ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ И ПРОГРАММ

III

Министерство высшего и среднего специального
образования Латвийской ССР

Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет имени Петра Стучки
Вычислительный центр

ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ И ПРОГРАММ

Выпуск III

Республиканский межведомственный сборник
научных трудов

Латвийский государственный университет им.П.Стучки
Рига, 1977

УДК 51.01 518.5

Начиная с данного выпуска сборник "Теория алгоритмов и программ" будет именоваться Республиканским межведомственным (межвузовским) сборником научных трудов. Это обусловлено расширением научного сотрудничества между учеными различных учреждений, институтов и других ведомсв, изучающими аналогичные проблемы.

Статьи предлагаемого сборника посвящены в основном теории индуктивного вывода. Рассмотрены также вопросы семантики программ (аппарат формального доказательства свойств программ) и теории сводимости.

Сборник рассчитан на научных работников, занимающихся или интересующихся теорией алгоритмов и программ, аспирантов и студентов.

Печатается по решению редакционно-издательского совета ЛГУ им. П.Стучки от 25 марта 1977 года

Т $\frac{20205-091у}{М\ 812(11)-77}$ 221-77

ПРЕДЕЛЬНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ МИНИМАЛЬНЫХ ГЁДЕЛЕВСКИХ НОМЕРОВ

Р.В.Фрейвалд, Е.Б.Кинбер

ВЦ ЛГУ им. П.Стучки

1. В данной статье изучается следующая задача: по последовательности значений

$$f(0),\ f(1),\ \dots,\ f(n),$$

общерекурсивной функции (о.р.ф.) f требуется в п р е д е л е найти ее минимальный номер в фиксированной гёделевской нумерации.

Предельная идентификация гёделевских номеров - задача, наиболее близкая к рассматриваемой - подробно исследовалась в [1], [2], [3], [4]. Однако методы и результаты, полученные в этих работах, к задаче предельной идентификации минимальных номеров большей частью не применимы. Решающее значение здесь, по-видимому, имеет следующее обстоятельство: возможность предельной идентификации минимальных номеров для класса функций существенно зависит от выбора гёделевской нумерации; в то же время при обычной предельной идентификации выбор гёделевской нумерации на возможность идентификации никак не влияет. Имеются и другие серьезные отличия. Например, как показано в [5], для некоторых классов, легко идентифицируемых в обычном смысле, минимальные номера нельзя предельно идентифицировать ни в какой гёделевской нумерации.

Основное внимание в данной статье уделено характеризации классов функций, для которых можно идентифицировать минимальные гёделевские номера, а также изучению некоторых свойств семейства всех таких классов, исследуется также множество гёделевских нумераций с точки зрения возможностей предельной идентификации в них минимальных номеров.

2. Под гёделевской нумерацией всюду ниже понимается главная вычислимая нумерация всех одноместных частично рекурсивных функций (ч.р.ф.). Совокупность всех гёделевских нумераций обозначим через $\mathcal{G}$

Зафиксируем некоторую канторовскую (т.е. вычислимую взаимно однозначную) нумерацию $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ всевозможных кортежей натуральных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ произвольной длины. Стратегией назовем произвольную ч.р.ф. F Для всюду определенной функции f через $f^{[n]}$ условимся обозначать начальный фрагмент f длины $n+1$.

3. Пусть $\varphi \in \mathcal{G}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Будем говорить, что стратегия F предельно идентифицирует φ -номер о.р.ф. f , если

I) для любого n значение $F(\langle f^{[n]}\rangle)$ определено и

2) предел $\lim\limits_{n\to\infty} F(\langle f^{[n]}\rangle)$ существует и равен некоторому φ-номеру функции f .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что класс U о.р.ф. предельно φ -идентифицируем, если существует стратегия F , которая предельно идентифицирует φ -номера всех функций из класса U .

Вместо $U \in GN_\varphi$ естественно писать $U \in GN$, поскольку для $\varphi, \psi \in \mathcal{G}$ $GN_\varphi = GN_\psi$.

Обозначим через $min_\varphi(f)$ минимальный номер f в нумерации φ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $h(x)$ - о.р.ф. Будем говорить, что для класса U о.р.ф. предельно идентифицируемы h -минимальные φ -номера $(U \in GN_\varphi^{h-min})$, если существует такая стратегия F , что

I) F предельно идентифицирует φ -номера всех функций из класса U ;

2) для любой $f \in U$

$$\lim_{n\to\infty} F(\langle f^{[n]}\rangle) \leqslant h(min_\varphi(f)).$$

Если $h(x) \equiv x$, то предельно идентифицируются, очевидно, в точности минимальные номера. В этом случае вместо $GN_{\varphi}^{h\text{-}min}$ будем использовать обозначение GN_{φ}^{min}

4. Обозначим через R класс всех о.р.ф.

Целью данного пункта является характеризация семейств

$$\bigcap_{\varphi \in \mathcal{G}} \; \bigcap_{h \in R} GN_{\varphi}^{h\text{-}min} \quad \text{и} \quad \bigcup_{\varphi \in \mathcal{G}} \; \bigcup_{h \in R} GN_{\varphi}^{h\text{-}min}$$

Рассмотрим сначала первое семейство. Оказывается, что в нем содержатся лишь конечные классы функций.

ТЕОРЕМА I. Для любой о.р.ф. $h(x)$ существует такая гёделевская нумерация φ что для любого класса U о.р.ф.:

$$U \in GN_{\varphi}^{h\text{-}min} \Longleftrightarrow card\,(U) < \infty.$$

Обозначим через PLR класс

$$\left\{ \psi \mid \exists g \in R \;\; \forall x (\psi(x) = \lim_{n \to \infty} g(\langle x, n \rangle)) \right\}.$$

ЛЕММА. Существует такая функция $\lambda(i,j)$, что

1) график λ принадлежит классу Π_2 иерархии Клини-Мостовского (см. [6]);
2) $\forall i \; \forall j\, (\lambda(i,j)$ определено $\Longrightarrow \lambda(i,j) = 1)$
3) $\forall i \; \exists j \leqslant i+1\, (\lambda(i,j) = 1)$
4) $\forall \psi \in PLR \; \exists i_0 \;\; \forall i \geqslant i_0 \; (\psi(i)$ определено $\Longrightarrow$ $\Longrightarrow \lambda(i, \psi(i))$ не определено).

КОММЕНТАРИЙ. Функцию $\lambda(i,j)$ удобно рассматривать как многозначное отображение $N \to N$. Условие 3) означает, что это отображение сопоставляет каждому числу i не менее одного числа, не превосходящего $i+1$. Условие 4) означает, что это отображение значительно отличается от любой функции с графиком из $\sum_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K - креативное множество (см. [6]). Пусть, далее $\mathfrak{M}_m^K$ - машина Тьюринга с оракулом K, имеющая гёделевский номер m.

Определим функцию λ

Если $j > i+1$, то $\lambda(i,j)$ не определено.

Если $j \leqslant i+1$ и существует такое $m \leqslant i$ что $\mathfrak{M}_m^K(i) = j$, то $\lambda(i,j)$ не определена.

В остальных случаях $\lambda(i,j) = 1$.

Легко убедиться, что функция λ обладает свойствами I,2,3,4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I. Пусть $\lambda(i,j)$ - функция из леммы. Из свойств I) и 2) этой функции вытекает существование такой о.р.ф. $g(i,j,t)$ что следующие два утверждения равносильны:

(а) $\lambda(i,j)$ определено,

(б) для бесконечно многих t

$$g(i,j,t) = 1.$$

Докажем теорему сначала для случая $h(x) \equiv x$ Пусть $\varphi \in \mathcal{G}$ Пусть, далее, $z(y,n)$ - такая о.р.ф., что

$$\varphi_{z(y,n)}(x) = \begin{cases} \varphi_y(x) & \text{если существует не менее чем } x \text{ таких } t \text{, что } g(y,n,t)=1 \\ \text{не определено,} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Из определения $z(y,n)$ и эквивалентности утверждений (а) и (б) легко вытекает нужное нам в дальнейшем

Утверждение А. Если φ_y - о.р.ф., то $\varphi_{z(y,n)} = \varphi_y$ в том и только в том случае, если $\lambda(y,n)$ определено.

Определим нумерацию $\tilde{\varphi}$ следующим образом.

$$\tilde{\varphi}_0 = \varphi_{z(0,0)},\ \tilde{\varphi}_1 = \varphi_{z(0,1)},\ \tilde{\varphi}_2 = \varphi_0$$

$$\tilde{\varphi}_3 = \varphi_{z(1,0)},\ \tilde{\varphi}_4 = \varphi_{z(1,1)},\ \tilde{\varphi}_5 = \varphi_{z(1,2)},\ \tilde{\varphi}_6 = \varphi_1$$

$$\tilde{\varphi}_7 = \varphi_{z(2,0)},\ \tilde{\varphi}_8 = \varphi_{z(2,1)},\ \tilde{\varphi}_9 = \varphi_{z(2,2)},\ \tilde{\varphi}_{10} = \varphi_{z(2,3)},\ \tilde{\varphi}_{11} = \varphi_2$$

Нумерация $\tilde{\varphi}$, очевидно, вычислимая. $\tilde{\varphi}$ является также гёделевской нумерацией, так как φ сводится к $\tilde{\varphi}$ с помощью функции

$$w(i) = \frac{i^2 + 7i + 4}{2}$$

Отметим, что если i - минимальный номер некоторой о.р.ф. f в нумерации φ, то, как следует из свойств 2 и 3 функции η и утверждения А, минимальным номером f в нумерации $\tilde{\varphi}$ будет некоторое число j удовлетворяющее неравенствам

$$\frac{i^2 + 7i + 4}{2} < j < \frac{(i+1)^2 + 7(i+1) + 4}{2}.$$

Пусть F - стратегия, которая предельно идентифицирует минимальные номера для о.р.ф. из некоторого класса U. Докажем, что в U не более чем конечное число о.р.ф.

Определим две вспомогательные функции:

$$\eta(i,t) = \begin{cases} 0 \text{ , если } & t = 0 \\ F(<\varphi_i(0) \dots \varphi_i(t-1)>) \text{ , если} \\ t > 0 \end{cases}$$

Используя ч.р.ф. $\eta(i,t)$, нетрудно построить такую о.р.ф. $\tilde{\eta}(i,t)$, что $\lim\limits_t \tilde{\eta}(i,t) = \lim\limits_t \eta(i,t)$ для любого i.

Пусть

$$a \dot{-} b = \begin{cases} a - b & \text{, если } a \geqslant b \\ 0 & \text{если } a < b \end{cases}$$

$$\tilde{\Psi}(i) = \lim_{t \to \infty} \tilde{\eta}(i,t)$$

$$\psi(i) = \lim_{t \to \infty} \left(\tilde{\eta}(i,t) \dot{-} \frac{i^2 + 7i + 4}{2} \dot{-} 1\right).$$

Пусть $f \in U$ Очевидно, асли $i = min_\varphi(f)$, то $\tilde{\Psi}(i) = min_{\tilde{\varphi}}(f)$. Из определений ψ и $\tilde{\Psi}$ и нумерации $\tilde{\varphi}$ следует, что

$$\tilde{\varphi}_{\tilde{\Psi}(i)} = \varphi z(i, \psi(i)).$$

Так как $\tilde{\varphi}_{\tilde{\varphi}(i)} = \varphi_i$, то, используя утверждение А, получаем, что $\mathcal{R}(i, \varphi(i))$ определено. Из свойства 4) функции $\mathcal{R}$ теперь следует, что класс $\mathcal{U}$ конечен.

Для других функций h нужно несколько изменить опре деление нумерации $\tilde{\varphi}$ Функции располагаются в этой нумерации теперь в такой последовательности:

$$\varphi_{z(0,0)}, \varphi_{z(0,1)}, \phi, \phi, \quad \phi, \varphi_0, \varphi_{z(1,0)}, \varphi_{z(1,1)},$$
$$\varphi_{z(1,2)}, \phi, \phi, \quad \phi, \varphi_1, \quad , \varphi_{z(i,0)}, \varphi_{z(i,1)}, \ldots, \varphi_{z(i,i+1)}$$
$$\phi, \phi, \quad \phi, \varphi_i,$$

где ϕ – нигде не определенная функция, и если "блок"
$\varphi_{z(1,0)}, \varphi_{z(i,1)}, \quad , \varphi_{z(i,i+1)}$
в нумерации $\tilde{\varphi}$ получил номера n , $n+1$, , $n+i+1$,
между этим блоком и функцией φ_i находится
$max\{ \quad h(n+1), \quad h(n+i+1)\}$
ункций ϕ Т... ко убедиться, что в нумерации $\tilde{\varphi}$ любой
-минимальный номер является также абсолютно минимальным. Теор ма доказана.

доказательства теоремы I получаем

СЛЕДСТВИЕ. Для любого класса о.р.ф. $\mathcal{U}$ и любой о.р.ф.

$$\mathcal{U} \in \bigcap_{\varphi \in \mathcal{G}} G N_{\varphi}^{h\text{-}min} \Longleftrightarrow card(\mathcal{U}) < \infty .$$

В частности, абсолютно минимальные номера предельно идентифицировать в ... б о й гёделевской нумерации можно лишь для конечных классов о.р.ф

Следующая теорема дает характеризацию классов, для предельная идентификация минимальных номеров воз по крайней мере в одной нумерации $\varphi \in \mathcal{G}$ Полученны ... рмулирован в терминах, инвариантных относ... ... бора ... ной гёделевской нумерации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Будем говорить, что класс о.р.ф. U предельно φ -стандартизуем с рекурсивной оценкой ($U \in LSR_\varphi$), если существуют такие о.р.ф. $G(i,n)$ и $v(i)$, что для любого i, являющегося φ -номером некоторой $f \in U$

1) $\lim\limits_{n\to\infty} G(i,n)$ существует и равен некоторому φ -номеру f

2) если j - номер f, то
$\lim\limits_{n\to\infty} G(i,n) = \lim\limits_{n} G(j,n) = \kappa$
(κ - "стандартный" или "канонический" номер);

3) в $\{G(i,0),\ G(i,1), \quad ,\}$ содержится не более $v(i)$ различных чисел.

Функция $G(i,n)$ представляет собой предельно эффективную операцию (см. [7]), аналогичную обычной эффективной операции (см. [6]).

Очевидно, если $\varphi, \psi \in \mathcal{G}$, то $LSR_\varphi = LSR_\psi$. Поэтому естественно вместо $U \in LSR_\varphi$ писать просто $U \in LSR$.

Ниже вместо $\bigcup\limits_{\varphi \in \mathcal{G}} GN_\varphi^{h\text{-}min}$ мы будем использовать обозначение $GN^{h\text{-}min}$ (для $h(x) \equiv x - GN^{min}$)

ТЕОРЕМА 2. Для любого класса о.р.ф. U

$$U \in GN^{min} \Longleftrightarrow U \in GN \ \& \ U \in LSR.$$

Заметим, что условия $U \in GN$ и $U \in LSR$ независимы. А именно, существует класс $U \in GN \setminus LSR$ и класс $V \in LSR \setminus GN$. В качестве U можно взять, например, класс о.р.ф., равных нулю со всех точках за исключением, быть может, конечного числа. Этот класс имеет вычислимую нумерацию ж) и поэтому, как доказано в [8],

---

ж) Т.е. существует двухместная о.р.ф. $n(\kappa, x)$ такая, что $U = \{U_\kappa,\ \kappa = 0,1,\dots\}$, где $U_\kappa(x) = U(\kappa, x)$

содержится в GN. С другой стороны, в [5] доказано, что $\mathcal{U} \notin GN^{min}$ Поэтому $\mathcal{U} \notin LSR$, поскольку в противном случае из теоремы 2 следовало бы, что $\mathcal{U} \in GN^{min}$ В качестве V подходит класс $\mathcal{F}_{\tilde{A}} \cup \mathcal{O}_{\tilde{A}}$ из доказательства теоремы I [9]. В этой теореме по существу доказано, что $V \notin GN$ и V предельно стандартизуем, если не заботиться о рекурсивной оценке $v(i)$. Однако незначительно изменив доказательство леммы 5 [9], такую оценку нетрудно получить. Поэтому $V \in LSR$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. $\Longrightarrow$. Пусть $\mathcal{U} \in GN_{\varphi}^{min}$ и F предельно идентифицирует минимальные φ -номера для функций из $\mathcal{U}$. Для доказательства $\mathcal{U} \in LSR$ достаточно рассмотреть функции $v(i) = i+1$ и $G(i,n)$, где

$$G'(i,n) = \begin{cases} F(\langle \varphi_i^{[n]} \rangle) & \text{если } F(\langle \varphi_i^{[n]} \rangle) \leqslant i \\ i, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$$G(i,n) = \begin{cases} G'(i,t) & \text{где } t \text{ - максимальное число, не превышающее } n \text{, такое, что каждое из чисел } G'(i,0), \quad , G'(i,t) \text{ вычислимо за } n \text{ тактов работы машины Тьюринга} \\ i & \text{если } G'(i,0) \text{ не вычислимо за } n \text{ тактов работы машины Тьюринга.} \end{cases}$$

Легко видеть, что $G(i,n)$ - о.р.ф. и предельно стандартизует $\mathcal{U}$ с рекурсивной оценкой $v(i)$

$\Longleftarrow$ Пусть $\varphi \in \mathcal{G}$, $\mathcal{U} \in GN_{\varphi}$, $\mathcal{U} \in LSR_{\varphi}$. Пусть, далее, F предельно φ -идентифицирует $\mathcal{U}$, а $G(i,n)$ - предельно φ -стандартизует $\mathcal{U}$ с рекурсивной оценкой $v(i)$

Рассмотрим три вспомогательные функции.

Ч.р.ф. $\xi(i,j)$ по определению равна $G(i,k)$, где k - ми[illegible]ное такое число, что в $\{G(i,0), G(i,1), G(i,k)\}$ более j элементов.

Далее

$$\varphi_{d(m)}(x) = \begin{cases} \varphi_m(x) & \text{, если } \exists y > x (G(m,y) = m) \\ \text{не опр., в остальных случаях.} \end{cases}$$

Наконец,

$$z(i,j) = d(\xi(i,j)).$$

Определим теперь нумерацию $\tilde{\varphi}$

$$\tilde{\varphi}_0 = \varphi_{z(0,0)}, \ \tilde{\varphi}_1 = \varphi_{z(0,1)}, \qquad \varphi_{v(0)-1} = \varphi_{z(0,v(0)-1)}, \ \tilde{\varphi}_{v(0)} = \varphi_0,$$

$$\tilde{\varphi}_{v(0)+1} = \varphi_{z(1,0)}, \ \tilde{\varphi}_{v(0)+1} = \varphi_{z(1,1)}, \ \dots, \ \tilde{\varphi}_{v(0)+v(1)} = \varphi_{z(0,v(1)-1)}, \ \tilde{\varphi}_{v(0)+v(1)+1} = \varphi_1,$$

$$\vdots$$

$$\tilde{\varphi}_{v(0)+\dots+v(i-1)+i} = \varphi_{z(i,0)}, \ \tilde{\varphi}_{v(0)+\dots+v(i-1)+i+1} = \varphi_{z(i,1)}, \dots$$

$$\tilde{\varphi}_{v(0)+\dots+v(i)+i-1} = \varphi_{z(i,v(i)-1)}, \ \tilde{\varphi}_{v(0)+\dots+v(i)+i} = \varphi_i,$$

Нумерация $\tilde{\varphi}$ является гёделевской, так как φ сводится к $\tilde{\varphi}$ при помощи функции

$$w(i) = v(0) + v(1) + \dots + v(i) + i.$$

Докажем теперь основное свойство функции $d(m)$: если $\varphi_i \in U$ то для любого m

(4.1) $$\varphi d(m) = \varphi_i \Longleftrightarrow m = \lim_{n\to\infty} G(i,n).$$

В самом деле, если $m = \lim_{n\to\infty} G(i,n)$ то $m = \lim_{n\to\infty} G(m,n)$ и $\varphi_m = \varphi_i$, так как G предельно стандартизует U. Из определения d следует, что $\varphi_{d(m)} = \varphi_m = \varphi_i$. Обратно, если $\varphi_{d(m)} = \varphi_i$, то $G(m,y) = m$ для бесконечно многих y. Следовательно, $\varphi_{d(m)} = \varphi_m = \varphi_i$ и $\lim_{n\to\infty} G(m,n) = \lim_{n\to\infty} G(i,n) = m$.

Пусть $\varphi_i \in U$. Тогда по определению G существует такое $j < v(i)$, что $\xi(i,j) = \lim_{n\to\infty} G(i,n)$. В силу (4.1)

$$\varphi_{z(i,j)} = \varphi_{d(\xi(i,j))} = \varphi_i$$

и по определению нумерации $\tilde{\varphi}$

$$\tilde{\varphi}_{v(0)+\dots+v(i-1)+i-1+j} = \varphi_i.$$

Таким образом, никакое число вида $v(0)+\dots+v(i)+i$ не может быть минимальным номером в $\tilde{\varphi}$ для функции из класса U, напротив, минимальность такой функции достигается только на функциях типа $\varphi_{z(i,j)}$.

Опишем стратегию $\tilde{F}$, предельно идентифицирующую минимальные $\tilde{\varphi}$-номера для функций из U. Пусть $f \in U$

Обозначим $G(F(\langle f^{[n]}\rangle), n)$ через $m(n)$. Для определения $\tilde{F}(\langle f^{[n]}\rangle)$ находим $m(n)$ и в течение n тактов вычисляем значения

$$
\begin{array}{llll}
 & \xi(0,0), \ \xi(0,1), & & \xi(0, v(0)-1) \\
(4.2) & \xi(1,0), \ \xi(1,1), & & \xi(1, v(1)-1) \\
 & \xi(m(n),0), \ \xi(m(n),1), & \dots, & \xi(m(n), v(m(n))-1)
\end{array}
$$

Если ни одно из этих чисел за n тактов не будет найдено, то $F(\langle f^{[n]}\rangle)=0$. Далее, пусть (i,j) – первая в этом списке такая пара, что вычисление $\xi(i,j)$ за n тактов заканчивается и $\xi(i,j)=m(n)$. Тогда $\tilde{F}$ выдает номер, который в $\tilde{\varphi}$ имеет функция $\varphi_{z(i,j)}$ т.е.

$$v(0)+v(1)+\dots+v(i-1)+i-1+j.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} F(\langle f^{[n]}\rangle)$ является φ-номером f, то $m=\lim\limits_{n\to\infty} m(n)$ также φ-номер f, т.е. $\varphi_m=f$ .. Отсюда следует, что $\tilde{m}=\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{F}(\langle f^{[n]}\rangle)$ является $\tilde{\varphi}$-номером f. Из определения функции d легко следует, что для всех (i,j) таких, что $\xi(i,j)\neq\lim\limits_{n\to\infty} m(n)$ $\varphi_{z(i,j)}\neq\varphi_m$. Итак, $\tilde{m}$ – минимальный $\tilde{\varphi}$-номер функции f. Теорема доказана.

Используя полученный в теореме 2 критерий, можно легко получить различные примеры классов из GN^{min}. Например, легко устанавливается, что в GN^{min} содержится класс всех констант (впервые этот результат с помощью другого метода был получен Я.М.Барздинем), класс о.р.ф., отличных от нуля не более чем в k точках, класс таких о.р.ф. f, что $f(0)$ является номером f (в [4] такой класс назван самоописывающимся, см.также [10]) и т.п.

Из теоремы I и того обстоятельства, что в GN^{min} имеются бесконечные классы функций (например, класс констант), вытекает

ТЕОРЕМА 3. Существуют такие гёделевские нумерации φ и ψ, что

$$GN_{\varphi}^{min} \neq GN_{\psi}^{min}.$$

Получим теперь некоторые следствия из теоремы 2.

СЛЕДСТВИЕ I. Для любого класса о.р.ф. $\mathcal{U}$ и любой о.р.ф. h со свойством $\forall x(h(x) \geqslant x)$

$$\mathcal{U} \in GN^{h\text{-}min} \Longleftrightarrow \mathcal{U} \in GN \,\&\, \mathcal{U} \in LSR.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация $\Longrightarrow$ получается так же, как в доказательстве теоремы 2. Импликация $\Longleftarrow$ следует из импликации $\Longleftarrow$ теоремы 2 и условия $\forall x(h(x) \geqslant x)$

СЛЕДСТВИЕ 2. $\bigcup\limits_{h \in R} GN^{h\text{-}min} = GN^{min}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое утверждение вытекает из следствия I и теоремы 2.

По аналогии с понятием предельной стандартизации с рекурсивной оценкой можно рассматривать понятие предельной идентификации с рекурсивной оценкой: класс $\mathcal{U}$ предельно идентифицируем с рекурсивной оценкой, если для любой гёделевской нумерации φ существуют неубывающая о.р.ф. $g(x)$ и стратегия F, предельно идентифицирующая $\mathcal{U}$ в φ, такие, что для любой $f \in \mathcal{U}$ число различных гипотез F на f не превосходит $g(min_{\varphi}(f))$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если класс $\mathcal{U}$ предельно идентифицируем с рекурсивной оценкой, то $\mathcal{U} \in GN^{min}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из теоремы 2 и соответствующих определений.

Условие, сформулированное в следствии 3, достаточно для проверки принадлежности семейству GN^{min} всех достаточно естественных примеров классов из GN^{min} Однако, как показывает теорема 4, оно все же не является необходимым.

ТЕОРЕМА 4. Существует класс $U \in GN^{min}$, который нельзя предельно идентифицировать с рекурсивной оценкой.

Прежде, чем доказывать теорему, введем ряд обозначений, которые будут полезны и в дальнейшем.

Нам будет удобно рассматривать произвольную о.р.ф. как последовательность значений

$$f(0), f(1), \quad , f(k),$$

Пусть α - произвольный конечный кортеж натуральных чисел. Через $\alpha 0^\infty$ будем обозначать функцию f, начальным фрагментом которой является α, а остальные значения - нули. Если $a_0, a_1, \dots, a_n$ - произвольные натуральные числа, то $a_1 a_2 \quad a_n 0^\infty$ - функция, начальный фрагмент которой равен $(a_1, a_2, \quad , a_n)$, а остальные значения - нули. Через 0^K обозначим кортеж из K нулей. Подобно $\alpha 0^\infty$ и $a_1 a_2 \quad a_n 0^\infty$ вводятся обозначения $\alpha 0^K$ и $a_1 a_2 \quad a_n 0^K$ Зафиксируем также канторовскую нумерацию всех троек: $c(i,j,k)$ - номер тройки (i,j,k).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Зафиксируем $\varphi \in \mathcal{G}$ и гёделевскую нумерацию всех стратегий $\{F_i\}_i = 0, 1,$ Наша ближайшая цель заключается в построении для каждой пары (i,j) такой о.р.ф. $u_{i,j}$, что F_j не может предельно идентифицировать φ -номер для $u_{i,j}$ с рекурсивной оценкой φ_i

Сначала определим для каждой тройки (i,j,r) ч.р.ф. $\varphi_{g_{i,j}}(r)$ Пусть $c(i,j,r) = \tilde{c}$ и $F_j = F$

Вычисляем $\varphi_i(r)$ Если $\varphi_i(r)$ не определено, то $\varphi_{g_{i,j}}(r)$ тоже не определена. Если $\varphi_i(r)$ определено (например, $\varphi_i(u)=\tilde{r}$), то полагаем $\varphi_{g_{i,j(r)}}(0)=\tilde{c}$ и приступаем к следующей процедуре.

ШАГ I. Находим последовательно гипотезы $F(<\tilde{c}>)$, $F(<\tilde{c}\,0>)$, $F(<\tilde{c}\,0^{\kappa}>),\ldots$ и параллельно на n -ом такте вычислений полагаем $\varphi_{g_{i,j(r)}}(n+1)=0$ Одновременно, найдя гипотезу $p=F(<\tilde{c}\,0^{\kappa_0}>)$, отличную от предыдущих, начинаем вычислять $\varphi_p(1)$ Указанные действия продолжаются до наступления одного из следующих событий.

A^I. Число различных гипотез в последовательности $F(<\tilde{c}\,0^{\kappa}>)$, $\kappa=0,1,\ldots$ превосходит $\tilde{r}$.

B^I. Для некоторого $p=F(<\tilde{c}\,0^{\kappa}>)$ $\varphi_p(1)$ сходится (например, $\varphi_p(1)=t$).

Если первым наступает событие A^I, то на всех x , на которых $\varphi_{g_{i,j(r)}}$ еще не была определена, полагаем $\varphi_{g_{i,j(r)}}(x)=0$ и процедуру прекращаем.

Если первым наступает событие B^I, то полагаем $\varphi_{g_{i,j(r)}}(1)=\overline{sign}\,t$, номер p в нумерации φ зачеркиваем и переходим к шагу 2.

В случае, если ни одно из перечисленных событий не наступит, шаг I продолжается бесконечно долго.

ШАГm. Пусть $\varphi_{g_{i,j(r)}}$ определена к этому моменту на всех $x \leq s_m$ α – кортеж ее значений на $0,1,\ldots,s_m$ и β – начальный фрагмент α , максимальный среди всех таких, что вычисление $F(<\beta>)$ было завершено к шагу m . Пусть $\alpha=\beta\,a_1\,a_2\ \ a_\ell$

Начинаем последовательно находить гипотезы

$$F(<\beta a_1>),\quad F(<\beta a_1 a_2>),\ldots,F(<\alpha>),\ F(<\alpha\,0>),\ldots$$

и параллельно на n -ом такте вычислений полагаем $\varphi_{g_{i,j(r)}}(s_m+n+1)=0$ (начиная с $n=1$). Одновременно, найдя в последовательности

(4.3) $F(<\tilde{c}>)$, $F(<\tilde{c}\,0>),\ldots$, $F(<\alpha>)$, $F(<\alpha 0>),\ldots,F(<\alpha 0^{\kappa}>),\ldots$

еще не зачеркнутую гипотезу p , отличную от предыдущих, начинаем вычислять $\varphi_p(s_m+1)$. Эти действия продолжаются до наступления одного из следующих событий.

A^m. В последовательности (4.3) более $\tilde{r}$ различных гипотез.

B^m. Для некоторого незачеркнутого p из (4.3) $\varphi_p(s_m+1)$ сходится.

В случае наступления A^m или B^m действия аналогичны соответствующим действиям на шаге I.

Очевидно, для произвольной пары (i,j) функция $g=g_{i,j}$ о.р.ф. Пусть $b=b(i,j)$ – неподвижная точка g, т.е. $\varphi_{g(b)}=\varphi_b$. Определим функцию $u_{i,j}$ следующим образом:

(4.4) $$u_{i,j}(x)=\begin{cases}\varphi_{b(i,j)}(x), & \text{если } \varphi_{b(i,j)}(x) \text{ определено}\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Искомый класс U определим как $\bigcup_{i,j}\{u_{i,j}\}$.

Покажем, что F_j не может предельно идентифицировать $u_{i,j}$ с рекурсивной оценкой φ_i. Допустим противное. Легко видеть, что $\varphi_{b(i,j)}$ может быть не определена не более чем в одной точке. Если $\varphi_{b(i,j)}$ – о.р.ф. и, следовательно, $u_{i,j}=\varphi_{b(i,j)}$, то, как легко видеть, либо число различных гипотез F_j на $u_{i,j}$ превосходит $\varphi_i(b)\geqslant\varphi_i(\min_\varphi(u_{i,j}))$, либо функция с номером $p=\lim\limits_{n\to\infty}F_j(\langle u_{i,j}^{[n]}\rangle)$ отличается от $u_{i,j}$ – противоречие. Если $\varphi_{b(i,j)}$ не определена в одной точке, то число различных гипотез F_j на $u_{i,j}$ обязательно не превосходит $\varphi_i(b)$. Из описания конструкции снова следует, что φ_p с номером $p=\lim\limits_{n\to\infty}F_j(u_{i,j}^{(n)})$ должна отличаться от $u_{i,j}$ в одной точке – противоречие.

Итак, класс U нельзя предельно идентифицировать с рекурсивной оценкой.

Перестроим теперь нумерацию φ в такую нумерацию ψ, что $U\in GN_\psi^{min}$.

Для каждого $k=2n+1$ полагаем $\psi_k=\varphi_n$. Ясно, что φ сводится к нумерации ψ.

Пусть $k=2n$. Полагаем $\psi_k(0)=\varphi_n(0)$. Если $\varphi_n(0)$ не определено, то на всех $x>0$ ψ_k не определена. Пусть теперь $\varphi_{n+1}(0)=c(i,j,r)$. Если x на некотором шаге m процедуры построения $\varphi_{g_{i,j}(r)}$ принимает значение s_m+1 (для шага I – $s_m+1=1$), то полагаем $\psi_k(x)=\varphi_n(x)$; в противном случае $\psi_k(x)=0$. Определяя ψ_k параллельно процедуре определения $\varphi_{g_{i,j}}(r)$, легко убедиться, что ψ_k – ч.р.ф. Итак, ψ – гёделевская нумерация всех ч.р.ф.

Построим теперь стратегию G, предельно идентифицирующую минимальные ψ номера для функций из $\mathcal{U}$. Пусть $f = u_{i,j} \in \mathcal{U}$ Тогда, как следует из описания конструкции, $\varphi_i(\beta(i,j))$ определено; пусть $\varphi_i(\beta(i,j)) = \hat{\beta}$.

Для определения $G(\langle f^{[n]}\rangle)$ проделаем n тактов (но не шагов!) в процедуре определения $\varphi_{g_{i,j}}(\beta)$. Пусть m – номер последнего шага в этой процедуре, начатого к $n+1$ – ому моменту. Если $n < S_m+1$ (см. описание шага m), то полагаем $G(\langle f^{[m]}\rangle)=0$. Если $n \geqslant S_m+1$ то вычисляем в течение n тактов начальные фрагменты

$$\psi_0^{[S_m+1]}, \ \psi_1^{[S_m+1]}, \quad \psi_n^{[S_m+1]}$$

и находим минимальное $k \leqslant n$ такое, что $\psi_k^{[S_m+1]} = f^{[S_m+1]}$ Полагаем $G(\langle f^{[n]}\rangle) = k$ (если ни одного такого k не будет найдено, то $G(\langle f^{[n]}\rangle) = 0)$.

Из описания конструкции легко следует, что число шагов в процедуре построения $\varphi_{g_{i,j}}(\beta)$ не превосходит $\varphi_i(\beta+1)$; пусть оно равно, например, $\tilde{m}$. Нетрудно теперь убедиться, что $\lim\limits_{k\to\infty} G(\langle f^{[k]}\rangle)$ существует и равен минимальному n такому, что $\psi_n^{[S_{\tilde{m}}+1]} = f^{[S_{\tilde{m}}+1]}$. Из определения нумерации ψ следует, что номер n четный. Но для такого n по определению $\psi_n(x)=0$ для всех $x > S_{\tilde{m}}+1$. С другой стороны, функция f в силу (4.4) на всех $x > S_{\tilde{m}}+1$ равна $\varphi_{g_{i,j}}(x)$. Таким образом, $\psi_n = f$ Легко видеть также, что ни один номер $< n$ не может быть номером f. Итак, $n = \min_\psi(f)$. Теорема доказана.

В силу теоремы 3 один и тот же класс $\mathcal{U}$ при различных $\varphi, \psi \in \mathcal{G}$ может принадлежать GN_φ^{min} и не принадлежать GN_ψ^{min}. Легко, однако, подобрать такую о.р.ф. h, что $\mathcal{U} \in GN_\psi^{h-min}$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\mathcal{U}$ - произвольный класс о.р.ф. и $\varphi, \psi \in \mathcal{G}$. Если для некоторой о.р.ф. h $\mathcal{U} \in GN_{\varphi}^{h\text{-}min}$, то существует такая о.р.ф. h', что $\mathcal{U} \in GN_{\psi}^{h'\text{-}min}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ψ сводится к φ монотонной о.р. функцией w_1, а φ к ψ о.р. монотонной функцией w_2. Легко проверить, что в качестве требуемой функции подходит $h'(i) = w_2(h(w_1(i)))$.

СЛЕДСТВИЕ. Для любой о.р.ф. $\tilde{h}$ со свойством $\tilde{h}(x) \geqslant x$ и для любой $\varphi \in \mathcal{G}$

$$GN^{\tilde{h}\text{-}min} = \bigcup_{h \in R} GN_{\varphi}^{h\text{-}min}$$

5. Результаты п.4 показывают, что по отношению к возможности предельной идентификации минимальных номеров различные гёделевские нумерации не эквивалентны. Так, например, нумерация, построенная в теореме I, является в этом смысле "наихудшей": в ней минимальные номера можно предельно идентифицировать лишь для функций из конечных классов.

Рассматривая в качестве характеризующего свойства возможность предельной идентификации минимальных номеров, на множестве $\mathcal{G}$ можно естественным образом определить отношение частичной упорядоченности: для любых $\varphi, \psi \in \mathcal{G}$

$$\varphi \leqslant \psi \iff \forall\, \mathcal{U}\left(\mathcal{U} \in GN_{\varphi}^{min} \implies \mathcal{U} \in GN_{\psi}^{min}\right).$$

Далее, $\varphi \equiv \psi$ (φ эквивалентно ψ), если $\varphi \leqslant \psi$ и $\psi \leqslant \varphi$, и $\varphi < \psi$ если $\varphi \leqslant \psi$ и $\psi \not\leqslant \varphi$.

$\mathcal{G}$ очевидным образом разбивается на классы эквивалентности. В дальнейшем мы не будем отличать класс эквивалентности от его представителя, поскольку на характер результатов это не влияет.

Прежде всего нас будет интересовать следующий вопрос имеется ли в $\mathcal{G}$ наибольший элемент, другими словами, существует ли гёделевская нумерация, в которой минимальные номера можно предельно идентифицировать для функций из любого класса $\mathcal{U} \in GN^{min}$ Следующая теорема показывает, что такой нумерации нет.

ТЕОРЕМА 6. Для любой $\varphi \in \mathcal{G}$ существует $\psi \in \mathcal{G}$ такая, что $\varphi < \psi$.

Теорема 6 вытекает из следующего более общего утверждения.

ТЕОРЕМА 7. Для любой $\varphi \in \mathcal{G}$ существуют нумерация $\psi \in \mathcal{G}$ и эффективно перечислимый (т.е. имеющий вычислимую нумерацию) класс $\mathcal{U}$ такие, что $\mathcal{U} \notin GN_\psi^{min}$ и для любого класса $V \in GN_\psi^{min}$ $\mathcal{U} \cup V \in GN_\psi^{min}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $w(i,k)$ - о.р.ф. такая, что

$$\varphi_{w(i,k)}(x) = \begin{cases} \varphi_i(x) & \text{если } x \neq 2, \\ k & \text{, если } x = 2. \end{cases}$$

Пусть, далее, $v(i) = \max(\max_{k \leqslant i+2} w(i,k), i)$.

Очевидно, $v(i) \geqslant i$.

Для каждой пары (i,j) мы устроим эффективную процедуру перечисления некоторого класса $\mathcal{U}_{i,j}$. В качестве $\mathcal{U}$ мы возьмем $\bigcup_i \bigcup_j \mathcal{U}_{i,j}$. Ввиду равномерной эффективности нашей процедуры по i и j класс $\mathcal{U}$ также получится эффективно перечислимым.

Итак, зафиксируем i и j. Одновременно с построением $\mathcal{U}_{i,j}$ мы будем определять ч.р.ф. $\varphi_{g_j(i)}$. На каждом шаге m нашей процедуры в класс $\mathcal{U}_{i,j}$ заносится не более одной новой функции, каждая функция определяется либо только на m, либо на всех $x \geqslant m$, и $\varphi_{g_j(i)}$ определяется не более, чем в конечном числе точек. Номер $r \leqslant v(i)$ на некотором шаге может быть зачеркнут.

Зафиксируем гёделевскую нумерацию всех стратегий $\{F_j\}$

Полагаем $\varphi_{g_j(i)}(0)=i$, $\varphi_{g_j(i)}(1)=j$. Далее, любую заносимую в $U_{i,j}$ на произвольном шаге функцию будем полагать равной i на нуле и j на единице.

ШАГ 1. Переходим к шагу 2.

ШАГ 2. Заносим в $U_{i,j}$ первую функцию $u(x)$ и полагаем $u(2)=1$. Переходим к шагу 3.

ШАГ m. Пусть $\varphi_{g_j(i)}$ определена к этому шагу на всех $x \leqslant S$ за исключением, быть может, $x=2$, и $u(x)$ – последняя занесенная в $U_{i,j}$ к этому шагу функция.

Мы предположим, что все функции, занесенные в $U_{i,j}$ до u, уже определены на всех x, а u определена на $x<m$.

(I) Вычисляем в течение m тактов $\varphi_0(2), \varphi_1(2), \ldots, \varphi_i(2)$ Ищем такое n, что $\varphi_n(2)$ определено и $\varphi_n(2)=$ $=u(2)$. Если такого n не будет найдено, то переходим к этапу (II). Если указанное n найдется, то зачеркиваем его, полагаем $u(x)=0$ на всех $x \geqslant m$ и заносим в $U_{i,j}$ функцию $u^{(1)}$:

$$u^{(1)}(x)=\begin{cases} u(x) & \text{если } x<m \text{ и } x\neq 2 \\ u(x)+1, & \text{если } x=2 \end{cases}$$

Переходим к этапу (II).

(II). Пусть u' – последняя занесенная в $U_{i,j}$ к этому моменту функция. Для каждого $x<m$ пусть

$$\alpha_x=\begin{cases} \varphi_{g_j(i)}(x), & \text{если } \varphi_{g_j(i)}(x) \text{ уже определено} \\ u'(x) & \text{, в противном случае} \end{cases}$$

Вычисляем в течение m тактов

(*) $F_j(\langle\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_S\rangle), F_j(\langle\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{S+1}\rangle),\ldots, F_j(\langle\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_m$.
Если ни одного из чисел не будет найдено, то полагаем $u'(m)=1$ и переходим к шагу $m+1$.

Предположим теперь, что одно из указанных значений F_j будет найдено; пусть $r=F_j(\langle\alpha_0\ldots\alpha_k\rangle)$ самое правое среди них, а r' – самое правое среди значений F_j на тех же аргументах, вычисленных за $m-1$ тактов.

Если $r\neq r'$ или $r>\nu(i)$ или r зачеркнуто, то для всех $x\in\{S+1, S+2, \quad, k\}$ полагаем $\varphi_{g_j(i)}(x)=u'(x)$, полагаем $u'(m)=1$ и переходим к шагу $m+1$. В противном случае переходим к этапу (Ш).

(Ш) Итак, $r \leqslant v(i)$ и незачеркнуто. Вычисляем m тактов φ_r на $k_1 = max(\exists k)$. Если $\varphi_r(k_1)$ не сходится за m тактов или $\varphi_r(k_1) \neq u'(k_1)$, то полагаем $u'(m)=1$ и переходим к шагу $m+1$.

Если $\varphi_r(k_1)$ сходится и $\varphi_r(k_1) = u'(k_1)$, то на всех $x \geqslant m$ полагаем $u'(x)=0$ и заносим в U_{ij} функцию u^2

$$u^{(2)}(x) = \begin{cases} u'(x), & \text{если } x \leqslant m \text{ и } x \neq k_1 \\ u'(x)+1, & \text{если } x = k_1 \end{cases}$$

и зачеркиваем r. Далее на всех x, $s \leqslant x \leqslant k_1$, полагаем $\varphi_{g_j(i)}(x) = u^{(2)}(x)$ и переходим к шагу $m+1$.

Описание процедуры перечисления U_{ij} закончено. Из этого описания легко следует, что U – эффективно перечислимый класс о.р.ф. и для каждого j g_j – о.р.ф. Легко видеть также, что все функции в U_{ij} различны.

Заметим также, что для $f \in U_{ij}$ выполняются следующие свойства: если для $x \geqslant 3$ $f(x)=0$, то $f(y)=0$ для всех $y>x$; если f – последняя функция, занесенная в U_{ij}, то для всех $x \geqslant 3$ $f(x) \neq 0$.

Покажем, что $U \notin GN_{\varphi}^{min}$

Допустим, что F_j предельно идентифицирует минимальные φ-номера для функций из U, а, значит, и для всех функций из $\bigcup_i U_{ij}$. Пусть a – неподвижная точка функции $g=g_j$, т.е. $\varphi_{g(a)} = \varphi_a$.

Заметим, что класс U_{aj} конечен. В самом деле, на этапах (I) в U_{aj} может быть занесено не более $a+2$ функций, на этапах (П) новые функции в U_{aj} не заносятся, и на этапах (Ш) в U_{aj} заносится не более $v(a)+2$ функции.

Пусть $\tilde{u}$ – последняя функция, занесенная в U_{aj}. Покажем, что

$$\lim_{n \to \infty} F_j(\langle \tilde{u}^{[m]} \rangle) \neq min_{\varphi}(\tilde{u}).$$

Заметим прежде всего, что $p=\lim\limits_{n\to\infty} F_j(\langle \tilde{u}^{(n)}\rangle) > v(a)$ так как в противном случае на некотором шаге p зачеркивается и $\tilde{u}$ должна отличаться от φ_p. Но начиная с некоторого шага m число p -самое правое в строке (ж). Из описания этапа (П) следует, что ввиду неравенства $p>v(a)$ функция $\varphi_{g(a)}$ будет определена на всех $x\neq 2$. Нетрудно убедиться также, что $\varphi_{g(a)}$ на всех $x\neq 2$ имеет те же значения, что и функция $\tilde{u}$, поскольку на любом шаге m $\varphi_{g(a)}$ определяется в соответствии с последней занесенной в $U_{i,j}$ к моменту определения функцией. Из описания этапа (I) следует, что значение функции $\tilde{u}$ на $x=2$ не может превзойти $a+2$. Теперь из определения функций $W(a,k), v$ и равенства $\varphi_a=\varphi_{g(a)}$ мы получаем, что $p=\lim F_j(\langle \tilde{u}^{(n)}\rangle)$ не может превосходить $v(a)$ - противоречие. Таким образом, $U \notin G N_{\varphi}^{min}$

Построим теперь нумерацию ψ со свойствами, требуемыми в формулировке теоремы.

Между произвольными двумя функциями $\varphi_{\ell-1}$ и φ_ℓ будет "вставлено" $v(\ell)+3$ функции. Тем самым мы получаем функцию, сводящую φ к ψ Функции из промежутка между $\varphi_{\ell-1}$ и φ_ℓ мы будем определять параллельно процедуре построения класса U

Если φ_ℓ не определена по крайней мере на одном из чисел 0,I,2, то все функции из рассматриваемого промежутка не определены.

Предположим теперь, что φ_ℓ определена на $x=0,1,2$, $\varphi_\ell(0)=i$, $\varphi_\ell(1)=j$ Пусть n_k - номер k-й налево от φ_ℓ функции из промежутка:

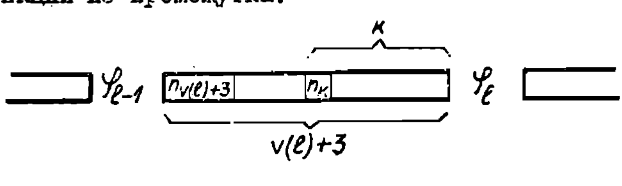


Рис.I.

Пусть сначала $k < \nu(\ell)+3$ Для определения ψ_{n_k} мы перечисляем класс функций $U_{i,j}$ Если этот класс содержит менее k функций, то ψ_{n_k} нигде не определена. Если $U_{i,j}$ содержит не менее k функций, пусть u_k -k -я в порядке перечисления $U_{i,j}$ функция, а m - номер шага, на котором u_k заносится в $U_{i,j}$. Вычисляем $\varphi_\ell^{[m]}$. Если $\varphi_\ell^{[m]} = u_k^{[m]}$, то полагаем $\psi_{n_k} = u_k$; в противном случае ψ_{n_k} нигде не определена.

Определим теперь ψ_{n_k} для $k=\nu(\ell)+3$. Вычисляем последовательно $\varphi_\ell(3), \varphi_\ell(4),$. Если для некоторого r окажется, что $\varphi_\ell(r)=0$, то $\psi_{n_k} = \varphi_\ell^{[r]}0^\infty$; в противном случае ψ_{n_k} нигде не определена.

Определение нумерации ψ завершено. Очевидно, ψ - вычислимая, и, следовательно, гёделевская нумерация.

Нам нужно показать, что для любого $V \in GN_\psi^{min}$ $U \cup V \in GN_\psi^{min}$ Убедимся сначала в том, что $U \in GN_\psi^{min}$.

Прежде всего мы построим две вспомогательные стратегии F_1 и F_2 .

Зафиксируем произвольную о.р.ф. $f \in U$. Для $r \leqslant 2$ полагаем $F_1(\langle f^{[r]} \rangle) = 0$. Пусть теперь $r > 2$. По значениям $i=f(0)$ и $j=f(1)$ находим номер q в $U_{i,j}$ первой функции с начальным фрагментом $f^{[r]}$, занесенной в $U_{i,j}$, а также шаг m, на котором q -я функция заносится в $U_{i,j}$. Вычисляем в течение r тактов начальные фрагменты

$$\varphi_0^{[m]}, \varphi_1^{[m]}, \quad , \varphi_r^{[m]}$$

и находим минимальное такое, что $\varphi_\ell^{[m]}$ определено, $\varphi_\ell^{[m]} = f^{[m]}$ и $q < \nu(\ell)+3$ (если такого ℓ не будет найдено, то $F_1(\langle f^{[r]} \rangle)=0$). В качестве $F_1(\langle f^{[r]} \rangle)$ берем номер q -й слева от φ_ℓ функции в нумерации ψ (см. рис.I).

Очевидно, F_1 - ч.р. стратегия, определенная на всех $f \in U$

Определим теперь стратегию F_2. Если ни одно из чисел $f(3), f(4), \ , f(r)$ не равно нулю, то $F_2(\langle f^{[r]}\rangle) = F_1(\langle f^{[r]}\rangle)$ В противном случае находим минимальное $k \geqslant 3$ такое, что $f(k)=0$ и вычисляем в течение r тактов

$$\varphi_0^{[k]}, \varphi_1^{[k]} \qquad \varphi_r^{[k]}$$

Ищем минимальное $p \leqslant r$ такое, что $\varphi_p^{[k]} = f^{[k]}$ (если такого p не найдется, то $F_2(\langle f^{[r]}\rangle) = F_1(\langle f^{[r]}\rangle)$ и в качестве $F_2(\langle f^{[r]}\rangle)$ берем $v(p)+3$ -й номер в ψ налево от φ_p (см.рис.I). F_2 также, очевидно, ч.р.стратегия, определенная на $\mathcal{U}$

Рассмотрим следующую стратегию F

$$F(\langle f^{[r]}\rangle) = min\,(F_1(\langle f^{[r]}\rangle),\ F_2(\langle f^{[r]}\rangle)).$$

Покажем, что для любой $f \in \mathcal{U}$ $\lim_r F(\langle f^{[r]}\rangle) = min_\varphi(f)$.

Зафиксируем $f \in \mathcal{U}$ Пусть $f(0)=i, f(1)=j$, f-q -ая в порядке перечисления функция в $\mathcal{U}_{i,j}$ и m - номер шага, на котором f заносится в $\mathcal{U}_{i,j}$.

Рассмотрим сначала случай, когда для всех $x \geqslant 3$ $f(x) \neq 0$. Очевидно, для такой f $\lim_r F(\langle f^{[r]}\rangle) = \lim_r F_1(\langle f^{[r]}\rangle)$.Из определения стратегии F_1 легко следует, что $t = \lim_r F_1(\langle f^{[r]}\rangle)$ существует и является ψ - номером f. Допустим, что $t' = min_\psi(f) < t$. Из того, что все функции в $\mathcal{U}_{i,j}$ различны, вытекает, что $\psi_{t'}$ либо q -я функция слева от некоторой φ_ℓ между $\varphi_{\ell-1}$ и φ_ℓ, либо номер t' имеет некоторая φ_ℓ Первый случай исключается, поскольку в описанной ситуации стратегия F_1 поменяла бы в пределе гипотезу t на t'. Во втором случае должно выполняться неравенство $q > v(\ell)+2$, иначе q -й функцией слева от φ_ℓ между $\varphi_{\ell-1}$ и φ_ℓ в ψ была бы f

Мы покажем, что $q \leqslant v(\ell)+2$ и, тем самым, получим противоречие.

Из описания процедуры перечисления $U_{i,j}$ легко следует, что число функций в $U_{i,j}$ не превосходит $v(i)+2$ т.е. $q \leqslant v(i)+2$. Ввиду монотонности функции v нам достаточно показать, что $i \leqslant \ell$ Функция φ_ℓ на $x \geqslant 3$ не принимает значение 0. Из описания $U_{i,j}$ вытекает, что φ_ℓ - последняя функция, занесенная в $U_{i,j}$. Такая функция отличается от всех функций $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_i$ Следовательно, $min_\varphi(\varphi_\ell) > i$ Номер ℓ при сведении φ к ψ переходит в $t' = min_\psi(\varphi_\ell)$. Отсюда мы получаем, что $min_\varphi(\varphi_\ell) = \ell$ Таким образом, $\ell > i$, что и требовалось доказать.

Предположим теперь, что для некоторого $p \geqslant 3$ $f(p)=0$; пусть p -минимальное среди таких. Нетрудно убедиться, что $\lim\limits_r F_1(\langle f^{[r]}\rangle)$ и $\lim\limits_r F_2(\langle f^{[r]}\rangle)$ существуют. Следовательно, существует и $t = \lim\limits_r F(\langle f^{[r]}\rangle)$ Рассмотрим случай, когда $t = \lim\limits_r F_2(\langle f^{[r]}\rangle)$. В силу определения функций из U если $f(p)=0$, то $f(x)=0$ и для любого $x > p$. Теперь из описания стратегии F_2 мы легко получаем, что $t = min_\psi(f)$.

Наконец, рассмотрим случай, когда $t = \lim\limits_r F_1(\langle f^{[r]}\rangle)$. Очевидно, $t = \lim\limits_r F_2(\langle f^{[r]}\rangle)$. Допустим, что $t' = min_\psi(f) < t$. Номер t' не может находиться в промежутке между некоторыми $\varphi_{\ell-1}$ и φ_ℓ , так как иначе F_1 поменяла бы гипотезу t на t' Поэтому t' - номер некоторой функции φ_ℓ Но в таком случае $\varphi_\ell = f$ и функция, следующая в ψ после $\varphi_{\ell-1}$, совпадает с f . Из описания стратегии F_2 мы получаем, что $\lim\limits_r F_2(\langle f^{[r]}\rangle) < t' < t$ - противоречие.

Итак, стратегия F предельно идентифицирует минимальные ψ -номера для функций из U Пусть стратегия G предельно идентифицирует минимальные φ -номера для функций из V Обозначим через $\tilde{G}$ стратегию, гипотезами которой являются результаты применения к гипотезам G функции, сводящей φ к ψ . Зафиксируем однозначную вычислимую нумерацию τ класса U . Стратегия H , предельно идентифицирующая минимальные ψ -номера для $V \cup U$, работает на

$f \in V \cup U$ следующим образом. Пока не обнаружено такого n что $\tau_n(0)=f(0)$ и $\tau_n(1)=f(1)$, H работает на f как $\tilde{G}$. Обнаружив первое n с указанным свойством, H работает на f как F до тех пор, пока $f^{[r]}=\tau_n^{[r]}$. Если будет найдено такое r, что $f^{[r]}\neq\tau_n^{[r]}$, H снова работает на f как $\tilde{G}$ до обнаружения следующего n такого, что $\tau_n(0)=f(0)$ и $\tau_n(1)=f(1)$, затем снова работает как F до обнаружения отличия f от τ_n и т.д. Так как в нумерации τ присутствует не более чем конечное число функций τ_n со свойством $\tau_n(0)=f(0)$ и $\tau_n(1)=f(1)$, то $\lim\limits_r H(\langle f^{[r]}\rangle)=\lim\limits_r F(\langle f^{[r]}\rangle)$, либо $\lim\limits_r H(\langle f^{[r]}\rangle)=\lim\limits_r \tilde{G}(\langle f^{[r]}\rangle)$. В первом случае $f\in U$ и, следовательно, $\lim\limits_r H(\langle f^{[r]}\rangle)=min_\psi(f)$. Во втором случае $f\notin U$ и поэтому $f\in V$. Нумерация ψ устроена таким образом, что в промежутке между двумя любыми функциями $\varphi_{\ell-1}$ и φ_ℓ находятся лишь функции из U. Отсюда следует, что при сведении φ к ψ $min_\varphi(f)$ переходит в $min_\psi(f)$. Таким образом, и в этом случае $\lim\limits_r H(\langle f^{[r]}\rangle)=min_\psi(f)$. Теорема доказана.

Теперь мы покажем, что для любых $\varphi, \varphi'\in\mathcal{G}$ среди всех нумераций $\psi\in\mathcal{G}$ таких, что $GN_\psi^{min}\subseteq GN_\varphi^{min}\cap GN_{\psi}^{min}$, существует "наилучшая". Другими словами, $\mathcal{G}$ является нижней полурешеткой.

ТЕОРЕМА 8*). Пусть $\varphi, \varphi'\in\mathcal{G}$. Существует нумерация ψ такая, что

(а) $\psi\leqslant\varphi,\ \psi\leqslant\varphi'$

(б) $\forall\tilde{\psi}\in\mathcal{G}\ ((\tilde{\psi}\leqslant\varphi)\,\&\,(\tilde{\psi}\leqslant\varphi')\implies\tilde{\psi}\leqslant\psi))$,

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $c(i,j)$ - канторовская нумерация пар. Для любых i,j и x полагаем

$$\psi_{c(i,j)}x=\begin{cases}\varphi_i(x), & \text{если } \varphi_i(x)=\varphi'_j(x)\\ \text{не опр., в противном случае.}\end{cases}$$

---

*) Другой вариант этой теоремы опубликован в [II].

$\psi_{c(i,j)}$ - о.р.ф., очевидно, только в том случае, если φ_i и φ_j' - о.р.ф. и $\varphi_i = \varphi_j' = \psi_{c(i,j)}$. В силу свойств канторовской нумерации, для любой о.р.ф. f

$$min_\psi(f) = c\,(min_\varphi(f),\ min_{\varphi'}(f));$$

свойства а) и б) теперь очевидны. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь следующий вопрос: можно ли для любых классов GN_φ^{min} и $GN_{\varphi'}^{min}$ найти такую нумерацию $\psi \in \mathcal{G}$, что $GN_\varphi^{min} \cup GN_{\varphi'}^{min} \subseteq GN_\psi^{min}$ (т.е. существует ли для φ и φ' верхняя грань). Этот вопрос, а следовательно, и вопрос о том, является ли $\mathcal{G}$ верхней полурешеткой, остается открытым. В связи с этим приобретает интерес следующая проблема, также остающаяся нерешенной: можно ли для любых двух классов $\mathcal{U}, \mathcal{U}' \in GN^{min}$ найти нумерацию ψ, в которой минимальные номера предельно идентифицируемы как для класса $\mathcal{U}$ так и для класса $\mathcal{U}'$ (стратегии для $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$ могут быть различными). Эта проблема решается положительно при некоторых ограничениях, накладываемых на $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$

ТЕОРЕМА 9. Пусть $\mathcal{U}, \mathcal{U}' \in GN^{min}$, $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}' = \varnothing$ и $\mathcal{U}$ эффективно перечислим. Тогда существует такая нумерация ψ, что $\mathcal{U} \in GN_\psi^{min}$ и $\mathcal{U}' \in GN_\psi^{min}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{U} \in GN_\varphi^{min}$, $\mathcal{U}' \in GN_{\varphi'}^{min}$ и h - о.р.ф., сводящая φ к φ', причем $x < y \Longrightarrow h(x) < h(y)$. Обозначим через $h(\varphi)$ образ φ в нумерации φ' Мы намерены перестроить нумерацию φ' так, чтобы она осталась гёделевской, все номера всех функций из $\mathcal{U}$ находились бы в $h(\varphi)$, а номера функций из $\mathcal{U}'$ остались бы на месте. В нумерации ψ, обладающей указанными свойствами для функций из классов $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$ минимальные номера предельно идентифицировать легко. Для $\mathcal{U}'$ стратегия такая же, как при идентификации в нумерации φ'. Для $f \in \mathcal{U}$ достаточно, очевидно, применить стратегию для нумерации φ, а затем к результату применить функцию h Итак перестроим φ' в ψ Зафиксируем вычислимую нумерацию $\{u_k\}_{k=0,1,\ldots}$ класса $\mathcal{U}$.

Пусть $n \notin h(\varphi)$ и x - произвольное натуральное число. Если выяснится, что φ'_n отлична от каждой из функций $u_0, u_1, \ldots, u_x$, то полагаем $\psi_n(x) = \varphi_n'(x)$; в противном случае $\psi_n(x)$ не определено. Если $n \in h(\varphi)$ то $\psi_n = \varphi'_n$.

Ясно, что если $n \notin h(\varphi)$ и φ_n' - о.р.ф., то ψ_n может быть о.р.ф. только при условии, что φ_n' отлична от всех функций из $\mathcal{U}$ Таким образом, ни одна функция из $\mathcal{U}$ не может иметь номера вне $h(\varphi)$, что и требовалось доказать.

Покажем теперь, что в нижней полурешетке $\mathcal{G}$ имеются несравнимые элементы.

ТЕОРЕМА 10. Существуют такие нумерации $\varphi, \psi \in \mathcal{G}$ и классы о.р.ф. V и $\mathcal{U}$, что $V \in GN_\varphi^{min} \setminus GN_\psi^{min}$ и $\mathcal{U} \in GN_\psi^{min} \setminus GN_\varphi^{min}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть V - класс всех функций $\{\hat{k}\}$ $k = 0, 1, \ldots$ где

$$\hat{k}(x) = \begin{cases} 0 & \text{если } x \leqslant 2 \\ k & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

С помощью следствия 3 из теоремы 2 легко устанавливается, что $V \in GN^{min}$ Пусть $V \in GN_\varphi^{min}$. Применим к φ конструкцию из теоремы 7 и построим класс $\mathcal{U} \notin GN_\varphi^{min}$ Очевидно, класс $\tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U} \setminus \mathcal{U}_{0,0}$ также не содержится в GN_φ^{min}. В теореме построена такая нумерация ψ, что $V \cup \mathcal{U} \in GN_\psi^{min}$ и, следовательно, $V \cup \mathcal{U} \in GN_\psi^{min}$ Перестроим теперь нумерацию ψ в такую нумерацию $\tilde{\psi} \in \mathcal{G}$, чтобы $V \in GN_{\tilde{\psi}}^{min}$ но по-прежнему $\tilde{\mathcal{U}} \in GN_{\tilde{\psi}}^{min}$. Заметим, что в силу выбора V и $\mathcal{U}$ $V \cap \tilde{\mathcal{U}} = \varnothing$.

Полагаем $\tilde{\psi}_{3n+2} = \psi_n$. Для определения $\tilde{\psi}_{3n}$ и $\tilde{\psi}_{3n+1}$ вычисляем $\psi_n(3)$. Если $\psi_n(3)$ не определено, то $\tilde{\psi}_{3n}$ и $\tilde{\psi}_{3n+1}$ нигде не определены. Пусть $\psi_n(3) = k$ Полагаем $\tilde{\psi}_{3n+1} = \hat{k}$. Несколько сложнее определяется $\tilde{\psi}_{3n}$ Пусть $A - \Sigma_2$ - универсальное множество (см. [3]). Нетрудно устроить эффективную процедуру вычисления $\tilde{\psi}_{3n}$ так, что

$$\kappa \in A \Longrightarrow \tilde{\varphi}_{3n} \text{ имеет конечную область определения}$$

$$\kappa \notin A \Longrightarrow \tilde{\varphi}_{3n} = \hat{\kappa}.$$

Определение $\tilde{\varphi}$ завершено. Очевидно, $\tilde{\varphi} \in \mathcal{G}$.

Легко убедиться, что нумерация $\tilde{\varphi}$ обладает следующим свойством:

$$\kappa \in A \Longrightarrow min_{\tilde{\varphi}}(\hat{\kappa}) = 1 \bmod 3$$
$$\kappa \notin A \Longrightarrow min_{\tilde{\varphi}}(\hat{\kappa}) = 0 \bmod 3$$

Таким образом, если бы существовала стратегия, предельно идентифицирующая $min_{\tilde{\varphi}}(\hat{\kappa})$ для всех $\hat{\kappa}$, то легко можно было бы построить алгоритм для предельного вычисления характеристической функции множества A, т.е. такую о.р.ф. $\mu(n,x)$ что

$$x \in A \Longrightarrow \lim_n \mu(n,x) = 1$$
$$x \notin A \Longrightarrow \lim_n \mu(n,x) = 0$$

По лемме Шёнфилда [12] (см.также [13]) множество A в таком случае принадлежит классу $\Delta_2 = \Sigma_2 \cap \Pi_2$. Но, по нашему предположению A Σ_2 - универсально и поэтому $A \in \Delta_2$ - противоречие. Итак, мы получаем, что $V \in GN^{min}_{\tilde{\varphi}}$.

Далее, нетрудно убедиться, что все функции, отличные от функций из V все свои номера имеют лишь среди чисел вида $3n+2$. Так как для любого n $\tilde{\varphi}_{3n+2} = \varphi_n$ и $\tilde{U} \cap V = \phi$ то, очевидно, $\tilde{U} \in GN^{min}_{\tilde{\varphi}}$ Теорема доказана.

6. В этом разделе мы покажем, что классы из GN^{min} не замкнуты относительно объединения.

ТЕОРЕМА II. Существуют гёделевская нумерация φ и классы о.р.ф. U, U_1, U_2 такие, что $U = U_1 \cup U_2$, $U_1 \in GN^{min}_{\varphi}$, $U_2 \in GN^{min}_{\varphi}$, но $U \notin GN$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предлагаемая ниже конструкция класса U представляет собой некоторое видоизменение конструкции из теоремы 2 [10].

Зафиксируем гёделевскую нумерацию Ψ и гёделевскую нумерацию всех ч.р. стратегий $\{F_i\}$ $i=0,1,$

Сначала перейдем от ч.р. стратегий F_i к эквивалентным о.р. стратегиям. Для каждой функции f рассмотрим процедуру параллельного вычисления $F_i(\langle f^{[n]}\rangle)$ для всех n. Полагаем далее

$$F_i'(\langle f^{[t]}\rangle)=\begin{cases} k, & \text{если } k \text{ - последняя гипотеза } F_i(\langle f^{[x]}\rangle), \text{ выданная к моменту } t \\ 0, & \text{если до момента } t \text{ ни одной гипотезы не выдано.}\end{cases}$$

Легко видеть, что F_i' - о.р. стратегия, и если $\lim_n F_i(\langle f^{[n]}\rangle)$ существует, то $\lim_n F_i'(\langle f^{[n]}\rangle)$ также существует и обе эти числа равны. Поэтому если F_i не идентифицирует в пределе f (в смысле GN), то F_i также не может предельно идентифицировать f.

Класс U строится таким образом, что ни одна стратегия F_i' не сможет его предельно идентифицировать.

Сопоставим F_i' ч.р.ф. $g_i(x)$, вычисляемую в соответствии со следующими инструкциями. Полагаем $g_i(0)=i$.

Далее для определения g_i используется описываемая ниже ПРОЦЕДУРА с двумя параметрами k и r

Полагаем $k=F_i'(\langle i\rangle)$, $r=1$ и переходим к ПРОЦЕДУРЕ.

ПРОЦЕДУРА. Вычисляем $\Psi_k(r)$, находя одновременно на t-ом такте вычисления $F_i'(\langle\alpha 0^t\rangle)$, где α -кортеж с номером $\langle g^{[r-1]}\rangle$ Полагаем на t-ом такте вычислений $g_i(r+t)=0$ Указанные действия продолжаются до наступления одного из следующих событий:

А) для некоторого t $\Psi_k(r)$ сходится и $\Psi_k(r)=0$

В) для некоторого t $F_i'(\langle\alpha 0^t\rangle)\neq k$.

Если ни одно из событий А и В не наступит, то ПРОЦЕДУРА для данных k и r продолжается до бесконечности.

Если первым наступит событие А, то полагаем $g_i(r)=1$ и снова переходим к ПРОЦЕДУРЕ, взяв в качестве k число $F_i'(\langle g_i^{[r+t]}\rangle)$, а в качестве r - число $1+r+t$.

Если первым наступит событие В, то полагаем $g_i(r)=0$ и переходим к ПРОЦЕДУРЕ, взяв в качестве k и r те же числа, что и в случае А.

Легко видеть, что каждая g_i либо о.р.ф., либо ч.р.ф., не определенная в одной точке (если при некотором повторении процедура продолжается до бесконечности).

Пусть

$$f_i(x)=\begin{cases} g_i(x), & \text{если } g_i(x) \text{ определено} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и $\quad \mathcal{U}=\{f_i \mid i=0,1, \quad \}$

Ясно, что каждая f_i - о.р.ф.

Наша конструкция устроена таким образом, что на функции f_i стратегия F_i' либо бесконечно много раз меняет гипотезы, либо выдает в пределе число, не являющееся номером f_i. Следовательно, $\mathcal{U} \notin GN$.

Пусть теперь

$$\mathcal{U}_1=\{f_i \mid g_i \quad \text{о.р.ф.}\},$$
$$\mathcal{U}_2=\{f_i \mid g_i \quad \text{не о.р.ф.}\}.$$

Покажем, что $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in GN^{min}$

Для класса $\mathcal{U}_1$ мы воспользуемся следствием 3 из теоремы 2. Описанная выше процедура для каждого i такого, что g_i - о.р.ф. дает программу для эффективного вычисления g_i. Итак, по $g_i(0)$ можно эффективно найти некоторый ψ - номер g_i. А это означает, что класс $\mathcal{U}$ предельно идентифицируем с рекурсивной оценкой $v(x)\equiv 1$. Теперь остается [illegible]менить следствие 3.

[illegible] класса $\mathcal{U}_2$ рассуждение аналогично доказательству принадлежности GN^{min} класса $\mathcal{U}$ в теореме 4.

Теперь осталось найти такую гёделевскую нумерацию ψ, что одновременно $\mathcal{U}_1 \in GN_\psi^{min}$ и $\mathcal{U}_2 \in GN_\psi^{min}$.

Пусть φ - такая гёделевская нумерация, что $U_2 \in GN_\varphi^{min}$. Применяя к φ конструкцию из теоремы 2 мы построим такую гёделевскую нумерацию $\tilde{\varphi}$, что $U_1 \in GN_{\tilde{\varphi}}^{min}$. Однако может случиться, что $U_2 \in GN_{\tilde{\varphi}}^{min}$ Поэтому мы несколько изменим нумерацию $\tilde{\varphi}$.

Пусть $w(x)$ - о.р.ф. из доказательства теоремы 2, сводящая нумерацию φ к $\tilde{\varphi}$. Обозначим через $w(\varphi)$ множество значений функции w Заметим, что множество $w(\varphi)$ рекурсивно.

Для каждого $j \in w(\varphi)$ полагаем $\psi_j = \tilde{\varphi}_j$. Далее для каждого $j \notin w(\varphi)$ - если $\tilde{\varphi}_j(0)$ не определено, то ψ_j нигде не определена; если $\tilde{\varphi}_j(0)$ определено, то для любого x

$$\psi_j(x) = \begin{cases} \tilde{\varphi}_j(x) & \text{если } g_{\tilde{\varphi}_j(0)}(x) \text{ определено} \\ \text{не опр., в противном случае.} & \end{cases}$$

Функция $w(x)$, очевидно, сводит нумерацию φ к ψ Поэтому ψ - гёделевская нумерация.

Пусть $j \notin w(\varphi), \tilde{\varphi}(0)=i$ тогда если g_i - о.р.ф., то, очевидно, $\psi_j = \tilde{\varphi}_j$. Если же g_i не определена в одной точке, то ψ_j также не определена по крайней мере в одной точке и, следовательно, j не может быть ψ -номером функции f_i Таким образом, если $f_i \in U_1$ то

(6.I) $$min_\psi(f_i) = min_{\tilde{\varphi}}(f_i)$$

и если $f_i \in U_2$ то

(6.2) $$min_\psi(f_i) = w(min_\varphi(f_i)).$$

Используя равенства (6.I) и (6.2) легко можно получить стратегии, предельно идентифицирующие минимальные ψ - номера для функций из U_1 и, соответственно, U_2 Теорема доказана.

Отметим, что построенные в теореме II классы U_1 и U_2 не пересекаются.

Теоремы I-3, 5, 7, 8 доказаны Р.В.Фрейвалдсом, теоремы 4, 6, 9, IO Е.Б.Кинбером, теорема II - Е.Б.Кинбером и Р.В.Фрейвалдсом. Отдельные результаты были опубликованы [I5].

7. В основе большинства из приведенных доказательств лежит следующая конструкция: по геделевской нумерации φ с помощью "раздвигания" φ и специального выбора функций в получаемых таким образом промежутках строится новая нумерация $\psi \in \mathcal{G}$. Зачастую функция, сводящая φ к ψ, растет очень быстро; например, в доказательстве теоремы I сводящая функция больше по порядку любой линейной. Другими словами, получаемые с помощью описанного метода нумерации являются в каком-то смысле очень сложными. Можно, однако, рассматривать естественные подклассы геделевских нумераций, для которых указанный метод построения новых нумераций чаще всего не пригоден. Такими нумерациями являются, например, оптимальные.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (А.Н.Колмогоров [I4]). Назовем геделевскую нумерацию φ оптимальной, если для любой $\psi \in \mathcal{G}$ существует о.р.ф. h, сводящая ψ к φ, и константа C такие, что для $n(\ell(n)) \leqslant \ell(n) + C$, где $\ell(x)$ – длина двоичной записи числа x

Основные рассматриваемые в статье вопросы для предельной идентификации минимальных номеров, в оптимальных нумерациях остаются открытыми.

ЛИТЕРАТУРА

I. Барздинь Я.М., Фрейвалд Р.В. О прогнозировании общерекурсивных функций. - "Доклады АН СССР", 1972, т.206, № 3, с.521-524.

2. Барздинь Я.М., Подниекс К.М. К теории индуктивного вывода. - Труды симпозиума "Mathematical foundations of computer science", High Tatras Czechoslovakia, 1973, с.9-15.

3. Подниекс К.М. Сравнение различных типов предельного синтеза и прогнозирования функций. - "Уч. зап. Латв. ун-та", 1974, т.210, с.68-81.

4. Blum L., Blum M. Toward a mathematical theory of inductive inference. - "Inform. and Contr.", 1975, v.28, No.2, p.125-155.

5. Кинбер Е.Б. О предельном синтезе почти минимальных геделевских номеров. - "Уч.зап.Латв.ун-та", 1974, т.210, с.221-223.
6. Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М., 1972, 624с.
7. Барздинь Я.М. Об одном свойстве предельно вычислимых функционалов. - "Уч.зап.Латв.ун-та", 1974, т.210, 20-24.
8. Gold E.M. Limiting recursion.-"Journ.Symb.Log.", 1965, с.3, No.1, p.28-48.
9. Кинбер Е.Б. О сравнении предельного синтеза и предельной стандартизации номеров общерекурсивных функций. - "Уч.зап.Латв.ун-та", 1975, т.233, с.45-56.
10. Барздинь Я.М. Две теоремы о предельном синтезе. - "Уч.зап.Латв.ун-та", 1974, т.210, с.82-88.
11. Фрейвалд Р.В. Возможности предельного синтеза номеров общерекурсивных функций в различных вычислимых нумерациях. - "Уч.зап.Латв.ун-та", 1975, т.233, с.3-25.
12. Shoenfield J. On degrees of unsolvability. - "Ann.of Math.", ser.2, 1959, v.69, p.644-653.
13. Putnam H, Trial ar error predicates and the solution to a problem of Mostowski. -"Journ.Symb.Log.", 1965, v.30, No.1, p.49-57.
14. Колмогоров А.Н. Три подхода к определению понятия "количество информации". - "Проблемы передачи информации", 1975, т.I, № I, с.3-7.
15. Freivald R.V. Minimal Gödel numbers and their identification in the limit. "Lecture Notes in Computer Science", v.32, p.219-225.

О ПРЕДЕЛЬНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ МИНИМАЛЬНЫХ НОМЕРОВ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ИЗ ЭФФЕКТИВНО ПЕРЕЧИСЛИМЫХ КЛАССОВ

Е.Б.Кикбер

ВЦ ЛГУ им. П.Стучки

1. Основные понятия и обозначения, используемые в данной работе, имеются в [1]. Главное внимание в статье уделено характеристике числа смен гипотез при предельной идентификации минимальных номеров для функций из перечислимых классов.

2. Произвольный перечислимый класс общерекурсивных функций (о.р.ф.) U мы будем рассматривать вместе с вычислимой нумерацией τ $U = \{\tau_1, \tau_2, \ \ \tau_n \ \ \}$, $\tau_n(x)$ - о.р.ф. от n и x используя чаще всего обозначение (U, τ).

Введём следующие сокращения:

$\forall_n^\infty$ - для всех n за исключением, быть может, конечного числа;

$\exists_n^\infty$ - для бесконечно многих n

С целью характеристики "быстроты" идентификации в [2] введём функционал

$$H^{GH}(f) = \begin{cases} & \text{число изменений гипотез, если } H \\ & \text{предельно идентифицирует} \cdot \\ \infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для изучения предельной идентификации класса в [2] вводится функция

$$H_{U,\tau}(n) = \max_{1 \le i \le n} H^{GH}(\tau_i),$$

Для предельной идентификации минимальных номеров можно рассматривать функцию $H^{min}_{U,\tau,\varphi}(n)$, аналогичную $H_{U,\tau}(n)$

При предельной идентификации номеров в обычном смысле функция $H_{U,\tau}$ не зависит от того, в какой гёделевской нумерации φ находятся идентифицируемые номера. Точнее, если H идентифицирует φ -номера для функций из класса U, то для любой другой нумерации φ' легко найти такую стратегию H', что $H_{U,\tau} = H'_{U,\tau}$. В случае предельной идентификации минимальных номеров ситуация сложнее: класс $\mathcal{U}$ в одной гёделевской нумерации может быть предельно идентифицируем в смысле GN^{min} быстрее, чем в другой.

3. В этом разделе мы получим некоторые результаты, которые показывают, как быстрота предельной идентификации минимальных номеров может зависеть от выбора нумерации φ

Сначала мы покажем, что для каждого бесконечного класса существуют нумерации, в которых он предельно идентифицируем в смысле GN^{min} сколь угодно "медленно".

ТЕОРЕМА I. Для каждого бесконечного класса $(\mathcal{U},\tau)\in GN^{min}$ такого, что $i\neq j \Longrightarrow \tau_i\neq\tau_j$ и для любой неубывающей о.р.ф f существует такая гёделевская нумерация ψ, что $\mathcal{U}\in GN_{\psi}^{min}$ и для любой стратегии H, предельно идентифицирующей минимальные ψ -номера,

$$\forall_n^{\infty}\,(H_{\mathcal{U},\tau,\psi}^{min}(n)\geqslant f(n)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем некоторую φ такую, что $\mathcal{U}\in GN_{\varphi}^{min}$. Требуемую нумерацию ψ мы будем строить, исходя из нумерации φ

Для каждого $n\geqslant 1$ пусть $a_n=\sum_{i=1}^{n}(i+1)$ Далее пусть m_0 I и для каждого $k\geqslant 1$

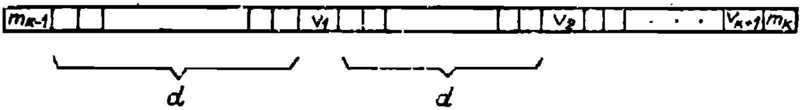
$$m_k=k+1+\sum_{i=1}^{k+1}[(f(a_i)(i+1)+2)(i+1)].$$

Полагаем $\psi_{m_k}=\varphi_k$, $k=0,1,\ldots$ Таким образом, ψ -нумерация всех ч.р.ф. и φ сводится к ψ Чтобы ψ была гёделевской нумерацией, нам остается сделать её вычислимой нумерацией ч.р.ф.

Зафиксируем произвольное $k\geqslant 1$ и определим ψ_r для всех r таких, что $m_{k-1}<r<m_k$ Пусть для любого j, $1\leqslant j\leqslant k+1$

$$V_j=m_{k-1}+j\,(f(a_k)(k+1)+2)$$

и $d=f(a_k)(k+1)+1$ Множество номеров между m_{k-1} и m_k можно представить, очевидно, следующим образом:



Для каждого $r = v_j$, $j = 1,2,\dots, k+1$, полагаем $\psi_r = \tau_{\omega_j^{(k)}}$ где $\omega_j^{(k)} = a_{k-1}+j$ (для $r < m_0$ полагаем $\psi_r = \tau_0$).

Остальные ψ_r определяются с помощью описываемой ниже процедуры.

Зафиксируем некоторое j такое, что $1 \leqslant j \leqslant k+1$ и определим все ψ_r где $v_{j-1} < r < v_j$ Пусть $\vartheta = \tau_{\omega_j^{(k)}}$ Вычисляем в течение x тактов значения

$$\varphi_0(\langle \vartheta^{[0]} \rangle),\quad \varphi_0(\langle \vartheta^{[1]} \rangle),\ \dots,\ \varphi_0(\langle \vartheta^{[x]} \rangle)$$

$$\varphi_1(\langle \vartheta^{[0]} \rangle),\quad \varphi_1(\langle \vartheta^{[1]} \rangle),\qquad \varphi_1(\langle \vartheta^{[x]} \rangle)$$

(*)

$$\varphi_k(\langle \vartheta^{0} \rangle),\quad \varphi_k(\langle \vartheta^{[1]} \rangle),\qquad \varphi_k(\langle \vartheta^{[x]} \rangle).$$

Каждую строчку $\varphi_i(\langle \vartheta^{[0]} \rangle),\ \varphi_i(\langle \vartheta^{[1]} \rangle),\dots,\ \varphi_i(\langle \vartheta^{[x]} \rangle)$, для которой существует по крайней мере $f(a_k)$ таких $y<x$, что

а) $\varphi_i(\langle \vartheta^{[y]} \rangle)$ и $\varphi_i(\langle \vartheta^{[y+1]} \rangle)$ определены (за x тактов)

б) $\varphi_i(\langle \vartheta^{[y]} \rangle) \neq \varphi_i(\langle \vartheta^{[y+1]} \rangle)$,

вычеркиваем. Далее для каждой невычеркнутой строки найдем число таких y , для которых верно а) и б), и найдем сумму этих чисел. К найденному числу добавим $f(a_k)\cdot \ell$, где ℓ количество вычеркнутых строк. Определенное таким образом число обозначим через p_x Очевидно,

(1) $\quad x_1 \leqslant x_2 \Longrightarrow p_{x_1} \leqslant p_{x_2}$

(2) $\quad \forall x\,(p_x < d).$

Пусть $r_x = v_j - p_x$. В силу (2) $v_{j-1} < r_x < v_j$. Мы предположим, что до такта x каждая функция ψ_r, $v_{j-1} < r < v_j$, была определена либо на всех аргументах, либо на конечном множестве аргументов. На такте x, мы будем определять на некоторых z лишь функцию ψ_{r_x} и (или) $\psi_{r_x - 1}$

Если (I) в таблице (*) все строки вычеркнуты, то на всех z, на которых ψ_{r_x} ещё не определена, полагаем $\psi_{r_x}(z) = \nu(z)$

Предположим теперь, что в таблице (*) имеются невычеркнутые строки. Пусть c_i - самое правое вычисленное в i-ой невычеркнутой строке число. Если: (П) по крайней мере для одного i $c_i = r_x$ и ψ_{r_x} ещё не определена на бесконечном множестве, то определяем её на всех оставшихся z таким образом, что $\psi_{r_x} \notin \mathcal{U}$; далее для всех $z \leqslant x$, на которых $\psi_{r_x - 1}$ ещё не определена, полагаем $\psi_{r_x - 1} = \nu(z)$

Если (Ш) для всех i $c_i \neq r_x$, то на всех $z \leqslant x$ на которых ψ_{r_x} ещё не определена, полагаем $\psi_{r_x}(z) = \nu(z)$

Определение нумерации ψ завершено. Легко видеть, что каждая из функций ψ_r - корректно определенная ч.р.ф.

Построим теперь стратегию F, предельно идентифицирующую минимальные ψ -номера для функций из $\mathcal{U}$.

Пусть F_0 - стратегия, идентифицирующая φ -минимальные номера для функций из $\mathcal{U}$ Определим функцию $\tilde{F}_0$ следующим соотношением:

если $F_0(\langle \quad \rangle) = i$ то $\tilde{F}_0(\langle \quad \rangle) = m_i$

Для нумерации τ легко построить стратегию F_1, предельно идентифицирующую минимальные τ -номера; F_1, например перебирает подряд τ_0, τ_1 Сопоставим ей функцию $\tilde{F}_1$ если $F_1(\langle \cdots \rangle) = \omega_j^{(k)}$ для некоторых k и j то $\tilde{F}_1(\langle \quad \rangle) = v_j$ где $\omega_j^{(k)}$ и v_j - числа, определенные при построении ψ

Стратегию F мы определим, исходя из $\tilde{F}_0$ и $\tilde{F}_1$ Пусть z - номер произвольного кортежа натуральных чисел, имеющего длину x Если $\tilde{F}_0(z)$ или $\tilde{F}_1(z)$ не определено, то $F(z)$ не определено. Если $\tilde{F}_0(z) \leqslant \tilde{F}_1(z)$, то полагаем $F(z) = \tilde{F}_0(z)$. Несколько сложнее случай $\tilde{F}_0(z) > \tilde{F}_1(z)$

Пусть $\tilde{F}_1(z) = v_j$. Найдём число r_x , определяемое через v_j и p_x в процессе построения ψ. Если на шаге x этого процесса имеет место ситуация (I) или (Ш), то полагаем $F(z) = r_x$. Если же имеет место ситуация (П), то полагаем $F(z) = r_x - 1$

Убедимся в том, что для любой τ_n $\lim_{k\to\infty} F(\langle \tau_n^{[k]}\rangle) = min_\psi(\tau_n)$. Так как $\lim_{k\to\infty} F_0(\langle \tau_n^{[k]}\rangle)$ и $\lim_{k\to\infty} F_1(\langle \tau_n^{[k]}\rangle)$ существуют, то существуют также числа $\ell_0 = \lim_{k\to\infty} \tilde{F}_0(\langle \tau_n^{[k]}\rangle)$ и $\ell_1 = \lim_{k\to\infty} \tilde{F}_1(\langle \tau_n^{[k]}\rangle)$. Если $\ell_0 \leqslant \ell_1$, то, очевидно, $\lim_{k\to\infty} F(\langle \tau_n^{[k]}\rangle) = \ell_0$. Из определений $\tilde{F}_0$ и $\tilde{F}_1$ легко следует, что в случае если $\ell_0 \leqslant \ell_1$ то $\ell_0 \leqslant m_k$, где m_k максимальное среди всех $m_i < \ell_1$. Из описания нумерации следует, что среди функций ψ_i с номерами $i \notin \{m_0, m_1, \dots, m_k\}$ лишь функции ψ_i с $i > m_k$ могут быть равны τ_n (или, что то же самое, ψ_{ℓ_1}). Теперь, используя равенство $\lim_k F_2(\langle \tau_n^{[k]}\rangle) = min_\psi(\tau_n)$ получаем, что $\lim_k F(\langle \tau_n^{[k]}\rangle) = \lim_k F_0(\langle \tau_n^{[k]}\rangle) = min_\psi(\tau_n)$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\ell_0 > \ell_1$. В этой ситуации для всех i и m_k таких, что $i \leqslant m_k < \ell_1$, очевидно, $\psi_i \neq \tau_n$ Стратегия F , как легко вытекает из её определения, начиная с некоторого k_0 для $\tau_n^{[k]}$ выбирает в качестве гипотез r_k Из условия (2) для p_x следует, что $\exists_\ell(\lim_k F(\langle \tau_n^{[k]}\rangle) = \ell)$ Нетрудно убедиться, что $\psi_\ell = \tau_n$, Из сказанного выше следует также, что $\ell = min_\psi(\tau_n)$

Докажем теперь второе утверждение теоремы. Пусть H – произвольная ч.р.ф. и $\varphi_u = H$ Рассмотрим функции ψ_i с номерами i из произвольного фиксированного промежутка (m_{k-1}, m_k) где $k \geqslant u$ Мы покажем, что среди функций $\tau_{\omega_j}^r$, $j = 1, 2, \dots, k+1$ существует по крайней мере одна функция $\tau_{\omega_{j_0}}^{(k)}$, на которой H в случае, если она предельно идентифицирует минимальные номера для U , должна по крайней мере $f(a_k)(>f(a_{k-1} + j_0))$ раз менять гипотезы. Отсюда уже легко следует, что

$$\forall n > a_u \left(H^{min}_{U,\tau,\psi}(n) \geqslant f(n) \right).$$

Итак, докажем требуемое утверждение. В силу условия $i \neq j \Longrightarrow \tau_i \neq \tau_j$ и описания нумерации ψ ни один из номеров i , где $i \notin \{m_0, m_1, \dots, m_{k-1}\}$ и $i < m_{k-1}$ не может быть номером какой-либо из $\varphi_{\omega_j}^{(\kappa)}$ $j=1,2,\ldots,\kappa+1$. Кроме того, все эти функции попарно различны и их на одну больше чем ψ_i с $i\in\{m_0,m_1,\ldots,m_{\kappa-1}\}$ Таким образом по крайней мере для одной из них, например, $\nu=\varphi_{\omega_j}^{(\kappa)}$, $min_\psi(\nu)$ находится в промежутке $(m_{\kappa-1},m_\kappa)$. Предположим, что $\lim_\kappa H(\langle\nu^{[\kappa]}\rangle)=\ell$ и в последовательности $H(\langle\nu^{[0]}\rangle), H(\langle\nu^{[1]}\rangle),\ldots$ гипотезы меняются не более $f(a_\kappa)$ - I раз. В этом случае $u+1$ -я строчка в таблице (ж) никогда не вычеркивается. Пусть $H(\langle\nu^{[\kappa_0]}\rangle)=\ell$ и на вычисление $H(\langle\nu^{[\kappa_0]}\rangle)$ затрачивается x тактов. Из описания конструкции следует, что на шаге x имеет место ситуация (П) и поэтому ψ_ℓ должна отличаться от ν - противоречие. Теорема доказана.

С другой стороны для достаточно широкого семейства классов из GN^{min} существуют гёделевские нумерации, в которых эти классы предельно идентифицируемы в смысле GN^{min} сколь угодно "быстро".

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I (см. [3]). Класс о.р.ф. U назовём эффективно дискретным, если существует такое рекурсивно перечислимое множество R кортежей натуральных чисел, что

а) если $\alpha=(n_0,n_1,\ldots,n_\kappa)\in R$, то существует не более одной $f\in U$ такой, что $f^{[\kappa]}=\alpha$

б) для каждой $f\in U$ существует кортеж $\alpha=(n_0,n_1,\ldots,n_\kappa)\in R$ такой, что $f^{[\kappa]}=\alpha$

ТЕОРЕМА 2. Для любого эффективно дискретного класса (U,φ) и для любой неубывающей о.р.ф. f такой, что $f(0)\geqslant1, f(x)\xrightarrow[x]{}\infty$, существует такая гёделевская нумерация ψ , что $U\in GN_\psi^{min}$ и для некоторой стратегии H такой, что $(U,\varphi)\in GN_\psi^{min}$ посредством H ,

$$\forall_n^\infty\left(H_{U,\varphi,\psi}^{min}(n)\leqslant f(n)\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть R - соответствующее U множество, о котором говорится в определении эффективной дискретности.

Зафиксируем произвольную гёделевскую нумерацию φ Требуемую нумерацию ψ мы будем строить, исходя из нумерации φ .

Выберем такую рекурсивную возрастающую последовательность чисел a_k, $k=0,1,2,$, что для каждого k $f(a_k)\geqslant k$ (пусть $a_0=0$). Для каждого $k\geqslant 0$ обозначим через m_k число $a_{k+1}-1+2(k+1)$ и положим $\psi_{m_k}=\varphi_k$. Ясно, что нумерация φ сводится к ψ .

Далее для каждого i такого, что $m_{k-1}<i<m_k-1$ положим $\psi_i=\tau_{v(i)}$, где $v(i)=i-2k$ Очевидно, $\tau_n=\psi_{v^{-1}(n)}$.

Нам осталось определить функции с номерами m_k-1, $k=0,1,\ldots$ Будем перечислять все начальные куски функции φ_k $(=\psi_{m_k})^{[n]}$ и множество R . Если для некоторого n окажется, что $\varphi_k^{[n]}\in R$, то будем разыскивать $f\in U$ такую, что $f^{[n]}=\varphi_k^{[n]}$ Если такие $\varphi_k^{[n]}$ и f будут найдены, то $\psi_{m_k-1}=f$, в противном случае ψ_{m_k-1} нигде не определена.

Определение ψ завершено. Легко видеть, что ψ - вычислимая нумерация ч.р.ф. и так как φ сводится к ψ , то ψ - гёделевская нумерация.

Построим стратегию H , обладающую требуемыми в теореме свойствами.

Сначала мы опишем вспомогательную стратегию F_1 . На номере пустого кортежа полагаем F_1 равной нулю. Пусть теперь $\alpha=(n_0,\ldots;\ n_k)$, $\beta=(n_0,\ldots n_{k-1})$, F_1 уже определена на β и $F(\langle\beta\rangle)=r$. Перечисляем в течение k тактов начальные куски функций $\varphi_0, \varphi_1,\ldots,\varphi_k$ и множество R Если за это время не будет найдено $\varphi_j^{[i]}=(n_0,\ldots,n_i)\in R$, где $i\leqslant k$, $j\leqslant k$, то полагаем $F_1(\langle\alpha\rangle)=0$. Предположим теперь, что такой фрагмент найден; пусть φ_j - функция с минимальным номером, для которой такой фрагмент найден. Мы полагаем $F_1(\langle\alpha\rangle)=m_j-1$.

Определим теперь вспомогательную стратегию F_2 Пусть $\alpha=(n_0,n_1,\ldots,n_k)$ - произвольный кортеж. Перечисляем в течение k тактов множество R . Если за это время в R будет найден кортеж $\beta=(n_0,\ldots,n_i)\in R$, $i\leqslant k$ (пусть β имеет наименьшую длину среди них), то, перебирая $\tau_0, \tau_1,$, разыскиваем такую τ_r , что $\tau_r^{[i]}=\beta$. Если такая τ_r будет найдена, то $F_2(\langle\alpha\rangle)=v^{-1}(r)$, где v - функция, определенная при построении ψ ; если τ_r с нужным свойством не найдётся, то $F_2(\langle\alpha\rangle)$ не определено. Наконец, если $\beta \in R$ не будет перечислен, то $F_2(\langle\alpha\rangle)=0$

Отметим следующие два свойства стратегии F_2 : I) F_2 определена на любой функции $\mathcal{C}_n$: 2) на любой $\mathcal{C}_n$ F_2 меняет гипотезу не более одного раза. Первое свойство очевидно, а второе следует из пункта а) определения I. Очевидно также, что $\lim\limits_{k\to\infty} F_2(\langle \mathcal{C}_n^{[k]}\rangle)$ является номером $\mathcal{C}_n$ в нумерации ψ

Стратегию H на произвольном кортеже α определим как

$$min\,(F_1(\langle\alpha\rangle),\quad F_2(\langle\alpha\rangle)).$$

Нетрудно убедиться, что H предельно синтезирует минимальные ψ -номера для U В самом деле, из определения F_1 легко следует, что при $r>k$

$$F_1(\langle \mathcal{C}_n^{[r]}\rangle) \leqslant F_1(\langle \mathcal{C}_n^{[k]}\rangle). \tag{3.I}$$

Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} F_1(\langle \mathcal{C}_n^{[k]}\rangle)$ существует. Из свойства 2 стратегии F_2 вытекает также и существование $\lim\limits_{k} H(\langle \mathcal{C}_n^{[k]}\rangle)$ Далее в силу пункта а) определения I и определения функций ψ_{m_k-1} гипотезами F_1 на функции $\mathcal{C}_n$ могут быть только номера $\mathcal{C}_n$ $\lim\limits_{k} F_2(\langle \mathcal{C}_n^{[k]}\rangle)$ также является номером $\mathcal{C}_n$ в ψ Из определения H и (3,I) следует, что существует и равен $min_{\psi}(\mathcal{C}_n)$

Подсчитаем теперь число гипотез стратегии H на произвольной функции $\mathcal{C}_n$. Пусть $i=v^{-1}(n)$ и $m_{k-1}<i<m_k-1$ Из определения H следует, что её гипотезами на $\mathcal{C}_n$ кроме нуля могут быть только i , $m_{r_1}-1$, $m_{r_2}-1, \dots$, $m_{r_p}-1$ где все $m_{r_j}-1 < i$ и для любого j, $1 \leqslant j \leqslant p-1$, $r_j > r_{j+1}$, причём в силу (3.I) и свойства (2) стратегии F_2 эти гипотезы перебираются именно в таком порядке. Таким образом, число смен гипотез H на $\mathcal{C}_n$ не превосходит $k+1$ (мы учитываем, что первой гипотезой может быть 0). В промежутке (m_{k-1}, m_k-1) номера получают функции $\mathcal{C}_j$, где $a_k \leqslant j \leqslant a_{k+1}$. Следовательно $f(n) \geqslant f(a_k) \geqslant k$. Считая, что ψ_{m_0} например, нигде не определенная функция, мы получаем, что

$$H^{min}_{U,\mathcal{C},\psi}(\mathcal{C}_n) \leqslant k$$

, следовательно,

$$H^{min}_{\mathcal{U},\mathcal{T},\varphi}(\mathcal{T}_n) \leq f(n).$$

(Для $n \leq a_\varphi$ нужно воспользоваться тем, что $f(n) \geq f(0) \geq 1$).
Теорема доказана.

Используя иммунность множества M_φ минимальных номеров ч.р.ф. в произвольной гёделевской нумерации φ, нетрудно показать, что ни для какого бесконечного класса $\mathcal{U}$ минимальные φ-номера нельзя идентифицировать с равномерно ограниченным числом гипотез.

ТЕОРЕМА 3. Ни для какого бесконечного класса $(\mathcal{U},\mathcal{T}) \in GN^{min}_\varphi$ не существует стратегии H, предельно идентифицирующей минимальные φ-номера для $\mathcal{U}$, и константы c таких, что

$$\forall n \left(H^{min}_{\mathcal{U},\mathcal{T},\varphi}(n) \leq c \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что такие H и c существуют, причём $\overset{\infty}{\forall} n \left(H^{min}_{\mathcal{U},\mathcal{T},\varphi}(n) < c+1 \right)$ и $\overset{\infty}{\exists} n \left(H^{min}_{\mathcal{U},\mathcal{T},\varphi}(n) = c \right)$

Пусть $\forall n \geq m \left(H^{min}_{\mathcal{U},\mathcal{T},\varphi}(n) < c+1 \right)$. Перечислим все минимальные начальные фрагменты функций $\mathcal{T}_m, \mathcal{T}_{m+1}$, на которых H в точности c раз меняет гипотезы. Мы одновременно получим эффективно перечислимый класс функций $\mathcal{U}' = \{\mathcal{T}_{m_1}, \mathcal{T}_{m_2}, \dots, \mathcal{T}_{m_k}, \dots\}$
Для каждой из этих функций $\mathcal{T}_{m_k}$ найдем начальный фрагмент, на котором H выдает $min_\varphi(\mathcal{T}_{m_k})$. Таким образом, в M_φ содержится рекурсивно перечислимое множество. Но M_φ иммунно (см., например, [6]) - противоречие. Теорема доказана.

4. Для функций $H_{\mathcal{U},\mathcal{T}}$, описывающих обычную предельную идентификацию в [2] и [4] получены следующие оценки:

Для каждого класса $(\mathcal{U}, \mathcal{T})$ существует стратегия H предельно идентифицирующая $(\mathcal{U}, \mathcal{T})$ и такая, что

$$\forall n \left(H_{\mathcal{U},\mathcal{T}}(n) \leq \log_2 n + O(\log_2 n) \right).$$

Существует такой класс $(\mathcal{U}, \mathcal{T})$, что для любой стратегии H, предельно идентфицирующей $(\mathcal{U}, \mathcal{T})$, найдется константа c такая, что

$$\forall n \left(H_{\mathcal{U},\mathcal{T}}(n) > \log_2 n - c \right).$$

Можно ли получить какие-нибудь оценки подобного рода для предельной идентификации минимальных номеров? В силу теорем I и 2 функция $H^{min}_{\mathcal{U},\mathcal{T},\psi}$ весьма зависит от нумерации ψ Поэтому здесь естественна следующая постановка вопроса: существует ли такая о.р.ф. $g(n)$ что

I) для каждого класса $(\mathcal{U},\mathcal{T}) \in GN^{min}$ существуют гёделевская умерация φ и стратегия H предельно идентифицирующая минимальные ψ -номера для $\mathcal{U}$, такие, что

$$\forall n (H^{min}_{\mathcal{U},\mathcal{T},\varphi}(n) \leqslant g(n) + o(g(n))) ; \tag{4.I}$$

2) существует класс $(\mathcal{U},\mathcal{T}) \in GN^{min}$, что для любых делевской нумераци φ и стратегии H, если H предельно идентифицирует минимальные φ -номера для $\mathcal{U}$ то

$$\forall n (H^{min}_{\mathcal{U},\mathcal{T},\varphi}(n) \geqslant g(n) + o(g(n)). \tag{4.2}$$

В общем случае, однако, даже в указанном "слабом" смысле такая оценка отсутствует.

ТЕОРЕМА 4. Для любой о.р.ф. f существует такой класс $(\mathcal{U},\mathcal{T}) \in GN^{min}$, что для любой гёделевской нумерации φ и для любой стратегии H, предельно идентифицирующей минимальные φ -номера для $\mathcal{U}$,

$$\overset{\infty}{\exists} n (H^{min}_{\mathcal{U},\mathcal{T},\psi}(n) > f(n)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F(n,i,x)$ - трехместная ч.р.ф., универсальная для всех двухместных ч.р.ф $u_n(i,x)$ Каждую функцию $u_n(i,x)$ мы будем интерпретировать как вычислимую нумерацию функций $u_{n,i}(x)$, $i=0,1,$ Очевидно, среди этих нумераций имеются все гёделевские.

Требуемый класс $(\mathcal{U},\mathcal{T})$ будет построен в параллельном процессе "опровержения" всех функций $u_n(i,x)$ (рассматриваемых как вычислимые нумераци.).

Пусть f - произвольная о.р.ф.

Мы опишем процедуру перечисления класса $(U, \mathcal{C})$, одновременно определяя для каждой тройки (k, i, j) ч.р.ф. $u_{g(k,i,j)}$. Для каждой тройки (k, i, j) процедура будет состоять из конечного или бесконечного множества ш а г о в, а каждый шаг будет состоять из конечного или бесконечного множества т а к т о в (в последнем случае не произойдет перехода к следующему шагу), соответствующих тактам вычислений $u_{k,i}$ на произвольных x. Пусть $c(k,i,j,r)$ - канторовская нумерация всех четверок (k,i,j,r). В нашей процедуре $c(k,i,j,r)$ -й такт является r-ым тактом в процессе построения $u_{g(k,i,j)}$. Функции в $(U, \mathcal{C})$ могут заноситься на любом такте процедуры, кроме того, на некоторых тактах процедуры числам $\leqslant j$ могут быть сопоставлены произвольные тройки (k,i,j).

Зафиксируем тройку (k,i,j) и опишем относящуюся к ней часть процедуры. Пусть

Полагаем $u_{g(k,i,j)}(0)=0$.

<u>ШАГ m</u>. Пусть $u_{g(k,i,j)}$ определена к этому моменту на всех $x \leqslant s$. Пусть для $x \leqslant s$ $u_{g(k,i,j)}(x)=v_x$ и для $x > s$ $v_x = 0$. Мы предположим также, что к этому моменту $u_{k,i}$ вычислена на $\langle v_0\rangle, \langle v_0, v_1\rangle, \ldots, v_0, \ldots, v_{t-1}\rangle$ и проделано d тактов вычисления u на $\alpha=(v_0, v_1, \ldots, v_t)$.

Пусть, далее, $\mathcal{C}_n$ - последняя, занесенная к этому моменту в U функция, равная на нуле числу a.

Будем последовательно находить $u(\langle\alpha\rangle)$, $u(\langle\alpha, v_{t+1}\rangle)$, $u(\langle\alpha, v_{t+1}, \quad , v_n\rangle)$, , начиная вычисление $u(\alpha)$ с $d+1$ такта и полагая на x-ом такте вычислений $u_{g(k,i,j)}(s+x)=0$. Если на некотором такте x_1 оказывается вычисленным $u(\langle\alpha, v_{t+1},\ldots, v_{n_1}\rangle)=p_1\leqslant j$, причем числу p_1 ещё не сопоставлена тройка (k,i,j), то при определении $u_{g(k,i,j)}$ число $s+x_1$ пропускаем и параллельно указанному процессу начинаем вычислять $u_{k,p_1}(s+x_1)$. Может случиться, что в некоторый момент x_2 вычисление $u_{k,p_1}(s+x_1)$ не будет закончено, но уже будет вычислено $u(\langle\alpha, v_{t+1},\ldots,v_{n_2}\rangle)=p_2\leqslant j$, отличное от p_1 и ещё не отмеченное тройкой (k,i,j). Тогда вычисление $u_{k,p_1}(s+x_1)$ прекращаем, полагаем $u_{g(k,i,j)}(s+x_1)=0$, пропускаем $s+x_2$ при определении $u_{g(k,i,j)}(s+x_1)=0$ и параллельно вычислениям $u(\langle\alpha, v_{t+1},\ldots, v_n\rangle)$ и определению $u_{g(k,i,j)}$ начинаем вычислять $u_{k,p_2}(s+x_2)$.

Снова может случиться, что в некоторый момент x_3 $u_{\kappa,p_2}(s+x_2)$ ещё не будет вычислено, но будет найдено отличное от p_2 и не отмеченное тройкой (κ,i,j) число $p_3 < j$ Поступаем в этом случае по аналогии с тем, как уже было сказано выше, и т. д.

Описанный процесс вычислений и определения $u_{g(\kappa,i,j)}$ продолжаем до наступления одного из следующих событий:

A^m Найдётся такое $n>s$ что $u(\langle\alpha, v_{t+1},\dots,v_n\rangle)>j$

B^m. Для некоторого p_z вычисление $u_{\kappa,p_z}(s+x_z)$ заканчивается.

C^m. Найдется такое n что в последовательности

$$u(\langle v_0\rangle),\ u(\langle v_0,v_1\rangle),\dots,u(\langle\alpha\rangle),u(\langle\alpha,v_{t+1}\rangle),\dots,u(\langle\alpha,v_{t+1},\dots,v_n\rangle)$$

$f(r)$ раз меняются значения.

Если ни одно из перечисленных событий не наступит, то шаг бесконечен и перехода к шагу $m+1$ не происходит.

Если первым наступит событие A^m, то прекращаем вычисл $u_{\kappa,p_z}(s+x_z)$ для последнего найденного p_z (есл такие были), полагаем $u_{g(\kappa,i,j)}(s+x_z)=0$ и переход к шагу $m+1$.

Если первым наступит событие B^m, то полагаем

$u_{g(\kappa,i,j)}(s+x_z)=sign\ u_{\kappa,p_z}(s+x_z)+1$ и сопоставляем трой ку (κ,i,j) номеру p_z. Пусть $\varphi_{r'}$ – последняя занесенная к этому моменту в U функция. Полагаем $\varphi_{r'+1}=\beta 0^{\infty}$ где $\beta=u_{g(\kappa,i,j)}^{(s+x_z)}$. Переходим к шагу $m+1$

Если первым наступит событие C^m, то на всех x, на к торых $u_{g(\kappa,i,j)}$ ещё не определена, полагаем $u_{g(\kappa,i,j)}(x)=0$ и часть процедуры, относящуюся к (κ,i,j) завершаем.

Шаг I отличается тем, что в самом его начале (т.е. на та те $c(\kappa,i,j,0)$) в U заносится функция $a0^{\infty}$

Описание процедуры завершено. Эта процедура является обо щением конструкции из доказательства теоремы I [5].

Из описания процедуры легко следует, что $g(\kappa,i,j)$ о.р.ф. и каждая функция является либо о.р.ф., либо ч.р.ф., н определенной в одной точке. Очевидно также, что U – эффект но перечислимый класс.

Покажем, что $\mathcal{U} \in GN^{min}$. Для этого нам, в частности, понадобится один результат Р.В.Фрейвалда, полученный в [I] (определение класса $GN^{h\text{-}min}$ см. в [I]):

$$\exists h\,(\mathcal{U} \in GN^{h\text{-}min}) \Longrightarrow \mathcal{U} \in GN^{min}$$

Таким образом, достаточно показать, что

$$\exists \varphi\, \exists h\,(\mathcal{U} \in GN_{\varphi}^{h\text{-}min}).$$

Зафиксируем гёделевскую нумерацию φ. Мы перестроим нумерацию φ в вычислимую нумерацию ч.р.ф. ν, обладающую следующими свойствами:

а) каждая τ_n имеет номер в ν ;

б) для каждой τ_n $min_{\nu}(\tau_n) \leqslant min_{\varphi}(\tau_n)$.

Если h – функция, сводящая ν к φ, то, очевидно,

$$h(min_{\nu}(\tau_n)) \leqslant h(min_{\varphi}(\tau_n)) \tag{4.3}$$

Предположим, что мы умеем предельно идентифицировать минимальные ν-номера *) для $(\mathcal{U}, \tau)$. Применяя к гипотезам h, мы в силу (4.3) получим стратегию, предельно идентифицирующую почти минимальные φ-номера для функций из $\mathcal{U}$

Итак, нам осталось построить вычислимую нумерацию ν со свойствами а) и б) и показать, что для $(\mathcal{U}, \tau)$ предельно идентифицируемы минимальные ν-номера.

Зафиксируем произвольную φ_ℓ. Если $\varphi_\ell(0)$ не определено или $\neg(\exists k\, \exists i\, \exists j\,(c(k,i,j,0))=\varphi_\ell(0))$, то ν_ℓ нигде не определена.

Предположим теперь, что $\varphi_\ell(0)=c(k,i,j,0)=a$. Полагаем $\nu_\ell(0)=a$. Далее моделируем процедуру построения класса $(\mathcal{U}, \tau)$; в особенности нас будут интересовать шаги, относящиеся к тройке (k, i, j). Каждому такому шагу m мы сопоставим шаг m определения ν_ℓ.

<u>ШАГ m</u>. На всех x, кроме $s+x_1$, $s+x_2$, (см. описание шага m для $u_{g(k,i,j)}$) мы полагаем $\nu_\ell(x)=0$ <u>одновременно с определением $u_{g(k,i,j)}$ на x.</u>

*) Определение предельной идентификации очевидным образом переносится на любые вычислимые нумерации ч.р.ф. (см. также [7]).

Для $s+x_1$ мы вычисляем $\varphi_\ell(s+x_1)$ параллельно с $u_{k,p_1}(s+x_1)$. Если до завершения вычисления $\varphi_\ell(s+x_1)$ будет найдено p_2, то полагаем $\nu_\ell(s+x_1)=u_{g(k,i,j)}(s+x_1)=0$; в противном случае - $\nu_\ell(s+x_1)=\varphi_\ell(s+x_1)$.

Аналогичным образом поступаем для x_2, x_3 и т.д.

Определение нумерации ν завершено. Очевидно, ν вычислимая нумерация ч.р.ф.

Нетрудно убедиться, что нумерация ν обладает следующим свойством: если $\varphi_\ell \in U$, то $\nu_\ell = \varphi_\ell$. Отсюда легко вытекают нужные нам свойства а) и б).

Осталось показать, что существует стратегия H предельно идентифицирующая минимальные ν -номера для U.

Пусть $\alpha=(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ произвольный кортеж натуральных чисел. Если $\neg(\exists k \exists i \exists j\ (a_0=c(k,i,j,0))$, то $H(\langle\alpha\rangle)=0$.

Предположим, теперь, что $a=c(k,i,j,0)$. Вычисляем в течение n тактов

$$u_{k,i}(\langle a_0\rangle), u_{k,i}(\langle a_0, a_1\rangle), \ldots, u_{k,i}(\langle a_0, a_1, \ldots, a_n\rangle).$$

Ищем $p=u_{k,i}(\langle a_0, a_1, \quad, a_{n_1}\rangle)$ - самое правое вычисленное за это время значение такое, что:

(I) Все $u_{k,i}(\langle a_0, a_1, \ldots, a_m\rangle)$, где $m < n_1$ определены к этому моменту и $p \neq u_{k,i}(\langle a_0, a_1, \ldots, a_{n_1-1}\rangle)$.

(II) В последовательности

$$u_{k,i}(\langle a_0\rangle), u_{k,i}(\langle a_0, a_1\rangle), \ldots, u_{k,i}(\langle a_0, a_1, \ldots, a_{n_1}\rangle) \quad (4.4)$$

не более чем $f(r)$ смен значений, где τ_r - последняя функция, занесенная в (U, τ) в части процедуры, соответствующей тройке (k,i,j) к n -ому такту этой части процедуры.

(III) $p \leq j$

Если такое p не найдется, то $H(\langle\alpha\rangle)=0$. Предположим теперь, что такое p найдено. Нетрудно убедиться, что это число p соответствует некоторому p_2 на некотором шаге m процедуры построения $u_{g(k,i,j)}$. А именно проделав n тактов процедуры построения $u_{g(k,i,j)}$ мы найдем $p_2=p$. Числу p_2 соответствует точка $s+x_2$ (см. описание шага m).

ли $n < s+x_z$ то полагаем $H(\langle\alpha\rangle)=0$.
если $n \geqslant s+x_z$ то в течение n тактов вычисляем

$$\nu_0^{[n]},\quad \nu_1^{[n]},\quad \nu_n^{[n]}.$$

Найдем минимальное $\ell \leqslant n$ такое, что ν_ℓ определено на всех $y \leqslant s+x_z$,

$$\nu_\ell^{[s+x_z]}=(a_0,a_1,\ldots,a_{s+x_z})$$

и за n тактов не найдено y такого, что

$$\nu_\ell(y)\neq a_y$$

(если такое ν_ℓ не будет найдено, то $H(\langle\alpha\rangle)=0$). Полагаем $H(\langle\alpha\rangle)=\ell$

Очевидно, что H - ч.р.стратегия. Покажем сначала, что для любой τ_v $\lim\limits_\kappa H(\langle \tau_v^{[\kappa]}\rangle)$ существует.

Пусть $\tau_v(0)=c(\kappa,i,j,0)$.

Заметим, сначала, что в процедуре построения $u_{g(\kappa,i,j)}$ событие B^m может происходить не более $j+1$ раз. Следовательно, на шагах, соответствующих (κ,i,j) ,в U заносится не более чем конечное число функций. Пусть последняя из них получает номер $\tilde r$. В таком случае начиная с некоторого n $f(r)$ в условии (П) для τ_v будет всегда равно $f(\tilde r)$ Отсюда следует, что число p при возрастании n может меняться не более $f(\tilde r)$ раз, т.е. начиная с некоторого n для вычисления $H(\langle\tau_v^{[n]}\rangle)$ используется одно и то же $p=p_z$ а следовательно, и $s+x_z$; теперь нетрудно убедиться, что $\lim\limits_n H(\langle\tau_v^{[n]}\rangle)=\ell$ где

$$\ell=\min\left\{i \mid \tau_v^{[s+x_z]}=\nu_i^{[s+x_z]}\right. \tag{4.5}$$

и $\neg\exists y\,(\nu_i(y)$ сходится и $\left.\nu_i(y)\neq\tau_v(y))\right\}$.

Убедимся теперь, что $\ell=\min_y(\tau_v)$ Из (4.5) легко следует, что $\ell \leqslant \min_y(\tau_v)$ Остается показать, что $\nu_\ell=\tau_v$ Мы уже отмечали выше, что после некоторого n-ого такта процедуры построения $u_{g(\kappa,i,j)}$ идущей параллельно вычислению $\lim\limits_n H(\langle\tau_v^{[n]}\rangle)$, число $s+x_z$ не возрастает. Из определения ν_ℓ легко следует, что в таком случае на всех $x > s+x_z$ функция ν_ℓ одновременно с $u_{g(\kappa,i,j)}$

полагается равной нулю. Следовательно, ν_e определена на всех x. Из (4.5) теперь получаем, что $\nu_e = \tau_v$.

Итак, $\mathcal{U} \in GN^{min}$.

Докажем теперь вторую часть утверждения теоремы: для любой стратегии H предельно идентифицирующей минимальные φ номера для $\mathcal{U}$,

$$\exists^{\infty} n \left(H^{min}_{\mathcal{U},\tau,\varphi}(n) \geqslant f(n) \right). \tag{4.6}$$

Допустим, что стратегия H предельно идентифицрует минимальные φ -номера для $\mathcal{U}$ и

$$\forall n \geqslant n_0 \left(H^{min}_{\mathcal{U},\tau,\varphi}(n) < f(n) \right). \tag{4.7}$$

Пусть $\varphi = u_k(n, x)$ и i_0 -столь большое число, что $u_{k,i_0}(x) = H(x)$ (т.е. i_0 - номер H в φ) и $c(k, i_0, j, 0) > n_0$ для любого j Из описания $\mathcal{U}$ легко следует, что в таком случае все функции τ_n заносимые в $\mathcal{U}$ на шагах соответствующих тройкам (k, i_0, j), $j = 0,1,$ имеют номера $n > n_0$

Так как $\varphi = u_k$ - гёделевская нумерация ч.р.ф. , то, очевидно, существует такая о.р.ф. $\tilde{g}(j)$ что $\varphi_{\tilde{g}(j)} = u_{g(k,i_0,j)}$ По теореме о неподвижной точке существует такое b, что $\varphi_{\tilde{g}(b)} = \varphi_b$

Мы покажем, что $\varphi_b \in \mathcal{U}$ и число смен гипотез H на φ_b не меньше $f(r)$, где r -номер φ_b в $(\mathcal{U}, \tau)$.

Рассмотрим произвольный шаг m процедуры построения $u_{g(k,i_0,b)}$ функция $\mu = \alpha\, v_{t+1}\, v_{t+2}$ как легко убедиться, уже занесена в $\mathcal{U}$ поэтому гипотезы $u(\langle\alpha\rangle), u(\langle\alpha\, v_{t+1}$ должны быть определены. Так как $\mu \in \mathcal{U}$, то в этой послед... ельности одно из чисел $u(\langle\alpha\, v_{t+1} \dots v_n\rangle) = H(\langle\alpha\, v_{t+1} \dots v_n\rangle)$ должно быть φ -номером μ. Отсюда следует, что одно из A^m, B^m, или C^m на этом шаге долж... наступит... вытекает, что $\varphi_b = u_{g(k,i_0,b)}$ определяется 1,2,..., m соответствующих (k, i_0, b), на... е совпадает с последней заносимой в $\mathcal{U}$ в течение этих шагов функцией.

З... етим далее, что событие B^m может наступить лишь .

нечное число раз. В самом деле, как нетрудно убедиться, наша процедура устроена таким образом, что при наступлении B^m некоторый номер $p < b$ опровергается и ему сопоставляется тройка (k, i_0, b). Поэтому при наступлении следующего $B^{m'}$ должен опровергаться $p' < b$ отличный от p.

Событие A^m может наступить также не более чем конечное число раз, поскольку $\lim\limits_n H(\langle \varphi_\ell^{[n]} \rangle) = \min_\varphi(\varphi_\ell) < b$.

Таким образом, на некотором шаге m наступит событие C^m, но это противоречит (4.7).

Используя то обстоятельство, что φ имеет бесконечно много номеров в F, мы легко можем получить (4.6). Теорема доказана.

5. Итак, в общем случае верхняя оценка (4.1) отсутствует. В этом разделе мы укажем два достаточно естественных типа стратегий, для которых оценки (4.1) и (4.2) имеют место.

Пусть φ – геделевская нумерация.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 ([8]). Назовем стратегию H р е г у л я р н о й на классе U, если для каждой $f \in U$ и для любого k $f^{[k]} = \varphi_r^{[k]}$, где $r = H(\langle f^{[k]} \rangle)$.

Другими словами, номер $H(\langle f^{[k]} \rangle)$ должен быть с о г л а с о в а н с $f^{[k]}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Назовем стратегию H с т р о г о р е г у л я р н о й на классе U, если H регулярна на U и для каждых $f \in U$ и k $H(\langle f^{[k]} \rangle)$ – номер общерекурсивной функции.

Построенная в [2] стратегия F, предельно идентифицирующая (в обычном смысле) перечислимый класс (U, τ) с оценкой

$$F_{U,\tau}(n) \le \log_2 n + o(\log_2 n) \qquad (5.1)$$

является строго регулярной. Поэтому, говоря об обычной предельной идентификации перечислимых классов, по существу достаточно ограничиться строго регулярными стратегиями. В связи с этим представляется достаточно естественным рассмотрение строго регулярных стратегий, идентифицирующих минимальные номера для перечислимых классов.

Нетрудно убедиться, что теорема I имеет место и для строго регулярных стратегий: в самом деле, стратегия F, построенная при доказательстве теоремы I, является строго регулярной если такой является и F_1. Поэтому о верхней оценке для $H^{min}_{U,\mathcal{C},\varphi}$, как и в п.4, можно говорить лишь для специально выбранной нумерации ψ.

Оказывается, что для строго регулярных стратегий оценки (4.I) и (4.2) справедливы, если в качестве $f(n)$ взять $\log_2 n$.

В дальнейшем обозначения GN^{min}, GN^{min}_{φ} мы будем использовать, имея в виду идентификацию с помощью строго регулярных стратегий.

ТЕОРЕМА 5. Для каждого $(U,\mathcal{C}) \in GN^{min}$ существует гёделевская нумерация ψ и строго регулярная стратегия H такие, что $U \in GN^{min}_{\psi}$ посредством H и

$$\forall n \left(H^{min}_{U,\mathcal{C},\psi}(n) \leqslant \log_2 n + o(\log_2 n)\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть φ - такая гёделевская нумерация, что $U \in GN^{min}_{\varphi}$. Перестроим нумерацию φ в нужную нам нумерацию ψ.

Пусть F_0 - строго регулярная стратегия, посредством которой $U \in GN^{min}_{\varphi}$. Так как гипотезами F_0 на любой $\mathcal{C}_n$ являются номера о.р.ф., то F_0 нетрудно перестроить в стратегию $\bar{F}_0$, также предельно идентифицирующую минимальные φ -номера для U, обладающую следующим свойством:

(ж) если $\bar{F}_0(\langle f^{[k]}\rangle) = r$, то $\bar{F}_0$ не меняет гипотезы на f до тех пор, пока не найдется такое $n > k$, что $\bar{F}_0(\langle f^{[n]}\rangle) < r$ или не будет обнаружено такое x, что $f(x) \neq \varphi_r(x)$; в последнем случае r больше никогда не будет гипотезой $\bar{F}_0$ на f.

Рассмотрим множество номеров $0,1,\ldots,m$. Из свойства (ж) следует, что на $f \in U$ переходить от гипотезы $\leqslant m$ к гипотезе $> m$ стратегия $\bar{F}_0$ может не более m +I раз. Следовательно, и обратный переход возможен не более m +I раз. Из свойства (ж) также легко следует, что переходить от одной гипотезы к другой в пределах промежутка $0,1,\ldots,m$ стратегия $\bar{F}_0$ может не более $(m+1)^2$ раз. Таким образом, менять произвольную гипотезу на гипотезу $\leqslant m$ стратегия $\bar{F}_0$ может не более $(m+1)^3$ раз.

Выберем рекурсивную возрастающую последовательность сел $\{a_m\}$ $m=0,1,\dots$ таким образом, что

$$\frac{(m+1)^3}{\log_2 \log_2 m} \xrightarrow[m\to\infty]{} \infty \qquad (5.2)$$

Пусть F_1 – строго регулярная стратегия, пределы идентифицирующая φ -номера для $(\mathcal{U}, \mathcal{T})$ в обычном смысле, для которой имеет место (5.I); пусть $g(n)$ неубывающая о.р.ф. такая, что для всех n $F_{1\,\mathcal{U},\mathcal{T}}(n) \leqslant g(n)$ и

$$\forall n\,(\log_2 n \leqslant g(n)) \qquad (5.3)$$

$$\overset{\infty}{\forall} n\,(g(n) \leqslant \log_2 n + o(\log_2 n)) \qquad (5.4)$$

Для каждого m через b_m обозначим число $m+1+\sum\limits_{i=0}^{a_m-1} g(i)$.

Теперь приступим к определению нумерации ψ. Для каждого m полагаем $\psi_{b_m} = \varphi_m$.

Далее разделим каждый промежуток (b_m, b_{m+1}) на последовательность кусков с длинами $g(a_m), g(a_m+1), \dots, g(a_{m+1}-1)$. Рассмотрим множество номеров r из i -го такого куска (т.е. $m+1+\sum\limits_{j=0}^{a_m+i-1} g(j) < r < m+1+\sum\limits_{j=0}^{a_m+i} g(j)$). Пусть s – максимальный номер в этом куске. Для произвольного номера $s-k$ из этого множества полагаем $\psi_{s-k} = \varphi_\ell$, где ℓ – очередная гипотеза F_1 на $\mathcal{T}_{a_m+i}$ после k смен гипотез; если F_1 на $\mathcal{T}_{a_m+i}$ меняет гипотезы меньше k раз, то ψ_{s-k} нигде не определена.

Ясно, что ψ – гёделевская нумерация ч.р.ф.

Определим требуемую в формулировке стратегию H. Нам понадобятся вспомогательные стратегии $\tilde{F}_0$ и $\tilde{F}_1$.

Пусть $\alpha = (v_0, v_1, \ \ , v_n)$ – произвольный кортеж и $\beta = (v_0, v_1, \ \ , v_{n-1})$

Если $F_1(\langle\alpha\rangle)$ не определено, то $\tilde{F}_1(\langle\alpha\rangle)$ не определено.

Если $F_1(\langle\alpha\rangle)$ определено и равно $F_1(\langle\beta\rangle)$ то $\tilde{F}_1(\langle\alpha\rangle) = \tilde{F}_1(\langle\beta\rangle)$.

[illegible] $F_1(\langle\alpha\rangle)$ определено [illegible] $F_1(\langle\alpha\rangle) \neq F_1(\langle\beta\rangle)$

[illegible] ное p такое, что $\mathcal{T}_p^{(n)} = \alpha$ [illegible] $p = a_m + i$. Получаем $\tilde{F}_1(\langle\alpha\rangle) = s-k$ (см. описание нумерации ψ), где k - число смен гипотез F_1 на α

Из определения нумерации ψ и стратегии F_1 следует, что для любой $\tilde{\tau}_p \in U$ $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{F}_1(<\tilde{\tau}_p^{[n]}>)$ существует и является некоторым ψ -номером $\tilde{\tau}_p$, и при этом число смен гипотез $\tilde{F}_1$ на $\tilde{\tau}_p$ не превосходит числа смен гипотез F_1 на $\tilde{\tau}_p$, т.е. $g(p)$

Определим $\tilde{F}_0$. Если $\tilde{F}_0(<\alpha>)=m$, то $\tilde{F}_0(<\alpha>)=b_m$.

Пусть теперь $H(<\alpha>)=min(\tilde{F}_0(<\alpha>),\ \tilde{F}_1(<\alpha>))$ Из определения $\tilde{F}_0$ и $\tilde{F}_0$ и указанных выше свойств стратегии $\tilde{F}_1$ следует, что для всех n

$$\lim_{k\to\infty} H(<\tau_n^{[k]}>)=min_\psi(\tau_n).$$

H строго регулярна, поскольку такими являются F_0, $\tilde{F}_0$, F_1 и $\tilde{F}_1$

Подсчитаем число смен гипотез H на произвольной функции τ_n Стратегия $\tilde{F}_1$ меняет гипотезы на τ_n не более $g(n)$ раз. Пусть $n=a_m+i$ Нетрудно проверить, что H меняет гипотезы на τ_n не более $g(n)+(m+1)^3$ раз. Так как g не убывает, то $g(n) \geqslant g(a_m)$ Теперь из (5.2) и (5.3) и (5.4) легко следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Следующая теорема показывает, что оценка $\log_2 n$ является асимптотически точной.

ТЕОРЕМА 6. Существует класс $(U,\tau) \in GN^{min}$ такой, что для любой гёделевской нумерации ψ и для любой строго регулярной стратегии H если $(U,\tau)\in GN_\psi^{min}$ посредством H, то для всех n

$$H_{U,\tau,\psi}^{min}(n) \geqslant \log_2 n-2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Конструкция класса (U,τ) является по существу комбинацией конструкций из доказательств теорем 2 и 4 из [4].

Зафиксируем произвольную гёделевскую нумерации ψ.

В класс U заносятся все функции $i\alpha 0^\infty$ где α произвольное двоичное слово длины i Пусть H. - такая регулярная стратегия, что $U\in GN_\psi^{min}$ посредством H В силу регулярности, H, очевидно, по крайней мере по одной из функций $i\alpha\, 0^\infty$ должна менять гипотезы не менее i

Занумеруем теперь все пары (i, κ), где I $\leqslant$ к $\leqslant$ 2 следующим образом. Номер пары (i, κ) – натуральное число c двоичным разложением

$$\underbrace{1\gamma_1\gamma_2 \quad \gamma_i}_{\overline{\kappa-1}}$$

где $\overline{к-I}$ – двоичное разложение числа к которому приписано столько нулей, чтобы общая длина была равна i

Определим теперь нумерацию τ для $\mathcal{U}$ Пусть $\tau_0 = 0^\infty$ Если n –номер (i, κ), то τ_n полагаем равной к-й в лексикографическом порядке функци вида $i\alpha\, 0^\infty \in \mathcal{U}$ не является номером (i, κ), то $\tau_n = 0^\infty$.

Для достаточно больших n наибольшее i такое, что $\underline{\text{II} \ldots \text{I}}$ не превосходит n , обладает свойством $i \geqslant \log_2 n-2$ Следовательно, среди функ с τ-номерами $r \leqslant n$ должна присутствовать такая функция, на которой H не менее $\log_2 n-2$ будет менять гипотезы. Таким образом

$$H^{min}_{\mathcal{U},\tau,\varphi}(n) \geqslant \log_2 n-2$$

Класс $\mathcal{U}$, как легко видеть, является эффективно кретным. Теорему 2, почти не изменяя рассуждения, можн казать для предельной идентификаци имальных номеров строго регулярными стратегиями. Таким образом, $\mathcal{U} \in GN^{min}$ Теорема доказана.

Оценки типа (4.I) (4.2) можно получить и для предельной идентификации минимальных номеров стратегиями несколько иного типа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Назовем стратегию H с и л ь н р е г у л я р н о й на классе $\mathcal{U}$, если H регулярна на $\mathcal{U}$ и для любой $f \in \mathcal{U}$, отвергнув некоторую гипотезу на f, H больше к ней не возвращается.

Стратегия F , для которой имеет место (5.I), является сильно регулярной.

Для сильно регулярных стратегий, почти не меняя доказательств, можно получить теоремы I,2,3,6. Теорема 5 также остается справедливой, но конструкция нумерации ψ в ее доказательстве несколько усложняется.

8. В заключение отметим один вопрос, остающийся открытым. Теорема I, как уже отмечалось, для строго регулярных стратегий остается справедливой. Однако, если рассматривать достаточно узкий подкласс множества всех геделевских нумераций конструкция из доказательства теоремы I (для строго регулярных стратегий) уже не проходит. Если существует достаточно просто описываемый подкласс геделевских нумераций, для которого теорема I неверна, то для него можно надеяться получить теорему 5 в значительно более сильной форме: для каждого $(\mathcal{U}, \mathcal{C}) \in GN^{min}$ и для к а ж д о й нумерации из данного подкласса существует стратегия H (строго регулярная) с верхней оценкой $\log_2 n$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фрейвалд Р.В., Кинбер Е.Б. Предельная идентификация минимальных геделевских номеров.-Настоящий сборник,с.3-34.
2. Барздинь Я.М., Фрейвалд Р.В. О прогнозировании общерекурсивных функций.-"Доклады АН СССР",1972,т.206,№3, с.521-524.
3. Ершов Ю.Л. Теория нумераций I. Новосибирск,1967, 174с.
4. Барздинь Я.М., Фрейвалд Р.В. Прогнозирование и предельный синтез эффективно перечислимых классов функций.-"Уч. зап. Латв. ун-та", 1974, т.210, с.101-111.
5. Кинбер Е.Б. О предельном синтезе почти минимальных геделевских номеров.-"Уч. зап. Латв. ун-та", 1974, т.210, с.221-223.
6. Meyer A.R. Program size in restricted programming languages.-"Information and Control",1972,v.21,p.382-394.
7. Фрейвалд Р.В. О предельном синтезе номеров общерекурсивных функций в различных вычислимых нумерациях.-"Доклады АН СССР", 1974, т.219, № 4, с.812-813.
8. Barzdin J.M. Inductive inference of automata, functions and programs.-Proceedings of International Mathematical Congress, Vancouver, 1974, p.771-776.

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ СИНТЕЗ ПРОГРАММ

К.М.Подниекс
ВЦ ЛГУ им. П.Стучки

По данным значениям $\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(m)$ требуется восстановить программу, вычисляющую функцию φ. Задача считается решенной, если последовательность программ-гипотез $\{h_m\}$ стабилизируется на верной гипотезе.

§ I. Аппарат

Следуя [I], методом программирования будем называть любую 2-местную ч.р. функцию $\tau(n,x)$. Программа n "вычисляет" функцию $\tau_n(x)$. В этой статье рассматриваются только о.р. методы программирования, т.е. по существу, нумерованные классы о.р. функций. Нумерованный класс (U,τ) состоит из эффективно перечислимого класса U о.р. функций вместе с некоторой вычислимой нумерацией τ класса U. Понятие τ-программы и τ-номера данной функции тождественны.

Определение вероятностных стратегий (В-стратегий) см. в [2]. В случае синтеза программ (τ-номеров) случайная величина $M(\varphi,m)$, соответствующая согласно В-стратегии M начальному куску $\varphi(0), \ldots, \varphi(m)$, именуется уже не прогнозом, а гипотезой. Гипотеза n считается верной (относительно функции φ и нумерации τ), если $\tau_n=\varphi$, т.е. если n является τ-программой φ. Гипотеза $M(\varphi,m)$, как правило, верна лишь с некоторой вероятностью.

Пусть В-стратегия M определена над вероятностным пространством (Ω, B, P). Осуществление любого элементарного события $w\in\Omega$ превращает гипотезу $M(\varphi,m)$ в некоторое натуральное число или в ∞. Каждой функции φ и элементарному событию $w\in\Omega$ соответствует поэтому вполне определенная последовательность гипотез В-стратегии M.

На пространстве (Ω, B, P) определены следующие вероятности:

(а) вероятность $P_m(M, \varphi)$ того, что на шаге m $(m \geq -1)$ стратегия M исправляет гипотезу, т.е.

$$P_m(M, \varphi) = P\{M(\varphi, m) \neq M(\varphi, m+1)\};$$

(б) вероятность $P\{M, \varphi, \leq k\}$ того, что на функции φ стратегия M сделает не более k исправлений гипотезы;

(в) вероятность $P\{M, \varphi, \tau\}$ того, что последовательность гипотез В-стратегии M, выданная на функции φ, стабилизируется на τ-программе φ

Приведем одно достаточное условие для $P\{M, \varphi, \tau\} = 1$. Будем говорить, что В-стратегия M τ-нормальна на функции φ, если для всех m, n таких, что

$$n = \infty \vee (\exists x \leq m)\ \tau_n(x) \neq \varphi(x),$$

из $P\{M(\varphi, m) = n\} > 0$ следует

$$P\{(\forall_k^\infty)\ M(\varphi, k) \neq n \mid M(\varphi, m) = n\} = 1.$$

Грубо говоря, нормальная В-стратегия с вероятностью 1 "убирает" всякую гипотезу, неверность которой стала очевидной.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Если В-стратегия M τ-нормальна на функции φ, то $\sum_m P_m(M, \varphi) < \infty$ влечет $P\{M, \varphi, \tau\} = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме Бореля-Кантелли [3], условие

$$\sum_m P_m(M, \varphi) < \infty$$

гарантирует, что с вероятностью 1 гипотезы M на φ стабилизируются, начиная с некоторого места. Из определения нормальности следует, что стабилизация на ∞ или на неверном τ-номере возможна лишь с вероятностью 0.

Предложение I доказано.

Определение рекурсивных, финитных на $\mathcal{U}$, всюду финитных В-стратегий см. в [2]. Следуя Я.М.Барздиню, В-стратегию M будем называть τ - р е г у л я р н о й, если для всех $\varphi \in \mathcal{U}$ и всех m, n условие $P\{M(\varphi, m)=n\}>0$ влечет

$$n \leq N \wedge (\forall x < m)\ \tau_n(x)=\varphi(x).$$

Таким образом, τ -регулярная В-стратегия на функции $\varphi \in \mathcal{U}$ всегда с вероятностью 1 выдает гипотезу, согласованную с имеющейся информацией о функции φ. Всякая τ-регулярная В-стратегия τ -нормальна на любой функции $\varphi \in \mathcal{U}$

В § 3,4 нам потребуются два вспомогательных утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть L - не более чем конечное множество натуральных чисел и пусть $K(L)$ -множество всех кортежей $(i_1 \quad i_s)$ таких, что

$$(i_1 < i_2 < \quad < i_s) \wedge (\forall x \leq s)\ i_x \in L,$$

включая сюда и пустой кортеж Λ Тогда для любой числовой последовательности $\{x_n\}$ имеет место равенство

$$\sum_{\tau \in K(L)} (x_{i_1}-1) \quad (x_{i_s}-1) = \prod_{j \in L} x_j.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\{x_n(t)\}$ последовательность независимых случайных величин, принимающих только значения $0,1$ и зависящих от какого-либо параметра t Обозначим $\sum\limits_n P\{x_n(t)=1\}=a(t)$.

(I) Если в каком-либо процессе изменения t

$a(t) \leq b(t) < \infty$, где $b(t) \to \infty$, то

$$P\{\sum_n x_n \leq b(t)+\sqrt{b(t)\log b(t)}\} \to 1.$$

(2) Если $a(t) \geq b(t) < \infty$ и $b(t) \to \infty$, то

$$P\{\sum_n x_n \geq b(t)-\sqrt{b(t)\log b(t)}\} \to 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО легко вытекает из неравенства Чебышева.

§ 2. Результаты

Первым результатом о вероятностном синтезе τ -номеров является следующая теорема Я.М.Барздиня и Р.В.Фрейвалда [4].

Для любого нумерованного класса (U,τ) можно построить рекурсивную В-стратегию M такую, что $P\{M,\varphi,\tau\}=1$ для всех $\varphi\in U$ и при этом если $n\to\infty$, то

$$P\{M,\tau_n, < \log_2 n\}\to 1.$$

Аналогичная оценка для детерминированных стратегий имеет порядок n (см. [4,5]).

В настоящей статье показывается, что для В-стратегий оценку $\log_2 n$ можно улучшить до $\ln n$ (т.е. приблизительно до $0.69 \log_2 n$) и что эта новая оценка асимптотически точна. Таким образом, если для восстановления программ (по данным значениям функции) используются В-стратегии, то каждое исправление гипотезы восстанавливает в среднем 1.45 битов программы.

ТЕОРЕМА I. Для любого нумерованного класса (U,τ) можно построить рекурсивную В-стратегию M такую, что $P\{M,\varphi,\tau\}=1$ для всех $\varphi\in U$ и при этом, если $n\to\infty$, то

$$P\{M,\tau_n, \leqslant \ln n+\sqrt{\log n}\,\log\log n\}\to 1.$$

Стратегию M можно сделать либо всюду финитной, либо τ-регулярной и финитной на U

ТЕОРЕМА 2. Можно построить нумерованный класс (U,τ) такой, что для любой рекурсивной В-стратегии M если $P\{M,\varphi,\tau\}=1$ для всех $\varphi\in U$, то существует возрастающая последовательность $\{n_k\}$ такая, что при $k\to\infty$:

$$P\{M,\tau_{n_k}, \leqslant \ln n_k-\sqrt{\log n_k}\,\log\log n_k\}\to 0.$$

Эти теоремы доказываются в § 3,4,5,6.

§ 3. Доказательство еоремы I

Верхняя оценка $\ln n$ получается с помощью В-стратегии Барздиня-Фрейвалда, для которой ими получена оценка $\log_2 n$ (см. [4]). Предлагаемый новый метод оценки возник при рассмотрении несколько более общей ситуации, в которой игнорируется вычислимость.

Пусть $(\mathcal{U}, \tau)$ – произвольный (счетный) нумерованный класс всюду определенных функций типа $N \to N$. Возьмем некоторое распределение вероятностей на N

$$\pi = \{ \pi_n \mid n \in N \},$$

где $\pi_n > 0$ для всех n и $\sum \pi_n = 1$ Через $Б\Phi_{\tau\pi}$ обозначим следующую В-стратегию.

Определение гипотезы $Б\Phi_{\tau\pi}(\varphi, m)$ при условии $Б\Phi_{\tau\pi}(\varphi, m-1) = n$. Если $n = \infty$, то и $Б\Phi_{\tau\pi}(\varphi, m) = \infty$. Если $n \in N \wedge \tau_n(m) = \varphi(m)$ (т.е. гипотеза n еще не устарела), то $Б\Phi_{\tau\pi}(\varphi, m) = n$ с вероятностью 1. Если же $\tau_n(m) \neq \varphi(m)$, берется сумма $\sigma = \sum \{ \pi_i \mid i \in \mathcal{E} \}$, где $\mathcal{E}$ – множество всех подходящих (пока) гипотез, т.е.

$$\mathcal{E} = \{ i \mid (\forall x \leq m)\ \tau_i(x) = \varphi(x) \}.$$

Если $\sigma = 0$, то $Б\Phi_{\tau\pi}(\varphi, m) = \infty$. Если же $\sigma > 0$ то полагаем для всех $i \in \mathcal{E}$: $Б\Phi_{\tau\pi}(\varphi, m) = i$ с вероятностью π_i / σ.

Легко видеть, что в случае, когда $(\mathcal{U}, \tau)$ – нумерованный класс о.р. функций (с вычислимой нумерацией), а $\{\pi_n\}$ – рекурсивная последовательность конструктивных действительных чисел, то $Б\Phi_{\tau\pi}$ рекурсивная В-стратегия.

Грубо говоря, "тактика" стратегии $Б\Phi_{\tau\pi}$ состоит в следующем. Она "считает", что ей подаются значения функции φ которая "случайно" (в соответствии с распределением π) выбрана из нумерации τ. Гипотезу, которая согласуется с появляющимися новыми данными о функции φ, стратегия не старается исправлять. Но если эта гипотеза приходит в противоречие с новыми данными, стратегия $Б\Phi_{\mathcal{C}\mathcal{R}}$ вычисляет вероятность $\mathcal{R}_i/\mathcal{B}$ того, что подается функция $\mathcal{C}_i$ из тех, которые неотличимы от φ на основе полученных до сих пор данных. Новая гипотеза стратегии $Б\Phi_{\mathcal{C}\mathcal{R}}$ получается имитацией вычисленного распределения $\{\mathcal{R}_i/\mathcal{B}\}$.

В-стратегия $Б\Phi_{\mathcal{C}\mathcal{R}}$, очевидно, $\mathcal{C}$-регулярна. Поэтому для доказательства того, что $P\{Б\Phi_{\mathcal{C}\mathcal{R}}, \varphi, \mathcal{C}\} = 1$ для всех $\varphi \in U$, достаточно установить для всех $n \in N$ конечность суммы $\sum\limits_m P_m(Б\Phi_{\mathcal{C}\mathcal{R}}, \mathcal{C}_n)$.

ЛЕММА I. $\sum\limits_m P_m(Б\Phi_{\mathcal{C}\mathcal{R}}, \mathcal{C}_n) \leqslant \ln \frac{1}{\mathcal{R}_n}$.

Кроме того, нам нужна будет следующая

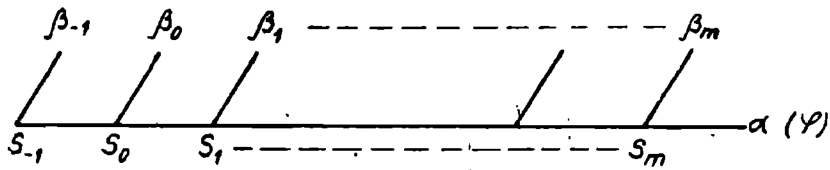
ЛЕММА 2. Пусть фиксирована функция $\varphi \in U$. Тогда независимы события

$$A_m = \{Б\Phi_{\mathcal{C}\mathcal{R}}(\varphi, m) \neq Б\Phi_{\mathcal{C}\mathcal{R}}(\varphi, m+1)\}.$$

Любопытно отметить, что события $\{A_m\}$ (т.е. "стратегия $Б\Phi_{\mathcal{C}\mathcal{R}}$ на шаге m исправляет гипотезу") не обнаруживают никаких содержательных признаков независимости. Формальному критерию независимости они, тем не менее, удовлетворяют, и этого достаточно для применения результатов теории вероятностей.

Сначала докажем лемму 2, после этого - лемму I.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Рассмотрим дерево функций, до некоторого места совпадающих с φ



Каждой точке этого дерева можно приписать вероятность того, что произвольная функция ψ, выбранная из нумерации $\mathcal{C}$ в соответствии с распределением $\mathcal{R}$, пройдёт через эту точку. Пусть β_m - вероятность того, что ψ пройдет через точку S_m в сторону от функции φ Через B_m обозначим сумму

$$B_m = \beta_m + \beta_{m+1} +$$

Тогда точке S_m приписана вероятность $\alpha + B_m$, где α вероятность, приписанная всей ветке φ

Через β_{ij} $(i \geqslant -1,\ j \geqslant i)$ обозначим вероятность того, что в случае исправления гипотезы в точке S_i стратегия $Б\Phi_{\varphi\mathcal{R}}$ направит свою новую гипотезу через точку S_j в сторону от φ. Очевидно

$$\beta_{ij} = \frac{\beta_j}{\alpha + B_i} \tag{I}$$

Вероятность исправления гипотезы в точке S_m выражается через числа β_{ij}

$$P\{A_m\} = \sum \beta_{-1,\, i_1} \cdot \beta_{i_1+1,\, i_2} \cdots \beta_{i_k+1,\, m},$$

где суммирование идет по всем кортежам $(i_1 \quad i_k)$ таким, что $k \geqslant 0$ и $-1 \leqslant i_1 < i_2 < \quad < i_k < m$.

Вероятность совместных исправлений гипотезы в точках $S_{m_1},\quad S_{m_t}$ (где $m_1 < m_2 < \quad < m_t$) можно выразить аналогично

$$P\{A_{m_1} \cap \quad \cap A_{m_t}\} = \sum \beta_{-1,\, i_1} \cdot \beta_{i_1+1,\, i_2} \cdots \beta_{i_k+1,\, m_t}$$

где суммирование идет по всем кортежам $(i_1 \quad i_k)$ таким, что $k \geqslant 0$, $-1 \leqslant i_1 < i_2 < \quad < i_k < m_t$ и среди чисел i_x встречаются все числа $m_1, \ldots, m_{t-1}$ В силу (I), вероятность $P\{A_{m_1} \cap \quad \cap A_{m_t}\}$ зависит только от чисел $\alpha, \beta_{-1}, \beta_0, \quad, \beta_m$ и $B_{m+1} = \beta_{m+1} +$ где $m = m_t = \max\ m_i$. Введем новые переменные γ_j $(-1 \leqslant j \leqslant m+1)$:

$$\alpha + B_{m+1} = \alpha\gamma_{m+1}$$

$$\beta_m = \alpha(\gamma_m - 1)\gamma_{m+1}$$

$$\alpha + B_m = \alpha\gamma_m\gamma_{m+1}$$

$$\beta_{m-1} = \alpha(\gamma_{m-1}-1)\gamma_m\gamma_{m+1}$$

$$\alpha + B_{m-1} = \alpha\gamma_{m-1}\gamma_m\gamma_{m+1}$$

$$\alpha + B_j = \alpha\prod_j^{m+1}\gamma \qquad \beta_j = \alpha(\gamma_j - 1)\prod_{j+1}^{m+1}\gamma$$

Здесь $j = -1, 0, \quad , m$ Таким образом,

$$\beta_{ij} = \frac{\beta_j}{\alpha + B_i} = \frac{\gamma_j - 1}{\prod_i^j \gamma},$$

$$\beta_{-1, i_1}\beta_{i_1+1, i_2} \quad \beta_{i_k+1, m} \quad \frac{(\gamma_{i_1}-1) \quad (\gamma_{i_k}-1)(\gamma_m - 1)}{\prod_{-1}^m \gamma}$$

Вынесем за скобки произведение $(m_t = m)$:

$$(\gamma_{m_1} - 1)\dots(\gamma_{m_t} - 1)\frac{1}{\prod_{-1}^m \gamma}.$$

В выражении для $P\{A_{m_1} \cap \dots \cap A_{m_t}\}$ тогда суммируются произведения

$$(\gamma_{i_1} - 1) \qquad (\gamma_{i_k} - 1)$$

по всем кортежам $(i_1 \quad i_k) \in K(L)$ где

$$L = \{-1, 0, 1, \dots, m\} - \{m_1, \quad , m_t\}$$

(определение $K(L)$ см. в § I, предложение 2). По предложению 2, сумма эта равна $\prod_{i\in L}\gamma_i$ т.е.

$$P\{A_{m_1} \cap \dots \cap A_{m_t}\} = (\gamma_{m_1} - 1)\dots(\gamma_{m_t} - 1)\frac{\prod_{i\in L}\gamma_i}{\prod_{-1}^m \gamma} =$$

$$= \frac{\gamma_{m_1} - 1}{\gamma_{m_1}} \cdot \quad \cdot \frac{\gamma_{m_t} - 1}{\gamma_m}.$$

При $t = 1$ мы имели бы

$$P\{A_m\} = P_m(БФ_{\tau\pi}, \varphi) = \frac{\gamma_m - 1}{\gamma_m} = \frac{\beta_m}{\alpha + B_m}.$$

Таким образом,

$$P\{A_{m_1} \cap \quad \cap A_{m_t}\} = P\{A_{m_1}\} \cdot P\{A_{m_2}\} \cdot \quad \cdot P\{A_{m_t}\},$$

что и доказывает независимость событий $\{A_m\}$.

Лемма 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ I. Мы уже знаем, что

$$P(БФ_{\tau\pi}, \varphi) = \frac{\beta_m}{\alpha + B_m} = 1 - \frac{\alpha + B_{m+1}}{\alpha + B_m}.$$

Суммируем по всем m, учитывая тривиальное неравенство.

$$1 - x \leqslant \ln \frac{1}{x}.$$

$$\sum_m \frac{\beta_m}{\alpha + B_m} \leqslant \ln \prod_m \frac{\alpha + B_m}{\alpha + B_{m+1}}.$$

Частичное произведение

$$\prod_{m \leqslant s} \frac{\alpha + B_m}{\alpha + B_{m+1}} = \frac{\alpha + B_{-1}}{\alpha + B_{s+1}}.$$

Переходя к пределу при $s \to \infty$, получаем:

$$\sum_m P_m(БФ_{\tau\pi}, \varphi) \leqslant \ln \frac{\alpha + B_{-1}}{\alpha}.$$

Если $\varphi = \tau_n$, то $\alpha \geqslant \pi_n$ (см. начало доказательства леммы 2). Кроме того, $\alpha + B_{-1} \leqslant 1$ как вероятность в точке S_{-1} (см. там же). Таким образом,

$$\ln \frac{\alpha + B_{-1}}{\alpha} \leqslant \ln \frac{1}{\pi_n}.$$

Лемма I доказана.

Леммы I,2 дают нам всю информацию о B-стратегии $Б\Phi_{\tau\pi}$, необходимую для получения искомой оценки. По предложению I (см. § I) и лемме I,

$$P\{M, \varphi, \tau\} = 1$$

для всех $\varphi \in U$. Если τ -вычислимая нумерация и мы зафиксируем (считая, что $1/0 = 1$ и $\ln 0 = 1$):

$$\pi_n = \frac{c}{n(\ln n)^2},$$

то B-стратегия $Б\Phi_{\tau\pi}$ станет рекурсивной. По лемме I,

$$\sum_m P_m(Б\Phi_{\tau\pi}, \tau_n) \leqslant \ln n + O(\log \log n). \qquad (2)$$

Введем случайные величины

$$x_m = \begin{cases} 1, \text{ если } Б\Phi_{\tau\pi}(\tau_n, m) \neq Б\Phi_{\tau\pi}(\tau_n, m+1), \\ 0 \text{ иначе} \end{cases}$$

Согласно (2):

$$\sum_m P\{x_m = 1\} \leqslant \ln n + O(\log \log n),$$

кроме того, по лемме 2 случайные величины x_m независимы. Выполнены все условия предложения 3 (см. § I), поэтому при $n \to \infty$

$$P\{Б\Phi_{\tau\pi}, \tau_n, \leqslant \ln n + \sqrt{\log n} \log \log n\} \to 1. \qquad (3)$$

Теорема I доказана.

Остается показать, как из B-стратегии $Б\Phi_{\tau\pi}$ получить рекурсивную всюду финитную B-стратегию Q и рекурсивную финитную на U и τ -регулярную B-стратегию R сохраняя при этом оценку (3).

В обоих случаях берется рекурсивная последовательность рациональных чисел $\{\varepsilon_m\}$ такая, что $\prod(1+\varepsilon_m) < \infty$

Определение гипотезы $Q(\varphi, m)$ $(m \geqslant -1)$ при условии $Q(\varphi, m-1) = n$. Если $\tau_n(m) = \varphi(m)$, то $Q(\varphi, m) = n$ с вероятностью 1. Если же $\tau_n(m) = \varphi(m)$, ищется $p \leqslant m$ такое, что $p \in \mathfrak{I}$, где

$$\mathfrak{I} = \{p \mid (\forall x \leqslant m)\ \tau_p(x) = \varphi(x)\}.$$

Если такого p не существует, $Q(\varphi, m) = n$ с вероятностью 1. Если же $p \leqslant m \wedge p \in \mathfrak{I}$ найдено, начинаем вычисление рациональных приближений чисел π_n, $n \in \mathfrak{I}$. Продолжая это до тех пор, пока не найдем двоично рациональное распределение $(\lambda_{n_1}, \ldots, \lambda_{n_k})$ такое, что $\sum_i \lambda_{n_i} = 1$ и для всех i

$$n_i \in \mathfrak{I} \wedge \lambda_{n_i} \leqslant (1+\varepsilon_m)\frac{\pi_{n_i}}{\sum_{n \in \mathfrak{I}} \pi_n}$$

Затем полагаем для $i = 1, 2, \ldots, k$: $Q(\varphi, m) = n_i$ с вероятностью λ_{n_i}.

Так как нумерация τ вычислима, а распределение $\{\pi_n\}$ – рекурсивно, то рекурсивна и В-стратегия Q. Кроме того, Q очевидно, всюду финитна.

Чтобы вместо всюду финитной стратегии Q получить рекурсивную, τ-регулярную и финитную на U стратегию R, в определении $Q(\varphi, m)$ поиск $p \leqslant m$ со свойством $p \in \mathfrak{I}$ нужно заменить на безусловный поиск p с этом свойством.

ЛЕММА 3. Для всех $\varphi \in U$ и всех $k \in N$

$$P\{Q, \varphi, \geqslant k\} = P\{R, \varphi, \geqslant k\} \leqslant$$
$$\leqslant P\{Б\Phi_{\tau\pi}, \varphi, \geqslant k\} \cdot \prod_m (1+\varepsilon_m).$$

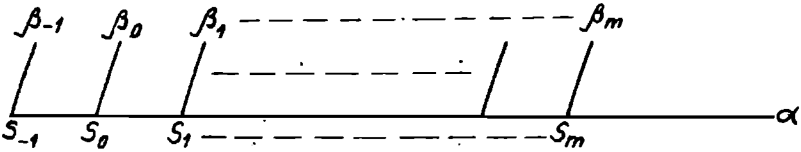
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\varphi \in U$ равенство

$$P\{Q, \varphi, \geqslant k\} = P\{R, \varphi, \geqslant k\}$$

очевидно, ибо стратегия Q – "растянутый" вариант стратегии R. Докажем неравенство

$$P\{R, \varphi, \leqslant k\} \leqslant P\{Б\Phi_{\tau\pi}, \varphi, \geqslant k\} \cdot \prod_m (1+\varepsilon_m).$$

Рассмотрим дерево всех функций класса $\mathcal{U}$, совпадающих до некоторого места с функцией φ



Обозначения см. в доказательстве леммы 2. Вероятность β_{ij} $(i \leqslant j)$ того, что гипотеза стратегии $Б\Phi_{\tau\mathfrak{R}}$, определяемая в точке S_i, проведет через точку S_j в сторону от функции φ выражается так:

$$\beta_{ij} = \frac{\beta_j}{\alpha + B_i}$$

где $B_i = \beta_i + \beta_{i+1} + \cdots$. Для стратегии R соответствующие вероятности β'_{ij} обладают свойством

$$\beta'_{ij} \leqslant (1+\varepsilon_i)\,\beta_{ij}. \tag{4}$$

Вероятность $P\{R, \varphi, \geqslant \kappa\}$ можно выразить через β'_{ij} :

$$P\{R, \varphi, \geqslant \kappa\} = \sum \beta'_{-1,i_1}\,\beta'_{i_1+1,i_2} \cdots \beta'_{i_{\kappa-1}+1,i_\kappa},$$

где суммирование идет по всем кортежам $(i_1 \quad i_\kappa)$ таким, что

$$-1 \leqslant i_1 < i_2 < \quad i_\kappa .$$

Теперь, используя (4), получаем искомое неравенство

$$P\{R, \varphi, \geqslant \kappa\} \leqslant \prod_m (1+\varepsilon_m) \cdot \sum \beta_{-1,i_1}\,\beta_{i_1+1,i_2} \quad \beta_{i_{\kappa-1}+1,i_\kappa}$$

$$= \prod_m (1+\varepsilon_m) \cdot P\{Б\Phi_{\tau\mathfrak{R}}, \varphi, \geqslant \kappa\}.$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 3 позволяет перенести без изменений свойство (3) стратегии $Б\Phi_{\tau\mathfrak{R}}$ на стратегии Q, R. Сохраняется для Q, R также свойство

$$(\forall \varphi \in \mathcal{U})\; P\{Б\Phi_{\tau\mathfrak{R}}, \varphi, \tau\} = 1.$$

Этим завершается доказательство теоремы I.

§ 4. Доказательство теоремы 2

Нумерованный класс $(\mathcal{U}, \tau)$, доказывающий нижнюю оценку $\ln n$, строится с помощью специальной диагональной процедуры, перебирающей одну за другой все вероятностные машины (в порядке их естественной нумерации $\{\mathfrak{M}_i\}$). Для каждой машины $\mathfrak{M}_i$ определяется серия блоков, каждый блок состоит из конечного числа функций. Если $\mathfrak{M}_i$ реализует В-стратегию, которая с вероятностью 1 синтезирует τ-номера всех функций некоторого блока, то на одной из функций блока эта машина с достаточно большой вероятностью достаточно много раз исправляет гипотезу. Из серий блоков, соответствующих всевозможным машинам $\mathfrak{M}_i$ складывается нумерация τ

Такого рода диагональные конструкции впервые использовались Я.М.Барздинем [4,5,6].

Рассмотрим следующую последовательность независимых случайных величин $\{z_i \mid i \geqslant 1\}$:

$$P\{z_i = 1\} = \frac{1}{i}, \quad P\{z_i = 0\} = 1 - \frac{1}{i}.$$

Таким образом,

$$\sum_{i=2}^{n} P\{z_i = 1\} = \ln n + O(1).$$

По предложению 3 (см. § I) отсюда следует, что

$$P\left\{\sum_{2}^{n} z_i \geqslant \ln n - \sqrt{\log n}\,\log\log n\right\} \to 1. \tag{5}$$

Имея в виду это свойство случайных величин $\{z_i\}$, нетрудно понять значение следующей леммы.

ЛЕММА 4. Пусть даны: вероятностная машина $\mathfrak{M}$, натуральные числа k, n, $k < n$, рациональное число $\varepsilon > 0$. Тогда можно построить набор n функций

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$$

такой, что если машина $\mathfrak{M}$ с вероятностью 1 синтезирует в пределе σ -номер любой функции набора, то на одной из этих функций $\mathfrak{M}$ исправляет гипотезу $\geqslant k$ раз с вероятностью

$$\geqslant (1-\varepsilon)\, P\left\{ \sum_{1}^{n} z_i \geqslant k \right\}.$$

Доказательство см. ниже, § 5.

Если взять в лемме 4

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_i, \quad n = 2^j, \quad k = j\ln 2 - \sqrt{j}\log j, \ \varepsilon = 2^{-j},$$

то в силу (5), если машина $\mathfrak{M}_i$ с вероятностью 1 синтезирует σ -номера всех 2^j функций набора σ то на одной из этих функций с вероятностью, которая стремится к 1, $\mathfrak{M}_i$ исправляет гипотезу не менее $j\ln 2 - \sqrt{j}\ \log j$ раз.

Блок $Б_{ij}$, соответствующий паре чисел (i,j), легко можно устроить таким образом, чтобы:

(а) все функции блока начинались словом $1^{\langle i,j\rangle}0$, где $\langle i,j\rangle$ - канторовский номер пары,

(б) "σ -номерами" считались не числа $1, 2, \quad n$, а любые другие, наперед выбранные n чисел.

Выбор этих чисел определяется положением функций блока $Б_{ij}$ в искомой нумерации τ которая складывается из всевозможных таких блоков.

Введем следующее кодирование всех троек (i,j,s) таких, что $0 \leqslant s < 2^j$ (это кодирование заимствовано из доказательства теоремы 4 работы [6]). Кодом тройки (i,j,s) будет число, имеющее двоичную запись

$$1\underbrace{0\ldots 0\alpha_1 \quad \alpha_\ell}_{j}1\underbrace{0 \quad 0}_{i} \qquad (6)$$

где $\alpha_1 \quad \alpha_\ell$ - двоичная запись числа s В случае $j=0$ для $s=0$ берется "пустая запись".

Определение нумерованного класса (U, τ), доказывающего теорему 2. Если число n не имеет двоичной записи вида (6), функцию τ_n полагаем тождественно равной нулю.

Если же n имеет вид (6) для тройки (i,j,s) , где $0 \leqslant s < 2^j$, функцию τ_n полагаем равной s-ой функции блока $Б_{ij}$ При этом в процессе построения блока $Б_{ij}$ τ-номерами считаются все 2^j чисел вида (6), соответствующие паре (i,j).

Очевидно

$$2^{i+j+1}+2^i \leqslant \text{код}\ (i,j,s) \leqslant 2^{i+j+2}-2^i$$

Пусть рекурсивная В-стратегия M синтезирует с вероятностью 1 τ-номер любой функции полученного класса U Пусть $\mathfrak{M}_i$ – машина, реализующая стратегию M. Для каждого $j \geqslant 0$ в блоке $Б_{ij}$ найдется функция, на которой M исправляет гипотезу не менее $j\ln 2-\sqrt{j}\log j$ раз с вероятностью

$$\geqslant (1-2^{-j})\ P\left\{\sum_{2}^{2^j} z_i \geqslant j\ln 2-\sqrt{j}\log j\right\} \qquad (7)$$

Обозначим τ-номер этой функции через n_j . Очевидно

$$2^{i+j+1} < n_j < 2^{i+j+2}$$

Отсюда следует, что последовательность $\{n_j\}$ – возрастающая, и что

$$\log_2 n_j - i - 2 < j < \log_2 n_j - i - 1.$$

Таким образом, на функции τ_{n_j} В-стратегия M исправляет гипотезу не менее

$$j\ln 2-\sqrt{j}\log j > \ln 2\cdot\log_2 n_j - \sqrt{\log n_j}\,\log\log n_j$$

раз с вероятностью (7), которая при $j\to\infty$ стремится к 1.

§ 5. Доказательство леммы 4

Лемма 4 сформулирована в начале § 4. Итак, дана вероятностная машина $\mathfrak{M}$, даны натуральные числа n и k $k<n$, и рациональное число $\varepsilon>0$ Требуется построить набор n функций σ_1 σ_2 σ_n такой, что если $\mathfrak{M}$ реализует В-стратегию, которая с вероятностью 1 синтезирует (в пределе) σ -номер любой функции σ_j то на одной из этих функций $\mathfrak{M}$ исправляет гипотезу не менее k раз с достаточно большой вероятностью, именно с вероятностью

$$\geqslant (1-\varepsilon)\, P\Big(\sum_{2}^{n} z_i \geqslant k\Big).$$

Определение случайных величин z_i см. в начале § 4.

Общий ход конструкции набора $(\sigma_1 \quad \sigma_n)$ Рассмотрим только случай $n=4$, $k=2$ Обобщение тривиально.

Процедура $P_{\mathfrak{M}}$ Параллельно вычисляются вероятности всевозможных событий вида

$$\mathfrak{M}(\Lambda)=s_{-1} \wedge \mathfrak{M}(\beta_0)=s_0 \wedge \quad \wedge\, \mathfrak{M}(\beta_0 \quad \beta_m)=s_m ,$$

где $\bar\beta$ - двоичное слово, $\bar s$ - кортеж натуральных чисел. Делается это следующим образом. Параллельно для всех пар двоичных слов $(\bar\alpha, \bar\beta)$ ведутся вычисления на машине $\mathfrak{M}$ при которых на ленте бернуллиевского диатчика записано слово $\bar\alpha$ (воспринимаемое как реализация работы датчика), а на ленте синтезируемой функции - слово $\bar\beta$ (воспринимаемое как начальный кусок функции, принимающей значения 0,1). Вначале каждой паре $(\bar\beta, \bar s)$ где $\bar\beta$ - двоичное слово $\beta_0 \ldots \beta_m$, $\bar s$ - кортеж натуральных чисел s_{-1}, s_0, s_1, , s_m , приписывается пустое множество двоичных слов. Если в описанном процессе наступает ситуация, в которой машина $\mathfrak{M}$ для пары слов $(\bar\alpha, \bar\beta)$ напечатала на входной ленте последовательность чисел $s_{-1}, s_0, s_1, \ldots, s_m$ (соблюдая при этом правила реализации В-стратегий, см. [

§ I), то к множеству слов, уже приписанному паре $(\bar{\beta}, \bar{s})$, прибавляется слово α. Конец определения процедуры $P_{\mathfrak{M}}$.

Параллельно работе процедуры $P_{\mathfrak{M}}$ функции $\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3\,\sigma_4$ получают в качестве значений все новые и новые нули:

$$\sigma_i(0)=0, \qquad \sigma_i(1)=0,$$

Только в некоторые исключительные моменты мы будем вмешиваться в этот процесс и давать функциям σ_i отдельные значения, равные 1.

Первый такой момент наступит, когда процедура $P_{\mathfrak{M}}$ вычислит информацию, достаточную для того, чтобы можно было получить следующее рациональное приближение для распределения некоторой гипотезы $\mathfrak{M}(0^{j_1})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix} \tag{8}$$

где $\sum p_i = 1$ и для всех i

$$p_i \leqslant \frac{1}{1-\delta}\, P\left\{ \mathfrak{M}(0^{j_1}) = i \right\}.$$

Ненаступление ситуации, в которой такое приближение возможно, означает, что для каждого $j \in N$ гипотеза $\mathfrak{M}(0^j)$ неопределена или $=0$ или >4 с вероятностью $\geqslant c\delta$. Но тогда с вероятностью $\geqslant c\delta$ это выполняется для бесконечно многих j одновременно. Получается, что

$$P\{\mathfrak{M}, 0^\infty, \sigma\} \leqslant 1 - c\delta < 1,$$

где (в этом случае) $0^\infty = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4$. Этот случай с точки зрения леммы 4 неинтересен.

Рассмотрим теперь случай, когда распределение (8) получить удается. На основе (8), с помощью алгоритма, который описан ниже, один из номеров 1, 2, 3, 4 исключается в следующем смысле. (Пусть это будет номер 1.) Функция σ_1 вместо очередного $\sigma_1(x_1)=0$ получает значение

$\mathfrak{S}_1(x_1)=1$, а дальше $\mathfrak{S}_1$ полагается тождественно равной 0 Остальные функции $\mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3, \mathfrak{S}_4$ при $x=x_1$ получают значение 0 . Таким образом, функция $\mathfrak{S}_1$ становится отличной от $\mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3, \mathfrak{S}_4$ и в процессе $\mathfrak{S}$ -синтеза этих трех функций гипотезу 1 следует считать неверной.

Второе вмешательство в процесс становления функций $\mathfrak{S}_i$ (теперь уже без $\mathfrak{S}_1$), происходит сразу за первым, если $P_1=0$, если же $P_1>0$, оно происходит, когда на основе информации, вычисленной процедурой $P_{\mathfrak{A}l}$, удается получить следующее приближение распределения гипотезы $\mathfrak{M}(0^{j_2})$ (где $j_2>j_1$) при условии $\mathfrak{M}(0^{j_1})=1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ q_2 & q_3 & q_4 \end{pmatrix} \tag{9}$$

где $\sum q_i=1$ и для всех i

$$q_i \leqslant \frac{1}{1-\delta}\, P\left\{\mathfrak{M}(0^{j_2})=1 \mid \mathfrak{M}(0^{j_1})=1\right\}$$

Ненаступление ситуации, в которой такое приближение возможно, означает, что для всех $j>j_1$ при условии $\mathfrak{M}(0^{j_1})=1$ вероятность того, что $\mathfrak{M}(0^{j})$ неопределено, $=0$, $=1$ или >4 , больше $c\delta$ Тогда $P\{\mathfrak{M}, 0^{\infty}, \mathfrak{S}\}<1$, где $0^{\infty}=\mathfrak{S}_2=\mathfrak{S}_3=\mathfrak{S}_4$ Этот случай можно не разбирать дальше.

В случае же, когда распределение (9) возможно, с помощью алгоритма, который описан ниже, исключается еще одна функция, пусть это $\mathfrak{S}_2$ Мы полагаем $\mathfrak{S}_2(x_2)=1$ и $\mathfrak{S}_3(x_2)=\mathfrak{S}_4(x_2)=0$, кроме того, $\mathfrak{S}_2(x)=0$ для всех $x>x_2$. На этом второе вмешательство в определение набора кончается. Рассматривать распределение $\mathfrak{M}(0^{j_2})$ при условии $\mathfrak{M}(0^{j_1})=i$, где $i=2,3,4$ бесполезно, так как эти $\mathfrak{S}$ -номера пока еще являются верными гипотезами, и надеяться, что $\mathfrak{M}$ заменит их другими, не приходится.

Третье (и последнее при $n=4$) вмешательство в становление набора $\mathfrak{S}_1\ \mathfrak{S}_2\ \mathfrak{S}_3\ \mathfrak{S}_4$ происходит сразу за вторым, если $q_2 = 0 \wedge p_2 = 0$ Если же $q_2 > 0$ и (или) $p_2 > 0$ то сначала ищется $j_3 > j_2$ такое, что можно вычислить распределение (10) и (или) распределение (11). Первое распределение приближает распределение гипотезы $\mathfrak{m}(0^{j_3})$ при условии $\mathfrak{m}(0^{j_1}) = 1 \wedge \mathfrak{m}(0^{j_2}) = 2$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ r_3 & r_4 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

здесь $r_3 + r_4 = 1$ и для $i = 2,3$

$$r_i < \frac{1}{1-\delta} P\left\{ \mathfrak{m}(0^{j_3}) = i \mid \mathfrak{m}(0^{j_1}) = 1 \wedge \mathfrak{m}(0^{j_2}) = 2 \right\}.$$

Второе распределение приближает распределение $\mathfrak{m}(0^{j_3})$ при условии $\mathfrak{m}(0^{j_1}) = 2$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ s_3 & s_4 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

здесь $s_3 + s_4 = 1$ и для $i = 3, 4$:

$$s_i < \frac{1}{1-\delta} P\left\{ \mathfrak{m}(0^{j_3}) = i \mid \mathfrak{m}(0^{j_1}) = 2 \right\}.$$

Ненаступление ситуации, в которой нужные приближения возможны, означает, как и прежде, что

$$P\left\{ \mathfrak{m}, 0^{\infty} \quad \sigma \right\} < 1,$$

где $0^{\infty} = \sigma_3 = \sigma_4$ Этот случай незачем разбирать дальше.

В случае же, когда (10) и (или) (11) получить удается, в соответствии с алгоритмом, описанным ниже, исключается еще одна функция, пусть это σ_3 Мы полагаем $\sigma_3(x_3) = 1$, $\sigma_4(x_3) = 0$ а при $x > x_3$ обе функции пусть равны тождественно нулю. Отметим, что условия

$$\mathfrak{m}(0^{j_1}) = 1 \wedge \mathfrak{m}(0^{j_2}) = 3 \vee 4,$$

$$\mathfrak{M}(0^{d_1}) = 3 \vee 4$$

рассматривать не стоит. До исключения σ_3 гипотезы $3, 4$ одинаково верны и нет надежды, что $\mathfrak{M}$ заменит их другими.

Таков общий ход конструкции набора функций, соответствующего машине $\mathfrak{M}$ и натуральному числу n. Описанный ниже алгоритм исключения (мы рассмотрим случай $n=4$, $k=2$, обобщение тривиально) обеспечит, что на функции $\sigma_4 = 0^\infty$ стратегия машины $\mathfrak{M}$ будет работать плохо с достаточно большой вероятностью.

Если машина $\mathfrak{M}$ с вероятностью 1 синтезирует σ-номер любой функции набора $\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3\ \sigma_4$, то в процессе построения этого набора произошли все три акта исключения пусть это были $1\ 2\ 3\ (4)$ В результате получается следующая картина:

<table>
<tr><td colspan="4">1</td><td colspan="2">2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="2">2</td><td>3</td><td>4</td><td colspan="2">2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="8">4</td></tr>
</table>

В четвертой строке с вероятностью 1 фигурирует номер 4 это единственный номер функции $\sigma_4 = 0^\infty$ Разбиение первой строки соответствует распределению $(p_1\ p_2\ p_3\ p_4)$, см.(8). Вторая строка разбивает p_1 в соответствии с распределением $(q_2\ q_3\ q_4)$ (см. (9)). Третья строка разбивает $p_1\ q_2$ в соответствии с $(r_3\ r_4)$, см. (10), она разбивает также p_2 в соответствии с $(s_3\ s_4)$ (см.(11)).

Введем следующие обозначения:

$$|1| = p_1, \qquad |2| = |22| = p_2,$$

$$|12| = p_1 q_2, \qquad |133| = |13| = p_1 q_3,$$

$$|123| = p_1 q_2 r_3, \quad |224| = p_2 s_4.$$

Допустим временно, что эти вероятности совпадают т о ч н о с вероятностями, характеризующими машину $\mathfrak{M}$, на

Пример:

$$|\,1\ 2\ 3\,| = P\left\{\mathfrak{M}(0^{j_1}) = 1 \wedge \mathfrak{M}(0^{j_2}) = 2 \wedge \mathfrak{M}(0^{j_3}) = 3\right\},$$
$$|\,2\ 2\ 3\,| = P\left\{\mathfrak{M}(0^{j_1}) = 2 \wedge \mathfrak{M}(0^{j_3}) = 3\right\}.$$

Тогда вероятность того, что $\mathfrak{M}$ на функции $\sigma_4 = 0^{\infty}$ не менее $k=2$ раза исправляет гипотезу, будет

$$> |123| + |124| + |133| + |223| =$$
$$= |12| + |13| + |223|. \qquad \text{(а)}$$

Если бы мы на последнем шаге исключили не σ_3, а σ_4, то вместо (а) получилось бы

$$|12| + |14| + |224|. \qquad \text{(аа)}$$

Таким образом, если σ_1 и σ_2 уже исключены, следующим резонно исключить σ_3 или σ_4 в зависимости от того, что больше - (а) или (аа). И это разумное решение осуществимо: все слагаемые (а) и (аа) нам известны, как только мы достигли уровня j_3

Рассмотрим теперь уровень j_2. Функция σ_1 уже исключена. Нам известны вероятности $|1|$, $|2|$, $|3|$, $|4|$, $|12|$, $|13|$, $|14|$. Какую из функций исключить - σ_2, σ_3 или σ_4 ? "Качество" решения "исключить σ_2 " можно оценивать значением суммы (а)+(аа)

$$|12| + |13| + |223| + |12| + |14| + |224| =$$
$$= |1| + |22| + |12| = |1| + |2| + |12|. \qquad \text{(б)}$$

К счастью, эта сумма зависит только от вероятностей, известных на уровне j_2 Соответствующие суммы для σ_3 и σ_4

$$|1| + |3| + |13|, \qquad \text{(бб)}$$
$$|1| + |4| + |14|. \qquad \text{(ббб)}$$

Следовательно, большее из чисел (б), (бб), (ббб) и должно определить, какую из функций σ_2, σ_3, σ_4 исключить вслед за σ_1 Это решение осуществимо на уровне j_1

Наконец, рассмотрим уровень j_1 "Качество" решения "исключить сначала σ_1 " будем оценивать суммой (б)+(бб)+ +(ббб)

$$3\cdot|1|+|2|+|3|+|4|+|12|+|13|+|14|=$$
$$=1+3\cdot|1|.$$

Аналогичные показатели для $\mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3, \mathfrak{S}_4$ равны

$$1+3\ |2|,\quad 1+3\cdot|3|,\quad 1+3\cdot|4|$$

Все они вычислимы на уровне j_1 , где известны только вероятности $|i|$ Следовательно, сначала следует исключить $\mathfrak{S}_i$ с наибольшим $|i|$

В этих соображениях и заключается сущность предлагаемого алгоритма, определяющего порядок исключения функций. Правда, здесь нужно еще доказать в общем виде, что все рассмотренные суммирования действительно всегда приводят к возвращению на уровень, где должно быть принято соответствующее решение. Этой проблемой "сокращения хвостов" мы займемся в § 6.

ЗАМЕЧАНИЕ. Рассмотренный простой пример может создать иллюзию, что предлагаемый алгоритм можно заменить более простым. Достаточно рассмотреть случай $n=5$, $k=3$ чтобы убедиться в обратном. Например, после исключения $\mathfrak{S}_1$, "качество" решения "исключить $\mathfrak{S}_i$ " $(i=2,3,4,5)$ характеризуется суммой $|1|+|i|+3\ |1i|$ Вряд ли такой критерий можно угадать без вычислений, подобных проведенным выше.

Если бы имело место наше предположение о совпадении вероятностей, характеризующих машину $\mathfrak{M}$, и вероятностей $|i|$, $|ij|$ и т.д., фигурирующих выше, то в рассмотренном случае $(n=4,\ k=2)$ вероятность того, что на функции $\mathfrak{S}_4=0^\infty$ машина $\mathfrak{M}$ не менее 2 раз исправляет гипотезу, можно оценить следующим путем.

На уровне j_1 мы имели 4 числа:

$$1+3\cdot|1|,\quad 1+3\cdot|2|,\quad 1+3\ |3|,\quad 1+3\cdot|4|$$

Их сумма равна $4+3\cdot 1=7$ т.е. зависит только от n , k и может быть вычислена, зная эти числа. Если мы, действуя согласно алгоритму, исключили $\mathfrak{S}_1$, то

$$1+3\cdot|1|\geqslant\frac{7}{4}.$$

Если затем исключается σ_2 то

$$|1|+|2|+|12|\geqslant\frac{7}{4\cdot 3}.$$

Наконец, исключение σ_3 означает

$$|12|+|13|+|223|\geqslant\frac{7}{4\cdot 3\cdot 2}=\frac{7}{24}.$$

Таким образом, если бы наше предположение было верным, то машина $\mathfrak{M}$ на функции $\sigma_4=0^\infty$ исправляла бы гипотезу $\geqslant 2$ раз с вероятностью $\geqslant\frac{7}{24}$. Но наше предположение неверно - вероятности $|i|$, $|ij|$ и т.д. лишь приближенно характеризуют машину $\mathfrak{M}$ Нетрудно, однако, подобрать число δ, определяющее степень приближения, так, чтобы, не получая для машины $\mathfrak{M}$ оценку $\geqslant\frac{7}{24}$, мы получили все же $\geqslant\frac{7}{24}(1-\varepsilon)$, где ε - наперед заданное число, фигурирующее в лемме 4.

В самом деле,

$$\begin{aligned}
P\{\mathfrak{M},\sigma_4,\geqslant 2\}&\geqslant P\{\mathfrak{M}(0^{j_1})=1\wedge\mathfrak{M}(0^{j_2})=2\}+\\
&+P\{\mathfrak{M}(0^{j_1})=1\wedge\mathfrak{M}(0^{j_2})=3\}+\\
&+P\{\mathfrak{M}(0^{j_1})=2\wedge\mathfrak{M}(0^{j_3})=3\}\geqslant\\
&\geqslant(1-\delta)P_1[(1-\delta)q_2+(1-\delta)q_3]+(1-\delta)P_2(1-\delta)s_3=\\
&=(1-\delta)^2(P_1q_2+P_1q_3+P_1s_3)=\\
&=(1-\delta)^2(|12|+|13|+|223|)\geqslant(1-\delta)^2\frac{7}{24}.
\end{aligned}$$

Если δ выбрать таким, что $(1-\delta)^2\geqslant 1-\varepsilon$, то

$$P\{\mathfrak{M},\sigma_4,\geqslant 2\}\geqslant(1-\varepsilon)\frac{7}{24}$$

Обобщение этих соображений тривиально.

Для доказательства леммы 4 остается проверить, что

$$\frac{7}{24} = P\left\{ \sum_{2}^{4} z_i \geqslant 2 \right\}. \tag{12}$$

где $\{z_i\}$ - независимые случайные величины такие, что

$$P\{z_i = 1\} = \frac{1}{i}, \qquad P\{z_i = 0\} = 1 - \frac{1}{i}.$$

В конкретном случае $n=4$, $k=2$ равенство (I2) легко проверить непосредственно:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{4}+\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{7}{24}$$

Общий случай (n, k - произвольны, $k<n$) доказывается с помощью леммы 3 (см. выше § 3). Заметим, что в оценке

$$|12| + |13| + |223| \geqslant \frac{7}{24}$$

равенство достигается на "симметричной" таблице:

<table>
<tr><td colspan="4">1</td><td colspan="2">2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="2">2</td><td>3</td><td>4</td><td colspan="2">2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="8">4</td></tr>
</table>

Здесь всякое деление (сверху вниз) является делением на равные части: четыре, три, две. Оказывается, что эта таблица в точности передает работу на функции $\sigma_4 = 0^\infty$ В-стратегии $Б\Phi_{\sigma\pi}$ (см. § 3), где

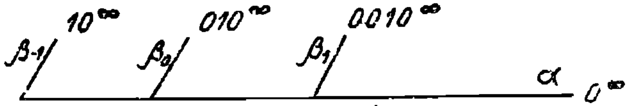
$$\sigma_1 = 10^\infty, \quad \sigma_2 = 010^\infty, \quad \sigma_3 = 0010^\infty, \quad \sigma_4 = 0^\infty,$$

$$\pi = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

В самом деле, $F\Phi_{\sigma\pi}(\Lambda)$ равно $1,2,3$ или 4 с одинаковой вероятностью $1/4$. Далее, при условии $Б\Phi_{\sigma\pi}(\Lambda)=1$ гипотеза $Б\Phi_{\sigma\pi}(0)$ равна $2,3$ или 4 с одинаковой вероятностью $1/3$ При условии $Б\Phi_{\sigma\pi}(\Lambda)=1 \wedge Б\Phi_{\sigma\pi}(0)=2$ гипотеза $Б\Phi_{\sigma\pi}(00)$ равна 3 или 4 с вероятностями

$1/2$ При условии $\text{БФ}_{\sigma\pi}(\Lambda)=2$ гипотеза $\text{БФ}_{\sigma\pi}(00)$ также равна 3 или 4 с вероятностями $1/2$. Наконец, гипотеза $\text{БФ}_{\sigma\pi}(000)=4$ с вероятностью 1.

Используя метод дерева (см. доказательство леммы 3 в § 3), получаем



$$\beta_{-1}=\beta_0=\beta_1=\alpha=\frac{1}{4},$$

$$P\left\{\text{БФ}_{\sigma\pi}(\Lambda)\neq \text{БФ}_{\sigma\pi}(0)\right\}=\frac{\beta_{-1}}{\alpha+\beta_{-1}+\beta_0+\beta_1}=\frac{1}{4},$$

$$P\left\{\text{БФ}_{\sigma\pi}(0)\neq \text{БФ}_{\sigma\pi}(00)\right\}=\frac{\beta_0}{\alpha+\beta_0+\beta_1}=\frac{1}{3},$$

$$P\left\{\text{БФ}_{\sigma\pi}(00)\neq \text{БФ}_{\sigma\pi}(000)\right\}=\frac{\beta_1}{\alpha+\beta_1}=\frac{1}{2}.$$

По лемме 3 независимы следующие случайные величины ($i=0, 1, 2$):

$$x_i=\begin{cases}1 & \text{если } \text{БФ}_{\sigma\pi}(0^i)\neq \text{БФ}_{\sigma\pi}(0^{i+1}),\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Таким образом система случайных величин $(X_0\ X_1\ X_2)$ тождественна системе $(Z_4\ Z_3\ Z_2)$. Так как сумма $\sum_0^2 x_i=\sum_2^4 z_i$ представляет собой число исправлений гипотезы стратегии $\text{БФ}_{\sigma\pi}$ на функции $\sigma_4=0^\infty$ то

$$\frac{7}{24}=P\left\{\sum_2^4 z_i \geqslant 2\right\},$$

где $\frac{7}{24}$ – нижняя оценка, вычисленная с помощью описанного выше алгоритма при $n=4$, $k=2$.

Очевидно, это рассуждение проходит для произвольных n, k, $k<n$.

Итак лемма 4 будет доказана, если удастся обосновать в общем случае использованное в построении алгоритма явление "сокращения хвостов".

§ 6. Доказательство "сокращения хвостов"

Напомним ситуацию. Дано натуральное число n Пустому кортежу Λ соответствует некоторое распределение вероятностей на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$, соответствующие вероятности обозначим через:

$$|1|_\Lambda, \ |2|_\Lambda, \ \ldots \ |n|_\Lambda$$

Если теперь исключить некоторое число i, вероятность $|i|_\Lambda$ распадется следующим образом:

$$|i|_\Lambda = \sum_{y \neq i} |iy|_i .$$

Вероятности $|x|_\Lambda$ где $x \neq i$, не распадаются:

$$|x|_\Lambda = |xx|_i$$

Полученные таким образом кортежи длины 2 назовем (i) допустимыми.

Если на следующем шаге исключить число $j \neq i$ распадаются вероятности $|ij|_i$, $|jj|_i$

$$|xj|_i = \sum_{y \neq i,j} |xjy|_{ij} , \qquad \text{если } x = i \vee x = j$$

Все остальные вероятности сохраняются:

$$|xy|_i = |xyy|_{ij} ,$$

где $y \neq j$ Полученные таким образом кортежи длины 3 будем называть (ij) -допустимыми.

В общем случае, если после исключения чисел $\bar{p} = (p_1 \ldots p_a)$ (тогда получено уже понятие $\bar{p}$ -допустимого кортежа $\bar{x}$ длины $a+1$ и соответствующие таким $\bar{x}$ вероятности $|\bar{x}|_{\bar{p}}$) исключается число $q \notin \bar{p}$ то вероятности вида $|\bar{z}q|_{\bar{p}}$ распадаются:

$$|\bar{z}q|_{\bar{p}} = \sum_{\substack{y \notin \bar{p} \\ y \neq q}} |\bar{z}qy|_{\bar{p}q}$$

Остальные вероятности сохраняются:

$$|\bar{z}y|_{\bar{p}} = |\bar{z}yy|_{\bar{p}q},$$

где $y \neq q$ (и, конечно, $y \notin \bar{p}$, если кортеж $\bar{z}y$ $\bar{p}$-допустим).

В разряд $\bar{p}q$ -допустимых кортежей включаются все кортежи, входящие в правые части последних двух равенств.

Очевидно, кортеж $(x_1 \quad x_{a+1}$ будет $\bar{p}$-допустимым, где $\bar{p} = (p_1 \quad p_a)$ если и только если выполняются условия: для всех $i \leq a$

(I) $x_{i+1} \notin (p_1 \quad p_i)$,

(2) $x_i \notin (p_1 \quad p_i) \to x_{i+1} = x_i$

В самом конце процесса исключения мы имеем некоторую перестановку $(p_1 \quad p_n)$ множества $(1 2 \quad n)$ Обозначим $\bar{p}(p_1 \quad p_{n-1})$ Каждый $\bar{p}$ - допустимый кортеж $\bar{x}$ (длины n) получил вероятность $|\bar{x}|_{\bar{p}}$ В соответствии с нашей задачей, особое внимание обращается на кортежи $\bar{x} = (x_1 \quad x_n)$ обладающие свойством

$x_i = x_{i+1}$ для $\geq k$ различных значений i.

Здесь k - натуральное число, $k < n$ Множество всех таких кортежей обозначим через S Мы воспользуемся только симметричностью множества S именно, если π - любая перестановка $(1 2 \quad n)$ то

$$(x_1 \quad x_n) \in S \to (\pi x_1 \quad \pi x_n) \in S.$$

"Качество" перестановки $(p_1 \quad p_n)$ множества $(1 2 \quad n)$ характеризуется вероятностью

$$H(\bar{p}) = \sum_{\bar{x}} |\bar{x}|_{\bar{p}},$$

где суммирование идет по всем $\bar{p}$ -допустимым $\bar{x} \in S$, где $\bar{p} = (p_1 \quad p_{n-1})$. Т.е. суммирование идет по некоторым кортежам длины n

Свой показатель "качества" приписывается **к а ж д о м у** кортежу $\bar{q} = (q_1 \quad q_a)$, не содержащему повторений, $a \leq n-1$.

Во-первых, если $a = n-2$ (т.е. вне $\bar{q}$ остаются два числа множества $(1 2 \quad n)$ пусть это s, t), то

$$H(\bar{q}) = H(\bar{q} s) + H(\bar{q} t).$$

В общем случае $a < n-2$ если вне $\bar{q}$ остаются числа $q_{a+1}, \dots, q_n$, определяем по индукции:

$$H(\bar{q}) = \sum_{i=a+1}^{n} H(\bar{q}\ q_i).$$

В частности:

$$H(\Lambda) = H(1) + H(2) + \dots + H(n).$$

Требуется показать, что для всех $\bar{q}$ и всех $q \notin \bar{q}$ значение $H(\bar{q}\ q)$ можно вычислить, зная только вероятности $|\bar{x}|_{\bar{q}}$ для всех $\bar{q}$ -допустимых кортежей $\bar{x}$ Это будет сделано, если удастся показать, что $H(\bar{q}\ q)$ можно представить в виде

$$H(\bar{q}\ q) = \sum_{\bar{x}} c(\bar{x})\ |\bar{x}|_{\bar{q}}$$

где $c(\bar{x})$ - натуральные числа, которые можно вычислить, зная $\bar{x}, \bar{q}, q$ (суммирование идет по всем $\bar{q}$ -допустимым кортежам $\bar{x}$).

Сначала рассмотрим случай $\bar{q} = (q_1 \quad q_{n-2})$. Если вне $\bar{q}$ остались числа q, t то для всякого $\bar{q}\ q$ -допустимого $\bar{x} = (x_1 \dots x_n)$ имеем $x_n = t$ и $|\bar{x}|_{\bar{q}q} = |x_1 \dots x_{n-1}|_{\bar{q}}$, т.е.

$$H(\bar{q}\ q) = \sum_{\bar{x}} c(\bar{x})\ |\bar{x}|\,\bar{q}\,, \tag{13}$$

где суммирование идет по всем $\bar{q}$ -допустимым $\bar{x}$ (длины $n-1$), при этом

$$c(\bar{x}) = \begin{cases} 1\ , & \text{если } \bar{x}t \in S, \\ 0\ , & \text{иначе}. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь следующий случай: $\bar{q} = (q_1 \cdots q_{n-3})$, пусть вне $\bar{q}$ остались числа q, s, t тогда, по определению,

$$H(\bar{q}\, q) = H(\bar{q}\, q\, s) + H(\bar{q}\, q\, t).$$

Согласно (I3)

$$H(\bar{q}\, q\, s) = \sum_{\bar{x}} |\bar{x}|_{\bar{q}q}, \tag{I4}$$

где суммирование идет по всем $\bar{q}q$ -допустимым $\bar{x}$ таким, что $\bar{x}t \in S$ Множество S симметрично, кроме того, свойство $\bar{q}q$ -допустимости симметрично относительно перестановки s, t Таким образом, если в (I4) всюду заменить s на t и t на s, мы получим $H(\bar{q}\,q\,t)$ вместо $H(\bar{q}\,q\,s)$. Сумму $H(\bar{q}\,q\,s) + H(\bar{q}\,q\,t)$ можно упростить, различая следующие случаи ($\bar{x}$ -произвольный кортеж, входящий в (I4)):

(I) $\bar{x} = \bar{y}s$, где $\bar{y}$ не содержит чисел s, t Тогда, меняя s , t местами, получаем кортеж $\bar{y}\,t$ при этом

$$|\bar{y}\,s|_{\bar{q}q} + |\bar{y}\,t|_{\bar{q}q} = |\bar{y}|_{\bar{q}}$$

Кортеж $\bar{y}$ $\bar{q}$ -допустим.

(2) $\bar{x} = \bar{y}t$ аналогично.

(3) $\bar{x} = \bar{y}s \,..\, s$ где $\bar{y}$ не содержит s , t Тогда, меняя s и t местами, получаем $\bar{y}t$ t при этом

$$|\bar{y}s \quad s|_{\bar{q}q} = |\bar{y}s \quad|_{\bar{q}},$$
$$|\bar{y}t \quad t|_{\bar{q}q} = |\bar{y}t \quad|_{\bar{q}}$$

Кортежи $\bar{y}s$ и $\bar{y}t$ $\bar{q}$ -допустимы.

(4) $\bar{x} = \bar{y}t$ t аналогично.

Таким образом для $H(\bar{q}\,q)$ мы получили представление

$$H(\bar{q}\,q) = \sum_{\bar{x}} c(\bar{x})\, |\bar{x}|_{\bar{q}}, \tag{I5}$$

где суммирование идет по всем $\bar q$ -допустимым $\bar x$ (в данном случае длина таких $\bar x$ равна $n-2$), и $c(\bar x)$ можно вычислить по $\bar x$ $\bar q$ q Очевидна следующая особенность выражения (I5): оно симметрично относительно s t , т.е. если $\bar x$ содержит s (тогда в этом случае, $\bar x$ не содержит t), то замена в $\bar x$ числа s на число t дает кортеж $\bar y$ такой, что $c(\bar y) = c(\bar x)$.

Теперь можно перейти к шагу индукции. Пусть $\bar q = (q_1 \quad q_a)$ - кортеж без повторений и числа q , r_2, r_3, r_{n-a} остаются вне $\bar q$ Предположим, что

$$H(\bar q\, q\, r_2) = \sum_{\bar x} c(\bar x)\, |\bar x|_{\bar q q}, \tag{I6}$$

где суммирование идет по всем $\bar q q$ -допустимым $\bar x$ При этом выполняется следующее условие симметричности: если кортеж $\bar x$ $\bar q q$-допустим, а $(s_3 \quad s_{n-a})$ - любая перестановка чисел $(r_3 \quad r_{n-a})$, то действие $\bar s$ на $\bar x$ приводит к кортежу y такому, что $c(\bar y) = c(\bar x)$.

По определению

$$H(\bar q\, q) = \sum_{i=2}^{n-a} H(\bar q\, q\, r_i). \tag{I7}$$

Чтобы получить из (I6) выражение для $H(\bar q\, q\, r_i)$ $(i>2)$, нужно применить ко всем $\bar q\, q$ -допустимым кортежам $\bar x$ перестановку множества $(1\, 2 \quad n)$, меняющую местами r_2 и r_i (остальные числа остаются на месте). Отсюда следует, что сумму (I7) можно упростить, различая следующие случаи:

(I) $\bar x = \bar y\, r_2$, где $\bar y$ не содержит r_2 . В результате перестановок получаем кортежи $\bar y\, r_3$, , $\bar y\, r_{n-a}$ при этом

$$|\bar y r_2|_{\bar q q} + |\bar y r_3|_{\bar q q} + \dots + |\bar y\, r_{n-a}|_{\bar q q} = |\bar y|_{\bar q}$$

(2) $\bar x = \bar y\, r_i$, где $i>2$ и $\bar y$ не содержит r_i Тогда (I6) содержит <u>все</u> кортежи этого рода, притом с одина-

ковым коэффициентом $c(\bar{x})$

$$\bar{y}\, r_3,\ \bar{y}\, r_4, \ldots, \bar{y}\, r_{n-a}$$

В результате применения упомянутых $n-a-2$ перестановок каждый из этих $n-a-2$ кортежей порождает один кортеж $\bar{y} r_2$ плюс еще $n-a-3$ экземпляров самого себя. Все это войдет в сумму (17)

$$(n-a-2)(|y r_2|_{\bar{q}q} + \cdots + |\bar{y}\, r_{n-a}|_{\bar{q}q}) = (n-a-2)\cdot|\bar{y}|_{\bar{q}}.$$

(3) $\bar{x} = \bar{y}\, r_2 \quad r_2$, где $\bar{y}$ не содержит r_2 . В результате перестановок возникают все аналогичные кортежи $\bar{y}\, r_i \quad r_i\ (i>2)$. Нам достаточно заметить, что

$$|\bar{y}\, r_i \quad r_i|_{\bar{q}q} = |\bar{y} r_i \quad |_{\bar{q}} \qquad (18)$$

и что все $r_i\ (i \geqslant 2)$ войдут в сумму (17) симметрично.

(4) $\bar{x} = \bar{y}\, r_i \quad r_i$, где $i>2$ и $\bar{y}$ не содержит r_i Тогда в (16) содержатся с тем же $c(\bar{x})$ все аналогичные кортежи:

$$(\bar{y}\, r_3 \quad r_3), \qquad (\bar{y}\, r_{n-a} \qquad r_{n-a}).$$

Применение перестановок дает в итоге по $n-a-2$ экземпляра каждого $\bar{y}\ r_i \quad r_i\ (i \geqslant 2)$ Нам достаточно заметить, что имеет место (18) и что все $r_i\ (i \geqslant 2)$ войдут в сумму (17) симметрично.

Таким образом, мы получили для $H(\bar{q}\, q)$ (где q - любое число $\notin \bar{q}$) представление

$$H(\bar{q}\, q) = \sum_{\bar{x}} c'(\bar{x})\, |\bar{x}|_{\bar{q}},$$

где суммирование идет по $\bar{q}$ -допустимым кортежам $\bar{x}$, а коэффициенты $c'(\bar{x})$ можно вычислить, зная $\bar{q}$, q, $\bar{x}$ Все числа $r \notin \bar{q}\, q$ входят в это выражение $H(\bar{q}\, q)$ симметрично.

Этим завершается шаг индукции.

Таким образом, доказано, что характеристику $H(\bar{q}\, q)$ любого кортежа $\bar{q}\, q$, не содержащего повторений, можно вычислить, зная только вероятности $|\bar{x}|_{\bar{q}}$ для всех $\bar{q}$ -допустимых кортежей $\bar{x}$ Этого достаточно для обоснования возможности своевременно принять требуемое в алгоритме леммы 4 решение (см. выше, § 5).

В заключение отметим, что в случае пустого кортежа полученный результат означает, что характеристика $H(\Lambda)$ зависит только от числа n и симметричного множества S кортежей длины n, которые суть единственные параметры описанной конструкции. В случае, когда

$$S = \left\{ (x_1 \quad x_n) \mid x_i \neq x_{i+1} \quad для \quad \geqslant k \text{ значений } i \right\}$$

в § 5 показано, что

$$\frac{1}{n!} H(\Lambda) = P \left\{ \sum_{2}^{n} z_i \geqslant k \right\}.$$

Определение случайных величин z_i см. в § 5.

Результаты этой статьи изложены без доказательств в [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А.Н. Три подхода к определению понятия "количество информации". - "Проблемы передачи информации", 1965, т.I, № I, с.I-7.
2. Подниекс К.М. Вероятностное прогнозирование вычислимых функций. - "Уч. зап. Латв. ун-та", 1975, т.233, с.57-76.
3. Ламперти Дж. Вероятность. М., 1973, 189 с.
4. Барздинь Я.М., Фрейвалд Р.В. О прогнозировании общерекурсивных функций. - "Доклады АН СССР", 1972, т.206, № 3, с.521-524.
5. Барздинь Я.М. Предельный синтез τ-номеров. - "Уч.зап. Латв. ун-та", 1974, т.210, с.112-116.
6. Барздинь Я.М., Фрейвалд Р.В. Прогнозирование и предельный синтез эффективно перечислимых классов функций. - "Уч. зап. Латв. ун-та", 1974, т.210, с.102-111.
7. Подниекс К.М. Вероятностный синтез нумерованных классов функций. - "Доклады АН СССР", 1975, т.223, № 5, с.1071-1074.

ПРОГНОЗИРУЮЩИЕ СТРАТЕГИИ ОГРАНИЧЕННОЙ СЛОЖНОСТИ

К.М.Подниекс
ВЦ ЛГУ им. П.Стучки

Прогнозирование - это предсказывание значения $\varphi(m+1)$ по данным значениям $\varphi(1) \ldots \varphi(m)$ функции φ Точные определения см. [I]. В работах [2,3] Я.М.Барздинь и Р.В. Фрейвалд показали, что для всякого ненумерованного класса $(\mathcal{U}, \tau)$о.р. функций найдется о.р. стратегия F, допускающая на функции τ_n (n-ой функции нумерации τ) не более $\log_2 n + O(\log \log n)$ ошибочных прогнозов. Подозревалось, что реализация таких "наилучших стратегий" связана с невероятно большим объемом вычислений. В настоящей статье сделана попытка проследить связь между объемом вычислений, используемым стратегией и ее возможностями в смысле числа допускаемых ошибок. Точнее, изучаться будут не отдельные стратегии, а **методы построения** стратегий. Целесообразно ввести понятие **стратегического оператора**, действующего на все нумерации τ и связывающего с каждой такой τ некоторую стратегию. В своем доказательстве оценки $\log_2 n + O(\log \log n)$ Барздинь и Фрейвалд строят, по существу, именно такой оператор.

То, что в дальнейшем называется ч.р. стратегическим оператором (или просто ч.р. оператором) следует представлять как специальную машину Тьюринга, работающую с оракулом τ. На вход подаются значения $\varphi(1)$ $\varphi(m)$ прогнозируемой функции, затем следует вычисление (использующее ответы оракула τ на вопросы вида" $\tau_i(j) = ?$ ") и выдача прогноза, т.е. кандидата на значение $\varphi(m+1)$. Вычисление без остановки допускается лишь в том случае, когда функция φ не находится в нумерации τ (таким образом, здесь рассматривается прогнозирование в смысле

NV', по терминологии [I]). Если прогнозы ч.р. оператора определены во в с е х случаях, его называют о.р. оператором.

Стратегию, которую оператор ϕ связывает с нумерацией τ, обозначим через ϕ_τ. Обозначение $\phi_\tau^{00}(\varphi)$ используется для числа ошибочных прогнозов, допускаемых стратегией ϕ_τ на функции φ, т.е. для

$$card\,\{m \mid \phi_\tau(\varphi(1) \quad \varphi(m)) \neq \varphi(m+1)\}$$

Пусть $f(x)$ - любая функция действительного переменного, определенная для всех натуральных $x \geqslant 1$. Будем говорить, что оператор ϕ з а д а е т $f(m)$ в о п р о с о в, если для любого нумерованного класса (U, τ), любой функции $\varphi \in U$ и любого m при вычислении прогноза $\phi_\tau(\varphi(1)$ $\varphi(m))$ задается не более $f(m)$ вопросов вида „$\tau_i(j) = ?$"

Все изложенные ниже конструкции применимы, если $f(x)$ - любая конструктивная функция действительного переменного [4], определенная для всех натуральных $x \geqslant 1$. Однако формулировки результатов и доказательства для такого общего случая оказались бы чрезвычайно ненаглядными. Нашей конечной целью является возможно более полное изучение случаев, когда $f(x)$ - одна из функций:

$$2^x,\ 2^{cx},\ x^x,\ 2^{2^x},\ 2^{2^{cx}}$$

Поэтому на используемые в качестве $f(x)$ функции целесообразно наложить некоторые из условий, перечисленных ниже:

(ф.I) Функция f конструктивна, $f(x)$ определено и >0 для всех $x \geqslant 1$. Для всех натуральных $m \geqslant 1$ разрешима проблема "$f(m)$ - целое число?".

(ф.2) Функция $f(x)$ строго возрастает и непрерывна при $x \geqslant 1$. Кроме того, $f(x) \to \infty$, когда $x \to \infty$. (Это условие гарантирует существование обратной функции $f^{-1}(x)$.)

(ф.3) Существуют действительные $a>1$, $b>0$ такие, что для всех достаточно больших m

$$\frac{f(m+1)}{f(m)} \geqslant a, \qquad \sum_{i=1}^{m-1} f(i) < bf(m).$$

(Этому условию удовлетворяет всякая "порядочная" функция, растущая не медленнее экспоненты).

(ф.4) Функция $f(x)$ дважды дифференцируема и $f''(x) \geqslant 0$ для всех достаточно больших x

Сначала рассмотрим нижние оценки.

ТЕОРЕМА I. Пусть ч.р. стратегический оператор Φ задает $f(m)$ вопросов, где функция $f(x)$ удовлетворяет условиям (ф1-ф2-ф3). Тогда можно построить вычислимую нумерацию τ (функций, принимающих только значения $0,1$) такую, что для бесконечно многих n

$$\Phi_{\tau}^{\infty}(\tau_n) > \log_2 n + f^{-1}(n) - O(1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функции τ_n для $n < f(1)$ положим тождественно равными нулю. Кроме того, положим для всех n: $\tau_n(1)=0$ и определим $\varphi(1)=0$.

Допустим теперь, что функции τ_n уже определены для всех $n < f(m)$, кроме того, пусть для всех n определены значения $\tau_n(j)$ при $j < m$. Не исключено, что определены еще какие-то значения $\tau_i(j)$, но таких только конечное число. Пусть определен также отрезок $\varphi(1) \ldots \varphi(m)$ причем все $m-1$ прогнозов стратегии Φ_τ на этом отрезке оказались ошибочными.

Покажем, как осуществить функции τ_n для $f(m) < n < f(m+1)$, значения $\tau_n(m+1)$ для всех n и значение $\varphi(m+1)$. Вычисляем прогноз $\Phi_\tau(\varphi(1) \ldots \varphi(m))$. Если при этом оператор Φ задает оракулу τ вопрос "$\tau_i(j)=?$", где значение $\tau_i(j)$ пока не определено, положим $\tau_i(j)=0$. Через некоторое время прогноз будет вычислен.

Номер $n > f(m)$ назовем **выделенным**, если $\tau_n(j) = \varphi(j)$ для всех $j \leqslant m$. Для каждого $n > f(m)$, если $\tau_n(m+1)$ пока не определено, положим:

$$\tau_n(m+1) = \begin{cases} 0 & \text{если } n \text{ не является выделенным,} \\ \alpha & \text{если } n \text{ выделено (здесь } \alpha \in \{0,1\} \\ & \text{и } \alpha \neq \phi_\tau(\varphi(1) \quad \varphi(m)) \quad). \end{cases}$$

Положим также $\varphi(m+1) = \alpha$. Первые m прогнозов стратегии ϕ_τ на функции φ будут ошибочными.

Остается определить $\tau_n(j)$ для $f(m) < n \leqslant f(m+1)$ и $m+1 < j < \infty$. Сначала положим здесь $\tau_n(j) = 0$ для всех j таких, что $m+1 < j \leqslant \kappa$, где κ настолько велико, что при $j > \kappa$ ни одно значение $\tau_n(j)$ пока не определено. Все рассматриваемые номера n, т.е. $f(m) < n \leqslant f(m+1)$ распадаются на классы эквивалентности:

$$n \equiv n' \longleftrightarrow (\forall j \leqslant \kappa)\, \tau_n(j) = \tau_{n'}(j).$$

Пусть A - любой из этих классов, $e(A)$ - число элементов в A Возьмем наибольшее t такое, что $2^t \leqslant e(A)$ и сделаем так, чтобы среди отрезков $\tau_n(\kappa+1) \quad \tau_n(\kappa+t)$ (где $n \in A$) встречались все 2^t двоичных слова длины t. В остальном функции τ_n (где $n \in A$) могут равняться нулю. Эту операцию нужно проделать для каждого класса эквивалентности.

Итерируя изложенную конструкцию, получаем всю нумерацию τ. Покажем, что она - искомая.

Рангом $r(A)$ класса A (см.выше) назовем наибольшее число $r \leqslant m+1$ такое, что $(\forall j \leqslant r)$ $\tau_n(j) = \varphi(j)$ (здесь $n \in A$). Нетрудно проверить, что ранги различных классов различны. На одной из функций класса A стратегия ϕ_τ допускает

$$> r(A) - 1 + \log_2 e(A) - 1$$

ошибок. Напомним, что $f(m) < n \leqslant f(m+1)$.

Если $n \in A$, где $r(A) < m+1$, это значит, что при вычислении одного из прогнозов $\phi_\tau(\varphi(1) \quad \varphi(j))$, где $1 \leqslant j \leqslant r(A)$, задавался вопрос „$\tau_n(r(A)+1) = ?$".

Следовательно, если $A_1, \ldots, A_{m+1-c}$ - все классы ранга $\leqslant m+1-c$ (здесь c -натуральное число $\geqslant 1$), то при вычислении прогнозов $\Phi_{\tau}(\varphi(1) \; \varphi(j))$, где $j=1,2, \ldots, m-c$ задавалось в общей сложности не менее

$$e(A_1)+ \quad + e(A_{m+1-c})$$

вопросов.

Пусть, с другой стороны, $A_{m+2-c}, \ldots, A_{m+1}$ - все классы ранга $> m+1-c$ Здесь на одной из функций τ_n любого класса A_i число ошибок, допускаемых стратегией Φ_{τ}, будет

$$> m-c+\log_2 e(A_i)-1.$$

Покажем, что при подходящих константах $c, d>0$ для бесконечно многих m одно из чисел $e(A_i)$ (где $i= m+2-c, \ldots, m+1$) будет больше

$$d_0(f(m+1)-f(m)).$$

Пусть это не так, т.е. для всех $m \geqslant m_0$ и всех i таких, что $m+2-c \leqslant i \leqslant m+1$

$$e(A_i) \leqslant d \cdot (f(m+1)-f(m)).$$

Это значит, что

$$\begin{aligned} & e(A_1)+\cdots+e(A_{m+1-c}) > f(m+1)-f(m)-1- \\ & -e(A_{m+2-c})-\cdots-e(A_{m+1}) \geqslant \\ & \geqslant (f(m+1)-f(m))(1-cd)-1. \end{aligned}$$

Суммируя по m от m_0 до M получаем, что при вычислении прогнозов $\Phi_{\tau}(\varphi(1) \ldots \varphi(j))$, где $j=1,2, \ldots, M-c$, задавалось

$$\geqslant (f(M+1)-f(m_0))(1-cd)-(M-m_0)$$

вопросов. Но, с другой стороны, это число вопросов не может быть больше $\sum_{j \leqslant M-c} f(j)$ По условию (ф.3), эта сумма $\leqslant bf(M+1-c)$. По этому же условию:

$$f(M+1) \geqslant af(M) \geqslant a^2 f(M-1) \geqslant \cdots \geqslant a^c f(M+1-c).$$

Итак, с одной стороны, число вопросов должно быть больше $(1-cd)\, f(M+1)-O(M)$, но, с другой стороны, оно должно быть не больше $ba^{-c} f(M+1)$. Числа a, b фиксированы

для функции f, причем $a>1$. Возьмем число c настолько большим, чтобы было $ba^{-c}<1$. После этого число d возьмем настолько малым, чтобы было $1-cd>da^{-c}$.
Так как в силу условия (ф.3) $f(M+1)$ растет не медленнее экспоненты, то при $M\to\infty$ получается противоречие.

Отсюда явствует, что для бесконечно многих m найдется n такое, что $f(m)<n\leqslant f(m+1)$ и на функции $\mathcal{T}_n$ стратегия $\Phi_{\mathcal{T}}$ допускает более

$$m-c+\log_2\left(d\cdot f(m+1)-f(m)\right)-1=$$
$$=m+\log_2\left(f(m+1)-f(m)\right)-O(1)$$

ошибок. В силу условия (ф.2) здесь $m\geqslant f^{-1}(n)-1$. Кроме того, по условию (ф.3):

$$f(m+1)-f(m)\geqslant f(m+1)\left(1-\frac{1}{a}\right)\geqslant n\left(1-\frac{1}{a}\right).$$

Таким образом, для бесконечно многих n

$$\phi_{\mathcal{T}}^{00}(\mathcal{T}_n)>f^{-1}(n)+\log_2 n-O(1).$$

Теорема I доказана.

ПРИМЕРЫ. (е I) Оператор ϕ задает 2^m вопросов. Найдется нумерация $\mathcal{T}$ такая, что для бесконечно многих n

$$\phi_{\mathcal{T}}^{00}(\mathcal{T}_n)>\log_2 n-O(1).$$

(е 2) Оператор ϕ задает 2^{cm} вопросов, $c>0$.

$$(\exists_{\mathcal{T}}\ \exists_n^{\infty})\quad \phi_{\mathcal{T}}^{00}(\mathcal{T}_n)>\left(1+\frac{1}{c}\right)\log_2 n-O(1).$$

(е 3) Оператор ϕ задает m^m вопросов. Здесь $f^{-1}(n)$ асимптотически равна $\log_2 n/\log_2\log_2 n$.

$$(\exists_{\mathcal{T}}\ \exists_n^{\infty})\quad \phi_{\mathcal{T}}^{00}(\mathcal{T}_n)>\log_2 n+\frac{\log_2 n}{\log_2\log_2 n}-O\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)$$

(е 4) Оператор ϕ задает 2^{2^m} вопросов.

$$(\exists_{\mathcal{T}}\ \exists_n^{\infty})\quad \phi_{\mathcal{T}}^{00}(\mathcal{T}_n)>\log_2 n+\log_2\log_2 n-O(1).$$

(е 5) Оператор ϕ задает $2^{2^{cm}}$ вопросов, $c>0$

$$(\exists_{\mathcal{T}}\ \exists_n^{\infty})\quad \phi_{\mathcal{T}}^{00}(\mathcal{T}_n)>\log_2 n+\frac{1}{c}\log_2\log_2 n-O(1).$$

Отсюда можно сделать три вывода. Во-первых, если функция f растет медленнее любой экспоненты, то оператор, задающий $f(m)$ вопросов, не может дать верхней оценки $\Phi_{\tau}^{\infty}(\tau_n)$ порядка $\log n$. Во-вторых, если f растет со скоростью экспоненты, то оператор, задающий $f(m)$ вопросов, не может дать асимптотически наилучшей верхней оценки $\log_2 n$. В-третьих, если f растет существенно медленнее 2^{exp}, то оператор, задающий $f(m)$ вопросов, не может дать в верхней оценке $\log_2 n + O(\log n)$ оптимальный остаточный член порядка $\log\log n$. Этот порядок оптимален в силу следующего результата Барздиня-Фрейвалда [3]. существует вычислимая нумерация τ такая, что для любой стратегии F

$$(\exists_n^{\infty})\; F^{\infty}(\tau_n) > \log_2 n + \log_2 \log_2 n - O(\log\log n).$$

Если сравнить это с нашим примером (e 5), придется заключить, что в случае функций $f(x)$ растущих быстрее 2^{2^x} оценка теоремы I не является наилучшей. Однако случай таких быстрорастущих f неинтересен, так как верхняя оценка $\log_2 n + O(\log\log n)$ достигается уже оператором, задающим 2^{2^m} вопросов, см. ниже пример (e 7).

Приступим теперь к верхним оценкам. Все используемые в дальнейшем стратегические операторы представляют собой модификации стратегий Барздиня-Фрейвалда [3].

Пусть $f(x)$ – функция, удовлетворяющая условию(ф I). Введем еще два "параметра". Во-первых, $\overline{\pi} = \{\pi_n\}$ -рекурсивная последовательность действительных чисел со свойствами: $\pi_n > 0$ для всех n и ряд $\sum \pi_n$ регулярно сходится [4]. Во-вторых, $\overline{\varepsilon} = \{\varepsilon_m\}$ – рекурсивная последовательность рациональных чисел со свойством

$\varepsilon_m > \varepsilon_{m+1} > 0$ для всех m.

Через $\{f\overline{\pi}\,\overline{\varepsilon}\}$ будем обозначать следующий стратегический оператор. Процедура вычисления прогноза $\{f\overline{\pi}\,\overline{\varepsilon}\}_{\tau}(\varphi(1)\ldots\varphi(m))$, где τ – произвольная нумерации, φ - произвольная функция. Для каждого натурального t составляется множество

$$\exists_t = \{ i \mid i \leqslant f(m) \wedge (\forall j \leqslant m) \tau_i(j) = \varphi(j) \wedge \tau_i(m+1) = t \}$$

Вычисляются рациональные приближения сумм

$$\varkappa_t = \sum \{ \pi_i \mid i \in \exists_t \}$$

с точностью до ε_m, т.е. рациональные числа r_t такие, что

$$r_t \geqslant 0, \quad |r_t - \varkappa_t| < \varepsilon_m,$$

Среди чисел r_t найдем наибольшее, пусть это r_{t_0}. Полагаем искомый прогноз равным t_0.

Легко видеть, что оператор $\{f \overline{\pi} \overline{\varepsilon}\}$ общерекурсивный и что он задает $(m+1) f(m)$ вопросов.

Все ошибочные прогнозы стратегии $\{f \pi \varepsilon\}_{\tau}$ сделанные на функции τ_n, разделены на две группы:

(а) ошибки первого рода:

$$\{f \overline{\pi} \overline{\varepsilon}\}_{\tau} (\tau_n(1) \quad \tau_n(m)) \neq \tau_n(m+1) \wedge f(m) < n,$$

(б) ошибки второго рода: то же, только $f(m) \geqslant n$.

Таким образом, ошибки первого рода совершаются, пока функция τ_n не учитывается стратегией $\{f \overline{\pi} \overline{\varepsilon}\}_{\tau}$ ошибки второго рода - когда τ_n уже учитывается.

Введем также особое обозначение для некоторых остатков ряда $\sum \pi_i$ здесь $k = 1, 2$,

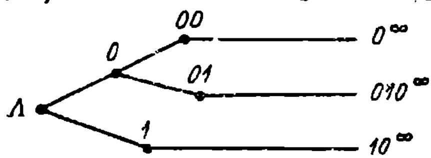
$$\Delta_k = \sum \{ \pi_i \mid i > f(k) \}. \tag{I}$$

ЛЕММА I. Пусть функция f удовлетворяет условиям (ф1-ф2) и пусть стратегия $\{f \overline{\pi} \overline{\varepsilon}\}_{\tau}$ совершает на функции τ_n не менее S_1 ошибок первого рода и не менее S_2 ошибок второго рода. Тогда:

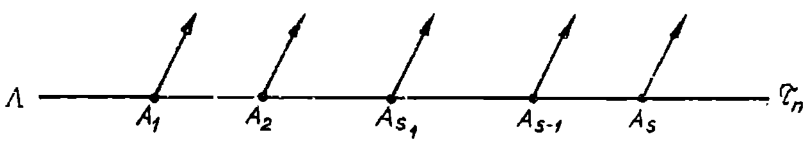
(а) $S_1 < f^{-1}(n)$,

(б) $$2^{S_2} \pi_n < \sum_{i=1}^{S_2} 2^i (\Delta_{S_1+i} + \varepsilon_{S_1+i}) + \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем изображать функции нумерации $\mathcal{T}$ в виде дерева, вершинами которого являются всевозможные начальные куски этих функций. Например, функции 0^∞ 10^∞, 010^∞ можно изобразить деревом:



Рассмотрим ветвь дерева нумерации $\mathcal{T}$, изображающую функцию $\mathcal{T}_n$. Ошибочные прогнозы стратегии $\{f\Pi\varepsilon\}_{\mathcal{T}}$, сделанные на $\mathcal{T}_n$ обозначим стрелками, идущими в сторону от ветви $\mathcal{T}_n$



Здесь $s = s_1 + s_2$. Пусть отрезок ΛA_i соответствует значениям функции $\mathcal{T}_n$ от $j=1$ до $j = m_i$.

Число ошибок первого рода оценивается просто: так как $m_i \geqslant i$ для всех i, то если в точке A_i сделана ошибка первого рода, должно быть $f(i) \leqslant f(m_i) < n$ т.е $i < f^{-1}(n)$ и $s_1 < f^{-1}(n)$.

Рассмотрим теперь ошибки второго рода, т.е. точки $A_{s_1+1}, \quad , A_s$. Попытаемся оценить снизу сумму чисел $\varkappa_t$ в каждой из этих точек (см.определение $\{f\overline{\Pi\varepsilon}\}$). Здесь $f(m_i) \geqslant n$, поэтому $n \in \mathcal{E}_t$ для $t = \mathcal{T}_n(m_i+1)$.

Начнем с точки A_s. Сумма всех $\varkappa_t$ в этой точке содержит, во-первых, число $\varkappa_{t_0}$ (значение t_0 ведет в сторону стрелки), во-вторых, число $\varkappa_{t_1}$ (значение $t_1 = \mathcal{T}_n(m_s+1)$) ведет в сторону $\mathcal{T}_n$). Так как $n \in \mathcal{E}_{t_1}$, то $\varkappa_{t_1} \geqslant \Pi_n$. Кроме того, $r_{t_0} \geqslant r_{t_1}$ следовательно, $\varkappa_{t_0} > \varkappa_{t_1} - 2\varepsilon_{m_s}$. В итоге

$$\sum_{A_s} \varkappa_t \geqslant \varkappa_{t_0} + \varkappa_{t_1} > \Pi_n + (\Pi_n - 2\varepsilon_{m_s}) = 2(\Pi_n - \varepsilon_{m_s}).$$

Перейдем теперь к точке A_{s-1}, предполагая, что в ней также совершена ошибка второго рода. В сумму "здешних" $\varkappa_t$ также входят, по крайней мере, два числа: во-первых, $\varkappa_{t_0}$ (в сторону стрелки), во-вторых, $\varkappa_{t_1}$, где $t_1 = \tau_n(m_{s-1}+1)$. Что можно сказать о величине $\varkappa_{t_1}$? Это число будет несколько меньше суммы чисел $\varkappa_t$ в точке A_s. Насколько? Не более чем на

$$\delta_{s-1} = \sum \left\{ \pi_i \mid f(m_{s-1}) < i \leqslant f(m_s) \right\}. \qquad (2)$$

Именно столько новых π_i учитывается в точке A_s по сравнению с точкой A_{s-1}. Таким образом, в A_{s-1}

$$\varkappa_{t_1} > 2(\pi_n - \varepsilon_{m_s}) - \delta_{s-1}.$$

Так как здесь еще и $\varkappa_{t_0} > \varkappa_{t_1} - 2\varepsilon_{m_{s-1}}$, то:

$$\sum_{A_{s-1}} \varkappa_t > \varkappa_{t_0} + \varkappa_{t_1} > 2^2\pi_n - 2^2\varepsilon_{m_s} - 2(\delta_{s-1} + \varepsilon_{m_{s-1}}).$$

Продолжая это рассуждение влево, мы придем к выводу, что в точке A_{s_1+1} (это самая левая ошибка второго рода) сумма чисел $\varkappa_t$ должна быть больше

$$2^{s-s_1}\pi_n - 2^{s-s_1}\varepsilon_{m_s} - \sum_{i=1}^{s-s_1-1} 2^i(\delta_{s_1+i} + \varepsilon_{m_{s_1+i}}).$$

Так как $s - s_1 = s_2$, $\varepsilon_{m_s} \leqslant \varepsilon_{m_s} + \delta_s$ и сумма чисел в точке A_{s_1+1} не превосходит $\sum \pi_i$ то мы получаем неравенство

$$2^{s_2}\pi_n < \sum_{i=1}^{s_2} 2^i(\delta_{s_1+i} + \varepsilon_{m_{s_1+i}}) + \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i.$$

Сравнивая (I), (2) и учитывая, что $j \leqslant m_j$, получаем $\delta_{s_1+i} < \Delta_{s_1+i}$. Из $j \leqslant m_j$ и монотонности последовательности $\bar{\varepsilon}$ следует $\varepsilon_{m_{s_1+i}} \leqslant \varepsilon_{s_1+i}$.

Лемма I доказана.

Если в качестве $\bar{\varepsilon}$ выбрать последовательность $\bar{\varepsilon}_0$, где $\varepsilon_m^0 = 2^{-2m}$, то

$$\sum_{i=1}^{S_2} 2^i \varepsilon_{s_1+i} < 2,$$

и таким образом

$$2^{s_2} \mathscr{R}_n < \sum_{i=1}^{S_2} 2^i \Delta_{s_1+i} + 2 + \sum_{i=1}^{\infty} \mathscr{R}_i. \qquad (3)$$

Далее, предполагая, что функция f удовлетворяет условиям (ф.I-ф.2-ф.4), выберем следующую специальную последовательность $\overline{\mathscr{R}}^0$

$$\mathscr{R}_n^0 = \frac{1}{f' f^{-1}(n) \cdot 2^{f^{-1}(n)}}, \qquad (4)$$

где f' - производная. Регулярная сходимость ряда $\sum \mathscr{R}_i^0$ вытекает из полученной ниже оценки (5).

ЛЕММА 2. Пусть функция f удовлетворяет условиям (ф.I-ф.2-ф.4) и пусть стратегия $\{f \overline{\mathscr{R}}^0 \overline{\mathcal{E}}^0\}$ допускает на функции $\mathcal{C}_n$ не менее S_1 ошибок первого рода и не менее S_2 ошибок второго рода. Тогда:

(а) $S_1 < f^{-1}(n)$,

(б) $S_2 - \log_2 S_2 < f^{-1}(n) + \log_2 f' f^{-1}(n) + O(1)$.

В частности, число ошибок на каждой $\mathcal{C}_n$ конечно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Знаменатель (4), т.е. $f' f^{-1}(x) 2^{f^{-1}(x)}$ является возрастающей функцией. В самом деле, производная

$$e^{f^{-1}(x)\ln 2} \left(\ln 2 + \frac{f'' f^{-1}(x)}{f' f(x)} \right) > 0.$$

из-за условия (ф.4). Поэтому для всех $n \geqslant 1$

$$\mathscr{R}_n^0 < \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{f' f^{-1}(x)\, e^{f^{-1}(x)\ln 2}}$$

Суммируя, получаем

$$\sum \{ \mathscr{R}_n \mid n > f(k)+1 \} < \int_{f(k)}^{\infty} \frac{dx}{f' f^{-1}(x)\, e^{f^{-1}(x)\ln 2}}.$$

Сделаем замену переменной $x = f(t)$ тогда:

$$\int_K^\infty \frac{f'(t)\,dt}{f'(t)e^{t\ln 2}} = -\frac{1}{\ln 2}e^{-t\ln 2}\Big|_K^\infty = \frac{1}{\ln 2}2^{-K}$$

Таким образом:

$$\sum \left\{ \mathcal{T}_n \mid n > f(K)+1 \right\} < \frac{1}{\ln 2}2^{-K} \qquad (5)$$

Так как при $n > f(K)$

$$\mathcal{T}_n^0 < \frac{1}{f'f^{-1}f(K)2^{f^{-1}f(K)}} = \frac{1}{f'(K)}2^{-K}$$

а производная $f'(x)$ не убывает, то:

$$\Delta_K = \sum \left\{ \mathcal{T}_n \mid n > f(K) \right\} < \left(\frac{1}{f'(1)} + \frac{1}{\ln 2}\right)2^{-K} = d2^{-K}$$

Обратимся с этим знанием к неравенству (3), $\Delta_{S_1+i} < d2$ поэтому

$$2^{S_2}\mathcal{T}_n^0 \leqslant dS_2 + 2 + \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{T}_i .$$

Логарифмируя:

$$S_2 - f^{-1}(n) - \log_2 f'f^{-1}(n) \leqslant \log_2 S_2 + O(1).$$

Лемма 2 доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям (ф.I)-(ф.4) и еще условию: для подходящих $c, d \geqslant 0$ и всех достаточно больших x

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \leqslant 2^{cx+d}$$

(Этому условию удовлетворяет любая "порядочная" функция, растущая не быстрее 2^{exp}). Тогда существует о.р. стратегический оператор φ, задающий $(m+1)f(m)$ вопросов и такой, что для всех нумерованных классов $(U, \mathcal{T})$ и всех n :

$$\varphi_{\mathcal{T}}^{00}(\mathcal{T}_n) \leqslant \log_2 n + (c+2)f^{-1}(n) + O(\log\log n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем в качестве Φ оператор $\{f\,\overline{\mathcal{R}}^{o}\,\overline{\mathcal{E}}^{o}\}$. Имеем:

$$f'(x) \leqslant f(x)\cdot 2^{cx+d}$$

$$f'f^{-1}(n) \leqslant ff^{-1}(n)\cdot 2^{cf^{-1}(n)+d}$$

$$\log_2 f'f^{-1}(n) \leqslant \log_2 n + cf^{-1}(n) + d.$$

Итак, согласно лемме 2:

$$S_2 - \log_2 S_2 \leqslant \log_2 n + (c+1)f^{-1}(n) + O(1).$$

Так как из $x - \log_2 x \leqslant y$ следует $x \leqslant y + \log_2 y + O(1)$, то

$$S_2 \leqslant \log_2 n + (c+1)f^{-1}(n) + O(\log \log n).$$

Здесь мы воспользуемся еще и тем, что по условию (ф.3) $f^{-1}(n) = O(\log n)$. Учитывая, что $S_1 < f^{-1}(n)$ (см.лемму 2), получаем утверждение теоремы 2.

ПРИМЕРЫ. (e6) $f(x) = \dfrac{x^x}{x+1}$. Получаем оператор, задающий m^m вопросов и допускающий на функции $\mathcal{C}_n$ не более

$$\log_2 n + O\left(\frac{\log n}{\log \log n}\right)$$

ошибок. Ср.пример (e3).

(e7) $f(x) = \dfrac{2^{2^x}}{x+1}$. Получается оператор, задающий 2^{2^m} вопросов и допускающий на функции $\mathcal{C}_n$ не более $\log_2 n + O(\log \log n)$ ошибок.

Теоремы I,2, вместе взятые, дают полную информацию о возможностях стратегических операторов, задающих $f(m)$ вопросов в случаях, когда f – "порядочная" функция и $exp < f \leqslant 2^{exp}$. Именно, в этих случаях некоторый о.р. оператор, задающий $f(m)$ вопросов, дает верхнюю оценку числа ошибок $\log_2 n + O(f^{-1}(n))$. С другой стороны, никакой ч.р. оператор, задающий $f(m)$ вопросов, не может дать лучший порядок остаточного члена.

Обратимся, наконец, к случаю, когда $f(x)$ растет со скоростью экспоненты.

ПРИМЕРЫ. (е8) Если взять $f(x)=\frac{2^x}{x+1}$, теорема 2 даст оператор, задающий 2^m вопросов и допускающий на функции $\mathcal{C}_n$ не более $3\log_2 n+O(1)$ ошибок. Ср. пример (е1): никакой оператор, задающий 2^m вопросов, не может дать оценки $2\log_2 n-g(n)$, $g(n)\to\infty$.

(е9) Аналогично: $f(x)=\frac{2^{cx}}{x+1}$. Операторы, задающие 2^{cm} вопросов. Верхняя оценка $(1+\frac{2}{c})\log_2 n+O(1)$. Нижняя $(1+\frac{1}{c})\log_2 n-O(1)$, см. пример (е2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Подниекс К.М. Сравнение различных типов предельного синтеза и прогнозирования функций. - "Уч.зап.Латв.ун-та", 1974, т.210, с.68-81.
2. Барздинь Я.М., Фрейвалд Р.В. О прогнозировании общерекурсивных функций. - "Доклады АН СССР", 1972, т.206, № 3, с.521-524.
3. Барздинь Я.М., Фрейвалд Р.В. Прогнозирование и предельный синтез эффективно перечислимых классов функций. - "Уч. зап. Латв. ун-та.", 1974, т.210, с.101-111.
4. Кушнер Б.А. Лекции по конструктивному математическому анализу. М., 1973, 448 с.

ФОРМАЛИЗОВАННАЯ СИСТЕМА ДЛЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА СВОЙСТВ ПРОГРАММ

Я.А.Кикутс
ИЭВТ АН ЛатвССР

ВВЕДЕНИЕ

Для реально употребляемых языков программирования семантика обычно определяется словесно, неформально, и для проверки семантической корректности или доказательства некоторых свойств программ программист руководствуется именно этим, содержательным определением семантики. Естественно возникает проблема формального определения семантики языка, причем так, чтобы оно соответствовало содержательно определенной.

Наиболее удачные попытки решения этой проблемы изложены в работах [3] и [4]. Но даже для доказательства сравнительно простых свойств программ, работающих с целыми числами, в этих работах предлагаются очень сложные логические системы.

В данной работе формально определяется семантика языка программирования на основе формальной арифметики. Сперва определяется синтаксис некоторого языка L, являющегося подмножеством ALGOL-60. Потом содержательно определяется семантика этого языка при помощи формальной модели вычислительной машины, на которой выполняются программы, написанные на языке L. Предлагается алгоритм S, который для любой программы $\mathfrak{R}$, написанной на этом языке, определяет формулу формальной арифметики $S[\mathfrak{R}]$, которая выражает содержательный смысл данной программы. Доказывается, что для любой программы $\mathfrak{R}$ формула $S[\mathfrak{R}]$ сильно представляет тот набор частично определенных функций, который вычисляет программа $\mathfrak{R}$.

§1. Формальная модель вычислительной машины

Машина содержит конечное число ячеек внутренней памяти $x_k, \quad , x_\ell$ В каждой ячейке всегда находится некоторое натуральное число.

Предполагается, что машина может выполнить программу, написанную на языке L В результате выполнения программы может меняться содержание ячеек памяти. Если выполнение программы заканчивается, то скажем, что при данном начальном состоянии внутренней памяти результат выполнения программы определен. В противоположном случае скажем, что при данном начальном состоянии внутренней памяти результат выполнения программы неопределен.

Через x^{i} и x^{σ} будем обозначать содержимое ячейки x соответственно перед и после выполнения программы.

§2. Синтаксис языка L

Альфавит языка L :

а) символы констант $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots$;

б) символы переменных $x_k, \quad , x_\ell$ совпадающие с обозначениям ячеек памяти;

в) функциональные символы $+$, и $\dot{-}$;

г) предикатные символы $<$, и $\nless$;

д) символы препозициональных связок $\&$, $\vee$ и $\neg$

е) операторные символы $:=$, $\otimes$, C , $\Box$ и W

з) вспомогательные символы (и).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.

1. Каждый из символов констант есть т р м.
2. Каждый из символов переменных есть т е р м.
3. Если s и t – т е р м ы, то $(s+t)$, $(s \cdot t)$ и $(s \dot{-} t)$ есть т е р м ы.
4. Никаких других т е р м о в, кроме определенных согласно 1.–3., нет.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2.

1. Если T и U – термы, то **условиям** являются $T < U$, $T = U$ и $T \leqslant U$

2. Если A и B **условия**, то **условиям** являются также $\neg A$, $(A \& B)$ и $(A \vee B)$

3. Никаких других **условий**, кроме определенных согласно 1 и 2, нет.

Программы делятся на элементарные и составные.

1. Элементарные программы.

$$x_t := T(x_q, \quad , x_r),$$

где $T(x_q, \quad , x_r)$ – терм, содержащий переменные символы $x_q, \dots, x_r$, совпадающие с обозначениями ячеек памяти, а x_t – обозначение ячейки памяти.

2. Составные программы.

$$a \otimes b,\ C(p, a, b),\ C(p, \square, b),\ C(p, b, \square) \text{ и } W(p, a),$$

где a и b элементарные или составные программы, а p – условие

Программы a и b будем называть подпрограммами соответствующих составных программ. Если b является подпрограммой программы a и c является подпрограммой программы b, то c является также подпрограммой программы a

Скажем, что в составной программе

$$a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_{k-1} \otimes a_k \otimes a_{k+1} \otimes \dots \otimes a_n$$

подпрограмма a_k находится правее подпрограмм $a_1, \dots, a_{k-1}$ и левее подпрограмм $a_{k+1}, \dots, a_n$ Если подпрограмма a находится левее (правее) некоторой подпрограммы b и b является составной программой, то a находится также левее (правее) каждой подпрограммы программы b Если a находится левее (правее) b, то b находится правее (левее) a.

§3. Содержательное определение семантики языка L

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Значениями символов констант $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots$ будем считать соответственно натуральные числа $0, 1, 2, \ldots$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Значениями функциональных символов $+$ и $\cdot$ будем считать обычные двухместные функции сложения и умножения натуральных чисел, а значением символа $\dot{-}$ — функцию

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & \text{если } x \geqslant y, \\ 0, & \text{если } x < y, \end{cases}$$

где $x - y$ обычное вычитание натуральных чисел.

Согласно этих определений, каждому терму $T(x_q, \ldots, x_p)$ соответствует определенная функция $f^T(x_q, \ldots, x_p)$ являющаяся суперпозицией функций $x + y$, $x \cdot y$ и $x \dot{-} y$. Функцию $f^T(x_q, \ldots, x_p)$ будем называть функцией, определенной термом $T(x_q, \ldots, x_p)$.

Значение этой функции зависит от значений аргументов $x_q, \ldots, x_p$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Значением аргумента x_k будем считать натуральное число, находящееся в ячейке x_k.

Если значениями предикатных символов $<$, $=$, $\leqslant$ и считать обычные отношения "меньше", "равно" и "меньше или равно", а символам препозициональных связок $\&$, $\vee$ и $\neg$ дать стандартную интерпретацию (при помощи истинностных таблиц), то каждое условие $p(x_\ell, \ldots, x_m)$ естественным путем определяет некоторый предикат $p^*(x_\ell, \ldots, x_m)$, который будем называть предикатом, определенным условием $p(x_\ell, \ldots, x_m)$. Истинностное значение предиката $p^*(x_\ell, \ldots, x_m)$ зависит от значений аргументов $x_\ell, \ldots, x_m$.

Говорить о значении функции $f^T(x_q, \ldots, x_p)$ или предиката $p^*(x_\ell, \ldots, x_m)$ имеет смысл лишь относительно определенного этапа выполнения программы, например, перед выполнением определенной подпрограммы.

Определение выполнения программ, написанных на языке L

I. $x_k := T(x_q, \ldots, x_p)$

а) Вычисляется значение $f^T(x_q^i, \ldots, x_p^i)$, т.е. значение функции $f^T(x_q, \ldots, x_p)$ при состоянии памяти перед выполнением данной программы. Переход к пункту б).

б) Значение $f^T(x_q^i, \quad , x_r^i)$ записывается в ячейку x_t Выполнение программы закончено.

2. $a \otimes b$

а) Выполняется подпрограмма a Если выполнение a заканчивается, переход к пункту б). Если – нет, то выполнение $a \otimes b$ также не заканчивается.

б) Выполняется подпрограмма b Если выполнение b заканчивается, то заканчивается выполнение $a \otimes b$ Если – нет, то выполнение $a \otimes b$ также не заканчивается.

3. $C(p, a, b)$

а) Вычисляется значение p^* при состоянии памяти перед выполнением программы. Если p^* истинно, переход к пункту б). Если p^* – ложно – к пункту в).

б) Выполняется подпрограмма a Если выполнение a заканчивается, то заканчивается выполнение $C(p,a,b)$. Если нет, то не заканчивается также выполнение $C(p, a, b)$

в) Выполняется как пункт б) только относительно подпрограммы b

4. $C(p, \square, b)$

а) Вычисляется значение p^* при состоянии памяти перед выполнением программы. Если p^* – истинно, переход к пункту б), если p^* – ложно – к пункту в).

б) Выполнение программы заканчивается (значения ячеек памяти остаются без изменений).

в) Выполняется подпрограмма b. Если выполнение b заканчивается, то заканчивается выполнение $C(p, \square, b)$. Если – нет, то не заканчивается и выполнение $C(p, \square, b)$

$C(p, b, \square)$

а) Выполнение $C(p, b, \square)$ от выполнения $C(p, \square, b)$ отличается лишь тем что переход к пункту б) происходит, если p^* – ложно, а к пункту в), если p^* – истин

. $W(p, a)$

а) Вычисляется значение p^* при данном состоянии памяти (первый раз – перед выполнением $W(p,a)$, каждый следующий раз – после очередного, повторного выполнения подпрограммы a). Если p^* – истинно, переход к пункту б), если p^* – ложно, выполнение программы $W(p,a)$ заканчивается.

б) Выполняется подпрограмма a если выполнение заканчивается,. то переход к пункту а). Если – нет, то не заканчивается также выполнение $W(p,a)$

В дальнейшем будем пользоваться следующей "векторной" записью набора переменных и набора функций. Если $A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, то вместо $x_{a_1}, x_{a_2}, \dots, x_{a_n}$ будем иногда писать x_A, вместо

$f_{a_1}(x_B), \dots, f_{a_n}(x_B)$ – $f_A(x_B)$ вместо

$F(x_{a_1}) \& \dots \& F(x_{a_n})$ – $\underset{j\in A}{\&} F(x_j)$, вместо

$(x_{a_1} := x_{a_1}) \otimes \dots \otimes (x_{a_n} := x_{a_n})$ – $\underset{j\in A}{\otimes} (x_j := x_j)$ и т. д.

Через $|A|$ будем обозначать число элементов множества A.

В дальнейшем рассмотрим, как с помощью программ вычисляются функции. Так как при выполнении определенной программы результат не обязательно зависит от начальных значений всех ячеек памяти и значения не всех ячеек памяти изменяется, введем понятия входных и выходных ячеек программы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Ячейку памяти назовем в ы х о д н о й ячейкой программы, если обозначение этой ячейки встречается в программе на левой стороне от некоторого операторного символа $:=$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5. Ячейку памяти x назовем в х о д н о ячейкой программы a, если:

1) программа a является элементарной программой и обозначение ячейки x встречается справа от операторного символа $:=$;

2) b является подпрограммой программы a, левее b нет другой подпрограммы, для которой ячейка x является выходной и выполняется, по крайней мере, одно из следующих требований:

– b является программой типа $C(p, d, e)$, $C(p, \square, d)$,

$C(p, d, \square)$ или $W(p, d)$ и обозначение ячейки x встречается в условии p

- b является программой типа $W(p, d)$ и x является выходной ячейкой для программы b ;
- b является программой типа $C(p, d, e)$ и x является выходной ячейкой одной и только одной программ d или e
- b является элементарной программой и обозначение ячейки x встречается справа от операторного символа $:=$

Через $a(x_B^o|^i x_D)$ будем обозначать программу с входными ячейками x_D и выходными ячейками x_B

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6. Если для каждого начального состояния входных ячеек программы $a(x_B^o|^i x_D)$,для которого выполнение этой программы заканчивается, из условия $x_j^i = y_j$ $(j \in D)$ следует, что $x_j^o = t_j$ $(j \in B)$, то скажем, что программа $a(x_B^o|^i x_D)$ вычисляет набор функций $\{f_B(y_D)\}$ где

$$f_j(y_D) = \begin{cases} t_j & \text{, если выполнение } a \text{ заканчивается } (j \in B), \\ \text{не определено, если выполнение } a \text{ не заканчивается.} \end{cases}$$

Как видно из определения, допускаются частично определенные функции.

Выясним теперь, какие наборы функций вычисляют программы, написанные на языке L

1. Из определения выполнений программ следует, что программа

$$(x_t := T(x_A))(x_t^o|^i x_A)$$

вычисляет функцию $f^T(x_A)$

2. Допустим, что программа $a(x_A, x_B, x_C, x_D^o|^i x_H)$ вычисляет набор функций $\{f_j(x_H)(j \in A \cup B \cup C \cup D)\}$, программа $b(x_C, x_D, x_E, x_F^o|^i x_B, x_D, x_F, x_G)$ набор функций $\{g_j(x_B, x_D, x_F, x_G) \quad (j \in C \cup D \cup E \cup F)\}$, A, B, C, D, E, F, G взаимно непересекающиеся множества, $K = A \cup B \cup C \cup D$, $L = C \cup D \cup E \cup F$, $M = B \cup D \cup F \cup G$ $|K| \neq 0$ и $|L| \neq 0$.

Через x_j^{ai}, x_j^{ao}, x_j^{bi} и x_j^{bo} $(j \in K \cup E \cup F \cup G)$ обозначим значения ячейки x_j соответственно перед и после выполнения a, перед и после выполнения b.

Если выполнение подпрограмм a и b заканчивается, то

$$x_j^{ao} = f_j\,(x_H^{ai}) \quad (j \in K),$$

$$x_j^{bo} = g_j\,(x_B^{bi},\, x_D^{bi},\, x_F^{bi},\, x_G^{bi}) \quad (j \in L),$$

$$x_j^{ao} = x_j^{bi} \qquad (j \in K \cup E \cup F \cup G \cup H)$$

и, следовательно,

$$x_j^{bo} = g_j(f_B(x_H^{ai}),\, f_D(x_H^{ai}),\, x_F^{bi},\, x_G^{bi}) \quad (j \in L).$$

Легко видеть, что программа

$$(a(x_K^{o}|^{i}\, x_H) \otimes b(x_L^{o}|^{i}\, x_M))(x_K, x_E, x_F^{o}|^{i}\, x_H, x_F, x_G)$$

вычисляет набор функций $\{h_j\,(x_H, x_F, x_G)\;\; (j \in A \cup B \cup L)\}$,

где

$$h_j(x_H, x_F, x_G) = \begin{cases} f_j\,(x_H) & \text{если } j \in A \cup B, \\ g_j(f_B\,(x_H), f_D\,(x_H)\, x_F, x_G), & \text{если } j \in L \end{cases}$$

3. Допустим, что условие $p\,(x_G)$ определяет предикат $p^*\,(x_G)$, программа $a\,(x_D, x_E^{o}|^{i}\, x_A)$ вычисляет набор функций $\{f_j\,(x_A)\;\; (j \in D \cup E)\}$, программа $b\,(x_E, x_F^{o}|^{i}\, x_B)$ – набор функций $\{g_j\,(x_B)\;\; (j \in E \cup F)\}$

D, E, F – взаимно непересекающиеся множества, $|D \cup E| \neq 0$ и $|E \cup F \neq 0$

Очевидно, что при выполнении программы a содержания ячеек x_F не меняются, т.е. $x_j^{o} = x_j^{i}$ $(j \in F)$ и при выполнении программы b, содержания ячеек x_D также не меняются, т.е. $x_j^{o} = x_j^{i}$ $(j \in D)$. Следовательно, программа a вычисляет набор функций .

$f_j\,(x_A);\quad x_K\quad (j\in D\cup E, K\in F)\}$ и программа B –

$\{g_j\,(x_B);\quad x_K\quad (j\in E\cup F\,,\ K\in D)\}$.

Согласно определению выполнения программ программа

$$C(p(x_G),\,a\,(x_D,x_E^{\sigma}\big|^{i}x_A),\,B(x_E,\,x_F^{\sigma}\big|^{i}x_B))(x_D,x_E,x_F^{\sigma}\big|^{i}x_G,x_A,x_B,x_D,x_F)$$

вычисляет набор функций

$$\{\,h_j\,(x_G,x_A,x_B,x_D,x_F)\qquad (j\in D\cup E\cup F)\}$$

где

$$,x_A,x_B,x_D,x_F)=\begin{cases} f_j\,(x_A) \text{ ,если } p^*(x_G) \text{ - истинно и } j\in D\cup E,\\ x_j \text{ ,если } p^*(x_G) \text{ - истинно и } j\in F,\\ x_j \text{ ,если } p^*(x_G) \text{ - ложно и } j\in D,\\ g_i\,(x_B) \text{ ,если } p^*(x_G) \text{ - ложно и } j\in E\cup F \end{cases}$$

4. Допустим, что условие $p\,(x_G)$ определяет предикат $p^*(x_G)$, программа $B\,(x_D^{\sigma}\big|^{i}x_E)$ вычисляет набор функций $\{f_D\,(x_E)\}$ и $|D|\neq 0$

Согласно определению выполнения программы $C(p,\square\,,B)$ если $p^*(x_G)$ – истинно, то содержания ячеек x_D не меняются, следовательно, программа

$$C\,(p\,(x_G),\square\,,\,B\,(x_D^{\sigma}\big|^{i}x_E))\,(x_D^{\sigma}\big|^{i}x_G,x_E,x_D)$$

вычисляет набор функций

$$\{\,g_D\,(x_G,x_E,x_D)\,\},$$

где

$$g_j(x_G,x_E,x_D)=\begin{cases} x_j \quad \text{если } p^*(x_G) \text{ – истинно и } j\in D\\ f_j\,(x_E), \text{ если } p^*(x_G) \text{ – ложно и } j\in D\end{cases}$$

5. Аналогично можно показать, что если условие $p\,(x_G)$ определяет предикат $p^*(x_G)$, программа $B(x_B^{\sigma}\big|^{i}x_E)$ вычисляет набор функций

$\{ f_D(x_E) \}$ и $|D| \neq 0$, то программа

$$C(p(x_G), \, b(x_D^o|^i x_E), \, \square)\,(x_D^o|^i x_G, x_E, x_D)$$

вычисляет набор функций $\{ g_D(x_G, x_E, x_D) \}$ где

$$g_j(x_G, x_E, x_D) = \begin{cases} f_j(x_E) & \text{если } p^*(x_G) - \text{ истинно и } j \in D \\ x_j & \text{если } p^*(x_G) - \text{ ложно и } j \in D \end{cases}$$

6. Допустим, что условие $p(x_A, x_B, x_C, x_D)$ определяет предикат $p^*(x_A, x_B, x_C, x_D)$ программа $a(x_E, x_B, x_F, x_D^o|^i x_G, x_C, x_F, x_D)$ вычисляет набор функций $\{ f_j(x_G, x_C, x_F, x_D) \ \ (j \in E \cup B \cup F \cup D) \}$, A, B, C, D, E, F, G – взаимно непересекающиеся множества,

$H = A \cup B \cup C \cup D$, $K = E \cup B \cup F \cup D$, $L = G \cup C \cup F \cup D$ и $|K| \neq 0$.

Через $x_K^o(n)$ будем обозначать содержание ячеек x_K после n повторных выполнений a

Согласно определению выполнения программы $W(p,a)$

$$x_j^o(0) = x_j^i, \qquad x_j^o(1) = f_j(x_L) \qquad (j \in K).$$

Допустим, что $x_j^o(m) = t_j$ $(j \in K)$.

Тогда, очевидно, $x_j^o(m+1) = f_j(x_G^i, x_C^i, t_F, t_D)$ $(j \in K)$.

Нетрудно видеть, что программа, выполнение которой состоит из n повторных выполнений программы a и которую обозначим через $It(n,a)$ вычисляет набор функций $\{ g_K(x_L, x_E, x_B, n) \}$, где

$$\begin{cases} g_j(x_L, x_E, x_B, 0) = x_j, & (j \in K), \\ g_j(x_L, x_E, x_B, n) = f_j(x_G, x_C, g_F(x_L, x_E, x_B, n-1), g_D(x_L, x_E, x_B, n-1)) & (j \in K) \end{cases}$$

Возможны два случая:

1. Выполнение программы $W(p,a)$ не заканчивается.
2. Существует такое минимальное натуральное число

$y\ (y \geqslant 0)$, что после y повторных выполнений подпрограммы a предикат p впервые принимает значение ложно и выполнение программы $W(p,a)$ заканчивается.

Нетрудно видеть, что программа

$$W(p(x_H), a(x_K^{a}\big|^{i} x_L))(x_K^{a}\big|^{i} x_H, x_a, x_p, x_E)$$

вычисляет набор функций

$$\{g_K(x_L, x_E, x_B, y) \quad \text{где} \quad y = \mu_z(p^*(x_A, g_B(x_L, x_E, x_B, z), x_C, g_D(x_L, x_E, x_B, z)) \text{ - ложно})\}$$

§4. Связь между содержательной и формальной арифметикой

В дальнейшем мы будем параллельно говорить об арифметике в содержательном (неформальном) смысле и о формальной арифметике. При рассуждениях в пределах содержательной теории нам будет полезна сжатость выражений, которую дает логический символизм, и особенно при построении обозначений для предикатов и функций. Для этой цели мы введем теперь логический символизм, который следует рассматривать как содержательный и осмысленный в противоположность символизму формальной системы как предмету метаматематики. Принятые в данной работе обозначения и определения частично совпадают с употребляемыми в работе Клини [I].

Символы в содержательном символизме	Словесное название	Символы в формальном символизме
$\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B}$	A влечёт B	$A \supset B$
$\mathcal{A} \Longleftrightarrow \mathcal{B}$	A эквивалентно B	$A \equiv B$
$\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$	A и B	$A \,\&\, B$
$\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$	A или B	$A \vee B$
$\bar{\mathcal{A}}$	не A	$\neg A$
$(x)\mathcal{A}(x)$	для всех x, $A(x)$	$\forall x\ A(x)$
$(\mathcal{E}x)\mathcal{A}(x)$	существует x такой, что $A(x)$	$\exists x\ A(x)$
$(\mathcal{E}!x)\mathcal{A}(x)$	существует единственный x такой, что $A(x)$	$\exists! x\ A(x)$

Через $A(x_1, \ldots, x_n)$ будем обозначать формулу формальной арифметики со свободными переменными $x_1, \ldots, x_n$. Кроме этих, формула может содержать и другие свободные переменные. Результат подстановки терма t вместо мepeменного x в формуле $A(x)$ будем обозначать через $A(t)$. Вместо предложений "формула F выводима (в формальной арифметике)", "допустим что формула F выводима" и "формула H выводима из формул, выводимость которых заранее принято в качестве гипотезы" будем соответственно писать $\vdash F$, $\dashv F$ и $\dashv\vdash H$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Скажем, что формула $A(x_B)$, где $|B| = n \neq 0$, содержащая точно n свободных переменных, выражает арифметический предикат $\alpha(x_B)$ если для любых натуральных чисел S_B

(1) $\alpha(S_B)$ - истинно $\Longrightarrow \vdash A(\bar{S}_B)$

(2) $\alpha(S_B)$ - ложно $\Longrightarrow \vdash \neg A(\bar{S}_B)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Скажем, что формула $F(x_A, x_B)$, где $|A| = n \neq 0$ и $|B| = m$, содержащая точно $n+m$ свободных переменных, сильно представляет набор частично определенных арифметических функций $\{f_A(x_B)\}$, если для любых натуральных чисел S_A, S_B

(I) $f_j(S_B) = S_j \Longleftrightarrow \vdash F(\bar{S}_A, \bar{S}_B) \quad (j \in A)$,

(2) $\vdash \forall x_A, y_A \{[F(x_A, x_B) \,\&\, (y_A, x_B)] \supset \underset{j \in A}{\&} (x_j = y_j)\}$.

Следует отметить, что данное определение сильной представимости функций отличается от соответствующего определения в работах [I] и [2] для всюду определенных функций. У нас требование (I) усилено заменой "$\Longrightarrow$" на "$\Longleftrightarrow$". Требование (2) у нас слабее, чем в работах [I] и [2], где требуется, чтобы $\vdash \exists! x_A F(x_A, x_B)$. Это потому, что у нас допускаются также частично определенные функции.

ЛЕММА 4.I. Если формула A выражает предикат $\mathcal{A}$
и формула B выражает предикат $\mathcal{B}$,
то формула $\neg A$ выражает предикат $\bar{\mathcal{A}}$,
формула $A \,\&\, B$ выражает предикат $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$,
формула $A \vee B$ выражает предикат $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$,
формула $\exists x\, A(x)$ выражает предикат $(\mathcal{E}x)\, \mathcal{A}(x)$

и формула $\forall x\, A(x)$ выражает предикат $(x)\mathcal{A}(x)$.

Доказательство очевидно.

Сделаем ряд обозначений для формул формальной арифметики и функций.

$$Q(q,a,b) \rightleftharpoons \exists r[(a=bq+r)\&(r<b)]\vee[(b=0)\&(q=0)];^{*)}$$

$$R(r,a,b) \rightleftharpoons \exists q[(q\leqslant a)\&(a=bq+r)\&(r<b)]\vee[(b=0)\&(r=a)]\&$$

$$\& \forall e\{(e<r)\supset\neg[\exists q[(q\leqslant a)\&(a=bq+e)\&(e<b)]\vee[(b=0)\&(e=a)]]\};$$

$$Bt(w,c,d,i) \rightleftharpoons \exists v[(c=(i'd)'v+w)\&(w<(i'd)')];$$

$$P(p,a,b) \rightleftharpoons \exists c,d\{Bt(\bar{1},c,d,\bar{0})\&\forall x[(x<b)\supset\exists t,u[Bt(t,c,d,x)\&$$

$$\& Bt(u,c,d,x')\&(u=ta)]]\& Bt(p,c,d,b)\};$$

$\beta(c,d,i) = rm((i+1)d+1,c)$ $\quad\beta$-функция Геделя;
$qt(a,b)$ частному от деления a на b
$rm(a,b)$ остатку от деления a на b.

ЛЕММА 4.2. Формула $Q(q,a,b)$ сильно представляет функцию $qt(a,b)$, формула $R(r,a,b)$ – функцию $rm(a,b)$
формула $P(p,a,b)$ – функцию a^b,
формула $Bt(w,c,d,i)$ – функцию $\beta(c,d,i)$

Доказательство леммы аналогично соответствующему доказательству сильной представимости перечисленных функций в работе [I]. Отличия в определении сильной представимости в данной работе и в работе [I] вызывают лишь незначительные модификации.

Для сокращения записи формул будем неограниченно пользоваться традиционными обозначениями, такими как $<$, $\leqslant$, $>$, $\geqslant$, $\exists! x$ и т.д.

---

*) Символ $\rightleftharpoons$ служит знаком графического равенства

Понятие терма, как составной части языка L, от понятия терма в формальной арифметике отличается лишь тем, что в первом случае допускается дополнительный функциональный символ $\dot{-}$. Поэтому, если s и t – термы, то $F(s \dot{-} t)$ будем понимать лишь как сокращение формулы

$$\exists z \{ F(z) \& [(s \geqslant t) \supset (s = z + t)] \& [(s < t) \supset (z = 0)] \}.$$

§5. Формальное определение семантики языка L

Теперь дадим алгоритм S который каждой программе $\mathcal{R}(\overset{o}{x}_A | \overset{i}{x}_B)$ написанной на языке L, сопоставляет формулу формальной арифметики $S[\mathcal{R}(\overset{o}{x}_A | \overset{i}{x}_B)](\overset{o}{x}_A, \overset{i}{x}_B)$ Свободные переменные $\overset{o}{x}_A$ этой формулы соответствуют выходным, а свободные переменные $\overset{i}{x}_B$ – входным ячейкам программы $\mathcal{R}$. Формула $S[\mathcal{R}](\overset{o}{x}_A, \overset{i}{x}_B)$ не содержит других свободных переменных кроме x_A x_B

(I) $S[x_t := T(x_A)](\overset{o}{x}_t, \overset{i}{x}_A) \equiv (\overset{o}{x}_t = T(\overset{i}{x}_A))$;

(2) $S[a(\overset{o}{x}_K | \overset{i}{x}_H) \circ b(\overset{o}{x}_L | \overset{i}{x}_M)](\overset{o}{x}_K, \overset{o}{x}_E, \overset{o}{x}_F, \overset{i}{x}_H, \overset{i}{x}_F, \overset{i}{x}_G) \equiv$

$\equiv \exists y_K [S[a](y_K, \overset{i}{x}_H) \& \underset{j \in A \cup B}{\&} (\overset{o}{x}_j = y_j) \& S[b](\overset{o}{x}_L, y_B, y_D, \overset{i}{x}_F, \overset{i}{x}_G)]$,

A, B, C, D, E, F, G – взаимно непересекающиеся множества,

$K = A \cup B \cup C \cup D$, $L = C \cup D \cup E \cup F$, $M = B \cup D \cup F \cup G$

$|K| \neq 0$ и $|L| \neq 0$

(3) $S[C(p(x_G), a(x_D, \overset{o}{x}_E | \overset{i}{x}_A), b(x_E, \overset{o}{x}_F | \overset{i}{x}_B))](\overset{o}{x}_D, \overset{o}{x}_E, \overset{o}{x}_F, \overset{i}{x}_G, \overset{i}{x}_A, \overset{i}{x}_B, \overset{i}{x}_D, \overset{i}{x}_F) \equiv$

$\equiv \{ S[p(x_G)](\overset{i}{x}_G) \supset \{ S[a](\overset{o}{x}_D, \overset{o}{x}_E, \overset{i}{x}_A) \& \underset{j \in F}{\&} (\overset{o}{x}_j = \overset{i}{x}_j) \} \} \&$

$\& \{ \neg S[p(x_G)](\overset{i}{x}_G) \supset \{ S[b](\overset{o}{x}_E, \overset{o}{x}_F, \overset{i}{x}_B) \& \underset{j \in D}{\&} (\overset{o}{x}_j = \overset{i}{x}_j) \} \}$,

D, E, F – взаимно непересекающиеся множества, $|D \cup E| \neq 0$ и $|E \cup F| \neq 0$;

(4) $S[C(p(x_G),\square,\mathit{b}(x_D^{o}|^{i}x_E))](x_D^{o},x_G^{i},x_E^{i},x_D^{i}) \equiv$

$\equiv\{S[p(x_G)](x_G^{i}) \supset S[\underset{j\in D}{\otimes}(x_j := x_j)](x_D^{o},x_D^{i})\}\&$

$\&\ \{\neg S[p(x_G)](x_G^{i}) \supset S[\mathit{b}(x_D^{o}|^{i}x_E)](x_D^{o},x_E^{i})\}, \quad |D|\neq 0;$

(5) $S[C(p(x_G),\mathit{b}(x_D^{o}|^{i}x_E),\square)(x_D^{o},x_G^{i},x_E^{i},x_D^{i}) \equiv$

$\equiv\{S[p(x_G)](x_G^{i} \supset S[\mathit{b}(x_D^{o}|^{i}x_E)](x_D^{o},x_E^{i})\}\&$

$\&\ \{\neg S[p(x_G)](x_G^{i}) \supset S[\underset{j\in D}{\otimes}(x_j := x_j)](x_D^{o},x_D^{i})\}, \quad |D|\neq 0;$

(6) $S[It(n,a(x_K^{o}|^{i}x_L))](x_K^{o},x_L^{i},x_E^{i},x_B^{i},y) \equiv$

$\equiv \exists u_K,v_K\{\underset{j\in K}{\&} Bt(x_j^{i},u_j,v_j,\bar{0})\&\ \forall t\{(t<y)\supset$

$\supset \exists y_K,z_K[\underset{j\in K}{\&} Bt(y_j,u_j,v_j,t)\&\ \underset{j\in K}{\&} Bt(z_j,u_j,v_j,t')\&$

$\&\ S[a](z_K,x_G^{i},x_C^{i},y_F,y_D)]\}\&\ \underset{j\in K}{\&} Bt(x_j^{o},u_j,v_j,y)\},$

B,C,D,E,F,G – взаимно непересекающиеся множества,

$K=E\cup B\cup F\cup D \qquad L=G\cup C\cup F\cup D \qquad |K|\neq 0$;

(7) $S[W(p(x_H),a(x_K^{o}|^{i}x_L))](x_K^{o},x_H^{i},x_G^{i},x_F^{i},x_E^{i}) \equiv$

$\equiv \exists y\{\exists z_K\{S[It(n,a)](z_K,x_L^{i},x_E^{i},x_B^{i},y)\&\neg S[p](x_A^{i},z_B,x_C^{i},z_D)\}\&$

$\&\ \forall t\{(t<y)\supset \forall z_K\{S[It(n,a)](z_K,x_L^{i},x_E^{i},x_B^{i},t)\supset S[p](x_A^{i},z_B,x_C^{i},z_D)\}\}\&$

$\&\ S[It(n,a)](x_K^{o},x_L^{i},x_E^{i},x_B^{i},y)\},$

A,B,C,D,E,F,G – взаимно непересекающиеся множества,

$H=A\cup B\cup C\cup D$, $\quad K=E\cup B\cup F\cup D$, $\quad L=G\cup C\cup F\cup D$ и

$|K|\neq 0$.

(8) $S[p(x_A)] = p(x^i)$.

Теперь сформулируем теорему которая обосновывает выбор описанного алгоритма S

ГЛАВНАЯ ТЕОРЕМА. Для любой программы $\mathcal{R}$, написанной на языке L , формула формальной арифметики $S[\mathcal{R}]$ сильно представляет тот набор функций, который вычисляет программа $\mathcal{R}$

Через $F(x_A, x_B) \xleftrightarrow{R} \{f_A(x_B)\}$ будем сокращенно записывать утверждение: формула формальной арифметики $F(x_A, x_B)$ сильно представляет набор частично определенных функций $\{f_A(x_B)\}$ а через $F(x_A) \xleftrightarrow{E} p^*(x_A)$ – утверждение: формула формальной арифметики $F(x_A)$ выражает предикат $p^*(x_A)$

Справедливость главной теоремы вытекает из следующих лемм.

ЛЕММА 5.I.

$$S[x_t := T(x_A)](x_t^o, x_A^i) \xleftrightarrow{R} f^T(x_A),$$

$$S[p(x_A)](x_A^i) \xleftrightarrow{E} p^*(x_A).$$

Справедливость леммы вытекает из работ [I] и [2].

ЛЕММА 5.2. Если A, B, C, D, E, F, G – взаимно непересекающиеся множества, $K = A \cup B \cup C \cup D$, $L = C \cup D \cup E \cup F$, $M = B \cup D \cup F$, $|K| \neq 0$ и $|L| \neq 0$

$$S[a(x_K^o | x_H^i)](x_K^o, x_H^i) \xleftrightarrow{R} \{f_K(x_H)\} \quad \text{и}$$

$$S[b(x_L^o | x_M^i)](x_L^o, x_M^i) \xleftrightarrow{R} \{g_L(x_M)\},$$

то

$$S[a \otimes b](x_K^o, x_E^o, x_F^o, x_H^i, x_F^i, x_G^i) \xleftrightarrow{R} \{h_j(x_H, x_F, x_G) \quad (j \in A \cup B \cup L)\}$$

где

$$h_j(x_H, x_F, x_G) = \begin{cases} f_j(x_H), & \text{если} \quad j \in A \cup B, \\ g_j(f_B(x_H), f_D(x_H), x_F, x_G), & \text{если} \quad j \in L. \end{cases}$$

Доказательство леммы разделим на три этапа - $[1 \Longrightarrow]$ $[1 \Longleftarrow]$ и $[2]$. На этапе $[1 \Longrightarrow]$ докажем "импликацию слева направо" пункта (1) определения 4.2, на этапе $[1 \Longleftarrow]$ - "импликацию справа налево" пункта (1) определения 4.2, на этапе $[2]$ - пункт (2) того же определения.

$[1 \Longrightarrow]$ Пусть

1) $f_j(v_H) = w \qquad (j \in K)$,

2) $h_j(v_H, v_F, v_G) = u_j \qquad (j \in A \cup B \cup L)$.

Согласно определению набора функций $\{h_j \quad (j \in A \cup B \cup L)\}$

3) $h_j(v_H, v_F, v_G) = f_j(v_H) \qquad (j \in A \cup B)$,

4) $h_j(v_H, v_F, v_G) = g_j(f_B(v_H), f_D(v_H), v_F, v_G) \qquad (j \in L)$.

Из 1), 2), 3) и 4) следует

5) $u_j = w_j \quad (j \in A \cup B), \quad g_j(w_B, w_D, v_F, v_G) = u_j \qquad (j \in L)$.

Согласно данному о сильной представительности наборов функций $\{f_K\}$ и $\{g_L\}$ из 1) и 5) следует.

6) $\vdash S[a](\overline{w}_K, \overline{v}_H)$,

7) $\vdash S[b](\overline{u}_L, \overline{w}_B, \overline{w}_D, \overline{v}_F, \overline{v}_G)$.

Очевидно, что из 5) следует также

8) $\vdash \underset{j \in A \cup B}{\&} (\overline{u}_j = \overline{w}_j)$.

Из 6), 7) и 8) после $\&$ введения следует

9) $\vdash S[a](\overline{w}_K, \overline{v}_H) \& \underset{j \in A \cup B}{\&} (\overline{u}_j = w_j) \& S[b](\overline{u}_L, \overline{w}_B, \overline{v}_F, \overline{v}_G)$.

После многократного $\exists$ -введения и 9) следует

10) $\vdash \exists x_K (S[a](x_K, \overline{v}_H) \& \underset{j \in A \cup B}{\&} (\overline{u}_j = x_j) \& S[b](\overline{u}_L, x_B, x_D, \overline{v}_F, \overline{v}_G)$,

что требовалось доказать для пункта $[1 \Longrightarrow]$.

$[1\Longleftarrow]$ Пусть справедливо утверждение I0) из пункта $[1\Longrightarrow]$. Тогда согласно правилу C *) для некоторых $\bar{t}_K$ следует

II) $\vdash S[a](\bar{t}_K,\bar{v}_H) \,\&\, \underset{j\in A\cup B}{\&} (\bar{u}_j=\bar{t}_j) \,\&\, S[b](\bar{u}_L,\bar{t}_B,\bar{t}_D,\bar{v}_F,\bar{v}_G)$.

I2) $\vdash S[a](\bar{t}_K,\bar{v}_H)$ II) & - удаление

I3) $\vdash \underset{j\in A\cup B}{\&} (\bar{u}_j=\bar{t}_j)$ II) & - удаление.

I4) $\vdash S[b](\bar{u}_L,\bar{t}_B,\bar{t}_D,\bar{v}_F,\bar{v}_G)$ II) & - удаление.

Из I3) очевидно следует

I5) $u_j=t_j \qquad (j\in A\cup B)$.

Согласно данному о сильной представимости наборов функций $\{f_j\ (j\in K)\}$ и $\{g_j\ (j\in L)\}$ из I2) и I4) следует

I6) $f_j(v_K)=t_j \qquad (j\in K)$,

I7) $g_j(t_B,t_D,v_F,v_G)=u_j \qquad (j\in L)$.

Наконец из I5), I6) и I7) согласно определению набора функций $\{h_j \quad (j\in A\cup B\cup L)\}$ следует

I8) $h_j(v_H,v_F,v_G)=u_j \qquad (j\in A\cup B\cup L)$,

что требовалось доказать для пункта $[1\Longleftarrow]$

[2] Пусть $N=A\cup B\cup C\cup D\cup E\cup F$

I) $\dashv\ S[a\otimes b](x_N,x^i_H,x^i_F,x^i_G) \,\&\, S[a\otimes b](z_N,x^i_H,x^i_F,x^i_G)$.

2) $\dashv\vdash S[a](\bar{t}_K,x^i_H) \,\&\, S[a](\bar{u}_K,x^i_G)$

I) & - удаление, правило C & - удаление, & - введение.

---

x) имеется в виду правило C, данное в [2]

3) $\dashv\vdash \underset{j\in A\cup B}{\&}(x_j = \bar{t}_j) \, \& \underset{j\in A\cup B}{\&}(z_j = \bar{u}_j)$

1) $\&$ - удаление, правило C $\&$ - удал[illegible]ние, $\&$ введение.

4) $\dashv\vdash S[b](x_L, \bar{t}_B, \bar{t}_D, x^i_F, x^i_G) \& S[b](z_L, \bar{t}_B, \bar{u}_D, x^i_F, x^i_G)$

1) $\&$ - удаление, [illegible]равило C $\&$ [illegible]даление, $\&$ - введение.

5) $\vdash \forall v_K, w_K [(S[a](v_K, x^i_H) \& S[a](w_K, x^i_H)) \supset \underset{j\in K}{\&}(v_j = w_j)]$

дано

6) $\dashv\vdash \underset{j\in K}{\&}(\bar{t}_j = \bar{u}_j)$ 5), $\forall$ [illegible]ие, 2), МР

7) $\dashv\vdash \underset{j\in A\cup B}{\&}(x_j = z_j)$ 3), 6).

8) $\dashv\vdash S[b](x_L, \bar{t}_B, \bar{t}_D, x^i_F, x^i_G) \& S[b](z_L, \bar{t}_B, \bar{t}_D, x^i_F, x^i_G)$ 6).

9) $\vdash \forall x_L, z_L [(S[b](x_L, y_B, y_D, x^i_F, x^i_G) \& S[b](z_L, y_B, y_D, x^i_F, x^i_G)) \supset$
$\supset \underset{j\in L}{\&}(x_j = z_j))$ дано

10) $\dashv\vdash \underset{j\in L}{\&}(x_j = z_j)$ $\forall$ - удаление, 4), МР.

11) $\vdash \forall x_N, z_N [(S[a \otimes b](x_N, x^i_H, x^i_F, x^i_G) \& S[a \otimes b](z_N, x^i_H, x^i_F, x^i_G)) \supset$
$\supset \underset{j\in N}{\&}(x_j = z_j)]$

1), 7), 10), $\&$ - введение, теорема о дедукции, $\forall$ - введение, что требовалось доказать для пункта [2]

Лемма доказана.

ЛЕММА 5.3. Если D, E, F – взаимно непересекающиеся множества, $|D \cup E| \neq 0$ $|E \cup F| \neq 0$

$$S[p(x_G)](\overset{i}{x}_G) \overset{E}{\longleftrightarrow} p^*(x_G),$$

$$S[a(x_D, x_E \,{}^{o}|^{i}\, x_A)](\overset{o}{x}_D, \overset{o}{x}_E, \overset{i}{x}_A) \overset{R}{\longleftrightarrow} \{f_j(x_A) \quad (j \in D \cup E)\},$$

$$S[b(x_E, x_F \,{}^{o}|^{i}\, x_B)](\overset{o}{x}_E, \overset{o}{x}_F, \overset{i}{x}_B) \overset{R}{\longleftrightarrow} \{g_j(x_B) \quad (j \in E \cup F)\},$$

то $$S[C(p,a,b)](\overset{o}{x}_D, \overset{o}{x}_E, \overset{o}{x}_F, \overset{i}{x}_G, \overset{i}{x}_A, \overset{i}{x}_B, \overset{i}{x}_D, \overset{i}{x}_F) \overset{R}{\longleftrightarrow}$$

$$\overset{R}{\longleftrightarrow} \{h_j(x_G, x_A, x_B, x_D, x_F) \quad (j \in D \cup E \cup F)\},$$

где

$$h_j(x_G, x_A, x_B, x_D, x_F) = \begin{cases} f_j\ (x_A), & \text{если } p^*(x_G) \text{ -истинно и } j \in D \cup E, \\ x_j & \text{если } p^*(x_G) \text{ -истинно и } j \in F, \\ x_j & \text{если } p^*(x_G) \text{ - ложно } \quad j \in D, \\ g_i(x_B) & \text{если } p^*(x_G) \text{ - ложно и } j \in E \cup F. \end{cases}$$

Вместо p истинно будем писать просто p

Допустим, что

1) $h_j(v_G, v_A, v_B, v_D, v_F) = u_j \qquad (j \in D \cup E \cup F)$.

Допустим сперва, что

2) $p^*(v_G)$.

Из [illegible] лоб[illegible]

$\{h_j \quad (j \in D \cup E \cup F)\}$ и I) следует

3) $f_j(v_A) = u_j \qquad (j \in D \cup E),$

4) $v_j = u_j \qquad (j \in F).$

Согласно данному с представимости набора функций $\{f_j\,(j \in D \cup E)\}$ из 3) следует

5) $\vdash S[a](\bar{u}_D, \bar{u}_E, \bar{v}_A).$

Очевидно из 4) следует

6) $\vdash \underset{j \in F}{\&}(\bar{v}_j = \bar{u}_j).$

Согласно ному о выразимости предиката p^* из 2) следует

7) $\vdash S[p](\bar{v}_G).$

Нетрудно видеть, что из 5), 6) и 7) следует

8) $\vdash \{S[p](\bar{v}_G) \supset [S[a](\bar{u}_D, \bar{u}_E, \bar{v}_A) \& \underset{j \in F}{\&}(\bar{u}_j = \bar{v}_j)]\} \&$

$\& \ \{\neg S[p](\bar{v}_G) \supset [S[b](\bar{u}_E, \bar{u}_F, \bar{v}_B) \& \underset{j \in D}{\&}(\bar{u}_j = \bar{v}_j)]\}.$

Мы доказали, что из допущений 1) и 2) следует

9) $\vdash S[C(p,a,b)](\bar{u}_D, \bar{u}_E, \bar{u}_F, \bar{v}_G, \bar{v}_A, \bar{v}_B, \bar{v}_D, \bar{v}_F).$

Аналогично доказывается, что из 1) и допущения $\overline{p^*(v_G)}$ также следует 9).

На основе факта, что всегда истинно высказывается $p^*(v_G) \cup \overline{p^*(v_G)}$ заключаем, что утверждение 9) следует из одного лишь допущения 1), ч.т.д. для пункта $[1 \Longrightarrow]$.

[$1\Leftarrow$] Допустим, что справедливо утверждение 9). Тогда

10) $\vdash S[p](\bar{v}_G) \supset \{S[a](\bar{u}_D, \bar{u}_E, \bar{v}_A) \,\&\, \underset{j\in F}{\&}(\bar{u}_j = \bar{v}_j)\}$ 9), $\&$ -удаление.

Допустим сперва, что

11) $p^*(v_G)$.

Тогда очевидно

12) $\vdash S[p](\bar{v}_G)$.

13) $\vdash S[a](\bar{u}_D, \bar{u}_E, \bar{v}_A)$ 10), 12), MP, $\&$ -удал

14) $\vdash \underset{j\in F}{\&}(\bar{u}_j = \bar{v}_j)$ 10)12)MP, $\&$ -удаление.

15) $f_j(v_A) = u_j$ $(j \in D \cup E)$ 13), данно

16) $u_j = v_j$ $(j \in F)$ 14), данно

Мы доказали, что из допущений 9) и 11) следует, что

17) $h_j(v_G, v_A, v_B, v_D, v_F) = u_j$ $(j \in D \cup E \cup F)$.

Аналогично доказывается, что из допущения 9) и допущен $\overline{p^*(v_G)}$ также следует утверждение 17). Но всегда истинно $p^*(v_G) \cup \overline{p^*(v_G)}$ поэтому заключаем, что утверждение 17) следует из одного лишь допущения 9), ч.т.д. для [$1\Leftarrow$]

[2]

Доказательство этого пункта аналогично доказательству пункта [2] леммы 5.2.

Доказательства остальных лемм аналогичны доказательств лемм 5.2 и 5.3.

ЛЕММА 5.4. Если $S[p(x_G)](\overset{i}{x}_G) \xleftrightarrow{E} p^*(x_G)$,

$S[b(\overset{o}{x}_D|\overset{i}{x}_E)](\overset{o}{x}_D, \overset{i}{x}_E) \xleftrightarrow{R} \{f_D(x_E)\}$ $|D| \neq 0$,

то $S[C(p, \square, b)](\overset{o}{x}_D, \overset{i}{x}_G, \overset{i}{x}_D, \overset{i}{x}_E) \xleftrightarrow{R} \{g_D(x_G, x_E, x_D)\}$, где

$$g_j(x_G, x_E, x_D) = \begin{cases} x_j, & \text{если } p^*(x_G) \text{ -истинно и } j \in D \\ f_j(x_E), & \text{если } p^*(x_G) \text{ -ложно и } j \in D. \end{cases}$$

ЛЕММА 5.5. Если $S[p(x_G)](\overset{i}{x_G}) \overset{E}{\longleftrightarrow} p^*(x_G)$,

$S[B(\overset{o}{x_D}|\overset{i}{x_E})](\overset{o}{x_D}, \overset{i}{x_E}) \overset{R}{\longleftrightarrow} \{f_D(x_E)\}$ $\qquad |D| \neq 0$,

то $S[C(p, B, =)](\overset{o}{x_D}, \overset{i}{x_G}, \overset{i}{x_E}, \overset{i}{x_D}) \overset{R}{\longleftrightarrow} \{g_D(x_G, x_E, x_D)\}$,

где

$$g_j(x_G, x_E, x_D) = \begin{cases} f_j(x_E), & \text{если } p^*(x_G) \text{ -истинно и } j \in D \\ x_j, & \text{если } p^*(x_G) \text{ -ложно и } j \in D. \end{cases}$$

ЛЕММА 5.6. Если B, C, D, E, F, G – взаимно непересекающиеся множества, $K = E \cup B \cup F \cup D$, $L = G \cup C \cup F \cup D$, $|K| \neq 0$

и $S[a(\overset{o}{x_K}|\overset{i}{x_L})](\overset{o}{x_K}, \overset{i}{x_L}) \overset{R}{\longleftrightarrow} \{f_K(x_L)\}$,

то $S[It(n, a(\overset{o}{x_K}|\overset{i}{x_L}))](\overset{o}{x_K}, \overset{i}{x_L}, \overset{i}{x_E}, \overset{i}{x_B}, y) \overset{R}{\longleftrightarrow} \{g_K(x_L, x_E, x_B, y)\}$,

где $\begin{cases} g_j(x_L, x_E, x_B, 0) = x_j & (j \in K), \\ g_j(x_L, x_E, x_B, y) = f_j(x_G, x_C, g_F(x_L, x_E, x_B, y-1), g_D(x_L, x_E, x_B, y-1)) & (j \in K). \end{cases}$

ЛЕММА 5.7. Если A, B, C, D, E, F, G – взаимно непересекающиеся множества, $H = A \cup B \cup C \cup D$, $K = E \cup B \cup F \cup D$, $L = G \cup C \cup F \cup D$, $|K| \neq 0$,

$$S[p(x_H)](x_H^i \xleftarrow{E} p^*(x_H),$$

$$S[It(n, a(x_K^{\circ}|^i x_L))](x_K^{\circ}, x_L^i, x_E^i, x_B^i, y) \longleftrightarrow \{g_K(x_L, x_E, x_B, y)\},$$

где

$$g_j(x_L, x_E, x_B, 0) = x_j,$$

$$g_j(x_L, x_E, x_B, y) = f_j(x_G, x_C, g_F(x_L, x_E, x_B, y-1), g_D(x_L, x_E, x_B, y-1))$$

и $j \in K$ то

$$S[W(p(x_H), a(x_K^{\circ}|^i x_L))](x_K^{\circ}, x_H^i, x_G^i, x_F^i, x_E^i) \xleftarrow{R} \{g(x_L, x_E, x_B, y),$$

где $$y = \mu_z (p^*(x_A, g_B(x_L, x_E, x_B, z), x_C, g_D(x_L, x_E, x_B, z)) - \text{ложно})\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Клини С К. Введение в метаматематику. М., 1957, 526с.
2. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М., 1971, 320 с.
3. Milner R. Implementation and Applications Scott's logic for computable functions. "Proc.Conference on Proving Assertions about Programs", New Mexico State University, 1972.
4. Weyhrauch R.W. and Milner R. Program Semant and Correctness in a mechanized logic. - "Proc.USA-Japan Computer Conference", Tokyo, 1972.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВ ПРОГРАММ В ФОРМАЛИЗОВАННОЙ СИСТЕМЕ

Я.А.Кикутс
ИЭВТ АН ЛатвССР

В статье [1] настоящего сборника было рассмотрено формальное определение семантики некоторого языка программирования L. Дан алгоритм S, который для любой программы $\mathcal{R}(x_A^{o}|^{i} x_B)$ *), написанной на языке L, дает формулу формальной арифметики $S[\mathcal{R}](x_A^{o}, x_B^{i})$, которая выражает содержательный смысл данной программы. Доказано, что формула $S[\mathcal{R}](x_A^{o}, x_B^{i})$ ильно представляет именно тот набор функций, который вычисляет программа $\mathcal{R}$.

В данной статье рассмотрим, формально доказать различные свойства программ, написанных на языке L на...ве формального определения семантики в статье [1].

Допустим, что значения входных ячеек программы $\mathcal{R}(x_A^{o}|^{i} x_B)$ перед ее выполнени удовлетворяют отношению $p(x_B)$ и необходимо доказать, что после заканчивания выполнения этой программы значения выходных ячеек удовлетворяют отноше... $r(x_A)$. Если формула формальной арифметики $P(x_B)$ ...ражает отношение $p(x_B)$, а формула $R(x_A)$ - отношение $r(x_A)$, то достаточно доказать, что

$$\vdash \{P(x_B^{i}) \& S[\mathcal{R}](x_A^{o}, x_B^{i})\} \supset R(x_A^{o}).$$

Для доказательства эквивалентности программ $\mathcal{R}_1(x_A^{o}|^{i} x_B)$ и $\mathcal{R}_2(x_A^{o}|^{i} x_B)$ достаточно доказать, что

$$\vdash S[\mathcal{R}_1](x_A^{o}, x_B^{i}) \equiv S[\mathcal{R}_2](x_A^{o}, x_B^{i})$$

---

*) В данной статье будем придерживаться всех обо... определений соглашен... введенных в статье [1] настоящего сборника.

Как видно из приведенных примеров, свойства программ нетрудно формализовать в данной системе и доказательство их сводится к выводу определенных формул в формальной арифметике. Для облегчения этой цели, мы докажем ряд метатеорем, применение которых существенно сокращает доказательства выводимости формул, выражающих различные свойства программ.

ПРАВИЛА ХОАРА

В работах [2] , [3] и [4] исследуется один из подходов для доказательства свойств программ. Методика доказательств следующая.

Через $A\{\mathcal{R}\}B$ сокращенно запишем предложение: "Если перед выполнением программы $\mathcal{R}$ справедливо некоторое утверждение A о значениях ячеек памяти и выполнение программы $\mathcal{R}$ заканчивается, то справедливо утверждение B о значениях ячеек памяти после выполнения $\mathcal{R}$ ". Для доказательства $A\{\mathcal{R}\}B$ необходимо определить отношение между значениями ячеек перед и после выполнения $\mathcal{R}$ В случае сложных программ такая задача далеко не простая. В работах [2] , [3] и [4] предлагается разбить программу на более мелкие составные части $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots, \mathcal{R}_n$ и отыскать для каждого $\mathcal{R}_j$ $(j=1,2,\ldots,n)$ такую пару утверждений A_j и B_j , что $A_j\{\mathcal{R}_j\}B_j$

В работах Хоара [3] и [4] для доказательства утверждения $A\{\mathcal{R}\}B$ из локальных утверждений $A_j\{\mathcal{R}_j\}B_j$ $(j=1,2,\ldots,n)$ предлагается ряд правил.

I. Оператор присваивания

$$\frac{F \Longrightarrow G(t)}{F\{x:=t\}G(x)},$$

где через $G(t)$ обозначен результат подстановки t вместо x в $G(x)$.

2. Оператор цикла

$$\frac{R \cap P\{a\} R}{R\{\text{while } P \text{ do } a\} R \cap \bar{P}}$$

3. Оператор композиции программ

$$\frac{\begin{array}{l} R\{a\} T \\ T\{b\} U \end{array}}{R\{a\}\{b\} U}$$

4. Условный оператор

$$\frac{\begin{array}{l} Q\{a\} T \\ R\{b\} T \end{array}}{(P \Longrightarrow Q) \cap (\bar{P} \Longrightarrow R)\{\text{if } P \text{ then } a \text{ else } b\} T}$$

5. Правило вывода следствий

а) $$\frac{\begin{array}{l} R \Longrightarrow T \\ T\{b\} U \end{array}}{R\{b\} U}$$ б) $$\frac{\begin{array}{l} R\{b\} T \\ T \Longrightarrow U \end{array}}{R\{b\} U}$$

Сформулируем перечисленные правила Хоара как мета-теоремы нашей формализованной системы и покажем, что они легко доказуемы. Эти теоремы и также некоторые другие утверждения, предложенные ниже, делают формальные доказательства свойств сравнительно несложных программ достаточно обозримыми.

ТЕОРЕМА I.

$$\frac{\vdash - F \supset G(t)}{\vdash - (F \& S[x := t](x^{\circ})) \supset G(x^{\circ})}$$

где терм t является свободным для переменной x° в формуле $G(x^{\circ})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1) $\dashv \quad F \supset G(t)$

2) $\dashv \quad F \,\&\, S[x := t](x^{\sigma})$

3) $\dashv\vdash F$ — 2), $\&$ -удаление

4) $\dashv\vdash x^{\sigma} = t$ — 2), $\&$ -удаление

5) $\dashv\vdash G(t)$ — 1), 3), МР

6) $\dashv\vdash G(x^{\sigma})$ — 4), 5)

7) $\dashv\vdash (F \,\&\, S[x := t](x^{\sigma})) \supset G(x^{\sigma})$ — 2), 6), теорема о дедукции

Теорема доказана.

Для доказательства следующей теоремы об операторе цикла потребуются две леммы, имеющие также самостоятельное значение.

ЛЕММА 1.

$$\vdash \forall x_A^{\sigma}, x_B^{i} \{ S[It(n,a)](x_A^{\sigma}, x_B^{i}, \bar{0}) \supset \mathop{\&}_{j \in A} (x_j^{\sigma} = x_j^{i}) \}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1) $\dashv \quad S[It(n,a)](x_A^{\sigma}, x_B^{i}, \bar{0})$

2) $\dashv\vdash \mathop{\&}_{j \in A} Bt(x_j^{i}, t_j, u_j, \bar{0}) \,\&\, \mathop{\&}_{j \in A} Bt(x_j^{\sigma}, t_j, u_j, \bar{0})$

1), правило C , $\&$ -удаление

3) $\vdash \exists ! x \, Bt(x, t_j, u_j, \bar{0})$

утверждение * 100?. из [?] . $\forall$ -введение, $\forall$ -удаление

4) $\dashv\vdash \underset{j\in A}{\&}(x_j^{\circ} = x_j^{i})$ 2), 3)

5) $\vdash \forall x_A^{\circ}, x_B^{i}\{S[It(n,a)](x_A^{\circ}, x_B^{i}, \bar{0}) \supset \underset{j\in A}{\&}(x_j^{\circ} = x_j^{i})\}$

I),4),теорема о дедукции, $\forall$-введение

Лемма I доказана.

ЛЕММА 2. Если A, B, C – взаимно непересекающиеся множества, то

$$\vdash \forall x_A^{\circ}, x_B^{\circ}, x_A^{i}, x_B^{i}, x_C^{i}, n\{S[It(n,a(x_A, x_B^{\circ}|^{i} x_B, x_C))](x_A^{\circ}, x_B^{\circ}, x_A^{i}, x_B^{i}, x_C^{i}, n') \supset$$

$$\supset \exists y_A, y_B\{S[It(n,a(x_A, x_B^{\circ}|^{i} x_B, x_C))](y_A, y_B, x_A^{i}, x_B^{i}, x_C^{i}, n)\&$$

$$\& S[a](x_A^{\circ}, x_B^{\circ}, y_B, x_C^{i})\}\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

I) $\dashv \quad S[It(n,a)](x_A^{\circ}, x_B^{\circ}, x_A^{i}, x_B^{i}, x_C^{i}, n')$

2) $\dashv\vdash \underset{j\in A\cup B}{\&} Bt(x_j^{i}, t_j, u_j, \bar{0})$ I),правило C, $\&$-удаление

3) $\dashv\vdash \forall m\{(m<n') \supset \exists v_A, w_A, v_B, w_B[\underset{j\in A\cup B}{\&} Bt(v_j, t_j, u_j, m)\&$

$\& \underset{j\in A\cup B}{\&} Bt(w_j, t_j, u_j, m')\& S[a](w_A, w_B, v_B, x_C^{i})]\}$

I),правило C, $\&$-удаление

4) $\dashv\vdash \underset{j\in A\cup B}{\&} Bt(x_j^{\circ}, t_j, u_j, n')$ I),правило C, $\&$-удаление

5) $\dashv\vdash \underset{j\in A\cup B}{\&} Bt(q_j, t_j, u_j, n)\& \underset{j\in A\cup B}{\&} Bt(r_j, t_j, u_j, n')\&$

$\& S[a](r_A, r_B, q_B, x_C^{i})$

3), $\forall$-удаление, тавтология $n<n'$, MP, правило C

6) $\dashv\vdash \underset{j\in A\cup B}{\&}(x_j^{o}=r_j)$ 4),5), $\&$ -удаление,* 180с. из [5]

7) $\dashv\vdash S[a](x_A^{o},x_B^{o},q_B,x_C^{i})$ 5), $\&$ -удаление,6).

8) $\dashv\vdash \underset{j\in A\cup B}{\&} Bt(q_j,t_j,u_j,n)$ 5), $\&$ -удаление.

9) $\dashv\vdash \forall m\{(m<n)\supset\exists v_A,w_A,v_B,w_B[\underset{j\in A\cup B}{\&} Bt(v_j,t_j,u_j,m)\&$

$\&\underset{j\in A\cup B}{\&} Bt(w_j,t_j,u_j,m')\& S[a](w_A,w_B,v_B,x_C^{i})]\}$ 3)

10) $\dashv\vdash S[It(n,a)](q_A,q_B,x_A^{i},x_B^{i},x_C^{i},n)$

2),9),8), $\&$ -введение, $\exists$ -введение

11) $\dashv\vdash \exists y_A,y_B\{S[It(n,a)](y_A,y_B,x_A^{i},x_B^{i},x_C^{i},n)\&$

$\& S[a](x_A^{o},x_B^{o},y_B,x_C^{i})\}$

10),7), $\&$ -введение, $\exists$ -введение

Наконец, 1),11), теорема о дедукции и $\forall$ -введение завершают доказательство леммы 2.

ТЕОРЕМА 2. Если A, B, C, D, E, F, G - взаимно непересекающиеся множества, $H=A\cup B\cup C\cup D$, $K=E\cup B\cup F\cup D$,

$L=G\cup C\cup F\cup D$, $M=H\cup K\cup L$, $|K|\neq 0$, $T\subseteq K$ и $U\subseteq M$,

то

$$\vdash \forall x_K^{o},x_M^{i}\{[R(x_T^{i},x_U^{i})\& S[p](x_H^{i})\& S[a](x_K^{o},x_L^{i})]\supset$$
$$\supset R(x_T^{o},x_U^{i})\}$$

$$\vdash \forall x_K^{o},x_M^{i}\{[R(x_T^{i},x_U^{i})\& S[w(p,a)](x_K^{o},x_M^{i})]\supset$$
$$\supset[R(x_T^{o},x_U^{i})\&\neg S[p](x_A^{i},x_B^{o},x_C^{i},x_D^{o})]\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1) $\dashv$ $\forall x_K^o, x_M^i \{[R(x_T^i, x_U^i) \& S[p](x_H^i) \&$

$\& S[a](x_K^o, x_L^i)] \supset R(x_T^o, x_U^i)\}$

2) $\dashv$ $R(x_T^i, x_U^i) \& S[w(p,a)](x_K^o, x_M^i)$

3) $\dashv\vdash R(x_T^i, x_U^i)$ 2), $\&$ -удаление

4) $\dashv\vdash \exists y\{\exists z_K\{S[It(n,a)](z_K, x_L^i, x_E^i, x_B^i, y) \&$

$\& \neg S[p](x_A^i, z_B, x_C^i, z_D)\} \& \forall t\{(t<y) \supset$

$\supset \forall z_K[S[It(n,a)](z_K, x_L^i, x_E^i, x_B^i, t) \supset$

$\supset S[p](x_A^i, z_B, x_C^i, z_D)]\} \&$

$\& S[It(n,a)](x_K^o, x_L^i, x_E^i, x_B^i, y)\}$ 2), $\&$ удаление

5) $\dashv\vdash S[It(n,a)](\bar{v}_K, x_L^i, x_C^i, \bar{m}) \& \neg S[p](x_A^i, \bar{v}_B, x_C^i, \bar{v}_D)$

4), правило C $\&$ -удаление

6) $\dashv\vdash S[It(n,a)](x_K^o, x_L^i, x_E^i, x_B^i, \bar{m})$
4), правило C $\&$ -удаление

7) $\vdash \{S[It(n,a)](x_K^o, x_L^i, x_E^i, x_B^i, \bar{m}) \&$

$\& S[It(n,a)](\bar{v}_K, x_L^i, x_E^i, x_B^i, \bar{m})\} \supset \underset{j\in K}{\&}(x_j^o = \bar{v}_j)$

Лемма 5.6 из [I] , $\forall$ -удаление

8) $\dashv\vdash \mathop{\&}_{j\in K}(x_j^{o} = \bar{v}_j)$ 5), & -удаление,6), & -введение, 7), МР

9) $\dashv\vdash \urcorner S[p](x_A^i, x_B^{o}, x_C^i, x_D^{o})$ 5), & -удаление, 8)

10) $\dashv\vdash \exists y_K^m \{S[It(n,a)](y_K^m, x_L^i, x_E^i, x_B^i, \overline{m-1}) \&$

$\& S[a](x_K^{o}, x_G^i, x_C^i, y_F^m, y_D^m)\}$

Лемма 2, $\forall$ -удаление,6), МР

11) $\dashv\vdash S[It(n,a)](t_K^m, x_L^i, x_E^i, x_B^i, \overline{m-1})$ 10), правило C & -удаление

12) $\dashv\vdash S[a](x_K^{o}, x_G^i, x_C^i, t_F^m, t_D^m)$ 10), правило C & -удаление

13) $\dashv\vdash S[It(n,a)](t_K^m, x_L^i, x_E^i, x_B^i, \overline{m-1}) \Rightarrow S[p](x_A^i, t_B^m, x_C^i, t_D^m)$

4), правило C, & -удаление, $\forall$ -удаление, тавтология $\overline{m-1} < \overline{m}$ МР $\forall$ -удаление

14) $\dashv\vdash S[p](x_A^i, t_B^m, x_C^i, t_D^m)$ 11), 13), МР

15) $\dashv\vdash S[p](x_A^i, t_B^m, x_C^i, t_D^m) \& S[a](x_K^{o}, x_G^i, x_C^i, t_F^m, t_D^m)$

14), 12), & -введение

Аналогично доказывается, что

16) $\dashv\vdash S[It(n,a)](t_K^{m-1}, x_L^i, x_E^i, x_B^i, \overline{m-2})$

$\dashv\vdash S[It(n,a)](t_K^1, x_L^i, x_E^i, x_B^i, \bar{0})$

а также

17) $\dashv\vdash S[p](x_A^i, t_B^{m-1}, x_C^i, t_D^{m-1}) \& S[a](x_K^0, x_G^i, t_F^{m-1}, t_D^{m-1})$

$\dashv\vdash S[p](x_A^i, t_B^1, x_C^i, t_D^1) \& S[a](t_K^2, x_G, t_F^1, t_D^1)$.

18) $\dashv\vdash \underset{j\in K}{\&}(t_j^1 = x_j^i)$ I6), лемма I, $\forall$ -удаление, МР

19) $\dashv\vdash S[p](x_A^i, x_B^i, x_C^i, x_D^i) \& S[a](t_K^0, x_G^i, x_F^i, x_D^i)$ I7), I8)

20) $\dashv\vdash R(t_T^2, x_U^i)$ 3), I9), & -введение, I), $\forall$ - удаление, МР

Аналогично получаем

21) $\dashv\vdash R(t_T^3, x_U^i)$

$\dashv\vdash R(t_T^m, x_U^i)$

$\dashv\vdash R(x_T^0, x_U^i)$

22) $\dashv\vdash R(x_T^0, x_U^i) \&$

$\& S[p](x_A^i, x_B^0, x_C^i, x_D^0)$ 21), 9), & -введение

23) $\dashv\vdash \forall x_K^0, x_M^i \{[R(x_T^i, x_U^i) \& S[w(p,a)](x_K^0, x_M^i)] \Rightarrow$

$\Rightarrow [R(x_T^0, x_U^i) \& \neg S[p](x_A^i, x_B^0, x_C^i, x_D^0)]\}$

2), 22) теорема о дедукции, $\forall$ -введение

Теорема 2 доказана.

Совершенно аналогично доказывается

ТЕОРЕМА 2А. Если A, B, C, D, E, F G – взаимно непересекающиеся множества,

$$H = A \cup B \cup C \cup D, \quad K = E \cup B \cup F \cup D, \quad |K| \neq 0, \quad L = G \cup C \cup F \cup D$$
$$M = H \cup K \cup L, \quad T \subseteq K \qquad U \subseteq M,$$

то

$$\vdash \forall x_K^{o}, x_M^{i}, n\{[R(x_T^{i}, x_U^{i}, n) \& S[p](x_H^{i}) \&$$
$$\& S[a](x_K^{o}, x_L^{i})] \Rightarrow R(x_T^{o}, x_U^{i}, n')\}$$

$$\vdash \forall x_K^{o}, x_M^{i}\{[R(x_T^{i}, x_U^{i}, \bar{0}) \& S[w(p,a)](x_K^{o}, x_M^{i})] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists n[R(x_T^{i}, x_U^{i}, n) \& \neg S[p](x_A^{i}, x_B^{o}, x_C^{i}, x_D^{i})]\}.$$

Не представляет труда также доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3. Если A, B, C, D, E, F, G, – взаимно непересекающиеся множества $K = E \cup B \cup F \cup D$, $L = G \cup C \cup F \cup D$ и $|K| \neq 0$ то

$$\vdash \forall x_K^{o}, x_K^{i}, x_C^{i}, x_G^{i}, m\{[R(x_K^{i}, x_C^{i}, x_G^{i}, m) \&$$
$$\& S[a(x_K^{o}|^{i} x_L)](x_K^{o}, x_L^{i})] \Rightarrow R(x_K^{o}, x_C^{i}, x_G^{i}, m')\}$$

$$\vdash \forall x_K^{o}, x_K^{i}, x_C^{i}, x_G^{i}\{[R(x_K^{i}, x_C^{i}, x_G^{i}, \bar{0}) \&$$
$$\& S[It(n,a)](x_K^{o}, x_K^{i}, x_C^{i}, x_G^{i}, \bar{n})] \Rightarrow R(x_K^{o}, x_C^{i}, x_G^{i}, \bar{n})\}.$$

ТЕОРЕМА 4. Если D , E , F - взаимно непересекающиеся множества, $H = G \cup A \cup B \cup D \cup F$ и $K = D \cup E \cup F$ то

$$\vdash \forall x_D^{\sigma}, x_E^{\sigma}, x_A^{i} \{[Q \& S[a(x_D, x_E^{\sigma} | {}^{i}x_A)](x_D^{\sigma}, x_E^{\sigma}, x_A^{i})] \supset T\}$$

$$\vdash \forall x_E^{\sigma}, x_F^{\sigma}, x_B^{i} \{[R \& S[b(x_E, x_F^{\sigma} | {}^{i}x_B)](x_E^{\sigma}, x_F^{\sigma}, x_B^{i})] \supset T\}$$

$$\vdash \forall x_K^{\sigma}, x_H^{i} \{\{[S[p](x_G^{i}) \supset Q] \& [\neg S[p](x_G^{i}) \supset R] \&$$

$$\& S[C(p,a,b)](x_K^{\sigma}, x_H^{i})\} \supset T\}.$$

Доказывается таким же методом, как теорема 2.

ТЕОРЕМА 5. Если A , B , C , D , E , F , G - взаимно непересекающиеся множества, $K = A \cup B \cup C \cup D$, $L = C \cup D \cup E \cup F$ и $M = B \cup D \cup F \cup G$ то

$$\vdash \forall x_p, x_K^{\sigma}, x_H^{i}, x_Q \{[R(x_p) \& S[a](x_K^{\sigma}, x_H^{i})] \supset T(x_Q)\}$$

$$\vdash \forall x_Q, x_L^{\sigma}, x_M^{i}, x_V \{[T(x_Q) \& S[b](x_L^{\sigma}, x_M^{i})] \supset U(x_V)\}$$

$$\vdash \forall x_p, x_K^{\sigma}, x_E^{\sigma}, x_F^{\sigma}, x_H^{i}, x_F^{i}, x_G^{i}, x_V \{[R(x_p) \&$$

$$\& S[a \circledast b](x_K^{\sigma}, x_E^{\sigma}, x_F^{\sigma}, x_H^{i}, x_F^{i}, x_G^{i})] \supset U(x_V)\}$$

Доказывается аналогично теореме 2.

ТЕОРЕМА 6.

а)

$$\vdash R \supset T$$
$$\vdash (T \& S[b]) \supset U$$

$$\vdash (R \& S[b] \supset U$$

б)

$$\vdash (R \& S[b]) \supset T$$
$$\vdash T \supset U$$

$$\vdash (R \& S[b]) \supset U$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

Рассмотрим пример доказательства свойств программ в нашей формализованной системе.

Докажем, что программа

$$\mathcal{R}(y,t\overset{\sigma}{|}\overset{i}{x}) = (t:=\bar{0}) \circledast (y:=\bar{1}) \circledast w(t \neq x, (t:=t+\bar{1}) \circledast (y:=y \cdot t))$$

имеет следующие свойства.

а) Если перед выполнением программы $\mathcal{R}$ в ячейке x находится 0 $(x^i=0)$, то после выполнения $\mathcal{R}$ в ячейке y находится 1 $(y^\sigma=1)$ и в ячейке t $- 0$ $(t^\sigma=0)$.

б) Если из условия, что перед выполнением $\mathcal{R}$ в ячейке x находится натуральное число x^i, следует, что после выполнения $\mathcal{R}$ в ячейке y находится y^σ, а из условия, что перед выполнением в x находится x^i+1, следует, что после выполнения $\mathcal{R}$ в y находится $y^{\sigma\sigma}$, то $y^{\sigma\sigma}=y^\sigma(x^i+1)$

Другими словами говоря, мы хотим доказать, что программа $\mathcal{R}(y,t\overset{i}{|}x)$ вычисляет функцию $y=x!$

Согласно алгоритму S

$$S[\mathcal{R}](y^\sigma,t^\sigma,x^i) = S[(t:=\bar{0}) \circledast (y:=\bar{1}) \circledast w(t \neq x, (t:=t+\bar{1}) \circledast (y:=y \cdot t))] =$$

$$= \exists u,v\{S[(t:=\bar{0}) \circledast (y:=\bar{1})](u,v) \& S[w(t \neq x, (t:=t+\bar{1}) \circledast (y:=y \cdot t))](y^\sigma,t^\sigma,x^i,v,u)\} =$$

$$= \exists u,v\{(u=\bar{0}) \& (v=\bar{1}) \& S[w(t \neq x, (t:=t+\bar{1}) \circledast (y:=y \cdot t))](y^\sigma,t^\sigma,x^i,v,u)\} =$$

$$= S[w(t \neq x, (t:=t+\bar{1}) \circledast (y:=y \cdot t))](y^\sigma,t^\sigma,x^i,\bar{1},\bar{0}).$$

Для доказательства свойств а) и б) в нашей формализованной системе достаточно доказать, что

$$\vdash \forall y^\sigma t^\sigma \{S[\mathcal{R}](y^\sigma,t^\sigma,\bar{0}) \supset [(y^\sigma=\bar{1}) \& (t^\sigma=\bar{0})]\}$$

и

$$\vdash \forall y^\sigma,t^\sigma,y^{\sigma\sigma},x^i\{[S[\mathcal{R}](y^\sigma,t^\sigma,x^i) \& S[\mathcal{R}](y^{\sigma\sigma},t^{\sigma\sigma},x^i+\bar{1})] \supset (y^{\sigma\sigma}=y^\sigma(x^i+\bar{1})\}.$$

Для сокращения вывода применяется теорема 3, лемма I и лемма 2.

I) $\dashv\ S[\mathcal{R}](y^{\circ},t^{\circ},x^{i}) \& S[\mathcal{R}](y^{\circ\circ},t^{\circ\circ},x^{i}+\bar{1})$

2) $\dashv\vdash S[w(t \neq x,(t:=t+\bar{1})\otimes(y:=y\cdot t))](y^{\circ},t^{\circ},x^{i},\bar{1},\bar{0})$ I), & -удаление

3) $\dashv\vdash \exists n\{\exists u,v\{S[It(n,(t:=t+\bar{1})\otimes(y:=y\cdot t))](u,v,\bar{1},\bar{0},n)\&$

$\&(v=x^{i})\}\&\ \forall m\{(m<n)\supset$

$\supset\forall u,v\{S[It(n,(t:=t+\bar{1})\otimes(y:=y\cdot t))](u,v,\bar{1},\bar{0},m)\supset$

$\supset(v\neq x^{i})\}\}\& S[It(n,(t:=t+\bar{1})\otimes(y:=y\cdot t))](y^{\circ},t^{\circ},\bar{1},\bar{0},n)\}$ 2)

4) $\dashv\vdash S[It(n,(t:=t+\bar{1})\otimes(y:=y\cdot t))](\bar{u}_0,x^{i},\bar{1},\bar{0},\bar{n}_0)$

3), правило C , & -удаление

5) $\dashv\vdash Bt(\bar{1},\bar{c},\bar{d},\bar{0})\&\ Bt(\bar{0},\bar{c}^{*},\bar{d}^{*},\bar{0})\&\ \forall m\{(m<\bar{n}_0)\supset$

$\supset\exists w,z,w^{*},z^{*}[Bt(w,\bar{c},\bar{d},m)\&\ Bt(z,\bar{c},\bar{d},m')\&$

$\&\ Bt(w^{*},\bar{c},\bar{d},m)\&\ Bt(z^{*},\bar{c},\bar{d},m')\&(z^{*}=w^{*}+\bar{1})\&$

$\&(z=w(w^{*}+\bar{1}))]\}\&$

$\&\ Bt(\bar{u}_0,\bar{c},\bar{d},\bar{n}_0)\&\ Bt(x^{i},\bar{c},\bar{d},\bar{n}_0)$

4), правило C

6) $\dashv\vdash Bt(\bar{0},\bar{c}^{*},\bar{d}^{*},\bar{0})\&\ \forall m\{(m<\bar{n}_0)\supset\exists w^{*},z^{*}[Bt(w^{*},\bar{c}^{*},\bar{d}^{*},m)\&$

$\&\ Bt(z^{*},\bar{c}^{*},\bar{d}^{*},m')\&(z^{*}=w^{*}+\bar{1})]\}\&\ Bt(x^{i},\bar{c},\bar{d},\bar{n}_0)$

5)

7) $\dashv\vdash S[It(n,t:=t+\bar{1})](x^{i},\bar{0},\bar{n}_0)$ 6), $\exists$ -введение

8) $\vdash [(t^{\circ} = t^{i} + n) \& (t^{\circ\circ} = t^{\circ} + \bar{1})] \supset (t^{\circ\circ} = t^{i} + n')$ очевидно

9) $\dashv\vdash \forall t^{\circ\circ}, t^{\circ}, t^{i}, n \{[(t^{\circ} = t^{i}+n) \& (t^{\circ\circ}=t^{\circ}+\bar{1})] \supset (t^{\circ\circ}=t^{i}+n')\}$ 8)

I0) $\dashv\vdash \forall t^{\circ}, t^{i} \{[(t^{i} = t^{i} + \bar{0}) \& S[It(n, t := t+\bar{1})](t^{\circ}, t^{i}, \bar{n}_0)] \supset (t^{\circ} = t^{i} + \bar{n}_0)\}$

9), теорема 3

II) $\dashv\vdash \forall t^{\circ}, t^{i} [S[It(n,t:=t+\bar{1})](t^{\circ}, t^{i}, \bar{n}_0) \supset (t^{\circ} = t^{i}+\bar{n}_0)]$

I2) $\dashv\vdash S[It(n,t:=t+\bar{1})](x^{i}, \bar{0}, \bar{n}_0) \supset (x^{i} = \bar{0} + \bar{n}_0)$

II), $\forall$ -удаление

I3) $\dashv\vdash x^{i} = \bar{n}_0$ 7), I2), MP

I4) $\dashv\vdash S[It(n,(t:=t+\bar{1})\circledast(y:=y\cdot t))](y^{\circ}, t^{\circ}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{n}_0)$

3), правило C , $\&$ -удалени

I5) $\dashv\vdash S[It(n,(t:=t+\bar{1})\circledast(y:=y\cdot t))](y^{\circ}, t^{\circ}, \bar{1}, \bar{0}, x^{i})$ I3), I4)

I6) $\dashv\vdash S[\mathfrak{R}](y^{\circ}, t^{\circ}, x^{i}) \supset S[It(n,(t:=t+1)\circledast(y:=y\cdot t))](y^{\circ}, t^{\circ}, \bar{1}, \bar{0}, x^{i})$

I), $\&$ -удаление, I5), теорема о дедукции

I7) $\dashv\vdash S[\mathfrak{R}](y^{\circ\circ}, t^{\circ\circ}, x^{i}+\bar{1}) \supset S[It(n,(t:=t+1)\circledast(y:=y\cdot t))](y^{\circ\circ}, t^{\circ\circ}, \bar{1}, \bar{0}, x^{i}+1)$

I6), $\forall$ -введение, $\forall$ -удаление

I8) $\dashv\vdash S[It(n,(t:=t+\bar{1})\circledast(y:=y\cdot t))](y^{\circ}, t^{\circ}, \bar{1}, \bar{0}, x^{i})$

I), $\&$ -удаление, I6), MP

I9) $\dashv\vdash S[It(n,(t:=t+\bar{1})\circledast(y:=y\cdot t))](y^{\circ\circ}, t^{\circ\circ}, \bar{1}, \bar{0}, x^{i}+1)$

I), $\&$ -удаление, I7), MP

20) $\dashv\vdash S[It(n,(t:=t+\bar{1})\otimes(y:=y\cdot t))](y^{\circ\circ}, t^{\circ\circ}\bar{1},\bar{0},x^{i}+1)\Rightarrow$
$\Rightarrow\exists u,v[S[It(n,(t:=t+\bar{1})\otimes(y:=y\cdot t))](u,v,\bar{1},\bar{0},x^{i})\&$
$\&(y^{\circ\circ}=u(v+\bar{1}))\&(t^{\circ\circ}=v+\bar{1})$

лемм^ 2, $\forall$ -удаление

21) $\dashv\vdash S[It(n,(t:=t+\bar{1})\otimes(y:=y\cdot t))](\bar{u}^{+},\bar{v}^{+},\bar{1},\bar{0},x^{i})\&$
$\&(y^{\circ\circ}=\bar{u}^{+}(\bar{v}^{+}+\bar{1}))\&(t^{\circ\circ}=\bar{v}^{+}+\bar{1})$

19),20), MP , правило C

22) $\dashv\vdash(\bar{u}^{+}=y^{\circ})\&(\bar{v}^{+}=x^{i})$

21), $\&$ -удаление, 18), 4), лемма 5.6 из [1]

23) $\dashv\vdash y^{\circ\circ}=y^{\circ}(x^{i}+\bar{1})$ 21), $\&$ -удаление, 22),

24) $\vdash\forall y^{\circ},t^{\circ},y^{\circ\circ},t^{\circ\circ},x^{i}\{[S[\mathcal{R}](y^{\circ},t^{\circ},x^{i})\&S[\mathcal{R}](y^{\circ\circ},t^{\circ\circ},x^{i}+\bar{1})]\Rightarrow$
$\Rightarrow y^{\circ\circ}=y^{\circ}(x^{i}+\bar{1})\}$

1),23), теорема о дедукции, $\forall$ -введение

25) $\dashv\vdash S[\mathcal{R}](y^{\circ},t^{\circ},\bar{0})\Rightarrow S[It(n,(t:=t+\bar{1})\otimes(y:=y\cdot t))](y^{\circ},t^{\circ},\bar{1},\bar{0},\bar{0})$

16), $\forall$ -введение, $\forall$ -удаление

26) $\dashv\ S[\mathcal{R}](y^{\circ},t^{\circ},\bar{0})$

27) $\dashv\vdash S[It(n,(t:=t+\bar{1})\otimes(y:=y\cdot t))](y^{\circ},t^{\circ},\bar{1},\bar{0},\bar{0})$ 25),26), MP

28) $\dashv\vdash(y^{\circ}=\bar{1})\&(t^{\circ}=\bar{0})$

лемма 1, $\forall$ -удаление, 27), MP

29) $\vdash\forall y^{\circ},t^{\circ}\{S[\mathcal{R}](y^{\circ},t^{\circ},\bar{0})\Rightarrow[(y^{\circ}=\bar{1})\&(t^{\circ}=\bar{0})]\}$

26),28), теорема о дедукции, $\forall$ -введение

29) и 24) дает то, что требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

I. Кикуто Я.А. Формализованная система для доказательства свойств программ. - Настоящий сборник, с.I03-I26.

2. Floyd R.W. Assigning Meanings to Programs. - In Proceedings of a Symposium in Applied Mathematics. v.19. Mathematical Aspects of Computer Science, p.19-32 (ed.J.T. Schwartz). Providence, Rhode Island, American Mathematical Society (1867).

3. Hoare C.A.R. An Axiomatic Basis Computer Programming. - CACM, v.12, No.10, 1969.

4. Hoare C.A.R. Procedures and parameters: An axiomatic approach. - In: Lecture Notes in Mathematics, v.188. Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1971, p.102-116.

5. Клини С.К. Введение в метаматематику. - М., I957. 526с.

ОБ ОДНОЙ СВОДИМОСТИ МНОЖЕСТВ

А.В.Анджан
ВЦ ЛГУ им. П.Стучки

1. Обозначения. Через N обозначается множество натуральных чисел $\{0, 1, 2, \ \}$, через i, k, m, n (возможно, с индексами) - натуральные числа. Если $A \subseteq N$, то c_A - характеристическая функция множества A

$$\forall n \quad c_A(n) = \begin{cases} 1, \text{ если } & n \in A \\ 0, \text{ если } & n \notin A \end{cases}$$

Через $c(m, n)$ обозначается канторовская функция нумерации пар натуральных чисел, через $l(n)$ и $r(n)$ - левая и правая обратные ей. $\sum_0$ - класс рекурсивных множеств, $\sum_1$ - класс рекурсивно перечислимых (р.п.) множеств.

2. Определения и простейшие свойства. Одно из наиболее важных сводимостей множеств натуральных чисел - тьюрингова сводимость - может быть описана следующим образом: $A \leqslant_T B$, если и только если существует машина Тьюринга с одной рабочей лентой и оракулом "множество", которая для любого n, начиная работу на аргументе n с множеством B в оракуле, останавливается с результатом $c_A(n)$ При этом машине разрешается задавать оракулу любые вопросы о принадлежности натуральных чисел множеству B

В работе [2] рассмотрено более узкое понятие сводимости - сводимость без автозапросов. По определению, A сводимо к B без автозапросов, если и только если существует машина Тьюринга с одной рабочей лентой и оракулом "множество", которая для любого n, начиная работу на аргументе n с множеством B в оракуле, останавливается с результатом $c_A(n)$ При этом машине разрешается задавать оракулу любые вопросы о принадлежности натуральных чисел множеству B кроме вопроса "$n \in B$?".

...но рассматривать и такую сводимость, где сводящей машине, выясняя принадлежность n к A, разрешается использовать дополнительную информацию только о том, принадлежит ли n к B

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если $A, B \subseteq N$, то A κ - сводится к B $(A \leqslant_\kappa B)$ если и только если существует машина Тьюринга с одной рабочей лентой и оракулом "множество", которая для любого n, начиная работу на аргументе n с множеством B в оракуле, останавливается с результатом $c_A(n)$, не задавая оракулу других вопросов, кроме, быть может, "$n \in B$?" A κ - эквивалентно $B (A \equiv_\kappa B)$, если и только если $A \leqslant_\kappa B$ и $B \leqslant_\kappa A$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. κ - сводимость рефлексивна и транзитивна; κ - эквивалентность есть отношение типа эквивалентности.

Доказательство очевидно.

Мы будем интересоваться только κ - сводимостью и κ - эквивалентностью р.п. множеств. Предложение I позволяет нам говорить о κ - степенях р.п. множеств: если $A \in \Sigma_1$ то $d_\kappa (A) \underset{def}{=} \{B \mid B \in \Sigma_1 \& B \equiv_\kappa A\}$.

По определению, $d_\kappa (A) \leqslant_\kappa d_\kappa (B) \Longleftrightarrow A \leqslant_\kappa B$.

Из предложения I вытекает, что отношение $\leqslant_\kappa$ на κ - степенях р.п. множеств определено корректно, а также то, что эти κ -степени образуют частичное упорядочение относительно отношения $\leqslant_\kappa$ Это упорядочение обозначим через α_κ

В дальнейшем часто используется следующая характеризация κ -сводимости р.п. множеств.

ТЕОРЕМА 2. Допустим, что $A, B \in \Sigma_1$. Тогда $A \leqslant_\kappa B$, если и только если

1) $B \setminus A \in \Sigma_1$,

2) $\exists S_1, S_2 \, (S_1 \in \Sigma_1 \& S_2 \in \Sigma_1 \& S_1 \cap S_2 = \varnothing \&$

$\& \bar{A} \cap \bar{B} \subseteq S_1 \& A \setminus B \subseteq S_2)$

(Второе условие содержательно означает, что множества $\bar{A} \cap \bar{B}$ и $A \setminus B$ отделяются друг от друга непересекающимися р. п. множествами.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $A, B \in \Sigma_1$ и $A \leqslant_K B$ при помощи машины Тьюринга Z. Перечисляем множество B; если число n появляется в этом перечислении, то запускаем машину Z на аргументе n и на вопрос оракулу "$n \in B$?", если такой появляется, имитируем ответ "да". Множеству $B \setminus A$ принадлежат те и только те числа n из B, на которых Z, работая описанным выше способом, остановится с результатом 0 Следовательно, $B \setminus A \in \Sigma_1$

Определим $S_1 = \{ n \mid Z$, начав работу на аргументе n и на вопрос оракулу "$n \in B$?", если такой задается, получив ответ "нет", останавливается с результатом $0 \}$ и $S_2 = \{ n \mid Z$, начав работу на аргументе n и на вопрос оракулу "$n \in B$?", если такой задается, получив ответ "нет", останавливается с результатом $1 \}$ Множества S_1 и S_2 - искомые.

Достаточность. Допустим, что условия I) и 2) выполнены и $A, B \in \Sigma_1$. Рассмотрим машину Z с одной рабочей лентой и оракулом "множество", которая, начиная работу на аргументе n, работает следующим образом: сначала Z задает оракулу вопрос "$n \in B$?". Если ответ "да", то Z параллельно перечисляет множества $A \cap B$ и $B \setminus A$. Если n появляется в перечислении множества $A \cap B$, то Z останавливается с результатом 1; если n появляется в перечислении множества $B \setminus A$ то Z останавливается с результатом 0

Если же ответ оракула "нет", то Z параллельно перечисляет множества S_1 и S_2. Если n появляется в перечислении множества S_1, то Z останавливается с результатом 0, а если n появляется в перечислении множества S_2 - на результате 1

Машина Z K - сводит A к B.

3. Сравнение с другими сводимостями.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Существует такие р.п. множества A и B что $A \equiv B$ & $A \not\leq_K B$ & $\not\leq_K A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $D \in \Sigma_1 \setminus \Sigma_0$ Определим $A = \{2n \mid n \in D\}$ и $B = \{2n+1 \mid n \in D\}$ Ясно, что $A \equiv B$, $A \in \Sigma_1$ и $B \in \Sigma_1$ Допустим от противного, что $A \leq_K B$ посредством машины Z Тогда следующая эффективная процедура вычисляла бы функцию c_D (n) если дано n, то запустить Z на аргументе $2n$; на вопрос оракулу "$2n \in B$?", если такой задается, имитировать ответ "нет". Результат, выданный Z, и есть c_D (n). Но это – противоречие с выбором D Следовательно, $A \not\leq_K B$ Аналогично $B \not\leq_K A$

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогично можно доказать, что существует эффективно перечислимое семейство р.п. множеств, которые все изоморфны, но попарно K -несравнимы.

Остается выяснить, может ли K -сводимость и K - эквивалентность иметь место там, где другие сводимости и эквивалентности места не имеют.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. $\forall A, B$ $A \leq_K B \Longrightarrow A \leq_T B$.

Доказательство очевидное.

ТЕОРЕМА 5 (совместно с Р.В.Фрейвалдом). Существует такие р.п. множества A и B что $A \leq_K B$ & $A \not\leq_{tt} B$ & $B \leq_{tt}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем метод приоритета. Рассмотрим два бесконечных списка натуральных чисел в естественном порядке; обозначим их через $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. В списке $\mathcal{A}$ рядом с его числами постепенно расположатся маркеры $\boxed{0}_A$, $\boxed{1}_A$, ...; в списке $\mathcal{B}$ рядом с его числами постепенно расположатся маркеры $\boxed{0}_B$, $\boxed{1}_B$, ...,. Каждому маркеру присвоен приоритет. Порядок убывания приоритета следующий:

$$\boxed{0}_A, \boxed{0}_B, \boxed{1}_A, \boxed{1}_B,$$

После помещения в список каждый маркер передвинется по нему конечное число раз.

Работать с маркером $\boxed{n}_A$ или $\boxed{n}_B$ на числе m k шагов означает выполнить k машинных шагов вычислений на машине Тьюринга Z_n на аргументе m, где $\{Z_i\}_{i=0}^{\infty}$ – фиксированная эффективная нумерация одноленточных машин Тьюринга. Если это вычисление дает результат i, мы будем говорить, что маркер $\boxed{n}_A$ ($\boxed{n}_B$) остановился на числе m и дал результат i.

В процессе работы у некоторых чисел списков $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ появятся метки " + " и " – ". У каждого числа в каждом списке появится самое большее одна метка. Ни одна метка не будет не изменена, не стерта. Множество A (B) будет состоять из элементов списка $\mathcal{A}$ $(\mathcal{B})$, у которых в процессе работы появится метка " + ".

Число m в некоторый момент называется свободным, если в этот момент ни в одном из списков ни у этого числа, ни у больших его чисел не стоит ни одна метка и не расположен ни один маркер.

Порождение множеств A и B организуется по этапам.

0-ой этап. Поместим в списке $\mathcal{A}$ рядом с числом "0" маркер $\boxed{0}_A$.

I-ый этап. Поместим в списке $\mathcal{B}$ рядом с числом "I" маркер $\boxed{0}_B$.

2к+2-ой этап. Поместим в списке $\mathcal{A}$ рядом с первым свободным числом маркер $\boxed{k+1}_A$ Со всеми помещенными в список $\mathcal{A}$ маркерами, которые не находятся рядом с числами, на которых они работали и остановились, работаем $k+1$ шагом на числах, рядом с которыми они стоят. Если ни один маркер не дает результата, переходим к следующему этапу. Если некоторые маркеры дают результат, выберем среди них маркер с наивысшим приоритетом. Допустим, что это маркер $\boxed{n}_A$, который работал на числе m и дал результат i.

Приписываем в списке $\mathcal{B}$ к числу m метку " + ".

Рассмотрим l как кодовый номер табличного условия. Допустим, что S - его ассоциированное множество. Рассмотрим ту строку условия, в которой тем числам из S, у которых в списке $\mathcal{B}$ стоит метка " + ", соответствует ответ "принадлежит", а остальным числам из S - ответ "не принадлежит". Этой строке соответствует вывод табличного условия - или "принадлежит", или "не принадлежит". Если этот вывод есть "принадлежит", то в списке $\mathcal{A}$ к числу m приписываем метку " - "; если вывод есть "не принадлежит", то в списке $\mathcal{A}$ к числу m приписываем метку " + ". После того в списке $\mathcal{B}$ к тем числам из S, у которых в этом списке не приписаны метки и рядом с которыми ни в одном списке не находится маркер с приоритетом выше, чем у $\boxed{n}_A$, приписываем метку " -". Все маркеры, которые уже находятся в каком-нибудь из списков и приоритет которых ниже приоритета $\boxed{n}_A$, в порядке убывания приоритета, не меняя списка, в котором они находятся, переносим рядом с первыми свободными числами. Переходим к следующему этапу.

2к+3-ий этап аналогичен 2к+2-му этапу со следующими изменениями: вместо $\mathcal{A}$ нужно читать $\mathcal{B}$ и, наоборот, вместо $\boxed{n}_A$ при любом n нужно читать $\boxed{n}_B$ и, наоборот, слова "приписываем в списке $\mathcal{B}$ к числу m метку " +" " нужно заменить на слова "приписываем в списке $\mathcal{A}$ к числу m метку " - " ".

Ясно, что множества A и B рекурсивно перечислимы. Как обычно доказывается, что $A \not\leq_{tt} B$ и $B \not\leq_{tt} A$. Докажем, что $A \leqslant_K B$. Заметим, что $A \subset B$ и $B \setminus A = \{n \mid$ рядом с n в списке $\mathcal{B}$ появляется метка " + ", а в списке $\mathcal{A}$ - метка " - " $\}$ - рекурсивно перечислимое множество. Если мы возьмем $S_1 = N$ и $S_2 = \phi$, то условия теоремы 2 выполнены и, следовательно, $A \leqslant_K B$. Теорема доказана.

Следующая теорема показывает, что теорему 5 нельзя усилить, добившись $A \equiv_K B$ вместо $A \leqslant_K B$.

ТЕОРЕМА 6. Если $A, B \in \Sigma_1 \setminus \{\phi, N\}$ и $A \equiv_K B$, то $A \equiv_m B$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $A, B \in \Sigma_1 \setminus \{\phi, N\}$ и $A \equiv_K B$ Согласно теореме 2 $B \setminus A \in \Sigma_1$, $A \setminus B \in \Sigma_1$ и существуют такие р.п. множества S_1, S_2, S_3, S_4, что

1) $S_1 \cap S_2 = S_3 \cap S_4 = \phi$,

2) $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq S_1$ & $A \setminus B \subseteq S_2$

3) $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq S_3$ & $B \setminus A \subseteq S_4$

Обозначим через m_1 и m_2 такие числа, что $m_1 \in B$ и $m_2 \bar{\in} B$ Построим общерекурсивную функцию f, которая m - сводит A B.

Чтобы вычислить $f(n)$, сначала параллельно перечисляются множества $A \cap B$, $B \setminus A$ $A \setminus B$ и S_1. Число n должно появиться по меньшей мере в одном из этих перечислений. Если n появляется $A \cap B$, то $f(n) = n$. Если n появляется в $B \setminus A$, то $f(n) = m_2$ Если n появляется в B то $f(n) = m_1$

Если же n появляется в S_1, то начинаем параллельно перечислять множества $A \cap B$, $B \setminus A$ и S_3; число n должно появиться по меньшей мере в одном из этих перечислений Если n появляется в $A \cap B$ или в S_3, то $f(n) = n$ если появляется в $B \setminus A$ то $f(n) = m_2$. Функция f есть искомая.

Аналогично доказывается, что $B \leqslant_m A$. Теорема доказана.

Теорему 6 нельзя усилить, чтобы для р.п. множеств из $\Sigma_1 \setminus \{\phi, N\}$ получить импликацию $A \equiv_K B \Rightarrow A \equiv B$ по теореме Деккера (см. [7], стр.156) существуют простые множества A B, которые отличаются только на один элемент (следовательно, $A \equiv_K B$), однако $A \not\leqslant_1 B$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Существуют такие р.п. A и B, что $A \not\leqslant_K B$, $B \not\leqslant_K A$, однако A и B сводятся друг к другу без автозапросов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве A и B можно взять множества, построенные при доказательстве предложения 3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Существуют такие р.п. A и B, что $A \equiv_K B$, однако A и B не сводятся друг к другу без автозапросов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [2] построено р.п. множество C, которое не сводится само к себе без автозапросов. Следовательно, можно взять $A = B = C$.

Таким образом K - сводимость и K - эквивалентность р.п. множеств отличаются от наиболее важных сводимостей и эквивалентностей, исследованных в теории алгоритмов.

4. Строение частичного упорядочения α_K

В этом пункте исследуется строение упорядочения - степеней р.п. множеств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Рекурсивные множества и только они K - сводятся к любому р.п. множеству.

Доказательство очевидно.

СЛЕДСТВИЕ 9.I. α_K содержит наименьший элемент - класс Σ_0.

ТЕОРЕМА 10. Существуют такие р.п. A и B что $\forall C \subseteq N \; (A \nleq_K C \; \vee \; B \nleq_K C)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots$ обозначается естественная нумерация всех машин Тьюринга с одной рабочей лентой и оракулом "множество". Образуем два списка натуральных чисел в естественном порядке - $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$

Образуем пары машин Тьюринга: $(Z_{\ell(0)}, Z_{r(0)})$, $(Z_{\ell(1)}, Z_{r(1)})$, Запустим параллельно машины i-ой пары на аргументах i, $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Если какая-нибудь машина i-ой пары задает оракулу вопрос о числе, отличном от i, то в дальнейшем на машины i-ой пары не обращаем внимания. Если машина i-ой пары $Z_{\ell(i)}$ ($Z_{r(i)}$) задает оракулу вопрос о числе i, то имитируем ответ оракула "принадлежит" ("не принадлежит") и продолжаем работу. Если машина $Z_{\ell(i)}$ ($Z_{r(i)}$) останавливается на ленте, на которой не написан ни результат 0, ни результат 1, то на i-ую пару в дальнейшем не обращаем внимания. Если же машина $Z_{\ell(i)}$ ($Z_{r(i)}$) останавливается с результатом 0 или 1, то в списке $\mathcal{A}$ (в списке $\mathcal{B}$) у числа i приписывается соответственно метка " + " или метка " - ".

В множестве A (в множество B) войдут те и только те числа, у которых в списке $\mathcal{A}$ (в списке $\mathcal{B}$) когда-нибудь появится метка " + ". Ясно, что $A, B \in \Sigma_1$. Допустим, что $C \subseteq N$ $A \leqslant_K C$ с помощью Z_{i_1} и $B \leqslant_K C$ с помощью Z_{i_2} Рассмотрим число $c(i_1, i_2)$ В зависимости от того, $c(i_1, i_2) \in C$ или нет, машина Z_{i_1} или Z_{i_2}, сводя A или B к C, на аргументе $c(i_1, i_2)$ сработает неверно. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 10.1. α_K не является верхней полурешеткой.

СЛЕДСТВИЕ 10.2. α_K не содержит наибольшего элемента.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Для каждого $A \in \Sigma_1 \setminus \Sigma_0$ существует такое $B \in \Sigma_1 \setminus \Sigma_0$, что $B \leqslant_K A$ & $A \not\leqslant_K B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Сакса ([1] ; стр.227) для каждого $A \in \Sigma_1 \setminus \Sigma_0$ существуют такие р.п. нерекурсивные множества B_1 и B_2, что $B_1 \cup B_2 = A$, $B_1 \cap B_2 = \phi$, $B_1 \leqslant_T A$ $B_2 \leqslant_T A$, $A \not\leqslant_T B_1$ и $A \not\leqslant_T B_2$

В качестве B можно взять как B_1, так и B_2.

Действительно, $A \not\leqslant_T B_1 \Longrightarrow A \not\leqslant_K B_1$. Далее можно взять $S_1 = N$, $S_2 = \phi$, и так как $A \setminus B_1 = B_2 \in \Sigma_1$ то выполнены условия теоремы 2, следовательно $B_1 \leqslant_K A$. Аналогично для B_2.

СЛЕДСТВИЕ II.I. α_K не содержит минимальных элементов среди K-степеней р.п. множеств, отличных от $\sum_0$.

ТЕОРЕМА 12. Для любого р.п. множества A существует такое р.п. B, что $A \leqslant_K B$, но $B \nleqslant_K A$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольное р.п. множество A Если $A \in \sum_0$, то за B можно взять любое множество из $\sum_1 \setminus \sum_0$. Если $A \in \sum_1 \setminus \sum_0$, то A бесконечно и содержит бесконечное рекурсивное подмножество C Обозначим элементы множества C в порядке возрастания через n_0, n_1, n_2, ... Образуем $D = \{ n_i \mid i \in K \} \cup \bar{C}$, где K – творческое множество. Положим $B = A \cap D$. Очевидно, $B \in \sum_1$, а $A \setminus B = \{ n_i \mid i \bar{\in} K \}$ – не рекурсивно перечислимо, поскольку $\bar{K} \leqslant_m \{ n_i \mid i \bar{\in} K \}$ с помощью функции $f(i) = n_i$. Следовательно, по теореме 2 $B \nleqslant_K A$ Поскольку $B \setminus A = \phi$ $\bar{B} \cap \bar{A} \subseteq \bar{C}$ и $A \setminus B \subseteq C$, то согласно теореме 2 $A \leqslant_K B$ Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 12.I. α_K не содержит максимальных элементов.

Автор сердечно благодарит Р.В. Фрейвалда за постоянную помощь и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М., 1972, 624 с.

2. Трахтенброт Б.А. Автосводимые и неавтосводимые предикаты и множества. – В кн.: Исследования по теории алгоритмов и математической логике т.I. Вычислительный центр АН СССР. М., 1973, с.211-234.

ABSTRACTS

Identification in the limit of minimal Gödel numbers

R.V.Freivald, E.B.Kinber

Classes of functions for which minimal numbers are identifiable in the limit are characterized. It is studied how the choice of a Gödel numbering influences the possibility of identification.

On identification in the limit of minimal numbers for functions of effectively enumerable classes

E.B.Kinber

The number of changes of hypotheses during the identification is studied. It is proved that this number cannot be approximated by any general recursive function. For classes of functions which are identifiable by some natural strategies this number is assimptotically equal to $\log_2 n$

Probabilistic program synthesis

K.M.Podnieks

The program computing φ is guessed from given values $\varphi(0), \quad , \varphi(m)$. As $m \to \infty$, the hypothetic programs h_m may converge to the limit-program really computing φ. If $\tau(n,x)$ is a recursive function, we say: the program n computes the function $\tau_n = \lambda x\, \tau(n,x)$ For any τ a probabilistic strategy M_τ can be constructed such that for all n in the case of τ_n : 1) the M_τ -hypotheses converge to a τ -program of τ_n almost surely, 2) the number of alternations in the sequence is $\lesssim \ln n$ with probability $\to 1$ as $n \to \infty$. The estimate $\ln n$ is the best possible. Deterministic strategies do the same with the estimate $\sim n$.

Computational complexity of prediction strategies

K.M.Podnieks

The value $\varphi(m+1)$ is predicted from given $\varphi(1)$ ... φ_m. Let $\varphi_n(x)=\varphi(n,x)$. For every φ there is a strategy, which predicts φ_n making $\lesssim \log_2 n$ errors (Barzdin - Freivald). It is proved in the paper that such "optimal" strategies require $2^{2^{cm}}$ time to compute the m-th prediction.

Formalized system for proving the properties of programs

J.A.Kikuts

To formally define the semantics for a subset of ALGOL-60 a formal arithmetics is used. The algorithm S is given which is used to construct a formula of formal arithmetics for any program of this subset which describes the function computed by this program. The validity of this algorithm is proved.

Proof of some program properties in a formalized system

J.A.Kikuts

The procedure is described for proving some program properties in a formalized system considered in the previous paper. A number of theorems is given which are useful for reduction of proofs, including the theorems expressing the Hoare rules.

On some reducibility of sets

A.V.Andzans

A is k-reducible to B iff A is T-reducible to B via Turing machine Z such that no other questions than „$n \in B$?" are given to oracle while a problem „$n \in A$?" is solved. This reducibility is compared with other reducibilities. Some theorems on a partial ordering of k-degrees of recursive enumerable sets are proved.

СОДЕРЖАНИЕ

ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ И ПРОГРАММ
Выпуск 3
Республиканский межведомственный сборник
научных трудов
Редакторы Я.Барздинь, Т.Фадеева
Техн.редактор М.Албертс. Корректор У.Страумс
Латвийский государственный университет им. П.Стучки
Рига 1977

Подписано к печати 01.07.1977. ЯТ 12196. Зак. № 1198.
Бумага №1. Ф/б 60х84/16. 10,0 физ.печ.л.;7,6 уч.-изд.л.
Тираж 500 экз. Цена 76 к.

Отпечатано на ротапринте, Рига-50, ул.Вейденбаума,5
Латвийский государственный университет им. П.Стучки