Emanuels Grinbergs

One more geodesic graph

Facsimile of manuscript
(in Latvian)

The archive of Emanuels Grinbergs manuscripts

University of Latvia

Riga, December 2013

Annotation

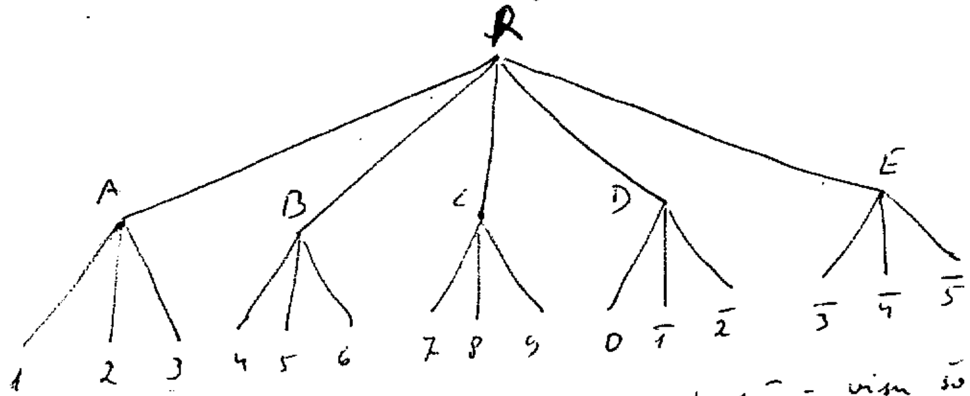
In this note, written in Latvian, a way to build geodesic graphs, graphs with unique shortest path between every two vertices, is considered. Geodesic graphs are trees, odd cycles, and nontrivial example, the graph of Petersen. The article is dated 17.4.74.

D. Zeps

dainize@mii.lu.lv

VII

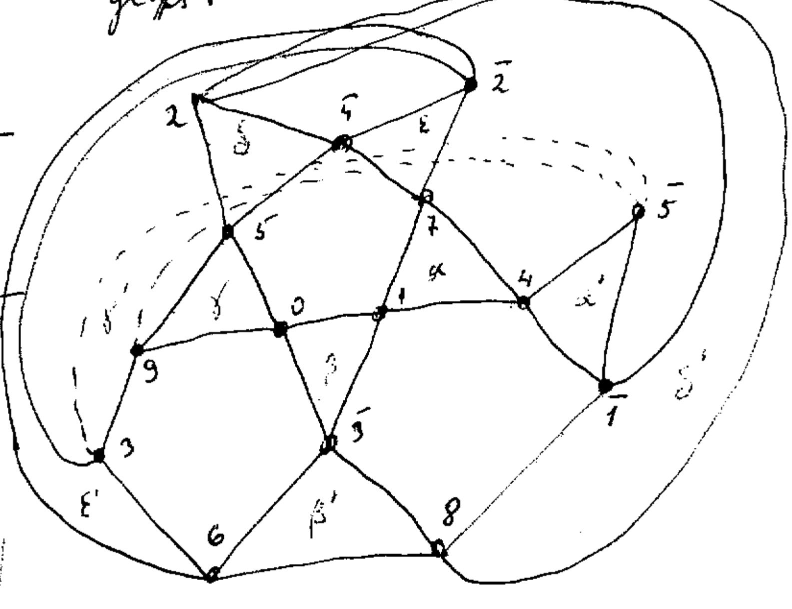
Vēl viens geodēzisks grafs G



un vēl 1, 2, … $\bar{5}$ ir saistītas savā starpā – visu šo virsotņu pārinimu saraksts:

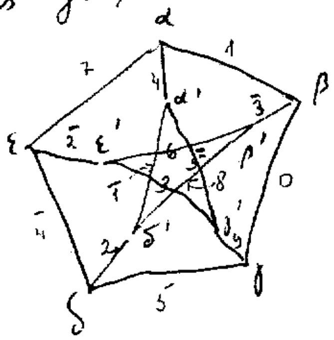
1	A	4	7	0	$\bar{3}$
2	A	5	8	$\bar{1}$	$\bar{4}$
3	A	6	9	$\bar{2}$	$\bar{5}$
4	B	1	7	$\bar{1}$	$\bar{5}$
5	B	2	9	0	$\bar{4}$
6	B	3	8	$\bar{2}$	$\bar{3}$
7	C	1	4	$\bar{2}$	$\bar{4}$
8	C	2	6	$\bar{1}$	$\bar{3}$
9	C	3	5	0	$\bar{5}$
0	D	1	5	9	$\bar{3}$
$\bar{1}$	D	2	4	8	$\bar{5}$
$\bar{2}$	D	3	6	7	$\bar{4}$
$\bar{3}$	E	1	6	8	0
$\bar{4}$	E	2	5	7	$\bar{2}$
$\bar{5}$	E	3	4	9	$\bar{1}$

Ir 10 trijstūru – katra no 1, 2, … $\bar{5}$ ietilpst divos; šo virsotņu veidotais apvērsgrafs ir Petersena grafa šķautņu grafs! Tiešām tas ir



G_1

tā kā šķautņu grafs grafam



G_2

G, G_1 un G_2 ir pa 120 automorfismiem, ko rada, piem., šādas generējošas substitūcijas:

$$\underbrace{\underbrace{s = (1\,5\,7\,0\,\bar{4})(2\,4\,9\,\bar{2}\,\bar{3})(3\,6\,8\,\bar{1}\,\bar{5})}_{G_2}(A\,B\,C\,D\,E)}_{G_1}(R)$$

$s' = $ [illegible]

$$t = (1)(2\,3)(4)(5\,6)(7)(8\,9)(0\,\bar{3})(\bar{1}\,\bar{5})(\bar{2}\,\bar{4})(A)(B)(C)(D\,E)(R)$$

$t' = $ [illegible]

Kā redzams, attiecībā uz A, B, C, D, E rodas pilna simetriskā grupa S_5, tā kā vismaz $5! = 120$ automorfismu. Bet ja automorfisms atstāj uz vietas A, B, C, D, E, tad nemainās arī G_1 trijstūri – katrā ietilpst virsotnes, kas kaimiņos ar vienu no 10 trijstūriem ABC, ABD, … CDE,

$$ABC \downarrow 147,\quad ABD \downarrow 36\bar{2},\quad CDE \downarrow 7\bar{2}\bar{4}$$

tā tad nemainās ne šie trijstūri, ne arī iek 2 no tiem kopīgās virsotnes, tā tad visas G_1 virsotnes un automorfisms ir identitāte.

R automorfismos nevar mainīties – tam vienīgam kaimiņos 5 virsotnes un pārējām 4.

Attālumu vektori: R (5; 15; 0 . .)

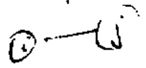
A, B, . E (4; 16; 0 . .)

1, 2, . $\bar{5}$ (5; 15; 0 . .)

Te atkal parādās Petersens, gan drusku apslēptā veidā – vai tas ir gadījums, vai neizbēgami? Es meklēju geodētiskus grafus ar diametru 2. Tiem katram virsotņu pārim ir jābūt

001045

$$a_{ij} + (1-a_{ij}) \sum_{\substack{k\neq i \\ k\neq j}} a_{ik} a_{kj} = 1, \quad i\neq j \qquad (1)$$

vai nu  vai  tieši vienam k

Saskaitot visas šādas sakarības, dabūjam

$$n(n-1) - 2m - 2\Lambda + 6\Delta = 0; \qquad (2)$$

pārbaudei var pārliecināties, ka tas ir spēkā pagaidām zināmiem grafiem, piem.:

pilnā ⟨n⟩ $m = \frac{n(n-1)}{2}$, $\Lambda = n\cdot\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, $\Delta = \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

 $n=7,\ m=9,\ \Lambda=15,\ \Delta=1 \to 42-18-36+6=0$

Petersens $n=10,\ m=15,\ \Lambda=30,\ \Delta=0 \to 90-30-60=0$

G no 1.lp. $n=21;\ 2m = 1\cdot5 + 5\cdot4 + 15\cdot5 = 100$

$\Lambda = 16\binom{5}{2} + 5\binom{4}{2} = 16\cdot10 + 5\cdot6 = 190$

$\Delta = 10$

$\Big\}\ 420-100-380+60=0$

✱ $n=m+1,\ 2\Lambda = m(m-1),\ \Delta=0 \to (m+1)m - 2m - m(m-1) = 0$.

(1) tipa sakarības geodēziskam grafam pastāvē stingri atkarībā ar pilnāko diametru δ. Ja δ = 1, protams $a_{ij} = 1$, $i\neq j$.

Ar δ=2 līdz (1). Ja δ = 3, mazi klāt locekļi, kas ir teic, ka ir tieši viena ķēde ar garumu 3, jā nav īsākas:

$$a_{ij} + (1-a_{ij})\sum_{\substack{k\neq i\\ k\neq j}} a_{ik}a_{kj} + (1-a_{ij})\prod_{\substack{k\neq i\\ k\neq j}}(1-a_{ik}a_{kj})\cdot\sum_{\substack{s\neq t\\ \text{un abi}\\ \neq i,j}} a_{is}a_{st}a_{tj} = 1,\ i\neq j \quad (4)$$

Ja $i=1$, $j=2$, tā augstākās pakāpes loceklis būs ~~[illegible]~~

$$(-1)^{n-1}\, a_{12}\cdot \underbrace{a_{13}a_{14}a_{15}\cdots a_{1n}}_{n-2}\,\underbrace{a_{23}a_{24}\cdots a_{2n}}_{n-2}\Big(2\sum_{2<s<t} a_{st}\Big),$$

jo katrs šāds a_{st} piedalās locekļos $a_{1s}a_{st}a_{t2}$ un $a_{1t}a_{ts}a_{s2}$ un faktoros $a_{1s}\,a_{t2}\,a_{1t}\,a_{s2}$ uzreiz.

Pakāpe sanāk $2(n-1)$.

Ar $\delta = 4$ reizinājums, kas izteic, ka ir 1 ķēde ar garumu 4, jā nav īsākas, ar $i=1$, $j=2$ izskatīsies

$$(1-a_{12})\prod(1-a_{1k}a_{k2})\cdot\prod(1-a_{1s}a_{st}a_{t2})\cdot\sum a_{1\alpha}a_{\alpha\beta}a_{\beta\gamma}a_{\gamma 2}$$

ar attiecīgiem mainīgo indeksu komplektiem. Atverot
le pirms saīsināšanas laicam pa-
visas iekavas
rādīsies jau visu $\frac{n(n-1)}{2}$ lielumu a_{ij} reizinājums, tā ka maksimālo
bet būs arī daudzas saīsināšanas,
pakāpi uzreiz pateikt nevar.

Vai rēķināt šīs determinantus, jums nepazīstamos koeficientus, kā kombinējot datus (2) mazo pusi? Tad vai kāds (piem. es) mēģināt interpretēt (4) summu u.t.t. — vienkārši summā samērā viegli pārbaudāms nepieciešams nosacījums grafa ģeodēziskumam? Tāds pats ir $\square - 3\triangle = 0$

17.4.74.