Министерство высшего и среднего специального
образования Латвийской ССР
Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет имени Петра Стучки
Вычислительный центр

ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ И ПРОГРАММ

Выпуск III

Республиканский межведомственный сборник
научных трудов

Латвийский государственный университет им.П.Стучки
Рига, 1977

Computational complexity of prediction strategies

K.M.Podnieks

The value $\varphi(m+1)$ is predicted from given $\varphi(1) \ldots \varphi_m$. Let $\tau_n(x) = \tau(n,x)$. For every τ there is a strategy, which predicts τ_n making $\leq \log_2 n$ errors (Barzdin - Freivald). It is proved in the paper that such "optimal" strategies require $2^{2^{cm}}$ time to compute the m-th prediction.

ПРОГНОЗИРУЮЩИЕ СТРАТЕГИИ ОГРАНИЧЕННОЙ СЛОЖНОСТИ

К.М.Подниекс
ВЦ ЛГУ им. П.Стучки

Прогнозирование - это предсказывание значения $\varphi(m+1)$ по данным значениям $\varphi(1)\dots\varphi(m)$ функции φ. Точные определения см. [1]. В работах [2,3] Я.М.Барздинь и Р.В. Фрейвалд показали, что для всякого ненумерованного класса (U,τ) о.р. функций найдется о.р. стратегия F, допускающая на функции τ_n (n-ой функции нумерации τ) не более $\log_2 n + O(\log\log n)$ ошибочных прогнозов. Подозревалось, что реализация таких "наилучших стратегий" связана с невероятно большим объемом вычислений. В настоящей статье сделана попытка проследить связь между объемом вычислений, используемым стратегией и ее возможностями в смысле числа допускаемых ошибок. Точнее, изучаться будут не отдельные стратегии, а **методы построения** стратегий. Целесообразно ввести понятие **стратегического оператора**, действующего на все нумерации τ и связывающего с каждой такой τ некоторую стратегию. В своем доказательстве оценки $\log_2 n + O(\log\log n)$ Барздинь и Фрейвалд строят, по существу, именно такой оператор.

То, что в дальнейшем называется ч.р. стратегическим оператором (или просто ч.р. оператором) следует представлять как специальную машину Тьюринга, работающую с оракулом τ. На вход подаются значения $\varphi(1)\dots\varphi(m)$ прогнозируемой функции, затем следует вычисление (использующее ответы оракула τ на вопросы вида "$\tau_i(j)=?$ ") и выдача прогноза, т.е. кандидата на значение $\varphi(m+1)$. Вычисление без остановки допускается лишь в том случае, когда функция φ не находится в нумерации τ (таким образом, здесь рассматривается прогнозирование в смысле

NV', по терминологии [I]). Если прогнозы ч.р. оператора определены во в с е х случаях, его называют о.р. оператором.

Стратегию, которую оператор ϕ связывает с нумерацией τ, обозначим через ϕ_τ. Обозначение $\phi_\tau^{00}(\varphi)$ используется для числа ошибочных прогнозов, допускаемых стратегией ϕ_τ на функции φ, т.е. для

$$card\ \{m \mid \phi_\tau(\varphi(1)\ldots\varphi(m)) \neq \varphi(m+1)\}.$$

Пусть $f(x)$ – любая функция действительного переменного, определенная для всех натуральных $x \geqslant 1$. Будем говорить, что оператор ϕ з а д а е т $f(m)$ в о п р о с о в, если для любого нумерованного класса $(\mathcal{U}, \tau)$, любой функции $\varphi \in \mathcal{U}$ и любого m при вычислении прогноза $\phi_\tau(\varphi(1)\ldots\varphi(m))$ задается не более $f(m)$ вопросов вида „$\tau_i(j) = ?$"

Все изложенные ниже конструкции применимы, если $f(x)$ – любая конструктивная функция действительного переменного [4], определенная для всех натуральных $x \geqslant 1$. Однако формулировки результатов и доказательства для такого общего случая оказались бы чрезвычайно ненаглядными. Нашей конечной целью является возможно более полное изучение случаев, когда $f(x)$ – одна из функций:

$$2^x,\ 2^{cx},\ x^x,\ 2^{2^x},\ 2^{2^{cx}}.$$

Поэтому на используемые в качестве $f(x)$ функции целесообразно наложить некоторые из условий, перечисленных ниже:

(ф.I) Функция f конструктивна, $f(x)$ определено и >0 для всех $x \geqslant 1$. Для всех натуральных $m \geqslant 1$ разрешима проблема "$f(m)$ – целое число?".

(ф.2) Функция $f(x)$ строго возрастает и непрерывна при $x \geqslant 1$. Кроме того, $f(x) \to \infty$, когда $x \to \infty$. (Это условие гарантирует существование обратной функции $f^{-1}(x)$.)

(ф.3) Существуют действительные $a > 1$, $b > 0$ такие, что для всех достаточно больших m

$$\frac{f(m+1)}{f(m)} \geqslant a, \quad \sum_{i=1}^{m-1} f(i) \leqslant b f(m).$$

(Этому условию удовлетворяет всякая "порядочная" функция, растущая не медленнее экспоненты)

(ф.4) Функция $f(x)$ дважды дифференцируема и $f''(x) \geqslant 0$ для всех достаточно больших x.

Сначала рассмотрим нижние оценки.

ТЕОРЕМА I. Пусть ч.р. стратегический оператор ϕ задает $f(m)$ вопросов, где функция $f(x)$ удовлетворяет условиям (ф1–ф2–ф3). Тогда можно построить вычислимую нумерацию τ (функций, принимающих только значения $0,1$) такую, что для бесконечно многих n

$$\phi_\tau^{00}(\tau_n) > \log_2 n + f^{-1}(n) - O(1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функции τ_n для $n \leqslant f(1)$ положим тождественно равными нулю. Кроме того, положим для в с е х n: $\tau_n(1) = 0$ и определим $\varphi(1) = 0$.

Допустим теперь, что функции τ_n уже определены для всех $n \leqslant f(m)$, кроме того, пусть для в с е х n определены значения $\tau_n(j)$ при $j \leqslant m$. Не исключено, что определены еще какие-то значения $\tau_i(j)$, но таких только конечное число. Пусть определен также отрезок $\varphi(1)\ldots\varphi(m)$, причем все $m-1$ прогнозов стратегии ϕ_τ на этом отрезке оказались ошибочными.

Покажем, как осуществить функции τ_n для $f(m) < n \leqslant f(m+1)$, значения $\tau_n(m+1)$ д л я в с е х n и значение $\varphi(m+1)$. Вычисляем прогноз $\phi_\tau(\varphi(1)\ldots\varphi(m))$. Если при этом оператор ϕ задает оракулу τ вопрос "$\tau_i(j) = ?$", где значение $\tau_i(j)$ пока не определено, положим $\tau_i(j) = 0$. Через некоторое время прогноз будет вычислен.

Номер $n > f(m)$ назовем **выделенным**, если $\mathcal{T}_n(j) = \varphi(j)$ для всех $j \leqslant m$. Для каждого $n > f(m)$, если $\mathcal{T}_n(m+1)$ пока не определено, положим:

$$\mathcal{T}_n(m+1) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ не является выделенным,} \\ \alpha, & \text{если } n \text{ выделено (здесь } \alpha \in \{0,1\} \\ & \text{и } \alpha \neq \Phi_{\mathcal{T}}(\varphi(1) \dots \varphi(m)) \text{).} \end{cases}$$

Положим также $\varphi(m+1) = \alpha$. Первые m прогнозов стратегии $\Phi_{\mathcal{T}}$ на функции φ будут ошибочными.

Остается определить $\mathcal{T}_n(j)$ для $f(m) < n \leqslant f(m+1)$ и $m+1 < j < \infty$. Сначала положим здесь $\mathcal{T}_n(j) = 0$ для всех j таких, что $m+1 < j \leqslant k$, где k настолько велико, что при $j > k$ ни одно значение $\mathcal{T}_n(j)$ пока не определено. Все рассматриваемые номера n, т.е. $f(m) < n \leqslant f(m+1)$, распадаются на классы эквивалентности:

$$n \equiv n' \longleftrightarrow (\forall j \leqslant k)\ \mathcal{T}_n(j) = \mathcal{T}_{n'}(j).$$

Пусть A – любой из этих классов, $e(A)$ – число элементов в A. Возьмем наибольшее t такое, что $2^t \leqslant e(A)$ и сделаем так, чтобы среди отрезков $\mathcal{T}_n(k+1) \dots \mathcal{T}_n(k+t)$ (где $n \in A$) встречались все 2^t двоичных слова длины t. В остальном функции $\mathcal{T}_n$ (где $n \in A$) могут равняться нулю. Эту операцию нужно проделать для каждого класса эквивалентности.

Итерируя изложенную конструкцию, получаем всю нумерацию $\mathcal{T}$. Покажем, что она – искомая.

Рангом $r(A)$ класса A (см. выше) назовем наибольшее число $r \leqslant m+1$ такое, что $(\forall j < r)$ $\mathcal{T}_n(j) = \varphi(j)$ (здесь $n \in A$). Нетрудно проверить, что ранги различных классов различны. На одной из функций класса A стратегия $\Phi_{\mathcal{T}}$ допускает

$$> r(A) - 1 + \log_2 e(A) - 1$$

ошибок. Напомним, что $f(m) < n \leqslant f(m+1)$.

Если $n \in A$, где $r(A) < m+1$, это значит, что при вычислении одного из прогнозов $\Phi_{\mathcal{T}}(\varphi(1) \dots \varphi(j))$, где $1 \leqslant j \leqslant r(A)$, задавался вопрос „$\mathcal{T}_n(r(A)+1) = ?$".

Следовательно, если $A_1, \dots, A_{m+1-c}$ – все классы ранга $\leqslant m+1-c$ (здесь c – натуральное число $\geqslant 1$), то при вычислении прогнозов $\Phi_{\mathcal{T}}(\varphi(1) \dots \varphi(j))$, где $j = 1, 2, \dots, m-c$, задавалось в общей сложности не менее

$$e(A_1) + \dots + e(A_{m+1-c})$$

вопросов.

Пусть, с другой стороны, $A_{m+2-c}, \dots, A_{m+1}$ – все классы ранга $> m+1-c$. Здесь на одной из функций $\mathcal{T}_n$ любого класса A_i число ошибок, допускаемых стратегией $\Phi_{\mathcal{T}}$, будет

$$> m - c + \log_2 e(A_i) - 1.$$

Покажем, что при подходящих константах $c, d > 0$ для бесконечно многих m одно из чисел $e(A_i)$ (где $i = m+2-c, \dots, m+1$) будет больше

$$d_0 (f(m+1) - f(m)).$$

Пусть это не так, т.е. для всех $m \geqslant m_0$ и всех i таких, что $m+2-c \leqslant i \leqslant m+1$:

$$e(A_i) \leqslant d \cdot (f(m+1) - f(m)).$$

Это значит, что

$$e(A_1) + \dots + e(A_{m+1-c}) > f(m+1) - f(m) - 1 -$$
$$- e(A_{m+2-c}) - \dots - e(A_{m+1}) \geqslant$$
$$\geqslant (f(m+1) - f(m)(1-cd) - 1.$$

Суммируя по m от m_0 до M получаем, что при вычислении прогнозов $\Phi_{\mathcal{T}}(\varphi(1) \dots \varphi(j))$, где $j = 1, 2, \dots, M-c$, задавалось

$$\geqslant (f(M+1) - f(m_0))(1-cd) - (M - m_0)$$

вопросов. Но, с другой стороны, это число вопросов не может быть больше $\sum_{j \leqslant M-c} f(j)$. По условию (ф.3), эта сумма $\leqslant bf(M+1-c)$. По этому же условию:

$$f(M+1) \geqslant af(M) \geqslant a^2 f(M-1) \geqslant \dots \geqslant a^c f(M+1-c).$$

Итак, с одной стороны, число вопросов должно быть больше $(1-cd) f(M+1) - O(M)$, но, с другой стороны, оно должно быть не больше $ba^{-c} f(M+1)$. Числа a, b фиксированы для функции f, причем $a>1$. Возьмем число c настолько большим, чтобы было $ba^{-c}<1$. После этого число d возьмем настолько малым, чтобы было $1-cd>da^{-c}$.

Так как в силу условия (ф.3) $f(M+1)$ растет не медленнее экспоненты, то при $M\to\infty$ получается противоречие.

Отсюда явствует, что для бесконечно многих m найдется n такое, что $f(m)<n\leqslant f(m+1)$ и на функции τ_n стратегия ϕ_τ допускает более

$$m-c+\log_2(d\cdot f(m+1)-f(m))-1=$$
$$=m+\log_2(f(m+1)-f(m))-O(1)$$

ошибок. В силу условия (ф.2) здесь $m\geqslant f^{-1}(n)-1$. Кроме того, по условию (ф.3):

$$f(m+1)-f(m)\geqslant f(m+1)\left(1-\frac{1}{a}\right)\geqslant n\left(1-\frac{1}{a}\right).$$

Таким образом, для бесконечно многих n

$$\phi_\tau^{oo}(\tau_n)>f^{-1}(n)+\log_2 n-O(1).$$

Теорема I доказана.

ПРИМЕРЫ. (е I) Оператор ϕ задает 2^m вопросов. Найдется нумерация τ такая, что для бесконечно многих n

$$\phi_\tau^{oo}(\tau_n)>\log_2 n-O(1).$$

(е 2) Оператор ϕ задает 2^{cm} вопросов, $c>0$.

$$(\exists_\tau\ \exists_n^\infty)\quad \phi_\tau^{oo}(\tau_n)>\left(1+\frac{1}{c}\right)\log_2 n-O(1).$$

(е 3) Оператор ϕ задает m^m вопросов. Здесь $f^{-1}(n)$ асимптотически равна $\log_2 n/\log_2\log_2 n$.

$$(\exists_\tau\ \exists_n^\infty)\ \phi_\tau^{oo}(\tau_n)>\log_2 n+\frac{\log_2 n}{\log_2\log_2 n}-O\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right).$$

(е 4) Оператор ϕ задает 2^{2^m} вопросов.

$$(\exists_\tau\ \exists_n^\infty)\ \phi_\tau^{oo}(\tau_n)>\log_2 n+\log_2\log_2 n-O(1).$$

(е 5) Оператор ϕ задает $2^{2^{cm}}$ вопросов, $c>0$.

$$(\exists_\tau\ \exists_n^\infty)\ \phi_\tau^{oo}(\tau_n)>\log_2 n+\frac{1}{c}\log_2\log_2 n-O(1).$$

Отсюда можно сделать три вывода, Во-первых, если функция f растет медленнее любой экспоненты, то оператор, задающий $f(m)$ вопросов, не может дать верхней оценки $\phi_\tau^{oo}(\tau_n)$ п о р я д к а $\log n$. Во-вторых, если f растет со скоростью экспоненты, то оператор, задающий $f(m)$ вопросов, не может дать а с и м п т о т и ч е с к и наилучшей верхней оценки $\log_2 n$. В-третьих, если f растет существенно медленнее 2^{exp}, то оператор, задающий $f(m)$ вопросов, не может дать в верхней оценке $\log_2 n+O(\log n)$ оптимальный о с т а т о ч н ы й ч л е н порядка $\log\log n$. Этот порядок оптимален в силу следующего результата Барздиня-Фрейвалда [3]. существует вычислимая нумерация τ такая, что для любой стратегии F

$$(\exists_n^\infty)\ F^{oo}(\tau_n)>\log_2 n+\log_2\log_2 n-O(\log\log n).$$

Если сравнить это с нашим примером (е 5), придется заключить, что в случае функций $f(x)$ растущих быстрее 2^{2^x} оценка теоремы I не является наилучшей. Однако случай таких быстрорастущих f неинтересен, так как верхняя оценка $\log_2 n+O(\log\log n)$ достигается уже оператором, задающим 2^{2^m} вопросов, см. ниже пример (е 7).

Приступим теперь к верхним оценкам. Все используемые в дальнейшем стратегические операторы предоставляют собой модификации стратегий Барздиня-Фрейвалда [3].

Пусть $f(x)$ – функция, удовлетворяющая условию (ф I). Введем еще два "параметра". Во-первых, $\bar{\pi}=\{\pi_n\}$ – рекурсивная последовательность действительных чисел со свойствами: $\pi_n\geqslant 0$ для всех n и ряд $\sum\pi_n$ регулярно сходится [4]. Во-вторых, $\bar{\varepsilon}=\{\varepsilon_m\}$ – рекурсивная последовательность рациональных чисел со свойством

$\varepsilon_m\geqslant\varepsilon_{m+1}>0$ для всех m.

Через $\{f\bar{\pi}\bar{\varepsilon}\}$ будем обозначать следующий стратегический оператор. Процедура вычисления прогноза $\{f\bar{\pi}\bar{\varepsilon}\}_\tau(\varphi(1)\ldots\varphi(m))$, где τ – произвольная нумерации, φ – произвольная функция. Для каждого натурального t составляется множество

$$\mathcal{Z}_t = \{\, i \mid i \leq f(m) \wedge (\forall j \leq m)\, \mathcal{C}_i(j) = \varphi(j) \wedge \mathcal{C}_i(m+1) = t \,\}$$

Вычисляются рациональные приближения сумм

$$\varkappa_t = \sum \{\, \overline{\pi}_i \mid i \in \mathcal{Z}_t \,\}$$

с точностью до ε_m, т.е. рациональные числа r_t такие, что

$$r_t \geq 0, \quad | r_t - \varkappa_t | < \varepsilon_m .$$

Среди чисел r_t найдем наибольшее, пусть это r_{t_0}. Полагаем искомый прогноз равным t_0.

Легко видеть, что оператор $\{ f \overline{\pi} \overline{\varepsilon} \}$ – общерекурсивный и что он задает $(m+1) f(m)$ вопросов.

Все ошибочные прогнозы стратегии $\{ f \overline{\pi} \varepsilon \}_{\mathcal{C}}$, сделанные на функции $\mathcal{C}_n$, разделены на две группы:

(а) ошибки первого рода:

$$\{ f \overline{\pi} \overline{\varepsilon} \}_{\mathcal{C}} (\mathcal{C}_n(1) \ldots \mathcal{C}_n(m)) \neq \mathcal{C}_n(m+1) \wedge f(m) < n,$$

(б) ошибки второго рода: то же, только $f(m) \geq n$.

Таким образом, ошибки первого рода совершаются, пока функция $\mathcal{C}_n$ не учитывается стратегией $\{ f \overline{\pi} \overline{\varepsilon} \}_{\mathcal{C}}$, ошибки второго рода – когда $\mathcal{C}_n$ уже учитывается.

Введем также особое обозначение для некоторых остатков ряда $\sum \overline{\pi}_i$, здесь $k = 1, 2, \ldots$:

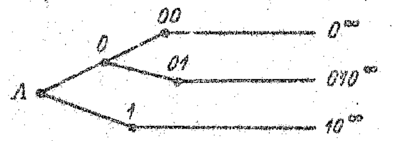
$$\Delta_k = \sum \{\, \overline{\pi}_i \mid i > f(k) \,\}. \tag{I}$$

ЛЕММА I. Пусть функция f удовлетворяет условиям (ф1–ф2) и пусть стратегия $\{ f \overline{\pi} \overline{\varepsilon} \}_{\mathcal{C}}$ совершает на функции $\mathcal{C}_n$ не менее S_1 ошибок первого рода и не менее S_2 ошибок второго рода. Тогда:

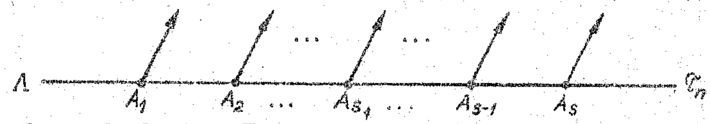
(а) $S_1 < f^{-1}(n)$,

(б) $2^{S_2} \overline{\pi}_n < \sum_{i=1}^{S_2} 2^i (\Delta_{S_1+i} + \varepsilon_{S_1+i}) + \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\pi}_i .$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем изображать функции нумерации $\mathcal{C}$ в виде дерева, вершинами которого являются всевозможные начальные куски этих функций. Например, функции 0^∞, 10^∞, 010^∞ можно изобразить деревом:



Рассмотрим ветвь дерева нумерации $\mathcal{C}$, изображающую функцию $\mathcal{C}_n$. Ошибочные прогнозы стратегии $\{ f \overline{\pi} \varepsilon \}_{\mathcal{C}}$, сделанные на $\mathcal{C}_n$, обозначим стрелками, идущими в сторону от ветви $\mathcal{C}_n$:



Здесь $S = S_1 + S_2$. Пусть отрезок ΛA_i соответствует значениям функции $\mathcal{C}_n$ от $j = 1$ до $j = m_i$.

Число ошибок первого рода оценивается просто: так как $m_i \geq i$ для всех i, то если в точке A_i сделана ошибка первого рода, должно быть $f(i) \leq f(m_i) < n$, т.е. $i < f^{-1}(n)$ и $S_1 < f^{-1}(n)$.

Рассмотрим теперь ошибки второго рода, т.е. точки $A_{S_1+1}, \ldots, A_S$. Попытаемся оценить снизу сумму чисел $\varkappa_t$ в каждой из этих точек (см. определение $\{ f \overline{\pi} \overline{\varepsilon} \}$). Здесь $f(m_i) \geq n$, поэтому $n \in \mathcal{Z}_t$ для $t = \mathcal{C}_n(m_i + 1)$.

Начнем с точки A_S. Сумма всех $\varkappa_t$ в этой точке содержит, во-первых, число $\varkappa_{t_0}$ (значение t_0 ведет в сторону стрелки), во-вторых, число $\varkappa_{t_1}$ (значение $t_1 = \mathcal{C}_n(m_S + 1)$ ведет в сторону $\mathcal{C}_n$). Так как $n \in \mathcal{Z}_{t_1}$, то $\varkappa_{t_1} \geq \overline{\pi}_n$. Кроме того, $r_{t_0} \geq r_{t_1}$, следовательно, $\varkappa_{t_0} > \varkappa_{t_1} - 2\varepsilon_{m_S}$. В итоге

$$\sum_{A_S} \varkappa_t \geq \varkappa_{t_0} + \varkappa_{t_1} > \overline{\pi}_n + (\overline{\pi}_n - 2\varepsilon_{m_S}) = 2(\overline{\pi}_n - \varepsilon_{m_S}).$$

Перейдём теперь к точке A_{s-1}, предполагая, что в ней также совершена ошибка второго рода. В сумму "здешних" $\varkappa_t$ также входят, по крайней мере, два числа: во-первых, $\varkappa_{t_0}$ (в сторону стрелки), во-вторых, $\varkappa_{t_1}$, где $t_1 = \mathcal{C}_n(m_{s-1}+1)$. Что можно сказать о величине $\varkappa_{t_1}$? Это число будет несколько меньше суммы чисел $\varkappa_t$ в точке A_s. Насколько? Не более чем на

$$\delta_{s-1} = \sum \left\{ \pi_i \mid f(m_{s-1}) < i \leqslant f(m_s) \right\}. \qquad (2)$$

Именно столько новых π_i учитывается в точке A_s по сравнению с точкой A_{s-1}. Таким образом, в A_{s-1}:

$$\varkappa_{t_1} > 2(\pi_n - \varepsilon_{m_s}) - \delta_{s-1}.$$

Так как здесь еще и $\varkappa_{t_0} > \varkappa_{t_1} - 2\varepsilon_{m_{s-1}}$, то:

$$\sum_{A_{s-1}} \varkappa_t \geqslant \varkappa_{t_0} + \varkappa_{t_1} > 2^2\pi_n - 2^2\varepsilon_{m_s} - 2(\delta_{s-1} + \varepsilon_{m_{s-1}}).$$

Продолжая это рассуждение влево, мы придем к выводу, что в точке A_{s_1+1} (это самая левая ошибка второго рода) сумма чисел $\varkappa_t$ должна быть больше

$$2^{s-s_1}\pi_n - 2^{s-s_1}\varepsilon_{m_s} - \sum_{i=1}^{s-s_1-1} 2^i(\delta_{s_1+i} + \varepsilon_{m_{s_1+i}}).$$

Так как $s - s_1 = s_2$, $\varepsilon_{m_s} \leqslant \varepsilon_{m_s} + \delta_s$ и сумма чисел в точке A_{s_1+1} не превосходит $\sum \pi_i$, то мы получаем неравенство

$$2^{s_2}\pi_n < \sum_{i=1}^{s_2} 2^i(\delta_{s_1+i} + \varepsilon_{m_{s_1+i}}) + \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i.$$

Сравнивая (I), (2) и учитывая, что $j \leqslant m_j$, получаем $\delta_{s_1+i} < \Delta_{s_1+i}$. Из $j \leqslant m_j$ и монотонности последовательности $\bar{\varepsilon}$ следует $\varepsilon_{m_{s_1+i}} \leqslant \varepsilon_{s_1+i}$.

Лемма I доказана.

Если в качестве $\bar{\varepsilon}$ выбрать последовательность $\bar{\varepsilon}_0$, где $\varepsilon^0_m = 2^{-2m}$, то

$$\sum_{i=1}^{s_2} 2^i \varepsilon_{s_1+i} < 2,$$

и таким образом

$$2^{s_2}\pi_n < \sum_{i=1}^{s_2} 2^i \Delta_{s_1+i} + 2 + \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i. \qquad (3)$$

Далее, предполагая, что функция f удовлетворяет условиям (ф.I-ф.2-ф.4), выберем следующую специальную последовательность $\bar{\pi}^0$

$$\pi^0_n = \frac{1}{f' f^{-1}(n) \cdot 2^{f^{-1}(n)}}, \qquad (4)$$

где f' – производная. Регулярная сходимость ряда $\sum \pi^0_i$ вытекает из полученной ниже оценки (5).

ЛЕММА 2. Пусть функция f удовлетворяет условиям (ф.I-ф.2-ф.4) и пусть стратегия $\{f\,\bar{\pi}^0\,\bar{\varepsilon}^0\}$ допускает на функции $\mathcal{C}_n$ не менее S_1 ошибок первого рода и не менее S_2 ошибок второго рода. Тогда:

(а) $S_1 < f^{-1}(n)$,

(б) $S_2 - \log_2 S_2 < f^{-1}(n) + \log_2 f' f^{-1}(n) + O(1)$.

В частности, число ошибок на каждой $\mathcal{C}_n$ конечно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Знаменатель (4), т.е. $f' f^{-1}(x) 2^{f^{-1}(x)}$ является возрастающей функцией. В самом деле, производная

$$e^{f^{-1}(x)\ln 2}\left(\ln 2 + \frac{f'' f^{-1}(x)}{f'^{2} f(x)}\right) > 0.$$

из-за условия (ф.4). Поэтому для всех $n \geqslant 1$

$$\pi^0_n < \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{f' f^{-1}(x)\, e^{f^{-1}(x)\ln 2}}.$$

Суммируя, получаем

$$\sum \left\{ \pi_n \mid n > f(k) + 1 \right\} < \int_{f(k)}^{\infty} \frac{dx}{f' f^{-1}(x)\, e^{f^{-1}(x)\ln 2}}.$$

Сделаем замену переменной $x = f(t)$, тогда:

$$\int_{k}^{\infty} \frac{f'(t)\,dt}{f'(t)e^{t\ln 2}} = -\frac{1}{\ln 2} e^{-t\ln 2} \Big|_{k}^{\infty} = \frac{1}{\ln 2} 2^{-k}.$$

Таким образом:

$$\sum \left\{ \mathfrak{R}_n \mid n > f(k)+1 \right\} < \frac{1}{\ln 2} 2^{-k}. \qquad (5)$$

Так как при $n > f(k)$:

$$\mathfrak{R}_n^0 < \frac{1}{f' f^{-1} f(k) 2^{f^{-1} f(k)}} = \frac{1}{f'(k)} 2^{-k},$$

а производная $f'(x)$ не убывает, то:

$$\Delta_k = \sum \left\{ \mathfrak{R}_n \mid n > f(k) \right\} < \left(\frac{1}{f'(1)} + \frac{1}{\ln 2} \right) 2^{-k} = d 2^{-k}.$$

Обратимся с этим знанием к неравенству (3), $\Delta_{S_1+i} < d 2^{-i}$, поэтому

$$2^{S_2} \mathfrak{R}_n^0 \leqslant d S_2 + 2 + \sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{R}_i.$$

Логарифмируя:

$$S_2 - f^{-1}(n) - \log_2 f' f^{-1}(n) \leqslant \log_2 S_2 + O(1).$$

Лемма 2 доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям (ф.I)-(ф.4) и еще условию: для подходящих $c, d \geqslant 0$ и всех достаточно больших x :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \leqslant 2^{cx+d}.$$

(Этому условию удовлетворяет любая "порядочная" функция, растущая не быстрее 2^{exp}). Тогда существует о.р. стратегический оператор Φ, задающий $(m+1)f(m)$ вопросов и такой, что для всех нумерованных классов $(U, \mathfrak{C})$ и всех n :

$$\Phi_{\mathfrak{C}}^{00}(\mathfrak{C}_n) \leqslant \log_2 n + (c+2) f^{-1}(n) + O(\log \log n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем в качестве Φ оператор $\left\{ f \overline{\mathfrak{R}}^0 \overline{\varepsilon}^0 \right\}$. Имеем:

$$f'(x) \leqslant f(x) \cdot 2^{cx+d}$$

$$f' f^{-1}(n) \leqslant f f^{-1}(n) \cdot 2^{cf^{-1}(n)+d}$$

$$\log_2 f' f^{-1}(n) \leqslant \log_2 n + c f^{-1}(n) + d.$$

Итак, согласно лемме 2:

$$S_2 - \log_2 S_2 \leqslant \log_2 n + (c+1) f^{-1}(n) + O(1).$$

Так как из $x - \log_2 x \leqslant y$ следует $x \leqslant y + \log_2 y + O(1)$, то

$$S_2 \leqslant \log_2 n + (c+1) f^{-1}(n) + O(\log \log n).$$

Здесь мы воспользуемся еще и тем, что по условию (ф.3) $f^{-1}(n) = O(\log n)$. Учитывая, что $S_1 < f^{-1}(n)$ (см.лемму 2), получаем утверждение теоремы 2.

ПРИМЕРЫ. (е6) $f(x) = \frac{x^x}{x+1}$. Получаем оператор, задающий m^m вопросов и допускающий на функции $\mathfrak{C}_n$ не более

$$\log_2 n + O\left(\frac{\log n}{\log \log n}\right)$$

ошибок. Ср.пример (е3).

(е7) $f(x) = \frac{2^{2^x}}{x+1}$. Получается оператор, задающий 2^{2^m} вопросов и допускающий на функции $\mathfrak{C}_n$ не более $\log_2 n + O(\log \log n)$ ошибок.

Теоремы I,2, вместе взятые, дают полную информацию о возможностях стратегических операторов, задающих $f(m)$ вопросов в случаях, когда f - "порядочная" функция и $exp \leqslant f \leqslant 2^{exp}$. Именно, в этих случаях некоторый о.р. оператор, задающий $f(m)$ вопросов, дает верхнюю оценку числа ошибок $\log_2 n + O(f^{-1}(n))$. С другой стороны, никакой ч.р. оператор, задающий $f(m)$ вопросов, не может дать лучший порядок остаточного члена.

Обратимся, наконец, к случаю, когда $f(x)$ растет со скоростью экспоненты.

ПРИМЕРЫ. (e8) Если взять $f(x)=\frac{2^x}{x+1}$, теорема 2 даст оператор, задающий 2^m вопросов и допускающий на функции $\mathcal{C}_n$ не более $3\log_2 n+O(1)$ ошибок. Ср. пример (eI): никакой оператор, задающий 2^m вопросов, не может дать оценки $2\log_2 n-g(n)$, $g(n)\to\infty$.

(e9) Аналогично: $f(x)=\frac{2^{cx}}{x+1}$. Операторы, задающие 2^{cm} вопросов. Верхняя оценка $(1+\frac{2}{c})\log_2 n+O(1)$. Нижняя $(1+\frac{1}{c})\log_2 n-O(1)$, см. пример (e2).

ЛИТЕРАТУРА

I. Подниеко К.М. Сравнение различных типов предельного синтеза и прогнозирования функций. - "Уч.зап.Латв.ун-та", I974, т.2I0, с.68-8I.
2. Барздинь Я.М., Фрейвалд Р.В. О прогнозировании общерекурсивных функций. - "Доклады АН СССР", I972, т.206, № 3, с.52I-524.
3. Барздинь Я.М., Фрейвалд Р.В. Прогнозирование и предельный синтез эффективно перечислимых классов функций. - "Уч. зап. Латв. ун-та.", I974, т.2I0, с.I0I-III.
4. Кушнер Б.А. Лекции по конструктивному математическому анализу. М., I973, 448 с.