Emanuels Grinbergs

Motives for reflections

Part One

Facsimile of manuscript
(in Russian)

The archive of Emanuels Grinbergs manuscripts

University of Latvia

Riga, December 2013

Annotation

The article (in three pieces of manuscripts), written in Russian, contains some reflections on graph theory. It may be written in 1973.

D. Zeps

dainize@mii.lu.lv

Мотивы для размышлений I.

Инварианты, матрицы, определители графов.

1

001599

1. Некоторые факты и обозначения.

1.1. Рассматриваются графы $G(X,V)$, ориентированные или нет, с $|X| = n$ ~~вер~~вершинами, пронумерованными от 1 до n. Вершину с номером i будем называть вершиной i. Основной интерес представляют униграфы G. Однако нам будем рассматривать и строить некоторые вспомогательные графы, природа которых может быть различной. Поэтому из общих рассмотрений не исключаются случаи, когда G мультиграф или имеет петли или и то, и другое.

Классы изоморфных друг другу частей G мы будем называть типами. Через $\nu_\alpha, \nu_\beta \dots$ обозначим число всех частей G типа $\alpha, \beta, \dots$

Согласно общепринятому, инвариант G — это любая величина, связанная с G, не меняющая своего значения при перенумерации вершин G; для графов, не изоморфных с G, этот инвариант может иметь и другие значения (в отличие от констант — чисел, букв или переменных и т.п., вообще не зависящих от G).

Примеры инвариантов: „арифметические" инварианты: n, $m=|V|$, любые ν_α, функции нескольких ν_α — число деревьев, факторов, компонент связности.

Экстремальные значения, определяемые условиями типа: „наименьшее (наибольшее) значение такое, что ..." — хроматическое число и класс, число рёберной, вершинной, цикличной связности, минимальное число пересечений в плоском представлении.

CU2000

„Логические инварианты" — значение истинности некоторого утверждения, т.е. наличие или отсутствие некоторого свойства, напр. G сильно связный, критический (в отношении раскраски или другого свойства).

Можно рассматривать также и определенные комбинации отдельных инвариантов, напр. полиномы с инвариантными коэффициентами: характеристические полиномы, полиномы раскрасок и т.п.

1.2. Для наших (пункта 1.2 –) считаем что исходная информация о G – это матрица смежности $A(a_{ij})$. Если не указано, считаем что G ориентирован, что более удобно для некоторых первичных интерпретаций. (Неорграф всегда можно считать симметричным орграфом.) Следовательно

a_{ij} – число дуг с начальной вершиной i и конечной j

a_{ii} – число петель в вершине i.

Повсюду, без исключений, различными буквами $(i, j, k \dots)$ обозначены различные номера вершин или значения индексов.

Пусть производится перенумерация $\sigma \in S_n$ вершин G. Этой перенумерации соответствует определенная матрица P перестановок. Матрица смежности A' для новой нумерации удовлетворяет соотношению

$$A' = P^{-1} A P \qquad (1)$$

002001

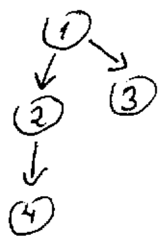
Инварианты G – это величины, зависящие от A, которые не меняют значения при всех возможных $n! = |S_n|$ преобразованиях вида (1). Такие величины изучаются в тензорной алгебре для различных классов преобразующих матриц P (невырожденные, унитарные, ортогональные и т.п.). Так как перестановочные матрицы – весьма частный случай ортогональных. Мы увидим далее, что особый характер множества матриц P имеет следствием множество специальных свойств и соотношений. Однако остаются в силе все свойства и соотношения общей тензорной алгебры в ортогональных координатах. Подробное изложение последней для трехмерного случая, легко обобщаемого на произвольные n, дает Рашевский [12, §§ 1-8]. Непосредственное использование результатов вряд ли что дает, но возможно, что соотношения и операции могут дать полезные инспирации.

Не исключено, что полезными могут быть также: компактная символика для записи определителей, алгебраических дополнений и т.п., ясно и коротко изложенная в гл. 1 Вебленом [3]; система обозначений — „метод коренных букв и индексов" Схоутена [13, §§ 1 и 2]. 002002

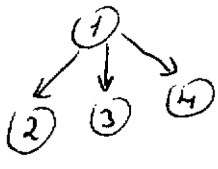
1.3. В согласии с тем, что делается в тензорной алгебре, мы будем рассматривать различные произведения φ элементов фундаментальной матрицы A. Суммируя такие произведения можно получить инварианты, выраженные как значения полиномов по отношению к элементам A.

Любое произведение φ фиксированных неповторяющихся a_{ij} (и a_{ii}) равно числу цепей G некоторого типа, определенных образом натянутого на вершины, номера которых фигурируют в индексах.

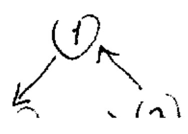
Примеры:



$$a_{12}\,a_{13}\,a_{24} = b_{1234} \qquad (2)$$



$$a_{12}\,a_{13}\,a_{14} = c_{1234} \qquad (3)$$



$$a_{12}\,a_{23}\,a_{31} = d_{123} \qquad (4)$$

Каждое из этих произведений мы обозначили одной буквой с соответствующим упорядоченным набором индексов.

Если над индексами левых частей производится некоторая подстановка

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ i & j & k & p & \cdots \end{pmatrix},$$

то естественно той же подстановке подвергать и индексы правых частей. Множество всех произведений φ, обозначенных одной буквой (т.е. с тем же законом образования) и со всеми возможными упорядоченными наборами k различных индексов мы будем называть <u>k-индексной величиной</u>, а каждое из ~~этих~~ таких φ считать координатой этой величины. В примерах „b" и „c" определяют 4-индексные величины, а „d" – 3-индексную.

Число всех координат k-индексной величины равно числу <u>упорядоченных</u> наборов k величин из n, т.е.

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

Возможен случай, когда для любого A значения координат некоторой величины повторяются. Это имеет место в том и только том случае, когда существует нетривиальная группа Γ подстановок индексов координат, имеющая эффектом только перестановку множителей, определяющих координаты. Эта группа определяется в терминах мест переставляемых индексов. Так, напр., для величина (3), Γ – группа всех перестановок трех последних индексов, $|\Gamma| = 6$. Для (4) – Γ состоит из циклических перестановок трех индексов, $|\Gamma| = 3$. Для (2) имеем только тождественную подстановку, $|\Gamma| = 1$. Ясно, что Γ соответствует группе автоморфизмов соответствующего типа части G.

Пусть рассматривается некоторая k-индексная величина типа α. Суммируя координаты φ этой величины по множителю N всех упорядоченных наборов k различных индексов, мы имеем

$$\sum_N \varphi = |\Gamma| \, \nu_\alpha,$$ 002004

так как каждая подсчитываемая часть G учитывается $|\Gamma|$ раз.

В случае, когда $|\Gamma| > 1$, можно освободиться от этого множителя и учитывать каждую подсчитываемую часть только один раз, если суммировать φ по определенному подмножеству N. В конкретном примере это достигается, например, суммированием:

для c_{ijlp} из (8) – по всем i; $j<l<p$;

для d_{ijl} из (11) – по $i<j$, $i<l$.

Для умножений нет надобности рассматривать произведения φ с повторяющимися множителями, так как

$$a_{ij}^2 = a_{ij}.$$

и это же значения имеют и на положительные степени a_{ij}. Если же мы имеем мультиперед, то φ с повторными множителями дают комбинации чисел частей нескольких типов. Простейший пример:

$$a_{ij}^2 = a_{ij} + 2 h_{ij},$$

где h_{ij} – число частей вида .

Здесь h_{ij} – координаты некоторой двухиндексной величины, соответствующей ν_α по графам, напр., суммированием по всем упорядоченным парам i, j.

002005

1.4. Любой полином от произведения многих величин $\nu_\alpha, \nu_\beta, \ldots$ является инвариантом и может быть представлен как полином от величин a_{ij}, a_{ii}. Обратно, если полином

$$F(a_{12}, a_{13}, \ldots a_{n-1,n}, a_{11}, a_{22}, \ldots a_{nn})$$

инвариантный (т.е. его значения – инварианты), то

1) вместе с любым мономом φ полином F содержит с теми же коэффициентами также и все мономы, в которые переходит φ при всех возможных подстановках $\sigma \in S_n$ индексов; следовательно

2) F можно представить как линейную комбинацию некоторых $\nu_\alpha, \nu_\beta, \ldots$

Часто нас интересует не одно конкретное v_k, а определенная комбинация некоторых из них. Примеры: определение числа деревьев, факторов, компонент; наличие графов Понтрягина-Куратовского и т.п. В некоторых случаях такие величины или некоторую информацию о них можно получить не трудоемким суммированием отдельных φ, а более простой процедурой, именно расчетом значения некоторого определителя.

Предлагаемый первый круг исследований относится к построению и рассмотрению таких определителей, которые в качестве численных элементов содержат сами a_{ij} и (или) не слишком сложно вычисляемые комбинации этих величин, а также могут содержать небольшое число независимых переменных. Для получения первых результатов вероятно целесообразно комбинировать два подхода:

1) рассматривать определители с простыми законами образования элементов и интерпретировать получаемые значения;

2) пытаться строить определители, характеризующие некоторые интересные свойства G.

1.5. Сделаем небольшое отступление о причине, из-за которой теория графов не является небольшим параграфом алгебры тензоров. В последней также рассматриваются произведения у элементов a_{ij}, ... основной величины A, но все произведения $\varkappa$ таких элементов считаются координатами одной величины – тензора порядка $2\varkappa$. У нас же такое множество произведений распадается на ряд самостоятельных величин, число индексов которых идет от единицы (для $a_{ii}^{\varkappa}$) до $2\varkappa$ (если $2\varkappa \leq n$ и все a_{ij} имеют различные индексы). Для $\varkappa = 3$, например, наряду с величинами, соответствующими (2)–(8), мы имеем еще ряд величин, характеризующих число частей G с тремя двойными петлями (с 1 до 6 вершин).

1.6. Для построения исследуемых определителей мы имеем исходную двухиндексную величину с координатами a_{ij} и одноиндексную величину с координатами a_{ii} (всюду учитывается число раз меньших индексов). Произведения этих координат дают нам κ-индексные величины с произвольными κ. Суммируя по всем индексам, мы получаем безындексные величины или инварианты. Если же мы

002008

будем суммировать по $k-1$ или $k-2$ из индексов, то мы получим соответственно 1-индексные или 2-индексные величины, ~~характеристики~~ координаты которых характеризуют число частей G определенного типа (или типов), специальным образом расположенных относительно вершины (или 2 вершин), соответствующей значению оставшегося индекса (2 индексов). Примеры

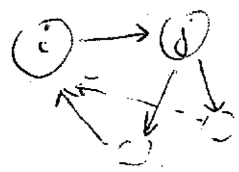
$$\sum_{j(\neq i)} a_{ij} = f_i$$

– выходная степень i

$$\sum_{i(\neq j)} a_{ij} = g_j$$

– входная степень j

$$\sum_{k\left(\substack{\neq i\\ \neq j}\right)} a_{ij}a_{jk}a_{ki}$$



– контуры длины 3 через (ij).

Понятно и здесь, подобно рассмотренному на стр. 6, при суммировании без ограничения число частей может появиться с некоторым множителем $|\Gamma|>1$, который можно устранить подходящим ограничением суммирования.

При желании можно по образцу и подобно тензорной алгебре построить и формально четко определить действия над k-индексными величинами – различные умножения (по типу и расположению одинаковых индексов в (перестановки*) координатах), положение индексов приписывать „насельных" индексов, не влияющих на значение координат (напр. вводить величину „r" с координатами $r_{ijkh} = a_{ij}$) и т. д.

Не исключено, что это сделало бы дальнейшее изложение более строгим и ясным.

*) Может быть определить бинарные отношения, характеризующие именно расположение повторяющихся индексов.

2. Определители

CU2009

Напомним два многократно использованных примера со свойствами, аналоги которых может быть желательно получить.

2.1. Обычный характеристический (ориентированного) полином графа ($a^i_j = a_{ij}$) без петель ($a_{ii}=0$), который пишем в виде

$$D(s) = \begin{vmatrix} s & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & s & a_{23} \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = Det(sE + A).$$

$D(0)$ – это алгебраическая сумма факторов G

$$\sum \pm a_{1i} a_{2j} \dots a_{nl},$$

которые могут содержать и контуры вида, соответствующие произведениям $a_{ij} a_{ji}$. Можно считать, что $D(0)$ – это суммарный вес всех факторов, а вес отдельного фактора равен

$$(-1)^{\lambda},$$

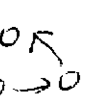
где l – число контуров чётной длины в факторе.

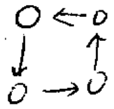
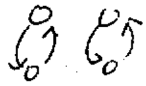
$$D(s) = s^n + \sum_{k=2}^{n} s^{n-k} D_k ,$$

где D_k – сумма весов всех факторов всех подграфов G с точно k вершинами. Напр.:

$D_2 = -1 \cdot$ число 

002010

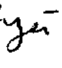
$D_3 = +1 \cdot$ число 

$D_4 = -1 \cdot$ число  $+ 1 \cdot$ число 

и т.д. Вообще, если ν_k – число ~~неодн~~ элементарных контуров длины k в G, то

$$D_k = (-1)^{k+1} \nu_k \pm \dots ,$$

где опущенные слагаемые – числа систем элементарных контуров из ≥2 контуров, с суммарной длиной k.

Если G неориентированный униграф, то  соответствует , а циклы длины ≥3 входят дополнительно множителем 2 (каждому циклу соответствуют 2 контура с противоположными направлениями обх.). Подробнее формулу см. у Бейс (Кац) [2].

В книге Харари [4 стр. 188] Козырев указывает на обзор Светковича по спектральным свойствам графов.

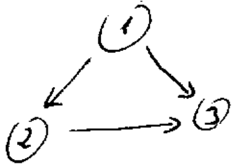
Свойство D(s) для неорграфа G, достойное подписания, следующее: если D_k с нечётными k все = 0, то G – бихроматический и наоборот: для бихроматического G все эти $D_k = 0$.

Здесь (эти) D_k выражаются через такие комбинации факторов с чётной суммарной длиной, что аннулирование всех этих D_k эквивалентно отсутствию элементарных циклов с чётной длиной.

Понятно, определить бихроматичность графа можно и проще – непосредственно раскрашивая вершины. Однако весьма заманчиво было бы, напр., получить полином, у которого некоторый набор коэффициентов был бы аналогичным образом связан с наличием подграфов Понтрягина-Куратовского (ср. и далее п. 2.9.).

Надо отметить, что для орграфа G его полином $D(s)$ непосредственно связан с контурами и не позволяет судить о наличии циклов.

Пример:



002011

$$D(s) = \begin{vmatrix} s & 1 & 1 \\ 0 & s & 1 \\ 0 & 0 & s \end{vmatrix} = s^3,$$

так как ни каких контуров нет. Для решения вопроса о циклах и бихроматичности нам необходимо преобразовать такой G в неорграф $\tilde{G}$ (= симметричный орграф). Тогда

$$\tilde{D}(s) = s^3 - 3s + 2.$$

Это также следует иметь в виду: возможно, что для вычисления некоторых свойств G надо работать не с самим G, а с некоторыми преобразованными графами $\tilde{G}$.

2.2. Второй вид полинома, который мы будем называть полиномом Трента $T(s)$ — это характеристический полином матрицы соседства. Пусть G орграф без петель ($a_{ii}=0$) и

$$p_i = \sum_{j(\neq i)} a_{ij}$$

002012

исходящая степень вершины i. Тогда

$$T(s) = \begin{vmatrix} s+p_1 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots \\ -a_{21} & s+p_2 & -a_{23} & \cdots \\ -a_{31} & -a_{32} & s+p_3 & \cdots \\ & & & \end{vmatrix} =$$

$$= s^n + s^{n-1}T_{n-1} + \dots + sT_1 + 0, \quad \text{т.е. } T(0)=0$$

Определители такого вида встречаются при исследовании многих вопросов: электрических цепей, динамических систем, цепей Маркова и систем массового обслуживания, ортогональных полиномов и т.д. и поэтому рассматривались многими авторами. Исследования непосредственно на языке теории графов широко вели Лихтенбаум (статьи цитируются у Берже [1, стр. 298] и Кельманс [9]. Приведем интерпретацию T_k в терминах статьи [5] (у Кельманса, вероятно, есть эквивалентные интерпретации в нескольких иных терминах).

Пусть $M = \{1,2,\dots,n\}$, $K \subset M$ (строгое включение), $|K| = k$, $J = M \setminus K$

Множество L дуг графа G мы будем называть корневым лесом с корнями в K, если

1) L не содержит контуров
2) $|L| = |I|$ и из каждой вершины с номером $i \in I$ исходит только одна дуга L.

Эквивалентная формулировка:

1') — то же
2') из каждой вершины с номером $i \in I$ исходит только один элементарный путь из дуг L, заканчивающийся в некоторой вершине с номером $j \in K$.

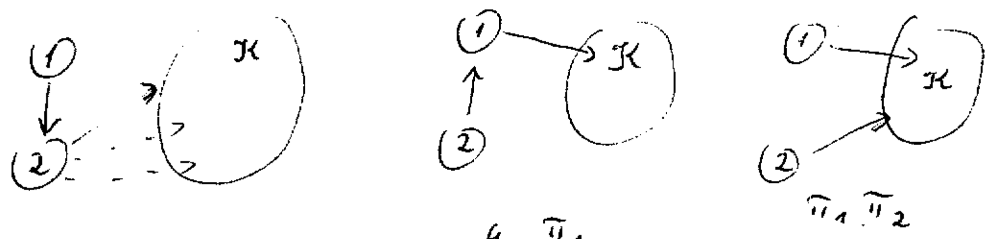
Главный минор матрицы соседства ($\approx$ определителя Трента при $s=0$), номера строк и столбцов которого образуют I, равен числу корневых лесов с корнями в $K = M \setminus I$.

Пример: пусть $I = \{1, 2\}$, $K = \{3, 4, \dots n\}$, π_1 и π_2 – число дуг, идущих из вершин 1 и 2 соответственно в вершины с номерами из K.

$$p_1 = a_{12} + \pi_1$$
$$p_2 = a_{21} + \pi_2$$

$$\begin{vmatrix} p_1 & -a_{12} \\ -a_{21} & p_2 \end{vmatrix} = a_{12}\pi_2 + a_{21}\pi_1 + \pi_1\pi_2 .$$

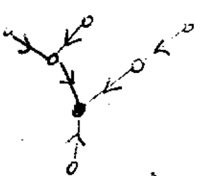
Три слагаемых правой части дают число корневых лесов трех видов



$a_{12}\pi_2$ $\qquad$ $a_{21}\pi_1$ $\qquad$ $\pi_1\pi_2$

Из предыдущего следует, что T_k — это число всех корневых лесов графа G с k корнями. В частности, при $k=1$ получаем число всех корневых деревьев G, т.е. деревьев, в которых все дуги ориентированы в направлении к единственному корню:

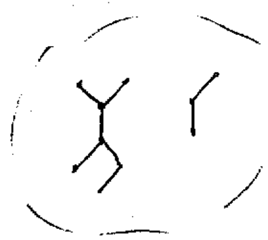
0U2014



$T_{n-1} = \sum p_i$ = число всех дуг (здесь 1 отвечает по 1 корню, [illegible] — все остальные).

Если G неорграф (= симметричный орграф без петель), то каждому дереву или лесу t мы приписываем вес, равный числу различных возможных способов выбора ориентации для получения корневого леса. Это число равно числу различных выборов корней, т.е. произведению чисел вершин всех компонент t. Примеры:

вес = 7 = числу вершин



вес = $7 \cdot 3 = 21$

В этом случае

$$T_{n-1} = \sum p_i = 2m$$

(вес каждого ребра = 2),

$$T_1 = n \cdot \tau,$$

где τ — число деревьев (по теореме Трента значение каждого главного минора порядка $n-1$ при $s=0$ равно τ)

и вообще T_k равен сумме весов всех лесов G с k компонентами, покрывающих все вершины G (ребру, напр., соответствует такой лес из этого ребра с положенной ориентацией из n − 2 изолированных вершин).

Следствие: число компонент неориентированного G равно индексу последнего ненулевого T_k.

О связности и числе компонент можно судить по T(s) только для неорграфа. Связный орграф может и не иметь корневых деревьев, напр.

002015

$\circ \to \circ \leftarrow \circ \to \circ$

Поэтому, исследуя число компонент орграфа G с помощью T(s), мы должны предварительно перейти к соответствующему неорграфу $\tilde{G}$, в котором каждому ненулевому a_{ij} ставим в соответствие одно ребро.

Понятно и здесь вопрос о компонентах G можно ~~наглядно~~ решить более простым путем, напр. покоординатными логическими сложениями строк A. Однако большая ценность определителей ~~вида~~ T(s) в том, что каждое T_k является суммой произведений некоторых a_{ij} (для орграфа) или суммой таких произведений, умноженных на положительные коэффициенты (для неорграфа). Поэтому, если некоторые из T_k с наименьшими индексами равны нулю, то все составляющие их произведения нулю, равны 0 в отдельности, т.е. в G нет частей, соответствующих этим произведениям.

Сильно связные компоненты орграфа вероятно проще исследовать другими способами, нежели указанные в [5]. Однако по меньшей мере теоретический интерес представляет вопрос: нельзя-ли из $T(s)$ или $D(s)$ или некоторой модификации этих полиномов получить информацию о сильно связных компонентах?

2.3. Если G орграф с одинаковыми выходящими степенями $p_i = p$ для всех вершин или однородный неорграф степени p, то

$$(-1)^n D(-s-p) = T(s).$$

Следовательно существует определенная система линейных соотношений (указать их в более явном виде!), связывающая

для орграфа G: веса систем ~~путей~~ контуров и числа корневых лесов;

для неорграфа G: веса систем циклов и веса лесов и деревьев.

2.4. На основе опыта построения неизоморфных графов с теми же $D(s)$ и $T(s)$, думается, что можно сформулировать гипотезу: задано конечное число определителей с одной переменной, значения которых являются инвариантами G и порядка которых не превышают $n + n_0$ с фиксированным n_0. Тогда существуют неизоморфные графы, для которых все эти инвариантные полиномы совпадают — весьма возможно, что для правильности такого утверждения необходимо ограничение на степени членов определителя или его разложения (степени – по отношению к всем a_{ij}). Мы не будем здесь излагать используемую процедуру – и так уж написано слишком много. Понятно можно оказаться, что при обобщении надо будет ввести еще какие-то условия на совпадающие инварианты, или что можно кое-что установить и для полиномов с несколькими переменными.

U02017

Один общий вид определителя с инвариантными значениями.

2.5. Рассматриваем определитель из 4 блоков с указанной нумерацией строк и столбцов

$$\Delta = \begin{array}{c|c|c} i \backslash l & 1\ 2\ \ldots\ n & 1'\ 2'\ \ldots\ k' \\ \hline 1,\ 2,\ \ldots,\ n & B & C \\ \hline 1',\ 2',\ \ldots,\ k' & H & L \end{array}$$

номера $1, 2, \ldots n$, как и прежде, совпадают с номерами вершин G.

Общий вид элементов блоков (часть индексов может отсутствовать):

$$h_{ii} = \alpha_i + s$$

$$h_{ij} = \beta_{ij} + \delta_i + \varphi_j + t$$

002018

$$c_{ij'} = \gamma_{i(j')} + \sigma_{(j')}$$

$$h_{i'j} = \mu_{j(i')} + \tau_{(i')}$$

Элементы L — инварианты, независимые переменные или константы (включая и 0).

В правых частях индексы без скобок меняются при перенумерации одновременно с номерами вершин G, β_{ij} — координаты некоторой двухвершинной индексной величины, $\alpha_i, \delta_i, \varphi_j, \gamma_{i(j')}, \mu_{j(i')}$ — координаты одноиндексных величин (различных, или частично совпадающих). Индексы в скобках — номера соответствующих величин не меняются при перенумерации вершин G. $s, t, \sigma_{(j')}, \tau_{(i')}$ — независимые переменные или константы.

Любая перенумерация вершин G переставляет одинаковым образом некоторые или все из n первых строк и столбцов определителя, следовательно не меняет его значения.

Блоки C, H, L могут одновременно отсутствовать, как это имело место в 2.1 и 2.2.

При одновременном отсутствии блоков B, C, H мы имеем тривиальный случай определителя L с инвариантными элементами.

Определитель Δ типа Трента, значение которого равно сумме определенных произведений (или таких произведений, умноженных на целые положительные коэффициенты, если G – неорграф) можно получить, если произвольным образом выбрать все веса линиям, которые будут фигурировать вне главной диагонали, и ненулевые элементы писать со знаком –. На главной диагонали ставим суммы всех абсолютных значений элементов соответствующей строки (или столбца) и добавляем независимые переменные: одно и то же s для всех h_{ii}, произвольные величины $\lambda_{ii'} = \lambda(i')$. Некоторые из этих переменных могут отсутствовать, напр. все $\lambda_{ii'} = 0$.

Понятно, расчет определителей с многими независимыми переменными весьма трудоемок, даже при наличии соответствующих программ. Поэтому следует ограничиться разумным набором этих переменных. Возможен и другой случай – ~~[illegible]~~ нам удается построить Δ с несколькими переменными, напр. $s, t, \sigma(i'), \tau(i')$ и набором $\lambda(i')$, но интересующие нас величины являются коэффициентами членов, содержащих не более 2 множителей $\sigma\ \tau\ \lambda(i')$ – Тогда можно в ходе расчета отбрасывать все лишние члены.

При расчете значений определителей Δ типа Трента можно использовать модификацию алгоритма Гаусса, при которой расчет происходит без вычислений. Одна такая модификация описана в [5]. Как кажется (обязательно проверить!) данную модификацию можно использовать в случае, когда нас интересует только вопрос о том, какие из коэффициентов получаемого полинома (одной или нескольких переменных) аннулируются. Именно: все ненулевые численные элементы заменяем на логическую переменную со значением 1, а умножение и сложение производим по правилам алгебры логики.

2.6. Освоение, расчёт и интерпретацию инвариантных полиномов – значений определителей Δ – вероятно проще всего начинать с определителей, построенных на $D(s)$ и $T(s)$, напр.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} s & a_{12}+t & a_{13}+t & \dots \\ a_{21}+t & s & a_{23}+t & \dots \\ a_{31}+t & a_{32}+t & s & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} s+(t+1)p_1 & -a_{12} & -a_{13} & \dots \\ -a_{21} & s+(t+1)p_2 & -a_{23} & \dots \\ -a_{31} & -a_{32} & s+(t+1)p_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Пусть $q_j = \sum_{i \neq j} a_{ij}$ и

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} s+tp_1+uq_1 & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & s+tp_2+uq_2 & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & s+tp_3+uq_3 \end{vmatrix}.$$

Последний определитель имеет тип Трента- в его разложении будут и члены с отрица- тельными коэффициентами. Последние исчезают, если заменить t на $t+1$ или q на $q+1$ или произвести обе замены. Замена $t \to t+\frac{1}{2}$ и $q \to q+\frac{1}{2}$ вероятно в общем случае недоста- точна — так ли это? Какие особенности (для таких замен и других) если получаются (для таких замен и другие) если

G орграф и $p_i = q_i$ для каждого i (граф Эйлера) или $p_i = q_i = p$ для всех i (однородный граф степени p в смысле Оре, стр. 22); есть-ли связь и какая между $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ для каких то классов графов? (связь типа ~~...~~ соотношения на стр. 18). Если G — неорграф, то когда $p_i = q_i$ и Δ_2 переходит в Δ_3 при замене $t+1 \to t+n$, вопрос о связях Δ_1 и Δ_2 пока открыт.

Можно также рассматривать определители, в которых блок B — один из Δ_1, Δ_2 (или Δ_3), с заменой $s \to s+1$, $\mathfrak{A}$ — столбец из единиц, H — такая же строка, единственный элемент L — число $-n$ (минус n) или $s-n$ или еще что то похожее.

Как видно, даже с простыми элементами можно строить некоторый набор Δ. Вопрос в том, что представляют полученные коэффициенты полиномов и насколько интересны эти инварианты, как сами по себе, так и для построения новых Δ с интересными свойствами.

2.7. Для получения интерпретации смысла коэффициентов полинома P, представляющего значение инварианта Δ, можно использовать различные приемы. Некоторые из них:

α) Аналогично тому, что сделано в [2], непосредственно устанавливаем вид, смысл и численный коэффициент каждого слагаемого после приведения P.

002022

β) Получаем полное разложение Δ для одного или немногих небольших n (непосредственно находим все члены с a_{12}, восстанавливаем по инварианту P; полезно использовать машину!). По индукции устанавливаем вид и коэффициенты членов P после приведения. Доказываем правильность нашего предположения. Таковы различные доказательства о числе деревьев, в частности – теорема Трента (обычно избыточно также доказательство, иногда также примеры); о весах лесов – см. [5].

γ) Интерпретируем элементы Δ как веса дуг некоторого вспомогательного графа G'. Тогда Δ – это $D(0)=A$ с $n+k'$ вершинами. Интерпретируем $D(0)$ в терминах графа G'. Интерпретируем a_{ij}, a_{ii} как веса (а не числа) дуг G'; переводим эту интерпретацию в термины чисел частей G.

б) — вариант γ: за $D(0)$ $(=A)$ графа G' берем Δ, где положено $s=0$. Тогда, при ненулевом s, Δ либо $D(s)$ графа G' — если s фигурирует во всех членах главной диагонали —

либо некоторый модифицированный $\tilde{D}(s)$, в котором s фигурирует не во всех членах главной диагонали. Для рассмотрения последнего случая находим интерпретацию коэффициентов такого $\tilde{D}(s)$ — в них как слагаемые входят только некоторые из слагаемых для коэффициентов $D(s)$. Эта интерпретация будет в терминах весов дуг G'. Переводим её на язык частей G.

Возможны, понятно, и всякие другие комбинации и модификации этих приемов, напр. рассмотрение Δ, если это возможно, как $T(s)$ или модифицированного $\tilde{T}(s)$ графа G'. Если будут из всех интерпретаций для определителей $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ и другие, то их также можно будет использовать как промежуточный этап.

2.8. Обращение только что указанных приемов γ и δ может служить для построения такого Δ, что коэффициенты соответствующего полинома P переменной неясной части графа G.

В идеале удобно, эти лишние члены можно было бы удалить (если не все, то часть из них), используя коэффициенты при других степенях t, другие вспомогательные Δ' и т.д. Первый шаг для этого — получить интерпретацию всех коэффициентов разложения Δ (это можно делать либо непосредственно, либо через корневые леса и деревья G' с последующими исключениями).

Если G — кубический, то мы имеем

$$c_i = -t,$$
$$h_j = -3.$$

002027

Если последнюю строку H разделить на 3, то мы имеем просто окаймлённую матрицу соседства со столбцом из $-t$ и строкой из -1.

$$\Delta = \begin{vmatrix} s+t+p_1 & -a_{12} & -a_{13} & \dots & -a_{1n} & -t \\ -a_{21} & s+t+p_2 & -a_{23} & \dots & -a_{2n} & -t \\ \dots & & & & & \\ & & & & s+t+p_n & -t \\ -a_{n1} & \dots & & & -1 & n \\ -1 & -1 & & \dots & & \end{vmatrix}$$

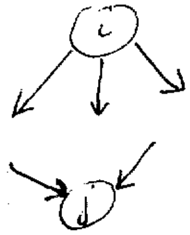
Какова непосредственная интерпретация коэффициентов разложения такого Δ для произвольного G?

Используем определитель Δ с $k'=1$ (c — один столбец, H — одна строка). В блоке B

$$b_{ij} = -a_{ij}$$

далее

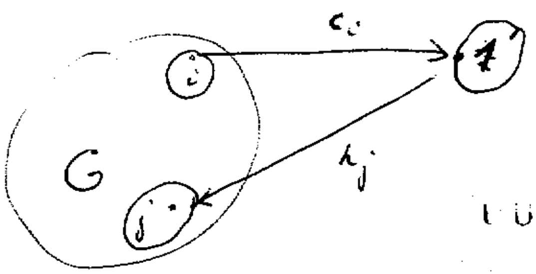
$$c_i = -\sum_{j,l,p} t\, a_{ij} a_{il} a_{ip}$$



$$h_j = -\sum a_{ij} a_{lj}$$

На главной диагонали: сумма модулей всех других элементов строки, а в B — еще переменная s.

При $s=0$ такой Δ соответствует матрице соседства следующего графа G':



Мы берем G со всеми вершинами и дугами (G = симметричный орграф), добавим вершину $1'$, из каждой вершины $i \in G$ в $1'$ идет дуга с весом c_i, из $1'$ в каждую $j \in G$ идет дуга с весом h_j.

Если мы берем все члены разложения Δ с $\underline{t}$ в первой степени, то им соответствуют все покрывающие деревья и леса G' с одной дугой типа c_i и одной дугой типа h_j. В них входят все пути П-к графа G, но также и различные другие пути, напр.

Единственные графы Понтрягина - Куратовского (графы П-К), которые могут быть плитами 6 — это 3 дома и 3 колодца, с промежуточными вершинами или без них (т.е. гомеоморфные $K_{3,3}$). Согласно результату Д. Холла, цитированному у Харари [14, стр. 148, упражнение 11.3], такие плиты имеет также любой трехсвязный непланарный граф при $n \geq 6$. Поэтому является заманчивым получить такой Δ, что аннулирование определенных коэффициентов или их комбинаций означало бы отсутствие этих плит П-К.

Определители типа Трента, для которого в виде слагаемых фигурируют члены, соответствующие всем плитам П-К, можно, например, получить следующим образом.

Граф П-К с максимальным числом n вершин имеет 6 вершин степени 3 и $n-6$ вершин степени 2. Число рёбер $\frac{1}{2}[6 \cdot 3 + (n-6) \cdot 2] = n+3$. Такой граф можно разбить на дерево с $n-1$ вершиной и 2 звезды порядка 3 и 2:

Аналогично разбивается и любой другой граф П-К с меньшим числом вершин.

Пусть, для конкретности, мы строим Δ, у которых $b_{ij} = t a_{ij}$ (t — число или буква), а блок L — нулевой. Каждый член разложения Δ будет содержать по k' множителей из разных строк и столбцов C и H и $n-2k$ множителей из блока B — $k = 0, 1, \dots n-2k$ из главной диагонали, а остальные $n-2k-k$ — это различные $t a_{ij}$.

Нужно подобрать элементы b_{ij}, c_{ij}, h_{ij}

так, чтобы

1) среди всех произведений указанного вида появились-бы желаемые произведения;

2) другие, лишние произведения либо вовсе не появились, либо по возможности уничтожались при приведении подобных членов (как это имеет место для $T(s)$).

Скорее всего полностью избавиться от лишних произведений не удастся. Тогда можно искать дополнительные Δ', Δ'', …, так, чтобы коэффициенты их полиномов содержали-бы эти оставшиеся лишние произведения и чтобы определенные комбинации коэффициентов разных полиномов давали-бы желаемую информацию. Можно также оперировать с несколькими переменными и комбинировать коэффициенты полиномов (Также придавать переменным постоянные или разные между собой значения).

2.9. Немного конкретизируем сказанное на примере следующей задачи.

Пусть G — неориентированный униграф и содержит не более 4-х вершин степени ≥ 4 — Таковыми нередко бывают графы электрических схем.

3. Другие матрицы и инвариантные полиномы.

Инварианты и инвариантные полиномы можно получить также при использовании других матриц, связанных с графом.

Для различных целей использовались матрицы независимых циклов и разрезов. Обычно эти матрицы определяются на основе выбора некоторого дерева-остова T. Тогда каждая из них содержит по единичной матрице, а остальные их части связаны транспозицией (и переменой знака, если G – орграф). Много результатов для интерпретации с такими матрицами установил Я. Я. Дамбит, в частности он указал ряд определителей, значения которых дают число деревьев [64] и дал интерпретацию коэффициентов некоторых полиномов, связанных с этими матрицами [65]. Непосредственно полученные полиномы характеризуют только инварианты G с фиксированным T, и дают оценки снизу для инвариантов G (числа k-деревьев и частичных связных графов с данными числами такими числами). Для получения инвариантов, не зависящих от выбора T, приходится использовать некоторое специальное символическое исчисление.

Пусть $R\ {\downarrow}\nu\ \overset{m}{\rightarrow}$ — матрица независимых циклов подграфа G, соответствующая дереву остова T. При выборе другого дерева остова T', R преобразуется в R', причем

CO2029

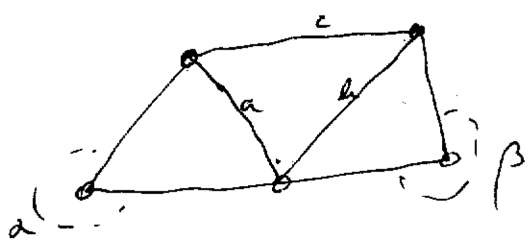
$$R' = P R Q \pmod 2 \qquad (3.1)$$

Здесь Q — перестановочная матрица порядка m, соответствующая перестановке столбцов, т.е. рёбер G. Квадратная матрица P порядка ν обеспечивает замену строк R на определенные их линейные комбинации по модулю 2. Структура и число допустимых матриц P существенно зависит от G; как заметим, есть только алгоритм для нахождения всех этих P, а нет явных формул. Это, естественно, создает трудности для непосредственного аналитического построения инвариантов R при таких преобразованиях (3.1).

Так как в формуле преобразования матрицы $\tilde{R}$ фундаментальных разрезов, связанных с T и T', фигурируют те же P и Q, то можно пытаться комбинировать R, R^T, $\tilde{R}$, $\tilde{R}^T$ с целью получения выражений, не зависящих от T. Однако таким путем вряд ли получится что-то новое по сравнению с результатами Я.Я. Дамбита.

Для некоторой утилизации задач, можно рассматривать более общее преобразование (3.1), именно в качестве P допускать не невырожденные (по модулю 2) матрицы. Это значит, что в качестве базиса пространства циклов мы допускаем любую систему ν линейно независимых квазициклов – циклов или систем циклов – а не только стандартную систему циклов, соответствующую элементарным циклам, соответствующим хордам некоторого дерева остова T.

В качестве примера рассмотрим следующий G, где для краткости α и β обозначают по паре рёбер



Мы имеем здесь $\nu = 3$ и следующие $2^3 - 1 = 7$ квазициклов

1	$a\ b\ c$
2	$a\ \alpha$
3	$b\ \beta$
1+2	$b\ c\ \alpha$
1+3	$a\ c\ \beta$
2+3	$a\ b\ \alpha\ \beta$
1+2+3	$c\ \alpha\ \beta$

(3.2)

имеется всего $\binom{7}{3} = 35$ троек циклов, из них 7 состоят из линейно зависимых (напр. 1, 2, 1+2; ... ; 1+2, 1+3, 2+3), следовательно 35 - 7 = 28 троек, образующих базис. Число деревьев здесь $\tau = 21$, 7 базисов не являются стандартными. Пример: последние 3 квадрупля, где, за исключением h, каждое ребро фигурирует повторно, а 2+3 состоит из двух элементарных циклов.

Аналогичное имеет место для матриц разрезов.

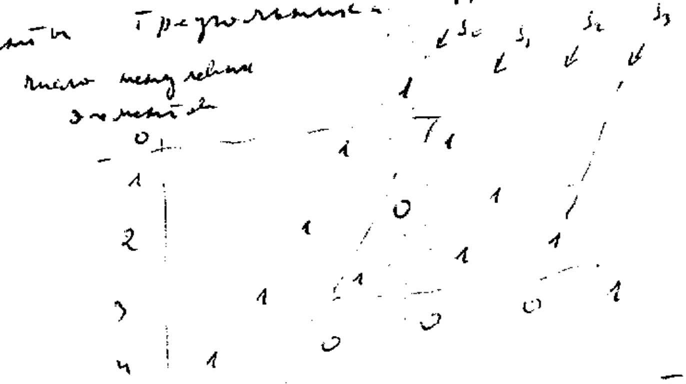
Мы пришли к задаче: искать инварианты R при преобразованиях (3,1) по модулю 2, где P - произвольная невырожденная матрица с целыми, а Q - перестановочная квадратная матрица с порядками соответственно ν и m.

Инварианты будут также те числа, не обязательно 0 и 1, элементы поля GF(2). Понятно, отдельные операции конкретного расчета можно производить как угодно, но представление результатов в виде формул лучше давать в одной системе счета. Нас, в основном, интересуют 3 таких системы: обычное численное исчисление, счет в GF(2) и обычная арифметика. Перевод основных операций следующий:

алг. логика	GF(2)	арифм.
$a b$	$a b$	$a b$
$a + b$	$a + b + a b$	$a + b - a b$
$a \bar{b} + \bar{a} b$	$a + b$	$a + b - 2 a b$
$\{ f_i \}$	$\{ g_i \}$	$a + b$

$a, b = \{ 0, 1 \}$

Сложность в обычной арифметике, напр. подсчёт единиц в матрице 0, 1, в двух других системах соответствуют наборы функций, характеризующие числа 0, 1, 2, … единиц. Эти наборы вообще зависят от числа рассматриваемых элементов и состоят из функций, симметричных по отношению ко всем переменным. Можно отметить, что в GF(2) дают значения симметричных функций элементы треугольника Паскаля.



Напр, если у нас 3 элемента, то только один $= 1$ а два остальных $= 0$ если

$$s_1 + s_3 = 1$$

Можно ли преобразование (3.1) выразить через матричные операции в арифметике?

Возможно, есть и другие удобные способы.
Во всякой игре, инварианты M можно получить из таблицы ~~[illegible]~~ типа (3.2), записанной в виде матрицы 0,1 для неорграфа G [Как обстоит дело с орграфами — там много контуров и [illegible] не отражено?] Эта [illegible] контуров [illegible] таблица или матрица содержит в себе [illegible] 2+3 в (3.2) не входит матрица чисел — ~~[illegible]~~ [illegible] $\{a, a\} \subset \{a\, a\, a\, \beta\}$ [характер, стр 5-7] в матрицу, так как

Мы фактически пришли к такому общей проблеме: задана матрица 0,1 (или 0,±1)

$$M = \nu \big\downarrow \overset{m}{\longrightarrow} a_{ij}$$

где допускаются произвольные перестановки строк и столбцов. Найти инварианты и построить инвариантные определители.

По сравнению с матрицей A мы теперь имеем независимые перестановки строк и столбцов, т.е. первый и второй индексы одного [illegible] с другими не связаны. Упомянем и суммированием мы можем получить координаты векторов с любым числом первых и вторых индексов, а для построения инвариантных определителей типа Δ брать координаты векторов с 2,1 индексами одного типа (только первые или только вторые) и
по одному индексу каждого типа

безындексные величины.

Простейший, неоднократно использованный (но не единственный) способ получения таких определителей – это умножение A и A^T в любом порядке – мы получаем квадратные матрицы и потом для них брать характеристические полиномы.

При этом имеет место следующее: Пусть даны матрицы A и B. Тогда AB и BA существуют, квадратные и имеют те же самые ненулевые (с той же кратностью) собственные значения [11]. Действительно, пусть $\lambda \neq 0$ собственное значение AB. Это значит, что существует вектор x соответствующей размерности такой, что

$$ABx = \lambda x$$

Обозначим $Bx = y$ – это ненулевой вектор,

так как $Ay = \lambda x$. 002034

Но тогда $BAy = B(Ay) = B(\lambda x) = \lambda Bx = \lambda y$, т.е. y – собственный вектор BA с тем же λ. В силу взаимно однозначного соответствия x и y, размерности пространств собственных векторов для λ, следовательно и кратности λ, То же для AB и BA.

Если $\alpha \neq \beta$, то характеристические полиномы AB и BA отличаются на множитель $s^{\alpha-\beta}$.

Пример

$$A = (1\ 1) \qquad B = A^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

002005

$$AA^T = (2) \to s+2$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} s+1 & 1 \\ 1 & s+1 \end{vmatrix} = s(s+2)$$

Частный случай совпадения значений и кратностей ненулевых характеристических чисел матрицы при двух способах умножения матрицы на транспонированную в свое время был установлен также Лифшицем при рассмотрении матрицы инциденций графа. При этом имеет ещё место следующее.

Пусть R – матрица инциденций графа G с произвольно ориентированными дугами, причем в матрице начальной вершине соответствует $+1$, а конечной -1. Тогда произведение RR^T не что иное, как матрица соседства неориентированного G. Если же образовать произведение $R^T R$, то мы получим „матрицу соседства" дуг, значения элементов которой зависят от ориентации. Однако, при всех возможных ориентациях, мы полученное, с точностью до s^{m-n}, тот же характеристический полином, что для RR^T.

Простой пример: $n = 2$, $m = 3$

$$R = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -a & -b & -c \end{pmatrix},$$

где a, b, c равны $+1$ или -1, независимо одна от другой, значит $a^2 = b^2 = c^2 = 1$.

$$RR^T = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} s+3 & -3 \\ -3 & s+3 \end{vmatrix} = s^2 + 6s$$

$$R^T R = \begin{pmatrix} 2 & 2ab & 2ac \\ 2ab & 2 & 2bc \\ 2ac & 2bc & 2 \end{pmatrix}$$

002006

В зависимости от знаков a, b, c, мы имеем различные матрицы $R^T R$. Однако

$$\begin{vmatrix} s+2 & 2ab & 2ac \\ 2ab & s+2 & 2bc \\ 2ac & 2bc & s+2 \end{vmatrix} = (s+2)^3 + 2\cdot 8 - 3\cdot 4(s+2) = s(s^2+6s)$$

Литература.

1. К. Берж, Теория графов и ее применения, И.Л. 1962.

2. А. Бенс, О коэффициентах характеристического полинома графа, Лит. мат. сбор. 8, 1968, 75-80

3. О. Веблен, Инварианты дифференциальных квадратичных форм, И.Л., 1948.

4. Г. Вейль, Классические группы, их инварианты и представления, М., 1947, 58-61.

5. Э.Я. Гринберг, Анализ марковских процессов. аморфных вычислений Новости медицинской приборотехники, вып. I, М, 1971, 43, 45-48.

6. Я.Я. Дамбит. а) О деревьях связных графов, Лит. мат. сбор., 1966, 337-345
б) Свойства некоторых полиномов матриц циклов и разрезов графа, Лит. мат. сбор. 4, 1968, 59-71.

7. А.А. Зыков, О некоторых свойствах линейных комплексов, Мат. сб. 24(66) 2, 1949, 163-188

8. А.А. Зыков, Теория конечных графов I, Новосибирск, 1969.

9. А.К. Кельманс а) О числе деревьев графа, Кибернетика, Наука, 1967.
б) О числе деревьев графа, I, Автоматика и телемех. 1965, №12, 2194-2204; II, Там же, 1966, №2, 55-65.
в) О свойствах характеристического многочлена графа, Кибернет. на службу коммунизму 4, Энергия, 1967, 27-41.

10. О. Оре, Теория графов, Наука, 1968

11. W.V. Parker, Bull. Amer. math. soc., 55, 1949, 115–116.

12. П.К. Рашевский, Риманова геометрия и тензорный анализ, М, 1953.

13. И.А. Схоутен, Д. Дж. Стройк, Введение в новые методы дифференциальной геометрии, т I, ГОНТИ, 1939

14. Ф. Харари, Теория графов, Мир, 1973