Министерство высшего и среднего специального образования
Латвийской ССР
Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет имени Петра Стучки
Вычислительный центр

Ученые записки
Латвийского государственного университета
имени Петра Стучки
том 210

ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ И ПРОГРАММ

Выпуск I

Под ред. Я.М.Барздиня

Редакционно-издательский отдел ЛГУ им. Петра Стучки
Рига 1974

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ НА НЕДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ МАШИНАХ ТЬЮРИНГА

Р.В.Фрейвалд, К.М.Подниекс

Уже неоднократно [I, 2] изучались вычисления на недетерминированных машинах Тьюринга, т.е. на машинах, программы которых могут содержать команды с одинаковыми левыми частями, но с разными правыми. Если процесс работы машины приводит к ситуации, которую описывает общая левая часть таких команд, то возникает возможность различных *реализаций* работы машины.

Для представления множеств недетерминированные машины применяются в двух различных смыслах.

Машина $\mathfrak{M}$ *перечисляет* множество A, если для тех и только тех x, которые принадлежат A, существует реализация работы машины $\mathfrak{M}$, начинающаяся со значения аргумента x и кончающаяся результатом 1.

Машина $\mathfrak{M}$ *распознает* множество A, если для каждого x существует реализация работы машины $\mathfrak{M}$, начинающаяся со значения аргумента x, кончающаяся результатом $\chi_A(x)$ (где $\chi_A(x)=1$, если $x \in A$; $\chi_A(x)=0$, если $x \bar{\in} A$), и, кроме того, невозможны реализации, приводящие к неверному результату.

Легко видеть, что A перечислимо на недетерминированной машине, если и только если A рекурсивно перечислимо и A распознаваемо на недетерминированной машине, если и только если A рекурсивно.

Х.Патнам [3] и Э.М.Голд [4] рассматривали т.н. предельные вычисления. Говорят, что рекурсивная функция $a(n)$ имеет предел b ($\lim\limits_{n} a(n)=b$) или, другими словами, что последовательность ее значений стабилизируется на b, если $\exists n_0 \forall n > n_0\, a(n)=b$.

В соответствии с этим множество A называется *предельно рекурсивным*, если для некоторой общерекурсивной функции $g(x,n)$ и всех x :

$$x \in A \rightarrow \lim_n g(x,n) = 1,\ x \bar{\in} A \rightarrow \lim_n g(x,n) = 0 .$$

Аналогично, A п р е д е л ь н о п е р е ч и с л и м о, если

$$x \in A \leftrightarrow \lim_n g(x,n) = 1 .$$

для общерекурсивной g .

По существу, здесь рассматриваются машины Тьюринга с двумя лентами: рабочей и выходной. В начале работы на рабочей ленте записано значение аргумента x , выходная лента пуста. На рабочей ленте находится одна обычная читающая-пишущая головка, на выходной ленте - одна только-пишущая головка, которая может стоять на месте или двигаться вправо, но не может двигаться влево. Во время работы машины эта последняя головка печатает б е с к о н е ч н у ю последовательность нулей и единиц, соответствующую значениям $g(x,n)$ при $n = 0,1,2,\ldots$.

ТЕОРЕМА I. (Патнам, Голд) а) Множество A предельно перечислимо, если и только если $A \in \Sigma_2$

б) A предельно рекурсивно, если и только если $A \in \Sigma_2 \cap \Pi_2$.

(Определения классов Σ_2, Π_2 см. [5], § I4.I).

Упомянутое представление предельного перечисления с помощью двуленточных машин заставляет признать естественным также и следующее понятие.

Множество A с л а б о п р е д е л ь н о п е р е ч и с л и м о, если существует машина $\mathfrak{M}$ такая, что $x \in A$ если и только если при значении аргумента x $\mathfrak{M}$ печатает на выходе бесконечную последовательность нулей и единиц, стабилизирующуюся на 1 . (Таким образом, слабая предельная перечислимость отличается от предельной перечислимости тем, что здесь не требуется, чтобы машина $\mathfrak{M}$ печатала на выходе бесконечную последовательность п р и л ю б о м x).

ТЕОРЕМА 2. Множество A слабо предельно перечислимо, если и только если оно представимо в виде $A = B \setminus C$, где множества $B, C \in \Sigma_2$.

(В частности, класс слабо предельно перечислимых множеств включает полностью $\Sigma_2 \cup \Pi_2$, а сам содержится полностью в $\Sigma_3 \cap \Pi_3$).

Для доказательства необходимости в теореме 2 следует убедиться, что следующие два множества входят в Σ_2 :

I) Множество B тех x , для которых машина $\mathfrak{M}$, слабо перечисляющая A , начиная с некоторого момента, не печатает на выходе нулей.

2) Множество C тех x , для которых машина $\mathfrak{M}$ печатает на выходе только конечную последовательность.

Очевидно, что $A = B \setminus C$.

Для доказательства достаточности в теореме 2 следует воспользоваться теоремой I.

Авторы задались целью изучить предельные вычисления на недетерминированных машинах. Используемые для определения таких вычислений машины отличаются от описанных выше двуленточных машин только недетерминированностью. Аналогично непредельному случаю недетерминированные машины предельного вычисления (НД МПВ) могут применяться для представления множеств в нескольких различных смыслах.

НДМПВ $\mathfrak{M}$ с л а б о п е р е ч и с л я е т множество A , если для тех и только тех x , которые принадлежат A , существует реализация работы машины $\mathfrak{M}$, начинающаяся со значения x , при которой на выходной ленте печатается бесконечная последовательность, стабилизирующаяся на 1 .

НДМПВ $\mathfrak{M}$ с л а б о р а с п о з н а е т A , если для каждого x существует реализация работы машины $\mathfrak{M}$, начинающаяся со значения x , при котором на выходной ленте печатается бесконечная последовательность, стабилизирующаяся на $\chi_A(x)$, и, кроме того, не существует реализаций, стабилизирующихся на неверном результате.

Если потребовать дополнительно, чтобы машина $\mathfrak{M}$ при любом x и при любой реализации печатала на выходе обязательно бесконечную последовательность, получается, соответственно, понятия (н е с л а б о г о) перечисления и распознавания на НДМПВ.

Оказывается, возможности "слабых предельных вычислений" на детерминированных и недетерминированных машинах значительно отличаются . (Ср.теоремы 2,3; см.также теорему I, поскольку слабое предельное распознавание на детерминированной машине совпадает с предельной рекурсивностью).

ТЕОРЕМА 3. а) Множество A слабо перечислимо на НДМПВ, если и только если $A \in \Sigma_1^1$.
б) A слабо распознаваемо на НДМПВ, если и только если $A \in \Sigma_1^1 \cap \Pi_1^1$ (т.е. если A является гиперарифметическим множеством).
(Определения классов Σ_1^1, Π_1^1 см. [5], § 16.I).

Утверждение б) выводится из а) посредством довольно просто доказываемого аналога теоремы Поста; если A и дополнение к A слабо перечислимы на НДМПВ, то A слабо распознаваемо на НДМПВ.

Доказательство необходимости утверждения а) становится достаточно простым, если предварительно несколько видоизменить определение недетерминированной машины. Грубо говоря, "элемент недетерминированности" следует вынести из программы в особый вход машины. (Это напоминает сосредоточение "элемента случайности" при синтезе вероятностных машин в специальном датчике случайных чисел, см. [6]).

"Машина с лентой недетерминированности" получается из НДМПВ $\mathfrak{M}$, если добавить особую входную ленту, на которой может быть закодирована любая бесконечная последовательность $\{s(n)\}$ натуральных чисел. На ленте расположена одна только-читающая головка. Если в такте t работа $\mathfrak{M}$ приводит к ситуации, когда есть выбор из нескольких команд, новая машина обращается к входной ленте, читает $s(t)$ и выбирает (если возможно) команду с этим номером.

Если теперь в определениях представления множеств заменить "НДМПВ" на "машина с лентой недетерминированности" и "существует реализация работы машины" - на "существует запись на входной ленте", то, как легко видеть, мы получим понятия, эквивалентные исходным.

Достаточность а) можно доказать, исходя непосредственно из Σ_1^1 -формы множества A . Некоторые упрощения вносит, однако, предварительный переход к форме:

$$x \in A \longleftrightarrow \exists Y \forall y \exists z\, R(x, y, z, Y)$$

где Y - переменная для множеств, а R - рекурсивный предикат (см. [5], упражнение 16-10).

ЗАМЕЧАНИЕ. В доказательстве достаточности а) легко добиться выполнения дополнительного свойства: при любой реализации выходная последовательность (конечная или бесконечная) состоит только из единиц.

В случае обычных (неслабых) предельных вычислений, возможности детерминированных и недетерминированных машин, однако, совпадают (ср.теоремы I, 4).

ТЕОРЕМА 4. а) Множество A перечислимо на НДМПВ, если и только если $A \in \Sigma_2$.
б) A распознаваемо на НДМПВ, если и только если $A \in \Sigma_2 \cap \Pi_2$.

Утверждение б) выводится из а) посредством подходящего аналога теоремы Поста.

Достаточность утверждения а) очевидна в силу теоремы I.

Для доказательства необходимости а) следует показать сначала, что всякое A, перечислимое на НДМПВ, представимо в виде:

$$x \in A \longleftrightarrow \exists Y \exists y \forall z R(x, y, z, Y)$$

где Y - переменная для множеств, R - рекурсивный предикат. Затем можно показать, что отсюда следует $A \in \Sigma_2$ (ср. [5], упражнение I6-9).

Теорема 3 дает любопытную характеристику гиперарифметических множеств (а также Σ_1^1 - множеств) в машинных терминах. Уже ранее машинное представление гиперарифметических множеств (вместе с Π_1^1 -множествами) было получено в терминах обобщенных машин Клини [7] (см.также [5], § I6.5). Однако эта характеристика и наша значительно отличаются. В некотором смысле ситуация здесь аналогична случаю $\Sigma_2 \cap \Pi_2$ -множеств, которые также допускают различные описания в терминах машин. С одной стороны, это - множества, распознаваемые на машинах Тьюринга с креативным оракулом, а с другой - предельно рекурсивные множества.

Можно рассмотреть также вычисление функций на НДМПВ. Полученный при этом класс слабо вычислимых частичных функций совпадает с классом всех Σ_1^1 -функций, а класс слабо вычислимых всюду определенных функций - с классом всех гиперарифметических функций.

(Несслабые) вычисления функций на НДМПВ дают класс всех Σ_2 -функций.

Некоторая "неестественность" понятия Σ_1^1 -вычислимости (отмеченная в [5], § I6.5) проявляется в нашей интерпретации так: хотя каждая НДМПВ слабо перечисляет некоторое множество (и таким образом мы получаем нумерацию этих множеств, которая оказывается изоморфной нумерации Σ_1^1 -множеств, построенной в [5], § I6.I), не всякая НДМПВ вычисляет функцию (т.е. нумерацию функций мы не получаем). Заметим, что обычный путь - через теорему об однозначности - также не может дать нумерацию Σ_1^1 -функций. Эта теорема в случае Σ_1^1 просто не имеет места, ибо

из нее следовал бы (по методу [5], § 5.7) принцип редукции, опровергнутый для Σ_1^1 в 5, § I6.5.

Вопрос о возможности "вычислимых" (т.е. сводимых к нумерации Σ_1^1 -множеств, данной в [5], § I6.I) нумераций для Σ_1^1 -функций остается, по-видимому, открытым.

ЗАМЕЧАНИЕ. Легко видеть, что сформулированные теоремы 1-4 имеют место равномерно (в смысле [5]): переходы от машин к формулам и обратно здесь всегда эффективно выполнимы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Myhill I. Linear bounded automata - Wright air Development, Tech.Note, 1960.
2. Savitch. Relationship between nondeterministic and deterministic tape complexities - "Journal of Computer and System Sciences", 1970, 4, No.2.
3. Putnam H. Trial and error predicates and the solution to a problem of Mostowski - "Journal of Symbolic Logic", 1965, 30, No.1.
4. Gold E.M. Limiting recursion - "J.Symbolic Logic", 1965, 30, No.1.
5. Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, М., I972.
6. де Леу К., Мур Э.Ф., Шеннон К., Шапиро Н. - Вычислимость на вероятностных машинах - Сборник "Автоматы", М., I956.
7. Клини С. Функционалы конечных типов, вычислимые на машинах Тьюринга - Сборник "Математическая логика и ее применение", М., I965.