Karlis Podnieks. On the reducibility of function classes. In: *Equations of Mathematical Physics and Theory of Algorithms*, Riga, Latvia State University, 1972, pp. 120–139 (in Russian, English translation: *Automatic Control and Computer Sciences*).

Abstract. N – the set of all natural numbers, **F** – the set of all total functions N→N, $A, B \subseteq \boldsymbol{F}$. We say that A is *m*-reducible to B ($A \leq_m B$), iff there is a *recursive operator* M such that $f \in A \leftrightarrow M(f) \in B$ for all $f \in \boldsymbol{F}$. Similarly, 1-reducibility, tt-, btt-, 1tt- and Turing reducibility can be introduced.

Table of contents. 1. Introduction. 2. Definitions of reducibilities and their simplest properties. 3. *m*-reducibility and the arithmetical hierarchy. 4. *m*-reducibility on $\Sigma_1^{f\,n}$. 5. Special classes $\boldsymbol{F}-\{f\}$. 6. Comparing various reducibilities on $\Sigma_1^{f\,n}$. 7. Notes on reducibilities of classes of sets.

Keywords: recursive functions, reducibility, m-reducibility, tabular reducibility, Turing reducibility.

О СВОДИМОСТЯХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

К.М. Подниекс

I. Введение

$\mathcal{N}$ - множество натуральных чисел, $\mathcal{F}$ - множество всех всюду определенных функций из $\mathcal{N}$ в $\mathcal{N}$, $\mathcal{R}$ - класс всех общерекурсивных функций (орф), $\mathcal{F}^0$ - класс всех предикатов (множеств) на $\mathcal{N}$ (можно считать, что $\mathcal{F}^0 \subset \mathcal{F}$).

Для классов функций (т.е. подмножеств $\mathcal{F}$) можно ввести понятия сводимостей, аналогичные тем, которые изучаются для множеств чисел. Эта аналогия сохраняется на уровне простейших свойств этих сводимостей (см. раздел 2).

В разделе 3 доказано существование m-универсальных классов на всех уровнях арифметической иерархии классов функций (см. [I]). Некоторые известные результаты об этой иерархии применение m- сводимости позволяет доказывать более просто.

В разделе установлен общий вид полурешетки m- степеней на Σ_1^{fn} (что соответствует р.п. множествам чисел). Замечены существенные особенности этой полурешетки по сравнению со случаем множеств чисел, связанные в основном с существованием т.н. особенных классов.

В разделе 5 строятся (своего рода) вложения упорядоченного множества T- степеней на Σ_1 в полурешетку m- степеней на Σ_1^{fn}. Это позволяет перенести некоторые классические результаты о несравнимости на случай классов функций.

В разделе 6 приведено несколько теорем о сравнении различных видов сводимости на Σ_1^{fn}. Установлено еще одно отличие от случая множеств чисел (теорема 9).

В разделе 7 отмечены те результаты разделов 2 - 6, которые остаются верными для сводимостей классов множеств (см. [I]). Приведены (без доказательств) две

теоремы (II и I2), показывающие различие случаев $\mathcal{F}^0$ и $\mathcal{F}$.

Обозначения. Начальный кусок $\langle \varphi(0) \dots \varphi(n) \rangle$ функции φ обозначим через $\varphi^{[n]}$. Если рассматривать функции из $\mathcal{F}$ как последовательности чисел $\{\varphi(n)\}$, то понятны обозначения:

$$0^\infty,\ 0^k 1^\infty,\ x 1^\infty,\ 0\varphi,\ \dots$$

Фиксируем естественную нумерацию машин Тьюринга с оракулом из $\mathcal{F}$: машина с номером m вычисляет с оракулом φ функцию $[m,\varphi]$ (быть может - частичную). В частности, $[i]$ есть чрф с номером i. Мы будем пользоваться также следующей нумерацией всех р.п. множеств:

$$W_i = \mathcal{D}([i]).$$

Понятия (обще) рекурсивного и частично рекурсивного функционала из $\mathcal{N}^n \times \mathcal{F}$ в $\mathcal{N}$ (сокращения: ОРФ и ЧРФ) считаются известными (см. [I], гл. I5, § 9).

Отображение $M : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ будем называть рекурсивным оператором, если существует ОРФ $F : \mathcal{F} \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ такой, что для всех φ:

$$M(\varphi) = \lambda x\, F(\varphi, x).$$

Значение функции $M(\varphi)$ на аргументе x будем обозначать через $M(\varphi, x)$.

2. Определения сводимостей и их простейшие свойства

m- сводимость. Пусть $A, B \subseteq \mathcal{F}$. Тогда $A \leqslant_m B$, если существует рекурсивный оператор M такой, что:

$$\varphi \in A \Leftrightarrow M(\varphi) \in B$$

для всех $\varphi \in \mathcal{F}$. 1- сводимость получается отсюда, если требовать одно-одно-значность оператора M.

Понятие рекурсивного изоморфизма: $A \equiv B$, если существуют рекурсивные операторы M, M' такие, что

Зак.113з.

1) $MM'(\varphi) = M'M(\varphi) = \varphi$,

2) $\varphi \in A \Leftrightarrow M(\varphi) \in B$.

(Неизвестно, имеет ли здесь место аналог теоремы Майхилла о совпадении $\equiv_1$ и $\equiv$.)

Табличные сводимости. $A \leqslant_{tt} B$, если существует ОРФ $S : \mathcal{F} \to N$, значения $S(\varphi)$ которого суть номера кортежей вида $\langle m_1, \ldots, m_k, \beta \rangle$, где $[m_i, \varphi] \in \mathcal{F}$ для всех i; $k = k(\varphi) \geq 1$, а β – k-местная булева функция; притом имеет место:

$$\varphi \in A \Leftrightarrow \beta(|[m_1,\varphi] \in B|, \ldots, |[m_k, \varphi] \in B|),$$

где "модуль" показывает значение истинности предиката.

btt- сводимость получается отсюда, если потребовать: $k(\varphi) \leqslant c_{AB}$, а $1tt$- сводимость – если требовать: $k(\varphi) \equiv 1$.

(Легко видеть, что m – сводимость получится, если требовать одновременно: $k(\varphi) \equiv 1$, $\beta(x) = x$ для всех φ.)

T – сводимость. Пусть $B \subseteq \mathcal{F}$. Функционал $F : \mathcal{F} \to N$ назовем рекурсивным в B, если существует машина Z с двумя оракулами, которая для любой $\varphi \in \mathcal{F}$ останавливается, напечатав число $F(\varphi)$, и при этом:

I) первому оракулу задаются только вопросы вида „$\varphi(x) = ?$",

2) второму оракулу задаются только вопросы вида „$[m, \varphi] \in B ?$", соблюдая условие $[m, \varphi] \in \mathcal{F}$.

(Это определение легко сформулировать и вполне точно – на языке конфигураций.)

Если $A, B \subseteq \mathcal{F}$ то $A \leqslant_T B$ означает, что характеристический функционал (ХФ):

$$H_A(\varphi) = \begin{cases} 0, \text{ если } \varphi \in A, \\ 1, \text{ если } \varphi \bar{\in} A. \end{cases}$$

рекурсивен в B. В частности, A есть рекурсивный класс, если H_A рекурсивен в $\mathcal{F}$ (т.е. H_A есть ОРФ).

Для всех рассматриваемых сводимостей непосредственно проверяется:

I) рефлексивность и транзитивность,

2) Если B – рекурсивный класс и $A \leqslant B$, то A – тоже рекурсивный класс.

Итак, можно ввести все соответствующие эквивалентности и степени: $d_m(A)$, $d_T(A)$ итп.

Для $1tt$ – сводимости легко проверить, что:

I) Все рекурсивные классы $1tt$ – эквивалентны.

2) $A \equiv_{1tt} \bar{A}$ для всех $A \subseteq \mathcal{F}$.

Для m – сводимости легко проверяется, что:

I) $A \leqslant_m B \Leftrightarrow \bar{A} \leqslant_m \bar{B}$.

2) $A \leqslant_m \phi \Rightarrow A = \phi$; $A \leqslant_m \mathcal{F} \Rightarrow A = \mathcal{F}$.

3) Все нетривиальные рекурсивные классы m – эквивалентны.

4) Частично-упорядоченное множество m – степеней есть верхняя полурешетка. В качестве $A \text{ join } B$ можно взять класс:

$$\{\varphi \mid [\varphi(0) = 0 \,\&\, \lambda x\, \varphi(x+1) \in A] \vee [\varphi(0) > 0 \,\&\, \lambda x\, \varphi(x+1) \in B]\}.$$

3. m – сводимость и арифметическая иерархия

Из всех классов функций выделяются арифметические классы ([I], гл.I5, § 2), которые образуют арифметическую иерархию: Σ_n^{fn}, Π_n^{fn} $(n \geq 0)$. Если $n \geq 1$, то для классов семейства Σ_n^{fn} существует "вычислимая" нумерация $\{E_z^{(n)}\}$:

$$\varphi \in E_z^{(n)} \Leftrightarrow \exists x_1 \forall x_2 \cdots T_n(z, \varphi, x_1, \ldots, x_n),$$

где T_n есть ОРФ на $N^{n+1} \times \mathcal{F}$. Аналогично для Π_n^{fn} $(n \geq 1)$. $\Sigma_0^{fn} = \Pi_0^{fn}$ – это семейство всех рекурсивных классов.

Семейство Σ_1^{fn} характеризуется тем, что $A \in \Sigma_1^{fn}$, если и только если частичный характеристический функционал (ЧХФ) H_A есть ЧРФ.

Очевидно также, что

$$A \leqslant_m B \ \& \ B \in \Sigma_n^{fn} \Rightarrow A \in \Sigma_n^{fn}.$$

Поэтому правомерен вопрос о существовании m - универсальных классов в Σ_n^{fn}.

Легко построить эффективную нумерацию пар $\langle x, y\rangle$, обладающую свойствами:

I) $\langle 0, 0\rangle = 0$,

2) $\forall x \exists y \langle x, y\rangle = y$.

Через L, R обозначим обратные функции этой нумерации. (Полезность такого рода нумераций впервые замечена, по-видимому, Р.В.Фрейвалдом.)

Символ $\langle\varphi, \psi\rangle$ обозначает функцию:

$$\langle\varphi, \psi\rangle(x) = \langle\varphi(x), \psi(x)\rangle.$$

Аналогично для L, R.

<u>Теорема I.</u> Пусть $n \geqslant 1$. Тогда класс функций

$$\mathcal{U}^{(n)} = \{\varphi \mid R\varphi \in E^{(n)}_{L\varphi(0)}\}$$

принадлежит $\Sigma_n^{fn} \setminus \Pi_n^{fn}$ и m - универсален в Σ_n^{fn}.

<u>Доказательство.</u> Из соотношения

$$\varphi \in \mathcal{U}^{(n)} \Leftrightarrow \exists x_1 \forall x_2 \dots T_n(L\varphi(0), R\varphi, x_1, \dots, x_n)$$

следует, что $\mathcal{U}^{(n)} \in \Sigma_n^{fn}$. Соотношение

$$\langle z0^\infty, \varphi\rangle \in \mathcal{U}^{(n)} \Leftrightarrow \varphi \in E_z^{(n)}$$

показывает, что оператор $M_z(\varphi) = \langle z0^\infty, \varphi\rangle$ m- сводит $E_z^{(n)}$ к $\mathcal{U}^{(n)}$, т.е. $\mathcal{U}^{(n)}$ - m- универсальный класс в Σ_n^{fn}.

Остается показать, что $\mathcal{U}^{(n)} \bar{\in} \Pi_n^{fn}$, это будет непосредственным доказательством невырожденности иерархии (которая в [I] выводится из результатов для множеств чисел). Если допустить, что $\mathcal{U}^{(n)} \in \Pi_n^{fn}$, то $\overline{\mathcal{U}^{(n)}} \in E_u^{(n)}$ для некоторого u, т.е.

$$R\varphi \bar{\in} E^{(n)}_{L\varphi(0)} \Leftrightarrow \varphi \in E_u^{(n)}.$$

Найдем t такое, что $\langle u, t\rangle = t$ и положим $\varphi = t0^\infty$, тогда:

$$t0^\infty \bar{\in} E_u^{(n)} \Leftrightarrow t0^\infty \in E_u^{(n)}.$$

Противоречие, т.е. $\mathcal{U}^{(n)} \bar{\in} \Pi_n^{fn}$, что и требовалось.

<u>Замечание.</u> Использование m - сводимости классов функций позволяет также доказать, что

$$A = \{\varphi \mid \varphi^{-1}(0) - \text{конечное множество}\} \in \Sigma_2^{fn} \setminus \Pi_2^{fn}$$

без применения категорных рассуждений (см. [I], гл.I5). Для этого достаточно заметить, что A - m- универсальный класс в Σ_2^{fn}.

4. <u>m- сводимость на Σ_1^{fn}.</u>

Для m - сводимости классов функций легче найти примеры "естественных" классов, m - универсальных в Σ_1^{fn}, чем это было в случае множеств чисел.

Например, если g - некоторая орф, то очевидно: $\mathcal{F} \setminus \{g\} \in \Sigma_1^{fn}$. Докажем универсальность этого класса. Пусть $A \in \Sigma_1^{fn}$, тогда ЧХФ H_A есть ЧРФ. Оператор M определим так: для вычисления $M(\varphi)$ вычисляем $H_A(\varphi)$ по шагам и полагаем:

$$M(\varphi, n) = \begin{cases} g(n), & \text{если } H_A(\varphi) \text{ не останавливается за } \leqslant n \text{ шагов,} \\ g(n) + 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Очевидно:

$$\varphi \in A \Leftrightarrow H_A(\varphi) \text{ останавливается} \Leftrightarrow M(\varphi) \neq g.$$

Итак, M сводит A к $\mathcal{F} \setminus \{g\}$, что и требовалось.

Классы функций, m - универсальные для Σ_1^{fn} легко охарактеризовать в следующих терминах. Функцию φ_0 назовем <u>внешней точкой прикосновения</u> для класса A, если

I) φ_0 есть орф и $\varphi_0 \bar{\in} A$,

2) существует вычислимая последовательность $\{f_i\}$ орф из A такая, что $\forall i\ f_i^{[i]} = \varphi_0^{[i]}$.
(В бэровской топологии на $\mathcal{F}$ (см. [I]) такая точка φ_0 и в самом деле будет точкой прикосновения для A .)

<u>Теорема 2.</u> Класс A m - универсален для Σ_1^{fn}, если и только если A имеет внешнюю точку прикосновения.

<u>Доказательство</u>. Н е о б х о д и м о с т ь. m - универсальность класса A влечет: $\mathcal{F} \setminus \{0^\infty\} \leqslant_m A$, т.е. для некоторого M :

$$\varphi \neq 0^\infty \Leftrightarrow M(\varphi) \in A.$$

Если φ есть орф, то и $M(\varphi)$ - орф. Следовательно, как $M(0^\infty)$ так и все $M(0^i 1^\infty)$ суть орф. Очевидно также, что $M(0^\infty) \bar{\in} A$, а все $M(0^i 1^\infty) \in A$. Рекурсивный оператор M непрерывен в бэровской топологии, поэтому

$$\lim 0^i 1^\infty = 0^\infty \Rightarrow \lim M(0^i 1^\infty) = M(0^\infty).$$

Итак, функция $M(0^\infty)$ будет внешней точкой прикосновения для A , если в качестве $\{f_i\}$ мы возьмем подходящую подпоследовательность из $\{M(0^i 1^\infty)\}$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть φ_0 - внешняя точка прикосновения для A , а $\{f_i\}$ - соответствующая последовательность. Достаточно показать, что $\mathcal{F} \setminus \{0^\infty\} \leqslant_m A$. Для этого оператор M определим так:

$$M(\varphi, x) = \begin{cases} \varphi_0(x), \text{ если } \varphi^{[x]} = 0^{x+1} \\ f_{i+1}(x), \text{ если } i < x \ \& \ \varphi^{[i]} = 0^{i+1} \ \& \ \varphi(i+1) > 0, \\ f_0(x), \text{ если } \varphi(0) > 0. \end{cases}$$

Очевидно: $\varphi \neq 0^\infty \Leftrightarrow M(\varphi) \in A$, что и требовалось.

<u>Следствие.</u> Если B - конечное множество орф, то класс $\mathcal{F} \setminus B$ m - универсален в Σ_1^{fn}.

Кроме того, легко видеть, что $\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}^\circ \in \Sigma_1^{fn}$. Из теоремы 2 следует, что это - m - универсальный класс. Можно показать, что $\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}^\circ$ есть даже 1 - универсальный класс в Σ_1^{fn}. С другой стороны очевидно, что к $\mathcal{F} \setminus \{0^\infty\}$ 1 - сводятся только классы, дополнения которых содержат не более одного элемента. Таким образом, не все m - универсальные классы 1 - универсальны, но в универсальной m - степени имеется наибольшая 1 -степень. Открытым остается вопрос об изоморфизме классов этой 1 - степени.

Этим установлена первая особенность рассматриваемой иерархии по сравнению со случаем множеств чисел.

Имеется и другая особенность. В случае множеств чисел рекурсивное множество m - сводится к любому нетривиальному множеству.

В случае же классов функций нетривиальный рекурсивный класс A открыто-замкнут в бэровской топологии, поэтому как A , так и $\bar{A}$ содержит орф. Но тогда из $A \leqslant_m B$ следует, что B и $\bar{B}$ тоже содержат орф.

Всегда ли нетривиальный Σ_1^{fn} - класс B удовлетворяет этому условию ? Всякий непустой Σ_1^{fn} - класс открыт в бэровской топологии и поэтому содержит орф. Таким образом, наш вопрос сводится к такому: существуют ли нетривиальные Σ_1^{fn} - классы, дополнения которых не содержат орф ?

Оказывается, такие классы существуют. Доказательство этого факта, по существу, приведено в [I] (гл.I6,§ 7), даже в более сильной форме: существует класс $B \in \Sigma_1^{fn}$ такой, что $\bar{B}$ не пусто, однако не содержит гиперарифметических функций.

Классы из Σ_1^{fn} , имеющие непустое дополнение, не содержащее орф, назовем <u>особенными</u>. Очевидно, все такие классы нерекурсивны.

Имеются и более простые примеры особенных классов.

I. Пусть V – простое множество (чисел). Класс B всех таких φ, что:

a) $\forall x\ \varphi(x) < \varphi(x+1)$,

b) $\forall x\ \varphi(x) \in \overline{V}$;

есть, очевидно, дополнение к Σ_1^{fin} – классу. Однако, если $\varphi \in B \cap R$ то область значений φ есть бесконечное рекурсивное подмножество $\overline{V}$, что невозможно. Таким образом $B \cap R = \phi$, хотя $B \neq \phi$.

2. Пусть V_0, V_1 – два рекурсивно перечислимых и рекурсивно неотделимых множества. Класс C всех таких φ, что:

a) $\forall x\ \varphi(x) \leq 1$,

b) $\forall x\ [(\varphi(x) = 0 \Rightarrow x \bar{\in} V_1) \,\&\, (\varphi(x) = 1 \Rightarrow x \bar{\in} V_0)]$;

есть, очевидно, дополнение к Σ_1^{fin} – классу. Однако, если $\varphi \in C \cap R$, то φ – характеристическая функция рекурсивного множества, отделяющего V_0 и V_1, что невозможно. Таким образом, $C \cap R = \phi$, хотя $C \neq \phi$.

Отметим еще следующие факты:

I) Из $A \leq_m B$ и B – особенный класс следует, что $A = \mathcal{F}$ или A – особенный класс.

2) Особенный класс не может быть m – универсальным (см. теорему 2).

3) Всякий рекурсивный класс m – сводится ко всякому Σ_1^{fin} – классу, отличному от ϕ, $\mathcal{F}$ и особенных классов.

Теперь в общей характеристике верхней полурешетки m – степеней на Σ_1^{fin} неясными остались два пункта:

a) Существуют ли Σ_1^{fin} – классы нерекурсивные, неуниверсальные и не являющиеся особенными ? Такие классы назовем <u>нормальными</u>.

b) Если нормальные классы существуют, то существует ли для каждого особенного B нормальный класс B' такой, что $B \leq_m B'$?

Ответ на оба вопроса дает

<u>Теорема 3</u>. Для всякого особенного класса B класс $B\ join\ \phi$ является нормальным (и поэтому $B <_m B\ join\ \phi$).

<u>Доказательство</u>. Напомним, что:

$$B\ join\ \phi = \{\varphi \mid \varphi(0) = 0 \,\&\, \lambda x\, \varphi(x+1) \in B\}.$$

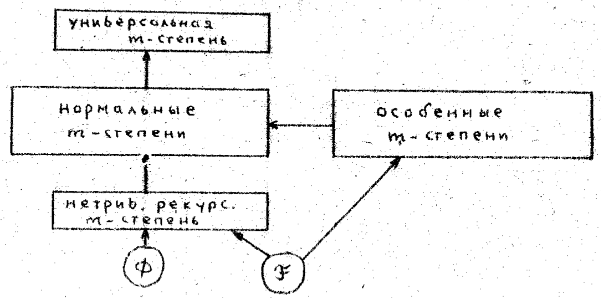
Очевидно $1^\infty \bar{\in} B\ join\ \phi$, т.е. этот класс не является особенным. $B\ join\ \phi$ не может быть и m – универсальным, ибо для орф φ_0 из $\varphi_0 \bar{\in} B\ join\ \phi$ следует (в силу того, что B – особенный класс), что $\varphi_0(0) > 0$, тогда как все $\varphi \in B\ join\ \phi$ имеют $\varphi(0) = 0$, т.е. φ_0 не может быть точкой прикосновения для $B\ join\ \phi$ (см. теорему 2).

Если допустить, наконец, что $B\ join\ \phi$ имеет рекурсивный ХФ H, то

$$H(0\varphi) = \begin{cases} 0, \text{ если } \varphi \in B, \\ 1, \text{ если } \varphi \bar{\in} B, \end{cases}$$

т.е. B – рекурсивный класс, что невозможно. Таким образом $B\ join\ \phi$ – нерекурсивный, т.е. нормальный класс. Что и требовалось.

Общую характеристику расположения m – степеней на Σ_1^{fin} можно свести в диаграмму:



5. Особенные классы вида $\mathcal{F}\setminus\{\psi\}$.

Мы уже видели, что для орф ψ_0 класс $\mathcal{F}\setminus\{\psi_0\}\in\Sigma_1^{fn}$. Но следует ли из $\mathcal{F}\setminus\{\psi\}\in\Sigma_1^{fn}$, что ψ – орф?

Для ответа на вопрос заметим сперва, что класс всех $f\in\mathcal{F}$, графики которых лежат в Π_1, содержит все орф, а также некоторые нерекурсивные функции. Определим, например, следующие функции:

$$f_i(x)=\begin{cases} t+1, \text{если } [i](x) \text{ вычисляется за точно } t \text{ шагов,}\\ 0, \quad \text{если } [i](x) \text{ не определено.}\end{cases}$$

f_i есть орф не для всех i, ибо:

$$f_i(x)>0 \Leftrightarrow x\in D([i])=W_i \qquad (1)$$

и не все W_i рекурсивны.

Для предиката $f_i(x)=y$ имеем выражение:

$$[y=0\ \&\ \forall t\ \neg T(i,x,t)]\vee[y>0\ \&\ T(i,x,y-1)], \qquad (2)$$

где $T(i,x,t)$ – рекурсивный предикат, показывающий, остановится ли вычисление $[i](x)$ на шаге номер t. Таким образом, графики всех f_i лежат в Π_1 и среди этих функций есть и нерекурсивные.

Теорема 4. Если $\psi_0\in\mathcal{F}$ и график ψ_0 есть Π_1-множество, то $\mathcal{F}\setminus\{\psi_0\}\in\Sigma_1^{fn}$.

Доказательство. Пусть

$$\psi_0(x)=y \Leftrightarrow \forall z\, R(x,y,z),$$

где предикат R рекурсивен. Нам достаточно построить ЧХФ H для предиката $\varphi\neq\psi_0$. Процесс вычисления $H(\varphi)$ будет состоять в поиске такого x, что

$$\exists z\ \neg R(x,\varphi(x),z).$$

Нашли – полагаем $H(\varphi)=0$ (тогда, очевидно $\varphi\neq\psi_0$), если такого x не существует, пусть $H(\varphi)$ не определено (ибо тогда $\varphi=\psi_0$). Теорема доказана.

Итак, Σ_1^{fn} содержит классы вида $\mathcal{F}\setminus\{\psi\}$, где ψ нерекурсивна. Такие классы по определению особенны.

Замечание 1. Графики функций ψ, данных теоремой 4, все лежат в Π_1. Открытым остается вопрос: следует ли из $\mathcal{F}\setminus\{\psi\}\in\Sigma_1^{fn}$, что график ψ лежит в Π_1?

Замечание 2. Изложенные построения позволяют легко доказать следующее

Предложение. Для класса множеств $C=\{N\setminus\{x\}\mid x\in N\}$ невозможна такая чрф h, что если $W_i\in C$, то $h(i)$ определено и $W_{h(i)}=\overline{W_i}$.

Это значит, что хотя множества из C рекурсивны, невозможен эффективный перевод их описаний на языке перечислений в описания на языке характеристических функций. Следовательно, такой перевод невозможен, в частности, и для всего класса рекурсивных множеств (это – результат Сузуки, см. [3]).

Доказательство предложения. Пусть W_0 – нерекурсивное множество. Последовательность множеств из C:

$$A_j=\{x\mid x\neq f_0(j)\}$$

является в силу (2) вычислимой, т.е. $A_j=W_{f(j)}$, где f есть орф. Если функция h существует, то hf – орф и $W_{hf(j)}=\{f_0(j)\}$, т.е. f_0 есть орф, тогда как W_0 нерекурсивно и имеет место (1). Что и требовалось.

Конец замечания 2.

Имеется некоторая связь между m-сводимостью классов $\{f_n\}$ и T-сводимостью (числовых) множеств W_n.

Теорема 5. $\{f_i\}\leqslant_m\{f_j\}\Leftrightarrow W_j\leqslant_T W_i$.

Доказательство. (1) показывает, что f_j есть орф, если и только если W_j – рекурсивное множество. Поэтому в случае рекурсивного W_j теорема очевидна. Допустим для дальнейшего, что W_j нерекурсивно.

Легко проверить, что для всех n функция f_n рекурсивна с оракулом W_n, в свою очередь W_n рекурсивно с оракулом f_n (см. соотношение (I)).

I. Пусть $\varphi = f_i \Leftrightarrow M(\varphi) = f_j$, тогда $M(f_i) = f_j$, т.е. f_j рекурсивна с оракулом f_i. Итак, левое рекурсивно в правом:

$$W_j - f_j - f_i - W_i,$$

т.е. $W_j \leqslant_T W_i$.

2. Пусть $W_j \leqslant_T W_i$, т.е. W_j рекурсивно в W_i, тогда аналогично, левое рекурсивно в правом:

$$f_j - W_j - W_i - f_i.$$

Поэтому существует машина m такая, что $[m, f_i] = f_j$. Заметим теперь, что по теореме 4: $\mathcal{F} \setminus \{f_i\} \in \Sigma_1^{fn}$, т.е. существует ЧХФ H_i для предиката $\varphi \neq f_i$. Нужный нам оператор M со свойством

$$\varphi = f_i \Leftrightarrow M(\varphi) = f_j$$

вычисляем на $\varphi \in \mathcal{F}$ так. Запускаем машину m паралельно на всех значениях аргумента x, но с оракулом φ (с которым ей не обязательно вычислять $\mathcal{F}$ - функцию). Одновременно вычисляем $H_i(\varphi)$. Если до остановки $H_i(\varphi)$ машина m на x остановилась, напечатав y, то полагаем $M(\varphi, x) = y$. После остановки $H_i(\varphi)$ все свободные места в $M(\varphi)$ заполняем нулями, не обращаясь больше к машине m.

Итак, если $H_i(\varphi)$ не определено (т.е. $\varphi = f_i$), то $M(\varphi) = f_j$ (ибо $[m, f_i] = f_j$). Если же $H_i(\varphi)$ определено (т.е. $\varphi \neq f_i$), то $M(\varphi)$ есть орф и, следовательно $M(\varphi) \neq f_j$ (мы допустили что W_j - нерекурсивное множество). Что и требовалось.

<u>Следствие</u>. $\{f_i\} \equiv_m \{f_j\} \Leftrightarrow W_i \equiv_T W_j$.

Теорема 5 вместе с этим следствием показывает, что "структура" T - степеней на $\Sigma_1 \setminus \Pi_1$ может быть в известном смысле ("в обратном порядке") вложена в полурешетку особенных m - степеней на Σ_1^{fn}.

<u>Замечание</u>. Понятие "полурешетка особенных m- степеней" предполагает, что если A, B - особенные классы, то и $A \, \mathrm{join} \, B$ - особенный класс. Это легко проверить. Аналогично устанавливается правомерность понятия полурешетки нормальных m - степеней.

Можно было бы предположить, что в упомянутом вложении универсальной T - степени соответствует наименьшая особенная m - степень. Однако это не так: как уже указывалось, в [I] приведено доказательство существования особенного класса, дополнение которого не содержит гиперарифметических функций, тогда как $\mathcal{F} \setminus \{f_i\} \leqslant_m B$ влечет сразу, что $\overline{B}$ содержит арифметическую (даже 2 - рекурсивную, см. [2]) функцию.

Оказывается, "структуру" T - степеней на $\Sigma_1 \setminus \Pi_1$ можно вложить (в обратном порядке) и в полурешетку нормальных m- степеней на Σ_1^{fn}.

<u>Теорема 6</u>. Пусть $A_i = \mathcal{F} \setminus \{f_i\}$, а $B \subseteq \mathcal{F}$. Тогда:

$$A_i \leqslant_m B \Leftrightarrow A_i \, \mathrm{join} \, \phi \leqslant_m B \, \mathrm{join} \, \phi.$$

<u>Доказательство</u>. I. Импликацию вправо легко доказать для произвольного класса A (вместо специальных A_i). Дано, что $\varphi \in A \Leftrightarrow M(\varphi) \in B$, тогда

$$\varphi \in A \, \mathrm{join} \, \phi \Leftrightarrow \varphi(0) = 0 \; \& \; \lambda x \, \varphi(x+1) \in A \Leftrightarrow$$

$$\varphi(0) = 0 \; \& \; M(\lambda x \, \varphi(x+1)) \in B \Leftrightarrow \varphi(0) \, M(\lambda x \, \varphi(x+1)) \in B \, \mathrm{join} \, \phi.$$

Итак, оператор $M'(\varphi) = \varphi(0) M(\lambda x \, \varphi(x+1))$ сводит $A \, \mathrm{join} \, \phi$ к $B \, \mathrm{join} \, \phi$, что и требовалось.

2. Импликация влево является менее общей. Она не выполняется даже для некоторых особенных классов A. Но для классов A_i она верна; пусть:

$$\varphi \in A_i \text{ join } \Phi \Leftrightarrow M(\varphi) \in B \text{ join } \Phi .$$

Тогда:

$$\varphi \in A_i \Leftrightarrow 0\varphi \in A \text{ join } \Phi \Leftrightarrow M(0\varphi) \in B \text{ join } \Phi .$$

Заметим, что $\varphi \in A_i \Leftrightarrow \varphi \neq f_i$, т.е.

$$\varphi \neq f_i \Leftrightarrow M(0\varphi, 0) = 0 \,\&\, \lambda x M(0\varphi, x+1) \in B, \quad (3)$$

или

$$\varphi = f_i \Leftrightarrow M(0\varphi, 0) > 0 \vee \lambda x M(0\varphi, x+1) \bar{\in} B .$$

Допустим, что $M(0\varphi, 0) > 0$ для некоторой φ . Но $M(0\varphi, 0)$ зависит лишь от начального куска φ , так что $M(0\psi, 0) > 0$ для всех ψ из некоторой окрестности φ . Но тогда $\psi = f_i$ для этих ψ , что невозможно. Итак, $M(0\varphi, 0) = 0$ для всех $\varphi \in \mathcal{F}$ и (3) принимает вид:

$$\varphi \neq f_i \Leftrightarrow \lambda x M(0\varphi, x+1) \in B,$$

т.е. $A_i \leqslant_m B$, что и требовалось.

Теоремы 3, 5 и 6 дают следующее

<u>Следствие.</u> Пусть $A_n = \mathcal{F} \setminus \{f_n\}$, где множество W_n нерекурсивно. Тогда $A_n \text{ join } \Phi$ – нормальный класс, причем всегда:

$$A_i \text{ join } \Phi \leqslant_m A_j \text{ join } \Phi \Leftrightarrow W_j \leqslant_T W_i .$$

Это и есть упомянутое второе "вложение в обратном порядке".

Итак, из соответствующих результатов для T – степеней множеств чисел следует существование несравнимых m – степеней в полурешетке как нормальных, так и особенных m – степеней. Разумеется, до уровня полноты, достигнутого для множеств чисел, здесь еще далеко.

6. <u>Сравнение различных сводимостей на Σ_1^{fn}.</u>

Тривиальное различие m – и $1tt$ –сводимости заключается в том, что:

1) m – степени $\{\Phi\}, \{\mathcal{F}\}$, $\{$нетривиальные рекурсивные классы$\}$ различны, из них только $\{\mathcal{F}\}$ меньше особенных m – степеней;

2) $1tt$ – степень $\{$все рекурсивные классы$\}$ меньше всех других $1tt$ – степеней.

Более интересное отличие, проявляющееся на Σ_1^{fn}, состоит в следующем: по теореме 3 для особенного класса B : $B <_m B \text{ join } \Phi$. Для $1tt$ – сводимости же имеет место

<u>Теорема 7</u>. $B \equiv_{1tt} B \text{ join } \Phi$ для всех $B \subseteq \mathcal{F}$.

<u>Доказательство</u>. $B \leqslant_1 B \text{ join } \Phi$, поэтому достаточно показать, что $B \text{ join } \Phi \leqslant_{1tt} B$. Нам нужен, по существу, некоторый ОРФ F , значением $F(\varphi)$ которого является пара $\langle m, \varphi \rangle$, где $[m, \varphi] \in \mathcal{F}$, а β – одноместная булева функция.

Если $\varphi(0) > 0$ положим: m – такое, что $[m, \varphi] = \varphi$, а $\beta \equiv 0$. Если же $\varphi(0) = 0$, положим: m – такое, что $[m, \varphi] = \lambda x\, \varphi(x+1)$, а $\beta(x) = x$. Тогда:

$$\varphi \in B \text{ join } \Phi \Leftrightarrow \varphi(0) = 0 \,\&\, \lambda x\, \varphi(x+1) \in B \Leftrightarrow \beta(|[m, \varphi] \in B|),$$

что и требовалось.

<u>Теорема 8</u>. Всякий класс, $1tt$ – универсальный в Σ_1^{fn} является m – универсальным в Σ_1^{fn}, т.е. $d_m(\mathcal{U}^{(\omega)}) = d_{1tt}(\mathcal{U}^{(\omega)}) \cap \Sigma_1^{fn}$. (Большего ожидать не приходится из-за $A \equiv_{1tt} \bar{A}$.)

<u>Доказательство</u>. Поскольку $\mathcal{F} \setminus \{0^\infty\}$ – m – универсальный класс в Σ_1^{fn} , то достаточно показать, что из $\mathcal{F} \setminus \{0^\infty\} \leqslant_{1tt} B$ и $B \in \Sigma_1^{fn}$ следует, что $\mathcal{F} \setminus \{0^\infty\} \leqslant_m B$.

Значение $F(0^\infty)$ $1tt$ – сводящего функционала F зависит только от некоторого начального куска 0^ℓ , обозначим это значение через $\langle m, \beta \rangle$. Итак:

$$0^\ell \psi \neq 0^\infty \Leftrightarrow \beta(|[m, 0^\ell \psi] \in B|),$$

причем, по определению, для всех $\psi \in \mathcal{F}$ имеем: $[m, 0^\ell \psi] \in \mathcal{F}$. Поэтому можно определить рекурсивный оператор

$$M(\psi) = [m, 0^\ell \psi].$$

Тогда:

$$\psi \neq 0^\infty \Leftrightarrow \beta(|M(\psi) \in B|). \qquad (4)$$

Для функции β (она фиксирована) возможны, вообще говоря, 4 варианта: $\beta \equiv 0$, $\beta \equiv 1$, $\beta(x) = x$, $\beta(x) = \overline{x}$. Первые два отпадают сразу, ибо левая часть (4) непостоянна. В случае четвертого мы имели бы:

$$\psi \neq 0^\infty \Leftrightarrow M(\psi) \bar{\in} B,$$

т.е. $\{0^\infty\} \leq_m B$, что невозможно, ибо из теоремы I следует, что $\{0^\infty\} \in \Pi_1^{fn} \setminus \Sigma_1^{fn}$, а $B \in \Sigma_1^{fn}$. Итак, $\beta(x) = x$ и (4) принимает вид

$$\psi \neq 0^\infty \Leftrightarrow M(\psi) \in B,$$

что и требовалось.

<u>Замечание</u>. Теоремы 7, 8 верны и для множеств чисел. Открытым остается вопрос о различии $d_{tt}(\mathcal{U}^{(1)})$ и $d_{btt}(\mathcal{U}^{(1)})$, а также $d_m(\mathcal{U}^{(1)})$ и $d_{btt}(\mathcal{U}^{(1)}) \cap \Sigma_1^{fn}$. Весьма вероятно, что ситуация здесь будет такой же, как в случае множеств чисел (см. [I]).

Однако, в противоположность этому случаю, имеет место

<u>Теорема 9</u>. $d_{btt}(\mathcal{U}^{(1)}) = d_{tt}(\mathcal{U}^{(1)})$.

<u>Доказательство</u>. Достаточно показать, что

$$\mathcal{F} \setminus \{0^\infty\} \leq_{tt} B \Rightarrow \mathcal{F} \setminus \{0^\infty\} \leq_{btt} B.$$

Значение $S(0^\infty)$ tt-сводящего функционала S зависит только от некоторого начального куска 0^ℓ, обозначим это значение через $\langle m_1, \dots, m_k, \beta \rangle$. Тогда для всех φ:

$$0^\ell \varphi \neq 0^\infty \Leftrightarrow \beta(\dots |[m_i, 0^\ell \varphi] \in B| \dots). \qquad (5)$$

Определим орф h такую, что для всех x и φ:

$$[h(x), \varphi] = [x, 0^\ell \varphi].$$

Тогда постоянный ОРФ S':

$$S'(\varphi) = \langle h(m_1), \dots, h(m_k), \beta \rangle$$

в силу (5) btt-сводит $\mathcal{F} \setminus \{0^\infty\}$ к B, что и требовалось.

Открытым остается вопрос о различии $d_{tt}(\mathcal{U}^{(1)})$ и $d_T(\mathcal{U}^{(1)})$.

<u>Теорема I0</u>. Особенный класс не может быть T-универсальным в Σ_1^{fn}.

(Это свойство является, очевидно, общим для всех видов сводимости классов функций.)

<u>Доказательство</u>. От противного, пусть $\mathcal{F} \setminus \{0^\infty\} \leq_T B$ для некоторого особенного класса B, т.е. существует машина Z, которая с оракулами φ, B вычисляет ХФ предиката $\varphi \neq 0^\infty$.

Если взять $\varphi = 0^\infty$ то Z остановится, напечатав 1. При этом оракулу φ будет задано конечное число вопросов вида „$\varphi(x) = ?$" (и получены ответы – 0). Пусть эти вопросы не касаются значений $\varphi(x)$ для $x \geq \ell$. Оракулу B при этом будет задано конечное число вопросов вида „$[m, 0^\infty] \in B$?" (где $[m, 0^\infty] \in \mathcal{F}$, даже $\in \mathcal{R}$) и получены ответы "да", ибо B – особенного класс

Покажем, что тогда Z остановится, напечатав 1, и в случае $\varphi = 0^\ell 1^\infty$. В самом деле, в процессе этого вычисления Z будет задавать оракулу φ те же вопросы, что и при $\varphi = 0^\infty$ (и получать те же ответы – 0). Оракулу B при этом будут заданы вопросы „$[m, 0^\ell 1^\infty] \in B$?" с теми же m, что и в случае $\varphi = 0^\infty$ (заметим, что отличие $0^\ell 1^\infty$ от 0^∞ не содержится в конфигурациях Z). Ответы в этом случае будут те же – "да", ибо опять $[m, 0^\ell 1^\infty] \in \mathcal{R}$, а B – особенный класс.

Зак.I 133.

Итак, по определению Z : $\urcorner(0^{\ell}1^{\infty} \neq 0^{\infty})$. Противоречие, следовательно B не есть T - универсальный класс,

Теорема I0 фактически устанавливает существование неуниверсальных и нерекурсивных T - степеней на Σ_1^{fn}. Существование несравнимых T - степеней остается недоказанным.

7. Замечания о сводимостях классов множеств

В [I] (гл.I5, § I) рассматривается также арифметическая иерархия классов множеств: $\Sigma_n^{(s)}$, $\Pi_n^{(s)}$ $(n \geq 0)$. Часть выше изложенного легко переносится на этот случай.

Определения сводимостей и формулировки их простейших свойств требуют лишь замены $\mathcal{F}$ на $\mathcal{F}^{\circ}$. Теорему I можно переформулировать (заменив $\mathcal{U}^{(1)}$ на более сложный объект) и передоказать, хотя это несколько сложнее.

Теорема 2 и ее следствие верны для $\mathcal{F}^{\circ}$ без изменений. Существование особенных классов следует в этом случае из нашего примера 2 (см. раздел 4). Сильнейший результат этого рода для $\mathcal{F}$, приведенный в [I], не имеет место для $\mathcal{F}^{\circ}$ здесь верна

<u>Теорема II</u>. Если B - нетривиальный класс из $\Sigma_1^{(s)}$, то $\overline{B}$ содержит множество из $\Sigma_2 \cap \Pi_2$.

Это нетрудно показать, используя язык предельной рекурсии 2 .

Теорема 3 остается верной для $\mathcal{F}^{\circ}$, тем самым общая характеристика полурешетки m - степеней на $\Sigma_1^{(s)}$ совпадает со случаем Σ_1^{fn}.

Особенных классов вида $\mathcal{F}^{\circ} \setminus \{\pi\}$ на $\Sigma_1^{(s)}$ не имеется, как показывает

<u>Теорема I2</u>. $\mathcal{F}^{\circ} \setminus \{\pi\} \in \Sigma_1^{(s)}$ если и только если π - ре.урсивное множество.

Итак, результаты раздела 5 не имеют аналогов в случае $\mathcal{F}^{\circ}$.

Результаты же раздела 6 (о сравнении различных сводимостей) переносятся на $\mathcal{F}^{\circ}$ без изменений.

Литература

1. Rogers H., The theory of recursive functions and effective computability, Mc Graw-Hill, N-Y,1967.
2. Gold E.M., Limiting recursion, Journal of Symbolic Logic, vol 30, N 1 /March 1965/.
3. Gold E.M., Language identification in the limit, Information and Controll, vol 10, N 5 /May 1967/.

Министерство высшего и среднего специального образования
Латвийской ССР
Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет имени Петра Стучки
Вычислительный центр

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

Сборник научных работ аспирантов

Редакционно-издательский отдел ЛГУ им. Петра Стучки
Рига 1972

О Г Л А В Л Е Н И Е