Emanuels Grinbergs

On threeconnected graphs with unique Hamiltonian cycle

Facsimile of manuscript
(in Russian and Latvian)

The archive of Emanuels Grinbergs manuscripts

University of Latvia

Riga, December 2013

Annotation

This draft article in three pieces (in Russian and Latvian) considers threeconnected graphs with unique Hamiltonian cycle. A construction how to get such nonplanar graphs is given. With the use of the graph of Petersen a nonplanar graph with unique Hamiltonian cycle is built. The date on the last page 19.10.79.

See the completed article vixra.org/pdf/1001.0031v1.pdf.

D. Zeps

dainize@mii.lu.lv

Гринберг Э. Я.

О трехсвязных графах с единственным гамильтоновым циклом.

000010

В дальнейшем словом граф обозначается связный неориентированный граф без петель. Рассматриваемые упорядоченные тройки вершин графа всегда упорядоченные. Одногамильтоновый (1-2-граф) трехсвязный граф – трехсвязный граф с единственным гамильтоновым циклом (2-циклом). Вопрос о существовании таких графов поставил Д. Зейс. Ниже указан один способ построения таких графов, трехсвязных по ребрам.

Будем говорить, что в графе G тройка вершин x, y, z образует специальную тройку (с-тройку) $\{x, y, z\}$, если

A1) существует только одна гамильтоновая цепь (2-цепь) $[x, \ldots, y]$ с концевыми вершинами x и y;

A2) нет 2-цепей $[x, \ldots, z]$;

и либо

A3) G трехсвязный,

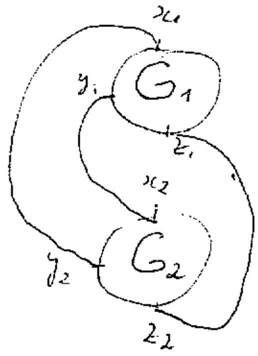
либо

A3') G не трехсвязный, но становится таким после присоединения новой вершины t и рёбер $[t,x]$, $[t,y]$, $[t,z]$.

~~Уточ~~ Наличие и число z-цепей $[y, \dots, z]$ не оговаривается.

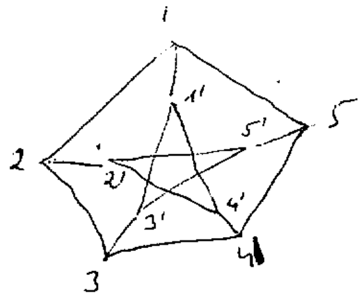
Граф G, обладающий выделенной c-тройкой $\{x,y,z\}$ будем называть заготовкой для c-тройки, либо трехсвязным, либо (не таким, но) становится таким лишь после присоединения новой вершины t ...

Пусть имеются две ~~заготовки~~ графа G_i, $i=1,2$, без общих элементов, содержащие соответственно c-тройки ~~заготовки~~ $\{x_i, y_i, z_i\}$. Сцепление этих заготовок — это граф G, полученный из G_i путём добавления рёбер $[x_1,y_2]$ $[x_2,y_1]$, $[z_1,z_2]$.



Этот граф G одногамильтоновый. Действительно, он имеет 2-цикл, проходящий через рёбра $[x_1,y_2]$, $[x_2,y_1]$ и 2-цепи в G_1, G_2, оговоренные условием A1), а других 2-циклов нет: любой 2-цикл графа G содержит точно два из добавленных рёбер и по условию A2) для 2-цепи в G_1 и G_2, а в силу A2) для z_i нет 2-цепей в G_i, идущих к x_i.

Простейшие из полученных до сих пор заготовок являются модификациями графа Петерсена с вершинами i, i', $1 \le i, i' \le 5$ и ребрами $[i, i+1] \bmod 5$, $[i', i'+2] \bmod 5$ и $[i, i']$



Если добавляем ребро $[1, 3]$ и отбрасываем вершину 5 с инцидентными ей ребрами, то получаем заготовку с 9 вершинами и с-тройкой $\{1, 4, 5'\}$.

Сцепление двух таких заготовок дает 1-2-граф с 18 вершинами и ...

Другая модификация с 11 вершинами:
В графе Петерсена заменяем ребро $[1,2]$ на цепь $[1, z, 2]$. Тогда имеем с-тройку $[1, 4, z]$ (и эквивалентные ей тройки, где 4 может быть заменено на 3', 4' или 5').

Существуют и другие заготовки с 12 и более вершинами, получаемые модификациями графа Петерсена или других кубических графов без ~~треугольников~~.

Каждый 1-2-граф с 2-циклом Г содержит множество с-троек, в каждой из которых тройки $\{x, y, z\}$, ...

Все полученные до сих пор заготовки, следовательно также и 1-2-графы ~~[illegible]~~ непланарные. Возникает ряд вопросов.

Каково минимальное число вершин в 1-2-графе?

Существуют ли плоские 1-2-графы или хотя бы плоские заготовки?

Плоская заготовка, у которой все вершины с-тройки принадлежат границе одной грани, позволила бы при склеивании с изоморфной заготовкой получить плоский 1-2-граф.

~~Как известно, максимальное число рёбер у графа с n вершинами и только одним гамильтоновым циклом равно $\left[\frac{n^2}{4}\right]+1$;~~ ~~максимальное число~~ ~~графы, у которых достигается этот максимум, имеют по две вершины второй степени, следовательно двусвязны. Однако при $n \geq 22$ существуют 1-2-графы с n вершинами и числом рёбер того же порядка, именно равным $\left[\frac{(n-19)^2}{4}\right]+43$.~~

~~Если задан произвольный двусвязный граф Γ с единственным гамильтоновым циклом, ~~[illegible]~~ граф G [illegible], то присоединяя подзаготовки [illegible] образом к нему заготовки ли~~

Пусть двусвязный граф G, отличный от треугольника, имеет единственный 2-цикл Γ. В нем всегда существуют тройки вершин x, y, z, удовлетворяющие условиям А1) и А2). Если G простой цикл, то таковы тройки, где x и y смежные, а x и z несмежные. Если же G не цикл, то в нем имеется хорда $[x, z]$, т.е. ребро, не входящее в Γ, а в качестве y можно брать любой из соседей x по Γ. Сцепляя такие тройки x, y, z с тройками $\{x_1, y_1, z_1\}$ любой заготовки посредством рёбер $[x y_1]$, $[y, x_1]$, $[z, z_1]$ мы получаем новый граф G' с единственным 2-циклом Γ', не проходящим через ребро $[x, y]$. Подходящие повторные сцепления такого типа со все новыми заготовками позволяют дополнить граф G до 1-2-графа.

Как известно, максимальное число рёбер у графа с n вершинами и единственным 2-циклом равно $\left[\frac{n^2}{4}\right]+1$, причем максимальный граф двусвязный, так как содержит две вершины второй степени [1]. Если

$n \geq 22$, то такой максимальный граф с $n-18$ вершинами после подходящих сцеплений с двумя указанными заготовками с 9 вершинами даёт 1-2-граф с произвольно большим числом n вершин и $\left[\frac{(n-18)^2}{4}\right]+33$ рёбрами, т.е. при большом n получаемое число рёбер того же порядка, как и максимальное для единственного 2-цикла.

Встаёт опять вопрос о максимальном и минимальном числе рёбер у 1-2-графа с n вершинами.

$\frac{n^2}{4} - 9n + 81 = \ldots - 9n + 114$

Skeehan,

[1] J. Sheehan, Graphs with Exactly One Hamiltonian Circuit, Journal of Graph Theory, Vol 1, 37–43, (1977)
Р. ж. Мат 1978, 3, 3В491.

$E_1 = \{[v_i, v_{i+1}],\ i = 1, 2 \ldots n\}$

$E_2 = \{[v_{2i+1}, v_j],\ 2i < j < n,\ i = 1, 2, \ldots \left[\frac{n-2}{2}\right]\}$

$\{[2i+1, j],\ \ldots\ i = 1, 2, \ldots \left[\frac{n-2}{2}\right],\ 2i < j < n\}$

Трёхсвязные графы с единственным гамильтоновым циклом.

Термин граф ... В. Зейтц поставил вопрос о существовании таких графов. ~~Ниже указан~~ способ построения одного типа таких графов, трёхсвязных по рёбрам. Рассматриваются только ... (1-2-графов) графа всегда упорядочены.

Одногамильтоновым графом мы будем называть трёхсвязный граф с единственным (гамильтоновым) гамильтоновым циклом. Вопрос о существовании таких графов поставил D. Зейтс. Ниже дан один способ построения (1-2-графов) таких графов, трёхсвязных по рёбрам.

Мы будем говорить, что в графе G тройка x, y, z вершин графа G удовлетворяет условиям ~~если тройка x, y, z обладает свойством~~ ~~тройки вершин~~, тройка (x, y, z), если

А1) существует только одна гамильтонова (2-цепь) [x .. y] с концами x и y

А2) нет 2-цепей [x .. z]

А.2) Такие тройки мы назовём специальными в графе ...

А3) G трёхсвязный

~~А3)~~ или А3') G становится таковым, если добавить новую вершину t и рёбра (tx), (ty), (tz)

~~Такие~~ назовём их 2- ...

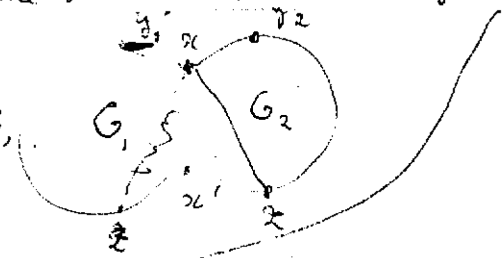
не отображаются.

Граф G, обладающий ~~свойством~~ ... {x, y, z} мы будем называть Зейтцевским ...

Пусть имеются два Зейтцевских графа G и G' [illegible] один, ... {x', y', z'}. Соединим эти графы [illegible]

можем последовательно уменьшить число вершин второй степени и(или) разделяющих элементов из двух вершин и в конце получить 1-2-граф. Действительно, пусть $\{x, x'\}$ такое множество, для которого и ребра $[x, y_1]$ (x, y_1) принадлежат Г. Следовательно, степень x не менее трех и пусть граф G распад…

где x некоторое еще хотя бы одно ребро $[x, z]$, а в G нет 2-пути $[x \ldots z]$, иначе такая цепь вместе с (x, z) образует 2-путь, отличный от Г



x, y_1, z — $x y_1 x'$

$x\, y_2\, y_1$

на части G_1 и G_2 после удаления вершин x и x' с инцидентными ребрами. Тогда y_1 и y_2

~~а вершины~~

~~Если $[x, y_1]$, $[x, y_2]$ ребра G, входящие в Г,~~ то

y_1 и y_2 ~~…~~ при этом … …,

можно считать, что y_1 принадлежит G_1, а y_2 — G_2.

существует хотя бы одна

Если $z \neq x'$, смежная с x и отличная от x',

то z входит в одну из частей, напр. G_2. Тогда

тройку $\{x, y_1, z\}$ смежных с … заменим

с с-той $\{x_3, y_3, z_3\}$, т.е. … ребра $[x, y_3]$, $[y_1, z_3]$, $[z, z_3]$

~~Получим граф с единичной~~

Для тройки … Δ_1 и Δ_2 …, …

граф … ~~…~~ … Γ', а x, x' в нем

не образуют … множества.

~~Если же~~ $z = x'$,

Следствие. Тройки x, y, z графа G согласованные … с … $\{x', y', z'\}$ заменим G' …

… эти … графа G_1 …

… ребра xy', yx', zz'. Если x, y, z …

… то G_1 — 1-2-граф … (где G — …), то …

… G' — G … 2- …

Для … …

… … xy', yx', zz' и

(отступление от Трояновской)

[illegible]

Пусть имеем двусвязный граф G (с единственным гамильтоновым циклом Г. В нем каждая [illegible] существует тройка вершин x, y, z, [illegible] удовлетворяющая A1 – A2. Если G [illegible], то такова тройка, что x и y смежны, а [illegible] несмежные. Если же G не [illegible], то в нем имеется ребро [x z], т. е. ребро, не входящее в Г, [illegible] [illegible] в [illegible] и [illegible] x и Г. Сменим такую тройку x, y, z со c-тройкой [x1, y1, z1], [illegible] [illegible] ребра [x y], [x z], [z ...], мы получим новый граф G′ с единственным гамильтоновым циклом Г′, [illegible] ребро [x, y]. Подходящими [illegible] таким образом [illegible] граф G [illegible] 1-2-графа.

Как известно, максимальное число ребер у графа с n вершинами (без единственного 2-цикла) [illegible] а максимальный граф [illegible], т. е. [illegible]. Если n ≥ [illegible], то такой минимальный граф с n-18 [illegible] [illegible] 1-2-графа с n вершинами и с 9 [illegible]

$\left[\frac{(n-18)^2}{4}\right] + 43$ ребрами. Т. е. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible] 1-2-граф с n вершинами

Graphs with exactly one hamiltonian circuit, Journal of graph Theory, Vol 1, 37–43, (1977), J. Sheehan.

Р Ж Мат 1978, 3, 3В401. J. Sheehan.

$\overline{E} = \{v_i v_{i+1} \mid i = 1, 2, \ldots, n\} + 6 + 36$

$\{v_{2i-1}, v_j\};\ 2i \le j \le n,\ i = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n-2}{2}\right]$

n = 24

Cikls [1, 2, 3 . . . 23, 24]

Hordas 1, 11 13, 23
2, 7 14, 19
3, 15 16, 21
4, 9 17, 24
5, 12 18, 22
6, 10 20, 24
8, 12

04,901

Virsotnēm 12 un 24 ir pakāpe 4,
visām pārējām – pakāpe 3.

Vienīgais netriviālais šķēlums,
kas sastāv no 3 šķautnēm un atšķeļ > 1
virsotni
1, 24 ; 3, 15 ; 12, 13.

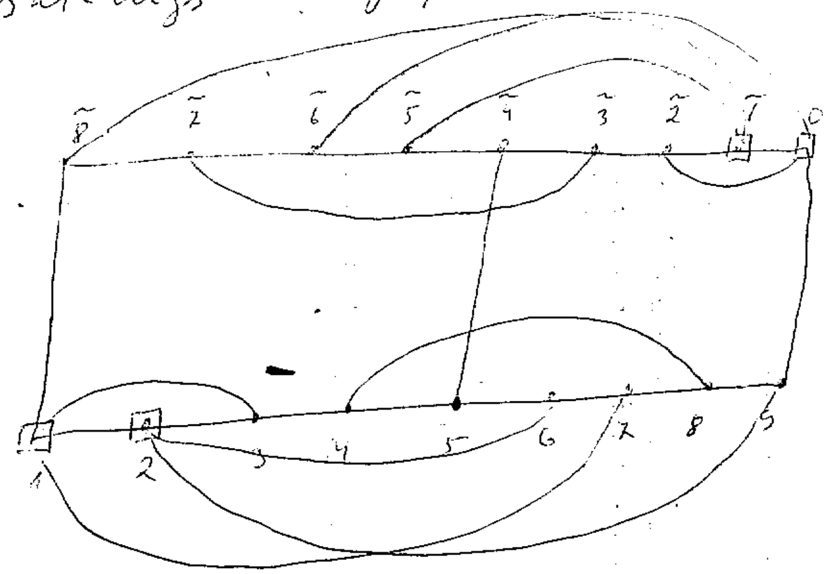
Ģ.J.

11.4.79.

Eksistē trīssakarīgs grafs ar tikai vienu Hamiltona ciklu.

Trīssakarīgs 1-4 grafs ar $n = 18$

041902



Virsotnēm 1, 2, 0, $\tilde{1}$ pakāpe 4, citām – 3.

Laiskam vismaz 4 krustojumi.

Vienīgais netriviālais automorfisms – simetrija $(1 0)(2 \tilde{1})(3 \tilde{2})(4 \tilde{3})(5 \tilde{4})(6 \tilde{5})(7 \tilde{6})(8 \tilde{7})(9 \tilde{8})$

E. J.

19.10.79

.JOB,POL1 11/22/77 15:

OBJECT TAPE
ENDOPT

b. Zepam.

11/22/77 POL1 THE GE-400 SERIES - FORTRAN ASA (MTPS)

```
      DIMENSION SGM(20),OMG(20),Q(20),B(
      SGMA(X,Y)=-0.5*SQRT(Y*(1.-COS(X)))
      OMGA(X,Y,Z)=SIN(X)*Z/4./SGMA(X,Y)
      PI=3.1415926536
      PRINT 101
101   FORMAT(1H1)
      H=1.
      ALFA=8192.
      DO 2 N=2,20
      C=2*H-1.
      C=N*ALOG(C+SQRT(C**2-1.))
      C=0.5*(EXP(C)+EXP(-C))+1.
      C=ALFA*C/(2.**(2*N-1))+1.
      A=1.+2.**(2*N-1)/ALFA
      A=ALOG(A+SQRT(A*A-1.))/N
      ACH=0.5*(EXP(A)+EXP(-A))-1.
      ASH=0.5*(EXP(A)-EXP(-A))
      N1=N/2
      DO 1 I=1,N1
      X=(2*I-1)*PI/N
      SGM(I)=SGMA(X,ACH)
      OMG(I)=OMGA(X,ACH,ASH)
      Q(I)=SGM(I)**2
      B(I)=Q(I)+OMG(I)**2
      Q(I)=B(I)/Q(I)/4.
      B(I)=B(I)**2
1     CONTINUE
      PRINT 104,N,H,C
104   FORMAT("N="I2,5X,"H="E17.11,3X,"
      PRINT 103,(SGM(I),OMG(I),Q(I),B(I)
103   FORMAT(//,15X,"SIGMA",15X,"OMEGA",
     1/(4E20.11))
      IF(2*N1.EQ.N) GO TO 2
      SGM(N1+1)=-0.5*SQRT(2*ACH)
      PRINT 102,SGM(N1+1)
102   FORMAT( E20.11)
2     CONTINUE
      STOP
      END
```