Emanuels Grinbergs

Geodesic graphs

Facsimile of manuscript
(in Russian)

The archive of Emanuels Grinbergs manuscripts

University of Latvia

Riga, December 2013

Annotation

In the article, written in Russian, geodesic graphs, graphs with unique shortest path between every two vertices, are considered. Geodesic graphs are trees, odd cycles, and nontrivial example, the graph of Petersen. The article is dated 21.11.74.

D. Zeps

dainize@mii.lu.lv

Геодезические графы.

(1), (2) и т. д.

Для формулированных далее предположений — дать доказательства или контрпримеры.

Рассматриваются связные неорграфы без петель и параллельных рёбер $G(X,V)$, $|X|=n$, $|V|=m$ (как у Берже). Круглые скобки обозначают рёбра (xy) и цепи $(a\ldots b)$; двойные скобки $((123))$ и т. д. — циклы последовательно.

1. Общие свойства геодезических графов.

1.1. Мы будем говорить, что вершина x графа <u>геодезическая</u> или имеет <u>геодезичность</u>, если она связана с любой другой вершиной y только одной кратчайшей цепью $(x\ldots y)$. Граф <u>геодезический</u>, если все его вершины — геодезические. Примеры: деревья, циклы нечётной длины, полные графы, граф Петерсена.

Для проверки геодезичности графа очевидно достаточно проверить геодезичность для представителей классов эквивалентности вершин, определяемых автоморфизмами графа. Напр., для графа

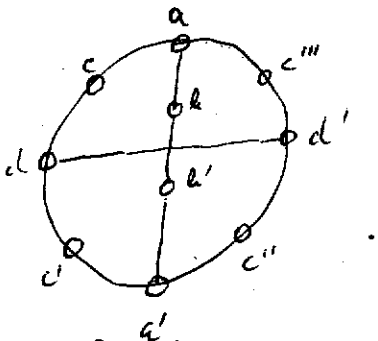


Рис. 1.

(здесь и далее — вершины обозначены кружками)
имеем 4 класса эквивалентных вершин:

$\{a,a'\}$, $\{b,b'\}$, $\{c,c',c'',c'''\}$, $\{d,d'\}$

Проверку для a, b, c, d можно произ~~вести~~, записывая расстояния от a, b, c, d. Если у каждой вершины, отличной от исходной, имеется только один сосед с расстоянием на единицу меньшим, то исходная вершина — геодезическая; это здесь имеет место:

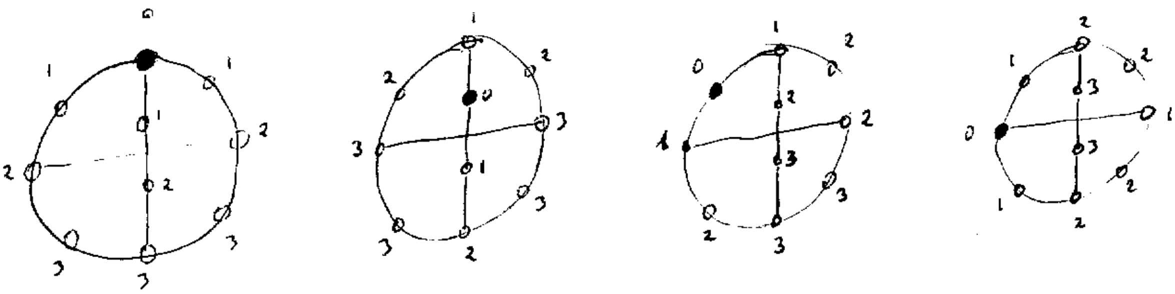


Рис. 2.

Следовательно, граф рис. 1. — геодезический, при том с диаметром 3; из каждой вершины исходят изометрические циклы длины 3, т. е. каждая вершина — центр.

1.2. Из определения геодезического графа (г-графа) следует

Свойство А: Если вершины x и y г-графа связаны ≥2 цепями длины δ, то они связаны цепью длины <δ.

В частности А′: если г-граф содержит элементарный цикл длины 2δ, то любые 2 диаметрально противоположные (или диаметральные) вершины этого цикла — т. е. такие, расстояние которых по циклу равно δ, — связаны цепью < δ.

Следствие А″: если г-граф содержит цикл (abcd) длины 4, то подграф, порожденный этими 4 вершинами — полный.

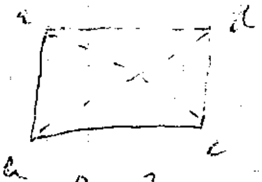
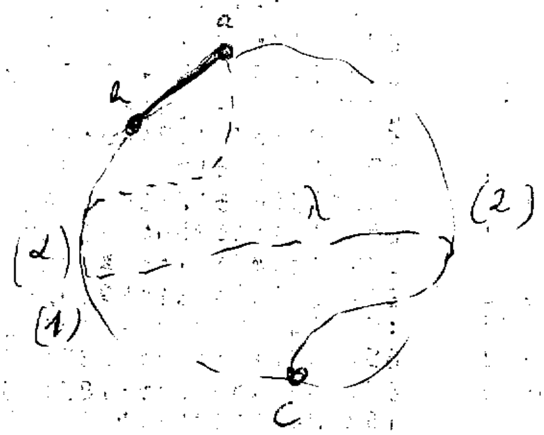


Рис. 3.

Действительно, имеются цепи (abc) и (adc) длины 2, следовательно цепь (a…c) длины <2, т. е. =1 — иначе, ребро ac. То же для b и d.

Как заметил **B**: если ребро (ak) 2-графа содержится в некотором цикле, то кратчайший цикл, проходящий через это ребро, имеет нечётную длину.

Предполагаем, что кратчайший цикл (α) (обязательно элементарный!) имеет чётную длину 2δ (рис. 4, кратчайший цикл):



п. 16407

Рис. 4.

Пусть c на α — диаметрально противоположна a на α. Тогда, в силу A', имеем цепь $\lambda(a \ldots c)$ длины $< \delta$. Если $(ak) \in \lambda$ $[(ak) \bar{\in} \lambda]$, то цепи λ и (2) $[\lambda$ и $(1)]$ образуют цикл, содержащий (ak) или снова, с этим свойством и ~~длины~~ циклом длины $< 2\delta$ ч.т.д.

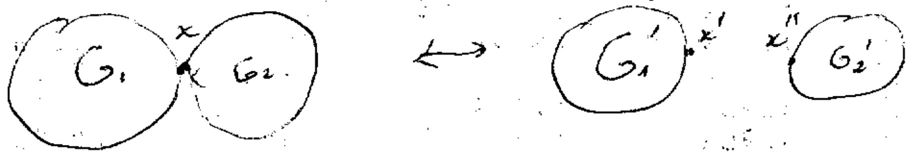
<u>Предположение(1)</u>: если в 2-графе выбрать базис линейно независимых циклов с минимальной суммарной длиной, то все циклы этого базиса — нечётной длины.

<u>Предположение(2)</u>: если 2-граф G является блоком и содержит ~~?~~ цикл длины 4, то G — полный граф.

Для (2) — использовать A'', A', возможно B и подходящую часть Теоремы 3.3 у Харари (стр. 43)

Если (2) правильно, то это важно для дальнейшего.

1.3. Если геод. граф G имеет точку сочленения x, то разбивая G естественным образом „по x" на



2 части G_1' и G_2', каждая из них — геодезическая. Ясно и обратное: объединение г-графов G_1' и G_2' „по $x' \in G_1'$ и $x'' \in G_2'$". Повторяя последний процесс, из г-графа, являющегося блоком, можем строить какие-угодно г-графы с точками сочленения (рис. 5)

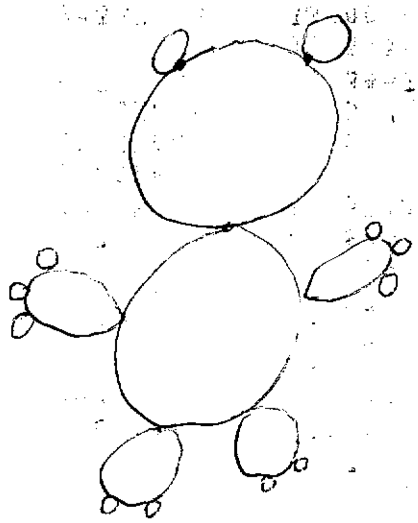


Рис. 5.

В обратном направлении имеем разложение г-графа на геодезические блоки (г-блоки). Для деревьев, напр. — это рёбра.

Интерес представляет исследование и построение г-блоков; в дальнейшем — речь только о них.

2. Преобразование 2-блок → 2-блок.

Если, напр., на всех рёбрах полного графа с n вершинами, инцидентных одной вершине x, мы помещаем по $2r$ новых вершин 2. степени, то получаем 2-блок. Пример с $n = 4$, $2r = 2$ (нечётное число вместо $2r$ — не годится!)

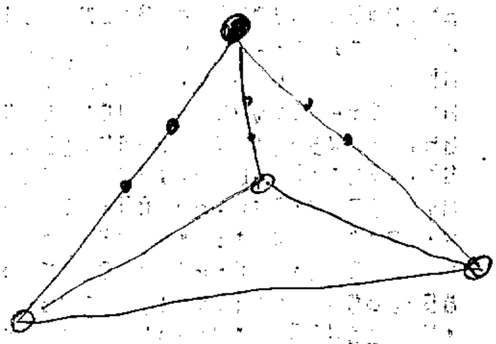
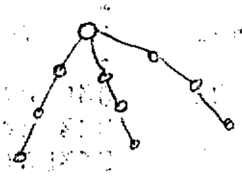


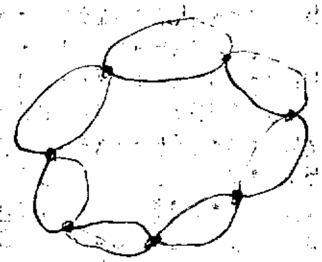
Рис. 6. вершины.

Этот прием можно. Граф рис. 1, напр., получается из полного графа с вершинами a, a', d, d' добавлением c, b, c'' на рёбрах, инцидентных a, затем c', b', c'' — " — и — " — a'.

Еще способ получения рис. 6: брать  и присоединить  с идентификацией каждой вершины.

Как обобщить эти подходы получения 2-блоков: замена рёбер разреза на цепи (более общее — на 2-графы), соединение меньших 2-графов. Интересно было бы получить 2-блоки без вершин 2. степени.

Можно-ли и при каких условиях из 2-блоков получить 2-блок типа „кактусного кольца“:



ПL8410

Рис. 7

Если блоки — рёбра — это просто, есть-ли другие возможности? (Скорее нет, но может быть и есть  и т.д.). Соединяя рёбрами для C_5, получаем граф Петерсена; из 5 копий Петерсена (или 10 C_5) можно ли обобщить такие полученные графы, т.е. построение 2-...

3. Дополнение циклов чётной длины.

Если (2) правильно, то нетривиальный 2-блок не содержит четырехугольников. С другой стороны правдоподобно

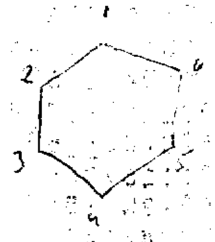
Предположение (3): если блок содержит ≥ 2 циклов, то он содержит $\exists$ элементарный (по G граф) цикл чётной длины. ($\exists$ простой по Харари)

На основе А. Тогда 2-блок, $c\ n \geq 3$, отличный от циклов нечётной длины, содержит как цикла чётной длины, так и ещё другие цепи.

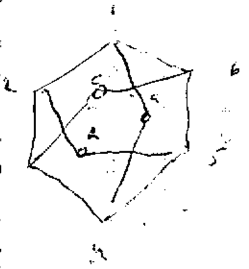
Следовательно, каждый нетривиальный 2-блок можно получить, исходя из его цикла C_{2s} с минимальными (или максимальными) δ и подходящим образом присоединяя вершины и рёбра.

Если (2) правильно, то $\delta \geq 3$. 2-блок рис. 1, напр., получается из вершинного C_8 при добавлении узла $(a\, b\, b'\, a')$ и ребра (dd').

Исходя из C_6 рис. 8а



(8а)



(8б)

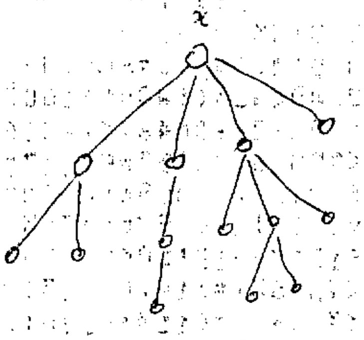
n/.6411

Рис. 8

мы должны иметь узлы $(1..4)$, $(2..5)$, $(3..6)$ длины <3, следовательно $= 2$ (мы отмечали (2)). Тогда должны быть еще узлы $(a..b)$, $(b..c)$, $(a..c)$ опять длины <3, значит $= 2$. Если эти узлы (axb), (bxc), (axc) — имеем 2-блок, граф Петерсена. Если же эти 3 узла не имеют общей вершины — надо добавлять вершины и ребра и т.д. Получается вроде того, что граф Петерсена — 2-блок с минимальным n, отличный от K_n и C_n, где ~~[illegible]~~ без вершин второго типа [illegible] единицами: Таблица рис. 1 и рис. 6 — это [illegible] ($n=10$) (с Таблицами [illegible] $n \leq 10$!)

4. Построение с круговым деревом.

В любом 2-графе все кратчайшие узлы, исходящие из произвольной вершины x, в совокупности образуют дерево (это будет связный граф, а циклов нет). Расположим вершины $\neq x$ в кругах по расстоянию от x (рис. 9).



n/6412

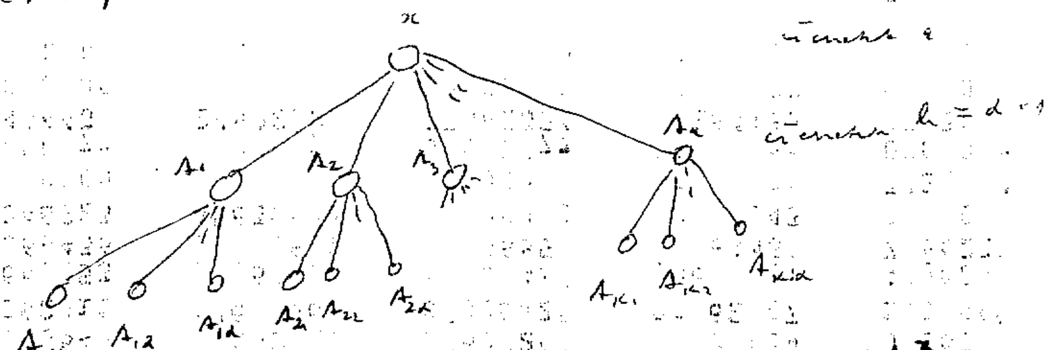
Рис. 9

Если рассматривать наш граф — это 2-граф, то все другие его ребра, не указанные на рис. 9, идут горизонтально, т.е. связывают по 2 вершины одного и того же круга. Вопрос о том, как проводить эти ребра, чтобы получить 2-граф с желаемыми свойствами (напр. 2-блок без вершин 2-степени, с данными местами и обхватом и т.д.). Опять, если (2) верно, то C_4 запрещены, могут быть C_3 (если они не запрещаются особо), C_5, C_6, ... Вероятно удобно в качестве x брать либо центр, либо вершину, из которой исходит кратчайшая цепь с) максимальной возможной длиной (т.е. диаметр).

Интересно получить 2-блоки, у которых не все вершины-центры (в частности — с минимальным n (и без вершин степени $d(y) = 2$).

Кажется, что более обозримы те 2-блоки, у которых все цепи, исходящие из x, доходят до концевых вершин (сформулировать точнее).

Для удобства можно в начале еще добавить условия, напр. требовать, чтобы все вершины каждого друза [дерева] имели бы одну и ту же степень k в G („полуоднородный" 2-граф) или только в друзовом дереве. Еще упрощая, для полуоднородных графов можем допускать ~~дополнительные~~ ребра только в пределах друзе. Простейший такой пример — диаграмма 2.



026413

Рис. 10.

Множество вершин $A_{s1}, A_{s2}, \dots A_{sd}$ мы будем называть семейством $\tilde{A}_s$. Требуем, чтобы все вершины были бы центрами с радиусом 2.

Вершина A_1 будет иметь независимость $\beta = 2$, если каждая из вершин семейств $\tilde{A}_s$, $s \neq 1$, смежна с одной и только одной вершиной семейства $\tilde{A}_1$. Аналогичное условие имеем для вершин A_s, $s \neq 1$. Следовательно, для любых двух семейств, имеем: каждая вершина одного семейства имеет в точности одного соседа в другом семействе.

Поэтому:

1) рёбра, связывающие вершины семейств $\tilde{A}_i, \tilde{A}_j$, $i \neq j$, устанавливают взаимно однозначное

соответствие вторым индексам этих вершин, т.е. некоторую подстановку σ_{ij} этих вторых индексов (из множества $\{1,2,\ldots,d\}$). Так как нумерация вершин произвольна, производим её так, чтобы все подстановки σ_{1j}, $j\neq 1$, были бы тождественными. Другими словами: вершина $A_{1\lambda}$ ($\lambda=1,2,\ldots,d$) связывается со всеми вершинами $A_{i\lambda}$ ($i=2,3,\ldots,a$) с тем же λ. Остаются получить подстановки σ_{ij} с $i\neq j$, $i\neq 1$, $j\neq 1$. Условие отсутствия

C_4 дает: 01.6414

нет C_4 типа $A_{1\lambda}\ A_{i\lambda}\ A_{j\mu}\ A_{k\lambda}$, значит подстановка

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_{ij}\cdot\sigma_{jk}\\ \text{(умножение слева-направо, т.е. сначала } \sigma_{ij}\text{) не}\\ \text{имеет циклов длины 1 (стационарных элементов).}\end{array}\right\}(S)$$

Аналогичные условия получаем для отсутствия C_4 с другими наборами вершин многих групп (распределение вершин по семи типам $2+2$, $2+1+1$, $1+1+1+1$). Исследование условий существования такой системы подстановок, вероятно, сложно. Однако каждое из этих условий — необходимое. Нарушение любого из них означает несуществование соответствующего графа. Если, напр., при записи списков смежности вершин мы получили бы

$$\begin{array}{c|c} A_{i\lambda} & A_{j\mu} \\ \vdots & \\ A_{k\lambda} & A_{j\mu} \end{array}$$

то нарушается (S) — значит, если перебираем варианты построения квадратного г-графа мы имеем ребро $(A_{i\lambda}, A_{j\mu})$ то рёбер $(A_{k\lambda}, A_{j\mu})$ с $k \neq j$ нет, что сокращает число рассматриваемых возможностей.

2) Априорное исключение ряда гипотез можно получить из учета степеней вершин. Так как из каждой вершины нижнего яруса идет только одно дополнительное ребро к каждому из остальных семейств, то степень этих вершин равна $1 + a - 1 = a$.

Для вершины $A_{i\lambda}$ необходимость $\rho = 2$ имеет место, если в семействах $\hat{A}_j, j \neq i$, она имеет

$a-1$ соседа, по одному в каждом семействе

$(a-1)(d-1)$ несоседей, по $d-1$ — " — " —

и каждый из последних имеет только одного соседа.

В графе G, порожденном всеми вершинами нижнего яруса, степени всех соседей $A_{i\lambda}$ равны $a-1$; сумма $(a-1)^2$ этих степеней равна сумме величин:

П/6415

$a-1$ — числа рёбер, идущих к $A_{i\lambda}$

$(a-1)(d-1)$ — " — " — к несоседям $A_{i\lambda}$ (к каждому только одно!)

2τ — удвоенному числу рёбер, связывающих между собой 2 соседа $A_{i\lambda}$:

$$(a-1)^2 = (a-1) + (a-1)(d-1) + 2\tau,$$

значит

$$2\tau = (a-d-1)(a-1).$$

Нас интересует только случай $a > 1$ (иначе $n > 2$). Если мы хотим иметь граф без треугольников, то $\tau = 0$ и

$$a = d+1 = b,$$

т.е. наш граф — однородный.

Если же допускается $\tau \geq 0$, то для усовершенствования τ хотя бы одно из чисел a, d должно быть <u>нечётным</u> и $a \geq d+1 = h$.

Примеры.

1) $\tau = 0$, $a = h = 3$. В нижнем ярусе 6 вершин и рёбра (A_{11}, A_{21}), (A_{11}, A_{31}), (A_{12}, A_{22}), (A_{12}, A_{32}) — еще нужны 2 рёбра с концами A_{21}, A_{22}, A_{31}, A_{32} — допустимы только (A_{21}, A_{32}); (A_{22}, A_{31}) — получаем граф Петерсена.

2) $a = 5$, $d = 3$, $\tau = 2$. В G' у каждой вершины 2 пары соседей, связанных ребром, т.е. каждая вершина имеет степень 4 и входит в 2 треугольника, число вершин $G' = 15$; значит число треугольников $= 10$. Рёберный граф графа Петерсена имеет эти свойства и без особого труда дополняется до 2-графа с $\rho = 2$, $n = 21$.

Непосредственное построение: для удобства записи, нумеруем иначе вершины G':

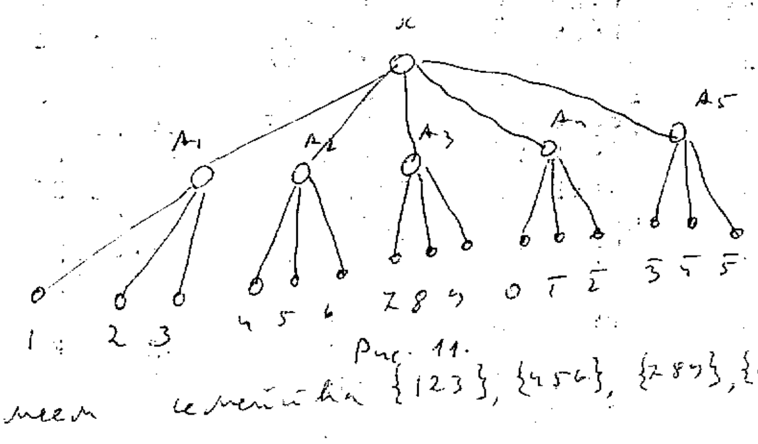


Рис. 11.

и имеем семейства $\{123\}$, $\{456\}$, $\{789\}$, $\{0\bar{1}\bar{2}\}$, $\{\bar{3}\bar{4}\bar{5}\}$ и начинаем писать таблицу смежности для G' согласно предыдущему (стр. 10, b_{ij} - таблица)

1	4	7	0	$\bar{3}$
2	5	8	$\bar{1}$	$\bar{4}$
3	6	9	$\bar{2}$	$\bar{5}$

Переименуя, в случае надобности, последние 3 семейства, можем считать, что 1 входит в треугольники 147 и $10\bar3$. Значит ~~...~~

11/6417

(C)

1	4	7	0	$\bar3$
2	5	8	$\bar1$	$\bar4$
3	6	9	$\bar2$	$\bar5$
4	1	7		
5	2			
6	3			

$\} \; 8\,9\,0\,\bar1\,\bar2\,\bar3\,\bar4\,\bar5 = \{L\}$

справа записаны вершины, которые должны появиться в незаполненных местах (из-за связности A_2).
Начинаем также таблицу расстояний от 1

(D)

	расстояние 1	расстояние 2
1	4	
	7	
	0	
	$\bar3$	

$\leftarrow 5\,6\,8\,9\,\bar1\,\bar2\,\bar4\,\bar5 = \{M\}$

От 4 за один шаг мы (с 2 и 3 нельзя – иначе через A_1). должны попасть в 2 вершины из, значит в пересечение

$$\{L\} \cap \{M\} = \{8\,9\,\bar1\,\bar2\,\bar4\,\bar5\}$$

из-за (47) отпадают 8 и 9, остаются 2 вершины из $\{\bar1\,\bar2\,\bar4\,\bar5\}$, по ~~одной~~ одной в каждом семействе, причем эти вершины одновременно не смежны ни 2, ни 3 (иначе будет C_4). 2 возможности: $\bar1$ и $\bar5$ или $\bar2$ и $\bar4$. Если надо, меняем 2 вершины и перенумеруем 2, 3 и следующие с ними вершины и сводим к возможности $\bar1$ и $\bar5$. Второй Δ, в который входит 4, это тогда $4\bar1\bar5$. Значит получаем (смежные соседи можно обозначать через ⌐):

(C)

1	4	7	0	$\bar3$
2	5	8	$\bar1$	$\bar4$
3	6	9	$\bar2$	$\bar5$
4	1	7	$\bar1$	$\bar5$
5	2			
6	3			
7	1	4		
8	2			
9	3			

$\} \; 5\,6\,0\,\bar1\,\bar2\,\bar3\,\bar4\,\bar5 = \{L\}$

(D)

$$\left.\begin{array}{c|c|c} 1 & 4 & \bar1\bar5 \\ & 7 & \\ & 0 & \\ & \bar3 & \end{array}\right\}\quad 5\,6\,8\,9\,\bar2\,\bar4 = \{M'\}$$

С 7 смежны 2 вершины из

$$\{L'\} \cap \{M'\} = \{5\,6\,\bar2\,\bar4\},$$

5 и 6 отпадают из-за ребра (47), значит 7 входит еще в $\triangle\, 7\bar2\bar4$.

Для соседей 2, из-за $\triangle\, 4\bar1\bar5$, $\bar1$ не смежна ни с 5, ни с $\bar4$, значит имеем $\triangle\, 28\bar1$, $25\bar4$.

Для соседей 3, из-за $\triangle\, 7\bar2\bar4$, $\bar2$ не смежна ни с 8, ни с $\bar5$, значит есть $\triangle\, 36\bar2$, $39\bar5$.

11/6418

В (С) уже имеем

$$\begin{array}{c|cc} 4 & \overline{17} & \overline{\bar1\bar5} \\ 5 & \overline{2\bar4} & \\ 6 & \overline{3\bar2} & \end{array} \qquad 8\,9 \,|\, 0 \,|\, \bar3$$

Справа, для удобства, помещены вершины разбиения, упорядоченные по вхождению в семейства. Учитывая известные уже рёбра — они отмечены ниже — получаем однозначное распределение этих вершин:

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & \overline{17} & \overline{\bar1\bar5} & \\ 5 & \overline{2\bar4} & \overline{09} & \\ 6 & \overline{3\bar2} & \overline{\bar3 8} & \end{array} \qquad 8\,9 \,|\, 0 \,|\, \bar3$$

(39) (28) $(4\bar1)(6\bar2)$ $(4\bar5),(3\bar4)$

Полученная информация полностью определяет искомый граф G'. Наиболее компактно её можно записать в виде списка полученных 10 треугольников:

вершины Δ	номера i семейств A_i для вершин
1 4 7	1 2 3
1 0 $\bar{3}$	1 5 6
2 5 $\bar{4}$	1 2 5
2 8 $\bar{1}$	1 3 4
3 6 $\bar{2}$	1 2 4
3 9 $\bar{5}$	1 3 5
4 $\bar{1}$ $\bar{5}$	2 4 5
5 9 0	2 3 4
6 8 $\bar{3}$	2 3 5
7 $\bar{2}$ $\bar{4}$	3 4 5

Фактически G' искали и был получен именно в этом последнем виде: получить систему 10 треугольников так, чтобы во втором столбце иметь все $C_5^3 = 10$ сочетаний номеров семейств и чтобы были выполнены некоторые необходимые условия (появление каждой вершины только 2 раза и т.д.). Однако предшествующие более длинные построения, как кажется, более подходят для получения некоторого поискового машинного процесса, хотя бы малоэффективного, производства геодезических графов. Работая от руки и используя возможности перестановок, фактически пришлось строить только один единственный вариант. Растолковать машине все использованные приемы, пожалуй, сложновато. Однако просто перебирать и помечать, сложновато.

лов все возможные варианты Таблицы (С), напр., такие не дают результата. Если этим заниматься, то нужно найти какой-то разумный набор приемов, понятных машине и достаточно сокращающих число вариантов. Конечно не беда, если вместо одного варианта, ведущего к цели, взят другой, эквивалентный ему (– напр. в конце стр. 13 брать не $\Delta 4\bar{1}\bar{5}$, а $\Delta 4\bar{2}\bar{4}$, который, кстати, дает более порядочный второй столбец Таблицы стр. 15), но нужно сократить число рассматриваемых эквивалентных вариантов, которые не ведут к цели. 01.6420

Осталось проверить, что построенный граф действительно геодезический. Понятно, машина могла бы проверить геодезичность всех вершин. Работая от руки, будем сокращать проверку установлением эквивалентностей. Ищем достаточно широкую группу автоморфизмов графа, оставляющих x неизменным. Эти автоморфизмы должны переводить первый столбец Таблицы стр. 15 в себя, а также семейства в семейства. Таковы, напр., подстановки

$$((1\,2\,3))((4\,5\,6))((7\,\bar{4}\,\bar{2}))((8\,\bar{5}\,0))((9\,\bar{3}\,\bar{1}))((A_1))((A_2))((A_3\,A_5\,A_4))$$

$$((1\,4\,7))((2\,6\,9))((3\,5\,8))((0\,\bar{1}\,\bar{1}))((\bar{3}\,\bar{5}\,\bar{4}))((A_1\,A_2\,A_3))((A_4))((A_5))$$

Эти подстановки порождают группу, которая позволяет перевести 1 в любую вершину из $\{2 \ldots \bar{5}\}$, а A_1 – в любую из $\{A_2\,A_3\,A_4\,A_5\}$. Геодезичность x и A_1, следовательно всех A_i, обеспечена уже на стр. 12.

Осталось заполнить Таблицу (D) для вершины 1. Распишем ее полностью:

$$
(D)\quad 1\ \left|\ \begin{array}{c|l} A_1 & x\ \ 2\ 3 \\ 4 & A_2\ \ \bar{1}\ \bar{5} \\ 7 & A_3\ \ \bar{2}\ \bar{4} \\ 0 & A_4\ \ 5\ 9 \\ \bar{3} & A_5\ \ 6\ 8 \end{array}\right.
$$

(в третьем столбце опущены, из звезд, 1, 4, 7, 0, $\bar{3}$, фигурирующие уже раньше). Все вершины G по одному разу фигурируют в таблице, следовательно ~~транзитивные~~ геодезические вершины зоны 1, так и все i — геодезические. и G — ~~транзитивен~~ геодезический.

Граф Петерсена, соответствующий таблице 15:

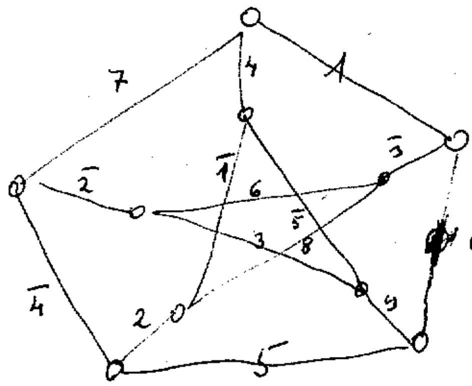


Рис. 12.

О построении одного графа Мура с помощью латинских квадратов — в 6. пункте.

5. Необходимые условия для одного класса 2-графов.

1/6655

Пусть рассматривается связный неорграф G с диаметром δ и максимальной степенью p вершин. Берем произвольную вершину x и через ν_i обозначим число вершин G на расстоянии i от x. Имеем

$$\left.\begin{aligned} &\nu_0 = 1, \\ &\nu_1 \le p, \\ &\nu_{i+1} \le (p-1)\nu_i \le p(p-1)^i, \ (1 \le i \le \delta-1) \end{aligned}\right\} \quad (5.1)$$

Так как
$$n = \sum_{i=0}^{\delta} \nu_i,$$
то
$$n \le 1 + \sum_{i=0}^{\delta-1} p(p-1)^i. \qquad (5.2)$$

Если в (5.2) имеем равенство, то G – граф Мура. Для такого графа в (5.1) мы также должны всюду ν_i, при выборе любой вершины x, имеем знаки равенства. Поэтому граф Мура – однородный, степени p. Его граф кратчайших расстояний для любой вершины x – это дерево, в котором вершины всех ярусов, за исключением нижнего, имеют степени p.

Элементарные примеры графов Мура: граф Петерсена с $p=3$, $\delta=2$ и циклы $C_{2\delta+1}$ с $p=2$ и o–o с $p=\delta=1$. Как известно, до сих пор известен только еще один граф Мура с $p=7$, $\delta=2$, $n=50$. Во всяком случае, если граф Мура ~~существует~~ существует, то он 2-граф.

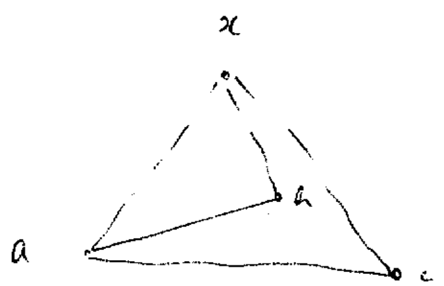
Для поиска других интересных 2-графов мы рассмотрим несколько более общий их класс,

вложенному в граф Мура. Именно, мы потребуем, чтобы исходный граф G был „крайне однородным", т.е. чтобы он был однородным степени p и диаметра δ 2-графом, в котором для любой вершины x все вершины i-го яруса дерева $(i \ge 1)$ кратчайших расстояний имели бы в дереве одинаковую степень $p_i + 1$, зависящую только от номера яруса (понятно, $p_i < p-1$, так как из каждой вершины при $i \ge 1$, одно ребро идёт вверх; а $p_\delta = 0$, а при $1 \le i < \delta$ всегда $p_i \ge 1$).
Из-за однородности, при дополнении ярусного дерева до G, в i-том ярусе $(i \ge 1)$ из каждой вершины будут исходить   n.6458   (5.2')

$$s_i = p - p_i - 1$$

„горизонтальных" рёбер к другим вершинам того же яруса. Для графа Мура $s_i = 0$ при $1 \le i \le \delta - 1$ (понятно, всегда $s_\delta = p-1$).

Если предположение о полноте 2-графа, содержащего четырехугольник, окажется правильной, то $s_1 \le 1$.



Действительно, пусть $s_1 \ge 2$ и $(ab), (ac)$ — два ребра, идущие от вершины a первого яруса к двум вершинам b и c того же яруса. Тогда мы имеем C_4 $(xbac)$ и т.д.

С другой стороны, мы не можем априорно исключить из рассмотрения графы с $s_1 = 1$, т.е. содержащие треугольники. Таков был, например, 2-граф, содержащий реберный граф графа Петерсена; [illegible] граф не однороден, следовательно и не кратно однороден. 01.6457

Для кратно однородных графов можно получить необходимые условия существования, связанные с характеристическими значениями их матрицы смежности.

Наряду с матрицей смежности A рассмотрим для кратно однородных 2-графов также матрицы $A^{(i)}$, в которых $a^{i}_{jk} = 1$, если расстояние между вершинами j и k равно i, а во всех других случаях $a^{i}_{jk} = 0$. Очевидно, $A^{(0)} = E$ — единичная матрица порядка n, и $A^{(1)} = A$.

Имеем рекуррентное соотношение (при $i \geq 2$)

$$A^{(i)} A = A^{(i+1)} + s_i A^{(i)} + p_{i-1} A^{(i-1)}. \qquad (5.3)$$

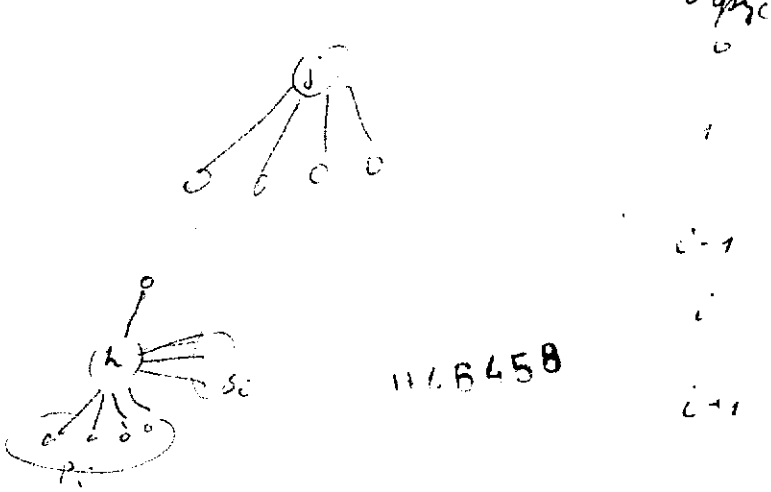
Действительно, в строке с номером j левой части фигурируют ~~произведений~~ числа

$$\sum_{k=1}^{n} a^{(i)}_{jk} a_{kl}. \qquad (5.4)$$

Каждое произведение имеет значение 0 или 1, а последнее — только в случае

$$a^{(i)}_{jk} = 1, \quad a_{kl} = 1.$$

$a^{(i)}_{jk} = 1$ для всех вершин i-го круга по отношению к вершине j, следовательно, сумма (5.4)



11.6458

равна числу вершин i-го круга, смежных с вершиной k. Для вершин $i+1$-го, i-го и $i-1$-го круга эти числа соответственно равны 1, s_i, p_{i-1}, а для всех других вершин равны нулю, что и выражается правой частью (5.3).

При $i=1$, (5.3) заменится на

$$A^{(1)}A = A^2 = A^{(2)} + pE + s_1 A \qquad (5.5)$$

Соотношения (5.3) и (5.5) позволяют выразить все $A^{(i)}$, $i = 2, 3, \dots, \delta$ через E и степени A.

С другой стороны сумма

$$E + \sum_{i=1}^{\delta} A^{(i)} = A^{\delta} + \sum_{j=1}^{\delta-1} k_j A^{\delta-j} + k_\delta E \qquad (5.6)$$

для неодиночного графа – это матрица, в которой все элементы равны единице. Повторяя рассуждения А.К. Кельманса (Вопр. кибернетики, Тр. семин. по комбинат. матем.-ке, 1973, зап. – стр. 73) видим, что все характеристические числа λ матрицы A, отличные от простого корня p, удовлетворяют уравнению

$$\lambda^{\delta} + \sum_{j=1}^{\delta-1} b_j \lambda^{\delta-j} + b_{\delta} = 0 \qquad (5.7)$$

В частности, при $\delta = 2$ мы получаем

$$\lambda^2 - (s_1 - 1)\lambda - p + 1 = 0, \qquad (5.8)$$

а при $\delta = 3$, с учетом того, что из-за (5.2′) $p_1 + s_1 = p - 1$

$$\lambda^3 - (s_1 + s_2 - 1)\lambda^2 + (s_1 s_2 - 2p + 2)\lambda + p s_2 - p + 1 = 0 \qquad (5.9)$$

Есть подозрение, что (5.7) можно написать в виде

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda - s_1 & p_2 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & \lambda - s_2 & p_3 & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \lambda - s_3 & & \vdots \\ & & & & & 0 \\ & & & & & p_{\delta-1} \\ \cdots & & & 0 & 1 & \lambda - s_{\delta-1} \end{vmatrix} = 0, \qquad (5.10)$$

где левая часть — определитель Якоби (использовать (5.3) и (5.6); возможно, что члены имеют несколько иной вид — я когда-то менял обозначения).

С другой стороны, коэффициенты характеристического полинома для матрицы A можно выразить через другие характеристики графа (напр. А. Бенце, Латв. мат. ежегодник 3, 1968, 75–80)

$$\lambda^n + 0 - m\lambda^{n-2} + 2\Delta\lambda^{n-3} \pm \dots \qquad (5.11)$$

где m – число рёбер, Δ – число треугольников и т.д.
Из (5.11) получаем значения симметрических функций всех корней – сумм их произведений П/6460

$$S_1 = 0 \; ; \quad S_2 = -m \; , \quad S_3 = +2\Delta$$

а из них – значения сумм k-тых степеней всех корней

$$\Sigma_0 = n \, , \; \Sigma_1 = 0 \, , \; \Sigma_2 = 0 + 2m = np \, , \; \Sigma_3 = +6\Delta , \dots$$

Пусть $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ значения корней полинома (5.7), а $a, b, c, \dots$ – кратности этих корней для полинома (5.11). Тогда должно быть (как отмечалось, p – простой корень (5.11)):

$$\begin{aligned} a + b + c + \dots &= n - 1 \\ a\alpha + b\beta + c\gamma + \dots &= -p \\ a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + \dots &= np - p^2 \\ a\alpha^3 + b\beta^3 + c\gamma^3 + \dots &= 6\Delta - p^3 = nps_1 - p^3 \end{aligned} \qquad (5.12)$$

— — — — —

Если искомый r-граф существует, то эти уравнения дают целочисленные неотрицательные значения величин $a, b, c, \dots$, в противном случае такого графа нет.

 016461

Как Катетов, нет надобности брать избыточное много уравнений (5.12) и искать условия их совместности, так как это условие выполняется автоматически (все же проверить!). Однако и условия получения целочисленных и ≥ 0 $a, b, c \ldots$ уже достаточно жесткие и исключают из рассмотрения много комплектов значений p, δ и s_i.

Другой тип необходимых условий — это целочисленность числа различных частей r-графа, напр. циклов данной длины. Для графов Мура все $s_i = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, \delta-1$), наименьшие возможные длины циклов — это $2\delta+1$ и $2\delta+2$. Их число подсчитано Г. Д. Фридманом — сб. Теория графов, 1974, стр. 212-219. Эту работу не трудно дополнить:

1) Ответить на вопрос конца 218 стр.

2) Существенно обобщить теорему 7 статьи.

Именно: рассматриваем простой делитель g знаменателя чисел $A(d,k)$ или $B(d,k)$ статьи (в этом и только этом абзаце d и k всюду — как в статье). Устанавливаем систему вычетов для d и k, при которых хотя бы один из числителей A или B не делится на g. Используем теорему Ферма $a^g \equiv a \pmod g$. Так, напр., пусть $k \equiv 2 \pmod 5$. Тогда числитель A не делится на 5, если $d \equiv 3 \pmod 5$ и еще $n \equiv 0;1;3 \pmod 4$, т.е. $n \equiv 7;12;17 \pmod{20}$

— — $d \equiv 4 \pmod 5$ — — $0;2;3 \pmod 4$ — — $2;7;12 \pmod{20}$

Получить такие комплекты уравнений для некоторого набора значений p.

Каждому ненулевому s_i соответствуют циклы длины $2i+1$. Можно подсчитать их общее число, а также ~~некоторые~~ найти некоторые необходимые условия, создаваемые выбранными значениями s_i. Если, напр., s_i — нечётное, то подграф, порожденный вершинами i-го круга — однородный нечётной степени, следовательно содержит чётное число вершин — а это число равно $p p_1 \cdots p_{i-1}$ и т.д. Если $s_1 = 1$, значит p — чётное, то из за числа $\frac{p}{2}$ треугольников, в которые входит каждая вершина 1-го круга, $s_2 \geq 1$ и т.п.

Возвращаемся к уравнению (5.8) с корнями α и β, для которых

116462

$$\alpha + \beta = s_1 - 1 \qquad (5.13)$$
$$\alpha\beta = -p + 1$$

и соответствующие уравнения (5.12):

$$a + b = p^2 - s_1 p \qquad (5.14)$$
$$a\alpha + b\beta = -p \qquad (5.15)$$

(A) Если α и β не рациональны, то $a = b$. [иначе (5.13) и (5.15) дали бы рациональные значения α и β] и (5.13), (5.15) дают

$$a(s_1 - 1) = -p.$$

Так как $a > 0$, то $s_1 = 0$, $n = p$ и (5.14) дает

$2p = p^2$, т.е. $p = 2$, $n = 5$ и 

(B) α и β — рациональные, $s_1 = 0$. Этот случай есть у Хоффмана. Можно пойти по-разному, напр. так: если α и β рациональные, то они целые; полагая $\alpha - \beta = u > 0$, имеем

$$\alpha = \frac{-1+u}{2}, \quad \beta = \frac{-1-u}{2},$$

значит u — нечётное и

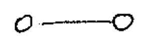
114663

$$p = \frac{u^2+3}{4}$$

Используя a из (5.14) и (5.15), получаем

$$u\, h = \alpha p^2 + p = \frac{1}{32}(u^2+3)(u+1)(u^2-2u+5)$$

Так как h — целое >0, то u делит произведение $3 \cdot 1 \cdot 5 = 15$. Имеем 4 возможности

$u = 1 \quad h = 1 \quad p = 1$ 

$u = 3 \quad h = 4 \quad p = 3$ — граф Петерсена

$u = 5 \quad h = 21 \quad p = 7, \ n = 50$ — такой 2-граф существует (см. дальше).

$u = 15 \quad h = 1520 \quad p = 57, \ n = 57^2 + 1 = 3250$ — неизвестно пока, существует ли такой граф.

Эти четыре случая — все принципиально возможные графы Мура с диаметром 2.

(C) α и β — рациональные, $s_1 = 1$ (из-за указанной Вами теоремы о $(n, s_1) > 1$ недопустимо).

Тогда (5.8) дает

$$\lambda^2 - p + 1 = 0$$

с корнями α и $\beta = -\alpha$ и $p = \alpha^2 + 1$. Пусть $\alpha \geq 0$.
Тогда (5.15) дает

116464

$$\alpha(a - b) = -\alpha^2 - 1,$$

следовательно $\alpha = 1$ (так как $a - b$ — целое), $p = 2$ — мы получим вырожденный случай, когда заданное $s_{\delta-1} = p-1$ — тогда фактический диаметр не меньше δ, а только $\delta-1$.
Здесь имеем

$$a + b = 2,$$
$$a - b = -2$$

значит $a = 0$, $b = 2$ — мы получим просто , с характеристическим значением $\beta = -1$ кратности 2, а значение $\alpha = +1 = p-1$ было лишним и появилось из-за суммирования в (5.6) и (5.7) до $\delta = 2$, а не до истинного значения диаметра.
Этот же факт имеет место в общем случае, что может служить контролем: если $s_{\delta-1} = p-1$, то (5.7) имеет лишний корень $p-1$.

Для случая $\delta = 3$, полагая для краткости записи $s_1 = s$, $s_2 = t$, мы имеем

$$n = p(p-t)(p-s-1) + p + 1$$

и систему уравнений

$$\lambda^3 + (-s-t+1)\lambda^2 + (st-2p+2)\lambda + pt - p + 1 = 0 \qquad (C)$$

с корнями α, β, γ,

$$a + b + c = n - 1 = p[(p-t)(p-s-1)+1]$$

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = -p \qquad (A)$$

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 = n(n-p) = p[p(p-t)(p-s-1)+1].$$

Вместо уравнения с λ можно, понятно, работать и с явно расписанными выражениями симметрических функций

$$\alpha + \beta + \gamma = s + t - 1 \qquad (B)$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = st - 2p + 2$$

$$\alpha\beta\gamma = -pt + p - 1$$

Система уравнений (A) - (B) содержит фактически 9 неизвестных $p, s, t, a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ (n не в счёт); s может иметь только значения 0 или 1. a, b, c, t должны быть целыми неотрицательными, p целым и $p > t+1$, α, β, γ могут быть любыми. Мне не удалось найти нетривиальных решений с $p > 2$.

Может быть стоит организовать некоторый перебор вариантов с не очень большими p на машине. Для a, b, c мы имеем 3 возможности: $a = b = c$; $a \neq b = c$; все три различны.

При $a = b = c$ имеем из (A):

$$a(s+t-1) = -p,$$ 6468

значит $s = t = 0$; $a = p$.

$$3p = p\,[p(p-1)+1],$$

единственное приемлемое значение $p=2$ дает C_7.

Если $a \neq b = c$, то исключая $\beta+\gamma$ получим

$$(a-b)a + b(s+t-1) + p = 0,$$

значит α – рациональное, следовательно целое.

Подставляя $\lambda = \alpha b$ (c), мы получаем

$$(p-\alpha^2+s\alpha)(t-2\alpha-1) = (\alpha+1)\left[\alpha^2-(s+1)\alpha-1\right] \qquad (D)$$

Исключение a, $b=c$, β и γ из (A) и первой группы (B) дает еще одно соотношение (L) между p, t, α, s. Для s имеем 2 варианта: $s=0$; $s=1$. Для каждого из них можно перебрать целые значения α с не очень большими $|\alpha|$, вычислить для них правую часть (D), разбить эти значения на 2 множителя (>0 или <0), положить сомножители левой части равными этим множителям, получить p и t. Те значения, для которых

$$p-1 > t \geq s \; ^{*)}$$

подставлять в (L).

При $s=0$ решения с $t=0$ также не интересны (соответствуют несуществующим при $p>2$ графам Мура).

Понятно, не возбраняются и другие виды перебора или другие способы поиска решений.

*) $t \geq s$ из замечания на стр. 25.

Случай различных a, b, c кажется ещё менее удобным для исследования - можно, напр., опять исключить β и γ (напр. определить их из второго (A) и первого (B)), но теперь α - не обязательно целые, так же как значения свобод в (D). Пробовать с целыми числами можно, только обрабатываемые системы уравнений будут ещё менее удобными. Ещё менее привлекательными кажутся случаи с $\delta > 3$.

016467

В принципе возможен и более „научный" подход, алгебраический. Два последние уравнения (A) устанавливают дополнительные соотношения между корнями уравнения (C). Аналогичное имеет место для (5.7) и (5.12). Алгебраические уравнения с такими связями изучаются в теории Галуа. Однако в нашем случае коэффициенты в этих соотношениях должны повторяться из соотношения в соотношение и при том быть целыми и ≥ 0. Не исключено, что некоторые приемы теории Галуа могут быть полезными для нашей задачи, но которые и как — не знаю (может быть стоит поговорить с алгебраистами ?!).

Ещё один алгебраический факт. Пусть в (5.10) все $s_i = s$ (значит равны и $p_i = p - s - 1 = r$). Значение определителя порядка n такого вида — это полином T_n степени n переменной λ. Из рекуррентного соотношения

$$T_n = (\lambda - s) T_{n-1} - r T_{n-2}$$

и

$$T_0 = 1$$

$$T_1 = \lambda + 1$$

следует, что T_n выражаются через полиномы Чебышева второго рода. Как это использовать — не знаю.

Некоторые вопросы, возможно трудные.

В (5.2) правая часть — точная граница только в немногих случаях, когда для данных p и δ существует граф Мура. Какова точная граница в других случаях? Будет ли экстремальный граф неоднозначен?

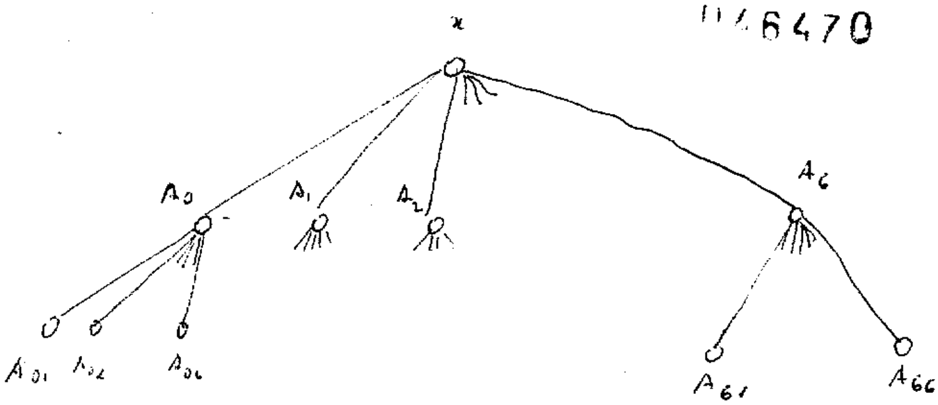
Пусть даны диаметр, максимальная степень, минимальное число треугольников [и (или) других циклов нечётной длины]. Каково максимальное n и каковы экстремальные графы? Возможно, если существуют крайне-однородные графы с соответствующими параметрами, то они и будут экстремальными (но пока не нет!).

Имеют-ли [illegible] геодезические блоки другие экстремальные свойства, помимо минимального числа = 1 кратчайших путей? Существуют-ли для них какие то общие равенства или неравенства между числами n, m, δ, [illegible] числами узлов различных длин? Те же вопросы для классов 2-графов (блоков) (без вершин 2. степени, треугольников и т.п. (эти условия - в отдельности или несколько одновременно).

116469

6. Построение графа Мура с $p=7$, $\delta=2$, $n=50$.

6.1. Начало — согласно ранее сказанному.

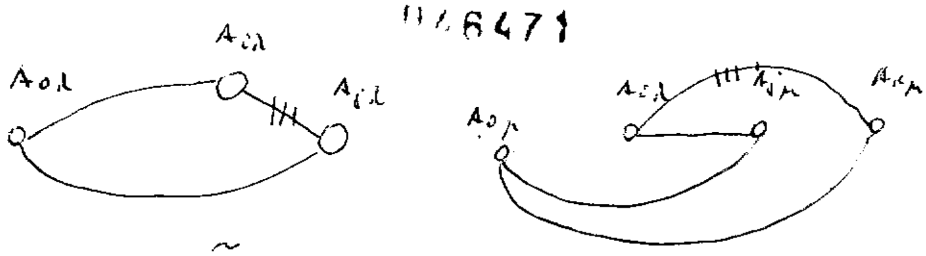


Вершина x смежна с $A_0, A_1, \ldots, A_6$,
Каждая из A_i $(i=0,1,\ldots,6)$ еще с $A_{i1}, A_{i2}, \ldots A_{i6}$,
образующими семейство $\tilde{A}_i$. Из за неоднозначности
всех A_i, ребрам, связывающим вершины
семейств $\tilde{A}_i$ и $\tilde{A}_j$ соответствует подстановка σ_{ij}
вторых индексов вершин $A_{i\lambda}$ и $A_{j\mu}$.

В качестве подстановок σ_{0i} берем тождественные.
Остальные подстановки зададим посредством квадратных
таблиц: таблица для всех σ_{ij} $(i,j\neq 0)$ в i-той, базисной
строке, номер которой обозначим через $[i]$, пишем значения
1, 2, .. 6 вторых индексов в удобном для нас порядке.
В столбце, где в базисной строке записано λ,
в j-той строке пишем результат воздействия σ_{ij}
на λ, т.е. $\lambda\sigma_{ij}$. Отсутствие треугольников
и четырехугольников дает условия на
размещение чисел в наших квадратах.
Так как σ_{ij} — подстановка, то каждая строка со-
держит все числа 1, 2, .., 6. В следующих

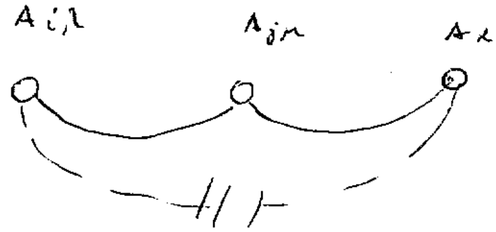
рисунках перечёркнуты рёбра, наличие которых запрещается наличием других указанных рёбер (i, j, k, l – все $\neq 0$ и попарно различные):

11.6471



В столбце (с номером $[\lambda]$ таблицы для $\tilde{A}_i$) в базисной строке запрещено ~~появление~~ повторное появление λ, а также повторное появление любого μ. Следовательно – все наши таблицы – латинские квадраты.

Второй рисунок даёт ещё: (а) если $\mu\sigma_{ji} = \lambda$, то $\mu\sigma_{ki} \neq \lambda$, т.е. в i-тых строках таблиц с различными базисными строками $[j]$ и $[k]$, в столбце с тем же базисным μ (т.е. μ в базисной строке) стоят различные номера: λ и что-то $\neq \lambda$.



(а) $\lambda\sigma_{ik}$ отличается от $\lambda\sigma_{ij}\sigma_{jk}$

Ещё это условие отсутствия четырехугольников с вершинами в $\tilde{A}_i\ \tilde{A}_j\ \tilde{A}_k\ \tilde{A}_l$

$$\lambda\sigma_{ij}\sigma_{jl} \neq \lambda\sigma_{ik}\sigma_{kl}$$

(б)

что в данном случае условия (a) и (b) позволили исключить неприемлемые латинские квадраты, а оставшиеся удовлетворили (c).

Перестановками строк и (и перенумерацией элементов) столбцов каждый латинский квадрат может быть приведен к одному из 22 канонических видов, которые определил Я.Д. Клодэс в своей дипломной работе Pri latini kvadrati izomorfismi, 1972. Квадрат, соответствующий $i=1$ можно привести к каноническому виду – остается попытаться построить остальные.

Пример подзадачи (номер базисной строки [i])

N/6472

[1]	1	2	3	4	5	6
2	2	1	5	6	4	3
3	3	6	1	5	2	4
4	4	3	2	1	6	5
5	5	4	6	3	1	2
6	6	5	4	2	3	1

1	1	2	3	4	5	6
[2]	2	1	5	6	4	3
3	36	63	12	54	25	41
4	43	31	26	15	61	52
5	54	45	61	32	13	26
6	65	56	43	21	32	14

Числа, записанные карандашом для [2] – первые запрещенные из-за $\lambda\sigma_{21}\sigma_{1i} \neq k\sigma_{2i}$, поэтому удобно числа для [2] оставить как в первой таблице и переписать нижнюю часть первой таблицы.

Вторые запрещенные числа – из-за $\lambda\sigma_{2i} \neq \lambda\sigma_{1i}$, т.е. ~~в~~ в столбце с λ в [2] нельзя числа из первой таблицы из столбца ~~с~~ с тем же λ в [1].

В Таблице [2] в третьей строке 1 может быть только на 4. и 5. месте — 2 варианта.

Если 1 на 4. месте, то 3 только на 5., 2 на 6. и т.д. Поэтому — заполняем квадрат по вертикалям или горизонталям. В большинстве случаев оказывается — невозможно продолжить заполнение таблицы — получилась для Таблицы [2]. Если же [2] заполнено правильно, то в Таблице [3] изменим уже строки 1 и 2, так как $\sigma_{31}=(\sigma_{13})^{-1}$, $\sigma_{32}=(\sigma_{23})^{-1}$ и есть запрет 4-х видов из за того, что $\lambda\sigma_{3j}$ отлично от $\lambda\sigma_{1j}$, $\lambda\sigma_{2j}$, $\lambda\sigma_{31}\sigma_{1j}$, $\lambda\sigma_{32}\sigma_{2j}$ (последние 4 тоже не обязательно различные)

Положительный результат, как это надо было при переборе, получился при одной из последних попыток с ~~квадр~~ квадратом

[1]	1	2	3	4	5	6
2	2	1	4	3	6	5
3	3	6	1	5	4	2
4	4	5	6	1	2	3
5	5	3	2	6	1	4
6	6	4	5	2	3	1

11L6473

,

который для

1	1	2	3	4	5	6
[2]	2	1	4	3	6	5
3	4	5	2	6	3	1
4	3	6	5	2	1	4
5	6	4	1	5	2	3
6	5	3	6	1	4	2

и т.д.

Окончательный результат короче можно дать в виде списка подстановок, записанных через циклы:

σ_{ij}

$i \backslash j$	2	3	4	5	6
1	(12)(34)(56)	(13)(26)(45)	(14)(25)(36)	(15)(23)(46)	(16)(24)(35)
2		(15)(24)(36)	(16)(23)(45)	(14)(26)(35)	(13)(25)(46)
3			(12)(35)(46)	(16)(25)(34)	(14)(23)(56)
4				(13)(24)(56)	(15)(26)(34)
5					(12)(36)(45)

Как видно, список имеет высокую степень однородности: все подстановки состоят из 3 циклов длины 2, все произведения $\sigma_{ij}\sigma_{jk}$ состоят из 2 циклов длины 3, пары, фигурирующие в циклах, образуют все возможные $5 \cdot 3 = 15$ разбиений 6 элементов на пары и т.д.

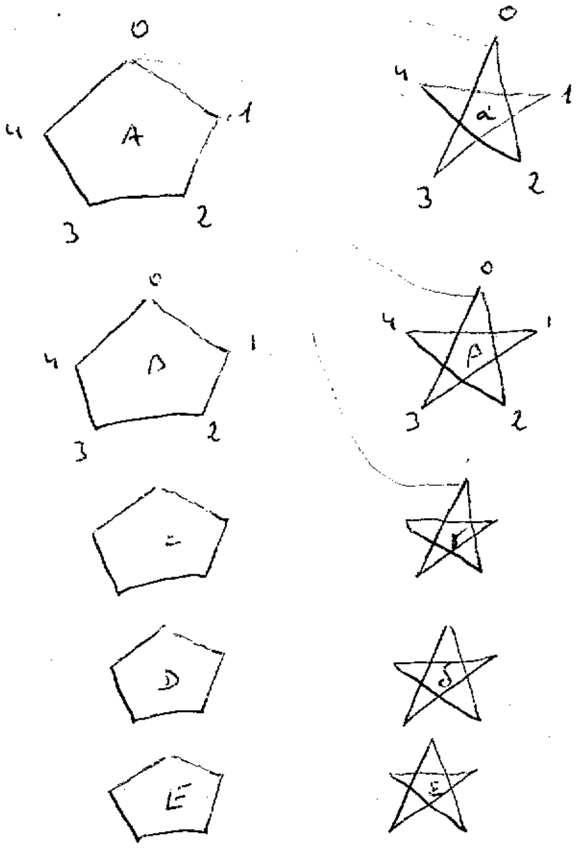
6.2. Попытка аналогичным путём построить гипотетический граф Мура с $\delta = 2$, $p = 57$ выглядит безнадёжной – здесь нужны 56 латинских квадратов того же порядка, учитывающие все перестановки. Число классов эквивалентности таких квадратов огромно, намного больше 56! (факториал!)

Можно думать, что таблица всех σ_{ij} аналогична выше отмеченной, т.е. что все σ_{ij} ~~[illegible]~~ одинаковы образом разбиваются на циклы той же длины, напр. 7 циклов по 8 элементов или наоборот и т.п. Но число таких разбиений также огромное, значительно больше чем C^2_{56} (при $N=2$ для графа Петерсена и $N=6$ для таблицы стр. 37, число разбиений на пары равно C^2_N). При $N=6$ можно было временно пренебречь условиями (c) стр. 34, все было сравнимо с ними условий типа (a), (b). При $N=56$ условий (c) будет намного больше и отыскать все автоматического выполнения вряд-ли можно.

Думаю, что не стоит серьезно заниматься построением графа Мура с $p=57$ — это будет огромная трата времени и усилий; успешное построение его было бы экзотическим, но весьма специальным результатом, как кажется, без особого общего значения.

1146475

6.3. Граф Мура с $p=7$, данный таблицей стр. 37, кажется более наглядным в следующем представлении. Берем 5 циклов длины 5 (A, B, C, D, E) и нумеруем все вершины подряд, и еще 5 циклов той же длины 5 (α, β, γ, δ, ε) и нумеруем вершины через одну (если последние 5 циклов рисовать как пятиконечную звезду, получаем нумерацию подряд по обходу)



A_i	$A_{i\pm1}$	α_i	β_i	γ_i	δ_i	ε_i
B_i	$B_{i\pm1}$	α_i	β_{i+1}	γ_{i+2}	δ_{i+3}	ε_{i+4}
C_i	$C_{i\pm1}$	α_i	β_{i+2}	γ_{i+4}	δ_{i+1}	ε_{i+3}
D_i	$D_{i\pm1}$	α_i	β_{i+3}	γ_{i+1}	δ_{i+4}	ε_{i+2}
E_i	$E_{i\pm1}$	α_i	β_{i+4}	γ_{i+3}	δ_{i+2}	ε_{i+1}
α_i	$\alpha_{i\pm2}$	A_i	B_i	C_i	D_i	E_i
β_i	$\beta_{i\pm2}$	A_i	B_{i+4}	C_{i+3}	D_{i+2}	E_{i+1}
γ_i	$\gamma_{i\pm2}$	A_i	B_{i+3}	C_{i+1}	D_{i+4}	E_{i+2}
δ_i	$\delta_{i\pm2}$	A_i	B_{i+2}	C_{i+4}	D_{i+1}	E_{i+3}
ε_i	$\varepsilon_{i\pm2}$	A_i	B_{i+1}	C_{i+2}	D_{i+3}	E_{i+4}

6478

Справа ~~в~~ немного символизированном виде дана таблица смежности. Все индексы берутся по модулю 5, несколько индексов у буквы означает, что рассматриваются все вершины с каждым из них. Напр. далее α_{23} – это значит α_2 и α_3.

Расшифровка первой строки при $i = 2$:

$$A_2 \mid A_1\ A_3\ \alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2\ \delta_2\ \varepsilon_2$$

Степень $p = 7$ дается таблицей смежности.

Проверим [illegible] для A_0 и α_0 (где меньше расчетов с индексами):

A_0	A_4	$A_3\ \alpha_4\ \beta_4\ \gamma_4\ \delta_4\ \varepsilon_4$
	A_1	$A_1\ \alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1\ \delta_1\ \varepsilon_1$
	α_0	$\alpha_{23}\ B_0\ C_0\ D_0\ E_0$
	β_0	$\beta_{23}\ B_4\ C_3\ D_2\ E_1$
	γ_0	$\gamma_{23}\ B_3\ C_1\ D_4\ E_2$
	δ_0	$\delta_{23}\ B_2\ C_4\ D_1\ E_3$
	ε_0	$\varepsilon_{23}\ B_1\ C_2\ D_3\ E_4$

α_0	α_2	$\alpha_4\ A_2\ B_2\ C_2\ D_2\ E_2$
	α_3	$\alpha_1\ A_3\ B_3\ C_3\ D_3\ E_3$
	A_0	$A_{14}\ \beta_0\ \gamma_0\ \delta_0\ \varepsilon_0$
	B_0	$B_{14}\ \beta_1\ \gamma_2\ \delta_3\ \varepsilon_4$
	C_0	$C_{14}\ \beta_2\ \gamma_4\ \delta_1\ \varepsilon_3$
	D_0	$D_{14}\ \beta_3\ \gamma_1\ \delta_4\ \varepsilon_2$
	E_0	$E_{14}\ \beta_4\ \gamma_3\ \delta_2\ \varepsilon_1$

(группы автоморфизмов)

Транзитивность: среди автоморфизмов есть:

поворот $i \to i+1$;

Подстановка $(A_i B_i C_i D_i E_i)(\alpha_i)$ $\beta_i \to \beta_{i+1}$
$\gamma_i \to \gamma_{i+2}$
$\delta_i \to \delta_{i+3}$
$\varepsilon_i \to \varepsilon_{i+4}$

446477

(опять сокращенно – цикл с индексом i представляют 5 циклов с индексами $0, 1, 2, 3, 4$.)

Подстановка $(\alpha_i \beta_i \gamma_i \delta_i \varepsilon_i)(A_i)$ $B_i \to B_{i+4}$
$C_i \to C_{i+3}$
$D_i \to D_{i+2}$
$E_i \to E_{i+1}$

Наконец, одна из многих подстановок, перемешивающих латинские и греческие буквы, например подстановка 7-го порядка

$$(A_0)(A_4 A_1 \alpha_0 \beta_0 \gamma_0 \delta_0 \varepsilon_0)(A_2 \alpha_3 E_1 \gamma_3 D_1 E_4 \varepsilon_4)(A_3 \alpha_1 E_0 D_2 \gamma_2 E_3 \varepsilon_2)$$
$$(B_0 \beta_2 B_3 \delta_3 B_1 \beta_4 \delta_1)(B_2 C_2 \delta_4 \beta_1 C_0 B_4 D_4)(C_1 \delta_2 D_3 \gamma_4 \gamma_1 D_0 \beta_3)$$
$$(C_3 E_2 C_4 \varepsilon_3 \alpha_4 \varepsilon_1 \alpha_2).$$

Если рисовать круговое дерево для A_0, то вершина во второй скобке – это вершина ~~второго~~ первого круга.

1146478

После подходящей перенумерации вершин, горизонтальные рёбра во втором ярусе соответствуют таблице стр. 37, так что оба представления соответствуют изоморфным графам.

Интересно, что граф содержит большое число графов Петерсена (сколько?) и допускает много разбиений на 5 графов Петерсена, соединенных рёбрами. Таковы, напр., графы Петерсена с вершинами: A_i и α_i, B_i и β_i, C_i и γ_i, D_i и δ_i, E_i и ε_i, а также четверки графов Петерсена, получаемые из предыдущих автоморфизмами типа последнего на стр. 40.

Вообще интересна такая группа автоморфизмов всего графа — можно ли для этой группы дать простое описание?

Можно-ли обобщить структуру этого графа: указать принцип соединения рёбрами каких-то специальных 2-блоков для получения новых 2-блоков? Обобщенные графы Петерсена, т.е. $2\,C_{2k+1}$, вершины которых соединены еще одним паросочетанием, не геодезические, по меньшей мере для небольших k. Есть-ли простое доказательство этого? Как показывает граф Кукса $p=7$, если взять большее число 2-блоков (C_5 или графов Петерсена) то их соединение может дать 2-блок. Особенно интересным было бы получение 2-блоков с произвольно большим б — этих пособий или по другому (и с некоторыми сочетаниями свойств: отсутствие вершин 2 степени и (или) треугольников, все вершины центры — или не все, граф однороден или нет. и т.п.)....

116479

При исследовании г-графов приходится одновременно работать с многими объектами и понятиями. Поэтому убедительная просьба: хорошо продумать обозначения и последовательные обозначения и символику (чего совершенно нет в предыдущих заметках): буквы для обозначения вершин и различных характеристик (выше были n, m, p, б!), индексов, подстановок, модули для индексов и т.д.; различные скобки для обозначения ребер, цепей, циклов в графе, циклов в подстановках и т.д. и т.п.

21.11.74.

Э.Гр.