Министерство высшего и среднего специального образования
Латвийской ССР
Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет имени Петра Стучки
Вычислительный центр

Ученые записки
Латвийского государственного университета
имени Петра Стучки
том 210

ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ И ПРОГРАММ

Выпуск I

Под ред. Я.М.Барздиня

Редакционно-издательский отдел ЛГУ им. Петра Стучки
Рига 1974

ОБ УСКОРЕНИИ СИНТЕЗА И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ

Я.М.Барздинь, Е.Б.Кинбер, К.М.Подниекс

Определения и обозначения см. в [I]. Единственное отличие состоит в том, что мы рассматриваем прогнозирование и синтез только на естественной последовательности $\Omega_0 = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Поэтому можно считать, что стратегия F применяется непосредственно к начальным кускам $<\varphi(1) \ldots \varphi(n)>$ функции φ. Прогноз $F(<\varphi(1)\ldots\varphi(n)>)$ считается верным, если он равен $\varphi(n+1)$. Гипотеза $F(<\varphi(1)\ldots\varphi(n)>)$ считается верной, если она представляет собой некоторый геделев номер функции φ.

Так как у нас всегда $\Omega = \Omega_0$, то вместо $F^{GN}(\Omega,\varphi)$ и $F^{NV}(\Omega,\varphi)$ мы будем писать просто $F^{GN}(\varphi)$, $F^{NV}(\varphi)$. Для нумерованного класса (U,τ) и стратегии F вводятся величины:

$$F^{GN}_{U,\tau}(n) = \max_{1\le i\le n} F^{GN}(\tau_i), \quad F^{NV}_{U,\tau}(n) = \max_{1\le i\le n} F^{NV}(\tau_i).$$

Их можно рассматривать как своего рода сигнализирующие функции, характеризующие соответственно "скорость" предельного синтеза и "скорость" прогнозирования.

Нас будут интересовать асимптотики роста (монотонных) функций $F^{GN}_{U,\tau}(n)$, $F^{NV}_{U,\tau}(n)$. Теоремы I, 2 работы [I] показывают, что для некоторых нумерованных классов существуют о.р. стратегии, асимптотически оптимальные в смысле величины F^{NV} (этот оптимум в конкретном случае теоремы I имеет вид $\log_2 n$). Теоремы 3, 4 из [I] показывают, что аналогичный факт имеет место для F^{GN}

Возникает вопрос: имеет ли место аналогичная ситуация в случае л ю б о г о нумерованного класса (U,τ)? Оказывается, что это не так: для некоторых (U,τ) можно доказать своего рода аналог теоремы ускорения М.Блюма [2].

Доказательство этого факта соответственно для предельного синтеза и прогнозирования составляет содержание настоящей статьи.

Будем говорить, что для синтеза нумерованного класса (U,τ) имеет место абсолютная теорема ускорения (АТУ), если для любой о.р.ф. $\tau(x)$ и любой о.р. стратегии F, предельно синтезирующей класс U, можно построить такую о.р. стратегию G, также предельно синтезирующую U, что

$$\forall_n^\infty \ \tau\left(G_{U,\tau}^{GN}(n)\right) \le F_{U,\tau}^{GN}(n). \qquad (1)$$

Аналогично будем говорить, что для прогнозирования нумерованного класса (U,τ) выполняется АТУ, если для любой о.р.ф. $\tau(x)$ и любой о.р. стратегии F можно построить о.р. стратегию G такую, что

$$\forall_n^\infty \ \tau\left(G_{U,\tau}^{NV}(n)\right) \le F_{U,\tau}^{NV}(n). \qquad (2)$$

Теорема об ускорении называется "абсолютной" потому, что для одного и того же нумерованного класса здесь достигается ускорение любого порядка $\tau(x)$. (В теореме Блюма для каждой $\tau(x,y)$ строилась своя функция).

Сначала докажем простую лемму, которой будем неоднократно пользоваться в дальнейшем.

ЛЕММА. Для синтеза (прогнозирования) нумерованного класса (U,τ) выполняется абсолютная теорема ускорения, если и только если выполняются условия:

а) невозможна о.р. стратегия F такая, что $F_{U,\tau}^{GN}(n) = O(1)$ (соответственно $F_{U,\tau}^{NV}(n) = O(1)$);

б) для любой монотонной неограниченной о.р.ф. $f(n)$ найдется о.р. стратегия G, предельно синтезирующая (прогнозирующая) класс U, такая, что $\forall_n^\infty$ $G_{U,\tau}^{GN}(n) \le f(n)$ (соответственно $G_{U,\tau}^{NV}(n) \le f(n)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО мы проведем для предельного синтеза; в случае прогнозирования рассуждения аналогичны.

НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть для синтеза нумерованного класса (U,τ) имеет место АТУ. Тогда выполнение условия а) очевидно.

Для доказательства б) возьмем монотонную неограниченную о.р.ф. $f(n)$. Легко построить о.р. стратегию F со свойством

$$\forall n \ F_{U,\tau}^{GN}(n) \le n \qquad (3)$$

(F работает, перебирая последовательно все функции $\tau_1, \tau_2, \dots$). Затем найдем о.р.ф. $\tau(x)$ со свойством

$$\forall x \forall n \left(\tau(x) \le n \to x \le f(n)\right). \qquad (4)$$

Тогда, по предположению, существует о.р. стратегия G со свойством:

$$\forall_n^\infty \ \tau\left(G_{U,\tau}^{GN}(n)\right) \le F_{U,\tau}^{GN}(n). \qquad (5)$$

Теперь (3), (4), (5) дают вместе:

$$\forall_n^\infty \ G_{U,\tau}^{GN}(n) \le f(n),$$

что и требовалось.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть для нумерованного класса (U,τ) выполняются условия а),б). Возьмем некоторую о.р. стратегию F, которая предельно синтезирует класс U, и произвольную о.р.ф. $\tau(x)$. Сразу же перейдем к монотонной функции $\tau(x) = \max_{y \le x} \tau(y)$.

Если применять стратегию F параллельно ко всем функциям τ_i, подсчитывая для каждой число изменений гипотез, мы сможем легко построить монотонную неограниченную о.р.ф. $f(n)$ такую, что

$$\forall n \ F_{U,\tau}^{GN}(n) \ge f(n) \qquad (6)$$

(ведь по условию а) $F_{U,\tau}^{GN}(n) \to \infty$).

Затем можно найти также монотонную неограниченную функцию $g(n)$ со свойством:

$$\forall_n^\infty \ z' g(n) \leqslant f(n). \tag{7}$$

По условию б) найдется о.р. стратегия G, предельно синтезирующая класс U такая, что:

$$\forall_n^\infty \ G_{U,\tau}^{GN}(n) \leqslant g(n).$$

Отсюда, учитывая, что $z \leqslant z'$, а z' – монотонна, получаем:

$$\forall_n^\infty \ z\left(G_{U,\tau}^{GN}(n)\right) \leqslant z' g(n),$$

что вместе с (6), (7) дает

$$\forall_n^\infty \ z\left(G_{U,\tau}^{GN}(n)\right) \leqslant F_{U,\tau}^{GN}(n).$$

Лемма доказана.

Ускорение предельного синтеза.

ТЕОРЕМА I. Если нумерованный класс (U,τ) обладает свойствами:

а) предикат $P(i,j) \equiv (\tau_i = \tau_j)$ рекурсивен,

б) невозможна о.р. стратегия F такая, что $F_{U,\tau}^{GN}(n) = O(1)$

то для синтеза (U,τ) имеет место абсолютная теорема ускорения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся леммой. Чтобы обеспечить условия ее применимости, возьмем произвольную монотонную неограниченную функцию $f(n)$ и будем строить для нее следующую о.р. стратегию F.

Используя возможность нумерации τ и рекурсивность предиката $\tau_i = \tau_j$ для каждого n можно эффективно найти число $z(n)$ такое, что две функции $\tau_i(x), \tau_j(x)$ $(i,j \leqslant n)$ либо полностью совпадают, либо отличаются уже при некотором $x \leqslant z(n)$. (можно считать, что $z(n) < z(n+1)$).

Пусть теперь стратегия F получает последовательность значений функции φ. Сначала F находит число n_1

такое, что $f(n_1) > 1$ и затем полагает для всех $x \leqslant z(n_1) - 1$

$$F(<\varphi(1)\ldots\varphi(x)>) = 0.$$

Далее, для вычисления следующей гипотезы F сравнивает функции $\varphi(x), \tau_1(x), \ldots, \tau_{n_1}(x)$ при $x \leqslant z(n_1)$. Ясно, что для этих x φ может совпадать не более чем с одной из функций $\tau_1, \ldots, \tau_{n_1}$. Если ни с одной из них φ не совпадает, полагаем $F(<\varphi(1)\ldots\varphi z(n_1)>)$ = предыдущей гипотезе. Если i – наименьший номер совпадения, полагаем $F(<\varphi(1)\ldots\varphi z(n_1)>) = d(i)$, где $d(x)$ – о.р.ф., сводящая нумерацию τ к геделевской нумерации. Далее F "итерирует" последнюю гипотезу до $x = z(n_2) - 1$, где n_2 – такое число, что $n_2 > n_1 \ \& \ f(n_2) > 2$. И опять, чтобы определить $F(<\varphi(1)\ldots\varphi z(n_2)>)$, стратегия сравнивает функции $\varphi(x), \tau_1(x), \ldots, \tau_{n_2}(x)$ при $x \leqslant z(n_2)$ и т.д.

Стратегия F определена. Нетрудно убедиться, что F предельно синтезирует класс U.

Если $n \geqslant n_i$ и оказалось, что $\varphi = \tau_i \ \& \ i \leqslant n$, то F на φ будет менять гипотезу возможно лишь в таких точках $x = z(n_1), \ldots, z(n_k)$, где $n_k \leqslant n < n_{k+1}$, после чего наступит стабилизация на геделевском номере функции φ. В таком случае для числа изменений гипотезы должно выполняться неравенство

$$F_{U,\tau}^{GN}(n) \leqslant k < f(n)$$

(так как $f(n_k) > k$ и f монотонна). Итак, условие б) леммы выполнено, поэтому из нее следует утверждение теоремы I.

Согласно одной теореме Фридберга [3] (см.также [4]), каждый бесконечный эффективно перечислимый класс о.р.ф. имеет однозначную вычислимую нумерацию. Но для такой нумерации предикат $\tau_i = \tau_j$ рекурсивен. Поэтому из теоремы I вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Для каждого нетривиального (условие б) теоремы I) эффективно перечислимого класса U о.р.

функций существует вычислимая нумерация τ такая, что для синтеза (U,τ) выполняется абсолютная теорема ускорения.

Отсюда следует также, что справедливость нижней оценки $\log_2 n - O(1)$ в теореме 4 из [I] существенно опирается на специальный выбор нумерации τ. Для однозначной нумерации класса U этой теоремы имеет место АТУ.

П р о б л е м а   у с к о р е н и я   п р о г н о з и р о в а н и я.

Для прогнозирования абсолютная теорема ускорения также может выполняться, но только в очень редких случаях. Область поиска таких случаев ограничивается теоремой 2.

ТЕОРЕМА 2. Если для прогнозирования нумерованного класса (U,τ) выполняется абсолютная теорема ускорения, то существует (нерекурсивная) стратегия H такая, что $H^{NV}_{U,\tau}(n) = O(1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $p \times q$ – таблицей класса (U,τ) назовем таблицу чисел $\tau_i(x)$, где $i \le p$, $x \le q$. Всевозможные стратегии H, действуя в пределах $p \times q$ – таблицы, дают только конечное число вариантов распределения ошибок по функциям $\tau_1,\ldots,\tau_p$ до $x = q$. Все эти варианты можно эффективно перебрать и найти таким образом число $s(p,q)$ такое, что:

а) любая стратегия H делает в некоторой строке $p \times q$ таблицы (U,τ) не менее $s(p,q)$ ошибок;

б) найдется стратегия H_0, которая во всех строках этой таблицы делает не более $s(p,q)$ ошибок.

Ясно, что функция $s(p,q)$ общерекурсивна и монотонна по p и q. Очевидно также, что для любой стратегии H:

$$\forall p \forall q \;\; H^{NV}_{U,\tau}(p) \ge s(p,q). \qquad (8)$$

Поскольку существует о.р. стратегия F со свойством $F^{NV}_{U,\tau}(p) \le p$, то при фиксированном p функция $s(p,q)$ будет

ограниченной. Поэтому, если эта функция в целом была бы все же неограниченной, то можно было бы найти о.р.ф. $t(p)$ такую, что $s(p,t(p)) \to \infty$ монотонно. Но это, в силу (8), означает, что нарушено условие б) леммы.

Таким образом, если для прогнозирования (U,τ) имеет место АТУ, то функция $s(p,q)$ ограничена: $\forall p \forall q \; s(p,q) \le C$.

Теперь мы можем доказать существование требуемой стратегии H (она будет обязательно нерекурсивной в силу условия а) леммы).

В силу $s(q,q) \le C$ для каждого q непусто множество $\tilde{H}_q$ тех стратегий, которые в строках $q \times q$ -таблицы (U,τ) делают не более C ошибок. $\tilde{H}_q$ разбивается на конечную систему классов, где в один класс попадают стратегии, неотличимые с точки зрения их действия на $q \times q$ – таблице. Обозначим эту систему следующим образом: $\{\tilde{H}^1_q, \ldots, \tilde{H}^{k_q}_q\}$. Легко видеть, что

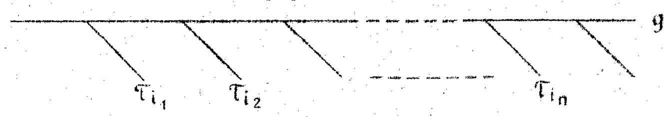
$$\forall k \le k_{q+1} \; \exists l \le k_q \;\; \tilde{H}^k_{q+1} \subseteq \tilde{H}^l_q .$$

Отсюда по теореме компактности для конечно-ветвящихся деревьев получаем, что существует стратегия H со свойством:

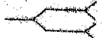
$$\forall q \; \exists k \le k_q \;\; H \in \tilde{H}^k_q$$

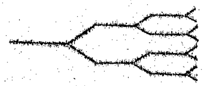
или просто $H \in \tilde{H}_q$ для всех q. По определению $\tilde{H}_q$ стратегия H делает на любой $q \times q$ -таблице (U,τ) не более C ошибок, поэтому $H^{NV}_{U,\tau}(q) = O(1)$, что и требовалось доказать.

Теорема 2 указывает, таким образом, в какой примерно области можно искать нумерованные классы, для прогнозирования которых может выполняться АТУ. Простейшим типом классов этой области будут классы со следующим деревом:



Назовем такие классы 1 -классами ("ствол" дерева – функция g может входить в класс, но не обязательно). Таким образом, если $\mathcal{U}$ – 1 -класс со "стволом" g, то из $\varphi, \psi \in \mathcal{U} \,\&\, (\forall x < n\ \varphi(x) = \psi(x) = \varphi(x)) \,\&\, (\varphi(n) = \psi(n) \neq g(n))$ следует, что $\varphi = \psi$.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Легко видеть, что некоторое дерево функций будет деревом 1 -класса, если и только если это дерево не содержит поддеревьев вида  . Если дерево функций класса $\mathcal{U}$ не содержит поддеревьев вида



этот класс называется 2 -классом, и так далее. Нетрудно доказать, что для всякого t -класса найдется стратегия H, прогнозирующая все функции этого класса с числом ошибок $\leqslant t$. (Однако даже в случае эффективно перечислимого 1 -класса эта стратегия может и не быть рекурсивной, см. теорему 4). Верно и обратное: если существует H со свойством $H^{NV}(\varphi) \leqslant C$ для всех $\varphi \in \mathcal{U}$, то $\mathcal{U}$ есть t -класс для некоторого t.

Теорема 3 показывает, что семейство всех эффективно перечислимых 1 -классов распадается на два подсемейства: "тривиальные" классы и классы, для прогнозирования которых имеет место АТУ. (Теорема 4 покажет, что второе подсемейство непусто).

ТЕОРЕМА 3. Если нумерованный класс $(\mathcal{U}, \tau)$ обладает свойствами:

а) $\mathcal{U}$ является 1 -классом,

б) невозможна о.р. стратегия F такая, что $F^{NV}_{\mathcal{U},\tau}(n) = O(1)$,

то для прогнозирования $(\mathcal{U}, \tau)$ имеет место абсолютная теорема ускорения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся леммой. Возьмем в качестве $f(n)$ произвольную монотонную неограниченную о.р.ф. и будем строить требуемую стратегию F.

Поскольку $\mathcal{U}$ – бесконечный 1 -класс (условие б), то по нумерации τ можно эффективно найти "ствол" дерева класса $\mathcal{U}$ – некоторую о.р.ф. g. В самом деле: если $\tau_i(x) = \tau_j(x)$ при $x \leqslant n$ и $\tau_i(n+1) \neq \tau_j(n+1)$, то $g(x) = \tau_i(x)$ для $x \leqslant n$. Все пары (i,j) такие, что $\tau_i \neq \tau_j$ можно эффективно перечислить, и, следовательно, так как $\mathcal{U}$ бесконечен, функцию $g(x)$ можно вычислить на всех x.

Теперь, имея функцию g, определяем действие стратегии F на функции φ следующим образом: если при $x \leqslant n$ $\varphi(x) = g(x)$, то полагаем $F(<\varphi(1) \ldots \varphi(n)>) = g(n+1)$.

При первой же ошибке (показывающей, что $\varphi \neq g$) берем данную о.р.ф. $f(n)$ и находим возрастающую о.р.ф. $h(x)$ со свойством

$$\forall n\ \ h(f(n) \dot{-} 1) \geqslant n. \qquad (9)$$

Чтобы теперь определить прогноз $F(<\varphi(1) \ldots \varphi(m)>)$, ищем наименьшее $i \leqslant h(m)$ такое, что $\tau_i(x) = \varphi(x)$ при $x \leqslant m$. Если нашли, то полагаем

$$F(<\varphi(1) \ldots \varphi(m)>) = \tau_i(m+1), \qquad (10)$$

если такого i не существует, пусть прогноз будет каким угодно, например, 0. Стратегия F определена полностью.

Подсчитаем число ошибок, которые F допустит при прогнозировании функции τ_n. Если $\tau_n = g$, то ошибок, разумеется, не будет. Если же $\tau_n \neq g$, то первая ошибка будет допущена в прогнозе первого значения $\tau_n(m_0)$, не равного $g(m_0)$. С этого момента наступает "период сомнительных прогнозов", который кончается как только m достаточно велико, а именно: $h(m) \geqslant n$. В самом деле, если $m \geqslant m_0 \,\&\, h(m) \geqslant n$, то прогноз (10) не может дать ошибку: ведь $\mathcal{U}$ есть 1 -класс, $\tau_n(m_0) \neq g(m_0)$, и поэтому никакое i со свойством $\tau_i \neq \tau_n$ не попадает в (10).

Итак: $F^{NV}(\tau_n) \leqslant 1 + \min\{m \mid h(m) \geqslant n\}$.
Но из (9) следует, что $f(n) \dot{-} 1 \in \{m \mid h(m) \geqslant n\}$, поэтому

$$F^{NV}(\tau_n) \leqslant 1 + (f(n) \dot{-} 1),$$

и, наконец, $\overset{\infty}{\forall} n\ F^{NV}_{\mathcal{U},\tau}(n) \leqslant f(n)$.

Для любой $f(n)$ можно построить такую F. Теперь, используя лемму, получаем утверждение теоремы 3.

ТЕОРЕМА 4. Существует нумерованный класс $(\mathcal{U}', \tau')$ такой, что:

а) $\mathcal{U}'$ является 1-классом

б) невозможна о.р. стратегия F со свойством $F^{NV}_{\mathcal{U}',\tau'}(n) = O(1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем диагональную функцию $\varphi_x(x)$ и некоторое эффективное перечисление ее графика: $<x_1, y>$, $<x_2, y_2>, \ldots$. Тогда τ'_n определяется как последовательность нулей и единиц:

$$\tau'_n = 0^{x_n} \alpha_1 \ldots \alpha_k 0^{\infty},$$

где $\alpha_1 \ldots \alpha_k$ суть двоичная запись числа y_n.

Таким образом, определен класс $\mathcal{U}'$, его вычислимая нумерация τ'. Очевидно, $\mathcal{U}'$ является 1-классом, его дерево имеет "ствол" $g = 0^{\infty}$.

Допустим теперь от противного, что существует о.р. стратегия F и число t такое, что

$$\forall n\ F^{NV}(\tau'_n) \leqslant t. \tag{II}$$

Для каждого x построим следующее двоичное слово $\beta_1 \ldots \beta_{t+1}$:

$$\begin{aligned} &F(0^x 1) = 1 - \beta_1, \\ &F(0^x 1 \beta_1) = 1 - \beta_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &F(0^x 1 \beta_1 \ldots \beta_t) = 1 - \beta_{t+1}. \end{aligned} \tag{I2}$$

Число с двоичным разложением $1\beta_1 \ldots \beta_{t+1}$ обозначим через $h(x)$. Очевидно, $h(x)$ - о.р.ф. от x (в силу того, что F - о.р. стратегия). Но тогда оказывается, что

$$\forall x\ \varphi_x(x) \neq h(x). \tag{I3}$$

В самом деле, если $\varphi_x(x) = h(x)$, то функция $0^x 1 \beta_1 \ldots \beta_{t+1} 0^{\infty} \in \mathcal{U}'$, однако F делает (в силу (I2)) на этой функции $\geqslant t+1$ ошибок, что противоречит (II).

Но (I3) также представляет собой противоречие: для некоторого a имеем $h = \varphi_a$ и, далее, $\varphi_a(a) \neq h(a)$ или $\varphi_a(a) \neq \varphi_a(a)$.

Поэтому невозможна о.р. стратегия F со свойством $F^{NV}_{\mathcal{U}',\tau'}(n) = O(1)$. Теорема доказана.

Теоремы 3, 4 вместе дают

СЛЕДСТВИЕ. Существует эффективно перечислимый класс (даже 1-класс) $\mathcal{U}'$ такой, что при любой вычислимой его нумерации τ для прогнозирования нумерованного класса $(\mathcal{U}', \tau)$ имеет место абсолютная теорема ускорения.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Согласно теореме 3, всякий эффективно перечислимый 1-класс либо тривиален, либо для его прогнозирования выполняется АТУ (независимо от выбора нумерации). Однако в случае 2-классов (см. замечание I) это уже не так. Подходящая модификация доказательства теоремы 4 из [I] позволяет построить нумерованный класс $(\mathcal{U}, \tau)$ такой, что:

I) $\mathcal{U}$ является 2-классом,

2) Для всякой о.р. стратегии F найдется константа C такая, что $\forall n\ F^{NV}_{\mathcal{U},\tau}(n) \geqslant \log_2 n - C$.

Класс $\mathcal{U}$ нетривиален, однако для прогнозирования $(\mathcal{U}, \tau)$ АТУ не выполняется (условие б) леммы нарушено, например, при $f(n) = \frac{1}{2} \log_2 n$). С другой стороны, анализ доказательства теорем 2, 3 показывает, что если нумерованный класс $(\mathcal{U}, \tau)$ обладает свойствами

I) $\mathcal{U}$ является t-классом для некоторого $t \geqslant 2$,

2) предикат $\tau_i \equiv \tau_j$ рекурсивен,

3) невозможна о.р. стратегия F такая, что $F^{NV}_{U,\tau}(n) = O(1)$,

то для прогнозирования (U, τ) выполняется АТУ. Таким образом, для каждого нетривиального t -класса U найдется нумерация τ (в качестве τ можно взять однозначную нумерацию U) такая, что для прогнозирования (U, τ) имеет место АТУ.

Основные результаты этой статьи сформулированы без доказательств в [5]. Постановки задач и теорема I принадлежат Я.М.Барздиню, теоремы 2, 3, 4 доказаны К.П.Подниексом и Е.Б.Кинбером.

ЛИТЕРАТУРА

I. Барздинь Я.М., Фрейвалд Р.В. Прогнозирование и синтез эффективно перечислимых классов функций.- Настоящий сборник, стр. IOI-III.
2. Блюм М. Машинно-независимая теория сложности рекурсивных функций. - Сб. "Проблемы математической логики", М., I970.
3. Friedberg R. Three theorems on recursive enumeration. - "Journal of Symbolic Logic", 1958, 23, No.2.
4. Ершов Ю.Л. Теория нумераций I, Новосибирск, I969.
5. Барздинь Я.М., Подниекс К.М. К теории индуктивного вывода. - Труды симпозиума "Mathematical foundations of computer science", High Tatras, Czechoslovakia, 1973.