ЛАТВИЙСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ПЕТРА СТУЧКИ

На правах рукописи

Подниекс Карлис Мартынович

СРАВНЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ И ВЕРОЯТНОСТНЫХ СТРАТЕГИЙ СИНТЕЗА ПРОГРАММ

01.01.09. - математическая кибернетика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: доктор
физико-математических наук,
старший научный сотрудник
Барздинь Ян Мартынович

20.II 79
KPodn

Рига - 1978

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Обычно, когда "заказчик" сообщает программисту какой-либо алгоритм, он привлекает на помощь примеры, поясняя, как алгоритм должен работать при конкретных значениях входных данных. На основе таких примеров программист обычно в состоянии усвоить **п р и н ц и п** работы алгоритма и после этого - применять его при **д р у г и х** значениях входных данных. В то же время традиционные языки программирования (предназначенные для сообщения алгоритмов вычислительной машине) требуют уже с самого начала **и с ч е р п ы в а ю щ е е** описание алгоритма. Возникает вопрос: нельзя ли создать "автоматический синтезатор программ", способный: а) воспринимать информацию о том, как требуемая программа должна работать в конкретных случаях, б) строить на основе этой неполной (но пополнимой) информации программу, которая работает требуемым образом во **в с е х** случаях.

В последнее время этот вопрос привлекает все большее внимание. На сегодня имеется уже не только большое количество теоретических работ, изучающих различные абстрактные модели "синтеза программ по примерам", но и отдельные экспериментальные разработки - реализованные на ЭВМ синтезаторы, справляю -

щиеся с синтезом небольших программ.

Обзор состояния экспериментальных разработок дан в статье А.Бирмана "Подходы к автоматическому программированию" (Бирман [1976]). До создания практически полезного синтезатора еще далеко - существующие синтезаторы имеют весьма скромные возможности. Построены они, опираясь на эвристические соображения. Сообщаемые синтезаторам "примеры работы алгоритма" содержат не только конкретные значения входа и выхода, но и "историю" выхода - некоторую информацию о тех операциях, которые приводят к преобразованию входа в выход.

Большинство теоретических работ, изучающих проблему синтеза программ по примерам, опирается на абстрактную теорию алгоритмов (см., например, Голд [1965] , Барздинь и Фрейвалд [1972], Блюм и Блюм [1975]). Только одна заметка Барздиня [1974б] рассматривает синтез по примерам с "историями", в остальных работах пример - это конкретная пара "вход-выход", без какой-либо информации о том, какие операции стоят между входом и выходом. Все разнообразие теоретических моделей синтеза программ по примерам приблизительно подходит под следующую схему.

Дана последовательность значений:

$$f(0), f(1), f(2), \ldots, f(m), \ldots \qquad (*)$$

некоторой общерекурсивной функции. По этой последовательности требуется построить геделевский номер функции f (т.е. машину Тьюринга, вычисляющую эту функцию). "Построение" понимается "в пределе" - разрешается выдвигать гипотезы, исправлять их, лишь бы только полученная последовательность гипотез (каждая из которых опирается на изучение конечного куска последовательности (*)), начиная с некоторого момента, стабилизировалась на "верной" гипотезе.

Так как никакая эффективная процедура не в состоянии решить такую задачу для в с е х общерекурсивных функций (это впервые было замечено Голдом [1967]), то естественно обратиться к более узким классам общерекурсивных функций, для которых единую процедуру синтеза получить можно. Изучение общих свойств таких "синтезируемых" классов (в различных моделях синтеза) является одним из двух основных теоретических направлений в области синтеза по примерам (см., например, Голд [1967] , Барздинь и Фрейвалд [1972] , Блюм и Блюм [1975], Вихаген и Липе [1976], Подниекс [1974, 1975в] , Фрейвалд [1974]).

Другим направлением является изучение необходимого числа исправлений гипотезы. Здесь рассматриваются, как правило, классы общерекурсивных функций, обладающие вычислимой нумерацией. Как заметил еще Голд [1965], для таких классов заведомо существуют синтезаторы (простейший из них перебирает функции класса в порядке нумерации, стабилизируясь на функции, значения которой дают в точности последовательность (*)). Барз -

динь и Фрейвалд [1972, 1974] , Подниекс [1975а, 1977а,1977б] оценивали необходимое число исправлений гипотезы при синтезе n-ой функции класса (при заданной нумерации).

Несмотря на довольно большое разнообразие существующих теоретических моделей, они, как правило, еще далеки от реальной ситуации. Преодоление разрыва между теоретическими исследованиями и экспериментальными разработками - это, по-видимому, самая актуальная задача в области синтеза по примерам.

Данная диссертация относится к теоретическому направлению исследований синтеза по примерам. Однако, уровень абстракции, принятый в ней, несколько ближе к реальной ситуации по сравнению с другими теоретическими работами. Грубо говоря, отличие состоит в том, что если в других работах синтезатору оставляется, по-существу, неограниченная область для выбора программы-гипотезы, то в данной работе область выбора программы всегда предполагается конечной. Такое ограничение ближе к реальной ситуации, поскольку реальному синтезатору естественно задавать не только примеры работы алгоритма, но и некоторые общие требования к программе, в частности, естественно задавать верхнюю границу сложности программы. Подобные требования выделяют в классе всех возможных программ конечное подмножество, в котором синтезатору разрешается выбирать свои программы-гипотезы. Принятое ограничение, несмотря на свою внешнюю незначительность, делает доступными изучению важные "количественные" стороны синтеза по примерам.

Основной задачей, решаемой в диссертации, является оценка необходимого и достаточного числа исправлений программы - гипотезы в ситуации, когда синтезатор имеет выбор из n программ. В этом аспекте изучаются синтезаторы, использующие датчики случайных чисел (вероятностные синтезаторы), и синтезаторы, которые их не используют (детерминированные синтезаторы).

В диссертации решается также следующая задача. Как известно, общая проблема эквивалентности программ алгоритмически неразрешима. Это, как правило, затрудняет синтезатору перебор при поиске нужной программы. Какую часть "трудности синтеза" следует отнести на счет указанной неразрешимости? Ответ на этот вопрос можно получить, изучая две постановки синтеза по примерам: а) когда специальный "оракул" сообщает синтезатору, которые из тех n программ, из которых требуется выбрать нужную, эквивалентны, и которые - нет, б) когда синтезатор этой информации не получает. Сравнение необходимого числа исправлений гипотезы в обоих случаях и должно определить вес той части "трудности синтеза", которая приходится на неразрешимость проблемы эквивалентности программ.

Из шести асимптотически точных оценок числа исправлений гипотезы, содержащихся в диссертации (см.заключение), три самые простые получены с помощью идей, взятых из работы Барздиня и Фрейвалда [1974], Остальные оценки получены автором впервые, специально разработанными для этого методами (см. теоремы 3,4,5,6,3',4').

Из результатов, полученных в диссертации, вытекают два вывода, которые могут оказаться полезными при практическом создании синтезаторов (см.заключение).

Диссертация состоит из трех глав и заключения. Объем диссертации - 96 страниц, список литературы содержит 20 названий, включая 6 работ автора.

Соответственно целям работы, глава I посвящена изучению детерминированных синтезаторов, а глава 2 - изучению вероятностных синтезаторов. В § 3 главы I и § 4 главы 2 установлено, какую часть "трудности синтеза" (в детерминированном и вероятностном случаях) составляет неразрешимость проблемы эквивалентности программ. Главу 3 составляет доказательство одной из теорем, сформулированных в главе 2. В заключении приведена таблица полученных оценок и выводы, вытекающие из их сравнения.

Основные результаты диссертации опубликованы и содержатся в статьях: Подниекс [1975а ,1975б, 1977а]. Результаты доложены на семинаре по математическим вопросам кибернетики Московского государственного университета и неоднократно обсуждались на семинарах по теории алгоритмов и программ Вычислительного центра Латвийского государственного университета.

НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ТЕХНИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА

N - множество всех натуральных чисел:

$$0, 1, 2, 3, \ldots$$

Функции типа $N \to N$ отождествляются с последовательностями значений:

$$f(0), f(1), f(2), f(3), \ldots$$

В свете этого отождествления должны быть понятны обозначения:

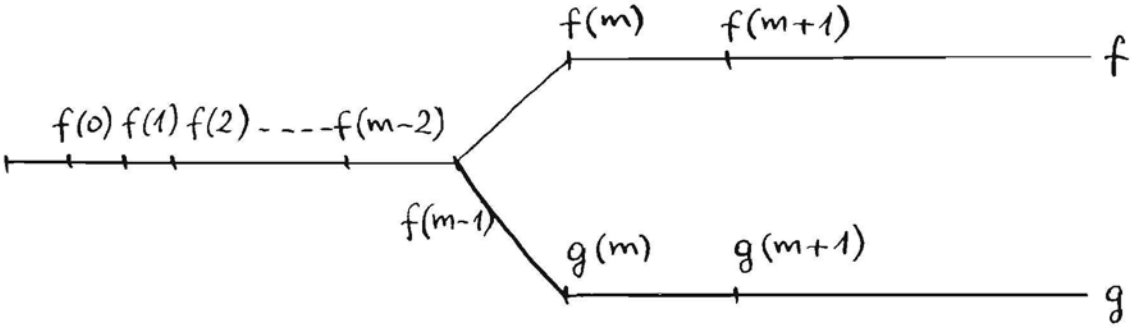
0^∞ - функция, тождественно равная нулю,

$0^k 1 0^\infty$ - функция, равная нулю всюду, за исключением $x = k$, где она равна единице,

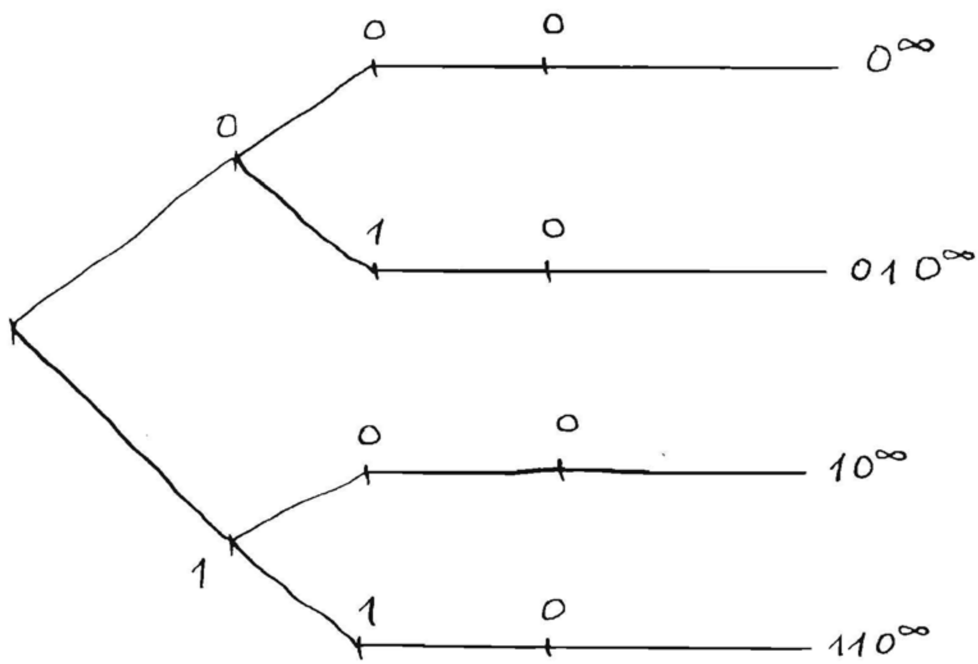
$\bar{\alpha} i 0^\infty$ - функция, первые значения которой образуют слово $\bar{\alpha} = \alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_m$, затем следует значение i, дальше все значения равны нулю.

Очень важным для понимания доказательств является понятие **дерева функций**. В таком дереве каждой функции f типа $N \to N$ соответствует бесконечная ветвь, разделенная вершинами на равные дуги. Вершины, начиная со второй, помечаются значениями функции:

Если функция f совпадает с g при $x = 0, 1, \ldots, m-1$, но $f(m) \neq g(m)$, получается следующая картина:



Следующий пример завершает определение понятия: дерево функций, принадлежащих множеству $\{0^\infty, 010^\infty, 10^\infty, 110^\infty\}$, имеет вид:



Глава I. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ СИНТЕЗ

§ I. Постановка задачи

Как уже было сказано, уровень абстракции, принятый в диссертации, несколько отличается от уровня, принятого в других теоретических работах по проблеме. Два основных момента, тем не менее, остаются общими:

I) считается, что любая программа вычисляет частично - рекурсивную функцию типа $N \to N$, где $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$,

2) аналогом вычислительной машины считается любая вычислимая нумерация $\varphi = \{\varphi_n \mid n \in N\}$ ч.р.функций типа $N \to N$ (программами считаются φ -номера, номер n "вычисляет" функцию φ_n). Вычислимость нумерации означает, что $\varphi_n(x)$ - ч.р.функция типа $N \times N \to N$.

Ниже фигурируют только вычислимые нумерации ч.р.функций типа $N \to N$, поэтому будем называть их просто нумерациями. Это могут быть: нумерации всех ч.р.функций или подкласса их, например, нумерация примитивно-рекурсивных функций или нумерация функций, вычислимых на конечных автоматах (в последнем случае номер представляет собой закодированную диаграмму автомата). С практической точки зрения наиболее интересно именно это разнообразие "узких" классов функций, порождаемое различными абстрактными моделями вычислительных устройств (конечными автоматами с различным числом лент и головок, автоматами с магазинной памятью и т.д.). Синтез по примерам может изучаться для каждого из классов в отдельности. В диссертации, однако, изучаются не особенности синтеза в различных классах функций, а то общее, что свойственно всем этим классам.

Как уже было сказано, синтезатору будет задаваться к о н е ч н а я область выбора гипотез. Более точно, если зафиксирована нумерация φ, синтезатор получает код $<s_1, \dots, s_n>$ конечного набора φ-номеров (по коду можно эффективно восстановить n и все s_i). Практически интересны, в основном, нумерации всюду определенных (общерекурсивных) функций, однако, результаты, полученные в диссертации, справедливы и для нумераций, содержащих частичные функции, если предположить, что в задаваемом синтезатору наборе $\{s_1, \dots, s_n\}$ всегда все s_i вычисляют всюду определенные функции.

Пусть φ - нумерация. С т р а т е г и е й с и н т е з а φ - н о м е р о в будем называть любую ч.р.функцию $F(x,y)$ типа $N \times N \to N$, которая действует следующим образом:

а) вместо x подставляется код $<s_1, \dots, s_n>$ произвольного конечного набора общерекурсивных φ-номеров (сам набор $\{s_1, \dots, s_n\}$ называется о б л а с т ь ю д о п у с т и м ы х г и п о т е з);

б) вместо y подставляется код $<f(0), \dots, f(m)>$ начального куска произвольной функции f, принадлежащей набору $\{\varphi_{s_1}, \dots, \varphi_{s_n}\}$;

в) для каждой такой пары (x, y) значение

$$F(<s_1, \ldots, s_n>, <f(0), \ldots, f(m)>)$$

должно быть определено и равно некоторому s_i.

Таким образом, стратегия получает область допустимых гипотез $<s_1, \ldots, s_n>$ и конечный набор значений $f(0), \ldots, f(m)$, причем известно, что один из номеров s_i вычисляет функцию f, но неизвестно, какой именно. Исходя из этой информации, стратегия выдает в качестве гипотезы одно из чисел s_i, которое, "по ее мнению", является номером f. В результате каждой функции f из набора $\{\varphi_{s_1}, \ldots, \varphi_{s_n}\}$ стратегия сопоставляет последовательность гипотез:

$$F(<s_1, \ldots, s_n>, <f(0)>) = s_{i_0},$$

$$F(<s_1, \ldots, s_n>, <f(0), f(1)>) = s_{i_1},$$

$$F(<s_1, \ldots, s_n>, <f(0), f(1), f(2)>) = s_{i_2},$$

\- - - - - - - - - - - - - - - - -

$$F(<s_1, \ldots, s_n>, <f(0), \ldots, f(m)>) = s_{i_m},$$

\- - - - - - - - - - - - - - - - -

Стратегию F будем называть синтезатором для нумерации φ, если во всех случаях, указанных в (а,б), последовательность гипотез

$$s_{i_0}, s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_m}, \ldots$$

стабилизируется на "верной" гипотезе (т.е. существует m_0 такое, что для всех $m > m_0$: $i_m = i_{m+1}$ и $\varphi_{s_{i_m}} \equiv f$).

Утверждение о существовании синтезаторов можно, при желании, приписать Голду [1965].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Для каждой нумерации существует синтезатор.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим для нумерации φ следующую стратегию T_φ . Если очередное новое значение $f(m)$ опровергает предыдущую гипотезу s_i (т.е. если $\varphi_{s_i}(m) \neq f(m)$), то новая гипотеза

$$T_\varphi(<s_1, \ldots, s_n>, <f(0), \ldots, f(m)>)$$

равна s_j с наименьшим j таким, что

$$(\forall x \leq m)\ \varphi_{s_j}(x) = f(x).$$

Если же старая гипотеза s_i такова, что $\varphi_{s_i}(m) = f(m)$, то оставим ее в силе.

Очевидно, T_φ - синтезатор для φ.

ЗАМЕЧАНИЕ. Может возникнуть вопрос: не сохраняет ли предложение I (и другие результаты, изложенные ниже) свою справедливость и в случае, если в пункте (а) определения понятия стратегии отбросить требование, чтобы все s_i вычисляли всюду определенные функции. Отбросив это требование, мы получили бы понятие "сильного" синтезатора, который должен справляться с задачей синтеза и в тех случаях, когда среди номеров s_i в наборе $\{s_1, \ldots, s_n\}$ некоторые вычисляют частичные функции.

Но в этом случае имеет место

ТЕОРЕМА I. Если φ - геделевская нумерация, то для φ не существует "сильных" синтезаторов.

Д о к а з а т е л ь с т в о см. в следующем параграфе.

Напомним, что нумерация φ называется геделевской, если для всякой другой нумерации ψ существует эффективная процедура, позволяющая по ψ -номеру всякой функции найти ее φ-номер.

Эффективность синтезатора можно оценивать, исходя из нескольких критериев.

I. С л о ж н о с т ь   р е а л и з а ц и и (объем программы, реализующей синтезатор). Синтезаторы T_φ программируются очень легко.

2. П о л н о е   в р е м я   с и н т е з а (с момента получения первого значения $f(0)$ до стабилизации на верной гипотезе).

В сколько-нибудь сложных случаях абсолютная уверенность в правильности программы, выданной синтезатором, не наступает никогда - невозможно испытать программу для всех случаев ее будущей практической работы. На принятом в диссертации уровне абстракции этому явлению соответствует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если φ -геделевская нумерация, то ни для какого синтезатора F не существует ч.р.функции $r(x)$ такой, что для всех наборов $\{s_1, \ldots, s_n\}$ о.р. φ-номеров:

а) значение $r(<s_1, \ldots, s_n>)$ определено,

б) для любой функции $f \in \{\varphi_{s_1}, \ldots, \varphi_{s_n}\}$ полное время синтеза не превосходит $r(<s_1, \ldots, s_n>)$.

Доказательство. Простое рассуждение от противного, использующее теорему о рекурсии (в случае необходимости см.доказательство теоремы 2 в следующем параграфе).

Итак, в случае геделевской нумерации невозможна эффективная процедура, позволяющая заранее предсказать полное время, необходимое для синтеза "абсолютно правильной" программы.Поэтому попытаемся посмотреть на проблему полного времени несколько иначе. "Разумный" синтезатор не пытается исправлять свою гипотезу, если новые данные ей не противоречат. Потребность в новой гипотезе возникает лишь в случае появления противоречащей информации (например, если s_i - старая гипотеза, и мы получаем новое значение $f(m)$, отличающееся от ожидаемого $\varphi_{s_i}(m)$). Проверка старой гипотезы на новых данных логически значительно проще выдвижения новой гипотезы. Попытаемся поэтому проигнорировать время, уходящее на проверку, и сосредоточиться на изучении двух факторов: а) числа изменений (исправлений, обновлений) гипотезы до наступления стабилизации, б) сложности выдвижения новой гипотезы (когда это требуется). Вместе взятые, эти два параметра могут служить заменой полного времени синтеза.

Более точно, синтезатор F будем называть "разумным", если:

а) всякая гипотеза

$$F(\langle s_1, \ldots, s_n \rangle, \langle f(0), \ldots, f(m) \rangle) = s_i$$

обладает свойством $(\forall j \leq m)\ \varphi_{s_i}(j) = f(j)$,

б) в случае, когда полученная новая информация не противоречит предыдущей гипотезе s_i (т.е. если $\varphi_{s_i}(m+1) = f(m+1)$) новая гипотеза не строится.

Требование (а), очевидно, обязательно для всякого синтезатора программ - каждая программа-гипотеза, выданная синтезатором, должна работать верно по крайней мере на примерах, которые сообщались синтезатору.

Синтезаторы T_φ (см.выше) являются, очевидно, "разумными". Продолжим изучение критериев эффективности синтезаторов.

3. Число исправлений гипотезы до стабилизации на верной гипотезе. При прочих равных параметрах предпочтительнее синтезатор, который реже исправляет гипотезы. Такой синтезатор извлекает из предложенных ему данных больше информации. И наша уверенность в правильности программы, выданной синтезатором, будет расти тем скорее, чем реже тот исправляет свои гипотезы.

Что можно сказать об эффективности синтезатора T_φ в смысле третьего критерия? При синтезе номера функции φ_{s_i} (где номер s_i находится в наборе $\{s_1, \ldots, s_n\}$) в худшем случае может быть сделано $i-1$ исправление: от s_1 к s_2, от s_2 к s_3,..., от s_{i-1} к s_i. Получается, что ожидаемая оценка числа исправлений будет зависеть только от числа n, а не от всего набора $\{s_1, \ldots, s_n\}$. Введем поэтому следующие показатели эффективности произвольного синтезатора F.

1) $F^{MAX}(n) = \max F^{oo}(<s_1, \ldots, s_n>, f)$,

где F^{oo} - число исправлений гипотезы F для функции f и $\max$ берется по всем парам $(<s_1, \ldots, s_n>, f)$ таким, что а) $<s_1, \ldots, s_n>$ - набор из n общерекурсивных φ-номеров, б) функция f принадлежит набору $\{\varphi_{s_1}, \ldots, \varphi_{s_n}\}$, т.е. здесь идет речь о максимальном числе исправлений гипотезы в ситуации, когда нужно сделать выбор из n возможностей.

2) $F^{AVE}(n) = \max \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} F^{oo}(<s_1, \ldots, s_n>, \varphi_{s_i})$,

где $\max$ берется по всем наборам $<s_1, \ldots, s_n>$ из n о.р. φ-номеров. Здесь речь идет о среднем числе исправлений гипотезы в ситуации, когда нужно сделать выбор из n возможностей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если F - любой "разумный" синтезатор для нумерации φ (в частности, если $F = T_\varphi$), то для всех n :

$$F^{MAX}(n) \leq n-1, \quad F^{AVE}(n) \leq \frac{1}{2}(n-1).$$

Доказательство. Непосредственно, индукцией по n.

ТЕОРЕМА 2. Если φ – геделевская нумерация, то для любого синтезатора F и всех n:

$$F^{MAX}(n) \geq n-1, \quad F^{AVE}(n) \geq \frac{1}{2}(n-1).$$

Доказательство изложено в следующем параграфе.

Оказывается, таким образом, что для геделевских нумераций все "разумные" синтезаторы равноценны (в смысле третьего критерия) тривиальному синтезатору T_φ и что "неразумный" синтезатор не может быть лучше "разумного".

4. Сложность выдвижения новой гипотезы. Так как все "разумные" синтезаторы равноценны в смысле третьего критерия (число обновлений гипотезы), то возникает вопрос: какова минимально необходимая сложность вычисления новой гипотезы для таких синтезаторов? Сама постановка вопроса нуждается в уточнении, но поскольку он в диссертации не изучается, мы не будем этого делать.

В следующем параграфе приводятся доказательства обеих теорем, сформулированных выше. В последнем, третьем параграфе главы, изучается влияние проблемы эквивалентности на оценки числа обновлений гипотезы при детерминированном синтезе.

§ 2. Доказательство теоремы I и теоремы 2.

В этом параграфе изложены доказательства двух теорем, использованных в предыдущем параграфе.

ТЕОРЕМА I. Для геделевских нумераций не существует сильных синтезаторов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся эквивалентностью т.н. предельных вычислений и вычислений с оракулом ϕ' (см. Роджерс [1972], гл.XII, эквивалентность эта отмечалась Патнэмом [1965] и Голдом [1965]). Возьмем два множества $A, B \subseteq N$, не пересекающихся, рекурсивно перечислимые с оракулом ϕ' и рекурсивно неотделимые с этим оракулом. Каждому $x \in N$ сопоставим два φ-номера $s_1(x), s_2(x)$ следующим образом. Пусть $g_A(n,x), g_B(n,x)$ - предельные частичные характеристические функции множеств A, B, т.е. для каждого x:

$$x \in A \longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} g_A(n,x) = 1,$$

$$x \in B \longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} g_B(n,x) = 1.$$

Последовательность значений функции $\varphi_{s_1(x)}$ состоит, по определению, из стольких нулей, сколько в последовательности $\{g_A(n,x) \mid n \in N\}$ значений, отличных от 1. Аналогично с помощью B определяется $\varphi_{s_2(x)}$. (Геделевость нумерации φ обеспечивает общерекурсивность функций $s_1(x), s_2(x)$).

Таким образом, если $x \in A$, то $\varphi_{s_1(x)}(y)$ определено (и равно нулю) только для конечного числа значений y, если же $x \notin A$, то $\varphi_{s_1(x)} \equiv 0^\infty$. Аналогично, если $x \in B$, то $\varphi_{s_2(x)}$ - функция с конечной областью определения, если же $x \notin B$, то $\varphi_{s_2(x)} \equiv 0^\infty$.

Допустим теперь, что для нумерации φ существует сильный синтезатор F. Тогда для любого $x \in N$ последовательность гипотез

$$F(<s_1(x), s_2(x)>, <0^n>) \qquad (*)$$

стабилизируется либо на $s_1(x)$, либо на $s_2(x)$. Если стабилизация происходит на $s_1(x)$, то $x \notin A$. Если стабилизация происходит на $s_2(x)$, то $x \notin B$. Получается, что множества A, B предельно рекурсивно отделимы - множество C:

$$x \in C \longleftrightarrow \lim_{n \to \infty} (*) = s_1(x)$$

предельно рекурсивно (т.е. рекурсивно с оракулом ϕ') и отделяет A от B. Это противоречие и доказывает теорему I.

ТЕОРЕМА 2. Если φ - геделевская нумерация, то для любого синтезатора F и всех n:

$$F^{MAX}(n) \geq n-1, \quad F^{AVE}(n) \geq \frac{1}{2}(n-1).$$

Доказательство. Пусть k -любой φ-номер. Разобьем функцию φ_k на n частей:

$$\varphi_k(0),\ \varphi_k(n),\ \varphi_k(2n), \ldots$$
$$\varphi_k(1),\ \varphi_k(n+1),\ \varphi_k(2n+1), \ldots$$
$$\varphi_k(2),\ \varphi_k(n+2),\ \varphi_k(2n+2), \ldots$$
$$- - - - - - - - - - - - - -$$
$$\varphi_k(n-1),\ \varphi_k(2n-1),\ \varphi_k(3n-1), \ldots$$

Если ℓ -ю часть $(\ell = 1, 2, \ldots, n)$ обозначить через $\psi_{k\ell}$, то поскольку нумерация φ -геделевская, найдутся о.р.функции $g_1, g_2, \ldots, g_n$ такие, что для всех k :

$$\psi_{k1} = \varphi_{g_1(k)}, \ \psi_{k2} = \varphi_{g_2(k)}, \ \ldots, \ \psi_{kn} = \varphi_{g_n(k)}.$$

Набор $\langle g_1(k), \ldots, g_n(k) \rangle$ будем подавать синтезатору F в качестве области допустимых гипотез и, наблюдая за работой F, будем строить следующий набор функций $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$.

Параллельно: I) ищем число x_1 такое, что гипотеза

$$F(\langle g_1(k), \ldots, g_n(k) \rangle, \langle 0^{x_1} \rangle)$$

определена и равна некоторому $g_{i_1}(k)$, 2) присваиваем функциям σ_i в качестве значений все новые и новые нули:

$$\sigma_i(0) = 0, \ \sigma_i(1) = 0, \ \sigma_i(2) = 0, \ \ldots \ .$$

Если нужное нам число x_1 так и не будет найдено, все σ_i окажутся тождественно равными нулю. Если же x_1 будет найдено, то: а) функцию σ_{i_1} определяем до конца: $\sigma_{i_1} = 0^{y_1} 1 0^{\infty}$ (здесь 0^{y_1} - начальный кусок, полученный функцией σ_{i_1} к моменту нахождения числа x_1), б) остальные функции σ_i $(i \neq i_1)$ получают 0^{y_1+1} в качестве начального куска.

После этого параллельно: I) ищем $x_2 > x_1$ такое, что гипотеза

$$F(\langle g_1(k), \ldots, g_n(k) \rangle, \langle 0^{x_2} \rangle)$$

определена и равна некоторому $g_{i_2}(k)$, где $i_2 \neq i_1$, 2) добавляем в функции σ_i $(i \neq i_1)$ все новые и новые нули. Когда x_2 найдено: а) функцию σ_{i_2} определяем до конца: $\sigma_{i_2} = 0^{y_2}10^{\infty}$ (здесь 0^{y_2} - начальный кусок σ_{i_2}, образованный к моменту нахождения x_2), б) остальные функции σ_i $(i \neq i_1, i_2)$ получают 0^{y_2+1} в качестве начальных кусков.

После этого параллельно: I) ищем $x_3 > x_2$ такое, что гипотеза

$$F(<g_1(k), \ldots, g_n(k)>, <0^{x_3}>)$$

определена и равна некоторому $g_{i_3}(k)$, где $i_3 \neq i_1, i_2$ и т.д. Всего может быть не более $n-1$ "параллельно" (когда найдено $x_{n-1} > x_{n-2}$ и определена до конца функция $\sigma_{i_{n-1}}$, остается уже только одна функция σ_{i_n}, которую полагаем тождественно равной нулю). Ср. доказательство теоремы I в статье Барздиня [1974а].

В зависимости от того, сколько чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots$ будет найдено, столько исправлений гипотезы вынужден будет сделать синтезатор F на функции 0^{∞} ... при условии, что φ-номера $g_1(k), \ldots, g_n(k)$ имеют какое-либо отношение к функциям $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Нужного нам отношения ($g_i(k)$ - номер σ_i) можно добиться с помощью теоремы о рекурсии. Если функции σ_i собрать вместе в одну функцию:

$$\sigma_1(0), \sigma_2(0), \ldots, \sigma_n(0), \sigma_1(1), \sigma_2(1), \ldots,$$

получится некоторая функция с φ-номером $g(k)$, где g -

о.р.функция. По теореме о рекурсии найдется k_0 такое, что $\varphi_{k_0} \equiv \varphi_{g(k_0)}$, т.е. также

$$\varphi_{g_1(k_0)} \equiv \sigma_1, \ \varphi_{g_2(k_0)} \equiv \sigma_2, \ \dots, \ \varphi_{g_n(k_0)} \equiv \sigma_n .$$

Так как среди о.р. φ -номеров $g_1(k_0), \dots, g_n(k_0)$ имеется и номер функции 0^∞, то в процессе построения функций $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ (для данного специального k_0) будут найдены все числа $x_1, \dots, x_{n-1}$ и, следовательно, на функции 0^∞ синтезатор F будет исправлять гипотезу не менее $n-1$ раза. Это значит, что $F^{MAX}(n) \geq n-1$.

Оценка среднего числа исправлений (по всем функциям σ_i) получается, если заметить, что если на функции $\sigma_{i_n} = 0^\infty$ синтезатор F вынужден делать не менее $n-1$ исправления, то на $\sigma_{i_{n-1}}$ -не менее $n-2$ исправлений,... и т.д. - на функции σ_{i_2} - не менее одного исправления. Суммарное число исправлений, таким образом, не меньше

$$1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2} ,$$

а среднее число $\geq \frac{1}{2}(n-1)$, что и требовалось.

Теорема 2 доказана.

§ 3. Влияние проблемы эквивалентности.

Как известно, проблема эквивалентности программ в самой общей постановке алгоритмически неразрешима. На принятом здесь уровне абстракции это означает, что для геделевской нумерации φ предикат

$$P_\varphi(i,j) \overset{def}{\longleftrightarrow} (\varphi_i, \varphi_j - \text{о.р.функции}) \& (\varphi_i \equiv \varphi_j)$$

нельзя расширить до рекурсивного предиката (всякое расширение P_φ является Π_2^0 -универсальным, см. Роджерс [1972], гл. XIУ).

Результаты, рассмотренные выше, не зависят от возможности решать в произвольном наборе φ -номеров $\langle s_1, \ldots, s_n \rangle$, которые из номеров s_i представляют одну и ту же функцию. Возникает вопрос - каков "вклад" проблемы эквивалентности в оценку $n-1$ теоремы 2?

Ответ на этот вопрос можно получить следующим образом. Будем рассматривать синтез с дополнительной информацией - наряду с "областью допустимых гипотез" $\langle s_1, \ldots, s_n \rangle$ стратегия будет получать предикат

$$P(i,j) \longleftrightarrow (\varphi_{s_i} \equiv \varphi_{s_j}).$$

Формально, стратегией, предполагающей решение проблемы эквивалентности, будем называть 3-местную ч.р. функцию $F(x,y,z)$, действующую следующим образом:

I) вместо x подставляется, как прежде, код набора $\{s_1, \ldots, s_n\}$ о.р. φ -номеров,

2) вместо y подставляется код предиката $P(i,j)$, соответствующего набору $\{s_1, \ldots, s_n\}$ (так как область определения P конечна, кодирование не составляет проблемы),

3) вместо z подставляются коды начальных кусков синтезируемой функции,

4) значением

$$F(\langle s_1, \ldots, s_n \rangle, \langle P \rangle, \langle f(0), \ldots, f(m) \rangle)$$

должно быть всегда некоторое s_i.

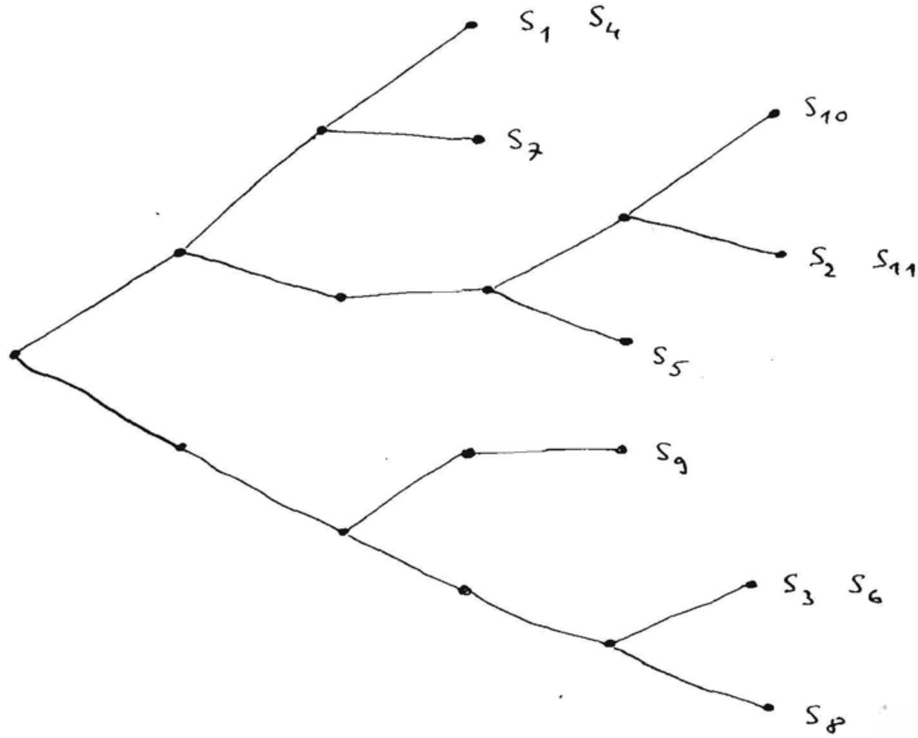
ТЕОРЕМА 3. Для всякой нумерации φ существует "разумный" синтезатор S_φ, предполагающий решение проблемы эквивалентности и такой, что для всех n:

$$S_\varphi^{MAX}(n) \leq \log_2 n, \quad S_\varphi^{AVE}(n) \leq \frac{1}{2} \log_2 n.$$

Перед тем, как теорему доказывать, заметим, что "разумность" синтезатора S_φ здесь существенна. Если отбросить требование "разумности", легко получить синтезатор U_φ, обладающий свойством: $U_\varphi^{MAX}(n) \leq 1$ для всех n. Синтезатор U_φ, используя предикат P, определяет "радиус различимости" набора $\{s_1, \ldots, s_n\}$, т.е. число m такое, что если φ_{s_i} отличается от φ_{s_j}, то $(\exists x \leq m)\, \varphi_{s_i}(x) \neq \varphi_{s_j}(x)$. Получив значение $f(0)$ синтезируемой функции, U_φ выдает в качестве гипотезы s_1 и оставляет эту гипотезу в силе до значения $f(m)$, когда выдает верную гипотезу. Ясно, что такой синтезатор не является "разумным" и ценность его минимальна.

Доказательство теоремы. Синтезатор S_φ строится по идее Я.М.Барздиня, использованной в доказательстве теоремы 4 статьи Барздиня и Фрейвалда [1972] (см.также [1974]).

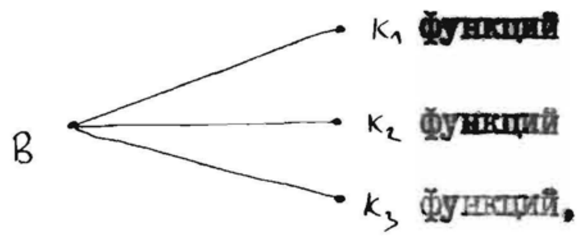
Имея предикат $P(i,j)$ (для набора о.р. φ-номеров $\{s_1,\dots,s_n\}$), синтезатор S_φ может получить полное представление о дереве функций набора $\{\varphi_{s_1},\dots,\varphi_{s_n}\}$ – может узнать все ветвления в этом дереве и их взаимное расположение, например:



Проблему составляет только выдвижение новой гипотезы, когда старая гипотеза обнаружила свою ошибочность. Пусть эта проблема возникла в точке A :

Треугольником обозначено дерево тех функций набора $\{\varphi_{s_1},\dots,\varphi_{s_n}\}$, которые проходят через точку A . Какой из номеров, оставшихся в этом дереве, выдать в качестве новой гипотезы? Следуя идее

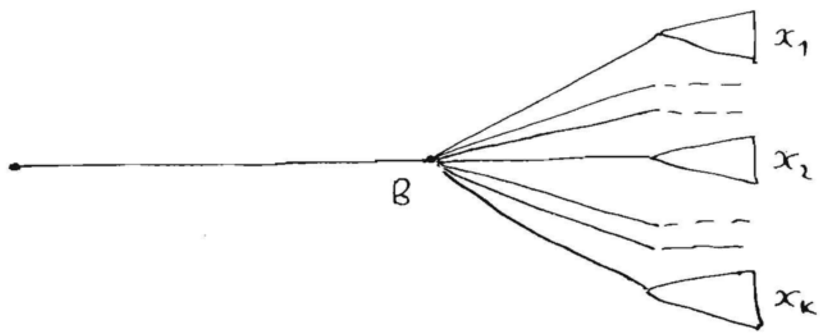
Барздиня, в каждой точке ветвления гипотеза должна следовать "в направлении большинства". Например, если из точки B функции уходят в трех направлениях:



то гипотеза должна следовать в сторону наибольшего из чисел k_i. Поэтому в качестве новой гипотезы в точке A стратегия S_φ выдает один из номеров, принадлежащих ветви, следующей из A в с е г д а в направлении большинства. Если такая гипотеза окажется ошибочной, сам факт ошибки будет давать максимум информации - выдвигая следующую гипотезу, мы будем делать выбор из вдвое меньшего числа возможностей.

Это значит, что сделав k обновлений гипотезы, синтезатор S_φ будет делать выбор не более, чем из $n \cdot 2^{-k}$ возможностей. Одна возможность остается всегда, поэтому $1 \leq n \cdot 2^{-k}$ и $k \leq \log_2 n$. Т.е. до того, как остановиться на верной гипотезе, синтезатор S_φ будет обновлять гипотезу не более $\log_2 n$ раз. Этим доказана оценка S_φ^{MAX}.

Для оценки среднего числа обновлений гипотезы S_φ^{AVE} проведем индукцию по числу ветвей в дереве функций набора $\{\varphi_{s_1}, \ldots, \varphi_{s_n}\}$. Если дерево не имеет ветвлений (базис индукции), то среднее (как и максимальное) число обновлений гипотезы синтезатора S_φ равно нулю, что $\leqslant \frac{1}{2}\log_2 1$. Предположим теперь (шаг индукции), что некоторое дерево состоит из x ветвей, причем первое ветвление распределяет по k различным направлениям соответственно $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ветвей:



Для дерева из x_i ветвей (где $x_i < x$) оценку среднего числа исправлений гипотезы будем считать доказанной - это число $\leqslant \frac{1}{2}\log_2 x_i$. Это значит, что по всем ветвям этого дерева сделано $\leqslant \frac{1}{2} x_i \log_2 x_i$ обновлений гипотез.

Сколько же обновлений будет сделано синтезатором S_φ в "большом" x-дереве? После прохода через точку ветвления B может быть сделано в сумме не более $x - \max_i \{x_i\}$ обновлений, а стало быть, всего в дереве не более

$$x - \max_i \{x_i\} + \sum_i \frac{1}{2} x_i \log_2 x_i .$$

Остается доказать, что это выражение не превосходит $\frac{1}{2} x \log_2 x$ (где $x = \sum x_i$). Разделим обе стороны требуемого неравенства на $x/2$:

$$2\left(1 - \max_i \left\{\frac{x_i}{x}\right\}\right) + \sum_i \frac{x_i}{x} \log_2 x_i \leqslant \log_2 x .$$

Представим, далее, $\log_2 x$ в виде

$$\sum_i \frac{x_i}{x} \log_2 x,$$

и перенесем обе суммы на одну сторону:

$$-\sum_i \frac{x_i}{x} \log_2 \frac{x_i}{x} \geq 2\left(1 - \max_i \left\{\frac{x_i}{x}\right\}\right).$$

Слева мы имеем теперь энтропию случайной величины X, которая принимает k различных значений в соответствии с распределением $(p_1, \ldots, p_k)$, где $p_i = x_i/x$. Итак, остается убедиться, что

$$H(p_1, \ldots, p_k) \geq 2\left(1 - \max_i \{p_i\}\right).$$

Это соотношение является тривиальным следствием аксиом Шеннона - достаточно провести индукцию по k.

Базис индукции: $k = 2$. Требуется доказать, что

$$H(p, 1-p) \geq 2 \min(p, 1-p),$$

т.е. при $0 \leq p \leq \frac{1}{2}$:

$$p \log_2 \frac{1}{p} + (1-p) \log_2 \frac{1}{1-p} \geq 2p,$$

что приводит к элементарному неравенству $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$:

$$p \log_2 \frac{1}{p} + (1-p) \log_2 \frac{1}{1-p} \geq p \log_2 \frac{1}{p(1-p)} \geq 2p.$$

Шаг индукции. По аксиоме Шеннона, если

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_k + p_{k+1} = 1,$$

то

$$H(p_1, \ldots, p_k, p_{k+1}) = H(p, p_{k+1}) + pH\left(\frac{p_1}{p}, \ldots, \frac{p_k}{p}\right),$$

где $p = p_1 + \cdots + p_k$. Симметричность функции H позволяет считать, что $p_{k+1} \le p_i$ для всех $1 \le i \le k$. В таком случае $p_{k+1} = 1 - p \le p$ и поэтому:

$$H(p_1, \ldots, p_k, p_{k+1}) \geq 2(1-p) + 2p\left(1 - \max_{1 \le i \le k}\left\{\frac{p_i}{p}\right\}\right) =$$

$$= 2\left(1 - \max_{1 \le i \le k+1}\{p_i\}\right),$$

что и требовалось.

Теорема 3 доказана.

ТЕОРЕМА 4. Если нумерация φ содержит все функции типа $N \to \{0,1\}$, равные нулю, начиная с некоторого места, то для любого "разумного" синтезатора F (предполагающего решение проблемы эквивалентности или нет) и всех n:

$$F^{MAX}(n) \geq \log_2 n - 1, \quad F^{AVE}(n) > \frac{1}{2}\log_2 n - 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим следующую последовательность таблиц:

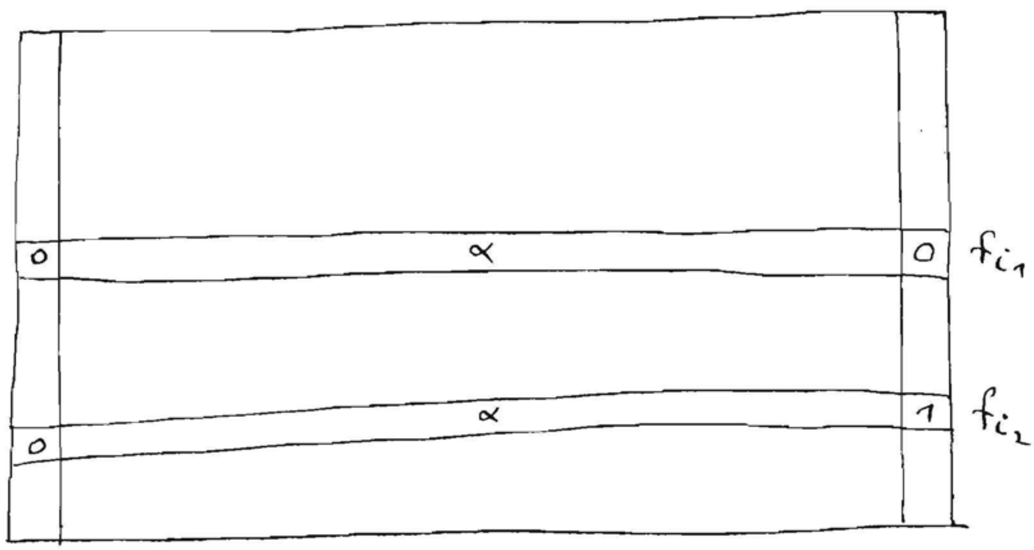
$$T_1 = \begin{array}{|c|}\hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline\end{array}\,, \quad T_2 = \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline\end{array}\,, \quad T_3 = \begin{array}{|cc|c|}\hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array}\,,$$

$$T_{k+1} = \begin{array}{|c|c|}\hline & 0 \\ T_k & \vdots \\ & 0 \\ \hline & 1 \\ T_k & \vdots \\ & 1 \\ \hline\end{array}\,, \quad \ldots$$

Очевидно, таблица T_k состоит в точности из всех 2^k двоичных слов длины k.

Для каждого n определяем набор из n функций $f_1, \ldots, f_n$. Берем первые n строк таблицы T_k, где $2^{k-1} < n \leq 2^k$, обозначаем эти строки через $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и определяем: $f_i = 0\alpha_i 0^\infty$. Все такие функции, по условию теоремы, находятся в нумерации φ. Рассмотрим работу "разумного" синтезатора F на функциях $f_1, \ldots, f_n$ (в качестве области допустимых гипотез $\{s_1, \ldots, s_n\}$ F получает какой-либо набор φ-номеров функций f_i, так как все f_i -разные, о предикате, решающем проблему эквивалентности, много говорить не приходится).

Строка α с номером s в таблице T_t появляется в таблице T_{t+1} дважды. Если $t+1<k$, получается следующая картина:



Какую бы гипотезу ни выдал синтезатор F по получении слова 0α, получив следующее значение, на о д н о й из функций f_{i_1}, f_{i_2} он будет вынужден эту гипотезу менять (как "разумный" синтезатор, обнаруживающий неверность предыдущей гипотезы). Отсюда следует, что на одной из функций f_i $(1 \leq i \leq \leq 2^{k-1} < n)$ F будет менять гипотезу не менее $k-1$ раз. Так как $k \geq \log_2 n$, то первая оценка теоремы доказана.

Перейдем теперь к оценке среднего числа исправлений. Сначала оценим суммарное число исправлений на всех функциях f_i.

Рассматривая таблицы T_1, T_2, T_3 и т.д., нетрудно заметить следующую закономерность:

I) Первые n строк таблицы T_k (где $2^{k-1}<n\leq 2^k$) содержат в п е р в о м с т о л б ц е $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ нулей и $\left[\frac{n}{2}\right]$ единиц (здесь $[\ ]$ - символ целой части). Этот столбец станет, таким образом, причиной не менее $\left[\frac{n}{2}\right]$ исправле -

ний гипотезы (если считать по всем функциям f_i), поскольку F – "разумный" синтезатор и поэтому обязан исправлять гипотезу сразу же, как обнаружена ее несостоятельность.

2) Первые n строк таблицы T_k содержат в первых двух столбцах $\left[\frac{n+3}{4}\right]$ раза 00, $\left[\frac{n+2}{4}\right]$ раза 10, $\left[\frac{n+1}{4}\right]$ раза 01, $\left[\frac{n}{4}\right]$ раза 11. Это значит, что второй столбец станет причиной всего не менее $\left[\frac{n+1}{4}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]$ исправлений.

3) Первые n строк T_k содержат в первых трех столбцах:

000	100	010	110	001	101	011	111
$\left[\frac{n+7}{8}\right]$	$\left[\frac{n+6}{8}\right]$	$\left[\frac{n+5}{8}\right]$	$\left[\frac{n+4}{8}\right]$	$\left[\frac{n+3}{8}\right]$	$\left[\frac{n+2}{8}\right]$	$\left[\frac{n+1}{8}\right]$	$\left[\frac{n}{8}\right]$

Это значит, что третий столбец станет причиной не менее

$$\left[\frac{n+3}{8}\right]+\left[\frac{n+2}{8}\right]+\left[\frac{n+1}{8}\right]+\left[\frac{n}{8}\right]$$

исправлений гипотезы.

Обобщая эти наблюдения, можно сказать, что s-ая с конца строка таблицы T_t (где $0 \le s \le 2^t-1$ и $t<k$) содержится в первых n строках таблицы T_k всего $\left[\frac{n+s}{2^t}\right]$ раза, и поэтому t-й столбец T_k станет причиной не менее

$$\sum_{s=0}^{2^{t-1}-1}\left[\frac{n+s}{2^t}\right]$$

исправлений гипотезы "разумного" синтезатора F (если считать по всем функциям f_i). Строгое доказательство этого утверждения не составляет труда (индукция по t).

Если n представить в виде $2^t q + r$, где $0 \le r < 2^t$, то оказывается, что $\left[\frac{n+s}{2^t}\right]$ меньше $\frac{n+s}{2^t}$ на величину $\frac{(r+s) \bmod 2^t}{2^t}$, т.е. рассматриваемая сумма меньше

$$\sum_{s=0}^{2^{t-1}-1} \frac{n+s}{2^t} = 2^{t-1} \cdot \frac{n}{2^t} + \frac{0 + 2^{t-1} - 1}{2} \cdot 2^{t-1} \cdot \frac{1}{2^t} =$$

$$= \frac{n}{2} + \frac{2^{t-1} - 1}{4}$$

максимум на величину суммы

$$\sum_{u=2^{t-1}}^{2^t - 1} \frac{u}{2^t} = \frac{2^{t-1} + 2^t - 1}{2} \cdot 2^{t-1} \cdot \frac{1}{2^t} = \frac{3 \cdot 2^{t-1} - 1}{4}.$$

Это значит, что

$$\sum_{s=0}^{2^{t-1}-1} \left[\frac{n+s}{2^t}\right] \geq \frac{n}{2} - \frac{2^{t-1}}{2}.$$

Суммируя по t от 1 до $k-1$, получаем, что общее число исправлений (по всем функциям $f_1, \ldots, f_n$) "разумного" синтезатора F составляет не менее

$$\frac{n}{2}(k-1) - \frac{1}{2}(2^{k-1} - 1).$$

Так как $2^{k-1} < n \le 2^k$, то $k \geq \log_2 n$ и число исправлений больше

$$\frac{n}{2}(\log_2 n - 1) - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}\log_2 n - n.$$

Среднее число (на одну из n функций $f_1, \ldots, f_n$) будет, таким образом, больше

$$\frac{1}{2}\log_2 n - 1,$$

что и требовалось.

Теорема 4 доказана.

Теперь можно оценить вклад проблемы эквивалентности в сложность детерминированного синтеза программ. Для синтеза в условиях "нерешенной проблемы эквивалентности" мы имели синтезатор T_e и оценки:

$$T_e^{MAX}(n) \leq n-1, \quad T_e^{AVE}(n) \leq \frac{1}{2}(n-1),$$

которые, по теореме 2, являются наилучшими. Для синтеза в условиях "решенной проблемы эквивалентности", мы имеем синтезатор S_e и оценки

$$S_e^{MAX}(n) \leq \log_2 n, \quad S_e^{AVE}(n) \leq \frac{1}{2}\log_2 n,$$

которые, по теореме 4, также являются наилучшими. Получается, таким образом, что решение проблемы эквивалентности радикально влияет на возможности детерминированного синтеза программ. Правда, сокращение числа исправлений гипотезы достигается синтезатором S_e , по-видимому, ценой заметного усложнения процедуры выдвижения новой гипотезы (точное исследование этого вопроса пока отсутствует, даже сама постановка вопроса нуждается в уточнении). Для практического создания синтезаторов это может означать только одно - всякое продвижение в решении проблемы эквивалентности программ (интересующего нас типа) следует попытаться использовать для повышения эффективности синтезатора. Достигнутое сокращение числа исправлений может сопровождаться усложнением процедуры выдвижения новой гипотезы, так что придется (как всегда) искать разумную "середину".

Глава 2. ВЕРОЯТНОСТНЫЙ СИНТЕЗ

§ I. Постановка задачи.

Перейдем теперь к изучению вероятностных синтезаторов (с практической точки зрения это синтезаторы, использующие датчики случайных чисел). Особенность вероятностного синтезатора (по сравнению с детерминированным) состоит в том, что гипотезы уже не определяются однозначно числами $<s_1, \ldots, s_n>$, $<f(0), \ldots, f(m)>$. Гипотеза вероятностного синтезатора, соответствующая этому набору чисел, может принимать несколько значений, каждое с определенной вероятностью. Причем вполне допустимо, что эти вероятности зависят от предыдущих гипотез, выданных синтезатором для функции f . Например, вполне может оказаться, что выдав на шаге $m-1$ гипотезу $H1$, синтезатор оставляет эту гипотезу в силе и на шаге m ; однако, если на шаге $m-1$ была выдана гипотеза $H2$, то на шаге m выдается одна из гипотез $H1, H3$ - каждая с вероятностью $1/2$. Это естественно, если гипотеза $H2$ опровергается информацией, полученной на шаге m , а $H1$ - подтверждается.

Вероятность выдачи каждой новой гипотезы зависит, по-видимому, от "мнений" синтезатора насчет того, как часто каждая из функций $\{\varphi_{s_1}, \ldots, \varphi_{s_n}\}$ "встречается в природе". Более вероятные функции естественно предсказывать с большей вероятностью.

Исходя из таких соображений, сопоставим каждой нумерации φ некоторую вероятностную стратегию E_φ, которую мы будем называть **естественной стратегией** (вариант ее был использован для доказательства теоремы 7 в статье Барздиня и Фрейвалда [1972]).

Получив область допустимых гипотез $\langle s_1, \ldots, s_n \rangle$, стратегия E_φ приписывает каждому номеру s_i "вероятность появления", равную $1/n$. Если на шаге $m-1$ (т.е. имея значения $f(0), \ldots, f(m-1)$ функции f) стратегия выдала гипотезу s_j и, получив значение $f(m)$; убеждается, что $\varphi_{s_j}(m) = f(m)$, то на шаге m гипотеза s_j оставляется в силе с вероятностью 1. Если же оказывается, $\varphi_{s_j}(m) \neq f(m)$, то s_j - заведомо не номер функции f и требуется новая гипотеза. Тогда E_φ подсчитывает все те номера s_i, которые согласуются со всеми значениями $f(0), \ldots, f(m)$, т.е. номера, обладающие свойством: $\varphi_{s_i}(x) = f(x)$ для всех $x \leq m$. Пусть таких номеров оказалось k: $s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_k}$. Каждый из этих номеров становится новой гипотезой стратегии E_φ с вероятностью $1/k$. Стратегия E_φ поступает таким образом всякий раз, когда требуется заменить старую гипотезу новой - с равной вероятностью выдает все номера, согласующиеся с имеющейся у нее информацией о функции f.

Из результатов § 3 этой главы легко следует, что стратегия E_φ является синтезатором для нумерации φ. Более точно:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I'. Для каждого набора $\langle s_1, \ldots, s_n \rangle$ о.р. φ-номеров и каждой функции f из набора $\{\varphi_{s_1}, \ldots, \varphi_{s_n}\}$ с вероятностью 1: последовательность гипотез стратегии E_φ стабилизируется на номере функции f.

Что можно сказать о качестве синтезатора E_φ с точки зрения критериев, описанных в § I главы I?

I. Сложность реализации. E_φ программируется очень легко.

2. Полное время синтеза. К сожалению, и для вероятностных синтезаторов имеет место аналог предложения 2 (см. § I главы I).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2'. Пусть φ - геделевская нумерация. Какой бы вероятностный синтезатор F и вероятность $p > 0$ ни взять, не существует ч.р.функции $r(x)$ такой, что для всех наборов $\{s_1, \ldots, s_n\}$ о.р. φ-номеров:

а) значение $r(<s_1, \ldots, s_n>)$ определено,

б) для всех функций $f \in \{\varphi_{s_1}, \ldots, \varphi_{s_n}\}$ с вероятностью $\geq p$ полное время синтеза не превосходит $r(<s_1, \ldots, s_n>)$.

Доказательство. Простое рассуждение от противного, использующее теорему о рекурсии.

В формулировке предложения 2' участвует понятие о произвольном вероятностном синтезаторе, нуждающееся, быть может, в уточнении. Вспомним, что детерминированной стратегией мы называли ч.р.(т.е. вычислимую) функцию типа $N \times N \to N$, обладающую определенными свойствами. Аналогично и вероятностная стратегия должна быть "вычислимой" - в следующем смысле.

Следуя де Леу, Муру и др. [1956] вероятностной машиной будем называть (скажем, 1-ленточную, 1-головочную) машину Тьюринга, команды которой имеют вид:

$$\alpha q a \to q'a'\varepsilon,$$

где q - старое, q' - новое состояние машины, a - старый, a' - новый символ в клетке, обозреваемой головкой, $\varepsilon = -1$, 0 или $+1$ (указание, куда переместить головку). Наконец, $\alpha = 0$ или 1 и означает состояние бернуллиевского датчика нулей и единиц, подключенного к машине (вероятность нуля и единицы равна $1/2$). Датчик вносит в работу машины элемент случайности - какая из двух команд:

$$0 a q \to q'a'\varepsilon_1,$$
$$0 a q \to q''a''\varepsilon_2$$

будет выбрана - зависит от состояния датчика в момент выполнения. При повторном вычислении на тех же исходных данных состояние датчика будет меняться уже другим способом.

Для каждого возможного исхода работы вероятностной машины можно определить соответствующую вероятность. Например, если результатом работы всегда является число, можно определить вероятность того, что этим числом будет 13 .

Используя понятие вероятностной машины, легко ввести понятие "вычислимой" вероятностной стратегии синтеза φ-номеров. Для определения удобнее всего взять трехленточную машину. На первой ленте записан набор $\{s_1, \dots, s_n\}$ допустимых гипотез и значения функции f из набора $\{\varphi_{s_1}, \dots, \varphi_{s_n}\}$:

$$\langle s_1, \dots, s_n \rangle,\ f(0),\ f(1), f(2), \dots$$

На этой ленте машина имеет только читающие головки. Вторая лента - рабочая (с произвольными головками). На третьей ленте машина имеет только пишущую головку, которая может стоять на месте или двигаться вправо (но не может двигаться влево). Мы будем говорить, что такая машина реализует вероятностную стратегию, если при любых допустимых входных данных она во всех случаях работы датчика нулей и единиц печатает на третьей ленте последовательность чисел s_i :

$$s_{i_0}, s_{i_1}, \ldots, s_{i_m}, \ldots, \qquad (*)$$

причем до начала печати s_{i_m} читающие головки успели обозреть только значения $f(0), \ldots, f(m)$. Эти числа s_i и будем считать гипотезами соответствующей стратегии.

Вероятностную стратегию мы будем называть **с и н т е з а т о р о м**, если при любых допустимых входных данных вероятность того, что последовательность (*) стабилизируется на номере функции f , равна 1. (Заметим, что допускается стабилизация на одном номере с вероятностью, скажем, $1/2$, а на другом - тоже с вероятностью $1/2$, лишь бы оба номера были номерами функции f).

Можно ввести также вероятностный аналог понятия "разумного" синтезатора, буквально повторив определение детерминированного случая (см. § I, глава I). Для "разумных" синтезаторов вместо полного времени синтеза можно изучать два других показателя.

3. **Ч и с л о и с п р а в л е н и й г и п о т е з ы д о с т а б и л и з а ц и и.** Описанный в начале параграфа

естественный синтезатор E_φ является, конечно, и вычислимым, и "разумным".

ТЕОРЕМА 5. Для любой нумерации φ синтезатор E_φ обладает свойством: какое бы $\varepsilon > 0$ ни взять, для любого набора $\{s_1, \ldots, s_n\}$ о.р. φ-номеров и любой функции f из набора $\{\varphi_{s_1}, \ldots, \varphi_{s_n}\}$ с вероятностью $\geq 1 - \varepsilon$ выполняется неравенство:

$$E_\varphi^{00}(\langle s_1, \ldots, s_n \rangle, f) \leq \ln n + \sqrt{\frac{\ln n}{\varepsilon}}.$$

Доказательство изложено в двух следующих параграфах.

По аналогии с величиной $F^{MAX}(n)$ (см. § I, глава I) можно ввести

$$E_\varphi^{\varepsilon\text{-}MAX}(n) = \max_{\bar{s}, f} \min\{k \mid P\{E_\varphi^{00}(\langle s_1, \ldots, s_n \rangle, f) \leq k\} \geq 1 - \varepsilon\},$$

где максимум берется по всем наборам $\bar{s}$ из n о.р. φ-номеров и всем функциям $f \in \{\varphi_{s_1}, \ldots, \varphi_{s_n}\}$. Тогда теорему 5 можно сформулировать более кратко: для всех $\varepsilon > 0$ и всех n:

$$E_\varphi^{\varepsilon\text{-}MAX}(n) \leq \ln n + \sqrt{\frac{\ln n}{\varepsilon}}.$$

Сравним это с оценками детерминированного случая:

$$T_\varphi^{MAX}(n) \leq n - 1, \quad T_\varphi^{AVE}(n) \leq \frac{1}{2}(n - 1).$$

Для своего варианта естественной вероятностной стратегии Барздинь и Фрейвалд [1972] получили оценку, которая (в наших терминах) равносильна $\log_2 n$. Напомним, что $\ln n \approx 0.69 \log_2 n$.

Разумеется, оценка вероятностного случая пренебрегает " ε - маловероятной" возможностью сделать гораздо больше исправлений гипотезы по сравнению с $\ln n$. Однако, тот факт, что $E_\varphi^{\varepsilon\text{-}MAX}$ намного меньше не только T_φ^{MAX}, но и T_φ^{AVE} (т.е. с р е д н е г о числа исправлений гипотезы при детерминированном синтезе), показывает, что превосходство вероятностных синтезаторов над детерминированными является принципиальным. (Если бы оказалось, что $E_\varphi^{\varepsilon\text{-}MAX}$ лучше T_φ^{MAX}, но соизмеримо с T_φ^{AVE}, мы могли бы сказать,что детерминированный синтезатор "тоже" делает, как правило, не более $\ln n$ исправлений гипотезы, а случаев, когда он делает больше, например, порядка n исправлений, относительно мало, поскольку <u>среднее</u> число исправлений T_φ^{AVE} имеет порядок $\ln n$).

Оценка $\ln n$ оказывается наилучшей возможной для (вычислимых) вероятностных синтезаторов.

ТЕОРЕМА 6. Пусть φ -геделевская нумерация. Какой бы вероятностный синтезатор F и число $\varepsilon > 0$ мы ни взяли, для любого n можно построить набор $\{s_1, \ldots, s_n\}$ из n о.р. φ -номеров такой, что на одной из функций f набора $\{\varphi_{s_1}, \ldots, \varphi_{s_n}\}$:

$$F^{00}(\langle s_1, \ldots, s_n \rangle, f) > \ln n - \sqrt{\frac{\ln n + C}{\varepsilon}} - C$$

с вероятностью $\geq 1-\varepsilon$.(Константа C не зависит от n и ε).

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 6 составляет главу 3 диссертации.

Обратимся, наконец, к четвертому критерию эффективности синтезаторов.

4. Сложность вычисления новой гипотезы. Как уже было разъяснено в § I главы I, этот четвертый критерий совместно с третьим (число обновлений гипотезы) способен заменить полное время синтеза (недоступное рекурсивной оценке) для т.н. "разумных" синтезаторов.

Синтезатор E_φ является "разумным" и наилучшим среди всех "разумных" (и даже среди всех вообще вероятностных синтезаторов) в смысле минимальности числа обновлений гипотезы. Если ограничиться "разумными" синтезаторами, оптимальными в этом смысле, будет ли в их классе синтезатор E_φ наилучшим в смысле сложности вычисления новой гипотезы? Если ответ положительный, существует, возможно, "разумный" синтезатор, обновляющий гипотезы, скажем, $2\ln n$ раз, но зато "вдвое" легче вычисляющий новые гипотезы (по сравнению с E_φ). Проследить точный вид связи между третьим и четвертым критериями (и показать, каким образом они образуют один полноценный критерий) -это, по-видимому, очень сложная задача. Решена она будет, скорее всего, развитием методов, изложенных в этой и следующей главе диссертации. (Аналогичная проблема для т.н. прогнозирующих стратегий уже решена в статье Подниекса [1977б]).

В следующем параграфе доказываются три леммы технического характера (они будут использованы также в главе 3). В § 3 доказываются две основные леммы, из которых легко следует предложение I и теорема 5. (Доказательство теоремы 6 вынесено в отдельную главу 3). В последнем, четвертом, параграфе этой (второй) главы изучено влияние решения проблемы эквивалентности на оценку $\ell n\, n$.

§ 2. Технические леммы.

Пусть φ - вычислимая нумерация ч.р.функций типа $N \to N$. Пусть вероятностная машина $\mathfrak{M}$ реализует стратегию синтеза φ-номеров. Так как в работе $\mathfrak{M}$ участвует бернуллиевский датчик нулей и единиц с распределением $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, то все вероятности, касающиеся $\mathfrak{M}$, определяются на следующем вероятностном пространстве (Ω, B, P):

Ω - класс всех бесконечных 01-последовательностей,

B - наименьшее борелевское поле, содержащее все множества вида

$$\Omega_{\tilde{\alpha}} = \{\omega \in \Omega \mid \omega_0 = \alpha_0 \,\&\, \omega_1 = \alpha_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \omega_{m-1} = \alpha_{m-1}\},$$

где $\tilde{\alpha} = \alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_{m-1}$ - произвольное двоичное слово,

P - вероятностная мера, являющаяся единственным продолжением функции $\mu(\Omega_{\tilde{\alpha}}) = 2^{-m}$ на все поле B (подробнее см. Ламперти [1973]).

На пространстве (Ω, B, P) легко определить вероятности событий вида "по данным $\langle s_1, \ldots, s_n \rangle$, $f(0), \ldots, f(m)$ машина $\mathfrak{M}$ печатает m-ую гипотезу, равную числу t ". Если через M обозначить стратегию синтеза φ-номеров, реализуемую машиной $\mathfrak{M}$, то эту вероятность можно обозначить через

$$P\{M(\langle s_1, \ldots, s_n \rangle, \langle f(0), \ldots, f(m) \rangle) = t\},$$

или короче: $P\{M(\bar{s},f,m)=t\}$.

Аналогично можно определить также вероятность $P\{M,\bar{s},f,\leq k\}$ того, что стратегия M, работая с парой $(\bar{s},f)$, сделает не более k исправлений гипотезы. Введем особое обозначение и для вероятности того, что M будет направлять свою гипотезу при переходе от m к $m+1$

$$P_m^{\neq}\{M,\bar{s},f\}=P\{M(\bar{s},f,m)\neq M(\bar{s},f,m+1)\}.$$

Эти последние вероятности играют в диссертации центральную роль.

Как доказать, что некоторая стратегия синтеза φ-номеров является синтезатором для φ? Т.е. как доказать для стратегии M, что для всех наборов $\{s_1,\ldots,s_n\}$, состоящих только из о.р. φ-номеров, и всех функций f из набора $\{\varphi_{s_1},\ldots,\varphi_{s_n}\}$, последовательность гипотез M с вероятностью 1 стабилизируется на номере функции f? Такие доказательства проводятся с помощью леммы I.

Напомним, что стратегия M называется "разумной", если: а) всякая гипотеза M согласована с имеющейся у M информацией о функции f, т.е. всегда

$$M(\bar{s},f,m)=s_i\rightarrow(\forall j\leq m)\,\varphi_{s_i}(j)=f(j),$$

и б) если некоторая гипотеза M согласована с дополнительной информацией о функции f, то эта гипотеза не снимается, т.е.

$$M(\bar{s}, f, m) = s_i \,\&\, \varphi_{s_i}(m+1) = f(m+1) \longrightarrow M(\bar{s}, f, m+1) = s_i .$$

ЛЕММА I. Если M - "разумная" стратегия синтеза φ-номеров и сумма

$$\sum_m P_m^{\neq}\{M, \bar{s}, f\} < \infty$$

во всех допустимых случаях, то M является синтезатором для φ.

Доказательство. Введем последовательность событий:

$$A_m = \{M(\bar{s}, f, m) \neq M(\bar{s}, f, m+1)\},$$

т.е. A_m = "для пары $(\bar{s}, f)$ стратегия M на шаге m направляет гипотезу". Тогда $P(A_m) = P_m^{\neq}\{M, \bar{s}, f\}$. По лемме Бореля-Кантелли (см. Ламперти [1973]) условие $\sum P(A_m) < \infty$ гарантирует, что с вероятностью 1 одновременно осуществляется только конечное число событий A_m, т.е. условие леммы I гарантирует, что с вероятностью 1 стабилизируется последовательность гипотез стратегии M, сделанных для пары $(\bar{s}, f)$. Так как всякая гипотеза M согласована с полученными до ее выдвижения значениями функции f, то всякая "стабилизированная" гипотеза будет согласована со всеми значениями f, т.е. она будет номером функции f. Лемма I доказана.

Таким образом, доказательство того, что некоторая стратегия M является синтезатором, достигается через верхние оценки сумм вида $\sum_m P_m^{\neq}\{M,\bar{s},f\}$.

В теореме 5 фигурирует оборот "число исправлений гипотезы стратегии M, сделанных для пары $(\bar{s},f)$, не превосходит число k с вероятностью $\geq 1-\varepsilon$". Как доказываются подобные утверждения? Опять решающей оказывается сумма $\sum_m P_m^{\neq}\{M,\bar{s},f\}$.

ЛЕММА 2. Если исправления гипотез стратегии M, сделанные для пары $(\bar{s},f)$, независимы между собой и

$$a \leq \sum_m P_m^{\neq}\{M,\bar{s},f\} \leq b < \infty,$$

то для всех $\varepsilon > 0$:

$$P\{M,\bar{s},f, \leq b+\sqrt{\frac{b}{\varepsilon}}\} \geq 1-\varepsilon,$$

$$P\{M,\bar{s},f, > a-\sqrt{\frac{b}{\varepsilon}}\} \geq 1-\varepsilon.$$

(под корнем оба раза b !).

Доказательство. Простое следствие неравенства Чебышева. Введем последовательность случайных величин:

$$X_m = \begin{cases} 1, \text{ если } M(\bar{s},f,m) \neq M(\bar{s},f,m+1), \\ 0, \text{ если } =. \end{cases}$$

Величины X_m, по условию, независимы. Сумма $\sum_m X_m$ представляет собой число исправлений гипотезы стратегии M, сделанных для пары $(\bar{s},f)$. Средние значения:

$$E(X_m) = P\{X_m = 1\} = P_m^{\neq}\{M,\bar{s},f\}.$$

Дисперсии:

$$D(X_m) = p_m^{\neq}(1 - p_m^{\neq}) \leqslant p_m^{\neq}.$$

Неравенство Чебышева:

$$P\{|\sum X_m - E(\sum X_m)| > c\} \leqslant \frac{D(\sum X_m)}{c^2} \leqslant \frac{\sum p_m^{\neq}}{c^2} \leqslant \frac{b}{c^2}.$$

Для среднего значения суммы $\sum X_m$ имеем неравенства:

$$a \leqslant E(\sum X_m) = \sum E(X_m) \leqslant b.$$

Полагая $c = \sqrt{\frac{b}{\varepsilon}}$, получаем утверждение леммы 2.

В доказательстве теоремы 5 нам потребуется еще одна простая лемма.

ЛЕММА 3. Пусть L - конечное множество натуральных чисел, а $K(L)$ - множество всех упорядоченных наборов $\bar{\imath} = (i_1, \ldots, i_s)$ таких, что

$$(i_1 < i_2 < \ldots < i_s) \& (\forall t \leqslant s)\, i_t \in L,$$

включая сюда и пустой набор Λ. Тогда для любой числовой последовательности $\{x_n\}_{n \in N}$ имеет место равенство:

$$\sum_{\bar{\imath} \in K(L)} (x_{i_1} - 1)(x_{i_2} - 1) \ldots (x_{i_s} - 1) = \prod_{j \in L} x_j.$$

Доказательство. Тривиальная индукция по числу элементов множества L.

§ 3. Доказательство теоремы 5.

Согласно лемме I для доказательства того, что стратегия M - синтезатор для нумерации φ, достаточно установить конечность суммы $\sum_m P_m^{\neq}\{M, \bar{s}, f\}$ для всех пар $(\bar{s}, f)$ где $\bar{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ - конечный набор о.р. φ-номеров, а f - функция из набора $\{\varphi_{s_1}, \ldots, \varphi_{s_n}\}$. Для "естественной" стратегии E_φ это сделано в лемме 4 (определение E_φ см. в § I).

ЛЕММА 4. Для всех (допустимых) пар $(\bar{s}, f)$

$$\sum_m P_m^{\neq}\{E_\varphi, \bar{s}, f\} \leq \ln n .$$

По лемме I отсюда следует предложение I'.

Для доказательства теоремы 5 нам нужна еще следующая

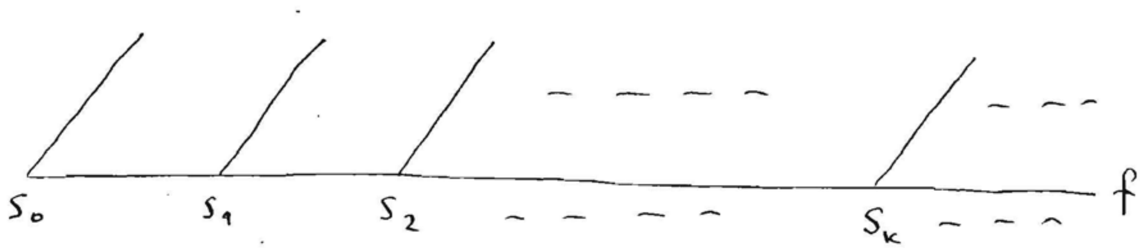
ЛЕММА 5. Пусть фиксирована (допустимая) пара $(\bar{s}, f)$. Тогда независимы события:

$$A_m = \{E_\varphi(\bar{s}, f, m) \neq E_\varphi(\bar{s}, f, m+1)\} .$$

Любопытно отметить, что события A_m (т.е. "стратегия E_φ на шаге m исправляет гипотезу") не обнаруживают никаких содержательных признаков независимости. Формальному критерию независимости они, тем не менее, удовлетворяют, и этого достаточно для применимости соответствующих результатов теории вероятностей.

Сначала докажем лемму 5, затем - лемму 4.

Доказательство леммы 5: Рассмотрим дерево функций набора $\{\varphi_{s_1}, \ldots, \varphi_{s_n}\}$, особо выделяя среди них функцию f.



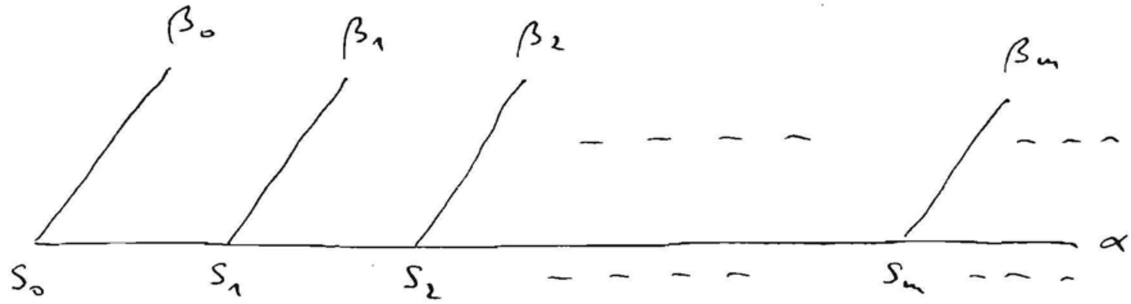
Напомним, что стратегия E_φ приписывает каждому номеру набора $\{s_1, \ldots, s_n\}$ вероятность $1/n$, "понимая" это как "вероятность появления в природе". Тогда каждой точке интересующего нас дерева можно приписать вероятность того, что "появившаяся" функция набора $\{\varphi_{s_1}, \ldots, \varphi_{s_n}\}$ пройдет через эту точку. Точке S_0 будет тогда приписана вероятность 1.

Пусть β_m - вероятность того, что "появившаяся" функция пройдет через точку S_m в сторону от функции f. Через B_m обозначим сумму

$$\beta_m + \beta_{m+1} + \beta_{m+2} + \cdots .$$

Тогда точке S_m приписана вероятность $\alpha + B_m$, где α - вероятность, приписанная всей ветке f (т.е. α -"вероятность появления" самой функции f).

Через β_{ij} обозначим вероятность того, что в случае исправления гипотезы в точке S_i, стратегия E_φ направит свою новую гипотезу через точку S_j в сторону от f (здесь $i \le j$).



Очевидно (см.определение стратегии E_φ):

$$\beta_{ij} = \frac{\beta_j}{\alpha + \beta_i} . \qquad (I)$$

Вероятность исправления гипотезы в точке S_m выражается через числа β_{ij}:

$$P_m^{\neq}\{E_\varphi, \bar{s}, f\} = \sum \beta_{0 i_1} \cdot \beta_{i_1+1, i_2} \cdot \ldots \cdot \beta_{i_k+1, m} ,$$

где суммирование идет по всем кортежам $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ таким, что $k \ge 0$ и $0 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k < m$. Вероятность одновременных исправлений гипотезы в точках $S_{m_1}, \ldots, S_{m_t}$ (где $m_1 < m_2 < \ldots < m_t$) можно выразить аналогично:

$$P\{A_{m_1} \cap A_{m_2} \cap \ldots \cap A_{m_t}\} = \sum \beta_{0 i_1} \cdot \beta_{i_1+1, i_2} \cdot \ldots \cdot \beta_{i_k+1, m_t} ,$$

где суммирование идет по всем кортежам $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ таким, что $k \ge 0$, $0 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k < m_t$ и среди чисел i_j

встречаются все числа $m_1, m_2, \ldots, m_{t-1}$. В силу (I), вероятность $P\{A_{m_1} \cap \ldots \cap A_{m_t}\}$ зависит только от чисел $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_m$ и $B_{m+1} = \sum_{j \geq m+1} \beta_j$, где $m = m_t = \max m_i$.

Введем новые переменные $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{m+1}$:

$$\alpha + B_{m+1} = \alpha \gamma_{m+1},$$

$$\alpha + B_m = \alpha \gamma_m \gamma_{m+1},$$

$$\alpha + B_{m-1} = \alpha \gamma_{m-1} \gamma_m \gamma_{m+1},$$

$$- - - - - - - - - - -$$

$$\alpha + B_j = \alpha \prod_j^{m+1} \gamma.$$

Отсюда получаем

$$\beta_m = \alpha(\gamma_m - 1)\gamma_{m+1},$$

$$\beta_{m-1} = \alpha(\gamma_{m-1} - 1)\gamma_m \gamma_{m+1},$$

$$- - - - - - - - - - -$$

$$\beta_j = \alpha(\gamma_j - 1)\prod_{j+1}^{m+1} \gamma.$$

Таким образом,

$$\beta_{ij} = \frac{\beta_j}{\alpha + B_i} = \frac{\gamma_j - 1}{\prod_i^j \gamma},$$

$$\beta_{0i_1} \cdot \beta_{i_1+1, i_2} \cdot \ldots \cdot \beta_{i_k+1, m} = \frac{(\gamma_{i_1} - 1) \ldots (\gamma_{i_k} - 1)(\gamma_m - 1)}{\prod_1^m \gamma}.$$

В выражении для $P\{A_{m_1} \cap \ldots \cap A_{m_t}\}$ вынесем за скобки произведение

$$(\gamma_{m_1} - 1) \ldots (\gamma_{m_t} - 1) \cdot \frac{1}{\prod_1^m \gamma}.$$

(следует учесть, что $m_t = m$). Тогда "в скобках" остается просуммировать произведения

$$(\gamma_{i_1} - 1) \dots (\gamma_{i_k} - 1)$$

по всем кортежам $(i_1, \dots, i_k) \in K(L)$, где

$$L = \{1, 2, \dots, m\} - \{m_1, \dots, m_t\}$$

(определение $K(L)$ см. в § 2, лемма 3). По лемме 3 сумма эта равна $\prod\limits_{i \in L} \gamma_i$, т.е.

$$P\{A_{m_1} \cap \dots \cap A_{m_t}\} = (\gamma_{m_1} - 1) \dots (\gamma_{m_t} - 1) \cdot \frac{\prod\limits_{i \in L} \gamma_i}{\prod\limits_{1}^{m} \gamma_i} =$$

$$= \frac{\gamma_{m_1} - 1}{\gamma_{m_1}} \cdot \dots \cdot \frac{\gamma_{m_t} - 1}{\gamma_{m_t}}.$$

При $t = 1$ мы имели бы:

$$P(A_m) = P_m^{\neq}\{E_\varphi, \bar{s}, f\} = \frac{\gamma_m - 1}{\gamma_m}.$$

Таким образом:

$$P\{A_{m_1} \cap \dots \cap A_{m_t}\} = P(A_{m_1}) \cdot P(A_{m_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{m_t}),$$

что и доказывает независимость событий.

Лемма 5 доказана.

Доказательство леммы 4. Мы уже знаем, что

$$P_m^{\neq}\{\bar{E}, \bar{s}, f\} = \frac{\gamma_m - 1}{\gamma_m} = \frac{\beta_m}{\alpha + \beta_m} = 1 - \frac{\alpha + \beta_{m+1}}{\alpha + \beta_m}.$$

(см.определение γ_m). Суммируем по всем m ,учитывая известное неравенство $1-x \leq \ln\frac{1}{x}$:

$$\sum_m \frac{\beta_m}{\alpha+b_m} \leq \ln \prod_m \frac{\alpha+b_m}{\alpha+b_{m+1}} .$$

Частичное произведение:

$$\prod_{m=0}^{s} \frac{\alpha+b_m}{\alpha+b_{m+1}} = \frac{\alpha+b_0}{\alpha+b_1}\cdot\frac{\alpha+b_1}{\alpha+b_2}\cdot \ldots \cdot \frac{\alpha+b_s}{\alpha+b_{s+1}} = \frac{\alpha+b_0}{\alpha+b_{s+1}} .$$

Переходя к пределу при $s \longrightarrow \infty$, получаем:

$$\sum_m P_m^{\neq}\{E_\varphi, \bar{s}, f\} \leq \ln\frac{\alpha+b_0}{\alpha} .$$

Если $f=\varphi_{s_i}$, то $\alpha \geq 1/n$. Кроме этого, $\alpha+b_0 \leq 1$ как вероятность, приписанная точке S_0 . Таким образом,

$$\ln\frac{\alpha+b_0}{\alpha} \leq \ln n .$$

Лемма 4 доказана.

Леммы 4 и 5 дают всю необходимую нам информацию о стратегии E_φ . По лемме 4;

$$\sum_m P_m^{\neq}\{E_\varphi, \bar{s}, f\} < \infty ,$$

отсюда по лемме I получаем утверждение предложения I$'$.

Лемма 5 создает условия для применения леммы 2. Совместно с леммой 4 это дает

$$P\{E_\varphi, \bar{s}, f, \leq \ln n + \sqrt{\frac{\ln n}{\varepsilon}}\} \geq 1-\varepsilon,$$

и тем самым доказано утверждение теоремы 5.

§ 4. Влияние проблемы эквивалентности.

В § 3 главы I было изучено влияние проблемы эквивалентности на эффективность детерминированного синтеза программ. Оказалось, что возможность решать для каждого набора $\langle s_1, \ldots, s_n \rangle$, которые из s_i представляют одну и ту же функцию, позволяет снизить максимальное число исправлений гипотезы с $n-1$ до $\log_2 n$, а среднее число исправлений - с $\frac{1}{2}(n-1)$ до $\frac{1}{2}\log_2 n$. (Возможно, что наблюдаемое сокращение числа исправлений идет за счет усложнения процедуры выдвижения новых гипотез, однако, в случае "нерешенной проблемы эквивалентности" никакое усложнение этой процедуры не может улучшить оценку $n-1$, см. теорему 2).

В этом параграфе изучается аналогичный вопрос для вероятностного синтеза программ. Определения остаются прежними.

ТЕОРЕМА 3'. Для любой нумерации φ существует вероятностный синтезатор W_φ, использующий решение проблемы эквивалентности, такой, что для любого n и $\varepsilon > 0$:

$$W_\varphi^{\varepsilon\text{-MAX}}(n) \leq \frac{1}{2}\log_2 n + \sqrt{\frac{\log_2 n}{2\varepsilon}}.$$

Доказательство. Будем исходить из т.н. прогнозирующей стратегии, введенной в статье автора [1975б]. Эта стратегия по данному набору $<s_1, \ldots, s_n>$ и значениям $f(0), \ldots, f(m)$ пытается предсказать значение $f(m+1)$. Прогноз интересующей нас (вероятностной) стратегии является случайной величиной, обозначим его через

$$V_\varphi(<s_1, \ldots, s_n>, <f(0), \ldots, f(m)>) \qquad (*)$$

(Это означает, в частности, что через V_φ мы обозначаем саму прогнозирующую стратегию, которая по методу статьи [1975б] строится для нумерации φ).

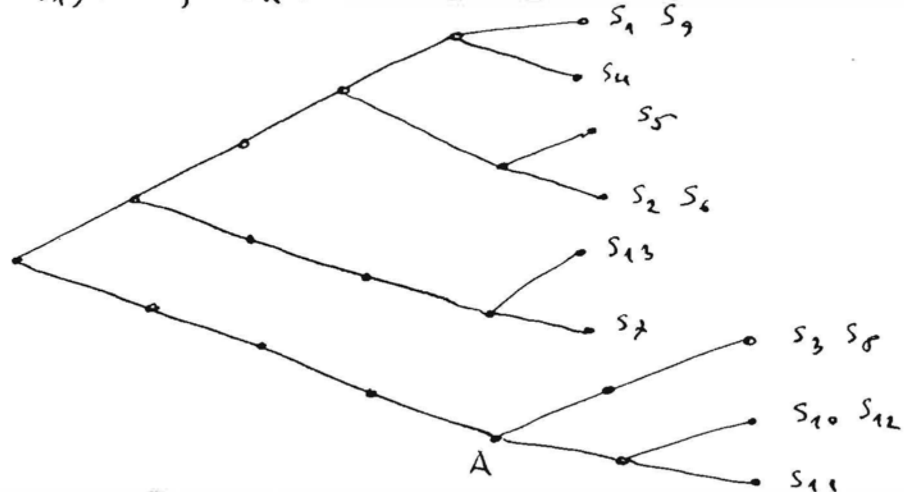
Случайные величины (*), получающиеся для различных m при фиксированном наборе $\bar{s}$ и функции f, оказываются независимыми. Вероятность того, что прогноз (*) будет неверным (т.е. $\neq f(m+1)$), обозначим через $P_m\{V_\varphi, \bar{s}, f\}$. В статье [1975б] показано, что если функция f принадлежит набору $\{\varphi_{s_1}, \ldots, \varphi_{s_n}\}$, то

$$\sum_m P_m\{V_\varphi, \bar{s}, f\} \leq \frac{1}{2}\log_2 n. \qquad (**)$$

Исходя из прогнозирующей стратегии V_φ, будем строить синтезирующую стратегию W_φ. Имея для данного набора $<s_1, \ldots, s_n>$ номер предиката P :

$$P(i,j) \overset{def}{\longleftrightarrow} \varphi_{s_i} \equiv \varphi_{s_j},$$

мы можем получить полное представление о дереве функций набора $\{\varphi_{s_1}, \ldots, \varphi_{s_n}\}$, например:



Это значит, что мы можем определить с помощью предиката P все точки ветвления, все неразделяющиеся более ветви и все номера s_i , относящиеся к каждой из этих ветвей. Стратегия V_φ обладает той особенностью, что все ее прогнозы идут только в д о л ь ветвей этого дерева. Так что действительно вероятностные прогнозы случаются только в точках ветвления - в остальных точках прогноз однозначен (и всегда оказывается верным). В результате всем исходящим из произвольной точки A (см.чертеж) неразделяющимся ветвям можно приписать вероятности - того, что стратегия V_φ , отправляясь от точки A и не допуская ошибок, поведет именно по данной ветви. Если из точки A исходит k неразделяющихся ветвей, обозначим указанные вероятности через $p_1, p_2, \ldots, p_k$ (каждое p_i является произведением конечного числа вероятностей, характеризующих поведение стратегии V_φ в точках ветвления; сумма всех p_i равна 1).

Теперь мы можем определить стратегию W_φ . Она будет "разумной", т.е. не станет исправлять гипотезу, которая еще не успела скомпрометировать себя. Но если в точке A исправление потребуется, W_φ будет действовать следующим образом. В качестве новой гипотезы с вероятностью p_i будет выдаваться один из номеров s_j, принадлежащих i-й неразделяющейся ветви, проходящей через A (и так для всех $i=1,2,\ldots,k$). Стратегия W_φ определена.

Она является, очевидно, синтезатором для нумерации φ: с вероятностью 1 гипотезы W_φ, сделанные для любой функции f, принадлежащей набору $\{\varphi_{s_1},\ldots,\varphi_{s_n}\}$, стабилизируются на номере s_j таком, что $\varphi_{s_j}\equiv f$.

Для оценки числа исправлений гипотезы W_φ на одной функции f, мы должны оценить сначала вероятность $P_m^{\ne}\{W_\varphi,\bar{s},f\}$ того, что стратегия W_φ будет исправлять гипотезу в данной точке (см. § 2 этой главы). Покажем, что

$$P_m^{\ne}\{W_\varphi,\bar{s},f\}=P_m\{V_\varphi,\bar{s},f\}.$$

В самом деле, если прогнозирующая стратегия V_φ ошибается в какой-либо точке, то синтезирующая стратегия W_φ будет вынуждена исправлять свою гипотезу сразу п о с л е этой точки. И наоборот, если W_φ исправляет гипотезу в какой-либо точке, это потому, что стратегия V_φ "повела в сторону" (т.е. допустила ошибку) непосредственно п е р е д этой точкой. Тем самым требуемое равенство доказано.

Теперь мы можем применить оценку (* *) и получить, что

$$\sum_m P_m^{\ne}\{W_\varphi,\bar{s},f\}\le\frac{1}{2}\log_2 n.$$

По лемме 2 (см. § 2 этой главы) отсюда следует, что для всех ε:

$$P\{W_\varphi, \bar{s}, f, \leq \frac{1}{2}\log_2 n + \sqrt{\frac{\log_2 n}{2\varepsilon}}\} \geq 1-\varepsilon.$$

Теорема 3' доказана.

Оценка $\frac{1}{2}\log_2 n$ оказывается наилучшей.

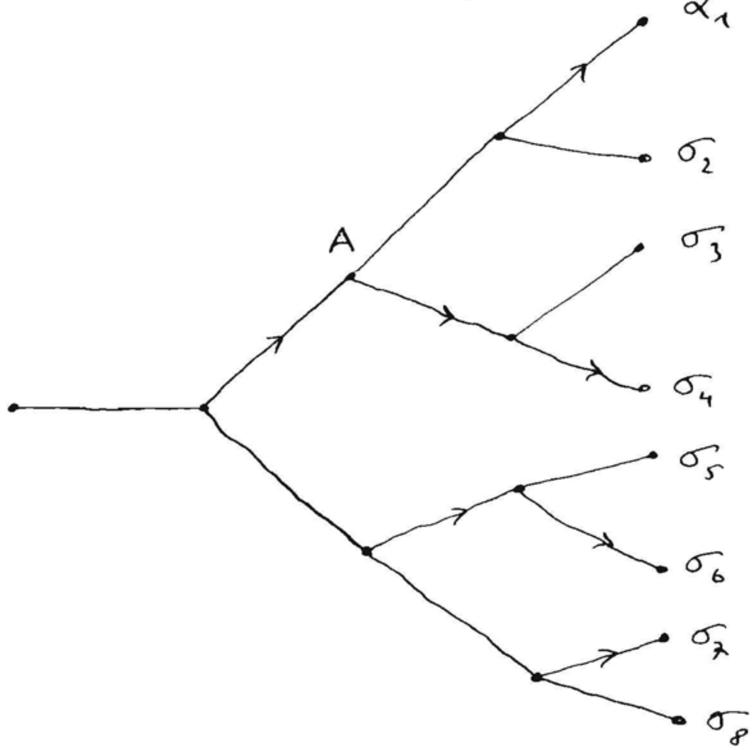
ТЕОРЕМА 4'. Если нумерация φ содержит все функции типа $N \to \{0,1\}$, равные нулю, начиная с некоторого места, то для любого "разумного" вероятностного синтезатора F (использующего решение проблемы эквивалентности или нет), всех n и всех $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$:

$$F^{\varepsilon\text{-MAX}}(n) \geq \frac{1}{2}\log_2 n.$$

Доказательство. Для каждого n требуется построить набор $\langle s_1, \ldots, s_n\rangle$ о.р. φ-номеров такой, что на одной из функций $f \in \{\varphi_{s_1}, \ldots, \varphi_{s_n}\}$:

$$P\{F, \bar{s}, f, \leq \frac{1}{2}\log_2 n\} \leq \frac{1}{2}.$$

Воспользуемся последовательностью таблиц T_k, определенных в доказательстве теоремы 4 (см. § 3 главы I). Возьмем k таким, что $2^k \leq n < 2^{k+1}$, и определим n функций σ_i следующим образом: $\sigma_i = 0\alpha_i 0^\infty$, где α_i - i-я строка таблицы T_{k+1} (всего в T_{k+1} имеется 2^{k+1} строк). Дерево функций σ_i содержит полное двоичное дерево высоты k, например, при $k=3$:



Пусть синтезатор F определен на вероятностном пространстве $\{\Omega, B, P\}$. Каждому элементарному событию $\omega \in \Omega$ соответствует определенный набор стрелок в указанном двоичном дереве: из точки A стрелка ведет "в сторону гипотезы", выданной синтезатором F в точке A или до нее (в случае реализации события ω). Всего в дереве $2^k - 1$ вершин, поэтому, вообще говоря, стрелки можно расставить $2^{2^k - 1}$ способами. Через A_x $(x = 1, 2, \ldots, 2^{2^k-1})$ обозначим события (т.е. подмножества Ω), соответствующие этим расстановкам.

Вероятность того, что среди первых m стрелок $(m \leq k)$ вдоль функции σ_i $(i = 1, 2, \ldots, 2^k)$ будет точно j уходящих в с т о р о н у от σ_i, выражается суммой некоторых $P(A_x)$. Подсчитаем число этих слагаемых.

Из k вершин, через которые проходит σ_i, в j вершинах стрелки должны уходить в сторону от σ_i. В тех $2^k - 1 - k$ вершинах, через которые σ_i не проходит, стрелки могут располагаться произвольно. Следовательно, расстановок, при которых на σ_i будет ровно j исправлений гипотезы, имеется всего $2^{2^k-1-k} \cdot C_k^j$. (Напомним, что синтезатор F - "разумный", и поэтому вынужден исправлять гипотезу сразу после стрелки, уходящей в сторону от σ_i).

Образуем теперь сумму:

$$P_j = \sum_{i=1}^{2^k} P\{\text{среди первых } k+1 \text{ гипотез синтезатора } F \text{ на функции } \sigma_i \text{ будет ровно } j \text{ исправлений}\}.$$

Эта сумма состоит из

$$2^k \cdot 2^{2^k-1-k} \cdot C_k^j = 2^{2^{k-1}} \cdot C_k^j$$

слагаемых вида $P(A_x)$. Имеется, конечно, много повторений. Однако в силу полной симметрии все $P(A_x)$ должны повторяться одинаковое число раз. Значений x всего 2^{2^k-1}, поэтому каждое $P(A_x)$ повторяется ровно C_k^j раз. Сумма всех $P(A_x)$, взятых по одному, равна 1, поэтому вся сумма

$$P_j = C_k^j.$$

Заметим теперь, что

$$\sum_{i=1}^{2^k} P\{F, \sigma_i, \bar{s}, \geq j\} \geq P_j + P_{j+1} + \dots + P_k = \sum_{s=j}^{k} C_k^s.$$

Это значит, что одно из i должно быть таким, что

$$P\{F, \hat{s}, \sigma_i, \geq j\} \geq 2^{-k} \sum_{s=j}^{k} C_k^s .$$

Отсюда при $j =]\frac{k+1}{2}[$ получаем:

$$P\{F, \hat{s}, \sigma_i \geq \frac{k+1}{2}\} \geq \frac{1}{2}.$$

Так как $k+1 \geq \log_2 n$, то теорема 4' доказана.

Итак, решение проблемы эквивалентности позволяет снизить число исправлений гипотезы при вероятностном синтезе с $\ln n$ (т.е. приблизительно $0.69 \log_2 n$) до $\frac{1}{2} \log_2 n$. Как уже отмечалось в § 3 главы I (для детерминированного синтеза), это улучшение может сопровождаться неприемлемым усложнением процедуры выдвижения новых гипотез. В случае вероятностного синтеза усложнение не кажется чрезмерно большим (и улучшение оценки числа исправлений здесь не столь впечатляющее - переход от $0.69 \log_2 n$ к $0.5 \log_2 n$ вместо скачка от $n-1$ к $\log_2 n$ в детерминированном случае).

Следует отметить еще один момент: в условиях решенной проблемы эквивалентности оценка м а к с и м а л ь н о г о числа исправлений при вероятностном синтезе совпадает с оценкой с р е д н е г о числа исправлений при детерминированном синтезе (в обоих случаях $\frac{1}{2} \log_2 n$). Т.е. в этих условиях вероятностный синтез как бы теряет свои преимущества (при нерешенной проблеме эквивалентности вероятностные синтезаторы давали оценку $\ln n$, а детерминированные - оценку порядка

n). Если отвлечься от возможных различий в сложности выдвижения новых гипотез, это действительно так. Если же учесть эти различия, может оказаться, что вероятностный синтез дает ту же оценку $\frac{1}{2}\log_2 n$ числа исправлений ценой меньшей сложности выдвижения новых гипотез по сравнению с детерминированным синтезом. Точное исследование этого вопроса пока отсутствует.

Глава 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6

§ I. Основная лемма.

Пусть φ -геделевская нумерация всех ч.р.функций типа $N \to N$ и пусть M - синтезатор для φ. Для каждого $\varepsilon > 0$ и каждого n требуется построить набор $\{s_1, \ldots, s_n\}$ о.р. φ - номеров такой, чтобы при синтезе номера одной из функций φ_{s_i} синтезатор M исправлял гипотезу не менее

$$\ln n - \sqrt{\frac{\ln n + C}{\varepsilon}} - C$$

раз с вероятностью $\geq 1 - \varepsilon$.

Рассмотрим следующую последовательность независимых случайных величин $\{z_i\}$ $(i = 2, 3, 4, \ldots)$:

$$P\{z_i = 1\} = \frac{1}{i}, \quad P\{z_i = 0\} = 1 - \frac{1}{i}.$$

Таким образом:

$$\sum_{i=2}^{n} P\{z_i = 1\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + O(1)$$

(здесь мы воспользоваличь известным свойством гармонического ряда). Согласно лемме 2 отсюда следует, что для всех n и всех $\varepsilon > 0$:

$$P\left\{\sum_{2}^{n} z_i > \ln n - \sqrt{\frac{\ln n + C}{\varepsilon}} - C\right\} \geq 1 - \varepsilon,$$

где C не зависит от n и ε. Имея в виду это свойство случайных величин z_i, нетрудно понять значение следующей леммы.

ЛЕММА 6. Пусть даны: вероятностная машина $\mathfrak{M}$, натуральные числа k, n $(k < n)$, рациональное число $\varepsilon > 0$ и "область допустимых гипотез", состоящая из n различных чисел $\{s_1, \ldots, s_n\}$. Тогда можно построить набор из n о.р.функций

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$$

такой, что если машина $\mathfrak{M}$ реализует стратегию, которая с вероятностью 1 синтезирует номер любой функции набора (т.е. s_i для σ_i), то на одной из этих функций $\mathfrak{M}$ исправляет гипотезу $\geqslant k$ раз с вероятностью не менее

$$(1-\varepsilon) P\left\{\sum_{2}^{n} z_i \geqslant k\right\}.$$

Доказательство изложено в §§ 2,3,4.

Полагая в лемме 6

$$k = \ln n - \sqrt{\frac{\ln n + c}{\varepsilon}} - c$$

и применяя теорему о рекурсии, легко получить утверждение теоремы 6. В самом деле, для произвольного набора n различных чисел $\{s_1, \ldots, s_n\}$ по лемме 6 строится набор n функций σ_i. Так как нумерация φ - геделевская, то найдутся о.р.функции $e_1, e_2, \ldots, e_n$ такие, что:

$$\sigma_1 = \varphi_{e_1(<s_1, \ldots, s_n>)}, \ \ldots, \ \sigma_n = \varphi_{e_n(<s_1, \ldots, s_n>)}$$

(мы можем считать здесь, что нумерация $< >$ упорядоченных наборов использует в качестве номеров все натуральные числа и нумерует только наборы из n различных чисел). Применяя теорему о рекурсии, получаем набор $\{s_1^0, \ldots, s_n^0\}$ такой, что

$$\sigma_1 = \varphi_{s_1^0}, \ \sigma_2 = \varphi_{s_2^0}, \ \ldots, \ \sigma_n = \varphi_{s_n^0}.$$

Имея $\{s_1^0, \ldots, s_n^0\}$ в качестве "области допустимых гипотез", синтезатор M вынужден при синтезе одной из функций $\varphi_{s_i^0}$ исправлять гипотезу не менее

$$\ln n - \sqrt{\frac{\ln n + c}{\varepsilon}} - c$$

раз с вероятностью $\geq (1-\varepsilon)^2$, что и требовалось.

§ 2. Общий ход конструкции набора σ

Мы рассмотрим только случай $k = 2, n = 4$. Обобщение тривиально.

Для построения набора функций $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ (см.формулировку леммы 6) параллельно вычисляются вероятности всевозможных событий вида

$$\mathfrak{M}(\beta_1) = t_1 \ \& \ \ldots \ \& \ \mathfrak{M}(\beta_1 \ldots \beta_m) = t_m, \qquad \text{(I)}$$

где $\bar{\beta} = \beta_1 \ldots \beta_m$ - двоичное слово (воспринимаемое как начальный кусок функции), $\bar{t} = (t_1 \ldots t_m)$ - упорядоченный набор натуральных чисел (воспринимаемый как возможная последовательность первых m гипотез машины $\mathfrak{M}$).

Вообще говоря, указанные вероятности нельзя вычислить точно за конечное время. Возможно лишь вычисление с любой наперед заданной точностью.

Параллельно вычислению вероятностей функции $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$

получают в качестве значений все новые и новые нули:

$$\sigma_i(0) = 0,\ \sigma_i(1) = 0,\ \sigma_i(2) = 0,\ \ldots\ .$$

Так что, если бы этот процесс мог беспрепятственно продолжаться до бесконечности, все четыре функции оказались бы тождественно равными нулю. Но мы будем в некоторые исключительные моменты вмешиваться в становление функций σ_i и давать этим функциям отдельные значения, равные единице.

Первый такой момент наступит, когда нужные вероятности будут вычислены настолько точно, что окажется возможным найти число j_1 такое, что можно получить следующее рациональное приближение для распределения гипотезы $\mathfrak{M}(0^{j_1})$:

$$\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

где $\sum q_i = 1$ и для всех i :

$$q_i \leq \frac{1}{1-\delta} P\{\mathfrak{M}(0^{j_1}) = i\}.$$

Здесь δ – не определенная пока константа. Ее выбор будет зависеть от чисел n, ε, фигурирующих в лемме 6.

Ненаступление ситуации, в которой такое приближение возможно, означало бы, что для каждого $j \in N$ гипотеза $\mathfrak{M}(0^j)$ неопределена или $\notin \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ с вероятностью $> \delta$. Но тогда с вероятностью $> \delta$ это выполнялось бы для бесконечно многих j одновременно. Это означало бы, что для функции 0^∞ машина $\mathfrak{M}$ с положительной вероятностью бесконечно много раз выдает гипотезы, отличные от s_1, s_2, s_3, s_4. Но как раз в этом случае ("ненаступление ситуации") мы вообще не вмешиваемся в процесс становления функций $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$, которые оказываются поэтому тождественно равными 0^∞. Для такого случая справедливость леммы 6 обеспечена.

Рассмотрим теперь случай, когда распределение (2) получить удается. На основе (2), с помощью алгоритма, который описан в следующем параграфе, один из номеров s_1, s_2, s_3, s_4 "исключается" в следующем смысле (пусть, для примера, это будет номер s_1). Функция σ_1 вместо очередного $\sigma_1(x_1) = 0$ получает $\sigma_1(x_1) = 1$, а дальше (при $x > x_1$) σ_1 полагается равной тождественно нулю. Остальные функции $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ получают при $x = x_1$ значение 0 (отличное от значения $\sigma_1(x_1)$) и продолжают (уже после "вмешательства") получать в качестве значений все новые и новые нули. Таким образом, после этого момента σ_1 отличается от $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ и поэтому при синтезе номеров этих трех функций гипотезу s_1 следует считать "неверной". Алгоритм исключения будет устроен так, что исключение s_1 возможно лишь в том случае, если $q_1 > 0$.

Второе вмешательство в процесс становления функций σ_i (теперь уже без σ_1) происходит, когда вероятности (I), характеризующие работу машины $\mathfrak{M}$, вычислены уже настолько точно, что можно найти $j_2 > j_1$, и числа q_{1i}:

$$\begin{pmatrix} s_2 & s_3 & s_4 \\ q_{12} & q_{13} & q_{14} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

такие, что $\sum q_{1i} = q_1$ и для всех i :

$$q_{1i} \leq \frac{1}{(1-\delta)^2} P\{\mathfrak{M}(0^{j_1}) = 1 \,\&\, \mathfrak{M}(0^{j_2}) = i\}.$$

Ненаступление ситуации, в которой получение j_2, q_{1i} возможно, означало бы, что для всех $j > j_1$ при условии $\mathfrak{M}(0^{j_1}) = 1$ вероятность того, что $\mathfrak{M}(0^{j})$ неопределено или $\notin \{s_2, s_3, s_4\}$, больше некоторого положительного числа δ'. Но тогда с вероятностью $> \delta'$ это выполняется для бесконечно многих $j > j_1$ одновременно. Поскольку в этом случае второе вмешательство в становление функций σ_i не происходит, все они оказываются равными тождественно 0^∞ и справедливость леммы 6 здесь обеспечена.

В случае же, когда получение чисел (3) возможно, с помощью алгоритма, описанного в следующем параграфе, исключается еще одна из функций σ_i (пусть, для примера, это будет σ_2). Мы полагаем $\sigma_2(x_2) = 1$ и $\sigma_3(x_2) = \sigma_4(x_2) = 0$, кроме того, $\sigma_2(x) = 0$ для всех $x > x_2$ (здесь, разумеется, $x_2 > x_1$, где x_1 -"место первого вмешательства"). На этом второе вмешательство в становление σ завершается. Заметим, что рассматривать вероятности

$$P\{\mathfrak{M}(0^{j_1}) = i_1 \,\&\, \mathfrak{M}(0^{j_2}) = i\}$$

для $i_1 = 2, 3, 4$ (в отличие от рассмотренных для $i_1 = 1$) бесполезно, так как гипотезы s_2, s_3, s_4 до второго вмешательства все еще одинаково "верны", и надеяться, что $\mathfrak{M}$ заменит их другими, не приходится.

Третье (и последнее при $n = 4$) вмешательство в становление набора σ (уже без функций σ_1, σ_2) происходит, когда вероятности (I) вычислены настолько точно, что можно найти $j_3 > j_2$ и числа q_{12i}, q_{22i} :

$$\begin{pmatrix} s_3 & s_4 \\ q_{123} & q_{124} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} s_3 & s_4 \\ q_{223} & q_{224} \end{pmatrix} \qquad (4)$$

такие, что $\sum q_{12i} = q_{12}$, $\sum q_{22i} = q_2$ и для всех i :

$$q_{12i} \leqslant \frac{1}{(1-\delta)^3} P\{\mathfrak{m}(o^{j_1}) = 1 \ \& \ \mathfrak{m}(o^{j_2}) = 2 \ \& \ \mathfrak{m}(o^{j_3}) = i\},$$

$$q_{22i} \leqslant \frac{1}{(1-\delta)^3} P\{\mathfrak{m}(o^{j_1}) = 2 \ \& \ \mathfrak{m}(o^{j_2}) = i\}.$$

В случае ненаступления ситуации, в которой нахождение чисел j_3, q_{12i}, q_{22i} возможно, справедливость леммы 6 обеспечена.

В случае же, когда получение чисел (4) возможно, алгоритм, описанный в следующем параграфе, исключает еще одну функцию (пусть это, для примера, σ_3). Мы полагаем $\sigma_3(x_3) = 1$ (где $x_3 > x_2$), $\sigma_4(x_3) = 0$, а при $x > x_3$: $\sigma_3(x) = 0$. Так как при $n = 4$ после этого исключения остается только одна функция σ_4 , положим и ее тождественно равной нулю при $x > x_3$.

Заметим, что вероятности

$$P\{\mathfrak{m}(o^{j_1}) = 1 \ \& \ \mathfrak{m}(o^{j_2}) = 3 \ \& \ \mathfrak{m}(o^{j_3}) = i\},$$

$$P\{\mathfrak{m}(o^{j_2}) = 3 \ \& \ \mathfrak{m}(o^{j_3}) = i\}$$

и подобные им рассматривать не стоит. До исключения σ_3 гипотезы s_3, s_4 одинаково "верны" и нельзя рассчитывать, что $\mathfrak{M}$ заменит их другими.

Таков **общий ход** конструкции набора функций, соответствующего по лемме 6 машине $\mathfrak{M}$, натуральным числам k, n $(k<n)$ и рациональному $\varepsilon>0$ (от которого зависит использованное выше число δ). Описанный ниже алгоритм "исключения" должен обеспечить, что на одной из функций набора машина $\mathfrak{M}$ будет изменять свои гипотезы $\geq k$ раз с достаточно большой вероятностью.

§ 3. Алгоритм исключения.

Мы рассмотрим только случай $k=2, n=4$. Обобщение тривиально.

Если машина $\mathfrak{M}$ с вероятностью 1 синтезирует "σ-номер" (т.е. s_1, s_2, s_3 или s_4) любой функции набора $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$, то в процессе построения этого набора должны были произойти все три акта исключения, пусть это были $123(4)$. В результате получилась следующая картина:

<table>
<tr><td>j_1</td><td colspan="4">1</td><td colspan="2">2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>j_2</td><td colspan="2">2</td><td>3</td><td>4</td><td colspan="2">2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>j_3</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>j_4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td></tr>
</table>

Разбиение первой строки соответствует распределению (q_1, q_2, q_3, q_4). Вторая строка разбивает в соответствии с распределением (q_{12}, q_{13}, q_{14}). Третья строка разбивает q_{12} в соответствии с (q_{123}, q_{124}) и q_2 - в соответствии с (q_{223}, q_{224}). В четвертой строке с вероятностью 1 фигурирует гипотеза s_4 - это единственный " σ -номер" функции $\sigma_4 = 0^\infty$.

Введем более удобные обозначения:

$$|1| = q_1, \quad |2| = |22| = q_2,$$

$$|12| = q_{12}, \quad |133| = q_{13},$$

$$|123| = q_{123}, \quad |224| = q_{224}, \ldots$$

Допустим временно, что эти числа совпадают т о ч н о с вероятностными, характеризующими машину $\mathfrak{M}$, например:

$$|123| = P\{\mathfrak{M}(0^{j_1}) = 1 \,\&\, \mathfrak{M}(0^{j_2}) = 2 \,\&\, \mathfrak{M}(0^{j_3}) = 3\},$$

$$|223| = P\{\mathfrak{M}(0^{j_1}) = 2 \,\&\, \mathfrak{M}(0^{j_3}) = 3\}.$$

Тогда вероятность того, что на функции $\sigma_4 = 0^\infty$ машина $\mathfrak{M}$ исправляет гипотезы не менее д в у х $(k = 2)$ раз, будет

$$\geqslant |123| + |124| + |133| + |223| =$$

$$\doteq |12| + |13| + |223| . \qquad \text{(a)}$$

Если бы мы на последнем шаге исключили бы не σ_3 , а σ_4 , то вместо (a) получилась бы сумма

$$|12| + |14| + |224| \qquad \text{(aa)}$$

Отсюда следует, что если функции σ_1, σ_2 уже исключены, то следующей разумно исключать σ_3 или σ_4 в зависимости от того, что больше - (а) или (аа). И это разумное решение осуществимо: все слагаемые (а) и (аа) нам известны, как только достигнут уровень j_3.

Перейдем теперь к уровню j_2. Функция σ_1 уже исключена. Нам известны вероятности $|1|, |2|, |3|, |4|, |12|, |13|, |14|$. Какую из функций исключить следующей - σ_2, σ_3 или σ_4 ? Качество решения "исключить σ_2" можно попытаться оценивать величиной суммы (а) + (аа), т.е.

$$|12|+|13|+|223|+|12|+|14|+|224| =$$
$$= |1|+|22|+|12| = |1|+|2|+|12|. \qquad (б)$$

К счастью, эта сумма зависит только от вероятностей, которые известны на уровне j_2. Соответствующие суммы для σ_3 и σ_4:

$$|1|+|3|+|13|, \qquad (бб)$$

$$|1|+|4|+|14|. \qquad (ббб)$$

Следовательно, большее из чисел (б),(бб), (ббб) и должно определить, которую из функций $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ исключать вслед за σ_1. Этот выбор осуществим на уровне j_2.

Перейдем, наконец, к уровню j_1. Качество решения "исключить σ_1" будем оценивать суммой (б)+(бб)+(ббб):

$$3\cdot|1|+|2|+|3|+|4|+|12|+|13|+|14| =$$
$$= 1+3\cdot|1|.$$

Аналогичные показатели для $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$:

$$1+3\cdot|2|, \quad 1+3\cdot|3|, \quad 1+3\cdot|4|.$$

Все они вычислимы на уровне j_1, где известны только вероятности $|1|, |2|, |3|, |4|$. Поэтому первой следует исключать функцию σ_i с наибольшим $|i|$.

В этих соображениях и заключается сущность предлагаемого алгоритма, определяющего порядок исключения функций. Правда, нужно еще доказать в общем виде, что все используемые суммирования действительно всегда приводят к возвращению на уровень, где должно быть принято соответствующее решение об исключении. Этой проблемой "сокращения хвостов" мы займемся в следующем параграфе.

ЗАМЕЧАНИЕ. Рассмотренный простой пример может создать иллюзию, что предлагаемый алгоритм можно заменить другим, более простым. Достаточно рассмотреть случай $k=3, n=5$, чтобы убедиться в обратном. Например, после исключения σ_1 качество решения "исключить σ_i" (где $i=2,3,4,5$) характеризуется суммой $|1|+|i|+3\cdot|1i|$. Сомнительно, чтобы такой критерий можно было "угадать" без вычислений подобных проведенным выше.

Если бы имело место наше предположение о совпадении вероятностей, характеризующих работу машины $\mathfrak{M}$, и чисел $|i|$, $|ij|$ и т.д., фигурирующих выше, то в рассмотренном случае ($k=2, n=4$) вероятность того, что на функции $\sigma_4=0^\infty$ машина $\mathfrak{M}$ исправляет гипотезы не менее 2 раз, можно оценить следующим образом.

На уровне j_1 мы имели 4 "показателя качества":

$1+3\cdot|1|,\ 1+3\cdot|2|,\ 1+3\cdot|3|,\ 1+3\cdot|4|.$

Их сумма равна $4+3\cdot 1=7$, т.е. зависит только от k, n и может быть вычислена, зная эти числа. Если мы, действуя согласно алгоритму, исключаем σ_1, то

$$1+3\cdot|1|\geq\frac{7}{4}.$$

Если затем исключается σ_2, то

$$|1|+|2|+|12|\geq\frac{7}{4\cdot 3}$$

(см.выше (б), (бб) и (ббб)).

Наконец, исключение σ_3 означает, что

$$|12|+|13|+|223|\geq\frac{7}{4\cdot 3\cdot 2}=\frac{7}{24}.$$

Таким образом, если бы наше предположение было верным, то машина $\mathfrak{M}$ на функции σ_4 исправляла бы гипотезу не менее двух раз с вероятностью $\geq 7/24$.

Но наше предположение не совсем верно- числа $|i|, |ij|$ и т.д. характеризуют работу машины $\mathfrak{M}$ лишь приблизительно. Нетрудно, однако, подобрать число δ, определяющее степень приближения, так, чтобы не получая оценки $\geq 7/24$, мы получили бы все же $\geq(1-\varepsilon)\,7/24$, где ε - число, фигурирующее в лемме 6. В самом деле:

$$P\{\mathfrak{M}, \bar{s}, \sigma_4, \geq 2\} \geq P\{\mathfrak{M}(0^{j_1}) = 1 \,\&\, \mathfrak{M}(0^{j_2}) = 2\} +$$
$$+ P\{\mathfrak{M}(0^{j_1}) = 1 \,\&\, \mathfrak{M}(0^{j_2}) = 3\} +$$
$$+ P\{\mathfrak{M}(0^{j_1}) = 2 \,\&\, \mathfrak{M}(0^{j_3}) = 3\} \geq$$
$$\geq (1-\delta)^2 q_{12} + (1-\delta)^2 q_{13} + (1-\delta)^3 q_{223} \geq$$
$$\geq (1-\delta)^3 (|12| + |13| + |223|) \geq (1-\delta)^3 \frac{7}{24}.$$

Если δ подобрать таким, что $(1-\delta)^3 \geq 1-\varepsilon$, то

$$P\{\mathfrak{M}, \bar{s}, \sigma_4, \geq 2\} \geq (1-\varepsilon)\frac{7}{24}.$$

Обобщение этих соображений тривиально.

Для доказательства леммы 6 (в конкретном случае $k=2$, $n=4$) остается проверить, что

$$\frac{7}{24} = P\left\{\sum_2^4 z_i \geq 2\right\},$$

где z_i - независимые случайные величины такие, что

$$P\{z_i = 1\} = \frac{1}{i}, \quad P\{z_i = 0\} = 1 - \frac{1}{i}.$$

Разумеется, в нашем конкретном случае это равенство легко проверить непосредственно:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{4} + \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} +$$
$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{7}{24}.$$

Общий же случай (k, n произвольны, $k < n$) доказывается, используя доказательство леммы 5.

Заметим, что в оценке

$$|12| + |13| + |223| \geq \frac{7}{24}\ .$$

равенство достигается на "симметричной" таблице:

<table>
<tr><td colspan="4">1</td><td colspan="2">2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="2">2</td><td>3</td><td>4</td><td colspan="2">2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td></tr>
</table>

Здесь всякое деление (сверху вниз) является делением на равные части – четыре, три, две. Нетрудно заметить, что эта таблица в точности передает работу стратегии E_φ (см. § I) на паре $(\bar{s}, \sigma_4)$, где $\bar{s} = (s_1, s_2, s_3, s_4)$ и:

$$\sigma_1 = \varphi_{s_1} = 010^\infty, \quad \sigma_2 = \varphi_{s_2} = 0010^\infty,$$

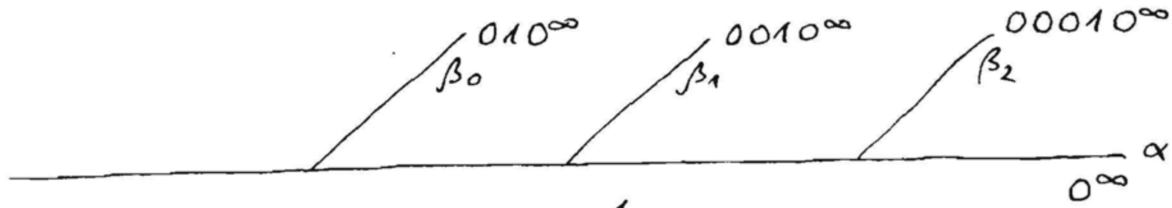
$$\sigma_3 = \varphi_{s_3} = 00010^\infty, \quad \sigma_4 = \varphi_{s_4} = 0^\infty.$$

В самом деле, $E_\varphi(\bar{s}, \langle 0 \rangle)$ равно s_1, s_2, s_3 или s_4 с одинаковой вероятностью $1/4$. Далее, при условии $E_\varphi(\bar{s}, \langle 0 \rangle) = s_1$ гипотеза $E_\varphi(\bar{s}, \langle 0, 0 \rangle)$ равна s_2, s_3 или s_4 с одинаковой вероятностью $1/3$. При условии

$$E_\varphi(\bar{s}, \langle 0 \rangle) = s_1 \ \&\ E_\varphi(\bar{s}, \langle 0, 0 \rangle) = s_2$$

гипотеза $E_\varphi(\bar{s}, \langle 0, 0, 0 \rangle)$ равна s_3 или s_4 с вероятностью $1/2$. Наконец, при условии $E_\varphi(\bar{s}, \langle 0 \rangle) = s_2$ гипотеза $E_\varphi(\hat{s}, <0,0,0>)$ также равна s_3 или s_4 с вероятностью $1/2$, а гипотеза $E_\varphi(\hat{s}, <0,0,0,0>)$ равна s_4 с вероятностью 1 (даже без всяких условий).

Используя дерево функций (как в доказательстве леммы 5) получаем:



$$\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \alpha = \frac{1}{4},$$

$$P\{E_\varphi(\hat{s}, <0>) \neq E_\varphi(\hat{s}, <0,0>)\} = \frac{\beta_0}{\alpha+\beta_0+\beta_1+\beta_2} = \frac{1}{4},$$

$$P\{E_\varphi(\hat{s}, <0,0>) \neq E_\varphi(\hat{s}, <0,0,0>)\} = \frac{\beta_1}{\alpha+\beta_1+\beta_2} = \frac{1}{3},$$

$$P\{E_\varphi(\hat{s}, <0,0,0>) \neq E_\varphi(\hat{s}, <0,0,0,0>)\} = \frac{\beta_2}{\alpha+\beta_2} = \frac{1}{2}.$$

По лемме 5 независимы следующие случайные величины X_i $(i = 0, 1, 2)$:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{если } E_\varphi(\hat{s}, <0^i>) \neq E_\varphi(\hat{s}, <0^{i+1}>), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом, система случайных величин (X_0, X_1, X_2) тождественна системе (Z_4, Z_3, Z_2). Так как сумма

$$\sum_0^2 X_i = \sum_2^4 Z_i$$

представляет число исправлений гипотезы стратегии E_{φ} на паре $(\bar{s}, 0^{\infty})$, то

$$\frac{7}{24} = P\left\{\sum_{2}^{4} z_i \geq 2\right\},$$

где $7/24$ - нижняя оценка, вычисленная с помощью описанного выше алгоритма при $k=2$, $n=4$.

Очевидно, это рассуждение проходит для произвольных чисел k, n $(k<n)$.

Итак, лемма 6 будет доказана, если удастся обосновать в общем виде использованное в построении алгоритма "сокращение хвостов".

§ 4. Доказательство "сокращения хвостов".

Напомним ситуацию. Дано натуральное число n. Пустому кортежу Λ (натуральных чисел) соответствует некоторое распределение вероятностей на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$, соответствующие вероятности обозначим через

$$|1|_{\Lambda}, |2|_{\Lambda}, \ldots, |n|_{\Lambda}.$$

Если теперь "исключить" некоторое число $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, вероятность $|i|_{\Lambda}$ распадается следующим образом:

$$|i|_{\Lambda} = \sum_{y \neq i} |iy|_i,$$

вероятности $|x|_{\Lambda}$, где $x \neq i$, не распадаются:

$$|x|_{\Lambda} = |xx|_i.$$

Полученные таким образом кортежи длины 2 (т.е. iy при $y \neq i$ и xx при $x \neq i$) назовем (i)-**допустимыми**.

Если вслед за i (на следующем шаге) исключить число $j \neq i$, распадаются вероятности $|ij|_i$, $|jj|_i$:

$$|xj|_i = \sum_{y \neq i,j} |xjy|_{ij} \qquad (x = i \vee x = j).$$

Все остальные вероятности сохраняются:

$$|xy|_i = |xyy|_{ij},$$

где $y \neq j$. Полученные таким образом кортежи длины 3 будум называть (i,j) -допустимыми.

В общем случае, если после исключение чисел $\hat{p} = (p_1, \ldots, p_a)$ уже получено понятие $\hat{p}$ -допустимых кортежей (всякий такой кортеж имеет длину $a+1$, и ему соответствует вероятность $|\hat{x}|_{\hat{p}}$, и если вслед за числами из $\hat{p}$ исключается число $q \notin \hat{p}$, то вероятности вида $|\hat{z}q|_{\hat{p}}$ (где кортеж $\hat{z}q$ $\hat{p}$-допустим) распадаются:

$$|\hat{z}q|_{\hat{p}} = \sum_{\substack{y \notin \hat{p} \\ y \neq q}} |\hat{z}qy|_{\hat{p}q}.$$

Остальные вероятности сохраняются:

$$|\hat{z}y|_{\hat{p}} = |\hat{z}yy|_{\hat{p}q},$$

где $y \neq q$ (и, конечно, $y \notin \bar{p}$, если кортеж $\bar{z}y$ $\bar{p}$-допустимы). В разряд $\bar{p}q$-допустимых включаются все кортежи, входящие в правые части указанных равенств.

Очевидно, кортеж $(x_1 \ldots x_{a+1})$ будет $\bar{p}$-допустимым (где $\bar{p} = (p_1 \ldots p_a)$), если и только если для всех $i \leq a$ выполняются условия:

$$(1) \quad x_{i+1} \notin \{p_1, \ldots, p_i\},$$

$$(2) \quad x_i \notin \{p_1, \ldots, p_i\} \to x_{i+1} = x_i .$$

В самом конце процесса исключения мы будем иметь некоторую перестановку $(p_1 \ldots p_n)$ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Обозначим $\bar{p} = (p_1 \ldots p_{n-1})$. Каждый $\bar{p}$-допустимый кортеж $\bar{x}$ (длины n) получил вероятность $|\bar{x}|_{\bar{p}}$. В соответствии с нашей задачей, особое внимание обращается на кортежи

$$\bar{x} = (x_1 \ldots x_n) ,$$

обладающие свойством:

$$x_i \neq x_{i+1} \quad \text{для } \geq k \quad \text{значений индекса } i .$$

Здесь k -натуральное число, $k < n$. Множество всех таких $\bar{x}$ обозначим через S_k. Мы воспользуемся только симметричностью множества S_k. Именно, если π -любая перестановка чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$, то

$$(x_1, \ldots, x_n) \in S_k \longrightarrow (\pi x_1, \ldots, \pi x_n) \in S_k .$$

"Качество" перестановки $(p_1 \dots p_n)$ множества $\{1, 2, \dots, n\}$ характеризуется суммой (вероятностью):

$$T(\bar{p}) = \sum_{\bar{x}} |\bar{x}|_{\bar{p}}$$

где суммирование идет по всем $\bar{p}$ -допустимым $\bar{x} \in S_k$ и $\bar{p} = (p_1 \dots p_{n-2})$. Т.е. суммирование идет по некоторым кортежам длины n.

Свой "показатель качества" приписывается к а ж д о м у кортежу $\bar{q} = (q_1 \dots q_a)$, не содержащему повторений $(a \leq n-1)$

Во-первых, если $a = n-2$ (т.е. вне $\bar{q}$ остаются только два числа множества $\{1, 2, \dots, n\}$, пусть это s, t), то

$$T(\bar{q}) = T(\bar{q}s) + T(\bar{q}t).$$

В общем случае, если $a \leq n-2$ и вне $\bar{q}$ остаются числа $q_{a+1}, \dots, q_n$, определяем по индукции:

$$T(\bar{q}) = \sum_{i=a+1}^{n} T(\bar{q}q_i).$$

В частности, для пустого кортежа Λ имеем:

$$T(\Lambda) = T(1) + T(2) + \dots + T(n).$$

Требуется показать, что для всех $\bar{q}$ и всех $q \notin \bar{q}$ значение $T(\bar{q}q)$ можно вычислить, зная только вероятности $|\bar{x}|_{\bar{q}}$ для всех $\bar{q}$ -допустимых кортежей $\bar{x}$. Это будет сделано, если удастся показать, что $T(\bar{q}q)$ можно представить в виде

$$T(\bar{q}q) = \sum_{\bar{x}} c(\bar{x})|\bar{x}|_{\bar{q}},$$

где $c(\bar{x})$ - натуральные коэффициенты, которые можно вычислить, зная $\bar{x}, \bar{q}, q$ (суммирование идет по всем $\bar{q}$ -допустимым кортежам $\bar{x}$).

Сначала рассмотрим случай $\bar{q} = (q_1 \ldots q_{n-2})$. Если вне $\bar{q}$ остались числа q, t , то для всякого $\bar{q}q$ -допустимого $\bar{x} = (x_1 \ldots x_n)$ имеем $x_n = t$,

$$|\bar{x}|_{\bar{q}q} = |x_1 \ldots x_{n-1}|_{\bar{q}},$$

т.е.

$$T(\bar{q}q) = \sum_{\bar{x}} c(\bar{x})|\bar{x}|_{\bar{q}},$$

где суммирование идет по всем $\bar{q}$ -допустимым $\bar{x}$ (длины $n-1$) и при этом:

$$c(\bar{x}) = \begin{cases} 1, \text{ если } \bar{x}t \in S_k, \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Рассмотрим теперь следующий случай: $\bar{q} = (q_1 \ldots q_{n-3})$ и вне $\bar{q}$ остались числа q, s, t , тогда, по определению:

$$T(\bar{q}q) = T(\bar{q}qs) + T(\bar{q}qt).$$

Согласно предыдущему:

$$T(\hat{q}qs) = \sum_{\bar{x}} |\bar{x}|_{\hat{q}q}, \tag{I}$$

где суммирование идет по всем $\hat{q}q$ -допустимым $\bar{x}$ таким, что $\bar{x}t \in S_k$. Множество S_k симметрично, кроме того, свойство $\hat{q}q$ -допустимости симметрично относительно перестановки s и t. Таким образом, если в (I) всюду заменить s на t и t на s, мы получим $T(\bar{q}qt)$ вместо $T(\bar{q}qs)$.

Сумму $T(\bar{q}qt) + T(\bar{q}qs)$ можно упростить, различая следующие случаи ($\bar{x}$ -произвольный кортеж, входящий в (I)):

(I) $\bar{x} = \bar{y}s$, где $\bar{y}$ не содержит чисел s, t. Тогда, меняя s и t местами, получаем кортеж $\bar{y}t$, при этом:

$$|\bar{y}s|_{\hat{q}q} + |\bar{y}t|_{\hat{q}q} = |\bar{y}|_{\hat{q}}.$$

Кортеж $\bar{y}$, очевидно, $\hat{q}$ -допустим.

(2) $\bar{x} = \bar{y}t$, аналогично.

(3) $\bar{x} = \bar{y}ss\ldots s$, где $\bar{y}$ не содержит s, t. Тогда, меняя s и t местами, получаем $\bar{y}tt\ldots t$, при этом:

$$|\bar{y}ss\ldots s|_{\hat{q}q} = |\bar{y}ss\ldots|_{\hat{q}},$$

$$|\bar{y}tt\ldots t|_{\hat{q}q} = |\bar{y}tt\ldots|_{\hat{q}}.$$

Кортежи $\bar{y}ss\ldots$, $\bar{y}tt\ldots$ $\hat{q}$ -допустимы.

(4) $\bar{x} = \bar{y}tt\ldots t$, аналогично.

Таким образом, для $T(\bar{q}q)$ мы получаем представление:

$$T(\bar{q}q) = \sum_{\bar{x}} c(\bar{x})\, |\bar{x}|_{\bar{q}}, \tag{2}$$

где суммирование идет по всем $\bar{q}$ -допустимым $\bar{x}$ (в данном случае длина таких $\bar{x}$ равна $n-2$) и коэффициенты $c(\bar{x})$ можно вычислить, зная $\bar{x}, \bar{q}, q$. Очевидна следующая особенность представления (2): оно симметрично относительно s, t, т.е. если $\bar{x}$ содержит s (тогда $\bar{x}$ не содержит t)то замена s на t (в $\bar{x}$) дает кортеж $\bar{y}$ такой,что $c(\bar{q}) = c(\bar{x})$.

Теперь можно перейти к шагу индукции в общем случае. Пусть $\bar{q} = (q_1 \ldots q_a)$ - кортеж без повторений и числа q, $r_2, \ldots, r_{n-a}$ остались вне $\bar{q}$. Предположим по индукции, что

$$T(\bar{q} q r_2) = \sum_{\bar{x}} c(\bar{x}) |x|_{\bar{q}q}, \qquad (3)$$

где суммирование идет по всем $\bar{q}q$ -допустимым $\bar{x}$.При этом выполняется следующее условие симметричности: если кортеж $\bar{x}$ $\bar{q}q$-допустим, а $(s_3, \ldots, s_{n-a})$ - любая перестановка чисел $(r_3, \ldots, r_{n-a})$, то действие $\bar{s}$ на $\bar{x}$ приводит к кортежу $\bar{y}$ такому, что $c(\bar{q}) = c(\bar{x})$.

По определению:

$$T(\bar{q} q) = \sum_{i=2}^{n-a} T(\bar{q} q r_i). \qquad (4)$$

Чтобы получить из (3) представление для $T(\bar{q} q r_i)$ (где $i \geq 3$), нужно применить ко всем $\bar{q}q$-допустимым кортежам $\bar{x}$ перестановку множества $\{1, 2, \ldots, n\}$,меняющую местами r_2 и r_i (остальные числа остаются на месте). Отсюда следует, что сумму (4) можно упростить, различая следующие случаи.

(I) $\bar{x} = \bar{y} r_2$, где $\bar{y}$ не содержит r_2 .В результате упомянутых только что перестановок получаем кортежи $\bar{y} r_3, \ldots, \bar{y} r_{n-a}$, при этом:

$$|\bar{y} r_2|_{\hat{q}q} + |\bar{y} r_3|_{\hat{q}q} + \cdots + |\bar{y} r_{n-a}|_{\hat{q}q} = |\bar{y}|_{\hat{q}} .$$

(2) $\bar{x} = \bar{y} r_i$, где $i \geq 3$ и $\bar{y}$ не содержит r_i . Тогда (3) содержит <u>все</u> кортежи этого рода, притом с одинаковым коэффициентом $c(\bar{x})$:

$$\bar{y} r_3, \bar{y} r_4, \ldots, \bar{y} r_{n-a} .$$

В результате применения упомянутых $n-a-2$ перестановок множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ каждый из этих $n-a-2$ кортежей порождает один кортеж $\bar{y} r_2$ плюс еще $n-a-3$ экземпляров самого себя. Все это войдет в сумму (4):

$$(n-a-2)\left(|\bar{y} r_2|_{\hat{q}q} + \cdots + |\bar{y} r_{n-a}|_{\hat{q}q}\right) = (n-a-2)\,|\bar{y}|_{\hat{q}} .$$

(3) $\bar{x} = \bar{y} r_2 \ldots r_2$,где $\bar{y}$ не содержит r_2 . В результате перестановок возникают все аналогичные кортежи $\bar{y} r_i \ldots r_i \ (i \geq 3)$. Нам достаточно заметить, что

$$|\bar{y} r_i \ldots r_i|_{\hat{q}q} = |\bar{y} r_i \ldots|_{\hat{q}} , \qquad (5)$$

и что после этого сокращения все $r_i \ (i \geq 2)$ войдут в сумму (4) симметрично.

(4) $\bar{x} = \bar{y} r_i \ldots r_i$, где $i \geq 3$ и $\bar{y}$ не содержит r_i. Тогда в сумму (4) входят с тем же коэффициентом $c(\bar{x})$ все аналогичные кортежи:

$$\bar{y} r_3 \ldots r_3,\ \bar{y} r_4 \ldots r_4,\ \ldots,\ \bar{y} r_{n-a} \ldots r_{n-a}.$$

Применение перестановок дает в итоге по $n-a-2$ экземпляра каждого $\bar{y} r_i \ldots r_i$ $(i \geq 2)$. Нам достаточно заметить, что имеет место (5) и что после сокращения все r_i $(i \geq 2)$ войдут в сумму (4) симметрично.

Таким образом, мы получили для $T(\bar{q}q)$ (где q -любое число вне $\bar{q}$) представление:

$$T(\bar{q}q) = \sum_{\bar{x}} c'(\bar{x}) |\bar{x}|_{\bar{q}},$$

где суммирование идет по всем $\bar{q}$ -допустимым кортежам $\bar{x}$, а коэффициенты $c'(\bar{x})$ можно вычислить, зная $\bar{x}, \bar{q}, q$. Все числа $r \notin \bar{q}q$ входят в это представление симметрично.

Этим завершается шаг индукции.

Итак, доказано, что характеристику $T(\bar{q}q)$ любого кортежа $\bar{q}q$, не содержащего повторения, можно вычислить, зная только вероятности $|\bar{x}|_{\bar{q}}$ для всех $\bar{q}$ -допустимых кортежей $\bar{x}$. Этого достаточно для обоснования возможности своевременно принять требуемое в алгоритме леммы 6 решение (см.выше, § 3).

В заключение отметим, что в случае пустого кортежа Λ полученный результат означает, что характеристика $T(\Lambda)$ зависит только от числа n и симметричного множества S_k кортежей длины n (элементами кортежей являются натуральные числа из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$). Это единственные "параметры" описанной конструкции. В случае, когда

$$S_k = \{(x_1 \ldots x_n) \mid x_i \neq x_{i+1} \text{ для } \geq k \text{ значений } i\},$$

в § 3 доказано, что

$$\frac{1}{n!}T(\Lambda) = P\left\{\sum_{2}^{n} z_i \geq k\right\}.$$

Определение случайных величин z_i см. в § I.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сведем вместе выводы, сделанные в разных местах диссертации по поводу доказанных оценок. Оценивалось число исправлений гипотезы при синтезе программ в ситуации, когда нужно сделать выбор из n возможных программ. Изучались четыре вида синтезаторов, отличающиеся тем, используется в них или нет: (а) "рандомизация" (т.е. детерминированные и вероятностные синтезаторы), (б) возможность решать проблему эквивалентности. Полученные оценки можно свести в следующую таблицу (все оценки являются наилучшими возможными для синтезаторов своего вида)

рандомизация \ решение ПЭ	не используется	используется
не используется	макс. $n-1$ средн. $\frac{1}{2}(n-1)$	макс. $\log_2 n$ средн. $\frac{1}{2}\log_2 n$
используется	ε-макс. $\ln n$	ε-макс. $\frac{1}{2}\log_2 n$

Как уже отмечалось в соответствующих местах, получаемое (от введения рандомизации или от решения проблемы эквивалентности) сокращение числа исправлений гипотезы сопряжено, по-видимому, со значительным усложнением процедуры выдвижения новых гипотез. Точное исследование связи между числом исправлений и сложностью выдвижения пока отсутствует (такое исследование проведено пока только для т.н. прогнозирующих стратегий, см.Подниекс [1977б]). Однако, возможные результаты этого отсутствующего исследования, не смогут, по-видимому, совершенно обесценить следующие рекомендации, вытекающие из сравнения приведенных только что оценок:

(I) Рандомизация является важным резервом повышения эффективности синтезаторов, особенно в ситуации, когда нет возможности удовлетворительно решать проблему эквивалентности (в интересующем нас классе программ).

(2) Любое продвижение в решении проблемы эквивалентности (в интересующем нас классе программ) следует попытаться использовать для повышения эффективности синтезаторов.

(3) Повышение эффективности в сторону сокращения числа исправлений гипотезы сопряжено с возрастающей сложностью выдвижения новых гипотез, поэтому следует искать "разумную середину", сочетающую в себе значительное сокращение числа исправлений с приемлемой сложностью выдвижения новых гипотез.

Можно надеяться, что точное исследование связи между "числом исправлений" и "сложностью выдвижения" позволит рекомендацию (3) значительно уточнить.

И последнее замечание. Если проблема эквивалентности решена, то среднее число исправлений при детерминированном синтезе совпадает с ε-максимальным числом исправлений при вероятностном синтезе (в обоих случаях асимптотика равна $\frac{1}{2}\log_2 n$). Т.е. если синтезатор использует д о к о н ц а решение проблемы эквивалентности, то рандомизация, как будто, не может повысить его эффективность. Если отвлечься от возможных различий в сложности выдвижения новых гипотез, это действительно так. Ну, а если учесть эти различия... - точное исследование пока отсутствует.

ЛИТЕРАТУРА

Б а р з д и н ь Я. М.

[1974а] Предельный синтез τ -номеров. - "Ученые записки Латвийского государственного университета", 1974, т.210, стр. 112-116.

[1974б] Замечание о синтезе программ по историям их работы. - Там же, стр.145-151.

[1974в] Индуктивный вывод автоматов, функций и программ. - "Труды международного конгресса математиков", Ванкувер (Канада), 1974, стр.455-460.

Б а р з д и н ь Я. М., Ф р е й в а л д Р. В.

[1972] О прогнозировании общерекурсивных функций. - " Доклады АН СССР", 1972, т.206, № 3, стр.521-524.

[1974] Прогнозирование и предельный синтез эффективно перечислимых классов функций. - "Ученые записки Латвийского государственного университета", 1974, т.210, стр.101-111.

Б и р м а н А. (Bierman A.W.)

[1976] Approaches to Automatic Programming. In: "Advances in Computers", vol.15, New York-San Francisko-London, 1976, pp. 2-63.

Б л ю м Л., Б л ю м М. (Blum L., Blum M.)

[1975] Toward a mathematical theory of inductive inference.- "Information and Control", 1975, vol.28, No.2, pp.125-155.

В и х а г е н Р., Л и п е В. (Wiehagen R., Liepe W.)

[1976] Charakteristische Eigenschaften von erkennbaren Klassen rekursiver Funktionen.- "Elektronische Informations - verarbeitung und Kybernetik", 1976, vol.12. No.1/2,SS.93-99.

Г о л д Е.М. (Gold E.M.)

[1965] Limiting Recursion.- "Journal of Symbolic Logic", 1965, vol.30, No.1, pp.28-48.

[1967] Language identification in the limit.- "Information and Control", 1967, vol.10, No.5.

Л а м п е р т и Дж.

[1973] Вероятность. Изд-во "Наука", М., 1973.

Л е у д е К., М у р Э.Ф., Ш е н н о н К., Ш а п и р о Н.

[1956] Вычислимость на вероятностных машинах. В кн. "Автоматы", М., 1956.

П а т н э м Х. (Putnam H.)

[1965] Trial and Error Predicates and the Solution to a Problem of Mostowski.- "Journal of Symbolic Logic", 1965, vol. 30, No.1.

П о д н и е к с К. М.

[1974] Сравнение различных типов предельного синтеза и прогнозирования функций. - "Ученые записки Латвийского государственного университета", 1974, т.210, стр.68-81.

[1975а] Вероятностный синтез нумерованных классов функций. - "Доклады АН СССР", 1975, т.223, № 5, стр.1071-1074.

[1975б] Вероятностное прогнозирование вычислимых функций. - "Ученые записки Латвийского государственного университета", 1975, т.233, стр.57-76.

[1975в] Сравнение различных типов предельного синтеза и прогнозирования II. - Там же, стр.35-44.

[1977а] Вероятностный синтез программ. - В кн. "Теория алгоритмов и программ. Вып.3" (Республиканский межведомственный сборник научных трудов), изд-во ЛГУ, Рига, 1977, стр.57 - 88.

[1977б] Прогнозирующие стратегии ограниченной сложности. - Там же, стр.89-102.

Р о д ж е р с Х.

[1972] Рекурсивные функции и эффективная вычислимость. Изд-во "Мир", М., 1972.

Ф р е й в а л д Р. В.

[1974] Равномерная и неравномерная прогнозируемость. - "Ученые записки Латвийского государственного университета", 1974, т.210, стр.89-100.