Министерство высшего и среднего специального образования
Латвийской ССР
Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет имени Петра Стучки
Вычислительный центр

Ученые записки
Латвийского государственного университета
имени Петра Стучки
том 210

ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ И ПРОГРАММ

Выпуск I

Под ред. Я.М.Барздиня

Редакционно-издательский отдел ЛГУ им. Петра Стучки
Рига 1974

СРАВНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ ПРЕДЕЛЬНОГО СИНТЕЗА И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ

К.М.Подниекс

1. Соглашения. φ_n – фиксированная геделевская нумерация всех 1-местных частично-рекурсивных функций (ч.р.ф.). R – класс всех 1-местных общерекурсивных функций (о.р.ф.). В дальнейшем классами называются только множества о.р.ф. Класс U называется эффективно перечислимым классом, если существует о.р.ф. $\alpha(i)$ такая, что $U = \{\varphi_{\alpha(i)} \mid i = 0, 1, 2, \ldots\}$.

$\subset$ – строгое включение, $\subseteq$ – нестрогое.

$<x_1, \ldots, x_n>$ – эффективная нумерация всех конечных кортежей натуральных чисел; в качестве номеров использованы все натуральные числа.

Стратегия – это любая (частичная) функция типа $N \to N$. Особо выделяются ч.р. и о.р. стратегии.

Если всюду определенную функцию φ представлять как последовательность значений $\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \ldots$, то понятны обозначения $i\varphi, 0^k 10^\infty, \bar{x} 0^k \varphi$ и т.п. (здесь i, k – натуральные числа, $\bar{x}$ – кортеж натуральных чисел, φ – всюду определенная функция). Например, $0^k 10^\infty$ обозначает функцию, которая равна нулю на всех x, за исключением $x = k$.

2. Предельный синтез. Предельным синтезом называется восстановление "в пределе" геделевского номера функции φ по данной последовательности ее значений: $\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \ldots$. Для этой цели мы используем только о.р. стратегии. Если F – стратегия, а φ – всюду определенная функция, то значения $F(<\varphi(0) \ldots \varphi(n)>)$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$ называются гипотезами. Гипотеза p считается верной, если $\varphi_p = \varphi$, т.е. p – некоторый геделев номер функции φ.

Первое понятие предельного синтеза под названием

"identification in the limit" изучалось Голдом [I, 2]. В наших терминах оно определяется следующим образом. Говорят, что о.р. стратегия F предельно синтезирует функцию φ в смысле GN, если последовательность гипотез $F(<\varphi(0) \ldots \varphi(n)>) (n = 0, 1, \ldots)$ имеет верную гипотезу в качестве предела, т.е. если она "стабилизируется" на некотором геделевом номере функции φ. (Символ GN означает "геделев номер").

Если о.р. стратегия F синтезирует в смысле GN каждую функцию класса U, то говорят, что F синтезирует класс U в смысле GN. В этом случае мы пишем: $U \in GN$ (т.е. символ GN понимается как семейство всех классов, предельно синтезируемых в смысле GN).

Результаты, полученные Голдом [I]:

а) Если класс U содержится в эффективно перечислимом классе о.р.ф., то $U \in GN$.

б) $R \overline{\in} GN$ (этот результат значительно усилен нашей теоремой I).

Отметим также один результат Я.М.Барздиня [3]

а) Существует класс U такой, что $U \in GN$, однако U не содержится ни в одном эффективно перечислимом классе о.р.ф. (В качестве U можно взять класс V из доказательства теоремы I в [4]).

Таким образом, семейство GN весьма нетривиально.

Следующее понятие предельного синтеза под названием **"matching in the limit"** рассматривалось Фелдманом [5] для языков. В нашем случае это означает следующее. Говорят, что о.р. стратегия F предельно синтезирует функцию φ в смысле GN^∞, если последовательность $F(<\varphi(0) \ldots \varphi(n)>)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ состоит, начиная с некоторого места, только из верных гипотез. (Знак ∞ у символа GN указывает, что допускается даже бесконечное число различных гипотез на одной функции).

Если о.р. стратегия F синтезирует в смысле GN^∞ каждую функцию класса U, то говорят, что F синтезирует

U в смысле GN^{∞}. Запись $U \in GN^{\infty}$ определяется аналогич- но GN.

Очевидно: $GN \subseteq GN^{\infty}$, так как все, что синтезируе- мо в смысле GN, синтезируемо и в смысле GN^{∞}. С другой стороны, Барздинь [4] доказал, что существует класс U та- кой, что $U \in GN^{\infty}$, однако $U \bar{\in} GN$. Таким образом: $GN \subset GN^{\infty}$.

Последним в нашей схеме является понятие "частотно- го" синтеза. Пусть ε – действительное число, $0 < \varepsilon \leqslant 1$. Говорят, что о.р. стратегия F предельно синтезирует функ- цию φ в смысле $GN(\varepsilon)$, если в последовательности $F(<\varphi(0)\ldots\varphi(n)>)$ нижняя частота верных гипотез не меньше δ, т.е.

$$\underline{\lim_{n}} \frac{card\{x \mid x \leqslant n \;\&\; \varphi_{F}(<\varphi(0)\ldots\varphi(x)>) = \varphi\}}{n} \geqslant \varepsilon.$$

Семейство $GN(\varepsilon)$ определяется аналогично GN и GN^{∞}. Очевидно: $GN^{\infty} \subseteq GN(1)$, $\varepsilon > \delta \longrightarrow GN(\varepsilon) \subseteq GN(\delta)$.

ТЕОРЕМА I. Если $\varepsilon > 0$, то $R \bar{\in} GN(\varepsilon)$.

Эта теорема является упомянутым усилением результа- та Голда ($R \bar{\in} GN$): оказывается, что класс всех о.р.ф. нельзя предельно синтезировать, например, даже с частотой 10^{-6}. Поэтому все семейства $GN(\varepsilon)$ (а также GN^{∞}) нетри- виальны вместе с GN. Теорема I легко следует из теоремы 3.

ТЕОРЕМА 2. Если $\varepsilon > \frac{1}{2}$, то $GN(\varepsilon) = GN^{\infty}$.

Эта теорема выражает обычную ситуацию "детерминиза- ции": если частота синтеза превосходит $\frac{1}{2}$, то можно постро- ить стратегию, которая синтезирует тот же класс "в абсо- лютном смысле". Теорема 2 следует из теоремы 4, если пред- варительно установить, что при $\varepsilon > \frac{1}{2}$ имеет место $GN(\varepsilon) \subseteq$ NV" (см.дальше). Это несложно.

Теорему 2 нельзя "усилить": оказывается, что $GN^{\infty} \subset$

$GN\left(\frac{1}{2}\right)$ (это следует из теорем 2, 3). Из теоремы 3 следу- ет, что $GN\left(\frac{1}{2}\right) \subset GN\left(\frac{1}{3}\right) \subset GN\left(\frac{1}{2}\right) \subset \ldots$ (можно пред- положить, что $GN(\varepsilon) \subset GN(\delta)$ для всех $\varepsilon, \delta : 0 < \delta < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}$)

ТЕОРЕМА 3. Если $q \geqslant 2$ – натуральное число и $\delta > 0$, то $GN\left(\frac{1}{q} + \delta\right) \subset GN\left(\frac{1}{q}\right)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим "почти-равенство" двух частичных функций φ, ψ так:

$$\varphi \overset{n}{=} \psi \longleftrightarrow \exists x_0 \forall x > x_0 \;\; \varphi(x) = \psi(x).$$

Соответственно: i – почти-геделев номер функции φ, ес- ли $\varphi_i \overset{n}{=} \varphi$. Для любых $0 < p \leqslant q$ определяется класс функ- ций:

$$C_{pq} = \{\varphi \mid \varphi = i_1 \ldots i_q \varphi' \;\&\; \varphi' \in R \;\&\; \varphi_{i_k} \overset{n}{=} \varphi \text{ для } \geqslant p \text{ значений } k\}$$

Таким образом, если $\varphi \in C_{pq}$, то из первых q значений этой функции не менее p будут ее почти-геделевыми номера- ми.

I. Покажем сначала, что $C_{pq} \in GN\left(\frac{p}{q}\right)$. Обозначим для данной φ через j_{sn} (где $0 \leqslant s \leqslant q-1$; $n \geqslant 0$) некоторый геделев номер функции

$$\eta_{sn}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если } x \leqslant n \\ \varphi_{\varphi(s)}(x), & \text{если } x > n \end{cases}$$

Тогда гипотеза $F(<\varphi(0)\ldots\varphi(n)>)$ полагается равной j_{sn}, ес- ли n при делении на q дает в остатке s. Очевидно, если $\varphi_{\varphi(s)} \overset{n}{=} \varphi$, то для всех достаточно больших n, которые при делении на q дают в остатке s, гипотеза $F(<\varphi(0)\ldots\varphi(n)>)$ будет верной. Поэтому на $\varphi \in C_{pq}$ стратегия F дает верные гипотезы с нижней частотой $\frac{p}{q}$, что и требовалось.

2. Теперь мы должны установить, что $C_{pq} \bar{\in} GN\left(\frac{p}{q} + \delta\right)$ при $p = 1$, $q \geqslant 2$, $\delta > 0$. Допустим противное: существует о. р. стратегия H, которая на всех функциях из C_{pq} дает вер-

ные гипотезы с частотой $\geq \frac{p}{q} + \delta$. Сразу же перейдем к подклассу C_{pq}, зафиксировав $l_q = a$, где $\varphi_a = 0^{\infty}$. Всякая функция вида $l_1 \dots l_{q-1} a \bar{\alpha} 0^{\infty}$ ($\bar{\alpha}$ – произвольный кортеж чисел) входит в C_{pq}, следовательно, стратегия H должна ее синтезировать с частотой $\geq \frac{p}{q} + \delta$.

Для построения "контрпримера" (такой о.р.ф., которая входит в C_{pq}, но, тем не менее H дает на ней верные гипотезы лишь с нижней частотой $\leq \frac{p}{q}$) мы должны будем рассмотреть действие H на различных кортежах $\bar{\alpha}$. Эти кортежи воспринимаются как начальные куски функций, поэтому H даст на $\bar{\alpha}$ всего $|\bar{\alpha}|$ гипотез ($|\bar{\alpha}|$ – длина кортежа $\bar{\alpha}$). Гипотезу i, которую H выдает где-нибудь на $\bar{\alpha}$, мы называем "приятной", если значение $\varphi_i(|\bar{\alpha}|)$ определено. ("Приятной" – потому, что такую гипотезу легко опровергнуть, переходя к кортежу $\bar{\alpha} y$, где $y \neq \varphi_i(|\bar{\alpha}|)$, что облегчает построение контрпримера).

Кортеж $l_1 \dots l_{q-1} a$, содержащий $q-1$ переменных, обозначим через Γ и введем следующий предикат $(0 \leq l \leq q)$:

$$B(\Gamma, \bar{\alpha}, l) \equiv \exists \bar{\beta} \left(H \text{ на } \Gamma\bar{\alpha}\bar{\beta} \text{ не менее } \tfrac{l}{q}|\Gamma\bar{\alpha}\bar{\beta}| \text{ раз дает "приятные" гипотезы}\right)$$

Этот предикат рекурсивно перечислим, следовательно, для произвольных $\Gamma, \bar{\alpha}, l$ его истинность можно разрешить, задав единственный вопрос оракулу $\varnothing'$ (см. [7], гл.14).

Введем еще один предикат $(0 \leq l \leq q)$:

$$A(\Gamma, l) \equiv \forall \bar{\alpha} B(\Gamma, \bar{\alpha}, l).$$

Он входит в Π_2, поэтому его истинность решается при помощи оракула $\varnothing''$.

Поскольку на любой о.р.ф. φ со свойством $\varphi = \Gamma\bar{\alpha}0^{\infty}$ стратегия H дает верные гипотезы с нижней частотой $> \frac{p}{q}$, то $A(\Gamma, p)$ должно быть истинно для всех Γ (напомним, что последняя компонента Γ суть a, $\varphi_a = 0^{\infty}$, поэтому $\varphi \in C_{pq}$). Очевидно также, что при $l < q$: $\neg A(\Gamma, l+1) \rightarrow$. Поэтому условие:

$$\left[\tfrac{l_0}{p} - \text{целое} \,\&\, p \leq l_0 < q - p \,\&\, A(\Gamma, l_0) \,\&\, \neg A(\Gamma, l_0 + p)\right] \vee$$
$$\vee \left[l_0 = q - p \,\&\, A(\Gamma, l_0)\right] \qquad (*)$$

определяет единственное число l_0, для каждого Γ (заметим, что $p \leq q - p$ при $\frac{p}{q} \leq \frac{1}{2}$). Здесь l_0 принимает одно из $]\frac{q}{p}[- 1$ возможных значений; какое именно – это можно узнать, задав подходящие вопросы оракулу $\varnothing''$.

Теперь мы приступаем непосредственно к построению контрпримера, опровергающего предполагаемое свойство стратегии H. Сначала мы построим такой "контрпример" для каждого кортежа $\Gamma = l_1 \dots l_{q-1} a$, затем применим подходящим образом теорему о неподвижной точке; в результате окажется, что один из "контрпримеров" входит в C_{pq}; это – противоречие, доказывающее теорему 3.

Если дано Γ, мы с помощью оракула $\varnothing''$ определяем l_0 из условия $(*)$. Дальше различаются два случая.

а) Выполняется первый член дизъюнкции $(*)$. Воспользуемся сначала тем, что $A(\Gamma, l_0 + p)$ ложно:

$$\exists \bar{\alpha} \forall \bar{\beta} \left(H \text{ на } \Gamma\bar{\alpha}\bar{\beta} \text{ менее } \tfrac{l_0+p}{q}|\Gamma\bar{\alpha}\bar{\beta}| \text{ раз дает "приятные" гипотезы}\right),$$

т.е. существует $\bar{\alpha}_0$ такой, что

$$\forall \bar{\beta} \left(H \text{ на } \Gamma\bar{\alpha}_0\bar{\beta} \text{ более } \left(1 - \tfrac{l_0+p}{q}\right)|\Gamma\bar{\alpha}_0\bar{\beta}| \text{ раз дает "неприятные" гипотезы}\right).$$

Для каждого $\bar{\beta}$ все эти "неприятные" гипотезы заведомо неверны (не являются номерами о.р.ф.). Найти указанный кортеж $\bar{\alpha}$ можно, перебирая по порядку всевозможные $\bar{\alpha}$ и задавая оракулу $\varnothing'$ вопросы об истинности $B(\Gamma, \bar{\alpha}, l_0 + p)$.

Теперь начнем с этого $\bar{\alpha}_0$ построение контрпримера – некоторый о.р.ф. φ'. Так как $A(\Gamma, l_0)$ истинно, то для $\bar{\alpha}_0$ эффективно найдется $\bar{\beta}_0$ такой, что H на $\Gamma\bar{\alpha}_0\bar{\beta}_0$ не менее $\frac{l_0}{q}|\Gamma\bar{\alpha}_0\bar{\beta}_0|$ раз дает "приятные" гипотезы. Но тогда легко подобрать число γ_0 так, что на кортеже $\Gamma\bar{\alpha}_0\bar{\beta}_0\bar{\gamma}_0$ не менее $\frac{l_0}{q}|\Gamma\bar{\alpha}_0\bar{\beta}_0|$ из этих "приятных" гипотез окажутся опровергнутыми. Затем берем $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_0\bar{\beta}_0\bar{\gamma}_0$ и эту процедуру повторяем, и так далее. В результате определена о.р.ф. $\varphi' = \Gamma\bar{\alpha}_0\bar{\beta}\bar{\gamma}_0\bar{\beta}_1\bar{\gamma}_1 \dots$.

Заметим, что на любом начальном куске вида $\Gamma\bar{\alpha}_0 -$ $\bar{\beta}_0 \gamma_0 \ldots \bar{\beta}_n$ частота "неприятных" гипотез, даваемых страте-гией H, больше $1 - \frac{l_0+p}{q}$. К этому можно прибавить час-тоту тех "приятных" гипотез, которые опровергнуты значени-ем γ_n (следующим за $\bar{\beta}_n$). Эта частота $\geqslant \frac{l_0}{q}$, поэтому об-щая частота неверных гипотез на выбранном куске больше $1 - \frac{l_0+p}{q} + \frac{l_0}{q} = 1 - \frac{p}{q}$. Так будет при любом n, по-тому нижняя частота в е р н ы х гипотез, которые H дает на φ', не превосходит $\frac{p}{q}$. Значит φ' является контр-примером.

б) Выполняется второй член дизъюнкции (*). Так как здесь $A(\Gamma, q-p)$ истинно, то для каждого $\bar{\alpha}$ можно эффек-тивно построить $\bar{\beta}$ такой, что H на $\Gamma\bar{\alpha}\bar{\beta}$ не менее $\frac{q-p}{q} \times$ $|\Gamma\bar{\alpha}\bar{\beta}|$ раз дает "приятные" гипотезы. Эти гипотезы можно опровергнуть значением γ, следующим за $\bar{\beta}$. Итерации это-го процесса дают, как и в предыдущем случае, функцию φ', на которой стратегия H дает верные гипотезы с нижней час-тотой $\leqslant \frac{p}{q}$. Таким образом, и здесь φ' – контрпример.

Итак, отправляясь от $\Gamma = l_1 \ldots l_{q-1}\,a$, мы сначала задали несколько вопросов оракулу $\varnothing''$, получив в резуль-тате одно из $]\frac{q}{p}[-1$ возможных значений числа l_0 из ус-ловия (*). Затем, задав еще несколько вопросов, на этот раз – оракулу $\varnothing'$, мы сумеем построить в конце концов о.р.ф. $\varphi' = l_1 \ldots l_{q-1}\, a\, \varphi''$, на которой стратегия H дает вер-ные гипотезы с нижней частотой $\leqslant \frac{p}{q}$. Остается каким-то способом применить теорему о неподвижной точке, "заставив" одно из $l_s (s \leqslant q-1)$ стать почти-гёделевым номером для φ'. Тогда получится, что $\varphi' \in C_{pq}$ – противоречие с предположе-нием, что H синтезирует C_{pq} в смысле $GN(\frac{p}{q}+\delta)$.

Все предыдущее построение дает, по существу, неко-торую функцию $\varphi'(\Gamma, x)$, которая вычислима с оракулом $\varnothing'$ и $\varnothing''$ (контрпримером для данного Γ тогда будет функция $\lambda x \varphi'(\Gamma, x)$). От оракула $\varnothing''$ мы освобождаемся так: пере-ходим от одной функции $\varphi'(\Gamma, x)$ к $]\frac{q}{p}[-1$ функциям $f_s(\Gamma, x)$ (где $1 \leqslant s \leqslant]\frac{q}{p}[-1$), именно: $f_s(\Gamma, x)$ вычисляется по

озможности так же, как $\varphi'(\Gamma, x)$, с использованием ораку-а $\varnothing'$, где это необходимо, однако вместо того, чтобы за-авать вопросы $\varnothing''$, мы уже с самого начала "полагаем", что начение l_0 в условии (*) равно t_s (s-му значению из сех возможных). В тех случаях, когда (для данного Γ) это редположение неверно, $\lambda x f_s(\Gamma, x)$ будет только частичной ункцией (например, поиск кортежа $\bar{\alpha}_0$ в случае (а) может казаться бесконечным). Однако, если для данного Γ число t_s совпадает с l_0 из условия (*), то $\lambda x f_s(\Gamma, x) = \lambda x \varphi'(\Gamma, x)$.

Освободимся теперь от оракула $\varnothing'$. Заменим его не-которой процедурой перечисления (креативного) множества $\varnothing'$. Если для определения ответов оракула $\varnothing'$ мы пользуемся тем, что уже перечислено к данному моменту, то ошибок при вы-числении таким способом $f_s(\Gamma, x)$ нельзя избежать полнос-тью. Однако в случае, когда (для данного Γ) число t_s совпадает с l_0 из условия (*), при вычислении в с е й функции $\lambda x f_s(\Gamma, x)$ оракулу $\varnothing'$ задается не более, чем ко-нечное число вопросов (поиск $\bar{\alpha}_0$ в случае (а)). Ошибки в ответах на эти вопросы (а также отошедший от "верного" на-правления процесс вычисления) можно "в пределе" скорректи-ровать, поэтому, начиная с некоторого x_0, все значения функции $\lambda x f_s(\Gamma, x)$ будут вычислены правильно (когда дой-дет очередь до них, ошибки в ответах $\varnothing'$ уже будут исправ-лены). Таким образом, мы вместо $f_s(\Gamma, x)$ вычислим некото-рую ч.р.ф. $g_s(\Gamma, x)$ со свойством:

если t_s равно l_0 из условия (*), составленного для Γ, то

$$\lambda x g_s(\Gamma, x) \overset{n}{=} \lambda x f_s(\Gamma, x) = \lambda x \varphi'(\Gamma, x). \qquad (**)$$

По существу, мы имеем теперь $]\frac{q}{p}[-1 = q-1$ функ-ций g_s от q аргументов $l_1, \ldots, l_{q-1}, x$:

$$g_s = g_s(i_1, \ldots, i_{q-1}, a, x).$$

Начинаем применять теорему о неподвижной точке: существует о.р.ф. $h_1(i_2, \ldots, i_{q-1})$ такая, что

$$\lambda x g_1(h_1(\ldots), i_2, \ldots, i_{q-1}, a, x) = \varphi_{h_1(\ldots)}$$

Далее: $\lambda x g_2(h_1(h_2\ldots), h_2(\ldots), l_3, \ldots, l_{q-1}, a, x) = \varphi_{h_2(\ldots)}$, наконец: $\lambda x g_{q-1}(h_1, \ldots, h_{q-1}, a, x) = \varphi_{h_{q-1}}$, где h_{q-1} – число. Поэтому кортеж чисел $\tau = h_1 \ldots h_{q-1} a$ обладает свойством $(1 \leq s \leq q-1): \lambda x g_s(\tau, x) = \varphi_{h_s}$. Если для этого кортежа составить условие $(*)$ и взять s таким, что $t_s =$ l_s из этого условия, то соответствующий контрпример будет обладать (в силу $(**)$) свойством:

$$\lambda x \varphi'(\tau, x) = h_1 \ldots h_{q-1} a \varphi \triangleq \varphi_{h_1} \vee \varphi_{h_2} \vee \ldots \dot{\vee} \varphi_{h_{q-1}}.$$

Итак, одно из первых q значений функции $\lambda x \varphi'$ суть ее почти-геделев номер, поэтому $\lambda x \varphi' \in C_{1q}$. Противоречие с предположением, что $C_{1q} \in GN(\frac{1}{q} + \delta)$ посредством стратегии H.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Если в определениях типов предельного синтеза заменить о.р. стратегии на ч.р. (тогда $F(<\varphi(0) \ldots \varphi(n)>)$ = "неопределено" считается "неверной гипотезой"), то, как легко видеть, расширения семейств GN, GN^{∞}, $GN(\varepsilon)$ $(0 < \varepsilon \leq 1)$ не происходит. В случае GN это можно доказать простой процедурой "выжидание" (см. дальше первую часть доказательства теоремы 5) а в остальных случаях значение "неопределено" можно включить в гипотезу (например, выдать номер пустой функции).

3. П р о г н о з и р о в а н и е. Прогнозированием называется предсказание значения $\varphi(n+1)$ по данным значениям $\varphi(0), \ldots, \varphi(n)$ функции φ. Здесь мы будем пользоваться как ч.р., так и о.р. стратегиями. Если F – стратегия, а φ – (всюду определенная) функция, то значения $F(<\varphi(0) \ldots \varphi(n)>)$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$ назовем п р о г н о з а м и. Прогноз считается верным, если он равен $\varphi(n+1)$, в противном случае прогноз считается ошибочным.

(Если значение $F(<\varphi(0) \ldots \varphi(n)>)$ неопределено, то это также считается ошибкой).

Говорят, что стратегия F прогнозирует функцию φ, если в последовательности $F(<\varphi(0) \ldots \varphi(n)>)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ не более чем конечное число прогнозов ошибочны.

Если существует о.р. стратегия, прогнозирующая каждую функцию класса U, то мы пишем $U \in NV$ (символ NV означает "следующее значение"). Если существует ч.р. стратегия, прогнозирующая все функции класса U, мы будем писать $U \in NV''$.

Очевидно, $NV \subseteq NV''$, но здесь не хватает еще промежуточного NV'. $U \in NV'$ истинно, если и только если существует ч.р. стратегия, которая прогнозирует все функции класса U, и при этом для всех $\varphi \in U$ и всех n значение $F(<\varphi(0) \ldots \varphi(n)>)$ определено. (Здесь случай $F(<\varphi(0) \ldots \varphi(n)>)$ -неопределено" принимается сразу за "бесконечное число ошибок", это довольно естественно: сколько можно ожидать появление о д н о г о прогноза?) Очевидно, $NV \subseteq NV' \subseteq NV''$.

Прогнозирования в смысле NV, NV' введены Я.М. Барздинем [3, 6]; в частности, им получены результаты:

а) $U \in NV$ если и только если U содержится в некотором эффективно перечислимом классе о.р.ф.

б) Существует $U \in NV'$, который не содержится ни в одном эффективно перечислимом классе о.р.ф. (в качестве U можно взять класс $\mathcal{V}$ из доказательства теоремы I в [4]).

Таким образом: $NV \subset NV'$. Из теорем 4, 5 легко следует, что $NV' \subset NV''$.

4. С в я з ь м е ж д у п р о г н о з и р о в а н и е м и с и н т е з о м. Оказывается, что прогнозирование посредством ч.р. стратегий (в смысле NV'') "по силе" эквивалентно предельному синтезу в смысле GN^{∞}.

ТЕОРЕМА 4. $NV'' = GN^{\infty}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) $U \in GN^{\infty} \longrightarrow U \in NV''$ доказывается очень просто.

2) Покажем, что $U \in NV'' \longrightarrow U \in GN^{\infty}$. Пусть $U \in NV''$ посредством ч.р. стратегии H. Определим следующую стратегию F: $F(<\varphi(0)\ldots\varphi(n)>) = j_n$, где j_n – некоторый геделев номер следующей функции η_n (по существу, η_n – это "экстраполяция" начального куска $\varphi(0)\ldots\varphi(n)$ посредством прогнозирующей стратегии H):

$$\eta_n(x) = \varphi(x), \text{ если } x \leqslant n,$$

$$\eta_n(n+1) = H(<\varphi(0)\ldots\varphi(n)>),$$

$$\eta_n(n+k+1) = \begin{cases} H(\varphi(0)\ldots\varphi(n)\eta_n(n+1)\ldots\eta_n(n+k)), \text{ если все входящие} \\ \quad \text{сюда значения } \eta_n \text{ определены,} \\ \text{неопределено, в противном случае.} \end{cases}$$

Если $\varphi \in U$, то H прогнозирует φ, т.е. начиная с некоторого n функция η_n совпадает с φ, для этих n гипотезы $F(<\varphi(0)\ldots\varphi(n)>)$ будут верны. Итак, $U \in GN^{\infty}$ посредством F. Теорема 4 доказана.

Из упомянутых результатов Голда и Барздиня легко следует, что $NV \subseteq GN$. Но теорема 5 показывает, что даже прогнозирование в смысле NV' "слабее" предельного синтеза в смысле GN.

ТЕОРЕМА 5. $NV' \subset GN$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) Сначала покажем, что $NV' \subseteq GN$. Пусть $U \in NV'$ посредством ч.р. стратегии H. Построим следующую стратегию F (определение j_x и η_x см. в конце доказательства теоремы 4):

$$F(<\varphi(0)\ldots\varphi(n)>) = \begin{cases} j_k, \text{ где } k = \min\{x \mid x \leqslant n \,\&\, \forall y \leqslant n[\eta_x(y) = \varphi(y)]\} \\ \quad \text{если значения } \eta_x(y) \text{ определены для} \\ \quad \text{всех } x, y \leqslant n, \\ \text{неопределено, в противном случае.} \end{cases}$$

Ясно, что F "пока что" лишь ч.р. стратегия (для $U \in GN$ требуется о.р.), тем не менее, если $\varphi \in U$, то:

а) $F(<\varphi(0)\ldots\varphi(n)>)$ определено для всех n (ибо H про-

гнозирует U в смысле NV', поэтому для всех n прогноз $(<\varphi(0)\ldots\varphi(n)>)$ определен и, таким образом, все значения $\eta_x(y)$ также определены).

б) Начиная с некоторого $n = n_0$, будет $\eta_{n_0} = \varphi$ (ибо η_n экстраполирует $\varphi(0)\ldots\varphi(n)$ посредством стратегии H, которая прогнозирует функцию φ). Но тогда при достаточно большом n гипотеза $F(<\varphi(0)\ldots\varphi(n)>)$ меняться больше не будет: она стабилизируется на числе j_{n_0} – геделевском номере функции $\eta_{n_0} = \varphi$.

Теперь легко определить о.р. стратегию F', которая синтезирует класс U в смысле GN. Именно, если даны значения функции φ, зафиксируем некоторую процедуру параллельного вычисления значений $F(<\varphi(0)\ldots\varphi(n)>)$ для всех n, причем в момент времени t разрешается использовать только значения $\varphi(0)\ldots\varphi(t)$.

$$F'(<\varphi(0)\ldots\varphi(t)>) = \begin{cases} i, \text{ если } i \text{ – значение } F(<\varphi(0)\ldots\varphi(x)>), \\ \quad \text{вычисленное до момента } t \text{ в последнюю очередь,} \\ 0, \text{ если до момента } t \text{ никаких значений не вычислено.} \end{cases}$$

Ясно, что F' будет о.р. стратегией, даже если F нигде не определена, и если последовательность $F(<\varphi(0)\ldots\varphi(n)>)$ стабилизируется на числе j, то и $F'(<\varphi(0)\ldots\varphi(n)>)$ стабилизируется на j. Поэтому из а), б) следует, что $U \in GN$ посредством F', что и требовалось доказать.

2) Построим теперь класс $U \in GN \setminus NV'$ (это построение существенно использует одну идею М.И.Аугустона).

$$U = \{\varphi \mid \varphi = \bar{\alpha}\, i\, \varphi'(0)\, i\, \varphi'(1)\, i \ldots \,\&\, \bar{\alpha} \text{ – кортеж четной длины } \&\, \varphi' \in R \,\&\, \varphi_i = \varphi\}$$

Из теоремы о неподвижной точке легко следует, что для всякого $\bar{\alpha}$ и всякой φ' найдется такое i, что $\varphi \in U$. Очевидно, о.р. стратегия F со свойством $F(<\varphi(0)\ldots\varphi(2n+1)>) = F(<\varphi(0)\ldots\varphi(2n)>) = \varphi(2n)$ синтезирует U в смысле GN.

Предположим теперь, что $U \in NV'$ посредством ч.р. стратегии H. В качестве начальных кусков функций класса U

выступают произвольные кортежи натуральных чисел. Но тогда, если H прогнозирует U именно в смысле NV', то любое значение $H(<\bar{x}>)$ должно быть определено, т.е. H является на самом деле о.р. стратегией. Итак, оказалось, что $U \in NV$. Отсюда, по теореме Барздиня (формулировку см. в п.3°), класс U содержится в некотором эффективно перечислимом классе о.р.ф. Пусть $\{\tau_i\}$ - вычислимая нумерация этого класса. Определим новую нумерацию $\tau_i'(x)=\tau_i(2x)$. Тогда из упомянутого свойства класса U (каждая функция которого находится среди $\tau_0, \tau_1, \ldots$) следует, что $\{\tau_i'\}$ содержит все о.р.ф., что невозможно.

Поэтому $U \bar{\in} NV'$ и теорема 5 доказана.

Все предыдущие результаты сводятся в схему: $NV \subset NV' \subset GN \subset GN^{\infty} = NV'' = GN(\frac{1}{2}+\varepsilon) \subset GN(\frac{1}{2}) \subset GN(\frac{1}{3}) \subset \ldots$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. (Совместно с Е.Б.Кинбером). Наряду с частотным синтезом можно интересоваться и частотным прогнозированием. Но здесь почти все результаты доказываются очень легко.

Для класса о.р.ф. U будем писать $U \in NV(\varepsilon)$, если существует о.р. стратегия F такая, что для любой функции $\varphi \in U$ в последовательности прогнозов F нижняя частота верных прогнозов не меньше ε. Очевидно: $NV \subseteq NV(1)$, $\varepsilon > \delta \rightarrow NV(\varepsilon) \subseteq NV(\delta)$.

Введем для каждого $\varepsilon \in (0,1)$ класс:

$$U_\varepsilon = \{\varphi \mid \varphi \in R \;\&\; \underline{\lim} \frac{card\{x \mid x \leq n \;\&\; \varphi(x)=0\}}{n} \geq \varepsilon\}.$$

Очевидно, $U_\varepsilon \in NV''(\varepsilon)$ посредством о.р. стратегии $F(x) \equiv 0$. Можно показать, что $U_1 \in NV(1) \setminus NV$ (для этого следует доказать от противного, что U_1 не содержится ни в одном эффективно перечислимом классе о.р.ф.). Таким образом: $NV \subset NV(1)$. Непосредственно (построением о.р.ф.-контрпримера) доказывается, что $U_\varepsilon \bar{\in} NV(\delta)\,(\delta > \varepsilon)$, таким образом: $\varepsilon > \delta \rightarrow NV(\varepsilon) \subset NV(\delta)$.

Можно ввести также понятие $NV''(\varepsilon)$, заменив в

предыдущем определении о.р. стратегии на ч.р.. Нетрудно показать, что $R \in NV''(1)$, т.е. что существует ч.р. стратегия, которая на любой о.р.ф. делает верные прогнозы с частотой 1. Здесь, таким образом, $NV''(\varepsilon) = NV''(1)$ для всех ε.

Для понятия $NV'(\varepsilon)$ доказываются те же результаты, что для $NV(\varepsilon)$, используя те же классы U_ε. Но взаимная связь семейств $NV(\varepsilon), NV'(\delta)$ совершенно неясна, в первую очередь, неясно, будет ли $NV(1) \subset NV'(1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gold E.M. Limiting recursion.- "Journal of Symbolic Logic", 1965, 3, No.1.
2. Gold E.M. Language identification in the limit.- "Information and Control", 1967, 10, No.5.
3. Barzdin J.M. Prognostication of automata and functions - Information Processing 71, North-Holland, 1972.
4. Барздинь Я.М. Две теоремы о предельном синтезе.- Настоящий сборник, стр.82-88.
5. Feldman J. Some decidability results on grammatical inference and complexity.- "Information and Control", 1972, 20, No.3.
6. Барздинь Я.М., Фрейвалд Р.В. Прогнозирование общерекурсивных функций.- "ДАН СССР", 1972, 206, № 3.
7. Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М., 1972.