Tad

$$Q = \min(q_n, \frac{N}{q_n}) = \frac{N}{q_n} = \frac{\sqrt{N}\sqrt{N}}{q_n} > \frac{\sqrt{N}q_{n-1}}{q_n} \gg \frac{\sqrt{N}}{1+k_n} \gg \sqrt{N}\, e^{-\varepsilon n} .$$

Vislielāko n vērtību dabūjam pieņemot $k_1=k_2=\ldots=k_{n-1}=1$. Tad $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$ ir Fibonači rindas 1,1,2,3,5,... locekļi un pietiekoši lieliem n ir[20]

$$q_{n-1} > c^{n-1},$$

kur c ir pozitīva konstante >1. No šejienes, kad n ir lielākais dabīgais skaitlis, kam $q_{n-1} < \sqrt{N}$, tad arī $c^{n-1} < \sqrt{N}$ un $n < c_1 \mu$ ar konstantu $c_1 > 0$, no kurienes

$$Q \gg \sqrt{N}\, e^{-c_1 \varepsilon \mu} > N^{\frac{1}{2}-\varepsilon'} .$$

Ar šo Q vērtību (39) seko no (37).

Skaitļu d piemērus, kam teorēma der, sk. lp.31,32.

IX. t e o r ē m a. Ja

t konstante >2,

α irracionāls skaitlis, kas nepieļauj approksimāciju q^{-t} jeb diofanta nevienlīdzība

$$|\alpha - \frac{a}{q}| < q^{-t}$$

der tikai galīgam veselo skaitļu q skaitam,

tad der (36) ar

$$x = N^{1-\frac{1}{4t}+\varepsilon} , \quad x' = N^{1-\frac{1}{6t}+\varepsilon} . \tag{40}$$

Speciālā gadījumā, kad α ir n. pakāpes algebriska skaitlis, tad

$$x = N^{1-\frac{1}{4n}+\varepsilon} , \quad x' = N^{1-\frac{1}{6n}+\varepsilon} . \tag{41}$$

P i e r ā d ī j u m s. Pieņemam, ka N ir patvaļīgi liels un α tuvinājumu daļu saucēji, kas ieslēdz $\sqrt{N}$, apmierina nevienlīdzības

$$q_{n-1} \leqq N^{\frac{1}{t}}, \quad q_n \geqslant N^{1-\frac{1}{t}} , \tag{42}$$

no kurienes

$$q_n \geqslant (q_{n-1}^{t})^{1-\frac{1}{t}} .$$

Tad pēc nepārtraukto daļu teorijas[17] seko nevienlīdzība

$$|\alpha - \frac{a_{n-1}}{q_{n-1}}| < \frac{1}{q_{n-1}q_n} \leqq \frac{1}{q_{n-1}(q_{n-1}^{t})^{1-\frac{1}{t}}} = q_{n-1}^{-t} ,$$

kas pretruna dotajam.

Tā tad abas nevienlīdzības (42) reizē nav iespējamas un ir vai nu

$$N^{\frac{1}{t}} < q_{n-1} \leqq \sqrt{N} \quad \text{vai} \quad \sqrt{N} \leqq q_n < N^{1-\frac{1}{t}} .$$

Pirmā gadījumā ar $q=q_{n-1}$ ir $Q = \min(q, \frac{N}{q}) = q > N^{\frac{1}{t}}$, kamēr otrā gadījumā liekot $q=q_n$ novērtē $Q = \min(q, \frac{N}{q}) = \frac{N}{q} > N^{\frac{1}{t}}$.

Ar šiem Q (40) seko no (37).

Ievērojot, ka pēc Liuviļa teorēmas[18] reāls n.pakāpes algebrisks skaitlis nav approksimējams ar $q^{-(n+\varepsilon)}$, (41) dabū no (40) ar $t=n+\varepsilon'$

§ 6.

SKAITĻU VIENMĒRĪGAIS SADALĪJUMS

AUGSTĀKU PAKĀPJU PROGRESIJĀS

Šinī paragrafā XI.teorēma pierāda rezultātus par skaitļu $\{f(d)\}$ vienmērīgo sadalīšanos, kad $f(x)$ ir n.pakāpes polinoms($n>2$) ar reāliem koeficientiem, no kuŗiem(vismaz) pirmais ir irracionāls.

Galvenais pierādīšanas līdzeklis ir 27.lemma, kas pieder Vinogradovam. Pēc tās parauga arī pierādīta 26.lemma.

Lemmu un teorēmu atkarība šāda:

26(7), X(7,26,27), XI(10,25,27,IV,X).

26.l e m m a. Ja

skaitļi d definēti kā 22.lemmā

n,h dabīgie skaitļi, $n>2$,

$f(x)=\alpha x^n+\ldots+\alpha_{n-1}x$, $\alpha,\ldots,\alpha_{n-1}$ reāli skaitļi,

$Q=\min(q,\ N,\ \frac{N^n}{q})$,

$$\gamma=\frac{1}{19{,}6n^6\log^2 n},\qquad \beta=\frac{1}{49n^6\log^2 n},\tag{43}$$

$$T_0=\sum_{d\le N}e^{2\pi ihf(d)},$$

tad

$$T_0\ll N\mu^{1{,}5\log\mu}h^{\gamma}Q^{-\beta}.\tag{44}$$

P i e r ā d ī j u m s. 1. Visus pirmskaitļus $p\le\sqrt{N}$ sadalām $\tau\le\frac{\log\mu}{\log 2}<$ $1{,}45\log\mu$ grupās iedalot s.grupā tos p, kas apmierina nevienlīdzības

$$2^{2^{s-1}}\le p<2^{2^s}.$$

Skaitļa $d\le N$ pirmreizinātāju skaits $\sigma\le\frac{\mu}{\log 2}<1{,}5\mu$.

Visus $d\le N$ iedala klasēs tā, ka visiem vienas un tās pašas klases skaitļiem ir vienāds pirmreizinātāju sadalījums pa p grupām. Klasu skaits ir

$$D\le(\max\sigma)^{\tau}\ll\mu^{1{,}48\log\mu}.$$

2.Apskatīsim summas T_0 daļu T', kas atbilst vienas un tās pašas klases skaitļiem d. Pieņemot, ka s.grupā ir l_s pirmreizinātāji, kuŗu produkts $=f_s$, izteicam $d=f_1\ldots f_\tau$.

Liekot

$$\varphi_s=2^{2^{s-1}l_s},\qquad F_s=2^{2^s l_s}$$

ir

$$\varphi_s\le f_s<F_s.$$

Skaitļus

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_\tau$$
$$f_1, \ldots, f_\tau$$
$$F_1, \ldots, F_\tau$$
sakārtotus pēc n e a u g o š i e m F_s apzīmējam ar
$$\gamma_1, \ldots, \gamma_\tau$$
$$g_1, \ldots, g_\tau$$
$$G_1, \ldots, G_\tau .$$
Tad
$$d = g_1 \ldots g_\tau, \quad \gamma_s \leq g_s < G_s, \quad G_1 \geq G_2 \geq \ldots \geq G_\tau .$$
Tādu d, kam $G_1 \ldots G_\tau < N^{\frac{1}{3}}$, ir $< N^{\frac{1}{3}}$ un tiem atbilstošai T_o daļai lemmas novērtējums der. Tādēļ apskatīsim tikai tos gadījumus, kur $G_1 \ldots G_\tau > N^{\frac{1}{3}}$.

Ar b apzīmējam rindas $1,\ldots,\tau$ mazāko skaitli, kam $G_1 \ldots G_b > N^{\frac{1}{3}}$.

3. Pieņemsim vispirms $b > 1$. Tad liekot
$$u = g_1 \ldots g_b, \quad v = g_{b+1} \ldots g_\tau$$
ir
$$G_1 \ldots G_{b-1} \leq N^{\frac{1}{3}}, \quad G_b \leq N^{\frac{1}{3}}$$
(jo $G_b \leq G_{b-1} \leq \ldots$),
$$G_1 \ldots G_b \leq N^{\frac{2}{3}}$$
un tā ka pēc γ_s, F_s definīcijas $u \geq \gamma_1 \ldots \gamma_b = (G_1 \ldots G_b)^{\frac{1}{2}}$,
ir
$$N^{\frac{1}{6}} < u \leq N^{\frac{2}{3}}, \qquad 1 \leq v \leq \frac{N}{u}.$$
Pēc 7. lemmas der novērtējums
$$T' \ll N\mu\left(hN^{-\frac{1}{3}n} + \frac{h}{q} + \frac{q}{N^n} + N^{-\frac{1}{6}n}\right)^{\gamma}.$$
Kad $n \geq 3$, tad $\frac{1}{6}n \geq \frac{1}{2}$, un tā ka $\frac{1}{2}\gamma > \beta$, seko rezultāts
$$T' \ll N\mu h^{\gamma} Q^{-\beta},$$
kādēļ T_o atbilstošai daļai novērtējums (44) der.

4. Tagad apskatot gadījumu $b=1$ liekam $\ell_1 = \varkappa$ un ar $\varkappa_1$ apzīmējam mazāko dabīgo skaitli, kam
$$G_1^{\frac{\varkappa_1}{\varkappa}} > N^{\frac{1}{3}}.$$
Attēlojam d formā
$$d = uv,$$
kur u ir g_1 $\varkappa_1$ pirmreizinātāju produkts, kamēr v ir atlikušo $\varkappa - \varkappa_1$ g_1 pirmreizinātāju produkts ar visu $g_2 \ldots g_\tau$ reizinājumu (event. $v=1$); tad
$$u \geq \gamma_1^{\frac{\varkappa_1}{\varkappa}} = \sqrt{G_1}^{\frac{\varkappa_1}{\varkappa}} > N^{\frac{1}{6}}.$$
Ja $\varkappa_1 = 1$, tad $u < \sqrt{N}$.
Ja $\varkappa_1 > 1$, tad no

$$G_1^{\frac{\varkappa_1-1}{\varkappa}} \leq N^{\frac{1}{3}}$$

seko

$$G_1^{\frac{1}{\varkappa}} \leq N^{\frac{1}{3}}$$

un tā ka

$$u < G_1^{\frac{\varkappa_1}{\varkappa}} = G^{\frac{\varkappa_1-1}{\varkappa}}\, G^{\frac{1}{\varkappa}} \leq N^{\frac{1}{3}} . N^{\frac{1}{3}} = N^{\frac{2}{3}},$$

ir $u < N^{\frac{2}{3}} < N^{\frac{5}{6}}$. Abos gadījumos der novērtējums

$$N^{\frac{1}{6}} < u < N^{\frac{5}{6}}.$$

Tagad pieņemot, ka d k v a d r ā t b r ī v i skaitļi, izteic

$$T' = \frac{1}{\binom{\varkappa}{\varkappa_1}}\Omega , \quad \Omega = \sum_u \sum_v e^{2\pi i h f(uv)} , \quad (u,v)=1,$$

$$\Omega = \sum_\delta \mu(\delta)\Omega_\delta , \quad \Omega_\delta = \sum_{u'} \sum_{v'} e^{2\pi i h f(\delta^2 u' v')},$$

kur δ mainās pa pirmās grupas pirmskaitļu produktiem un $u' = \frac{u}{\delta}$, $v' = \frac{v}{\delta}$ $(u|\delta , v|\delta)$. Pēc 7.lemmas (ar $h\delta^{2n}$ m vietā un N/δ^2 N vietā) der novērtējums

$$\Omega_\delta \ll \frac{N}{\delta^2}\mu\left(\frac{h\,\delta^{2n} N^{\frac{5}{6}n}}{N^n \delta^n} + \frac{h\,\delta^{2n}}{q} + \frac{q\,\delta^{2n}}{N^n} + \frac{\delta^n}{N^{\frac{1}{6}n}} \right)^\gamma$$

$$\ll \frac{N}{\delta^2}\mu\,\delta^{2n\gamma}\, h^\gamma \left(N^{-\frac{1}{6}n} + \frac{1}{q} + \frac{q}{N^n} + N^{-\frac{1}{6}n} \right)^\gamma$$

$$\ll \frac{N}{\delta}\mu\, h^\gamma Q^{-\beta} .$$

No šejienes

$$\Omega \ll N \mu^2 h^\gamma Q^{-\beta} ,$$

$$T' \ll N \mu^2 h^\gamma Q^{-\beta}$$

un

$$T_0 \ll N \mu^2 h^\gamma Q^{-\beta} . \mu^{1,48 \log \mu} \ll N \mu^{1,5 \log \mu} h^\gamma Q^{-\beta} ,$$

ar ko lemma šinī gadījumā pierādīta.

5. Kad skaitļi d n a v k v a d r ā t b r ī v i, tad lietojot līdzīgu sadalījumu kā 22.lemmas pierādījumā dabū līdzīgu Ω novērtējumu ar $\mu^3 \log \mu$ μ^2 vietā. Bet tas gala rezultātā jūtamu iespaidu neatstāj.

27. l e m m a. Ja

m, n dabīgie skaitļi, $n > 2$,

$f(x) = \alpha x^n + \ldots + \alpha_{n-1} x$, $\alpha, \ldots, \alpha_{n-1}$ reāli skaitļi,

β definēts ar (43),

p mainās pa visiem pirmskaitļiem,

$S = \sum\limits_{p \leq N} e^{2\pi i m f(p)}$,

tad

$$S \ll N\left(\frac{m^5}{N} + \frac{m^5}{q} + \frac{m^5 q}{N^n} \right)^\beta \mu^{\frac{3}{2}\log \mu} . \tag{45}$$

P i e r ā d ī j u m s: Виноградов[4], Теорема 2.

X. t e o r ē m a. Ja

n, h dabīgie skaitļi, $n > 2$,

d mainās pa dabīgo skaitļu virkni (d), kas līdz ar skaitli px satur arī skaitli $p'x$ jebkuriem pirmskaitļiem p, p' un veselam skaitlim x,

$f(x) = \alpha x^n + \ldots + \alpha_{n-1} x$, $\alpha, \ldots, \alpha_{n-1}$ reāli skaitļi,

$Q = \min(q, N, \frac{N^n}{q})$,

$\nu = \frac{1}{166{,}6 n^6 \log^2 n}$, β definēts ar (43),

$T = \sum_{d \leq N} e^{2\pi i h f(d)}$,

tad

$$T \ll N \mu^{\frac{3}{2}\log\mu} Q^{-\nu} h^{5\beta}. \qquad (46)$$

P i e r ā d ī j u m s. Saskalda summu

$$T = \sum_{\substack{d \leq N \\ d \nmid p > \sqrt{N}}} + \sum_{\substack{d \leq N \\ d | p > \sqrt{N}}} = T_0 + T_1$$

un lietojot 26. lemmu novērtē

$$T_0 \ll N \mu^{\frac{3}{2}\log\mu} h^{\gamma} Q^{-\beta}.$$

Liekot $N_0 = NH^{-1}$, kur H pagaidām nenoteikts skaitlis > 1, saskalda summu

$$T_1 = \sum_{\substack{d \leq N \\ d | p > \sqrt{N}}} e^{2\pi i h f(d)} = \sum_{\substack{d \leq N \\ d | p \\ \sqrt{N} < p \leq N_0}} + \sum_{\substack{N_0 < d \leq N \\ d | p > N_0}} = T_1' + T_1''.$$

Izsakot

$$T_1' = \sum_u \sum_v e^{2\pi i h f(uv)}, \quad \sqrt{N} < u = p \leq N_0, \quad 1 \leq v = \frac{d}{p} \leq \frac{N}{u},$$

un lietojot 7. lemmu novērtē

$$T_1' \ll N\mu \left(\frac{h}{H^n} + \frac{h}{q} + \frac{q}{N^n} + \frac{1}{N^{\frac{n}{2}}} \right)^{\gamma} \ll N\mu h^{\gamma} (H^{-n\gamma} + Q^{-\gamma}),$$

kur γ definēts ar (43).

Pārveido

$$T_1'' = \sum_{\substack{N_0 < d \leq N \\ d | p > N_0}} e^{2\pi i h f(d)} = \sum_{\delta \leq H} \sum_{N_0 < p \leq \frac{N}{\delta}} e^{2\pi i h f(\delta p)} = \sum_{\delta \leq H} \Big(\sum_{p \leq \frac{N}{\delta}} - \sum_{p \leq N_0} \Big)$$

$$= \sum_{\delta \leq H} (A_\delta - B).$$

Summu

$$A_\delta = \sum_{p \leq \frac{N}{\delta}} e^{2\pi i h f(\delta p)}, \qquad B = \sum_{p \leq N_0} e^{2\pi i h f(\delta p)}$$

novērtēšanai lieto 27.lemmu ar $m=h\delta^n$ un $\frac{N}{\delta}$ (resp. N_0) N vietā:

$$A_\delta \ll \frac{N}{\delta}\left(\frac{h^5\delta^{5n+1}}{N}+\frac{h^5\delta^{5n}}{q}+\frac{h^5\delta^{6n}q}{N^n}\right)^\beta \mu^{\frac{3}{2}\log\mu},$$

$$B \ll \frac{N}{H}\left(\frac{h^5\delta^{5n}H}{N}+\frac{h^5\delta^{5n}}{q}+\frac{h^5\delta^{5n}qH^n}{N^n}\right)^\beta \mu^{\frac{3}{2}\log\mu},$$

no kurienes

$$A_\delta \ll N\delta^{6n\beta-1}h^{5\beta}\mu^{\frac{3}{2}\log\mu}Q^{-\beta},$$

$$B \ll NH^{6n\beta-1}h^{5\beta}\mu^{\frac{3}{2}\log\mu}Q^{-\beta}$$

un

$$T_1'' \ll \sum_{\delta\le H}(|A_\delta|+|B|) \ll NH^{6n\beta}h^{5\beta}\mu^{\frac{3}{2}\log\mu}Q^{-\beta}.$$

Tagad

$$T = T_0 + T_1' + T_1'' \ll N\mu^{\frac{3}{2}\log\mu}h^{5\beta}(H^{6n\beta}Q^{-\beta}+H^{-n\gamma}).$$

Prasot lai $H^{6n\beta}Q^{-\beta}=H^{-n\gamma}$ noteic

$$H^n = Q^{\frac{\beta}{6\beta+\gamma}},$$

no kurienes

$$H^{-n\gamma} = Q^{-\frac{\beta\gamma}{6\beta+\gamma}} = Q^{-\nu}$$

un teorēma seko.

Tādu skaitļu d piemērus, kas teorēmas nosacījumus izpilda, sk. lp.32, piemēri 3. un 4. .

Ar formulām (45) un (46) spriežot līdzīgi kā teorēmās VIII un IX pierāda sekojošo

XI. teorēmu. Ja

p mainās pa visiem pirmskaitļiem,

skaitļi d definēti kā iepriekšējā teorēmā,

$f(x)=\alpha x^n+\ldots+\alpha_{n-1}x$, $\alpha,\ldots,\alpha_{n-1}$ reāli skaitļi, $n>2$,

α ir algebriskš skaitlis vai ~~pretējā gadījumā~~ arī α nepārtrauktās daļas attistījuma (2) kvocienti k apmierina nosacījumu

$$\log k_m \ll m,$$

tad

1) skaitļi

$$\{f(p)\},\quad p\le N,$$

$$\{f(d)\},\quad d\le N$$

ir sadalīti asimptotiski vienmērīgi;

2) var konstruēt pozitīvas konstantes $\delta < 1$, $\delta' < 1$ tā, ka liekot

$$x = N^{\delta}, \quad x' = N^{\delta'}$$

skaitļi

$$\{f(p)\}, \quad N < p \leq N+x ,$$

$$\{f(d)\}, \quad N < d \leq N+x'$$

ir sadalīti asimptotiski vienmērīgi.

Piemēram, kad $n=3$ un α ir kvadrātiska irracionālitāte, teōrēma der ar

$$\delta = 1 - \frac{1}{43200}, \qquad \delta' = 1 - \frac{1}{146900}.$$

T Ē Z E S

par asimptotiski vienmērīgi sadalītu skaitļu virknēm

1. Ja

$p, p', \ldots$ apzīmē patvaļīgi izvēlētas pirmskaitļu klases (p) skaitļus,

(d) ir augošu veselu pozitīvu skaitļu virkne, kuras katrs skaitlis dalās ar vismaz vienu p, pie kam, ja virkne satur skaitli px, tā satur arī skaitli $p'x$ katram p' un veselam x, event. katram p', ar kuru x nedalās,

skaitļu $d \leq x$ skaits nav zemākas kārtas lielums kā $x(\log x)^{-\delta}$, kur δ pozitīva konstante <1,

$f(x)$ apzīmē n. pakāpes polinomu ar augstāko koeficientu α,

α iracionāls skaitlis, kas vai nu ir algebrisks vai arī α nepārtrauktās daļas attīstījuma

$$\alpha = k_0 + \frac{1}{k_1 +}\frac{1}{k_2 +}\cdots$$

kvocienti k_s lieliem s apmierina nevienlīdzību

$$\log k_s < a^s,$$

ar konstantu, no $f(x)$ pakāpes atkarīgu $a > 1$,

reālam x simbols $[x]$ apzīmē lielāko veselo skaitli $\leq x$ un $\{x\} = x - [x]$,

tad skaitļi

$$\{\alpha d\},$$

kur d mainās pa virknes (d) skaitļiem, kas pieder vajadzīgām aritmētiskām progresijām un izpilda uzlikto blīvuma nosacījumu, kā arī skaitļi

$$\{f(d)\}$$

ir sadalīti asimptotiski vienmērīgi (I, II, IV teorēma).

Piemēram, kad d mainās pa visiem skaitļiem, kuru pirmreizinātāji ir pirmskaitļu dabīgā sakārtojumā tie skaitļi, kas atrodas pāru vietās (vai vispārīgi to vietu rādītāji veido virkni ar pozitīvu blīvumu), tad skaitļi $\{\alpha d\}$ un $\{f(d)\}$ ir sadalīti asimptotiski vienmērīgi (III, IV teorēma).

2. Ja skaitli α un skaitļu virkni (d), atskaitot nosacījumu par tās blīvumu, definē tāpat kā iepriekšējā tēzē, tikai noteic, ka (p) ir doto aritmētisko progresiju pirmskaitļi (d speciāls gadījums ir paši p), tad arī skaitļi

$$\{\alpha d\},$$

kur d mainās pa virknes (d) skaitļiem, kas pieder vajadzīgām aritmētiskām progresijām, ir sadalīti asimptotiski vienmērīgi (VI, V, IV teor.).

3. Ja skaitļi (d) definēti kā iepriekšējā tēzē, α ir vai nu algebrisks skaitlis vai patvaļīgi izvēloties pozitīvu konstanti c α nepārtrauktās daļas kvocienti k_s lieliem s apmierina nevienlīdzību

$$\log k_s < cs$$

un G izteic, cik no pirmajiem N skaitļiem

$$\{\alpha d\}$$

/d mainās pa skaitļiem (d), kas pieder vajadzīgām aritmētiskām progresijām/

atrodas patvaļīgi dotā intervallā $x_1, x_1+\gamma \pmod 1$ ar garumu γ, tad der novērtējums

$$G = \gamma N + O(N^\delta)$$

ar pozitīvu, no α atkarīgu konstanti $\delta < 1$ (VII un IX teorēmu sekas).

4. Ja skaitļi $\{\alpha d\}$ definēti kā iepriekšējā tēzē, tad var noteikt pozitīvu konstanti $\delta < 1$ tā, lai lieliem x skaitļi

$$\{\alpha d\}, \quad x < d < x + x^\delta$$

būtu sadalīti asimptotiski vienmērīgi (VIII un IX teorēmu sekas).

5. Ja skaitļi (d) un α ir definēti kā 3. tēzē, $f(x)$ ir pirmās vai n. $(n > 2)$ pakāpes polinoms ar augstāko koeficientu α un h ir vesels skaitlis $\neq 0$, tad visiem lieliem N der summas novērtējums

$$\left| \sum_{d \leq N} e^{2\pi i h f(d)} \right| < N^\delta$$

ar pozitīvu, no n, α un h atkarīgu konstanti $\delta < 1$ (21. lemmas, IX un X teorēmu sekas).

6. Ja α, f un d ir definēti kā iepriekšējā tēzē, tad skaitļi $\{f(d)\}$ ir sadalīti asimptotiski vienmērīgi. Eksistē pozitīva no f atkarīga konstante $\delta < 1$ tā, ka lieliem x arī skaitļi

$$\{f(d)\}, \quad x < d < x + x^\delta$$

ir sadalīti asimptotiski vienmērīgi (IX un XI teorēmu sekas).

7. Ja skaitļi $\{\alpha d\}$ ir sadalīti asimptotiski vienmērīgi, tad progresijās

$$n \quad \text{un} \quad [\alpha n]$$

$(n = 1, 2, \ldots, N)$ ir asimptotiski vienlīdzīgi daudz skaitļu d (Ievads).

8. Eksistē no α atkarīga pozitīva konstante s tā, ka pastāvot 4. tēzes nosacījumiem starp pietiekoši lielu pēc kārtas ejošu skaitļu s. pakāpēm

$$N^s, \quad (N+1)^s$$

atrodas vismaz viens skaitlis d formā $[\alpha n]$ (Ievads).

9. Pastāvot 7. tēzes nosacījumiem intervallos

$$(ax+b)\alpha < d < (ax+b+1)\alpha$$

/a, b dabīgi pastāvīgi skaitļi, $x = 0, 1, 2, \ldots, N$/

neatkarīgi no b vērtības ir visos asimptotiski vienlīdzīgi daudz skaitļu d.

1943. g. 9. decembrī

E. Fogels