Латвийский ордена Трудового Красного Знамени государственный
университет им.П.Стучки

Кикуст Паулис Болеславович

ЛОКАЛЬНО-ГЛОБАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СТРОЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ГРАФОВ

(01.01.09 - математическая кибернетика)

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
ст.научн.сотр., канд.ф.-м.наук
Гринберг Э.Я.

P.Ķikusts

Рига 1976

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Развитие науки и техники привело к необходимости изучать различного рода системы-совокупности связанных между собою объектов. Как правило, наиболее интересные системы являются большими и сложными, а средства исследования действуют в ограниченных масштабах. Поэтому необходимые сведения о системе в целом исследователь должен извлекать из локальных данных, которые вместе взятые образуют глобальную информацию. Последняя, в свою очередь, подсказывает возможные дальнейшие точки приложения локальных средств исследования, ограничивает разнообразие локальных свойств, что в конечном счете приводит к новым данным опять на глобальном уровне.

Процесс изучения больших систем протекает во взаимодействии локального и глобального, поэтому его можно назвать локально-глобальным анализом, сокращенно ЛГ-анализом.

Из-за своей естественности такой подход используется давно, но в основном для изучения непрерывных, бесконечных систем. Классическими математическими примерами этого являются дифференциальное и интегральное исчисление, теория аналитических функций, дифференциальная геометрия. Однако ЛГ-анализ строения дискретных систем находится лишь в стадии становления, и настоящая работа является попыткой продвинуться в его развитии средствами теории графов.

Для многих систем (электрические и транспортные сети, многомашинные управляющие комплексы) существенно, что между некоторыми их элементами имеется непосредственная связь, между другими такой связи нет, но представляет интерес рассмотрение для последних опосредованной связи, т.е. последовательности элементов, в которой непосредственно связан первый элемент со вторым, второй с третьим и т.д. Структуру связей такой системы удобно представить в виде графа и дальнейшие исследования вести с использованием аппарата теории графов. Граф является структурой в "чистом виде", и для успешной работы с реальными системами необходим опыт в исследовании свойств именно таких отвлеченных структур.

Последовательности, опосредующей связь непосредственно не связанных элементов, в графе соответствует цепь. Длина цепи является простейшей характеристикой связи между соединяемыми ею элементами. Связь можно характеризовать также общим числом цепей, соединяющих пару элементов. Помимо подобных количественных характеристик представляют интерес качественные – описание связи с помощью различных конфигураций цепей. Это позволяет охарактеризовать также одновременную связь более чем двух элементов. Строение системы, поддающееся такого рода описанию, назовем связностным строением, соответствующие свойства – связностными свойствами. Изучение связностных свойств графов с помощью ЛГ-анализа и является содержанием настоящей работы.

При ЛГ-анализе необходимо различать локальные и глобальные носители информации. Тривиальными локальными образованиями являются фиксированный элемент и пара смежных элементов. Однако эти образования ничего не говорят об особенностях строения конкретной системы. Поэтому в качестве первичного локального образования рассмотрим т.н. окрестность элемента - подсистему, образованную некоторым фиксированным элементом вместе со всеми элементами, смежными с ним, и с имеющимися между ними непосредственными связями исходной системы. Всю информацию о строении окрестности несут элементы, смежные с данным. Подсистему, образованную ими, назовем окружением этого элемента. Для графов аналогичным образом определяются понятия окрестности и окружения вершин. Окрестность и окружение являются основными локальными структурными единицами. На их рассмотрении и основан ЛГ-анализ связностного строения графов.

Окрестности и связностные свойства дискретных систем, представленных графами, непосредственно используются в задачах трассировки, возникающих при автоматическом проектировании электронных устройств, когда при различных локальных и глобальных ограничениях должны быть проведены металлизированные соединения между элементами электрических схем. Графы широко используются также в теории автоматов, теории логических схем и теории сетей из формальных нейронов. В их рамках возникают различные проблемы теории графов, в том числе относящиеся к ЛГ-анализу.

Примечательны в этой связи исследования Б.А.Трахтенброта. Ему вместе с А.А.Зыковым [15] принадлежит постановка одной из первых интересующих нас задач: какими свойствами должен обладать граф H, чтобы существовал граф G, окружения всех вершин которого изоморфны H. Помимо графа H, необходимо исследовать также граф G. Его главной характеристикой в этом случае является постоянство локального строения. Исследование таких графов - первая задача ЛГ-анализа связностного строения графов. Поэтому в настоящей работе она рассматривается сразу после подготовки необходимого общего аппарата.

Эта подготовка состоит в определении основных примененных методов изучения графов (§ I), средств описания их строения на различных уровнях локального и глобального, а также средств определения различных их классов (§ 2). Метод расширяющегося подграфа (§ I) и "обратный" ему метод разложения (§§ II,I2) лежат в основе большинства результатов настоящей работы. Они являются также основой для предполагаемых дальнейших разработок некоторых новых алгоритмов исследования графов. С этими методами связаны перспективы применения ЛГ-анализа связностного строения графов к реальным системам, в особенности к однородным вычислительным средам и многомашинным комплексам обработки информации. Применение указанных методов к отдельным вопросам теории графов уже дало интересные результаты: получено, например, новое доказательство теоремы Понтрягина-Куратовского о неплоских графах (§ I4).

В § 6 получены некоторые сведения о строении т.н. циклических графов, возникающих при абстрактном моделировании многостабильных триггеров. Циклические графы являются специальным видом графов с постоянным локальным строением (§§ 4, 5).

После изучения таких графов, следующим шагом является ослабление жестких ограничений локального строения, сохраняя постоянство лишь некоторых свойств (§ 7). В §§ 8-I0 исследованы локальные достаточные условия существования простых циклов всех длин в однородных графах, основанные на связности окружений вершин. Эти исследования являются примером применения метода расширяющегося подграфа и, в частности, дают новые достаточные условия для существования гамильтонова цикла.

Использование в качестве носителя локальной информации подграфов более общих, чем окрестность вершин, позволяет находить системы т.н. операций локального разложения (§ I2), служащих средством описания как отдельных графов, так и их классов. Для многих классов удается определить специальные их подклассы - т.н. ядра, к графам которых с помощью конечного числа операций локального разложения редуцируются все остальные графы этих классов. Основополагающим здесь является исследование однородных графов малых степеней (§ II). Наиболее интересными из рассмотренных являются классы всех однородных графов произвольной фиксированной степени и классы всех графов произвольной фиксированной связности (§ I3). До этого были известны результаты В.Татта [73] и В.К.Титова [28] о 3-связных графах и лишь в самое последнее время в литературе появляются работы, посвященные исследованию отдельных классов однородных графов с малыми степенями вершин и некоторыми фиксированными связностями.

Основные результаты настоящей работы отражены в публикациях, которые перечислены в конце общего списка литературы и снабжены специальной нумерацией, помеченной буквой "А". К материалам отдельных глав они относятся следующим образом: глава I - [AI,2], глава 2 - [A2,3], глава 3 - [A4,5,6], глава 4 - [A7].

Глава I

ОБЩИЙ АППАРАТ ЛГ-АНАЛИЗА СТРОЕНИЯ ГРАФОВ

§ I. Основные понятия.

Большинство используемых нами понятий теории графов и их наименований исходит из работ [2,4,15,23,29], но так как терминология теории графов строго не установлена, мы вынуждены начинать с разъяснения ее применения в настоящей работе.

Для конечного множества M обозначим через $|M|$ число его элементов. Пустое множество обозначим символом $\varnothing$. Положим $M\&M \underset{def}{=} \{(x,y) \mid x \neq y \; \& \; x,y \in M\}$, где (x,y) - неупорядоченная пара, образованная объектами x,y.

Определение I.I. Графом называется упорядоченная пара множеств $[V,E]$, где V - произвольное конечное множество, E - подмножество множества $V\&V$.

Это определение аналогично соответствующему определению из [2], данное понятие графа совпадает с понятием обыкновенного графа [I5].

Элементы множества V графа $[V,E]$ называются его вершинами, элементы множества E - его ребрами. Вершины, участвующие в образовании ребра, называются смежными вершинами. О самом ребре и произвольной из этих вершин скажем, что они инцидентны друг другу.

Для любых графов $[V_1,E_1]$, $[V_2,E_2]$ свойство $V_1=V_2$, $E_1=E_2$ запишем выражением $[V_1,E_1]=[V_2,E_2]$. Если между вершинами множеств V_1 и V_2 существует взаимно однозначное соответствие, сохраняющее их смежность, то скажем, что эти графы изоморфны, и будем писать $[V_1, E_1] \sim [V_2, E_2]$.

Обычно графы обознач~~им~~ (ае) с помощью других выражений, чаще одной буквой. Если G некоторое обозначение графа $[V, E]$, то положим $G' = V, G'' = E$. Граф Λ , у которого $\Lambda' \underset{def}{=} \varnothing$, назовем пустым графом. (и, значит, $\Lambda'' = \varnothing$)

Если графы G и G_1 таковы, что $G_1' \subset G', G_1'' \subset G''$, то скажем, что граф G_1 является частью графа G . Часть G_1 графа G назовем его остовным графом, если $G_1' = G'$. Часть G_1 графа G назовем подграфом графа G , если любое ребро графа G , инцидентное двум вершинам графа G_1 , является также ребром последнего. Понятно, что любой подграф данного графа однозначно определяется множеством своих вершин. Поэтому естественно говорить о подграфе графа G , порожденном множеством вершин $M \subset G'$. Такой подграф обозначим через $G(M)$.

Подграф является максимальной по ребрам частью с фиксированным множеством вершин. Если фиксировать множество ребер, то естественно рассмотреть соответствующую минимальную по вершинам часть, которая также определяется однозначно.

Если для двух графов G_1, G_2 $G_1' = G_2', G_1'' \cap G_2'' = \varnothing$ и $G_1'' \cup G_2'' = G_1' \& G_1'$, то будем говорить, что каждый из них является дополнительным графом другого. Дополнительный граф графа G обозначим через $\overline{G}$. Граф с числом вершин n , содержащий все возможные ребра, назовем полным графом и обозначим через K_n.

Определение I.2. Цепью графа G называется такая последовательность его вершин $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, что $\forall i \in \{1,2,\ldots,n-1\} ((x_i, x_{i+1}) \in G'')$. При $x_1 = x_n$ и $n \geqslant 4$ цепь называется циклом. Вершины x_i $(i=1,2,\ldots,n)$ называются вершинами цепи, ребра (x_i, x_{i+1}) $(i=1,2,\ldots,n-1)$ – ребрами цепи. Цепь соединяет вершины x_1 и x_n.

Каждой цепи графа G соответствует минимальная часть последнего, порожденная множеством ее ребер. Мы не будем специально различать эту часть и саму цепь и обозначим их одним и тем же выражением.

Цепь, все вершины которой различны, называется простой цепью. Аналогично определяется простой цикл. Длиной цепи (цикла) называется число ее (его) ребер. Одна вершина порождает цепь длины 0. Простой цикл длины 3 называется также треугольником.

Граф, каждые две вершины которого соединены в нем некоторой цепью, называется связным графом. Каждый несвязный граф распадается на непересекающиеся связные подграфы, которые называются его связными компонентами.

Любые свойства изучаемого графа как единого образования будем считать глобальными, а локальными – такие свойства, которые полностью определяются некоторым его собственным связным подграфом.

Окружением вершины x графа G называется его подграф, порожденный всеми смежными с x вершинами. Окрестностью вершины x называется подграф, порожденный вершиной x и всеми вершинами ее окружения. Окружение и окрестность обозначим соответственно через $O_G(x)$ и $\tilde{O}_G(x)$. Если известно, в каком графе рассматриваются эти образования, то будем пользоваться упрощенными обозначениями $O(x)$ или $\tilde{O}(x)$. Последнее замечание относится также ко всем другим обозначениям, вводимым далее.

Использование окрестностей вершин позволяет определить специальные методы ЛГ-анализа строения графов. Допустим, что связный подграф D_1 графа G обладает некоторым данным свойством.

Пусть $D_1' \ni s$, $O'(s) \setminus D_1' \neq \emptyset$. Если подграф $D_2 \underset{def}{=} G(D_1' \cup A)$, где $A \subset O'(s) \setminus D_1'$, полученный расширением подграфа D_1, также обладает данным свойством, то и его, в свою очередь, можно подвергнуть подобному расширению и т.д.

Многие свойства, например связность, допускают многократное расширение подграфа указанным образом с сохранением этого свойства. Тем самым последовательное применение такого расширения, называемое нами методом расширяющегося подграфа, может использоваться как средство для алгоритмов или доказательств. Применяя его в алгоритмах, можно узнать, какой наибольший подграф данного графа обладает рассматриваемым свойством. Применением этого метода в доказательствах можно пытаться установить ~~доказать~~, что этим свойством обладает вся связная компонента данного графа.

Глава 3 настоящей работы дает пример использования этого метода для доказательства т.н. панцикличности. Введенное локальное расширение подграфа в различных вариантах применяется во многих других работах по теории графов (см. § 3). Иногда оно приводит к очень эффективным локально-действующим алгоритмам.

Указанный способ расширения можно обобщить, рассматривая вместо вершины s некоторое множество вершин $S \subset D_1'$, для множества A требуя, чтобы оно было подмножеством множества $(\bigcup_{s \in S} O'(s)) \setminus D_1'$.

С помощью обобщенного расширения определим расслоение связного графа, которое может быть использовано в качестве самостоятельного метода изучения строения графов. Пусть дан связный граф G и в нем выделена некоторая вершина x. Вершина x порождает подграф $D_0 = G(\{x\})$, который будем считать расслоенным. Множество $S_0 = \{x\}$ назовем слоем подграфа D_0. Допустим, что уже расслоен некоторый подграф $D_K (K \geqslant 0)$ данного графа и что множества $S_0, S_1, \ldots, S_K$ – его слои.

Рассмотрим расширение, где $S = S_K$, $A = (\bigcup_{s \in S_K} O'(s)) \setminus D_K'$. Обозначим последнее множество еще через S_{K+1} и положим $D_{K+1} = G(S_0 \cup S_1 \cup \ldots \cup S_{K+1})$. Подграф D_{K+1} также считаем расслоенным, со слоями $S_0, S_1, \ldots, S_K, S_{K+1}$. Так как данный граф связный, то этот процесс оборвется лишь при таком значении K, когда $D_K = G$, и тем самым для графа G будет получено особое семейство множеств $S_0, S_1, \ldots, S_K$, которые попарно не пересекаются, $\bigcup_{i=0}^{K} S_i = G'$, две вершины из различных множеств смежны только тогда, когда содержащие их множества (слои) следуют непосредственно один за другим, каждая вершина смежна с хотя бы одной вершиной предыдущего слоя. Заметим, что $S_1 = O^1(x)$, $D_1 = \tilde{O}(x)$.

§ 2. Средства описания графов.

2.I. Локальные и глобальные характеристики.

Особенности строения графов описываются с помощью различных характеристик, которые могут быть как числовыми, так и качественными, как локальными, так и глобальными. Наложение ограничений на характеристики конкретизирует предмет исследований, делает описание графа более детальным; такие ограничения будем называть просто локальными или глобальными ограничениями.

Примером локальной нечисловой характеристики является требование, чтобы окружение некоторой вершины изучаемого графа было изоморфно другому данному графу. Требуя, чтобы окружения всех вершин изучаемого графа были изоморфны одному и тому же графу, получаем смешанное локально-глобальное ограничение. Примерами чисто глобальных характеристик графа являются утверждения о его планарности, непланарности, существовании в нем специального остовного графа.

Степенью вершины x графа G называется число его вершин, смежных с вершиной x, обозначаемое через $\rho_G(x)$ ($\rho(x)$ - если нет необходимости специально указать граф G). Простейшим локальным ограничением является требование равенства степени некоторой вершины заданному натуральному числу p.

Граф, степени вершин которого равны одному и тому же числу p, назовем p-однородным графом. Вместо "3-однородный граф" будем говорить "кубический граф", а ~~, аналогично [23],~~ 0-однородный граф ~~будем~~ называть просто 0-графом. Если нас не ~~будет~~ интерес~~овать~~ует величина степени вершин, то используем понятие "однородный граф".

На основании числа вершин, смежных с некоторой вершиной, можно определить и другие локальные числа графов. Пусть $S \subset G'$. Тогда $\rho_{G,S}(x)$ будет означать число вершин из множества S, смежных с вершиной x графа G. Обычно ~~вос~~пользуемся упрощенным обозначением $\rho_S(x)$.

Очень интересным для двух смежных вершин x и y графа G является число $\rho_G(x,y) \underset{\mathrm{def}}{=} \rho_{O_G(y)}(x)$, которое назовем относительной степенью смежных вершин x и y. Очевидно, оно равно числу треугольников графа G, содержащих ребро (x,y). Имеют место также следующие соотношения

$$\rho(x,y) = \rho(y,x) = \rho_{O(x)}(y) \left(= \rho_{O'(x)}(y) = \rho_{O'(y)}(x)\right).$$

Для неоднородных графов простейшей локально-глобальной характеристикой служит набор (p_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$ степеней всех вершин, пронумерованных числами I,2,...,n. Он позволяет, например, вычислить такую глобальную характеристику данного графа G, как число $t + \bar{t}$, где t - количество треугольников графа G, а $\bar{t}$ - количество треугольников графа $\bar{G}$. Соответствующая формула приведена также, например, в работе [I8].

Действительно, пусть $\overline{p_i} = |G'| - 1 - p_i$. Тогда сумма $\sum_{i=1}^{n} p_i \overline{p_i}$ считает дважды каждое 3-вершинное множество вершин графа G , не порождающего треугольника ни в графе G , ни в графе $\overline{G}$.

Очевидно,

$$t + \overline{t} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i \overline{p_i} = C_n^3 \underset{def}{=} \frac{1}{6} n(n-1)(n-2),$$

Поэтому $t + \overline{t} = C_n^3 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i \overline{p_i}$.

Понятно, что ограничения степеней вершин ограничивают возможности строения всего графа, и при малых степенях одно это ограничение уже полностью ~~описывает~~ определяет строение графа. Так, все сведения, кроме числа вершин, содержит уже само название 0-графа. Простую структуру имеют также I-однородные и 2-однородные графы. Некоторый 0-граф всегда является остовным графом любого данного графа. Однако не для всех графов существуют остовный I-однородный граф (т.н. совершенное паросочетание) и остовный 2-однородный граф (т.н. фактороид); (связный фактороид называется также гамильтоновым циклом).

Расстоянием между вершинами x и y данного графа G называется длина наиболее короткой цепи, соединяющей эти вершины. Обозначим это число через $d_G(x,y)$ ($d(x,y)$). С его помощью можно определить две важные глобальные характеристики - диаметр и радиус графа. Диаметр $\mathfrak{D}(G) \underset{def}{=} \max_{x,y \in G'} d(x,y)$, радиус $\mathfrak{R}(G) \underset{def}{=} \min_{x \in G'} \max_{y \in G'} d(x,y)$. $\mathfrak{D}(G)+1$ равно наибольшему числу слоев в расслоениях графа G , а $\mathfrak{R}(G)+1$ — наименьшему их числу.

Локальной связностью различных вершин x и y графа G называется наибольшее число (различных) простых цепей, соединяющих их в этом графе и попарно не имеющих общих внутренних вершин (внутренне непересекающиеся (цепи)). Обозначим это число через $h_G(x,y)$ $(h(x,y))$. Числом связности (графа G) называется величина $h(G) \underset{def}{=} \min\limits_{x,y\in G',\, x\neq y} h(x,y)$. Если число связности данного графа равно h, то скажем, что данный граф h-связный.

Множество вершин, удаление которых из данного графа делает его несвязным, назовем разделяющим множеством. Локальной разделимостью для различных вершин x и y графа G называется наименьшее число вершин, удаление которых из графа G приводит к такому графу G_1, что $h_{G_1}(x,y)=0$. Обозначим это число через $g_G(x,y)$ $(g(x,y))$. Числом разделимости графа G называется величина $g(G) \underset{def}{=} \min\limits_{x,y\in G',\, x\neq y} g(x,y)$.

Будем считать, что полный граф имеет бесконечно большое число разделимости.

Если известно, что число связности данного графа не меньше h, то скажем, что данный граф не менее чем h-связный. Аналогично определяется не менее чем g-разделимый граф. Общеизвестно, что неполный не менее чем g-разделимый граф является также не менее чем g-связным, (что) и любой не менее чем h-связный граф является не менее чем h-разделимым.

Если некоторое разделяющее множество содержит ровно одну вершину, то эта вершина называется вершиной сочленения. Ребро, инцидентное двум вершинам сочленения, называется перешейком. Требование отсутствия в данном графе вершин сочленения или перешейков является глобальным ограничением.

2.2. Операции над графами.

Часто строение графа удается описать с помощью выделения некоторых подграфов или частей, которые между собою связаны регулярным, легко описываемым образом. Последнему соответствуют некоторые действия, с помощью которых из этих частей можно построить исследуемый граф. Иногда изучаемый граф можно получить из другого с помощью удаления подходящих частей. Действия обоих видов принадлежат к операциям над графами. Операции первого вида называются операциями построения, второго – операциями разложения. Произвольная операция может обладать как чертами построения, так и чертами разложения. Если операция затрагивает только некоторую собственную связную часть графа, то будем говорить, что она действует локально. Но само применение локальной операции обычно является глобальным актом, ибо нахождение соответствующего места воздействия может потребовать обзора всего графа. Существуют и чисто локальные операции, применяемые в любом месте графа. Примером является расщепление вершины, определяемое следующим образом. Удалим из данного графа G вершину x вместе с инцидентными ей ребрами, и добавим $\rho_G(x)$ новых вершин, каждую из которых с помощью ребра так соединим ровно с одной вершиной из множества $O'_G(x)$, чтобы каждой из последних также была смежна ровно одна новая вершина. Понятно, что расщепляя все вершины данного графа, получаем I-однородный граф, число ребер которого равно числу ребер исходного графа.

Далее определим некоторые простые операции построения, в качестве операндов которых рассмотрим лишь непересекающиеся графы. Дополнительно договоримся, что для упрощения записи, повторяющееся в одном и том же выражении обозначение фактически будет обозначать изоморфные, но различные и непересекающиеся графы.

Объединением графов G_1 и G_2 назовем граф $[G_1' \cup G_2', G_1'' \cup G_2'']$. ~~, который обозначим через~~ $G_1 \cup G_2$.

Следующая операция впервые была определена и исследована А.А.Зыковым [I4]. Произведением графов G_1 и G_2 называется граф, получаемый из графов G_1 и G_2 соединением ребром каждой вершины первого графа с каждой вершиной второго графа. Результат такого действия обозначим через $G_1 \cdot G_2$. Легко видеть, что для вершины $x \in G_1'$ $O_{G_1 \cdot G_2}(x) = O_{G_1}(x) \cdot G_2$. Просто доказывается также следующий факт. Если графы A, B_1, B_2 таковы, что $A \cdot B_1 \sim A \cdot B_2$, то $B_1 \sim B_2$.

Граф $\overline{K}_{n_1} \cdot \overline{K}_{n_2} \cdot \ldots \cdot \overline{K}_{n_m}$ называется полным многодольным графом и обозначается через $K_{n_1, n_2, \ldots, n_m}$ $(m \geqslant 2)$.

Пусть дан n-вершинный граф A и n попарно непересекающихся графов $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Пронумеруем числами I,2,...,n вершины графа A и добавим к графу $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$ все ребра тех и только тех произведений $B_i \cdot B_j$, соответствующая которым пара i-той и j-той вершин графа A является ребром последнего. Полученный таким образом граф назовем композицией и обозначим через $A[B_1, B_2, \dots, B_n]$. При этом всегда будем предполагать некоторую конкретную нумерацию вершин графа A. Понятно, что различным нумерациям могут соответствовать неизоморфные композиции. Если $B_1 \sim B_2 \sim \dots \sim B_n \sim B$, то будем писать просто $A[B]$. В таком виде композиция определена в [29].

Рассмотрим вопрос об изоморфизме графов A_1 и A_2, если известно, что для некоторого графа B $A_1[B] \sim A_2[B]$. В общем случае при $A_1[B_1, B_2, \dots, B_n] \sim A_2[B_1, B_2, \dots, B_n]$ может оказаться $A_1 \not\sim A_2$. Действительно, пусть A_1 и A_2 - изображенные на рис.I графы с приведенной там нумерацией вершин. Тогда $A_1[K_1, K_1, K_1, K_2] \sim A_2[K_1, K_1, K_1, K_2]$, в противоположность неизоморфности графов A_1 и A_2.

Однако имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.I. Если графы $A_1, A_2, B_1, B_2, \dots, B_n$ таковы, что $A_1[B_1, B_2, \dots, B_n] \sim A_2[B_1, B_2, \dots, B_n]$, $|B'_1| = |B'_2| = \dots = |B'_n|$ и все графы B_i ~~$(i=1,2,\dots,n)$~~ или их дополнительные графы $\bar{B}_i$ одновременно связны, то $A_1 \sim A_2$.

Доказательство. Определим над вершинами произвольного графа G предикат $S_G(x,y) \underset{def}{\Leftrightarrow} \tilde{O}_G(x) = \tilde{O}_G(y)$, утверждающий совпадение окрестностей двух вершин. Очевидно, он является предикатом типа эквивалентности, поэтому вершины графа G распадаются на классы эквивалентности. Непосредственно видны следующие свойства этих классов.

СВОЙСТВО I. Каждый класс порождает полный подграф графа G.

СВОЙСТВО 2. Если вершина некоторого класса смежна с вершиной другого класса, то она смежна со всеми вершинами второго класса.

Эти свойства означают, что граф G является композицией, т.е. $G \sim G_0[K_{n_1}, K_{n_2}, \ldots, K_{n_t}]$, где G_0 - некоторый граф, а K_{n_i} $(i=1,2,\ldots,t)$ - полные подграфы, порожденные некоторым образом пронумерованными классами вершин графа G. Понятно, что каждый класс вершин графа G_0, порожденный в нем предикатом S_{G_0}, содержит ровно одну вершину. Заметим также, что обычно имеет место изоморфизм $G \sim G_0$, так как далеко не все графы являются нетривиальными композициями.

Замечание [illegible] неточное и в доказательстве излишне

Пусть $G \sim A_1[B_1, B_2, \ldots, B_n]$ и, согласно данному, $G \sim A_2[B_1, B_2, \ldots, B_n]$. При первом изоморфизме вершины графа G распадаются на множества $B_{1,1}, B_{1,2}, \ldots, B_{1,n}$, которые соответствуют графам $B_1, B_2, \ldots, B_n$ в первой композиции; при втором изоморфизме соответственно получаются множества $B_{2,1}, B_{2,2}, \ldots, B_{2,n}$. Этим множествам взаимно однозначно соответствуют вершины графов A_1 и A_2. Обозначим через $v_i(x)$ $(i=1,2)$ вершину графа A_i, соответствующую тому из множеств $B_{i,j}$ $(j=1,2,\ldots,n)$, которое содержит вершину x графа G.

Предположим сначала, что все графы B_j связны. Докажем, что для любых вершин x и y графа G

$$S_{A_1}(v_1(x), v_1(y)) \Leftrightarrow S_{A_2}(v_2(x), v_2(y)).$$

Ввиду симметрии достаточно доказать импликацию в одну сторону. Поэтому, пусть справедливо утверждение $S_{A_1}(v_1(x), v_1(y))$.

Легко видеть, что для произвольных вершин x и y из различных множеств $B_{i,j}$ $(v_i(x) \neq v_i(y))$ имеют место соотношения:

$$(v_i(x), v_i(y)) \in A_i'' \Leftrightarrow (x,y) \in G'', \qquad (*)$$

$$S_{A_i}(v_i(x), v_i(y)) \Rightarrow (v_i(x), v_i(y)) \in A_i''. \qquad (**)$$

Если $v_2(x) = v_2(y)$, то утверждение $S_{A_2}(v_2(x), v_2(y))$ справедливо тривиальным образом. Поэтому рассмотрим случай, когда $v_2(x) \neq v_2(y)$. Необходимо доказать, что вершины $v_2(x)$ и $v_2(y)$ смежны в графе A_2 и любая отличная от них вершина графа A_2, которая смежна в нем с вершиной $v_2(x)$, смежна также с вершиной $v_2(y)$.

Докажем второе утверждение. Рассматриваемой третьей вершиной графа A_2 является некоторая вершина $v_2(z)$, и, по данному, $(v_2(x), v_2(z)) \in A_2''$. Согласно $(*)$, $(x,z) \in G''$, что равносильно

$$v_1(x) = v_1(z) \quad \vee \quad (v_1(x), v_1(z)) \in A_1''.$$

Поэтому, если $v_1(z) \neq v_1(y)$, то из-за $S_{A_1}(v_1(x), v_1(y))$ в графе A_1 смежны вершины $v_1(z)$ и $v_1(y)$, что после двухкратного использования $(*)$ дает $(v_2(z), v_2(y)) \in A_2''$. Пусть теперь $v_1(z) = v_1(y)$. Так как $v_2(y) \neq v_2(z)$, то в графе G должна существовать такая вершина u, что $v_2(u) = v_2(z)$, а $v_1(u) \neq v_1(z)$. Действительно, если для всех вершин u со свойством $v_2(u) = v_2(z)$ имело бы место совпадение $v_1(u) = v_1(y)$, то ввиду равенства чисел вершин графов B_j это означало бы совпадение множеств, соответствующих $v_2(z)$ и $v_1(y)$, а так как второе множество содержит вершину y, то, вопреки предположению, должно было быть $v_2(z)=v_2(y)$. Заменяя вершину z вершиной u, приходим к предыдущему случаю.

Для доказательства существования ребра $(v_2(x), v_2(y))$ в графе A_2 также необходимо рассмотреть два случая.

Если $v_1(x) \neq v_1(y)$, то требуемое свойство ~~следует~~ получается после непосредственного применения соотношения (✻✻) с последующим двухкратным применением (✻). Если $v_1(x) = v_1(y)$, то пусть $v_1(x)$ соответствует множество $B_{1,k}$, а $v_2(x)$ и $v_2(y)$ — множества $B_{2,\ell}$ и $B_{2,m}$. Так как $B_{2,\ell} \cap B_{2,m} = \varnothing$, $x,y \in B_{1,k}$, $x \in B_{2,\ell}$, $y \in B_{2,m}$, $|B_{2,m}| = |B_{1,k}|$, то множества $B_{2,m} \cap B_{1,k}$ и $B_{2,m} \setminus B_{1,k}$ не пусты. При этом $y \in B_{2,m} \cap B_{1,k}$. Из-за связности графа B_m, в графе G существует ребро, соединяющее некоторую вершину y_1 первого множества с некоторой вершиной y_2 второго множества. Так как $y_1 \in B_{1,k}$, то, согласно определению композиции, вершина x также смежна с вершиной y_2, откуда ~~при помощи~~ ввиду (✻) непосредственно следует смежность в графе A_2 вершин $v_2(x)$ и $v_2(y_2) = v_2(y)$.

Доказательство эквивалентности утверждений $S_{A_1}(v_1(x), v_1(y))$ и $S_{A_2}(v_2(x), v_2(y))$ завершено.

Так как, очевидно, предикат $S_{A_i}(v_i(x), v_i(y))$ $(i=1,2)$ является предикатом типа эквивалентности, то множество вершин графа G распадается на классы эквивалентности, каждый из которых содержит целые множества $B_{i,j}$. Кроме того, если произвольная вершина некоторого класса смежна с хотя бы одной вершиной другого класса, то она смежна со всеми вершинами второго класса, что следует из определения композиции, соотношения (*) и свойства 2 предиката S_{A_i} в графе A_i. Таким образом, граф G можно представить в виде другой композиции, т.е. $G \sim G_1[L_1, L_2, \ldots, L_s]$, где $L_p (p=1,2,\ldots,s)$ - подграфы графа G, порожденные вершинами классов эквивалентности предиката $S_{A_i}(v_i(x), v_i(y))$.

Тем множествам $B_{i,j}$, которые являются подмножествами одного и того же множества L'_p, соответствует в графе A_i класс эквивалентности предиката S_{A_i}. Порожденный вершинами этого класса подграф графа A_i, согласно свойству I, является полным графом, причем с числом вершин $q(p) = \frac{1}{n_1}|L'_p|$ $(n_1 = |B_{i,j}|)$. Поэтому граф A_i представим в виде композиции $G_1[K_{q(1)}, K_{q(2)}, \ldots, K_{q(s)}]$. Так как последнее выражение не зависит от i, то ~~разумеется~~ $A_1 \sim A_2$, что и требовалось доказать.

Если связными являются все графы $\overline{B}_1, \overline{B}_2, \ldots, \overline{B}_n$, то доказываемое утверждение получается очевидным образом после рассмотрения дополнительных графов композиций.

Теорема 2.I доказана.

Следствие. Если графы A_1, A_2 и B таковы, что $A_1[B] \sim A_2[B]$, то $A_1 \sim A_2$.

В заключение параграфа приведем два примера использования простого соотношения между окрестностью и окружением произвольного графа: $\tilde{O}(x) \sim K_1 \cdot O(x)$.

Обозначим через $n_G(B)$ число изоморфных B различных подграфов графа G. Найдем формулу, позволяющую вычислить число $n_G(K_n \cdot A)$, где A – некоторый граф. Если окружение вершины x графа G содержит подграф, изоморфный $K_{n-1} \cdot A$, то x вместе с этим графом порождает рассматриваемый подграф. С другой стороны, любой изоморфный $K_n \cdot A$ подграф графа G порожден подобным образом, при этом вершину x можно выбрать n различными способами. Поэтому, при переборе подграфов вида $K_{n-1} \cdot A$ в окружениях всех вершин, каждый из считаемых подграфов будет выбран n раз, что дает соотношение

$$n_G(K_n \cdot A) = \frac{1}{n} \sum_{x \in G'} n_{O(x)}(K_{n-1} \cdot A).$$

Специальными случаями этой формулы являются следующие:

$$n_G(K_2) = \frac{1}{2} \sum_{x \in G'} n_{O(x)}(K_1) = \frac{1}{2} \sum_{x \in G'} \rho(x),$$

$$n_G(K_3) = \frac{1}{3} \sum_{x \in G'} n_{O(x)}(K_2) = \frac{1}{3} \sum_{x \in G'} \frac{1}{2} \sum_{y \in O'(x)} \rho_{O(x)}(y) =$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{x \in G'} \sum_{y \in O'(x)} \rho(x, y).$$

Первая является известной формулой, связывающей количество ребер данного графа со степенями его вершин, вторая формула позволяет вычислить количество треугольников данного графа с помощью количества ребер окружений вершин или с помощью относительных степеней смежных вершин.

Другой характеристикой графа является т.н. плотность, определяемая как число вершин наибольшего полного подграфа. Так как $K_n \sim K_1 \cdot K_{n-1}$, то можно выразить плотность данного графа G, обозначаемую через $\kappa(G)$, через плотности окружений его вершин:

$$\kappa(G) = 1 + \max_{x \in G'} \kappa(O(x)).$$

Эта формула является рекуррентным соотношением, сводящим задачу нахождения плотности данного графа к нахождению плотностей меньших графов. На ее основе разработан алгоритм и составлена программа [AI] для нахождения плотности небольших графов (до 270 вершин) с помощью ЭВМ.

§ 3. ЛГ-анализ в других работах по теории графов.

Коротко рассмотрим отдельные примеры ЛГ-анализа строения графов, имеющиеся в литературе. Работы, непосредственно касающиеся наших исследований, упомянуты в остальных параграфах.

Многие авторы заметили, что при исследовании связностных свойств необходимо рассмотреть локальные образования графов. Особое значение имеют работы В.Мадера [20,58-62], в которых изучаются свойства наименьших разделяющих множеств, расположение цепей, определяющих локальную связность некоторых вершин, относительно их окрестностей, а также локальные свойства критических графов данной связности. К ним примыкают работы [40,49], а важные дополнения содержат [I2,30], в которых изучается расположение т.н. существенных ребер грагой данной связности. Специальное связностное строение имеют геодезические графы [23,37], в которых каждые две вершины соединены единственной кратчайшей цепью.

Интересным образом связностные свойства характеризуются с помощью циклов. Используя циклы, можно дать другое определение числу связности [56]. В работе [76] определяются локальные цикловые характеристики вершин. На их основе вводятся глобальные характеристики графа, например, наибольший цикл из найденных для каждой вершины проходящих через нее кратчайших циклов, исследуются соотношения между ними. Другой вид циклового строения имеют графы, содержащие простые циклы всех длин или всех длин, за исключением одной [54].

Общеизвестным связностным свойством является существование в некоторых графах гамильтонова или эйлерова цикла. Некоторые достаточные условия для их существования дают ограничения степеней вершин [23], набор которых в общем виде исследуется в [29]. Рассматриваются ограничения, налагаемые на этот набор планарностью [42]. Изучены также такие ограничения степеней вершин, когда одинаковыми могут быть лишь две из них [17,63], или ровно три из них [44]. В работах [31,35] при данном наборе степеней вершин изучаются графы с данной связностью. Подходящие ограничения степеней влекут связность окружений всех вершин графа [41,74].

Кроме степеней вершин изучаются локальные числа, аналогичные относительным степеням смежных вершин. Многие задачи приводят к рассмотрению количества цепей длины 2, соединяющих данные вершины [19,26,38,52]. Степени вершин и относительные степени смежных вершин позволяют описать еще более специфические локальные числа [64]. В работе [25] для перечисления всех 10-вершинных 4-однородных графов помимо относительных степеней смежных вершин используется также количество ребер в окружении вершины.

Изучение особых локальных чисел для ребер и специальных подграфов, построенных на основании окрестностей вершин, дает возможность написать рекуррентное соотношение для количества всех простых циклов длины 4 [33]. Эти исследования аналогичны рассмотренному А.А.Зыковым [15] подсчету различных других чисел на основании локальных данных.

Применяются также качественные локальные характеристики. Их использование также дает достаточное условие для существования гамильтонова цикла [48]. Работа [67] посвящена изучению графов, в которых не совпадают окружения несмежных вершин. Эти исследования продолжены в [47]. Более непосредственно окружения вершин используются в работе [27], где из них извлекается информация о принадлежности данной вершины к т.н. наибольшему внутренне устойчивому множеству. В работе [66] изучаются графы, окружения всех вершин которых содержат гамильтонов цикл. Другой автор [55] связывает это свойство с планарностью, замечая, что им обладает триангуляция плоскости. Работа [65] посвящена изучению полных подграфов в окрестностях вершин и выяснению возможности образования из них некоторого покрытия всего графа.

Покрытие графа строится также из окрестностей вершин, которые служат источником информации для работы специального локального алгоритма [8,9]. В работе [24] рассмотрен другой локально действующий алгоритм, предназначенный для постепенного увеличения цепей и циклов. Близкая задача решается с помощью алгоритма [21], локальные шаги которого состоят в замене ребра парой других ребер. Такая задача возникает при трассировке электрических соединений. Для осуществления трассировки имеется также классический алгоритм Ли, рассмотренный, например, в [22]. Его особенностью является т.н. "распространение волн" - процесс, аналогичный обобщенному расширению подграфа. Похожий процесс предлагает [3] при моделировании графа электронной однородной средой. Протекание таких процессов может быть облегчено, если рассматриваемое свойство наследственное [51], т.е. им обладает каждый подграф данного графа. Однако для изучения обычных свойств требуются более усложненные алгоритмы.

А.А.Зыковым [15] рассмотрены различные глобальные алгоритмы, основанные на использовании булевой алгебры. Но, например, для нахождения т.н. клик выгоднее пользоваться алгоритмом [16], который в основном работает локально и фактически использует метод расширяющегося подграфа. Авторы работ [32,53,69] в качестве локальных шагов используют т.н. поиск первого порядка, который позволяет эффективно решать проблему изоморфизма планарных графов, выделения 3-связных компонент, установления планарности.

По-другому вопрос выяснения планарности данного графа решен в [39]. Основным средством там является результат В.Татта [73] о строении 3-связных графов, которое полностью описывается в терминах операций над графами. Операции являются также самостоятельным объектом исследования. В работе [68] изучается т.н. X-соединение графов (эквивалент композиции), для других операций исследуется планарность результирующих графов [50]. Рассматриваются различные операции умножения и изучаются графы, не являющиеся произведениями (см., например, [43]).

Глава 2.

ГРАФЫ, ОКРУЖЕНИЯ ВСЕХ ВЕРШИН КОТОРЫХ ИЗОМОРФНЫ ОДНОМУ И ТОМУ ЖЕ ГРАФУ

§ 4. Общие свойства, примеры.

Как известно [10,15], Б.А.Трахтенброт и А.А.Зыков сформулировали некоторые проблемы о графах, в которых окружения всех вершин изоморфны одному и тому же графу. Некоторые вопросы строения таких графов рассматривались уже в [15], а решение одной частной проблемы дала С.Я.Агакишиева [1]. Наиболее глубокие результаты здесь получены В.К.Булитко, которые отражены в его диссертационной работе [5] и в публикациях [6,7]. Основной целью последнего автора явилось доказательство алгоритмической неразрешимости проблемы существования графа, окружения всех вершин которого изоморфны данному графу. Специально изучались различные виды строения окружений, но относительно всего графа рассматривались лишь вопросы существования, конечности и единственности, без особого исследования других свойств его глобального строения.

Было бы заманчивым показать, что данное локальное ограничение влечет за собой ограничение возможностей глобального строения. Однако непосредственно выясняется, что в самом общем случае это не так. Действительно, рассмотрим произвольный p-однородный граф и подвергнем его следующему преобразованию. Расщепим (§ 2) все его вершины, и каждые две новые вершины, соответствующие одной и той же вершине исходного графа, соединим ребром. Другими словами, каждую вершину исходного графа мы определенным образом заменяем другим графом, который изоморфен полному графу K_p. Понятно, что полученный граф также p-однородный, но окружения всех его вершин изоморфны графу $K_{p-1} \cup K_1$. Легко видеть, что все такие графы могут быть построены описанным способом, исходя из некоторого, в общем случае, мультиграфа без петель, все вершины которого инцидентны p ребрам. Очевидно, что все они в некотором смысле сохраняют черты глобального строения исходного графа и что требование попарной изоморфности окружений всех вершин фактически не накладывает никаких ограничений на разнообразие глобальных свойств.

Эту мысль иллюстрирует еще такой пример. Пусть окружения всех вершин данного графа G изоморфны несвязному графу $H_1 \cup H_2$. Рассмотрим следующую операцию. Выберем две произвольные вершины $x, y \in G'$, расстояние между которыми в графе G не менее 3. Положим $O(x) = H_{1,x} \cup H_{2,x}$, $O(y) = H_{1,y} \cup H_{2,y}$, где $H_{1,x} \sim H_{1,y} \sim H_1$ и $H_{2,x} \sim H_{2,y} \sim H_2$. Удалим все ребра графа G, соединяющие вершину x с вершинами графа $H_{2,x}$ и вершину y с вершинами графа $H_{2,y}$, и соединим с помощью новых ребер вершину x со всеми вершинами графа $H_{2,y}$, а вершину y — со всеми вершинами графа $H_{2,x}$. Понятно, что окружения всех вершин нового графа остались изоморфными графу $H_1 \cup H_2$, но некоторые его глобальные свойства изменились. Например, если данный граф был несвязным, то новый граф может стать уже связным, или, если данный граф был плоским, то новый граф может стать неплоским и т.д.

Указанным образом можно получить бесконечно много графов, окружения всех вершин которых изоморфны одному и тому же несвязному графу, и каждый из которых имеет специфическое глобальное строение. Простейшими графами такого рода являются однородные графы без треугольников.

Сказанное справедливо и в отношении графов со связными окружениями вершин. Действительно, пусть окружения всех вершин некоторого графа G изоморфны графу H. Рассмотрим композицию $G[K_n], n \geqslant 2$. Окружения всех вершин этого графа изоморфны графу $K_{n-1} \cdot H[K_n]$, т.е. произведению двух непустых графов. Такое произведение всегда связно, поэтому окружения всех вершин графа $G[K_n]$ изоморфны одному и тому же связному графу. Понятно, что разнообразие глобальных свойств, возможных у графа G, непосредственно выражается совокупностью возможных свойств графа $G[K_n]$. Соответствующие примеры можно генерировать на основе уже упомянутых однородных графов без треугольников.

С другой стороны, например, из [5], известно существование бесконечно многих таких графов H, которые не могут служить окружением вершин в графах рассматриваемого вида. Поэтому в имеющейся ситуации интерес представляют различные специальные случаи, рассмотрением которых мы займемся в следующих параграфах.

§ 5. Два особых случая.

Если дан граф H и требуется построить некоторый другой граф G, окружения всех вершин которого изоморфны H, то можем поступить следующим образом. Берем произвольную вершину $x \notin H'$ и соединяем ее ребрами со всеми вершинами графа H, т.е. рассматриваем граф, изоморфный графу $K_1 \cdot H$. Если граф H полный, то полученный граф является искомым. В противном случае задача сводится к нахождению некоторого графа P с $P' \cap (\{x\} \cup H') = \emptyset$ и способа проведения ребер между вершинами графов P и H.

Рассмотрим случай простейшего возможного здесь глобального строения, когда известно, что $P \sim \overline{K}_{\ell-1} (\ell \geq 1)$. Очевидно, что тогда каждая вершина графа P в искомом графе G должна быть смежна со всеми вершинами графа H, т.е. $G \sim H \cdot \overline{K}_\ell$. Введенное глобальное ограничение порождает дополнительные локальные ограничения. Исследуем их связь в более общем виде, так, как это сделано в [A2].

Лемма 5.I. Если окружения всех вершин графа G изоморфны графу H и граф G является произведением непустых графов A_1 и A_2, то окружения всех вершин графа A_1 изоморфны некоторому графу H_1, а окружения всех вершин графа A_2 - некоторому графу H_2.

Доказательство. Пусть $H_{i,1}$ и $H_{i,2}$—окружения двух различных вершин графа A_i $(i=1,2)$. Согласно § 2, окружениями этих вершин в графе G будут графы $H_{i,1} \cdot A_j$ и $H_{i,2} \cdot A_j$ $(i \neq j)$, которые, по данному, изоморфны. Из этого следует (§ 2) изоморфизм графов $H_{i,1}$ и $H_{i,2}$, что и доказывает лемму.

Лемма 5.2. Если при условиях предыдущей леммы граф A_1 не является произведением двух непустых графов, то существует такой граф B, что $A_2 \sim A_1 \cdot B$.

Доказательство. По данному, $A_1 \cdot H_2 \sim A_2 \cdot H_1$. Это означает, что в графе $A_2 \cdot H_1$ имеется подграф A_0, изоморфный графу A_1, все вершины которого смежны с остальными вершинами графа $A_2 \cdot H_1$. Граф A_0 не может быть подграфом графа H_1, ибо последний содержит меньше вершин, а так как граф A_1 не является произведением непустых графов, то граф A_0 не может содержать вершин из графов H_1 и A_2 одновременно. Из этого следует, что A_0 подграф графа A_2. Обозначая через B подграф, порожденный остальными вершинами графа A_2, получаем $A_2 = A_0 \cdot B \sim A_1 \cdot B$, что и требовалось доказать.

Теорема 5.I. Если окружения всех вершин графа G изоморфны графу H и граф G является произведением непустых графов, то существуют такое n и такие графы G_0 и H_0, что $G \sim K_n[G_0]$, окружения всех вершин графа G_0 изоморфны графу H_0 и граф G_0 не является произведением непустых графов.

Доказательство. Так как граф G является произведением непустых графов, то можем полагать, что $G \sim G_0 \cdot G_1$, причем граф G_0 не является таким произведением. Из леммы 5.I следует, что окружения всех вершин графа G_0 изоморфны некоторому графу H_0, а окружения всех вершин графа G_1 — некоторому графу H_1. Из леммы 5.2 следует, что граф G_1 является произведением и один из множителей изоморфен G_0, т.е. $G_1 \sim G_0 \cdot G_2$. Таким образом, $G \sim G_0 \cdot G_0 \cdot G_2$. Если граф G_2 пустой, то, очевидно, $G \sim K_2[G_0]$ и теорема доказана, в противном случае аналогичным суждением можно получить, что $G_2 \sim G_0 \cdot G_3$ и $G \sim G_0 \cdot G_0 \cdot G_0 \cdot G_3$. Из-за конечности числа вершин графа G этот процесс должен оборваться получением результата $G \sim G_0 \cdot G_0 \cdot \ldots \cdot G_0$, что при соответствующем n можно записать как $G \sim K_n[G_0]$. Теорема 5.I доказана.

С помощью этой теоремы можно полностью описать строение вышерассмотренных графов вида $H \cdot \overline{K}_\ell (\ell \geq 1)$, окружения всех вершин которых изоморфны графу H. Так как граф $\overline{K}_\ell$ не является произведением непустых графов, то исследуемый граф можно представить в виде $K_n[\overline{K}_\ell]$, что является n-дольным полным графом $K_{\ell,\ell,\ldots,\ell}$.

Далее исследуем строение графа G, окружения всех вершин которого изоморфны графу H, содержащему ν таких вершин, которые смежны со всеми остальными его вершинами. Эти вершины назовем звездами графа H.

Теорема 5.2. Если окружения всех вершин графа G изоморфны графу H, содержащему ν звезд ($\nu \geq 0$), то существуют такие графы G_0 и H_0, что $G \sim G_0[K_{\nu+1}]$. Окружения всех вершин графа G_0 изоморфны графу H_0, граф H_0 не содержит звезд.

Доказательство. В отличие от доказательства этого факта, проведенного в [A2], воспользуемся более общими результатами § 2. Рассмотрим над вершинами произвольного графа предикат $Z(x,y)$, являющийся истинным тогда и только тогда, когда вершина y является звездой в окрестности вершины x. Легко доказать, что в однородном графе $Z(x,y)$ равносильно утверждению, что окрестности вершин x и y совпадают, т.е. предикату $S(x,y)$ (§ 2). Так как данный граф G является однородным, то, согласно свойствам предиката $S_G(x,y)$, он является некоторой композицией, т.е. $G \sim G_0[K_{n_1}, K_{n_2}, \dots, K_{n_t}]$. В нашем случае, K_{n_i} $(i=1,2,\dots,t)$ —полные подграфы, порожденные классами эквивалентных вершин-звезд окрестностей вершин графа G.

Понятно, что эквивалентные звезды являются звездами окрестности одной и той же вершины. Поэтому каждый класс содержит все звезды некоторой окрестности. Так как окрестность любой вершины содержит на одну звезду больше, чем ее окружение, а окружения всех вершин данного графа содержит ν звезд, то каждый из рассматриваемых классов содержит $\nu+1$ вершину. Таким образом, $G \sim G_0[K_{\nu+1}]$.

Окружения двух различных вершин разных классов изоморфны графам $K_\nu \cdot H_0[K_{\nu+1}]$ и $K_\nu \cdot H_1[K_{\nu+1}]$ соответственно, где H_0 и H_1 окружения тех вершин графа G_0 , которые соответствуют этим классам. Согласно результатам § 2, $H_0 \sim H_1$. Граф H_0 не содержит звезд, ибо в противном случае граф $K_\nu \cdot H_0[K_{\nu+1}]$ содержал бы более ν звезд. Теорема 5.2 доказана.

Следствие. Для колеса Татта W_n ([29], $W_n \underset{def}{\sim} K_1 \cdot C_n$, где C_n - простой цикл длины n) при $n \geqslant 4$ не существует такого графа, окружения всех вершин которого изоморфны W_n.

Доказательство. При $n \geqslant 4$ граф W_n содержит одну единственную звезду. Поэтому для существования ~~возможности построения~~ графа, окружения всех вершин которого изоморфны ~~ему~~ W_n, ~~он~~ последний должен быть представим в виде $K_1 \cdot H_0[K_2]$. Но ни один простой цикл не является композицией вида $H_0[K_2]$.

Следствие доказано.

§ 6. Циклические графы.

6.I. Определение циклических графов.

Среди графов, окружения всех вершин которых изоморфны одному и тому же графу, особое положение занимают вершинно-симметрические графы [29]. Граф называется вершинно-симметрическим, если его группа автоморфизмов транзитивна на множестве его вершин, т.е. для каждой пары вершин существует автоморфизм, переводящий одну в другую. Из этого определения непосредственно следует, что любые два подграфа вершинно-симметрического графа, расположенные соответственно идентично относительно некоторых его вершин, изоморфны друг другу. Так, попарно изоморфными оказываются окружения всех вершин. Хотя последнее свойство не является особо интересным с точки зрения самих вершинно-симметрических графов, оно является иллюстрацией того, как сильное глобальное ограничение порождает сильное локальное ограничение. С другой стороны, если для некоторых целей необходимо генерировать множества графов, окружения всех вершин которых изоморфны одному и тому же графу, можно воспользоваться именно вершинно-симметрическими графами.

(нечетко)

В таком свете особый интерес заслуживают циклические графы. Граф называется циклическим, если при некоторой нумерации его вершин числами 0,I,2,...,$n-1$, его группа автоморфизмов содержит циклическую подстановку $\pi=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & \dots & n-1\\ 1 & 2 & 3 & \dots & 0\end{pmatrix}$. Циклические графы генерируются чрезвычайно просто с помощью циклического сдвига первой строки матрицы смежности [46]. Кроме того, циклические графы представляют самостоятельный интерес в вычислительной технике, так как с их помощью описывается строение и функционирование т.н. многостабильных триггеров [13].

Мы не будем накладывать специальных локальных ограничений и рассмотрим такие связностные свойства циклических графов, которые вытекают из определения этих графов, имеющего глобальный характер. Некоторые другие свойства циклических графов рассматривались в работах [45,46,72].

Для каждого циклического графа предположим, что его вершины пронумерованы числами 0,1,2,...,$n-1$ таким образом, что подстановке π соответствует его автоморфизм. Вместо выражения "вершина с номером x" иногда будем говорить просто о вершине x. Указанную нумерацию назовем правильной.

Основой генерирования циклических графов является следующее, непосредственно доказываемое свойство.

Свойство 0. Если в циклическом графе с числом вершин n и правильной их нумерацией существует ребро (x,y), то для любого целого k в нем существует также ребро

$$((x+k)(\mathrm{mod}\ n),(y+k)(\mathrm{mod}\ n)).$$

Это свойство позволяет вычислить номера всех соседей произвольной вершины, если даны номера всех вершин, смежных с вершиной 0.

Основой описания строения циклического графа является следующее локальное образование.

Определение 6.1. Правильным подграфом называется такой подграф циклического графа, который при фиксированных j,k порожден всеми вершинами с номерами вида $(j+ik)(\mathrm{mod}\ n)$.

Свойство I. Правильный подграф циклического графа с правильной нумерацией вершин также является циклическим графом.

Свойство 2. Каждая связная компонента циклического графа с правильной нумерацией вершин является его правильным подграфом, все эти компоненты изоморфны друг другу.

Свойства I, 2 непосредственно следуют из определения циклического графа.

Пусть дан циклический граф G с числом вершин n и с правильной их нумерацией. Двухместный предикат на множестве G'', определяемый формулой

$$\exists k\,((x_2,y_2)=(\pi^k(x_1),\pi^k(y_1))),$$

где (x_1,y_1) и (x_2,y_2) - ребра графа G, является предикатом типа эквивалентности, и все ребра графа G распадаются на классы эквивалентности. Обозначим через $F_1, F_2, \dots, F_m$ минимальные части графа G, порожденные ребрами этих классов. Тогда $G''=\bigcup_{i=1}^{m} F_i''$, $F_i''\cap F_j''=\varnothing$ при $i\neq j$.

Используя свойства I, 2, непосредственно получаем следующие свойства графов F_i.

Свойство 3. Если $(0,\frac{n}{2})\notin F_i''$, то F_i является фактороидом графа G, если $(0,\frac{n}{2})\in F_i''$, то F_i - паросочетание графа G.

Свойство 4. Граф $G_1=[G', G''\setminus F_i'']$ является циклическим графом с той же нумерацией вершин, что у графа G.

6.2. Гамильтонов цикл. Локальная связность.

Теорема 6.I. В связном циклическом графе с числом вершин $n\geqslant 3$ существует гамильтонов цикл.

Доказательство проведем индукцией по числу вершин.

Пусть во всех отличных от K_1, K_2 связных циклических графах с числом вершин не более n существует гамильтонов цикл, а G – такой связный циклический граф, что $|G'| = n+1$. Необходимо рассмотреть случай, когда при правильной нумерации вершин ни одна из частей $F_1, F_2, \dots, F_m$ не является гамильтоновым циклом графа G. Положим $G_0 = G$ и при $i \geqslant 1$ $G_i \underset{def}{=} [G', G''_{i-1} \setminus F_i'']$, если возможно, в качестве F_1 всегда выберем паросочетание графа G. Очевидно, в последовательности этих графов существует такой связный граф G_k, что G_{k+1} уже не связный. Согласно свойствам I, 2, 4 все связные компоненты графа G_{k+1} изоморфны некоторому связному циклическому графу A, такому, что $3 \leqslant |A'| \leqslant n$, и в котором по индуктивному предположению существует гамильтонов цикл.

Положим $t = |A'|$. Пусть $F''_{k+1} \ni (0, \ell)$, A_0 – одна из связных компонент графа G_{k+1}, $i_1, i_2, \dots, i_t$ – номера вершин графа A_0 в графе G и $(i_1, i_2, \dots, i_t, i_1)$ – гамильтонов цикл графа A_0.

Вершинам с номерами $i_\alpha + \beta\ell$ при фиксированном $\beta > 0$ и при $\alpha = 1, 2, \dots, t$ соответствует некоторая другая связная компонента графа G_{k+1}, которую обозначим через A_β, и $(i_1+\beta\ell, i_2+\beta\ell, \dots, i_t+\beta\ell, i_1+\beta\ell)$ – ее гамильтонов цикл. Так как граф G_k связный, то ребро $(0, \ell)$ не принадлежит ни одной из связных компонент графа G_{k+1}, а связывает некоторые две из них. Так как согласно свойству 0, смежными являются любые две вершины x и y при

$x-y=l \pmod n$, то существуют пары смежных вершин в соседних графах последовательности $A_0, A_1, A_2, \ldots$. Если графы этой последовательности не содержали бы все вершины графа G, то граф G_K был бы очевидно не связным. Поэтому существует такое наименьшее $s \geqslant 1$, что $\bigcup\limits_{\beta=0}^{s} A'_\beta = G'$.

Положим

$$D_\beta \underset{def}{=} \begin{cases} (i_2+\beta l, i_3+\beta l, \ldots, i_t+\beta l) & \text{если } \beta \text{ четно} \\ (i_t+\beta l, i_{t-1}+\beta l, \ldots, i_2+\beta l) & \text{если } \beta \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Если конечная вершина некоторой цепи P_1 смежна с начальной вершиной другой цепи P_2, то новую цепь, полученную естественным образом, соединяя цепи P_1 и P_2, обозначим через (P_1, P_2). Понятно, что в выражениях вида $((P_1, P_2), P_3)$ все внутренние скобки можно опускать.

Так как, очевидно, $(D_\beta, D_{\beta+1})$ является простой цепью графа G, то искомый гамильтонов цикл задается в следующем виде

$$(i_1, D_0, D_1, \ldots, D_s, i_1+sl, i_1+(s-1)l, \ldots, i_1+l, i_1).$$

Теорема 6.I доказана.

Далее выясним локальную связность смежных вершин циклического графа.

Теорема 6.2. Если данный циклический граф G является p-однородным графом, то количество внутренне непересекающихся простых цепей, соединяющих произвольные две его смежные вершины, равно p.

Доказательство. Без ограничения общности можем предположить, что при некоторой правильной нумерации вершин одна из рассматриваемых смежных вершин имеет номер 0, вторая ℓ, и $n=0 \pmod{\ell}$. Ребро $(0,\ell)$ принадлежит некоторой части F_i графа G. Так как $F_i'=G'$, то каждая вершина, смежная с вершиной 0, принадлежит некоторой связной компоненте графа F_i. Пусть сначала C - одна из таких компонент, которая не содержит вершину 0, а $t_1<t_2<\ldots<t_k<n$ - номера всех вершин, смежных с вершиной 0 и принадлежащих C. Тогда числа $t_j+\ell$, $j=1,2,\ldots,k$, равны $(\mathrm{mod}\ n)$ номерам всех вершин, смежных вершине ℓ и также принадлежащих C.

Граф C является либо элементарным циклом, либо ребром (свойство 3), поэтому для любых двух своих вершин x и y он определяет в графе G не более двух простых цепей. Обозначим через $D(x,y)$ ту из них, которая выходит из вершины x в направлении возрастания номеров вершин множества C' (при $x=y$ рассматриваем цепь, состоящую из одной вершины). Так как цепь $D(t_j, t_{(j+1)(\mathrm{mod}\ k)})$ $(j=1,2,\ldots,k)$ не содержит других вершин, смежных с 0, кроме своих конечных, а цепь $D(t_j+\ell, t_{(j+1)(\mathrm{mod}\ k)}+\ell)$ $(j=1,2,\ldots,k)$ — других вершин, смежных с ℓ, кроме конечных, и так как $t_j+\ell \in D'(t_j; t_{(j+1)(\mathrm{mod}\ k)})$, $t_{(j+1)(\mathrm{mod}\ k)} \in D'(t_j+\ell, t_{(j+1)(\mathrm{mod}\ k)}+\ell)$, то понятно, что цепь $D(t_j+\ell, t_{(j+1)(\mathrm{mod}\ k)})$ $(j=1,2,\ldots,k)$ не содержит других вершин, смежных вершине 0 или ℓ, кроме $t_j+\ell$ и $t_{(j+1)(\mathrm{mod}\ k)}$. Таким образом, цепи $(\ell, D(t_j+\ell, t_{(j+1)(\mathrm{mod}\ k)}), 0)$ $(j=1,2,\ldots,k)$ являются простыми, соединяют вершины 0 и ℓ и попарно не имеют общих внутренних вершин. Число этих цепей равно числу тех вершин из C', которые смежны с вершиной 0.

Если, однако, вершина 0 принадлежит графу C, то необходимые цепи строятся аналогичным образом с использованием тех же обозначений, лишь вырожденную запись $(\ell, D(0,\ell), 0)$, которая получается из $(\ell, D(t_k+\ell, t_1), 0)$, необходимо заменить просто обозначением ребра $(\ell, 0)$.

Рассматривая все связные компоненты части F_i, получаем, что число построенных внутренне непересекающихся цепей равно числу вершин, смежных с вершиной 0. Теорема 6.2 доказана.

Утверждения теорем 6.I и 6.2 не справедливы для произвольных графов, окружения всех вершин которых изоморфны одному и тому же графу. ~~Об~~ В этом можно легко убедиться, рассмотрев композицию $G[K_2]$, где G - кубический граф без треугольников, имеющий хотя бы одну вершину, инцидентную трем перешейкам. Гамильтонов цикл не (обязательно) существует даже в ~~любом~~ вершинно-симметрическом графе, что видно на примере графа Петерсена [29].

6.3. Разделимость.

Как известно (§ 2), связность неполного графа можно охарактеризовать его числом разделимости, то есть наименьшим числом вершин, удаление которых приводит к несвязному графу. В случае произвольных вершинно-симметрических графов это число оценено, например, в работах [II,57]. Мы добавим некоторые специальные факты, касающиеся циклических графов.

Пусть $H_1, H_2, \ldots$ - семейство всех подграфов неполного связного графа G, порожденных его наименьшими разделяющими множествами вершин. Если A_i - наименьшая связная компонента подграфа $G(G' \setminus H_i')\ (i=1,2,\ldots)$, то существует такое i_0, что $|A'_{i_0}| = \min_i |A'_i|$. Положим $H_{i_0} = H$, $A_{i_0} = A$. В работе [II] граф H считается порожденным "агрессивным множеством сочленения", в работе [57] графу A дано имя "наименьший член".

Теорема 6.3. Подграф A связного циклического графа G с правильной нумерацией вершин является его правильным подграфом с числом вершин меньшим степени вершин графа G.

Доказательство. В работе [A3] дана самостоятельная версия доказательства этой теоремы. Здесь мы поступим более экономично, ссылаясь на следующие факты, доказанные в [57].

Факт I. Для любого автоморфизма φ вершинно-симметрического графа G

$$\varphi(A') = A \vee \varphi(A') \cap A' = \varnothing.$$

Факт 2. Если G - вершинно-симметрический граф, то $|H'_i| = d \cdot |A'|$ и $d \geqslant 2$.

Рассмотрим такое ребро (a, b) графа G, что $a \in A'$, $b \in H'$. Существует такая степень t подстановки π, что $b = \pi^t(a)$ и тогда при подстановке π^t каждый образ и его оригинал смежны. Очевидно, $\pi^t(A') \cap H' \neq \varnothing$ и поэтому $\pi^t(A') \neq A'$. Тогда, согласно факту I, $\pi^t(A') \cap A' = \varnothing$ и $\forall x \in A' (\pi^t(x) \notin A')$, т.е. подграф A не содержит ни одного ребра вида $(x, \pi^t(x))$, которые все порождают некоторую часть F_i графа G. Это означает, что после удаления из данного графа всех ребер множества F_i'' подграф A останется связным и будет удалено также ребро (a, b), связывающее некоторую его вершину с некоторой вершиной подграфа H. Если подобные ребра еще остались, то их также можно удалить вместе со всеми ребрами соответствующей части F_j и это также не повлияет на связность подграфа A. Из этого следует, что после такого удаления всех ребер, связывающих подграф A с подграфом H, подграф A будет являться связной компонентой некоторого графа, который согласно свойству 4 является циклическим и с той же нумерацией вершин, что у графа G. Поэтому из свойства 2 заключаем, что A - правильный подграф графа G.

Из факта 2 следует, что $|A'|<|H'|$, а так как $|H'|$ не превосходит степени вершин данного графа, то $|A'|$ меньше этого числа. Теорема 6.3 доказана.

Следствие I. Если p - степень вершин связного циклического графа, p' - наибольшая степень вершин во всех его правильных подграфах с числом вершин меньше p, то число разделимости $g \geqslant p-p'$.

Доказательство. Если p_1 - степень вершин в подграфе A, то $p-p_1 \leqslant |H'|=g$. А так как $p' \geqslant p_1$, то $g \geqslant p-p'$.

Следствие 2. Если все части F_i циклического графа являются его гамильтоновыми циклами, то $g=p$.

Доказательство. В данном случае все правильные подграфы с числом вершин меньше p являются 0-графами, т.е. $p'=0$. Поэтому $g \geqslant p$ и, очевидно, должно быть $g=p$.

Следствие 3. Если число вершин циклического графа простое, то $g=p$.

Доказательство. В этом случае все части F_i данного циклического графа являются его гамильтоновыми циклами, и требуемое равенство следует из следствия 2.

Глава 3.

ОДНОРОДНЫЕ ГРАФЫ СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ ОКРУЖЕНИЯМИ ВЕРШИН

§ 7. Примеры локальных ограничений.

В предыдущей главе мы требовали, чтобы окружения всех вершин изучаемого графа были изоморфны одному и тому же графу. В таком случае все свойства окружений различных вершин оказались одинаковыми, что является очень сильным локальным ограничением. Теперь потребуем (чтобы были) общими лишь некоторые свойства окружений всех вершин, и изучим однородные графы со связными окружениями всех вершин.

Непосредственно доказывается следующее элементарное свойство: если окружения всех вершин данного графа не менее чем k-связны, то он является не менее, чем $(k+1)$-связным. Другие простые свойства таких графов рассмотрены в [41,75].

Теорема 7.1. Если окружения всех вершин неполного p-однородного связного графа не менее, чем g-разделимы и каждые две его смежные вершины соединены в нем не менее, чем ℓ простыми внутренне непересекающимися цепями, то данный граф не менее, чем $\left(\ell+1-\left[\frac{p-g}{2}\right]\right)$-разделимый.

Доказательство. Пусть g_1 - число разделимости рассматриваемого графа G, H_1 - разделяющее множество с числом вершин g_1, $x\in H_1$. Понятно, что множество $H \underset{\mathrm{def}}{=} O'(x)\cap H_1$ является разделяющим множеством графа $O(x)$, и, согласно данному, $|H| \geqslant g$.

Подграф $G(G' \setminus H_1)$ состоит из не менее, чем двух связных компонент. Среди них имеется такая, которая содержит наименьшее количество вершин, смежных с вершиной x. Пусть их число p_1, а y - одна из этих вершин. Очевидно, $p_1 \leqslant \left[\frac{p-g}{2}\right]$. Так как x и y соединены не менее, чем ℓ простыми внутренне непересекающимися цепями, то через вершины множества H должны проходить не менее $\ell - p_1$ из них. Таким образом, $g_1 = |H_1| \geqslant \ell - p_1 + 1 \geqslant \ell + 1 - \left[\frac{p-g}{2}\right]$. Теорема 7.I доказана.

Следствие I. Если каждые две смежные вершины связного p-однородного графа соединены в нем не менее, чем ℓ простыми внутренне непересекающимися цепями, то он не менее, чем $\left(\ell + 1 - \left[\frac{p}{2}\right]\right)$-разделимый.

Следствие 2. Если каждые две смежные вершины связного кубического графа соединены в нем не менее, чем ℓ простыми внутренне непересекающимися цепями, то он не менее, чем ℓ-разделимый.

Следствие 3. Если относительные степени всех пар смежных вершин связного p-однородного графа не меньше τ, то он не менее, чем $\left(\tau + 2 - \left[\frac{p}{2}\right]\right)$-разделимый.

В следующих параграфах рассмотрим связь между различными ограничениями относительных степеней смежных вершин и связностью окружений, а также вытекающие из этих специальных локальных ограничений свойства глобального строения соответствующего однородного графа.

§ 8. Панцикличность.

n -вершинный граф называется панциклическим [36], если в нем существуют простые циклы всех длин $3,4,\ldots,n$. Скажем, что вершина x - сосед вершины y по циклу C , если $C'' \ni (x,y)$.

Теорема 8.I. Если при $p \geqslant 11$ относительные степени любых двух смежных вершин связного p -однородного графа не меньше $p-4$, то для каждого не гамильтонова цикла этого графа существует такой треугольник, что одно его ребро является ребром этого цикла, а противоположная вершина этому циклу не принадлежит.

Доказательство. Пусть C - не гамильтонов цикл данного графа G , σ - такая вершина этого цикла, что $O'(\sigma)\setminus C' \neq \varnothing$. Положим $A = O'(\sigma)\setminus C'$, $B = (O'(\sigma) \cap C')\setminus \{a,b\}$, где a, b - соседи вершины σ по циклу C . Очевидно, $|A|+|B|+2=p$ и, поэтому $|B| = p-2-|A|$.

Необходимо рассмотреть случай, когда ни одна вершина множества A не смежна с вершинами a, b , ибо в противном случае нечего [redacted] больше доказывать. Пусть $x \in A$. Так как $\rho_A(x) \leqslant |A|-1$, и, по данному, $\rho_{O(\sigma)}(x) \geqslant p-4$, то $\rho_B(x) \geqslant p-4-(|A|-1) = p-3-|A|$. В свою очередь, $\rho_A(a)=0$, $\rho_{\{b\}}(a) \leqslant 1$, поэтому $\rho_B(a) \geqslant p-5$, и, аналогично, $\rho_B(b) \geqslant p-5$.

Легко доказать следующее комбинаторное неравенство. Пусть дано k подмножеств $M_1, M_2, \ldots, M_k$ конечного множества M . Тогда $\left|\bigcap_{i=1}^{k} M_i\right| \geqslant \sum_{i=1}^{k} |M_i| - (k-1)|M|$.

Оценим количество вершин множества B , одновременно смежных с вершинами a, b и x. Согласно приведенному неравенству, их число не меньше

$$\rho_B(x) + \rho_B(a) + \rho_B(b) - 2|B| \geqslant p - 3 - |A| + 2(p-5) -$$
$$- 2|B| = p - 9 + |A| \geqslant p - 9 + 1 \geqslant 3.$$

Таким образом, множество B содержит не менее ~~3-х~~ трех вершин с указанным свойством. Понятно, что одна из них отделена на цикле C от вершины σ двумя другими, и поэтому ее соседи по циклу C не могут совпадать с вершинами a и b. Обозначим эту вершину и ее соседей по циклу C через c, d, e соответственно, и рассмотрим подграф $O(c)$. Имеет место соотношение $O'(c) \supset \{d, e, a, b, x\}$. Так как $\rho_{O(c)}(x) \geqslant p-4$ и вершина x не смежна с вершинами a, b, то она должна быть смежна хотя бы с одной из вершин d, e. Если $G'' \ni (x, d)$, то (x, d, c, x) - искомый треугольник, если же $G'' \ni (x, e)$, то им является (x, e, c, x). Теорема 8.I доказана.

Так как относительные степени всех пар смежных вершин рассматриваемого графа больше 0, то в этом графе существует треугольник, и, очевидно, этот граф панциклический. Далее рассмотрим аналоги этого свойства для однородных графов других степеней.

Если C - простой цикл произвольного графа, а вершины $x, y, z \in C'$ таковы, что $x \neq z, y \neq z$, то цикл C определяет две простые цепи, соединяющие x и y. Одна из этих цепей не проходит через вершину z. Обозначим ее выражением $(x, \bar{z}, y)$. В общем случае запись вида $(\ldots, a, b, \bar{c}, d, e, \ldots)$ будет означать, что в рассматриваемой цепи имеется участок, определенный некоторым известным циклом, соединяющий его вершины b,d и не проходящий через вершину c.

Приведем 3 способа построения большего цикла на основании данного. Пусть C - простой цикл графа G.

Ситуация S_1. Существуют такие вершины $a,b \in C'$ и $c \in G' \setminus C'$, что $C'' \ni (a,b)$, $G'' \setminus C'' \ni (a,c),(b,c)$.

Ситуация S_2. Существуют такие вершины $a,b,c,d \in C'$ и $e \in G' \setminus C'$, что

$$C'' \ni (a,b),(c,d)$$
$$G'' \setminus C'' \ni (b,c),(a,e),(d,e)$$
$$a \in (b,\bar{d},c)'$$

Ситуация S_3. Существуют такие вершины $a,b,c,d,e \in C'$ и $f \in G' \setminus C'$, что

$$C'' \ni (a,b),(a,c),(d,e)$$
$$G'' \setminus C'' \ni (a,d),(a,f),(e,f),(b,c)$$
$$d \in (e,\bar{c},b)'$$

Легко видеть, что при всех этих ситуациях в графе G существует также простой цикл длины $|C'|+1$ (на рис.2 показан пунктиром).

Лемма 8.I. Если окружения всех вершин данного графа связны и содержат более одной вершины, то каждое его ребро является ребром некоторого треугольника.

Теорема 8.2. Связный 4-однородный граф со связными окружениями всех вершин панциклический.

Доказательство. Пусть граф G удовлетворяет условиям теоремы. В силу леммы 8.I, в нем существует треугольник. Рассмотрим произвольный простой не гамильтонов цикл C графа G и, аналогично теореме 8.I, докажем, что относительно этого цикла имеет место ситуация S_1, т.е. существует треугольник, одно ребро которого является также ребром цикла C, а противоположная вершина этому циклу не принадлежит. Из этого непосредственно будет следовать панцикличность данного графа.

Так как граф G связный, то некоторая вершина цикла C смежна с некоторой вершиной вне его. Пусть $G''\setminus C'' \ni (\sigma, x)$, $\sigma \in C'$, $x \notin C'$. Подграф $O(\sigma)$ содержит ровно 4 вершины, две из которых, обозначим их через a, b являются соседями вершины σ по циклу C. Далее необходимо рассмотреть случай, когда $G'' \not\ni (x,a), (x,b)$. Четвертую смежную с σ вершину обозначим через c. Если $c \notin C'$, то из связности графа $O(\sigma)$ непосредственно следует существование требуемого треугольника. Поэтому допустим, что $c \in C'$, и, понятно, $G'' \ni (x,c)$. Кроме вершин σ, c, с вершиной x смежны еще две вершины. Согласно связности графа $O(x)$, одна из них должна быть смежна или с вершиной σ, или с вершиной c. Очевидно, она является соседом по циклу для вершины σ или для вершины c. Этим обеспечено существование требуемого треугольника и тем самым доказана теорема 8.2.

Лемма 8.2. Если окружения всех вершин 5-однородного графа связны и треугольник (a,b,c,a) единственный, который содержит ребро (a,b), то ребра (b,c) и (c,a) являются ребрами по меньшей мере двух треугольников кажд~~ая~~ое.

Лемма очевидна.

Теорема 8.3. Связный 5-однородный граф со связными окружениями всех вершин панциклический.

Доказательство. Настоящая версия доказательства является продолжением исследований, проведенных в работах [А4, 5], посвященных доказательству существования гамильтонова цикла в однородном графе при этих же условиях.

Так как, согласно лемме 8.I, в данном графе существует треугольник, то достаточно доказать, что для каждого не гамильтонова простого цикла C в этом графе можно построить простой цикл длины $|C'|+1$. Если относительно цикла C имеет место некоторая из ситуаций S_1, S_2, S_3, то этим уже обеспечено существование такого цикла. Поэтому предположим, что для простого не гамильтонова цикла C данного графа G не имеет место ни одна из этих ситуаций. Покажем, что искомый цикл можно тогда построить некоторым другим образом.

Как обычно, $G'' \ni (\sigma, x), \sigma \in C', x \notin C'$; a, b - соседи вершины σ по циклу C. Вершина σ вне цикла C может иметь 3,2 или только одну смежную с ней вершину. Рассмотрим отдельно все три случая, предполагая, что, если некоторая ситуация рассмотрена раньше, то ни в текущем, ни в последующих случаях она не будет иметь место.

Случай I. Вне цикла C имеются три вершины, смежные с вершиной σ . Однако это невозможно, ибо, вопреки предположению, из связности графа $O(\sigma)$ следует ~~существование~~ наличие ситуации S_1.

Случай 2. Вне цикла C имеются две вершины x и y, смежные с вершиной σ.

Пусть $c \in C'$ – пятая смежная с σ вершина. Из связности графа $O(\sigma)$ и отсутствия ситуации S_1 следует, что вершина c является вершиной сочленения графа $O(\sigma)$. Поэтому без ограничения общности можем предположить, что $G'' \ni (x,c), (b,c)$. Рассмотрим возникающие здесь подслучаи.

2-I. $G'' \ni (x,y)$.

2-I-I. $(c,b) \in C''$ (рис.3).

Искомым является простой цикл $(\sigma, a, \bar{b}, c, x, \dot{y}, \sigma)$, так как его длина, очевидно, $|C'|+1$.

2-I-2. $(c,b) \notin C''$.

Чтобы не повторить только что рассмотренного случая, необходимо предположить, что вершина a также не является соседом вершины c по циклу C. Пусть f и g эти соседи и $f \in (c, \bar{\sigma}, a)'$ (рис.4).

Тогда $O'(c) = \{\sigma, x, b, f, g\}$. Из-за связности графа $O(c)$ вершина f должна быть смежна хотя бы с одной из вершин σ, x, b, g. Так как $\rho(\sigma) = 5$, то она не может быть смежна с вершиной σ, а так как отсутствуют ситуации S_1, S_2, S_3, то она не может быть смежна соответственно и с вершинами x, b, g. Случай 2-I-2 невозможен.

2-2. $G'' \not\ni (x,y)$.

Из-за связности графа $O(\sigma)$ и отсутствия ситуации S_1 обе вершины x, y должны быть смежны с вершиной c. Очевидно, треугольник (σ, c, x, σ) — единственный, содержащий ребро (σ, x), и ввиду симметричности вершин σ и c, он также единственный, содержащий ребро (x, c). Это противоречит лемме 8.2, поэтому случай 2-2 невозможен.

Случай 3. С вершиной σ вне цикла C смежна ровно одна вершина x.

Согласно лемме 8.I, ребро (σ, x) содержится в некотором треугольнике (σ, x, c, σ). Так как случай, когда с вершиной σ вне цикла C смежны 2 вершины, уже рассмотрен, то можем предположить, что вершина c и другие в аналогичных ситуациях принадлежат циклу C. Одно из ребер (σ, x), (c, x) согласно лемме 8.2, содержится еще в одном треугольнике. Пусть (σ, x) – это ребро, т.е. существует такая вершина $d \in C'$, что $G'' \ni (d, \sigma), (d, x)$ (рис.5). Так как нет ситуации S_1, то вершины c и d отличаются от соседей вершины σ по циклу C. Предположим для конкретности, что $c \in (b, \bar{\sigma}, d)'$, и докажем, что $C'' \ni (c, b), (d, a)$.

Действительно, если $C'' \not\ni (c, b), (d, a)$, то граф G не может вообще содержать ребер $(c, a), (c, b), (d, a), (d, b)$, в чем можно убедиться, рассуждая совершенно аналогично случаю 2-I-2, а отсутствие этих ребер нарушает связность графа $O(\sigma)$. Поэтому, пусть еще $C'' \not\ni (c, b)$, но $C'' \ni (d, a)$ (рис.5). Тогда в графе G из упомянутых ребер нет только $(c, a), (c, b)$. Так как нет ситуации S_2, то $G'' \not\ni (a, b)$, а так как граф $O(\sigma)$ связный, то $G'' \ni (b, d)$. Пусть e – второй сосед вершины d по циклу C. Так как отсутствует ситуация S_2, то $G'' \not\ni (e, a)$, а так как вершина a не смежна ни с одной из вершин b, x, e, то треугольник

(a, σ, d, a) — единственный, содержащий ребра (d, a), (a, σ). Это противоречит лемме 8.2. Поэтому должно быть $C'' \ni (c, b), (d, a)$ (рис.6).

Вершина x смежна еще с двумя вершинами, одна из которых из-за связности графа $O(x)$ должна быть смежна или с вершиной d, или с вершиной c. Пусть $G'' \ni (x, g), (c, g)$ и $g \in C'$. Аналогично предыдущему, кратчайшая цепь, соединяющая по циклу C вершины c и g, имеет ровно два ребра, которые обозначим через $(c, f), (f, g)$ (рис.6).

Согласно лемме 8.2, одно из ребер $(\sigma, b), (b, c)$ содержится по меньшей мере в двух треугольниках. Так как рассматриваемая конфигурация симметрична, то можем предположить, что это ребро (σ, b). Из-за отсутствия ситуаций S_1, S_2, $G'' \not\ni (b, x), (b, a)$. Поэтому должно быть $G'' \ni (b, d)$. Но тогда вершина e не может быть смежна с вершинами x, a, b, σ, ибо нет ситуаций S_1, S_2 и $\rho(\sigma)=5$. Это противоречит связности графа $O(d)$. Поэтому случай 3 невозможен. Тем самым завершено доказательство теоремы 8.3.

Следующий пример показывает, что связность окружений всех вершин существенна для доказанного свойства, и ее нельзя заменить вытекающим из нее более слабым требованием, чтобы каждая вершина окружения любой вершины была инцидентна некоторому его ребру, т.е. чтобы каждое ребро данного графа было ребром некоторого треугольника. Можно непосредственно проверить, что каждое ребро изображенного на рис.7 5-однородного графа содержится в некотором треугольнике. Однако, так как этот граф имеет вершину сочленения, он не может быть гамильтоновым, тем более панциклическим. На рис.8 показан аналогичный пример 4-однородного графа.

Другой пример опровергает гипотезу, что любой связный 6-однородный граф со связными окружениями всех вершин панциклический: на рис.9 изображен связный 6-однородный граф со связными окружениями всех вершин; если бы в нем существовал гамильтонов цикл, то ~~он~~ (последний) должен был проходить через ребра (I,2), (I,3), (I,4), что невозможно, так как каждая вершина простого цикла инцидентна только двум его ребрам.

В такой ситуации интерес представляет рассмотрение связного 6-однородного графа с не менее, чем 2-связными окружениями всех вершин. Следующая теорема показывает, что для панцикличности достаточно и более слабого локального ограничения.

Теорема 8.4. Если окружения всех вершин связного 6-однородного графа связны и относительные степени любых его двух смежных вершин не меньше 2, то данный граф панциклический.

Доказательство этой теоремы имеет много общего с доказательством теоремы 8.3, однако здесь должно рассматриваться большее количество случаев расположения окрестности некоторой вершины относительно содержащего ее простого не гамильтонова цикла. Особенно много различных подслучаев. Поэтому мы ссылаемся на работу [A5], в которой приведено доказательство существования гамильтонова цикла в связном 6-однородном графе при указанных условиях. Это доказательство фактически является доказательством панцикличности такого графа.

Следствие. Связный 6-однородный граф с не менее чем 2-связными окружениями всех вершин панциклический.

Согласно предыдущим теоремам, такое утверждение справедливо и для 4-и 5-однородных графов, но нам неизвестно, существует ли непанциклический 7-однородный связный граф с не менее чем 2-связными окружениями всех вершин. Условий теоремы 8.4 для панцикличности 7-однородного графа недостаточно, так как граф $G[K_2]$, где G - некоторый кубический граф без треугольников и с тремя перешейками, инцидентными одной вершине, не гамильтонов, хотя окружения всех его вершин изоморфны графу $K_1 \cdot (\overline{K_3}[K_2])$, который является связным и со степенями всех вершин не меньше 2.

Выше (теорема 8.I) мы установили, что панциклическим является связный p-однородный граф, у которого $p \geqslant 11$ и относительные степени любых двух смежных вершин не меньше $p-4$. Имеет место и более сильное утверждение.

Теорема 8.5. Если при $p \geqslant 7$ относительные степени любых двух смежных вершин p-однородного графа не меньше $p-4$, то этот граф панциклический.

Доказательство этой теоремы также может быть непосредственно извлечено из работы [A5], где при этих условиях доказывается существование гамильтонова цикла.

§ 9. Дерево треугольников.

В предыдущем параграфе мы фактически рассматривали свойство, более сильное, чем панцикличность, так как доказали, что для каждого простого негамильтонова цикла специального однородного графа можно построить такой простой цикл, который на единицу длиннее исходного и проходит через все или почти все его вершины. Более детальное ознакомление с подобными конструкциями позволяет выявить другие особенности глобального строения исследуемых графов.

Определение 9.1. Граф K_3 (треугольник) по определению является деревом треугольников, все его ребра называются внешними ребрами. Если граф T - дерево треугольников с множеством внешних ребер M, то деревом треугольников является также граф T_1, получаемый следующим образом. Берем произвольную вершину $x \notin T'$ и соединяем ее ребрами $(x,a),(x,b)$ с такими произвольными вершинами $a,b \in T'$, для которых $(a,b) \in M$. Внешними ребрами дерева треугольников T_1 называются ребра множества $M_1 \underset{def}{=} (M \setminus \{(a,b)\}) \cup \{(x,a),(x,b)\}$.

На рис.10 показан пример дерева треугольников.

Легко видеть, что любое дерево треугольников является плоским панциклическим графом, гамильтонов цикл которого порожден его внешними ребрами.

Каждому дереву треугольников можно сопоставить некоторое обычное дерево: соотнесем с каждым его треугольником новую вершину, и любые две из них соединим ребром тогда и только тогда, когда соответствующие им треугольники имеют общее ребро. Понятно, что построенный таким образом граф является деревом, и для любого дерева можно построить соответствующее ему дерево треугольников (однако не однозначно).

Определение 9.2. Дерево треугольников называется цепью треугольников, если цепью является соответствующее ему обычное дерево.

Лемма 9.I. Если дерево треугольников содержит более, чем 2 треугольника, то в нем существует вершина, степень которой не меньше 4.

Лемма очевидна.

Лемма 9.2. Если степени всех вершин дерева треугольников не превосходят 4, то за исключением графа, изображенного на рис.II, оно является цепью треугольников.

Лемма очевидна.

Покажем, что в каждом связном p-однородном графе с $2 \leqslant p \leqslant 5$ и со связными окружениями всех вершин существует остовное дерево треугольников.

При $p=2$ такой граф является простым циклом длины 3 и, тем самым, тривиальным деревом треугольников.

В случае 4-однородного графа со связными окружениями всех вершин мы показали (теорема 8.2), что для каждого его простого негамильтонова цикла существует такой треугольник, одна вершина которого этому циклу не принадлежит, а противоположное ребро ему принадлежит (в случае кубического графа это тривиально). Если рассматриваемый цикл является гамильтоновым циклом некоторого дерева треугольников, то это ребро - его внешнее ребро, и поэтому, построенный новый простой цикл является гамильтоновым циклом другого дерева треугольников. Так как построение последовательности простых циклов всех длин мы начинаем с треугольника, то, согласно вышесказанному, каждому циклу этой последовательности соответствует дерево треугольников с таким же числом вершин, и гамильтонову циклу рассматриваемого графа соответствует остовное дерево треугольников.

Согласно лемме 9.I, остовное дерево треугольников кубического графа не может содержать более 2 треугольников. Таким образом, связный кубический граф со связными окружениями всех вершин имеет не более 4 вершин, т.е. является графом K_4.

Установленное свойство позволяет полностью описать также строение рассматриваемых 4-однородных графов. Пусть G - такой граф, n - число его вершин.

При $n=5$, тривиально $G \sim K_5$.

При $n=6$, возможны два различных остовных дерева треугольников (рис.I2а,б).

Недостающие для графа G ребра добавляются единственным образом, и в обоих случаях получается граф $K_{2,2,2}$ (рис.I2в).

При $n \geqslant 7$, согласно лемме 9.2, рассматриваемое остовное дерево треугольников является цепью треугольников. Как и выше, недостающие ребра графа G добавляются единственным образом и получается замкнутая цепь треугольников. При четном n она является плоским графом, при нечетном n ее можно без пересечений ребер нарисовать на листе Мёбиуса. На рис. I3 приведены примеры соответствующих графов с большим числом вершин обеих четностей.

Таким образом, для каждого $n \geqslant 5$ существует единственный n-вершинный связный 4-однородный граф со связными окружениями всех вершин.

Следствие. Связный 4-однородный граф со связными окружениями всех вершин является циклическим графом.

Доказательство. Рассмотрим некоторый циклический граф G с $n \geqslant 5$ вершинами. Пусть при правильной их нумерации с вершиной 0 смежны вершины 1,2, $n-2$, $n-1$. Так как $n \geqslant 5$, то все они различны, и G является 4-однородным графом (на рис.14 приведен пример такого графа).

Непосредственно проверяется, что окружение вершины 0 графа G связно. Поэтому связны окружения всех его вершин. Согласно вышесказанному, существует единственный n -вершинный связный 4-однородный граф со связными окружениями всех вершин. Очевидно, им и является граф G. Следствие доказано.

Теорема 9.1. Связный 5-однородный граф со связными окружениями всех вершин содержит остовное дерево треугольников.

Данный факт не может быть получен как следствие теоремы 8.3, ибо при ее доказательстве используются ситуации S_2 и S_3, которые не могут быть непосредственно применены для построения некоторого дерева треугольников. Доказательство теоремы 9.1, сформулированной с помощью несущественно отличающихся терминов, приведено в работе [A6]. Здесь отметим лишь, что техника этого доказательства не отличается от техники доказательства теоремы 8.3 (из-за большей сложности дерева треугольников по сравнению с простым циклом, увеличивается количество рассматриваемых подслучаев).

§ 10. Строение графов рассматриваемого класса при средних и больших степенях вершин.

10.1. Общая теория.

В предыдущих параграфах мы показали, что связный p-однородный граф ($p \geqslant 2$) со связными окружениями всех вершин и с относительными степенями любых смежных вершин не менее $p-4$ является панциклическим, и при $p \leqslant 4$ полностью описали строение таких графов. Согласно [36], панциклическим является любой недвудольный граф, удовлетворяющий условию Оре: $\forall x, y \in G'$ $(\rho(x)+\rho(y) \geqslant |G'|)$, и возникает вопрос, при каких значениях p наше условие имеет самостоятельное значение, т.е. при каких p существуют рассматриваемые нами графы с числом вершин большим $2p$. Такие графы изучим подробнее, для остальных приведем несколько примеров, отличающихся от полных графов.

При $2 \leqslant p \leqslant 5$, согласно лемме 8.1, для любых смежных вершин x и y связного p-однородного графа со связными окружениями всех вершин $\rho(x,y) \geqslant 1$, что влечет выполнение неравенства $\rho(x,y) \geqslant p-4$. Для p = 2,3,4 ответ на поставленный выше вопрос дают ранее проведенные исследования строения соответствующих графов. Для $p=5$ положительный ответ вытекает из рассмотрения графа икосаэдра. Способ построения целого семейства связных 5-однородных графов со связными окружениями всех вершин и числом их более 10 рассмотрен ниже.

При $p=6$ условие $\rho(x,y) \geqslant 2$ и требование связности окружений всех вершин являются независимыми. Примером выполнения лишь первого условия является реберный граф ([29]) любого 4-однородного графа без треугольников, а лишь второго – граф, приведенный на рис.9. На рис.15 показан фрагмент триангуляции плоскости бесконечным 6-однородным графом. Понятно, что некоторый конечный 6-однородный граф с произвольно большим числом вершин подобным образом триангулирует поверхность тора, и, очевидно, является связным 6-однородным графом со связными окружениями всех вершин и с относительными степенями любых смежных вершин не меньше 2. Другие графы этого рода рассмотрены ниже.

Лемма 10.1. Если степени всех вершин p-вершинного графа не меньше $p-4$, то он не менее, чем $(p-6)$-разделимый.

Доказательство. Необходимо рассмотреть лишь случай неполного графа. Пусть произвольное разделяющее множество данного графа содержит g вершин, а остальные вершины распределены по двум непересекающимся подмножествам с числом вершин k_1 и k_2 соответственно. Для произвольной вершины x i-того подмножества ($i=1,2$) $p-4 \leqslant \rho(x) \leqslant g+k_i-1$. Поэтому $2p-8 \leqslant 2g+k_1+k_2-2$. Так как $k_1+k_2+g=p$, то после упрощения последнего неравенства получаем $g \geqslant p-6$, что и доказывает лемму.

Таким образом, при $p \geqslant 7$ связность окружений всех вершин рассматриваемых графов не является независимым свойством, а вытекает из условия $\rho(x,y) \geqslant p-4$ для любых смежных вершин x и y.

Дальнейшие исследования проведем с помощью метода расслоения.

Пусть при $p \geqslant 7$ дан связный p-однородный граф с относительными степенями любых двух смежных вершин не меньше $p-4$, и семейство множеств $\{a\} = S_0, S_1, S_2, \ldots$ представляет его расслоение относительно вершины a. Обозначим через m_i $(i \geqslant 0)$ количество ребер, соединяющих вершины множеств S_i и S_{i+1}. В графе G имеют место следующие соотношения:

$$|S_1| = m_0 = p,$$
$$\forall x \in S_1 \; (\rho_{S_1}(x) \geqslant p-4),$$
$$\forall x \in S_1 \; (\rho_{S_0}(x) = 1),$$
$$\forall x \in S_i \; (i \geqslant 1) \; (\rho(x) = \rho_{S_{i-1}}(x) + \rho_{S_i}(x) + \rho_{S_{i+1}}(x)),$$
$$m_i = \sum_{x \in S_i} \rho_{S_{i+1}}(x) = \sum_{x \in S_{i+1}} \rho_{S_i}(x).$$

Обозначим через x, y, z соответственно произвольные вершины множеств S_1, S_2, S_3. Используя приведенные соотношения, легко получить неравенство $\rho_{S_2}(x) \leqslant 3$. Если вершина x смежна с вершиной y, то по данному $\rho_{O(y)}(x) \geqslant p-4$, а с другой стороны $\rho_{O(y)}(x) \leqslant (\rho_{S_1}(y) - 1) + (\rho_{S_2}(x) - 1) \leqslant \rho_{S_1}(y) + 1$. Поэтому $\rho_{S_1}(y) \geqslant p-5$.

Так как

$$3|S_1| \geqslant \sum_{x\in S_1} \rho_{S_2}(x) = \sum_{y\in S_2} \rho_{S_1}(y) \geqslant (p-5)|S_2|,$$

то $|S_2| \leqslant \dfrac{3|S_1|}{p-5} = \dfrac{3p}{p-5}$.

Если вершина y смежна с вершиной z , то множество $S_2 \cap O'(y)$ является разделяющим множеством графа $O(y)$. Положим $g = |S_2 \cap O'(y)| = \rho_{S_2}(y)$. Согласно найденным выше соотношениям,

$$\rho_{S_3}(y) = \rho(y) - \rho_{S_1}(y) - \rho_{S_2}(y) \leqslant p-(p-5)-g = 5-g$$

и, аналогично предыдущему,

$$p-4 \leqslant \rho_{O(z)}(y) \leqslant (\rho_{S_2}(z)-1)+(\rho_{S_3}(y)-1) \leqslant \rho_{S_2}(z)+3-g,$$

или $\rho_{S_2}(z) \geqslant p+g-7$. Так как

$$(5-g)|S_2| \geqslant \sum_{y\in S_2} \rho_{S_3}(y) = \sum_{z\in S_3} \rho_{S_2}(z) \geqslant (p+g-7)|S_3|,$$

то

$$|S_3| \leqslant \frac{(5-g)|S_2|}{p+g-7}.$$

Согласно лемме I0.I, $g \geqslant p-6$, поэтому $|S_3| \leqslant \dfrac{(11-p)|S_2|}{2p-13}$. В следующей таблице приведены оценки значений $|S_2|$ и $|S_3|$, вычисленные с помощью этих формул при некоторых p , принимая во внимание, что они являются натуральными числами.

p	$\|S_2\|\leqslant$	$\|S_3\|\leqslant$
7	10	40
8	8	8
9	6	2
10	6	0
11	5	0

Видно, что при $p\geqslant 10$ $G'=S_0\cup S_1\cup S_2$. Поэтому $|G'|\leqslant 1+p+\frac{3p}{p-5}<2p$.

При $p=9$ $S_4=\varnothing$, ибо в противном случае окружение некоторой вершины множества S_3 не могло быть более чем I-разделимым, вопреки неравенству $g\geqslant p-6$. Поэтому $G'=S_0\cup S_1\cup S_2\cup S_3$ и $|G'|\leqslant 1+9+6+2=$ $=18=2\cdot 9$.

Таким образом, для панцикличности самостоятельный интерес представляют не более, чем 8-однородные графы рассматриваемого вида. В следующих пунктах текущего параграфа подробнее изучим их строение при $p=5,6,7,8$. Здесь еще приведем примеры нетривиальных (неполных) p-однородных графов с большими p и с относительными степенями любых смежных вершин не менее $p-4$.

Рассмотрим n-вершинный циклический граф с правильной нумерацией вершин, у которого смежными с вершиной 0 являются вершины $2,3,4,\ldots,n-2$. Понятно, что $p=n-3$, а так как в таком графе для любых смежных вершин x,y $\rho(x,y)\geqslant n-6$, то $\rho(x,y)\geqslant p-3$, т.е. рассматриваемый циклический граф удовлетворяет требуемому локальному условию.

Можно рассмотреть также следующее семейство n -вершинных p -однородных графов:

$$K_{4,4,\dots,4} \quad (p=n-4,\ \rho(x,y)=p-4,\quad n=4k);$$
$$K_{3,3,\dots,3} \quad (p=n-3,\ \rho(x,y)=p-3,\quad n=3k);$$
$$K_{2,2,\dots,2} \quad (p=n-2,\ \rho(x,y)=p-2,\quad n=2k);$$
$$K_{2,2,\dots,2}[K_2] \quad (p=n-3,\ \rho(x,y)\in\{p-3,p-1\},\quad n=4k);$$
$$K_{2,2,\dots,2}[K_3] \quad (p=n-4,\ \rho(x,y)\in\{p-4,p-1\},\quad n=6k);$$
$$k=1,2,3,\dots$$

Среди них нет графов, у которых $p=7\vee 11 \pmod{12}$. Для их нахождения воспользуемся следующим свойством.

Лемма I0.2. Пусть ~~выражение~~ (высказывание) $P(G)$ означает, что относительные степени любых двух смежных вершин p -однородного графа G не меньше $p-4$. Тогда

$$P(G_1\cdot G_2)\Leftrightarrow P(G_1)\,\&\,P(G_2)\,\&\,(n_1-p_1=n_2-p_2\leq 4),$$

где n_1, n_2, p_1, p_2 - числа вершин и их степени в графах G_1, G_2.

Доказательство. Докажем импликацию слева направо. Во-первых, $P(G_1\cdot G_2)$ означает (§ 2), что $\rho_{G_1}(x)+n_2=$ $=\rho_{G_2}(y)+n_1=p$. Поэтому графы G_1 и G_2 являются однородными, соответственно степеней p_1 и p_2, причем $n_1-p_1=n_2-p_2$. Для вершин $x\in G_1'$, $y\in(G_1\cdot G_2)'$

$$\rho_{G_1\cdot G_2}(x,y)\in\{\rho_{G_1}(x,y)+n_2,\ p_1+p_2\},$$

и для некоторых различных вершин y_i эта степень принимает оба значения. Во-вторых, $P(G_1 \cdot G_2)$ означает, что $\rho_{G_1}(x,y)+n_2 \geqslant p-4$ и $p_1+p_2 \geqslant p-4$, т.е. $\rho_{G_1}(x,y) \geqslant p_1-4$, $n_1-p_1 \leqslant 4$ и $n_2-p_2 \leqslant 4$. Аналогично получаем, что $\rho_{G_2}(x,y) \geqslant p_2-4$. Первая импликация доказана.

Для доказательства импликации справа налево заметим, что из $n_1-p_1=n_2-p_2$ следует однородность графа $G_1 \cdot G_2$ со степенью вершин $p_1+n_2=p_2+n_2$, а оценка величины $\rho_{G_1 \cdot G_2}(x,y)$ получается рассуждением, обратным ~~к~~ только что проведенному ~~выше~~. Лемма доказана.

Следствие.

$$P(G_1)\,\&\,P(G_2)\,\&\,(n_1-p_1=n_2-p_2 \leqslant 4) \Rightarrow P(G_1 \cdot G_2 \cdot G_2 \cdot \ldots \cdot G_2).$$

Доказательство. Так как для графа $G_1 \cdot G_2$ $n=n_1+$ $+n_2$, $p=n_1+p_2$, то $n-p=n_2-p_2$. Поэтому утверждение $P(G_1 \cdot G_2 \cdot G_2)$ непосредственно получается ~~вытекает из~~ применением ~~ния~~ леммы I0.2 к графам $G_1 \cdot G_2$ и G_2. Аналогичным образом получается $P(G_1 \cdot G_2 \cdot G_2 \cdot G_2)$ и т.д.. Следствие доказано.

Беря в качестве графа G_1 циклический граф с числом вершин I0 и степенью 7, а в качестве графа G_2 циклический граф с числом вершин I2 и степенью 9, причем оба со связными дополнительными графами, указанным в следствии образом, получаем семейство рассматриваемых графов с $p=7$ $(mod\ 12)$. Аналогично получаем графы с $p=11$ $(mod\ 12)$. Заметим, что ни один из этих графов не является циклическим, ибо в противном случае окружения всех вершин каждого были бы изоморфны одному и тому же графу. Так как G_1 не является произведением непустых графов, то, согласно теореме 5.I, это означало бы, что граф $G_2 \cdot G_2 \cdot \ldots \cdot G_2$ должен иметь вид $G_1 \cdot G_1 \cdot \ldots \cdot G_1$, а так как граф G_2 также не является таким произведением, то должно быть $G_1 \sim G_2$, что противоречит данному.

Используя следствие леммы IO.2, можно строить и другие нециклические графы, удовлетворяющие рассматриваемому локальному условию.

IO.2. 5- и 6-однородные графы.

Большое семейство 5-однородных графов со связными окружениями всех вершин можно получить, "склеивая" подходящим образом несколько экземпляров графов, показанных на рис.I6. Один из простейших таких "склеенных" графов изображен на рис.I7, более сложный - на рис.I8. С помощью первого графа рис.I6 можно построить интересующий нас граф на основании любого кубического графа без треугольников. В таком случае окружения всех вершин полученного графа оказываются изоморфными простой цепи длины 4. Существуют также не принадлежащие описанному семейству 5-однородные графы со связными окружениями всех вершин (рис.I9), полученные "склеиванием" других фрагментов.

Во всех приведенных графах существуют вершины, окружения которых I-разделимы. Непосредственными построениями можно убедиться, что граф K_6 — единственный 5-однородный связный граф, окружение хотя бы одной вершины которого не менее чем 3-разделимо. На рис.20 представлены все связные 5-однородные графы с 2-разделимыми окружениями всех вершин.

Для построения 6-однородных графов со связными окружениями всех вершин и с относительными степенями любых двух смежных вершин не меньше 2 можно воспользоваться подходящим "склеиванием" множества экземпляров графов, изображенных на рис.2I. Как и в случае 5-однородных графов, здесь также имеет место большое разнообразие. Ранее приведенная триангуляция поверхности тора дает пример другого вида.

I0.3. 7-однородные графы.

Исследуем строение 7-однородных связных графов с относительными степенями любых двух смежных вершин не меньше 3 и с более, чем I4 вершинами.

Теорема I0.I. Если окружение хотя бы одной вершины рассматриваемого графа I-разделимо, то при некотором $n \geqslant 2$ он изоморфен графу $C_{3n}[K_3, K_3, K_2, \ldots, K_3, K_3, K_2]$, где C_{3n} - простой цикл длины $3n$ с естественным образом пронумерованными вершинами.

Доказательство. Единственным 7-вершинным I-разделимым графом со степенями вершин не меньше 3 является граф $K_1 \cdot (K_3 \cup K_3)$. Беря этот граф в качестве окружения некоторой вершины, непосредственным конструированием искомого графа убеждаемся, что при соблюдении рассматриваемого локального ограничения он порождает изображенный на рис.22 граф, который и является требуемой композицией. Теорема IO.I доказана.

При отсутствии I-разделимого окружения некоторой вершины рассматриваемого графа требуется более детальное его изучение, которое проведем с помощью метода расслоения с использованием полученных в п.IO.I результатов. Пусть семейство множеств $S_0, S_1, S_2, \ldots$ представляет расслоение данного графа G относительно произвольной его вершины.

Лемма IO.3. Если при $i \geqslant 1$ $a \in S_i$ и $\rho_{S_{i+\varepsilon}}(a) \geqslant 1$, то $\rho_{S_{i-\varepsilon}}(a) \leqslant 3$, где $\varepsilon = \pm 1$.

Доказательство. Пусть b - смежная с вершиной a вершина множества $S_{i+\varepsilon}$. Так как $\rho_{O(a)}(b) \geqslant 3$, $\rho_{S_i \cup S_{i+\varepsilon}}(a) \geqslant \rho_{O(a)}(b) + 1$, то $\rho_{S_i \cup S_{i+\varepsilon}}(a) \geqslant 4$ и, тем самым, $\rho_{S_{i-\varepsilon}}(a) \leqslant 3$. Лемма доказана.

Лемма IO.4. Пусть окружения всех вершин графа G не менее чем 2-разделимы. Если вершина $a \in S_i$ $(i \geqslant 2)$ такова, что $\rho_{S_{i-1}}(a) = 2$, а b, c - смежные с вершиной a вершины множества S_{i-1}, то $\rho_{S_{i-2}}(b) \leqslant 2$ и $\rho_{S_{i-2}}(c) \leqslant 2$.

Доказательство. Так как $\rho_{O(a)}(b) \geqslant 3$ и множество $S_{i-1} \cap O'(a)$ содержит ровно 2 вершины, то $\rho_{S_i}(b) \geqslant$ $\geqslant (\rho_{O(a)}(b) - 1) + 1 \geqslant 3$. Согласно не менее, чем 2-разделимости графа $O(b)$, $\rho_{S_{i-1}}(b) \geqslant 2$. Поэтому $\rho_{S_i \cup S_{i-1}}(b) \geqslant$ $\geqslant 5$ и $\rho_{S_{i-2}}(b) \leqslant 2$. То же самое и для вершины c. Лемма доказана.

Лемма IO.5. Пусть окружения всех вершин графа G не менее, чем 2-разделимы. Тогда для любой вершины $a \in S_3$ $\rho_{S_2}(a) \neq 2$.

Доказательство. Допустим противное, что для некоторой вершины $a \in S_3$ имеется ровно 2 смежных с ней вершины b, c из множества S_2. Если $G'' \not\ni (b,c)$, то неравенство $\rho_{O(a)}(b) \geqslant 3$ влечет $\rho_{S_3}(b) \geqslant 4$, что невозможно в силу леммы IO.3. Поэтому $G'' \ni (b,c)$ и должно быть $\rho_{S_3}(b) = 3$.

Согласно лемме IO.4, $\rho_{S_1}(b) \leqslant 2$; а согласно общей теории (п.IO.I), $\rho_{S_1}(b) \geqslant 7-5 = 2$. Таким образом, $\rho_{S_1}(b) = 2$ и, понятно, $\rho_{S_2}(b) = 2$. Аналогичные равенства имеют место и для вершины c.

Если обозначить через f вторую смежную с вершиной c вершину множества S_2, то получим изображенную на рис.23 конфигурацию, Существование ребер $(e,d), (e,b), (e,f), (d,f)$ вытекает из условий $\rho_{O(c)}(e) \geqslant 3, \rho_{O(c)}(d) \geqslant 3$, а ребра (b,f) - из $\rho_{O(e)}(b) \geqslant 3$ и того, что, согласно общей теории, $\rho_{S_2}(e) \leqslant 3$. Так как граф $O(c)$ не менее, чем 2-разделимый, то $\rho_{S_3}(f) \geqslant 1$. Поэтому, согласно лемме IO.3, $\rho_{S_1}(f) \leqslant 3$.

Для вершин d, e нет больше других смежных с ними вершин множества S_2. Так как граф $O(d)$ не менее, чем 2-разделимый, то должна существовать некоторая отличная от e вершина $g \in S_1$ и $(d,g) \in G''$. Условие $\rho_{O(d)}(f) \geqslant$ $\geqslant 3$ влечет, что $G'' \ni (g,f)$. Рассмотрим окружение вершины f, для которой $O''(f) \ni (g,b), (g,c)$, $\rho_{S_1}(f) \leqslant 3$ и

$\rho_{O(f)}(g)\geqslant 3$. Понятно, что во множестве S_2 должна существовать ~~такая~~ вершина h , ~~что~~ для которой $G''\ni(f,h),(g,h)$. Но вершина h не может быть смежна с вершинами e,d,c,b, что противоречит условию $\rho_{O(f)}(h)\geqslant 3$. Это противоречие и доказывает лемму.

Теорема I0.2. Если в 7-однородном связном графе G относительные степени любых двух смежных вершин не меньше 3 и окружения всех вершин не менее, чем 2-разделимы, то его радиус не превосходит 3.

Доказательство. Допустим противное. В таком случае при расслоении данного графа относительно любой его вершины будет $S_4\neq\varnothing$. Согласно общей теории, для всех вершин $z\in S_3$ $\rho_{S_2}(z)\geqslant 7+g(O(z))-7=g(O(z))$. В данном случае $g(O(z))\geqslant 2$, но так как в силу леммы I0.5 $\rho_{S_2}(z)\neq 2$, то $\rho_{S_2}(z)\geqslant 3$. Из этого следует, что $\rho_{S_3\cup S_4}(z)\leqslant 4$ и, если вершина $v\in S_4\cap O'(z)$, то, согласно условию $\rho_{O(z)}(v)\geqslant 3$, она смежна со всеми другими вершинами из множества $(S_3\cup S_4)\cap O'(z)$, в том числе со всеми смежными с z вершинами множества S_3. Поэтому любая вершина множества S_4 , которая смежна с некоторой вершиной множества S_3 , смежна со всеми вершинами содержащей ее связной компоненты графа $G(S_3)$.

Для любой вершины $z\in S_3$, имеющей смежную с ней вершину v в множестве S_4 , согласно лемме I0.3 $\rho_{S_2}(z)\leqslant 3$, поэтому $\rho_{S_2}(z)=3$. Так как $\rho_{S_3}(z)\geqslant 2$, то $\rho_{S_4}(z)\leqslant 2$.

Рассмотрим случай $\rho_{S_4}(z)=2$. Пусть u – вторая смежная с z вершина множества S_4. Условие $\rho_{O(z)}(v)\geqslant 3$ влечет~~, что~~ $G''\ni(u,v)$; согласно вышесказанному, вершины u,v смежны со всеми вершинами связной компоненты H графа $G(S_3)$, содержащей вершину z, и для вершин этой компоненты нет других смежных с ними вершин из множества S_4. Поэтому, если $O'(v)\setminus(\{u\}\cup H')\neq$ $\neq\varnothing$, то вершина u является вершиной сочленения графа $O(v)$, в противоречии с данным. Таким, образом, $O'(v)=$ $=\{u\}\cup H'$ и $|H'|=\rho(v)-1=6$. Так как в рассматриваемом случае $\rho_{S_3}(z)=2$, то граф H является простым циклом C_6, и тем самым, $O(v)\sim K_1\cdot C_6\sim W_6$.

В случае $\rho_{S_4}(z)=1$, аналогичным образом получаем~~, что~~ $|H'|=7$ ~~, а~~ и $\rho_{S_3}(z)=3$, что невозможно, ибо не существует кубического графа с нечетным числом вершин.

Таким образом, остается лишь первый случай, при котором оказалось, что $O(v)\sim W_6$. Так как вершина графа G, относительно которой производилось расслоение, принадлежит множеству S_4 из расслоения относительно вершины v, то и ее окружение изоморфно графу W_6. Это означает, что если радиус графа G больше 3, то окружения всех его вершин изоморфны W_6, а такое невозможно, согласно следствию теоремы 5.2. Теорема 10.2 доказана.

Из теоремы 10.2 следует, что интересующие нас 7-однородные графы с числом вершин больше 14 имеют или указанное в теореме I0.I простое строение, или их радиус не больше 3, что существенно ограничивает возможное их количество. Существование таких графов видно из рис.24.

I0.4. 8-однородные графы.

Исследуем строение 8-однородных связных графов с относительными степенями любых двух смежных вершин не меньше 4 и с числом вершин более I6.

Теорема I0.3. Если окружение хотя бы одной вершины рассматриваемого графа 2-разделимо, то при некотором $n \geqslant 6$ он изоморфен графу $C_n[K_3]$.

Доказательство. Единственным 8-вершинным 2-разделимым графом со степенями вершин не меньше 4 является граф $K_2 \cdot (K_3 \cup K_3)$. Рассматривая его в качестве окружения некоторой вершины исследуемого графа, непосредственно убеждаемся в истинности утверждения теоремы.

Лемма I0.6. Количество треугольников 8-вершинного 4-однородного графа не превосходит 8. Существуют только два таких графа с ровно 8 треугольниками.

Доказательство. Пусть t - число треугольников рассматриваемого графа, $\bar{t}$ - число треугольников его дополнительного графа. Согласно приведенной в § 2 формуле, $t+\bar{t} = C_8^3 - \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 4\cdot 3 = 8$. Поэтому $t \leqslant 8$. Непосредственно можно убедиться, что существуют только два неизоморфных 8-вершинных кубических графа без треугольников. Их дополнительные графы являются искомыми (приведены на рис.25).

Теорема 10.4. Если в 8-однородном связном графе относительные степени любых двух смежных вершин не меньше 4 и окружения всех вершин более, чем 2-разделимы, то число вершин этого графа не превосходит 16.

Доказательство. Допустим противное и рассмотрим расслоение данного графа G относительно произвольной его вершины.

Предположим, что радиус графа G не меньше 3. Согласно общей теории (п.10.1), для любой вершины $y \in S_2$ $\rho_{S_1}(y) \geqslant 8-5=3$. Так как $\rho_{S_2}(y) \geqslant g(O(y)) \geqslant 3$, то $\rho_{S_3}(y) \leqslant 2$. Это означает, что если некоторая вершина $z \in S_3$ смежна с вершиной y, то согласно условию $\rho_{O(y)}(z) \geqslant 4$ и неравенству $\rho_{S_2 \cup S_3}(y) \leqslant 5$, она должна быть смежна со всеми вершинами из $S_2 \cap O'(y)$ и, тем самым, со всеми вершинами связной компоненты H графа $G(S_2)$, содержащей вершину y. Так как $\rho_{S_3}(y) \leqslant 2$, то с вершинами этой компоненты смежны не более 2 вершин множества S_3.

Если $|H'| < 7$, то невозможно обеспечить даже 2-разделимость графа $O(z)$; если же $|H'| = 7$, то H должно являться 7-вершинным кубическим графом, а такого графа не существует. Поэтому H является 8-вершинным 4-однородным графом и совпадает с окружением вершины z. Понятно, что таким же графом является окружение любой вершины графа G и что при всех его расслоениях $S_4 = \varnothing$. Согласно общей теории, $|S_2| \leqslant 8$, а так как $|H'| \leqslant |S_2|$, то $|S_2| = 8$ и $|S_3| = 1$. Таким образом, граф G содержит 18 вершин.

Уточним строение графов $G(S_1)$ и $G(S_2)$, являющихся окружениями двух вершин графа G. Пусть $x\in S_1, y\in S_2$. Как уже неоднократно отмечено, $\rho_{S_2}(x)\leqslant 3$, $\rho_{S_1}(y)\geqslant 3$. Поэтому

$$8\cdot 3\geqslant\sum_{x\in S_1}\rho_{S_2}(x)=\sum_{y\in S_2}\rho_{S_1}(y)\geqslant 8\cdot 3,$$

откуда следует, что при любых x,y $\rho_{S_2}(x)=\rho_{S_1}(y)=3$. Обозначим через a,b,c, смежные с вершиной x вершины множества S_2. Так как $\rho_{O(x)}(a)\geqslant 4$, но $\rho_{S_1}(a)=3$, то $G''\ni(a,b),(a,c)$ и, аналогично, $G''\ni(b,a)$, (b,c). Очевидно, треугольники (x,a,b,x), (x,b,c,x), (x,a,c,x) единственные (Такие), одна вершина которых x, а две другие принадлежат множеству S_2, поэтому общее число треугольников, одна вершина которых принадлежит S_1, а две других S_2, равно $3\cdot 8=24$. Тако~~е~~во же количество треугольников, одна вершина которых принадлежит S_2, а две других S_1.

Легко подсчитать, что каждый из графов $G(S_1), G(S_2)$ содержит 16 ребер. Пусть t - общее количество их треугольников. Тогда количество треугольников графа G равно $t+2\cdot 16+2\cdot 24=t+80$. Выражая их количество с помощью относительных степеней смежных вершин (§ 2), получаем, что оно не меньше 96. Поэтому $t\geqslant 16$. Согласно лемме 10.6, графы $G(S_1)$ и $G(S_2)$ содержат максимальное возможное количество треугольников, и поэтому они могут быть только двух указанных на рис.25 видов.

Так как эти графы получены при произвольном расслоении графа G, то окружения всех его вершин должны принадлежать к этим двум видам. Непосредственным конструированием легко проверить, что такого графа не существует. Поэтому не может быть, ~~что~~ радиус рассматриваемого графа больше 2, и мы должны предположить, что он равен 2.

Тогда $|S_2|=8$, $S_3=\varnothing$. В этом случае также $\rho_{S_2}(x)=\rho_{S_1}(y)=3$, но $\rho_{S_2}(y)=5$. Пусть t, так же как и выше, общее количество треугольников графов $G(S_1)$ и $G(S_2)$. Аналогичным образом вычисляется количество треугольников графа G, которое равно $t+16+2\cdot 24=$ $=t+64$ и с другой стороны не меньше 91. Из этого следует, что в графе $G(S_2)$ должны существовать не меньше 19 треугольников. Однако в графах $G(S_2)$ и $\bar{G}(S_2)$ вместе имеются лишь $C_8^3-\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 5\cdot 2=16$ треугольников. Это означает, что предполагаемый граф не может иметь радиуса более I, и, тем самым, числа вершин, превосходящего 9. Полученное противоречие и доказывает теорему 10.4.

Глава 4.

ЛОКАЛЬНАЯ РАЗЛОЖИМОСТЬ В КЛАССАХ ГРАФОВ

§ II. Однородные графы малых степеней.

II.I. Кубические и 4-однородные графы.

Непосредственным обобщением изоморфности окружений всех вершин некоторого графа одному и тому же графу является требование, чтобы окружения всех его вершин принадлежали фиксированному множеству графов. В самом общем случае любой граф удовлетворяет такому требованию. Поэтому разумно данное фиксированное множество ограничить, например, условием, чтобы окружения всех вершин имели ровно p вершин.

При $p \geqslant 5$ имеет место большое разнообразие окружений вершин p -однородных графов, однако для $p \leqslant 4$ различные p -вершинные графы легко обозримы. Важнейшим их свойством является то, что, возможно при некоторых глобальных ограничениях, вершины с окружением определенного вида вынуждают другие близко расположенные вершины порождать специфические подграфы, с помощью которых можно охарактеризовать строение всего графа. Для этого удобно использовать локальные операции (§ 2). Целесообразность применения операций в описании строения однородных графов малых степеней и плоских графов демонстрируют также авторы работ

[34,70,71].

Рассмотрим кубические графы. Окружения всех вершин таких графов могут принадлежать только к 4 видам, изображенным на рис.26. Если окружение хотя бы одной вершины связного кубического графа изоморфно графу K_3 , то он является графом K_4 , а окружение, изоморфное графу $K_1 \cdot \overline{K_2}$, очевидным образом влечет не более, чем 2-разделимость этого графа. Поэтому справедливы следующие утверждения.

Свойство I. Окружение ни одной вершины 3-разделимого кубического графа не содержит ровно 2 ребра.

Свойство 2. Окружения всех вершин отличного от K_4 3-разделимого кубического графа содержат не более одного ребра.

Легко видеть, что каждое I-реберное окружение 3-разделимого кубического графа может быть получено заменой произвольной вершины другого 3-разделимого кубического графа треугольником, изображенным на рис.27 образом, который назовем операцией T. Из этого следует такое свойство.

Следовало бы хоть здесь указать, почему этот „другой" граф тоже 3-разделим

Свойство 3. Каждый 3-разделимый кубический граф может быть получен из графа K_4 или из 3-разделимого кубического графа без треугольников с помощью многократного применения операции T.

Легко видеть, что 2-реберное окружение вершины 2-разделимого кубического графа порождает подграф, в общем виде изображенный на рис.28. Поэтому любой такой граф может быть получен заменой некоторого ребра не менее, чем 2-разделимого кубического графа этим графом. Назовем эту замену операцией K. Тогда имеет место следующее свойство.

Свойство 4. Каждый не менее, чем 2-разделимый кубический граф может быть получен из графа K_4 или из не менее, чем 2-разделимого кубического графа без треугольников с помощью многократного применения операций T и K.

Далее рассмотрим произвольный связный кубический граф, не содержащий подграфов, получаемых после применения операций T и K к некоторому другому графу. Тогда 2-реберное окружение некоторой вершины определяет изображенный на рис. 29 подграф. Замену ребра таким графом назовем операцией X.

Свойство 5. Каждый связный кубический граф может быть получен из графа K_4 или из связного кубического графа без треугольников с помощью многократного применения операций T, K и X.

Таким образом, среди всех кубических графов особое положение занимают граф K_4 и кубические графы без треугольников. Для описания последних определим операцию O, действие которой состоит в замене произвольных двух ребер данного графа непересекающимися простыми цепями длины 2 и последующим проведением еще одного ребра, инцидентного средним вершинам обеих цепей. Очевидно, операция T является специальным случаем операции O.

С помощью перебора небольшого количества различных случаев легко можно доказать следующее свойство.

Свойство 6. Любой отличный от K_4 не менее, чем g-

разделимый ($g \geqslant 1$) кубический граф без треугольников может быть, получен из другого не менее, чем g -разделимого кубического графа с помощью однократного применения операции **O**.

Следствие. I) Все 3-разделимые кубические графы и только они могут быть получены из графа K_4 с помощью многократного применения операции **O**.

2) Все не менее, чем 2-разделимые кубические графы и только они могут быть получены из графа K_4 с помощью многократного применения операций **O** и **K**.

3) Все связные кубические графы и только они могут быть получены из графа K_4 с помощью многократного применения операций **O**, **K** и **X**.

Примечание. Вместо общей операции **K** можно воспользоваться ее частным случаем, заменяя ребро соответствующим 6-вершинным подграфом (рис.28, вершины I,2,3,4,5,6).

Для получения всех вышеприведенных свойств мы поступили следующим образом. Вблизи окрестности некоторой вершины нашли некоторый однозначно определяемый ею подграф исследуемого графа и заметили, что после его замены меньшим графом получается другой граф, обладающий таким же свойством (согласно сказанному в § 2, такая замена является операцией разложения, и ее применение в данном случае сохраняло некоторое свойство разлагаемого графа). Поэтому мы могли сразу определить соответствующие операции построения, с помощью которых описать строение исследуемых графов. Понятно, что их описание осталось бы не менее полным, если бы мы ограничились только операциями разложения. Поэтому далее придерживаемся именно такого описания рассматриваемых графов.

На рис.30 приведены все 4-вершинные графы. Если окружение некоторой вершины 4-однородного графа содержит не более 2 ребер, то после удаления этой вершины вместе с инцидентными ~~с ней~~ ребрами к оставшемуся графу можно так добавить 2 новых ребра, чтобы опять получить 4-однородный граф. При пронумеровании вершин окружения удаляемой вершины, как показано на рис.30, новыми ребрами могут быть, например, ребра (I,3), (2,4). Так можно поступать до тех пор, пока окружения всех вершин полученного 4-однородного графа не окажутся связными или изоморфными графу $K_1 \cup K_3$. Строение связных компонент 4-однородного графа со связными окружениями всех вершин полностью описано в § 9. Поэтому исследуем такой 4-однородный граф, несвязные окружения вершин которого изоморфны графу $K_1 \cup K_3$.

Очевидно, если данный граф содержит изображенный на рис.3I подграф, то все внутренние вершины последнего могут быть заменены одной, смежной с вершинами I,2,3,4; тем самым получается новый 4-однородный граф с меньшим числом вершин. Учитывая, что все несвязные окружения рассматриваемого графа имеют вид $K_1 \cup K_3$, и предполагая, что подграфов, изображенных на рис.3I, больше нет, легко получаем, что все связные компоненты такого графа, при подходящем $n \geq 2$, изоморфны композиции $C_{3n}[K_1, K_1, K_3, K_1, K_1,$

$K_3, \ldots, K_1, K_1, K_3]$, где C_{3n} - простой цикл длины $3n$. Фрагмент подобной композиции приведен на рис.32.

Тем самым, получено достаточно полное описание строения 4-однородных графов с использованием понятия разложимости.

II.2. Плоские однородные графы.

Как известно, для любого плоского графа $\min p_i \leqslant 5$, где (p_i) - набор степеней его вершин. Поэтому требование планарности однородного графа ограничивает его степень числом 5, и для таких графов естественно использовать подход п.II.I, основанный на рассмотрении окружений вершин, с целью применения операций разложения.

Нечетко

Все результаты, полученные о кубических графах, непосредственно приложимы и к плоским кубическим графам, что обусловлено простотой применяемых операций. Однако изучение плоских 4-однородных графов требует дополнительного рассмотрения в случае 2-реберного окружения, изоморфного графу $K_1 \cup (K_1 \cdot \overline{K_2})$.

Такое рассмотрение можно провести в следующем порядке, где каждое отсутствие некоторой вершины или подграфа с определенным свойством означает, что уже найдены удаляющие их операции (во всех случаях они находятся тривиальным образом).

I) Предполагаем отсутствие вершин, окружения которых изоморфны любому из первых трех графов рис.30. Каких? именно

2) Предполагаем отсутствие подграфа, изображенного на рис.3I.

3) Рассматриваем вершину, окружение которой изоморфно графу $K_1 \cup (K_1 \cdot \overline{K_2})$, и находим специальный подграф (рис.33).

4) Предполагаем отсутствие подграфа, изображенного на рис.33, и находим другой специальный подграф (рис.34).

5) Дополнительно рассмотрев окружение $K_1 \cup K_3$, приходим к изображенному на рис.35 подграфу, который, однако, обусловливает ~~влечет~~ существование перешейка, что невозможно в 4-однородном графе.

Этим завершается обзор всех несвязных окружений вершин плоского 4-однородного графа. Каждый такой граф с помощью применения соответствующих операций разложения редуцируется к некоторому плоскому 4-однородному графу со связными окружениями всех вершин. Связные компоненты последнего имеют описанное в § 9 простое строение.

Вопрос о существовании подобных операций для плоских 5-однородных графов оказывается гораздо более сложным. Несмотря на то, что по сравнению с произвольным 5-однородным графом, разнообразие окружений вершин плоского 5-однородного графа значительно меньше, эта проблема нами не решена. Одной из причин затруднений является отсутствие возможности удаления точно одной вершины, что приводит к необозримому множеству различных специальных подграфов.

Так как в возникшей ситуации правомерно ожидать даже отсутствия желаемой системы операций, то для возможного доказательства этого, необходимо данный вопрос поставить в формализованном виде. Такая формализация приводит к развитию теории, рассмотренной в следующих параграфах (а также в [A7]). Внутри этой теории удается получить не менее интересные самостоятельные результаты.

§ I2. Система понятий локальной разложимости.

В предыдущем параграфе показана возможность определения для графов некоторых классов операций разложения, действующих в непосредственной близости некоторой вершины и поэтому характеризующихся локальным действием в графе-операнде. Наряду с нахождением системы таких операций, выделялся специальный подкласс (ядро) данного класса, к графам которого редуцировались остальные графы. Необходимость подобных исследований обусловлена большим количеством вопросов теории графов, связанных с рассмотрением графов как элементов различных классов, и с определением всевозможных операций над ними. Обычно эти операции должны в данный класс внести упорядоченность и дать возможность построить, не выходя ~~из~~ за его пределы ~~него~~, из нескольких базисных графов остальные графы со все возрастающим числом вершин. Классическими примерами этого являются операции В.Татта [73] для не менее, чем 3-связных ? (разделимых) графов и операции В.К.Титова [28] для т.н. неразделимых графов. Примечательно, что при определении таких операций для изучаемого класса всегда необходимо рассмотреть и обратные им, разлагающие операции. Разлагающие операции поэтому являются истинным средством выяснения структуры графов и доказательства возможности операций построения. Это позволяет считать их особенно важными и рассмотреть в качестве основных. Правомерность такого взгляда убедительно демонстрирует материал предыдущего параграфа.

Для любого графа G обозначим через $p(G)$ наибольшую степень его вершин. Если A — подграф графа G, то вершины множества

$$\Gamma_G(A) \underset{def}{=} \{a \in A' \mid \exists x \in G' \setminus A' \, (G'' \ni (a,x))\}$$

назовем граничными вершинами подграфа A.

Определение I2.I. Одноместная операция ω над графами называется элементарной операцией воздействия, если ей сопоставлены два фиксированных графа S и T с помеченными вершинами $v_1, v_2, \ldots, v_r$ у графа S, $w_1, w_2, \ldots, w_r$ у графа T $(r \leqslant \min(|S'|, |T'|))$ и для данного графа G ее действие состоит в следующем. I) Находим такой подграф A графа G, который изоморфен графу S и множество граничных вершин которого является подмножеством множества $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$, где вершина $a_i \; (i = 1, 2, \ldots, r)$ соответствует при данном изоморфизме помеченной вершине v_i графа S. Если такого подграфа не существует, то операцию ω считаем не определенной для графа G. 2) Конструируем такой граф B, что $G' \cap B' = \Gamma_G(A)$, $B \sim T$ и при этом изоморфизме каждой вершине $a_i \in B'$ соответствует помеченная вершина w_i графа T. Граф $[(G' \setminus A') \cup B', (G'' \setminus A'') \cup B'']$ считаем результатом применения операции ω к графу G.

Граф S назовем удаляемым графом, а граф T — заменяющим графом операции ω. Обозначим через $\omega(G)$ множество всех графов, получаемых из G применением процедуры, описанной в определении I2.I. Скажем, что операция ω определена для графа G в классе $\mathcal{G}$, если $G \in \mathcal{G}$ и $\mathcal{G} \cap \omega(G) \neq \varnothing$, и не определена в противном случае. Для множества операций Ω положим $\Omega(G) \underset{def}{=} \bigcup_{\omega \in \Omega} \omega(G)$.

Определение I2.2. Элементарная операция воздействия называется элементарной операцией разложения, если для ее удаляемого графа S и заменяющего графа T имеет место неравенство $|T'| \leqslant |S'|$, и при $|T'| = |S'|$ также $|T''| < |S''|$.

Определение I2.3. Элементарная операция разложения называется элементарной операцией локального разложения, если ее удаляемый граф связный.

Определение I2.4. Пусть $\mathcal{G}$ класс графов, Ω - система (множество) элементарных операций разложения. Множество тех графов из $\mathcal{G}$, для которых в классе $\mathcal{G}$ не определена ни одна операция из Ω, называется ядром класса $\mathcal{G}$ и обозначается через $\mathcal{G}_0$.

Следствие. Пусть $\mathcal{G}$ - класс графов, Ω и $\mathcal{G}_0$ — указанные в определении система операций и соответствующее ядро. Тогда, если $\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_0 \neq \varnothing$, то для каждого графа $G \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_0$ существует такая конечная последовательность графов из $\mathcal{G}$ $G_1, G_2, \ldots, G_n$, что $G_1 \in \Omega(G)$, $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ $(G_{k+1} \in \Omega(G_k))$ и $G_n \in \mathcal{G}_0$.

Это простое утверждение выражает наиболее важное свойство рассматриваемых классов графов. Далее изучим специальные их разновидности.

Определение I2.5. Класс графов $\mathcal{G}$ называется классом локальной разложимости, если существует такая система элементарных операций локального разложения Ω, что для каждого натурального числа n множества $\{G \in \mathcal{G}_0 \mid p(G) \leqslant n\}$ и $\{\omega \in \Omega \mid \exists G \in \mathcal{G} (p(G) \leqslant n \;\&\; \omega(G) \cap \mathcal{G} \neq \varnothing)\}$ конечны.

Примечание. Если в определении I2.5 вместо системы элементарных операций локального разложения требовать систему элементарных операций разложения, то соответствующий класс графов можно называть классом квазилокальной разложимости. Возможны и другие расширения нашей системы понятий.

Тривиальным образом класс всех полных графов является классом локальной разложимости.

Теорема I2.I. Класс всех O-графов с четным числом вершин не является классом локальной разложимости.

Доказательство. Действительно, удаляемый граф любой элементарной операции локального разложения, определенный для O-графа, может быть только графом K_1. Поэтому в классе $\mathfrak{G}$, образованном 0-графами с четным числом вершин, невозможно определить ни одну элементарную операцию локального разложения, т.е. $\Omega=\varnothing$ и $\mathfrak{G}_0=\mathfrak{G}$. Но так как степени вершин всех графов этого класса ограничены числом 0_z и таких графов бесконечно много, то бесконечным является множество $\{G\in\mathfrak{G}_0 \mid p(G)\leqslant 0\}=\mathfrak{G}$, что противоречит требованию определения I2.5. Теорема I2.I доказана.

Примечание. Очевидно, класс всех 0-графов с четным числом вершин является классом квазилокальной разложимости.

Определение I2.6. Класс графов $\mathfrak{G}$ называется классом конечной локальной разложимости, если существует такая конечная система элементарных операций локального разложения Ω, что ядро $\mathfrak{G}_0$ также конечно.

Связь между понятиями класса локальной разложимости и класса конечной локальной разложимости иллюстрирует следующая теорема, непосредственно вытекающая из определений I2.5 и I2.6.

Теорема I2.2. Пусть степени вершин графов класса локальной разложимости не превосходят фиксированного числа. Тогда данный класс является также классом конечной локальной разложимости.

Следствие. Понятие класса локальной разложимости для однородных графов фиксированной степени эквивалентно понятию класса конечной локальной разложимости.

В дальнейшем понятие элементарной операции разложения будет являться формальным средством, служащим единой основой подхода к изучаемой проблеме, а к графам каждого класса будем применять операции более высокого уровня, ориентированные на использование конкретных свойств.

Определение I2.7. Пусть Ω – множество элементарных операций воздействия ((локального) разложения). Одноместная операция ω над графами называется операцией воздействия ((локального) разложения), если для каждого графа G ее действие состоит в применении к G некоторой операции из Ω и объявлении полученного результата результатом применения операции ω, т.е. полагаем $\omega(G) \overset{def}{=} \Omega(G)$. Будем говорить, что множество элементарных операций Ω соответствует операции ω.

Приведем несколько примеров операций локального разложения. Очевидно, такой является операция удаления ребра данного графа, поскольку она сама непосредственно является элементарной операцией локального разложения с удаляемым графом, изоморфным графу K_2, и с заменяющим графом, изоморфным графу $\overline{K_2}$.

Докажем, что операция удаления произвольной вершины данного графа G вместе с инцидентными ей ребрами и с последующим проведением некоторых новых ребер между вершинами ее окружения также является операцией локального разложения. Так как для каждой конкретной вершины x граф $\tilde{O}_G(x)$ связен и $|O'_G(x)| < |\tilde{O}'_G(x)|$, то эти действия можно реализовать с помощью применения элементарной операции локального разложения с удаляемым графом $\widetilde{O}_G(x)$ и с заменяющим графом T, получаемым добавлением необходимых ребер к графу $O_G(x)$, в которых все (где именно?) отличные от x вершины так помечены, что каждая вершина множества $T' = O'_G(x)$ имеет такой же номер и в графе $\widetilde{O}_G(x)$. Таким образом, каждое конкретное удаление вершины данного графа вместе с инцидентными ей ребрами и с последующим добавлением некоторых новых ребер в ее окружении реализуемо применением некоторой элементарной операции локального разложения. Это в соответствии с определением I2.7 означает, что данная операция является операцией локального разложения. Заметим, что при желании мы могли бы тривиальным образом считать удаляемым графом также всю связную компоненту графа G, содержащую вершину x, а заменяющим графом - эту же компоненту без вершины x и с соответствующими ребрами. Подобными рассуждениями можно показать, что замена подходящим графом любого подграфа или части данного связного графа также является операцией локального разложения. Однако всем таким операциям обычно соответствует бесконечное множество элементарных операций, среди которых может оказаться и бесконечно много тривиальных, в смысле вышесказанного замечания, (неясно) и предназначенных только для отдельных графов. Такие операции не позволяют выявить более тонкую структуру изучаемых графов и не являются поэтому интересными. Для их устранения вводим дополнительные ограничения.

Определение I2.8. Операция воздействия ((локального) разложения) называется операцией конечного воздействия ((локального) разложения), если соответствующее ей множество элементарных операций воздействия ((локального) разложения) конечно.

Понятно, что удаление ребра является также операцией конечного локального разложения. Другим примером служит операция удаления вершины фиксированной степени с последующим добавлением некоторых новых ребер между вершинами окружения удаляемой вершины. Более сложным примером является операция удаления из графов данного класса одновременно двух вершин фиксированной степени и находящихся на ограниченном расстоянии друг от друга. Если a и b удаляемые здесь вершины графа G, а $(a, x_1, x_2, \ldots, x_n, b)$ - кратчайшая простая цепь, соединяющая их в G, то в качестве удаляемого графа соответствующей элементарной операции локального разложения в этом случае необходимо рассмотреть подграф, порожденный множеством вершин $\tilde{O}'_G(a) \cup \tilde{O}'_G(b) \cup \{x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}\}$.

В дальнейшем мы используем только операции конечного локального разложения, но из-за простоты суждений не будем каждый раз специально останавливаться на доказательствах этого их свойства.

§ 13. Классы локальной разложимости.

Теорема 13.1. Класс всех графов является классом конечной локальной разложимости.

Доказательство. Пусть ω_1 - операция удаления ребра, ω_2 - операция удаления изолированной вершины. Обе операции являются элементарными операциями локального разложения, и для каждого графа, отличного от Λ, в данном классе определена хотя бы одна из них. Поэтому при $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ $\mathcal{G}_0 = \{\Lambda\}$, и выполняются требования определения 12.6. Теорема 13.1 доказана.

Если в качестве операции ω_2 взять операцию удаления вершины степени 1, то также непосредственно можно доказать следующее утверждение.

Теорема 13.2. Класс всех связных графов является классом конечной локальной разложимости.

Подходящие системы элементарных операций локального разложения легко можно определить также для классов всех 0-графов, всех плоских графов, всех неплоских графов, или, например, для класса всех графов без треугольников. Все эти классы оказываются классами конечной локальной разложимости. Интересно, что ядро класса всех неплоских графов состоит из графов K_5 и $K_{3,3}$.

(Только „интересно"?!)

Теорема 13.3. Класс всех однородных графов фиксированной степени является классом конечной локальной разложимости.

Доказательство. Обозначим через p степени вершин графов данного класса. Пусть ω_1 следующая операция над p-однородными графами. Удаляем из данного графа G такие две вершины a и b, расстояние между которыми равно 4, и p новыми ребрами так соединяем вершины из $O'(a)$ с вершинами из $O'(b)$, чтобы каждой вершине из $O'(a) \cup O'(b)$ было инцидентно ровно одно новое ребро. Если таких вершин a, b не существует (диаметр графа G меньше 4), то операцию ω_1 считаем не определенной для этого графа. Понятно, что если множество $\omega_1(G)$ непусто, то оно содержит только p-однородные графы, а операция ω_1 оказывается определенной и в классе p-однородных графов.

Пусть ω_2 - операция удаления связной компоненты с диаметром меньше 4 из несвязного p-однородного графа. Эта операция также определена в классе p-однородных графов.

Операции ω_1 и ω_2 являются операциями конечного локального разложения, поэтому множество Ω, состоящее из соответствующих им элементарных операций локального разложения, конечно. В классе p-однородных графов эти операции не определены только для связных p-однородных графов с диаметром меньше 4, а такие графы образуют конечное множество (ядро). Теорема I3.3 доказана.

Следствие. Класс всех однородных графов является классом локальной разложимости.

Доказательство. Пусть $\Omega(p), \mathcal{G}_0(p)$ — вышеопределенные для класса p -однородных графов системы операций и графов с явным указанием числа p. Положим $\Omega = \bigcup_{p=0}^{\infty} \Omega(p)$, $\mathcal{G}_0 = \bigcup_{p=0}^{\infty} \mathcal{G}_0(p)$. Легко непосредственно проверить, что Ω и $\mathcal{G}_0$ удовлетворяют требованиям определения 12.5. Следствие доказано.

Теорема 13.4. Класс всех полных графов не является классом конечной локальной разложимости.

Доказательство. Допустим противное, что для класса всех полных графов существуют конечные системы Ω и $\mathcal{G}_0$, удовлетворяющие требованиям определения 12.6. Из конечности $\mathcal{G}_0$ следует, что для всех полных графов с достаточно большим числом вершин в их классе определены элементарные операции локального разложения. Степени непомеченных вершин удаляемых графов всегда равны степеням соответствующих вершин в графах-операндах, а для конечной системы эти степени ограничены в совокупности. Из этого следует, что к полным графам с достаточно большим числом вершин могут быть применены лишь такие операции, у которых помечены все вершины удаляемых графов. Но такие элементарные операции локального разложения не уменьшают числа вершин, а с помощью удаления одних лишь ребер нельзя из полного графа получить другой полный граф. Таким образом, в противоречие допущенному, для бесконечного множества полных графов в их классе не может быть определена ни одна элементарная операция локального разложения. Теорема 13.4 доказана.

Следствие. Класс всех однородных графов не является классом конечной локальной разложимости.

Доказательство. Аналогично предыдущему, в случае конечности используемой системы элементарных операций локального разложения, к бесконечному множеству полных графов не применима ни одна операция этой системы, ибо одним лишь удалением отличного от 0 и ограниченного числа ребер, только из конечного числа полных графов можно получить однородный граф. Таким образом, $\mathcal{G}_0$ должно содержать бесконечное подмножество, что невозможно, если оно конечно. Следствие доказано.

Теорема 13.5. Класс всех связных однородных графов фиксированной степени является классом конечной локальной разложимости.

Доказательство. Пусть p - степень вершин графов данного класса, ω - операция ω_1, определенная в доказательстве теоремы 13.3. Положим Ω равным множеству элементарных операций локального разложения, соответствующих ω, и докажем, что для любого связного p-однородного графа G с радиусом не менее 4 множество $\omega(G)$ содержит связный граф. Этого, как легко видеть, достаточно, чтобы удовлетворять требованиям определения 12.6.

Очевидно, необходимо рассмотреть только случай, когда удаление вершин a и b, находящихся на расстоянии 4 друг от друга, нарушает связность. Так как все вершины данного графа одновременно не являются вершинами сочленения, то вершину a можно выбрать так, что ее удаление связности не нарушает. Пусть граф G_1, получаемый удалением из графа G вершин a, b, несвязный. Ясно, что число его связных компонент не превосходит p, каждая компонента содержит вершины множества $O'_G(b)$, некоторые компоненты содержат вершины множества $O'_G(a)$. Покажем, что в графе G_1 можно так добавить новые ребра согласно действиям операции ω, чтобы восстановить связность. Действительно, проведем первое из новых ребер между произвольной вершиной множества $O'_G(a)$ и такой вершиной из $O'_G(b)$, которая принадлежит другой связной компоненте. Таким образом, получится одна новая связная компонента, а общее их число уменьшится на единицу. Действуя аналогично, проведением каждого нового ребра уменьшим число полученных связных компонент, и так как в начале их количество не превосходило p, то не позже проведения $(p-1)$-го ребра, получится в точности одна связная компонента, т.е. связность всего графа будет восстановлена. Остальные новые ребра добавляются произвольно. Теорема 13.5 доказана.

В заключение параграфа приведем наиболее важный пример класса конечной локальной разложимости.

Если вершины x и y некоторого графа таковы, что $\tilde{O}'(y) \subset \tilde{O}'(x)$, то y назовем внутренней вершиной окрестности вершины x. Каждая вершина является внутренней в своей окрестности.

Лемма 13.1. Если из не менее, чем g-разделимого графа удалить все внутренние вершины окрестности некоторой вершины и между оставшимися вершинами этой окрестности провести новые ребра до образования полного подграфа, то снова получим не менее, чем g-разделимый граф.

Доказательство. Пусть G_1 - новый граф, полученный из данного графа G, осуществлением ~~проведением~~ указанных в лемме действий, K - возникший при этом полный подграф графа G_1. Необходимо рассмотреть лишь случай, когда оба графа G и G_1 неполные. Понятно, что вершины графа K не могут принадлежать различным связным компонентам графа $G_1(G_1' \setminus H)$, где H - некоторое наименьшее разделяющее множество графа G_1. Поэтому существует такая связная компонента графа $G_1(G_1' \setminus H)$, которая не содержит вершин графа K, а так как удаляемые вершины графа G соединены с остальными его вершинами только через вершины графа K, то множество H является разделяющим множеством и для графа G, т.е. $|H| \geqslant g$. Это доказывает лемму.

Лемма 13.2. Если степени всех вершин не менее, чем g-разделимого графа больше g, то в этом графе существует ребро, удаление которого не нарушает не менее, чем g-разделимость.

Доказательство этого утверждения, сформулированного в несущественно отличающемся виде, содержится, например, в работе [20].

Теорема 13.6. Класс всех не менее, чем g-разделимых графов при фиксированном $g \geqslant 0$ является классом конечной локальной разложимости.

Доказательство. Определим следующие две операции конечного локального разложения. Пусть ω_1 - удаление ребра, ω_2 - удаление вершины степени g с последующим проведением всех возможных ребер между вершинами ее окружения до образования полного подграфа. Применение операции ω_2 к не менее, чем g-разделимому графу является специальным случаем действий, определенных в лемме 13.1. Положим Ω равным множеству элементарных операций локального разложения, соответствующих операциям ω_1 и ω_2. Так как в силу лемм 13.1 и 13.2 для любого не менее, чем g-разделимого графа G, содержащего более g вершин, $\Omega(G)$ содержит хотя бы один не менее, чем g-разделимый граф, то, очевидно, $\mathcal{G}_0 = \{K_1, K_2, \dots, K_g\}$ и получены конечные системы операций и графов Ω и $\mathcal{G}_0$, удовлетворяющие требованиям определения 12.6. Теорема 13.6 доказана.

§ 14. Локальная разложимость не менее, чем 3-разделимых графов и их непланарность.

Покажем, как, используя результаты предыдущего параграфа, можно доказать известную теорему Понтрягина-Куратовского. Специальную терминологию используем в обычном виде (согласно [15,29]). Предположим, что все рассматриваемые плоские графы уже правильно нарисованы на плоскости.

Обозначим через $\mathcal{G}$ класс всех не менее, чем 3-разделимых графов. Пусть ω_1 - операция удаления ребра, ω_2 - операция удаления кубической вершины с последующим добавлением необходимых ребер между смежными с ней вершинами до образования треугольника.

Лемма 14.1. Если граф G_1 изоморфен графу K_5 или содержит часть, гомеоморфную графу $K_{3,3}$, то такую часть содержит также граф G, для которого $G_1 \in \{\omega_1, \omega_2\}(G)$.

Лемма очевидна.

Лемма 14.2. Если графы $G, G_1 \in \mathcal{G}$ таковы, что $G_1 \in \omega_1(G)$, G - неплоский, G_1 - плоский, то или $G \cong K_5$, или G содержит часть, гомеоморфную графу $K_{3,3}$.

Доказательство. Пусть применением операции ω_1 из графа G удаляется ребро (x,y). Так как граф G неплоский, то вершины x,y не могут одновременно принадлежать границе одной и той же области плоского графа G_1. Если $R_1, R_2, \ldots$ - границы областей графа G_1, содержащие вершину x, то ребра множества $(\bigcup_i R_i'') \setminus O''_{G_1}(x)$ порождают минимальную часть графа G_1, являющуюся его простым циклом C. Для определенности положим, что вершина x находится внутри этого цикла (рис.36). Нетрудно непосредственно показать (но можно воспользоваться знаменитой теоремой Менгера), что вершины x и y в графе G_1 соединены не менее, чем 3 внутренне непересекающимися простыми цепями. Пусть a, b, c - первые принадлежащие циклу C вершины этих цепей, встречающиеся при их прохождении, начиная с вершины y (на рис.36 специально выделены). Понятно, что из-за планарности графа G_1 вершины a, b, c не могут одновременно принадлежать одной и той же границе R_i. Если $\{a,b,c\} \not\subset O'_{G_1}(x)$ или $\rho_{G_1}(x) \geqslant 4$, то легко усмотреть существование в графе G части, гомеоморфной графу $K_{3,3}$.

Рассмотрим более сложный случай, когда $O'_{G_1}(x) = \{a,b,c\}$. Если некоторая из найденных выше простых цепей, соединяющих в графе G_1 вершину y с вершинами a, b, c, содержит более двух вершин, то ее внутренние вершины с помощью простых цепей соединены или с внутренними вершинами других цепей или с отличными от a, b, c вершинами цикла C. В обоих случаях в графе G_1 существует некоторый другой простой цикл C_1, отделяющий вершины x и y, содержащий смежные с x вершины и имеющий отличное от $\{a,b,c\}$ множество первых принадлежащих ему вершин простых цепей, соединяющих вершину y с вершиной x. Как и выше, этого достаточно для существования в графе G части, гомеоморфной графу $K_{3,3}$.

Если не имеет место ни один из рассмотренных выше случаев, то $G' = G'_1 = \{x, y, a, b, c\}$ и немедленно получаем, что $G \sim K_5$. Лемма доказана.

Лемма I4.3. Если графы $G, G_1 \in \mathcal{G}$ таковы, что

$G_1 \in \omega_2(G)$, G - неплоский, G_1 - плоский, то граф G содержит часть, гомеоморфную графу $K_{3,3}$.

Доказательство. Согласно действиям операции ω_2, в графе G_1 существует особый треугольник, и, так как граф G неплоский, то этот треугольник не является границей области графа G_1. Понятно, что вне и внутри рассматриваемого треугольника существует хотя бы по одной вершине, соединенной с его вершинами с помощью 3 внутренне непересекающихся цепей. Эти цепи существуют также в графе G и вместе с ребрами, инцидентными его вершине, удаленной применением операции ω_2, порождают в нем часть, гомеоморфную графу $K_{3,3}$ (рис.37). Лемма доказана.

Теорема I4.I. Любой неплоский не менее, чем 3-разделимый граф является графом K_5 или содержит часть, гомеоморфную графу $K_{3,3}$.

Доказательство. Так как любой связный неплоский граф содержит более 4 вершин, то, (доказательству) ~~согласно~~ теореме I3.6, для данного неплоского не менее, чем 3-разделимого графа G в классе всех не менее, чем 3-разделимых графов определена хотя бы одна их операций ω_1, ω_2. Если граф G такой, что некоторый не менее, чем 3-разделимый граф $G_1 \in \{\omega_1, \omega_2\}(G)$ обладает доказываемым свойством или является плоским, то, согласно леммам I4.I-3, граф G является или графом K_5 или содержит часть, гомеоморфную графу $K_{3,3}$. Используя приведенное суждение в качестве шага индукции и отправляясь от графа K_5 , завершаем доказательство теоремы I4.I.

Понятно, что теорема Понтрягина-Куратовского является следствием теоремы I4.I, так как общеизвестна редукция вопроса о непланарности произвольного графа к вопросу о непланарности не менее, чем 3-разделимого графа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе ЛГ-анализ строения графов проведен в четырех направлениях: подготовлен некоторый общий аппарат, включающий средства описания графов и методы их исследования (глава I); получены некоторые сведения о графах с постоянным локальным строением, в том числе о циклических графах (глава 2); методом расширяющегося подграфа исследованы однородные графы со специальным локальным строением (глава 3); разработана система понятий локальной разложимости и продемонстрирована ее полезность в конкретных приложениях (глава 4). Полученные результаты и их сопоставление с другими родственными работами по теории графов (§ 3 и др.) свидетельствует о перспективности ЛГ-подхода. Представляется целесообразным как дальнейшее развитие теории ЛГ-анализа строения графов, так и попытки новых ее применений, ориентированных на конкретные вопросы естествознания.

В области теории, на наш взгляд, наиболее плодотворным направлением является дальнейшее развитие систем операций над графами и изучение основанного на них метода разложимости (локальной разложимости) в сочетании с методом расширяющегося подграфа. Понятие разложимости является не только средством структурного описания графов и их классов (где ее возможности далеко не исчерпаны §-ом I3). На ее основе можно попытаться сравнивать сложность различных графов или классов графов. В качестве меры сложности, например, для класса конечной локальной разложимости можно использовать $\min\limits_{\Omega}(|\Omega|+|\mathfrak{G}_0|)$ (обозн. § I2). Знание разложимости может оказаться полезным также для разработки алгоритмов нахождения некоторых характеристик графов. Результат § I4 непосредственно применим при реализации алгоритма установления планарности графа. Сходная идея уже реализована в [39] (см. § 3).

Необходимы дальнейшие исследования возможностей метода расширяющегося подграфа. Наряду с результатами §§ 8-I0 нужно отметить, что этим методом легко найти кратчайшее остовное дерево графа со взвешенными ребрами. Действительно, если такое дерево известно для некоторого связного подграфа, то, расширяя этот подграф ближайшей не принадлежащей ему вершиной, (строим) новое кратчайшее остовное дерево ~~строится~~ добавлением к старому дереву этой вершины и кратчайшего ребра, соединяющего ее с ним. На основе метода расширяющегося подграфа намечено разработать новые алгоритмы установления планарности и числа связности данного графа.

Существует, конечно, много характеристик графов, для нахождения которых локальный метод расширяющегося подграфа неприменим. Так, при автоматическом размещении элементов электронных схем необходимо найти оптимальную укладку непланарного графа в плоскость. В рамках этой задачи появляется проблема эффективного нахождения плотности (~~или~~ наибольшего полного подграфа) некоторого графа. При использовании ~~Используя~~ здесь метода расширяющегося подграфа, требуется накапливать много промежуточных данных. На таком накоплении основан алгоритм [I6], поэтому он применим лишь к специальным графам. Более удовлетворительно эта проблема решается с использованием рекуррентного соотношения § 2 и идеи [AI]. В настоящее время ведутся работы по сокращению возникающего перебора.

Метод расширяющегося подграфа оказывается полезным при решении другой прикладной задачи. В настоящее время нами разрабатывается способ опознавания графических изображений письменных знаков. Для этого рассматриваемое изображение представляется подграфом некоторого опорного "графа рецепторов" и исследуется вместе с его дополнением в этом опорном графе (по определению, графы $G(A), G(B)$, где $A, B \subset G'$, дополняют друг друга в графе G, если $A \cap B = \varnothing, A \cup B = G'$). Признаки знака выражаются через особенности взаимного расположения этих двух подграфов, которое описывается в терминах теории графов и ЛГ-анализа. Выявление конкретных особенностей происходит с помощью специальных методов просмотра графа, основанных на локальном расширении подграфов.

В §§ 8,9 приведены теоремы, доказательства которых требовали просмотра большого количества случаев взаимного расположения в данном графе простого цикла и окружения некоторой вершины этого цикла. Такой просмотр становится недоступным человеку в усиленных вариантах этих теорем, которые тем не менее представляются верными (например, гипотеза о панцикличности связного 7-однородного графа, окружения всех вершин которого не менее, чем 2-связны, см. § 8). Целесообразно составление особой диалоговой программы для ЭВМ, которая автономно провела бы значительную часть необходимой работы.

Из сказанного видно, что ЛГ-анализ строения графов имеет ряд перспективных применений. Мы надеемся, что он окажется полезным также в других областях: в исследовании вычислительных систем, при разработке многопроцессорных комплексов управления и обработки информации, в изучении и моделировании строения мозга. Классическая теория графов трудноприложима к перечисленным вопросам, так как она в основном развивается в глобальном, комбинаторном направлении. Последнее является причиной нередко наблюдаемого подхода, когда исследователи по существу используют лишь определение графа, а не результаты их теоретического изучения. В исследовании реальных систем главную роль играют связностные свойства, близость элементов, локальные образования. Поэтому здесь необходим именно ЛГ-подход, в исследовании графов выражающийся как ЛГ-анализ их строения.*)

---

*) Толчком к настоящим исследованиям была попытка вообразить однородное дискретное физическое пространство, т.е. реальную систему с некоторыми данными локальными свойствами. Это заставило изучать графы, ориентируясь на их локальные свойства, считаясь с особенностями реальных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агакишиева С.Я. Графы, окружением вершин которых служат простые цепи или простые циклы. Докл. АН Аз.ССР, 1970, 26, № 12, 7-10.

2. Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети. М., "Наука", 1974, 368.

3. Башмаков И.А., Кохов В.А. Использование однородной вычислительной структуры для решения структурно-комбинаторных задач теории графов. Тр.Моск.энерг.ин-та, 1974, вып.178, 133-141.

4. Берж К. Теория графов и ее применения. М., "ИЛ", 1962, 319.

5. Булитко В.К. О некоторых алгоритмических проблемах в теории графов. Автореферат диссертации на соиск.уч.ст. канд.физ.-мат.наук, Московский Гос.Пед.ин-т, Москва, 1973.

6. Булитко В.К. К вопросу о конечности однородных структур, заданных локально. В сб."Вопросы экономики моря и морского транспорта". Ин-т экономики АН УССР, Одесса, 1972, 159-165.

7. Булитко В.К. О графах с заданными окружениями вершин. Тр.матем.ин-та АН СССР, т.133, 1973, 79-94.

8. Ветухновский Ф.Я. О покрытиях графа системой окрестностей его вершин. ДАН 1964, 158, 1, 21-24.

9. Ветухновский Ф.Я. Задачи о покрытиях графа системой окрестностей его вершин. Сб. "Проблемы кибернетики", вып.I9, М., "Наука", I967, 47-74.

I0. Визинг В.Г. Некоторые нерешенные задачи в теории графов. УМН, I968, 23, вып.6(I44), II7-I34.

II. Визинг В.Г. О минимальной связности графов с транзитивной группой автоморфизмов. В сб. "Управляемые системы", вып.7, Новосибирск, I970, 46-50.

I2. Гаврилюк О.Н. Исследование локальной структуры 5--связных графов с существенными ребрами. В сб. "Φ--перетворення графiв", Київ, I973, 326.

I3. Зибинь Д.К. Транзисторные триггеры с большим числом устойчивых состояний. Диссертация на соиск.уч.ст. канд.техн.наук, АН Латв.ССР, Отдел физических и технических наук, Рига, I968.

I4. Зыков А.А. О некоторых свойствах линейных комплексов. Матем.сборник, I949, 24, № 2, I63-I88.

I5. Зыков А.А. Теория конечных графов I. "Наука", Сибирское отделение, Новосибирск, I969, 544.

I6. Илзиня И.Г. О нахождении клик графа. "Автоматика и вычислительная техника", I967, 2, 7-II.

I7. Кац А.О. О вполне неоднородных графах. Учен.зап. (ЛГУ им.П.Стучки), I975, т.242, I28-I3I.

I8. Кельманс А.К. О свойствах характерного многочлена графа. В сб."Кибернетику - на службу коммунизму", т.4, I967, М.-Л., "Энергия", 27-4I.

19. Кельманс А.К. Графы с одинаковым числом путей длины 2 между смежными и несмежными парами вершин. В сб. "Вопросы кибернетики", М., 1973, 70-75.

20. Мадер В. Минимальные n -связные графы с максимальным числом ребер. В сб."Теория графов", М., "Мир", 1974, 48-58.

21. Максименков А.В., Михайлов А.В. Нахождение путей в графе методом последовательного разрастания ребер. "Электронная техника", 1970, серия 6, Микроэлектроника, вып.4(25), 92-97.

22. Мелихов А.Н., Берштейн Л.С., Курейчик В.М. Применение графов для проектирования дискретных устройств. М., "Наука", 1974, 304.

23. Оре О. Теория графов. М., "Наука", 1968, 352.

24. Перепелица В.А. Асимптотический подход к решению некоторых экстремальных задач на графах. Сб. "Проблемы кибернетики", 1973, вып.26, М.,"Наука", 291-314.

25. Петренюк Л.П., Петренюк А.Я. Перечень десятивершинных однородных графов степени 4. В сб. "Вопросы кибернетики". Труды 2 Всесоюзного семинара по комбинаторной математике, вып.15, ч.2, Изд.АН СССР, 1975, 71-76.

26. Розенфельд М.З. О построении и свойствах некоторых классов сильно регулярных графов. УМН, 1973, 28, вып. 3(171), 197-198.

27. Старобинец С.М. О наибольшем внутренне устойчивом множестве графа. "Кибернетика", 1975, № 2, 61–63.

28. Титов В.К. Неразделимые сети и графы. В сб. "Кибернетику – на службу коммунизму", т.4, 1967, М.–Л., "Энергия", 18–26.

29. Харари Ф. Теория графов. М., "Мир", 1973, 302.

30. Хоменко Н.П., Гаврилюк О.Н. Свойства k -связных графов с существенными ребрами. В сб. "Топологические аспекты теории графов", Ин-т математики АН УССР, Киев, 1971, 166–183.

31. Хоменко Н.П., Гаврилюк О.Н. Существование k -связных графов с приписанными степенями вершин. В сб. "Топологические аспекты теории графов", Ин-т математики АН УССР, Киев, 1971, 201–203.

32. Хопкрофт Дж.Е., Тарьян Р.Е. Изоморфизм планарных графов. В сб. "Кибернетический сборник № 12", М., "Мир", 1975, 39–61.

33. Эргашев Г. Реберная функция, связанная с количеством циклов длины четыре в графе. Тр.Самарканд.ун-та, 1970, вып.191, 220–222.

34. Barnette D. On generating planar graphs. "Discrete Math.", 1974, 7, No.3, 199–208.

35. Boesch F.T. The strongest monotone degree condition for n -connectedness of a graph. "J.Combin.Theory", 1974, B16, No.2, 162–165.

36. Bondy J.A. Pancyclic graphs I. "J.Combin.Theory", 1971, B11, No.1, 80-84.

37. Bosak J., Kotzig A., Znam Š. On some metric problems in graph theory. "Beitr.Graphentheorie. Internat.Kolloq.Manebach, 1967", Leipzig, 1968, 33-36.

38. Bose R.C., Shrikhande S.S. Graphs in which each pair of vertices is adjacent to the same number d of other vertices, "Stud.Sci.Math.Hung.", 1970, 5, No.1-2, 181-195.

39. Bruno J., Steiglitz K., Weinberg L. A new planarity test based on 3-connectivity. "IEEE Trans.Circuit. Theory", 1970, 17, No.2, 197-206.

40. Chartrand G., Kaugars A., Lick Don R. Critically n-connected graphs. "Proc.Amer.Math.Soc.", 1972, 32, No.1, 63-68.

41. Chartrand G., Pippert R.E. Locally connected graphs. "Čas.pěstov.mat.", 1974, 99, No.2, 158-163.

42. Chvátal V. Planarity of graphs with given degrees of vertices. "Nieuw.arch.wiskunde", 1969, 17, No.1, 47-60.

43. Cvetković D.M. Über die Zerlegung eines Graphen in ein Produkt von Graphen. "18.Int.Wiss.Kolloq.Techn. Hochsch.Ilmenau, 1973, Ht2", S.1, s.a., 57-58.

44. d'Ambly C.-G. Graphen mit genau drei Knotenpunkten gleicher Valenz. "18.Int.Wiss.Kolloq.Techn.Hochsch. Ilmenau, 1973. Ht2", S.1., s.a., 11-16.

45. Djokovič D.Ž. Isomorphism problem for a special class of graphs. "Acta.Math.Acad.Scient.Hung.", 1970, T21 (3-4), 267-270.

46. Elspas B., Turner J. Graphs with circulant adjacence matrices. "J.Combin.Theory", 1970, No.9, 297-307.

47. Entringer R.C., Gassman L.D. Line-critical point determining and point distinguishing graphs. РЖ Математика, I975, 5B498.

48. Goodman S., Hedetniemi S. Sufficient conditions for a graph to be Hamiltonian. "J.Combin.Theory", 1974, B16, No.2, 175-180.

49. Halin R. A theorem on n-connected graphs. "J.Combin. Theory", 1969, 7, No.2, 150-154.

50. Harary F., Stockmeyer P.K. Planar composite graphs. "An.Acad.brasil.Ciênc.", 1971, 43, No.2, 325-329.

51. Hedetniemi S.T. Hereditary properties of graphs. "J.Combin.Theory", 1973, B14, No.1, 94-99.

52. Hedman B. A sufficient condition for n-short-connectedness. РЖ Математика, I975, 2B524.

53. Hopcroft J.E., Tarjan R.E. Dividing a graph into triconnected components. "SIAM J.Comput.", 1973, 2, No.3, 135-158.

54. Jacoš V., Jendrol' S. A problem concerning j-pancyclic graphs. "Mat.cas.", 1974, 24, No.1, 259-262.

55. Knauer B. Ein algorithmisches Planaritätskriterium. "Z.angew.Math. und Mech.", 1973,53,No.4, T215-T216.

56. Lick Don R. Characterizations of n -connected and n -line connected graphs. РЖ Математика, 1973, 10В327.

57. Mader W. Über den Zusammenhang symmetrischer Graphen. "Arch.Math.", 1970, 21, No.3, 331-336.

58. Mader W. Eine Eigenschaft der Atome endlicher Graphen. "Arch.Math.", 1971, 22, No.3, 333-336.

59. Mader W. Ecken vom Grad n in minimalen n -fach zusammenhängenden Graphen. "Arch.Math.", 1972, 23, No.2, 219-224.

60. Mader W. Grad und lokaler Zusammenhang in endlichen Graphen. "Math.Ann.", 1973, 205, No.1, 9-11.

61. Mader W. Kantendisjunkte Wege in Graphen. РЖ Математика, 1975, 6В479.

62. Mader W. Kreuzungsfreie a,b -Wege in endlichen Graphen. РЖ Математика, 1975, 9В310.

63. Nebeský L. On connected graphs containing exactly two points of the same degree. "Čas.pěstov.mat.", 1973, 98, No.3, 305-306.

64. Šeidel J.J. Strongly regular graphs. "Recent.Progr. Combinator." New-York-London, 1969, 185-198.

65. Sharp H.Jr. Locally complete graphs. "Pacif.J.Math." 1973, 47, No.1, 243-250.

66. Skupień Z. Problemy i twierdzenia dotyczące grafów lokalnie hamiltonowskich. "Zesz.nauk.Akad.górn.-hutn.", 1969, No.208, 23-30.

67. Sumner D.P. Point determination in graphs. "Discrete Math.", 1973, 5, No.2, 179-187.

68. Sumner D.P. Graphs indecomposable with respect of the $\mathcal{X}$-join. РЖ Математика, 1974, 6В451.

69. Tarjan R.E. An efficient planarity algorithm. Tecnical Report STAN-CS-244-71, Computer Science Department, Stanford University, Stanford, California, p.154.

70. Toida S. Properties of a planar cubic graph. "J. Franklin Inst.", 1973, 295, No.2, 165-174.

71. Toida S. Construction of quartic graphs. "J.Combin. Theory", 1974, B16, No.2, 124-133.

72. Turner J. Point-symmetric graphs with a prime number of points. "J.Combin.Theory", 1967, No.3, 136-145.

73. Tutte W.J. A theory of 3-connected graphs. "Indeg. Math.", 1961, 23, No.4, 441-455.

74. Vanderjagt D.W. Sufficient conditions for locally connected graphs. "Čas.pěstov.mat.", 1974, 99, No.4, 400-404.

75. Vanderjagt D.W. Graphs with prescribed local connectivities. РЖ Математика, 1975, 5В452.

76. Walther H., Voß H.-J. Über Kreise in Graphen. Berlin, VEB Dtsch.Verl.Wiss., 1974, 271 S.

А1. Кикуст П.Б. Нахождение максимальных полных подграфов неориентированного униграфа. ГФПА, 1971, инв.№ П000127.

А2. Кикуст П.Б. О структуре графов с изоморфными окружениями вершин. Депонировано в ВИНИТИ 29.09.72. № 4817-72 Деп. РЖМат?

А3. Кикуст П.Б. О строении циклических графов. Учен.зап. {ЛГУ им.П.Стучки}, 1975, т.242, 120-127.

А4. Кикуст П.Б. Гамильтонов цикл в однородном графе степени 5. Депонировано в ВИНИТИ 27.10.72. №4872-72 Деп. РЖМат ?

А5. Кикуст П.Б. Гамильтонов цикл в однородном графе. Депонировано в ВИНИТИ 20.03.73 № 5666-73 Деп. РЖМат?

А6. Кикуст П.Б. О существовании гамильтонова цикла в однородном графе степени 5. Латвийский математический ежегодник, 16, Рига, "Зинатне", 1975, 33-38.

А7. Кикуст П.Б. Локальная разложимость в классах графов. Латвийский математический ежегодник, 20, Рига, "Зинатне", 1976, 180-189.

Р И С У Н К И

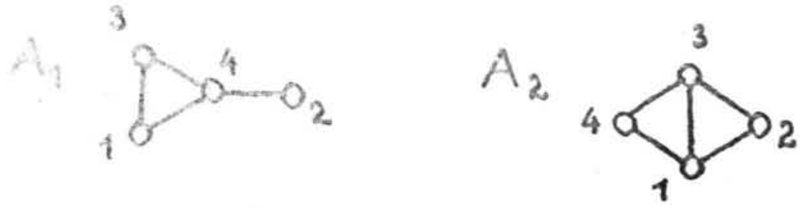

Рис. I

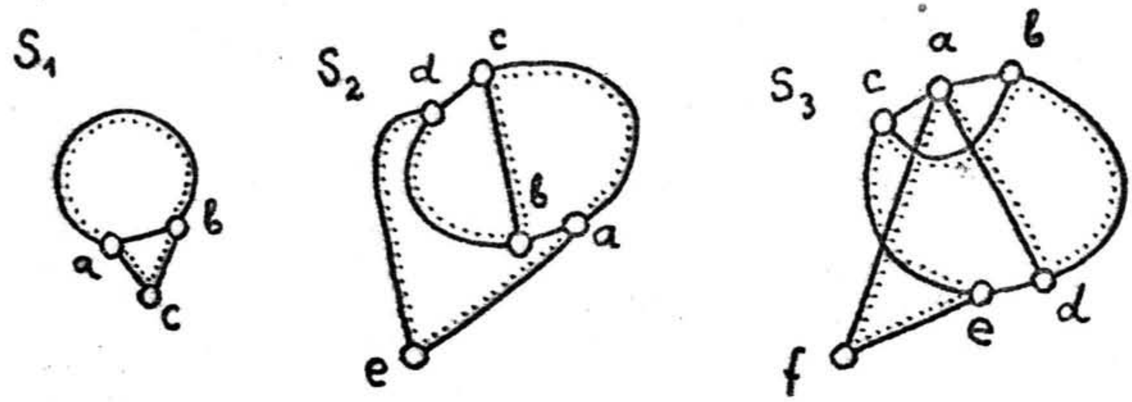

Рис. 2

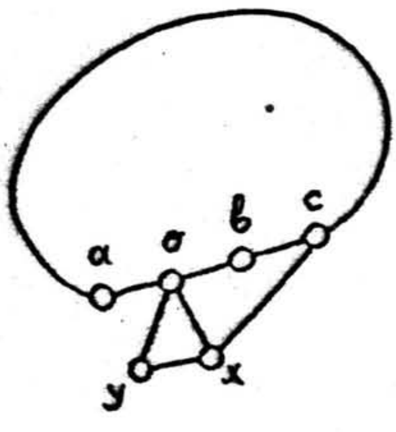

Рис. 3

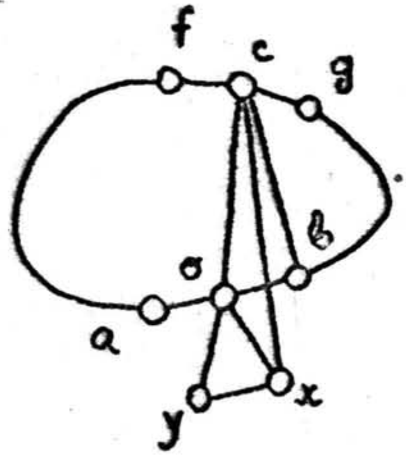

Рис. 4

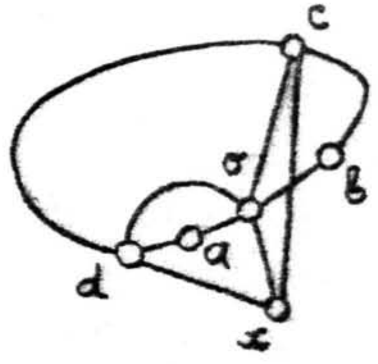

Рис. 5

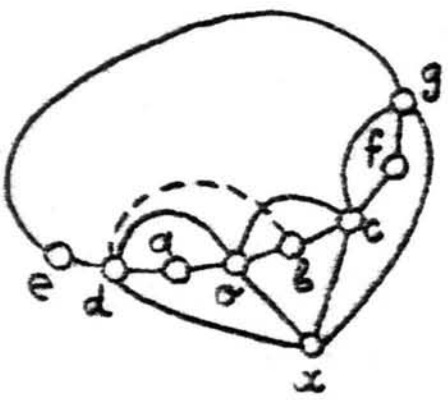

Рис. 6

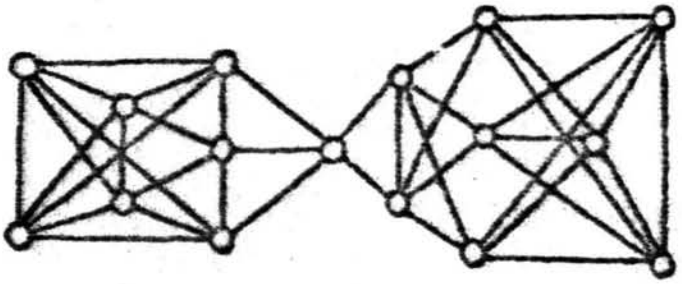

Рис. 7

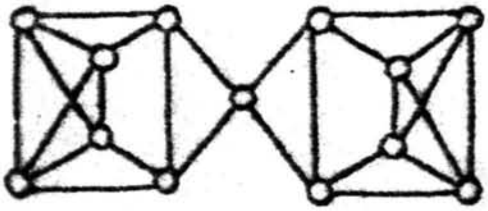

Рис. 8

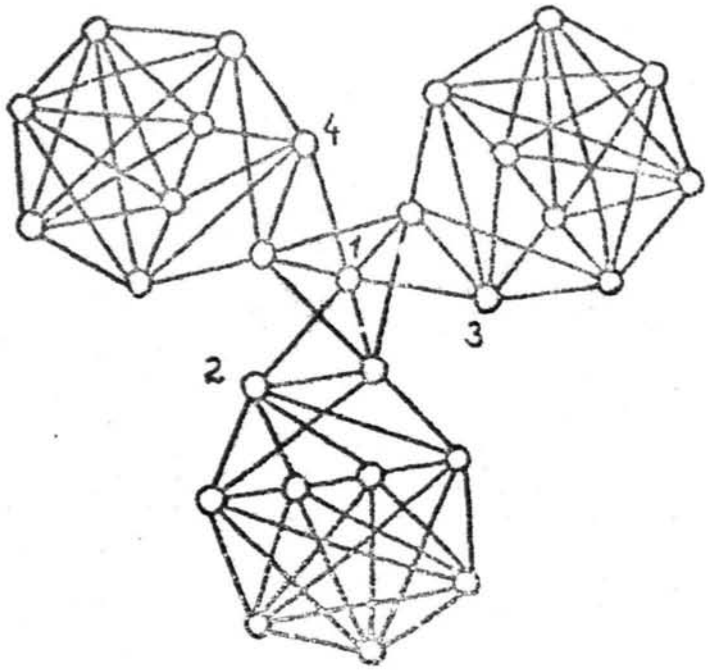

Рис. 9

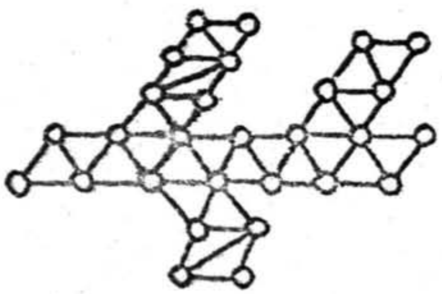

Рис.10

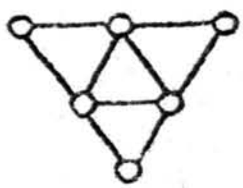

Рис. II

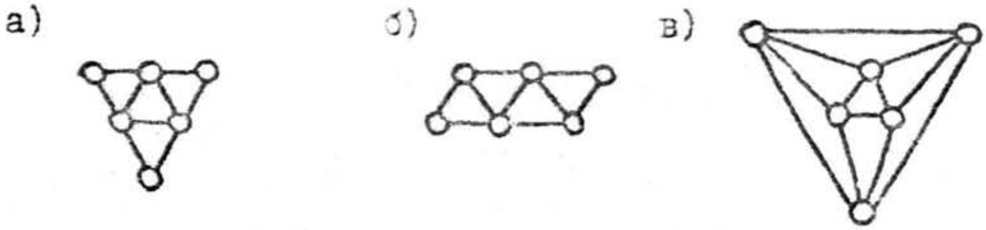

Рис. I2

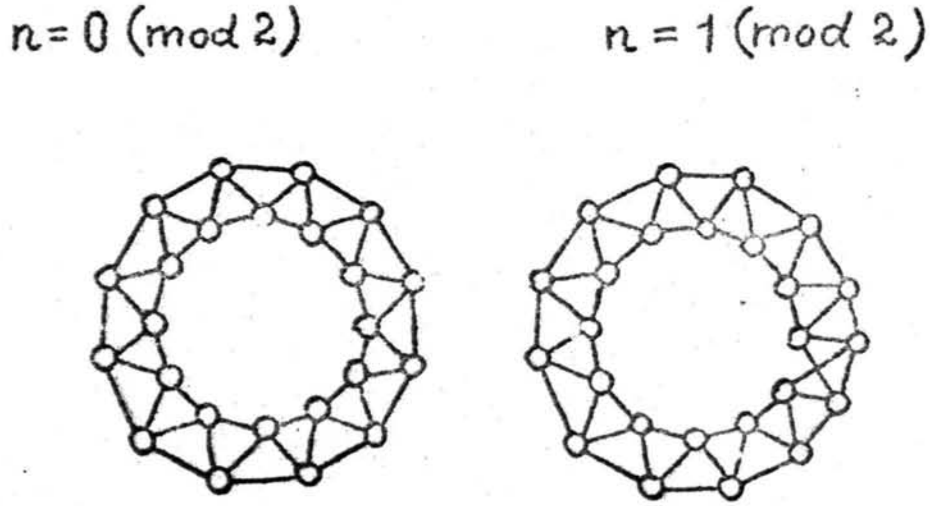

Рис. I3

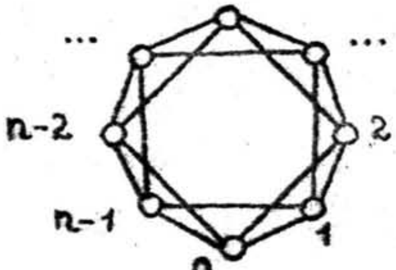

Рис. I4

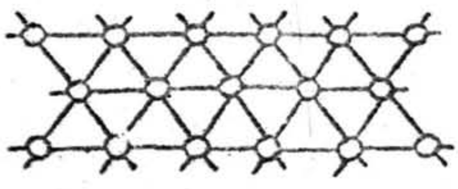

Рис. I5

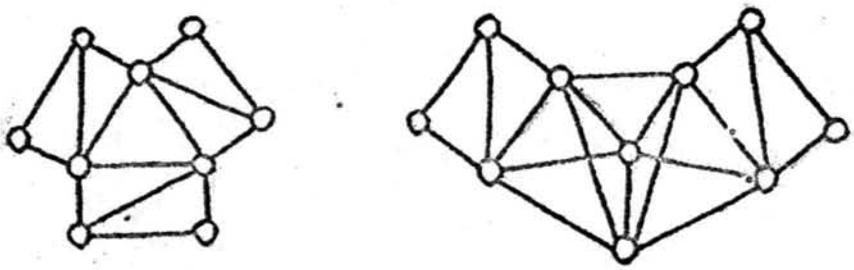

Рис. I6

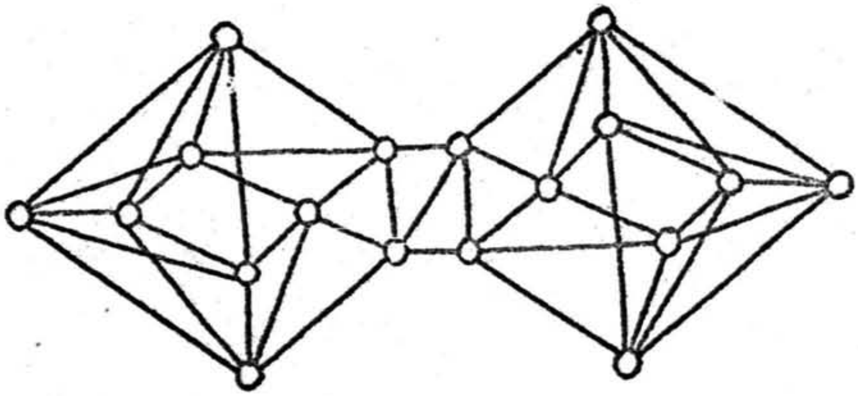

Рис. I7

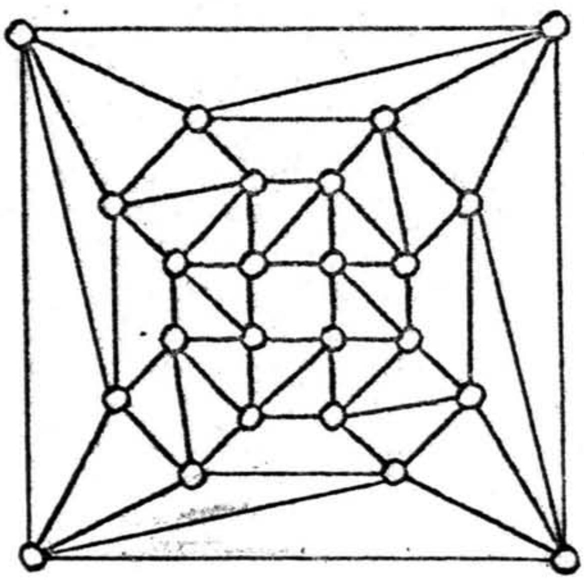

Рис. I8

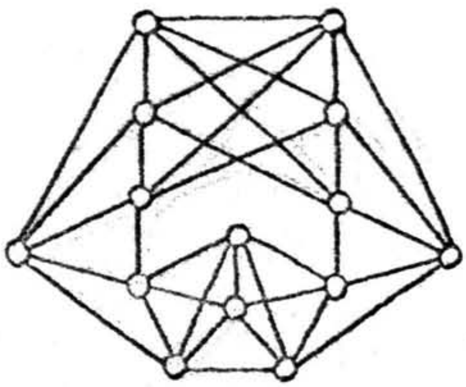

Рис. I9

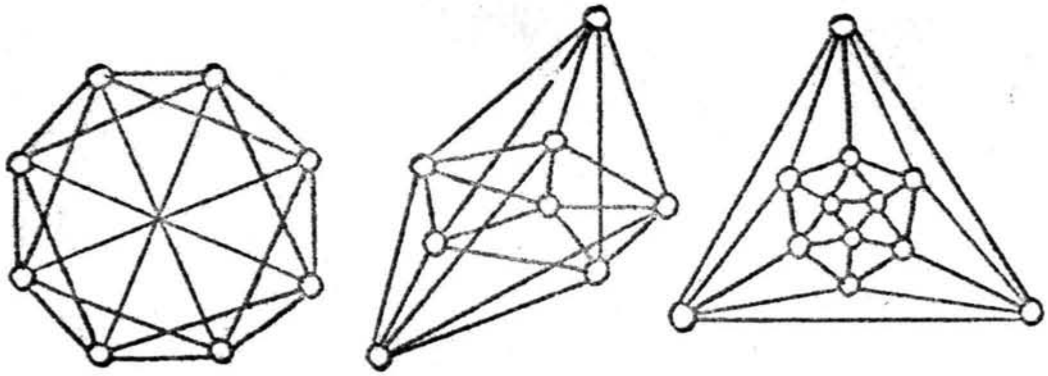

Рис. 20

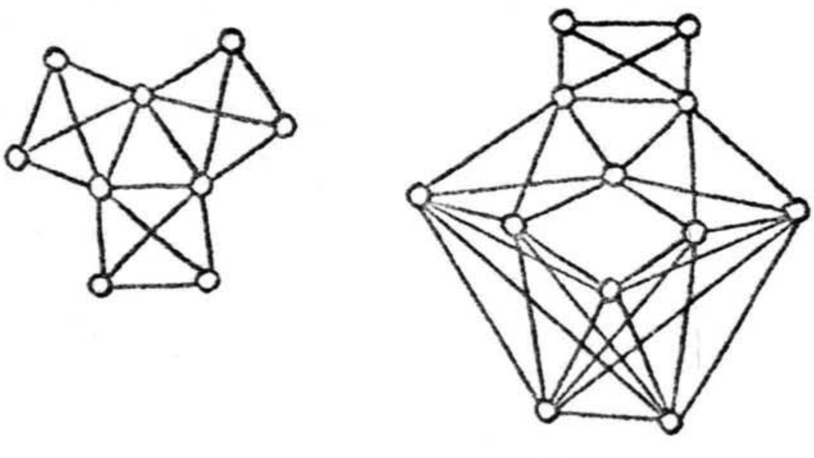

Рис. 2I

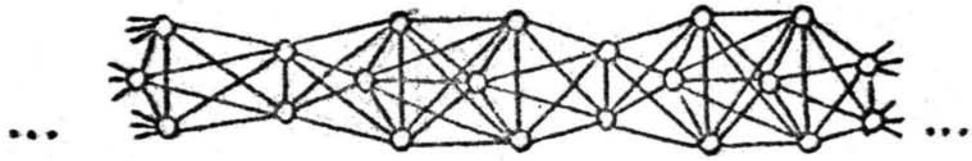

Рис. 22

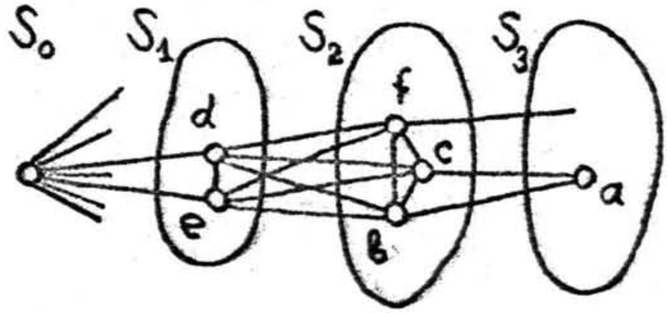

Рис. 23

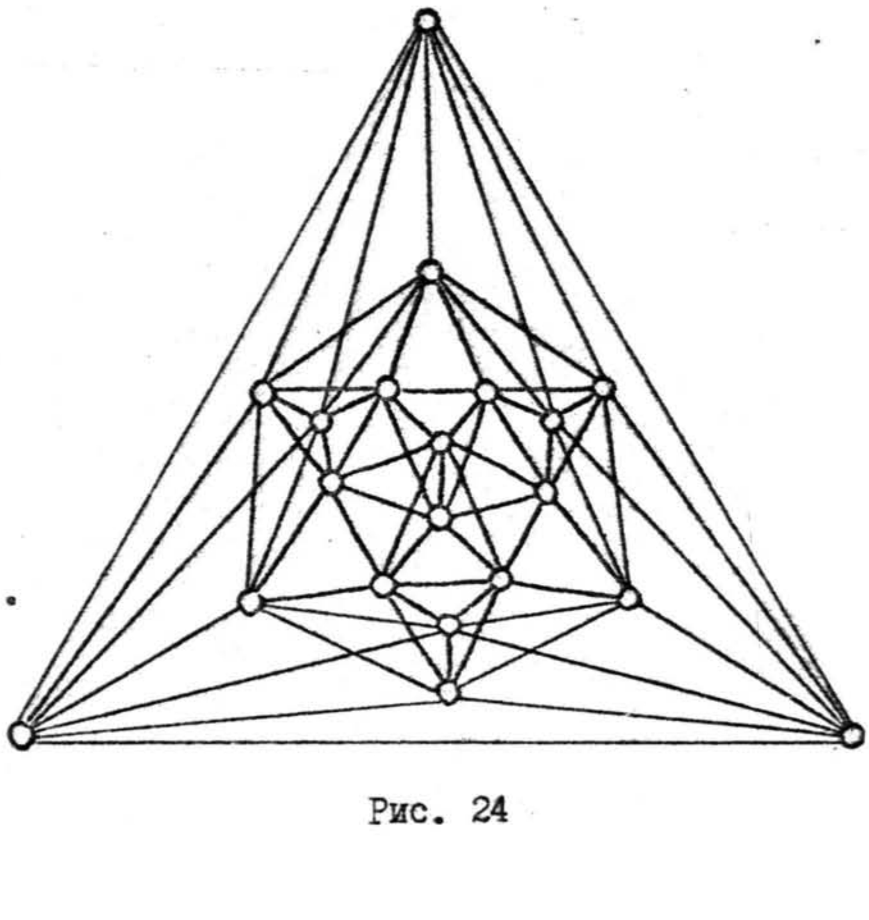

Рис. 24

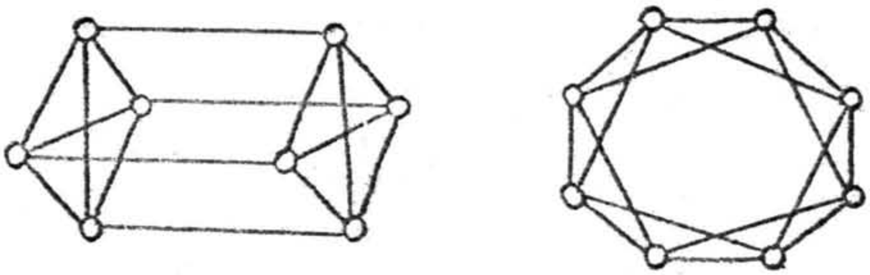

Рис. 25

Рис. 26

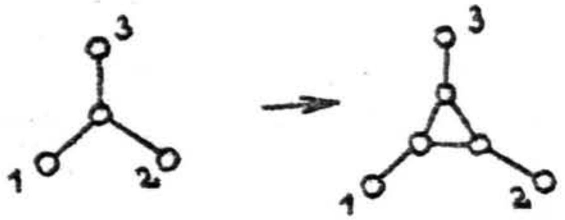

Рис. 27

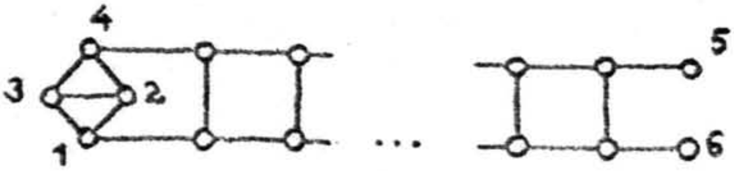

Рис. 28

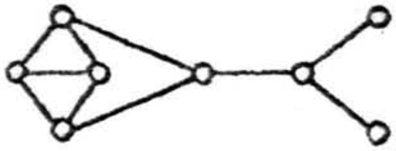

Рис.29

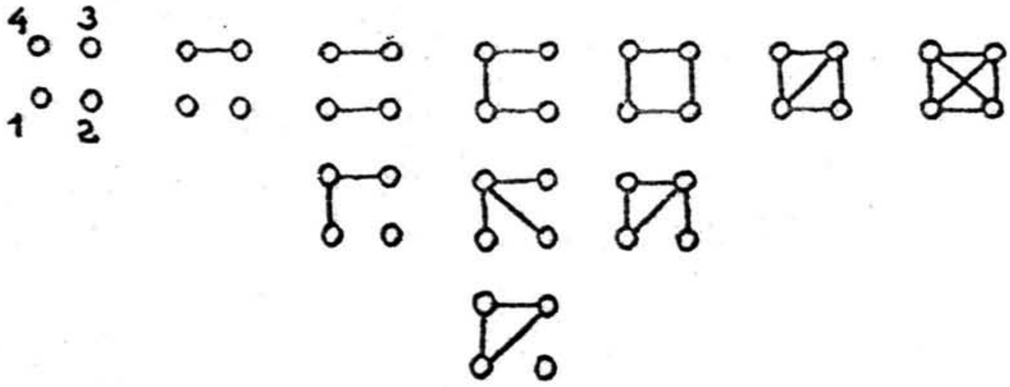

Рис. 30

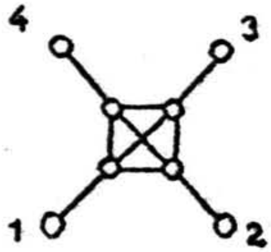

Рис. 3I

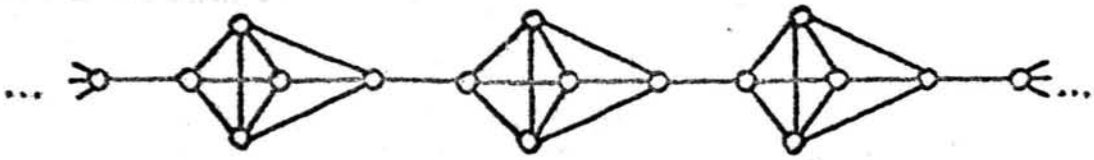

Рис. 32

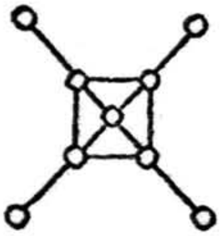

Рис. 33

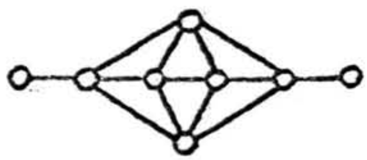

Рис. 34

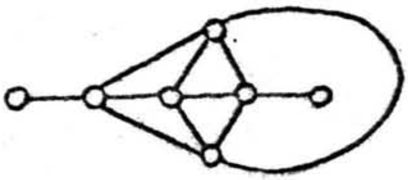

Рис. 35

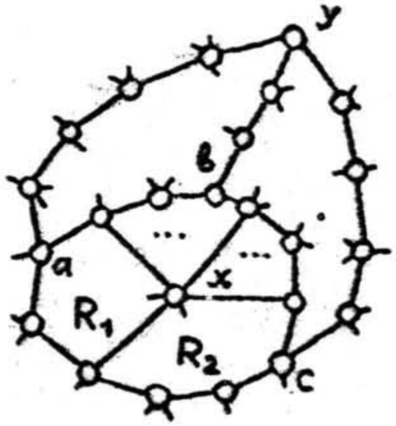

Рис. 36

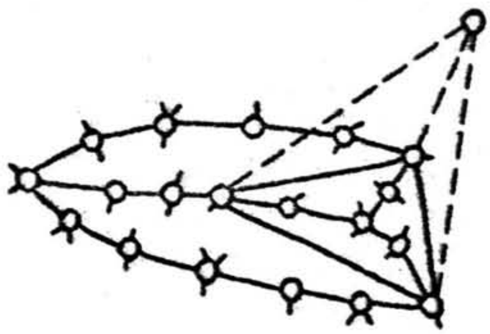

Рис. 37