E. G r i n b e r g s
Latvijas Valsts Universitātes docents.

ANALĪTISKĀ GEOMETRIJA.

I.

K o n s p e k t s
ar rokraksta tiesībām.

Lasīts Fizikas-matēmatikas fakultātes studentiem 1940./41.g.

R ī g ā, 1 9 4 1
Latvijas Valsts Universitātes izdevniecība.

Konspekts

Sintetiskā jeb elementārā geometrija aplūko pašus geometriskos objektus, piem: punktus, taisnes, riņķus.

Analitiskā geometrija ir geometrijas nozare, kas geometriskus objektus, piem: punktus, taisnes, līknes, virsas attēlo ar skaitļiem, vienādojumiem un to sistemām un pēta ar analīzes metodēm, galvenā kārtā izlietojot algebras paņēmienus.

Analitiskā geometrija plāksnē apskata punktus, taisnes, riņķus un konikas, telpā - punktus, taisnes, plāksnes, lodes, kvadrikas. Šos objektus attēlo I un II pak. vienādojumiem un to sistēmām.

ĢEOMETRISKO OBJEKTU ORIENTĀCIJA. V e k t o r i .

A B M C

Punkti uz taisnes nosaka taisnes gabalus. Izvēloties garuma mēra vienību, elementarā geometrijā katram gabalam piesaista tā garumu, t.i. skaitli, kas pozitīvs un nosaukts: AB= 3 cm.

Analitiskā geometrijā garumus uzskata par nenosauktiem skaitļiem. Šie skaitļi pozitīvi vai 0, gadījumā, ja gala punkti sakrīt. Tos apzīmē rakstot abus gala punktus vai arī ar maziem latīņu burtiem: AB, AC, ab, u.t.t.

Šādi noteiktiem garumiem piemīt neērtība, ka jāšķiro dažādi gadījumi. Ja piem. uz taisnes atrodas punkti A, B, C un ir doti: AB = a, AC=b un jāatrod AM, kur M ir gabala BC viduspunkts, atkarībā no punktu A, B, C savstarpējā stāvokļa.

$$AM = \frac{a+b}{2} \qquad AM = \frac{a-b}{2} \qquad AM = \frac{b-a}{2}$$

Lai iegūtu vienu atrisinājumu šādiem uzdevumiem, piešķir taisnes gabaliem noteiktu virziena pusi - vērsumu.

Taisnes gabalus, kam piešķirts vērsums, sauc par vektoriem un apzīmē $\overrightarrow{AB}$, /no A iet uz B, no kreisās uz labo pusi/

$\overrightarrow{BA}$ /no labās uz kreiso/

A B

Vektoram $\overrightarrow{AB}$ /./A - sākuma punkts, B - gala punkts.
Vektorus apzīmē arī ar vienu mazo latīņu burtu ar bultiņu: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$.

Gabala AB garumu sauc par vektora $\overrightarrow{AB}$ garumu vai arī par <u>moduli</u> vai absolūto vērtību: $|\overrightarrow{AB}| = AB$; tāpat $|\vec{a}| = a$.

<u>Divi vektori uz taisnes ir vienādi, ja tiem ir tas pats garums un tas pats vērsums.</u>

/+/

x¹ A B C D x

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ja 1/ AB = CD
2/ vienāds vērsums, piem: no kreisās uz labo pusi.

Lai vērsumi uz taisnes nebūtu katrreiz jāapraksta vārdiem, vienu no tiem nosauc par pozitīvo un pretējo par negatīvo. Pozitīvo vērsumu sauc arī par taisnes vērsumu. Bieži taisni apzīmē ar diviem x' x; pozitivais vērsums tad iet no x' uz x.

<u>Taisni, kam noteikts + vērsums sauc par a s i.</u>

ZB-100
1941. maijā.

VEKTORA ALGEBRISKĀ VĒRTĪBA

Vektora algebriskā vērtība /garums/ ir skaitlis, kā absolūtā vērtība ir vienāda ar vektora garumu un kam + vai - zīme, atkarībā no tā, vai vektors iet pozitīvā vai negatīvā vērsumā.

Vektora $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ algebrisko vērtību apzīmē ar $\overline{AB}$ vai $\bar{a}$

Divi vektori uz taisnes/vienādi/ja tiem vienāda algebriskā vērtība.

Ja $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, tad arī $\overline{AB} = \overline{CD}$ un otrādi

jāizšķir tā tad: 1/taisnes gabals AB
2/ vektors $\overrightarrow{AB}$
3/ algebriskā vērt. $\overline{AB}$, kas ir skaitlis.

\+

A B C D

Vektoru, kam algebriskā vērtība +1, sauc par ass vienības vektoru.

$\overline{OE} = +1$ /sāk.punkts patvaļīgs/

\+

O E

VEKTORU SASKAITĪŠANA.

C' D'

A B C D

Lai atrastu divu vektoru $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{CD}$ summu konstruē no B kā no sākuma punkta vektoru $\overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{CD}$. Vektoru $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{CD}$ summa ir $\overrightarrow{AD'}$, kam sākuma pts ir kopējs ar pirmo vektoru un gala punkts ar otro.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{AD'}$$

Ja doti 3 pti, pastāv sakarība: /1/ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ /Chasles sakarība/ Šāla

neatkarīgi no ptu savstarpējā stāvokļa.

A B C

Šī sakarība top sevišķi uzskatama, ja vektoru uzskata kā ceļu ptam, kas kustas par taisni. Viegli pārbaudams, ka pastāv arī sakarība:

$$/1'/ \quad \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

Ja C sakrīt ar A, vektora $\overrightarrow{AC}$ sākuma pts sakrīt ar gala ptu. Šādam vektoram garums ir 0; to sauc par nulles vektoru un apzīmē ar 0

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = 0$$

Divus vektorus, kam vienādi garumi, bet pretēji vērsumi, sauc par pretējiem vektoriem. Piemērs: $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{BA}$.

Lai saskaitītu vairākus vektorus, novieto tos tā, lai katra vektora gala pts ir nākošā sākuma pts. Summa būs vektors, kā sākuma pts ir pirmā vektora sākuma pts, gala pts - pēdējā vektora gala pts.

A B C D K L $\quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \ldots + \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AL}$

Šī pati sakarība pastāv arī vektoru algebrisko vērtību starpā.

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \ldots + \overline{KL} = \overline{AL}$$

Atrisināsim uzdevumu:

Zinami: $\overline{AB} = \bar{a}$
$\overline{AC} = \bar{b}$ M ir BC viduspts,

A B M C

Jāatr.: $\overline{AM}$ algebriskā vērtība $\bar{m}$

Punktu M raksturo sakarība $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC}$

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CM}$$

$$\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = 0$$

Pieskaita sakarības abām pusēm $\vec{CM}$

Uz Šāla sakarības pamata: $\vec{AM} = \vec{AB}+\vec{BM}$
$\vec{AM} = \vec{AC} + \vec{CM}$

saskaitam kreisās un labās puses: $2\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AC}$, kas raksturo $\vec{AM}$.

Tā kā vektoru ar skaitli nemākam vēl dalīt, lai dabūtu tieši $\vec{AM}$, aizvietosim iepriekšējās sakarības vektorus ar to algebriskiem garumiem:

$$\begin{aligned} m &= a + \bar{BM} \\ + \quad m &= b + \bar{CM} \\ \hline 2m &= a + b \end{aligned} \qquad m = \frac{a+b}{2}$$

kas dod m neatkarīgi no ptu A,B,C savstarpējā stāvokļa.

VEKTORU REIZINĀŠANA AR SKAITLI /SKALĀRU/

Lai pareizinātu vektoru ar skaitli, konstruē jaunu vektoru, kā absolūtā vērtība vienāda ar pirmā vektora absolūto vērtību, reizinātu ar skalāra absolūto vērtību, un vērsums tas pats kā dotam vektoram, ja skalārs ir pozitīvs, un pretējs dotā vektora vērsumam, ja skalārs ir negatīvs. Šo reizināšanas definīciju var izteikt arī citādā veidā:

Lai pareizinātu vektoru ar skaitli, konstruē jaunu vektoru, kā algebriskā vērtība ir dotā vektora algebriskās vērtības un skaitļa reizinājums.

Piemērs: $2\vec{AB} = \vec{AC}$

A B C

Ja doti vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ... $\vec{l}$ un skalāri α, β ... λ, jau pazīstamās darbības ar vektoriem ļauj aprēķināt šāda veida izteiksmes:

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + \ldots + \lambda\vec{l}$$

Ja doti $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\alpha = +1$, $\beta = -1$ un jāaprēķina izteiksme $\vec{a}+/-1/\vec{b}$. $/-1/\vec{b}$ ir pretējais vektors vektoram $\vec{b}$, ko raksta $/-1/\vec{b}=-\vec{b}$, kas doto izteksmi ļauj rakstīt veidā: $\vec{a}-\vec{b}$, t.i. kā vektoru $\vec{a}$ un $\vec{b}$ starpību.
Ar mūsu norunu $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a}+/-1/\vec{b}$.

Lai atņemtu no viena vektora otru, pirmajam vektoram pieskaita vektoru, kas pretējs otrajam

D' C'
A B C D

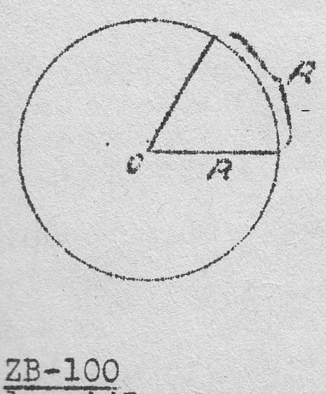
$\vec{AB} - \vec{CD} = \vec{AB} + \vec{C'D'} = \vec{AD'}$ kur $\vec{D'C'} = \vec{CD}$.

Vektoru atņemšanai piemīt tās pašas īpašības kā skaitļu atņemšanai, jo starpība + atskaitāmais = mazināmam.

$$/\vec{a} - \vec{b}/ + \vec{b} = \vec{a}$$

L E Ņ Ķ I

Elementarā geometrijā leņķis ir divu no viena pta izejošu staru veidota figūra. Mēs rīkosimies ar citādiem leņķiem. Leņķus mēra ar vienību radiānu, kas ir centra leņķis riņķī, kā ietvertais loks vienāds ar riņķa rādiju 56° 1.rad. $< 57^\circ$

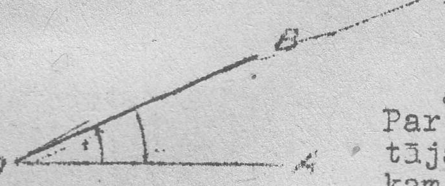


Leņķu mēru radiānos uzskatīsim par nenosauktu skaitli

$360^\circ = 2\pi$, jo riņķa līnijas garums ir $2\pi R$ /R - radijs/

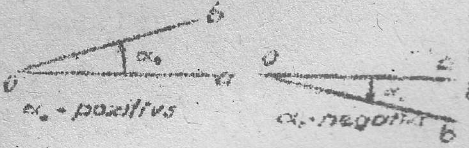
$180^\circ = \pi$ $\quad 45^\circ = \frac{\pi}{4}$
$90^\circ = \frac{\pi}{2}$
$60^\circ = \frac{\pi}{3}$ $\quad 30^\circ = \frac{\pi}{6}$

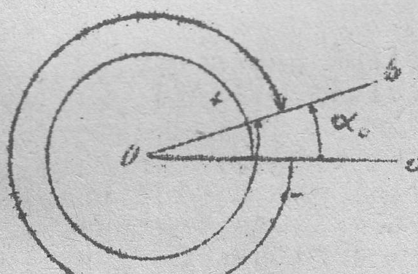
Leņķi starp stariem, vektoriem, asīm.



Divu staru leņķi orientējot, izšķir sākuma staru un beigu ~~staru un ievēro vērsumu~~, kādā jāpagriež sākuma stars, lai tas sakristu ar gala staru.

Par /+/ pieņem vērsumu pretēju pulksteņa rādītāja griešanās vērsumam. Pozitīvi leņķi ir tie, kam sākuma stars jāpagriež pozitīvā vērsumā, lai tas sakristu ar gala staru. Negatīviem leņķiem sāk.stars jāgriež-vērsumā, lai tas sakristu ar gala staru.





Sākuma un gala stars viennozīmīgi nenosaka leņķa vērtību. Tiešām, lai stars Oa nonāktu stāvoklī Ob, var tam likt apgriezties par pilnu apgriezienu un tad vēl griezt, līdz tas nonāk stāvoklī Ob; tad leņķis, pa ko pagriezts Oa ir

$$\alpha = \alpha_0 + 2\pi$$

Tāpat staram var likt griezties vēl vairākas reizes tad

$$\alpha = \alpha_0 + 2k\pi$$

kur $k>0$ un vesels skaitlis ir pilnu apgriez.skaits

Var griezt Oa arī negatīvā vērsumā līdz tas sakrīt ar Ob, tad $\sphericalangle\alpha$ abs.vērtība būs $2\pi-\alpha_0$; $\beta=\alpha-2\pi$

Liekot Oa k reizes izdarīt pilnu pagriezienu /-/ vērsumā un tad vēl pa leņķi β, tad tas būs pagriezts pa leņķi:

k patvaļ.+ sk.vai 0

$$+\begin{cases} -2k\pi \\ \alpha_0 - 2\pi \end{cases}$$

$$\alpha_0 - 2/k+1/\pi$$

Stari Oa un Ob nosaka tātad leņķus, kā vērtības ir: 1/$\alpha_0+2k\pi$

2/$\alpha_0-2/k+1/\pi$

Abas formulas apvienojot: $\alpha_0 + 2k\pi$, kur k vesels + vai - skaitlis vai 0.

Atzīmējot sākuma stara Oa un gala stara Ob leņķi ar /Oa,Ob/

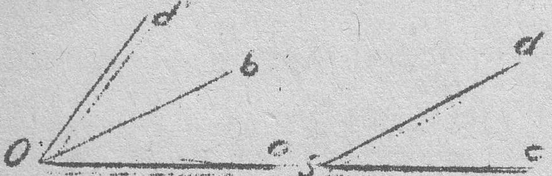
$$/Oa,Ob/ = \alpha_0 + 2k\pi$$

Divi stari veido bezgalīgi daudzus leņķus, kas atšķiras par veselu skaitu reiz 2π

/Oa,Ob/ viennozīmīgi raksturo sin un cos f-jas. Arī pēc kopā dotām sin un cos vērtībām var dabūt šos leņķus. $\sin\alpha = a$ viens pats neraksturo leņķa sākuma un gala stara savstarpīgo stāvokli, tāpat arī cos vērtība viena pati.

DARBĪBA AR ORIENTĒTIEM LEŅĶIEM.

1/saskaitīšana. Lai saskaitītu divus orientētus leņķus, pārvieto otru leņķi plāksnē tā, lai tā sākuma stars sakristu ar pirmā gala staru. Summa tad būs leņķis, ko veido pirmā leņķa sākuma stars ar otrā gala staru.



/Oa,Ob/+/Sc,Sd/=/Oa,Ob/+/Ob,Od'/=/Oa,Od'/

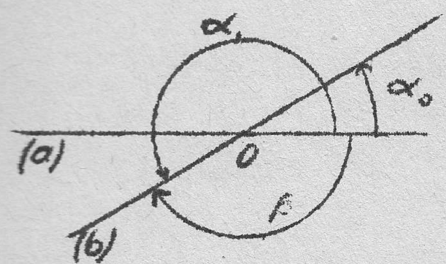
Summai jāpieraksta $2k\pi$, jo leņķi ir nenoteikti. Parasti šo locekli neraksta; ja turpretīm aplūko leņķu konkrētas vērtības, tās būs saistītas ar noteiktu k vērtību:

/Oa,Ob/+/Ob,Oc/ = /Oa,Oc/ $\pm 2k\pi$

Piem., ja /Oa,Ob/=/Ob,Oc/=$\frac{2}{3}\pi$;

2 staru leņķi. Tas ir leņķis α_0, pa ko jāgriež sāk. vektors /vai ass/ kamēr tas stāvoklī un vērsumā sakritīs ar gala vektoru/vai asi/. Nedrīkst griezt pa leņķi β_0, jo tad nesakritīs vērsumi.

Leņķi starp taisnēm. Ja dotas divas taisnes /a/ un /b/ ar kopēju ptu O, par taisņu orientēto leņķi /a,b/ sauksim leņķi pa ko jāpagriež /a/ ap O, kamēr tā sakrīt ar /b/.



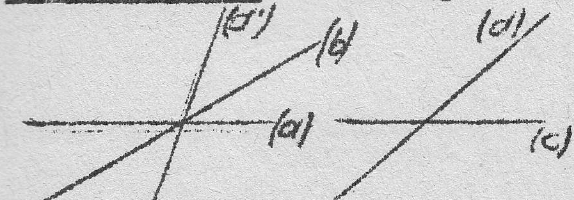
Vismazāko no leņķiem, pa ko jāpagriež sāk. taisne /a/ poz. vērsumā apzīmējot ar α, taisnei /a/ var likt sakrist ar /b/, griežot /a/ ap O pa leņķi α_0 un pēc tam vēl pa leņķi π. To pašu panāk, griežot /a/ pa leņķi $\alpha_0 + 2\pi$ un vispārīgā gadījumā griežot taisni /a/ pa $\alpha_0 + k\pi$, kur k poz. un vesels skaitlis. Griežot /a/ neg. vērsumā līdz sakrišanai ar /b/, vismazākā leņka absol. vērtība ir $\pi - \alpha_0$, bet tā kā vērsums neg., tad šī leņka vērtība ir $\alpha_0 - \pi$. Tāpat /a/ sakritīs ar /b/, ja to griezīs pa leņķi $\alpha_0 - k\pi$ /k poz. un vesels/. Abu taišņu veidoto leņķu izteiksmes tā tad ir:

griežot /a/ + vērs. $\quad$ /a,b/ = $\alpha_0 + k\pi$
" $\quad$ - $\quad$ " $\quad$ /a,b/ = $\alpha_0 - k\pi$

vai apvienojot vienā izteiksmē: /a,b/= $\alpha_0 + k\pi$
/k patvaļ. + vai - vesels skaitlis vai 0/.

Šai gadījumā abu taišņu stāvoklis un kārtība viennozīmīgi nosaka leņķa tg un ctg. fjas, jo tām ir periods π

Saskaitīšana. - analoga kā iepriekšējos gadījumos

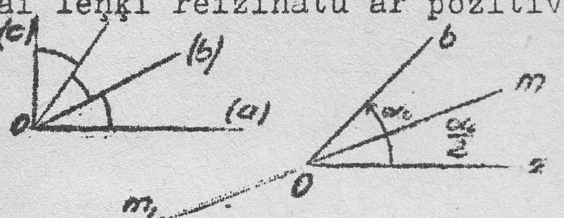


/a,b/+/c,d/=/a,b/+/b,d'/=/a,d'/+k, kur /b,d'/ = /c,d/

Lai saskaitītu divus leņķus starp taisnēm pārvieto vienu leņķi tā, lai tā sākuma taisne sakristu ar otra gala taisni un sakristu arī virsotnes.

LEŅĶA REIZINĀŠANA AR SKAITLI.

Lai leņķi reizinātu ar pozitīvu, veselu skaitli, jāņem leņķis kā saskaitāmais attiecīgo reižu skaitu. Piem. /a,c/= 3/a,b/.

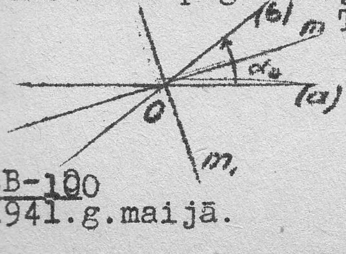


Leņķa, ko veido 2 stari, dalīšanai ar 2, uzrakstam leņķa vispārīgo vērtību.
/Oa,Ob/ =$\alpha_0 + 2k\pi$. Reizinot ar 1/2 dabū:
1/2 /Oa,Ob/ = $\frac{\alpha_0}{2} + k\pi$

Stars, kas veido ar Oa leņķi $\frac{\alpha_0}{2}$ būs Om; stars, kas ar Oa veido leņķi $\frac{\alpha_0}{2} + \pi$ būs Om_1 un

/Oa,Om/ = $\frac{\alpha_0}{2} + k\pi$
/Oa,Om/ = $\frac{\alpha_0}{2} + /2k+1/\pi$

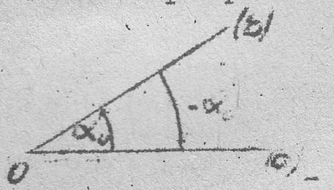
Katram leņķim, ko veido divi stari, dabū divas bisektrīses, kas ir viens otra pagarinājumā ejoši stari.



Tāpat rīkojamies 2 taišņu leņķa gadījumā:
/a,b/= $\alpha_0 + k\pi$
1/2/a,b/ = $\frac{\alpha_0}{2} + k\frac{\pi}{2}$ $\quad$ meklē taisnes /m/, kam
/a,m/ = $\frac{\alpha_0}{2} + k\frac{\pi}{2}$

ZB-100
1941.g.maijā.

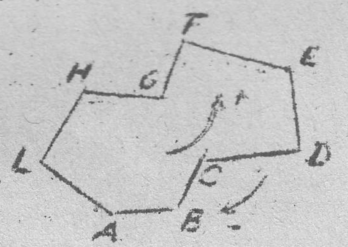
ja k=0 dabū /a,m/ = $\frac{\alpha}{2}$ taišņu bisektrise.
ja k=1 " /a,m/ : $\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}$ otrā taišņu bisektrise,
un visas citas k vērtības dod atkal vienu no taisnēm m,m$_1$,
Dabū 2 perpend.bisektrises, kas ir taisnes.



Ja leņķis jāreizina ar -1,
-1/Oa,Ob/ =-/Oa,Ob/, kas būs absolūtā vērtībā vienāds ar /Oa,Ob/ bet būs jāapmaina vērsums, t.i. sākuma stars ar beigu staru.
- /Oa,Ob/ = /Ob,Oa/

O R I E N T Ē T I   D A U D Z S T Ū R I .

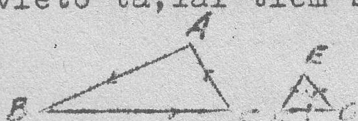
Aplūkosim daudzstūrus, kam malas neškeļas,piem.ABCDEFGHL, To pašu daudzstūri var raksturot arī sākot noskaitīt no citas virsotnes: DCBALHGFE



Daudzstūriem var noteikt orientāciju,ko nosaka griešanās vērsums,kādā virzās pa perimetru, uzskaitot virsotnes.Daudzstūris ir pozitivs,ja vērsums pozitīvs, un negatīvs, ja vērsums negatīvs. Daudzstūra orientācija nosaka tā laukuma zīmi.
Daudzstūra malas sadala plāksni tā iekšpusē un ārpusē;ejot pozitivā vērsumā pa perimetru, iekšpuse ir pa kreisi un ārpuse pa labi, negatīvā vērsumā ejot būs otrādi.
Daudzstūri nosaucot var sākt no ikkatras virsotnes:ABCDEFGHL
DEFGHLABC
Ja doti objekti,kas uzrakstīti zināmā kārtībā, par šo objektu cirkulāru permutāciju saucam jaunu to kārtību, kur pirmais objekts patvaļīgs bet objektu savstarpējā secība nav mainīta;pirmo objektu uzskata kā sekojošu pēdējam. Piemērs - augšējās virsotņu kārtības.
Ejot neg.vērsumā: ALHGFEDCB.

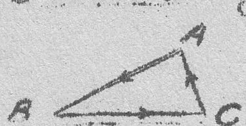
ORIENTĒTU LAUKUMU SASKAITĪŠANA.

Lai saskaitītu divu orientētu trījstūru laukumus, abi trijstūri jānovieto tā,lai tiem būtu kopēja mala, vai tās gabals un pa šo malu būtu jāiet pretējos vērsumos.
Izdzēš kopējo malu un dabū jaunu daudzstūri, kas ir abu summa.



Lai pareizinātu kādu orientētu laukumu ar -1 pietiek mainīt orientāciju.

L/EFG/
-L/EFG/ =L/EGF/



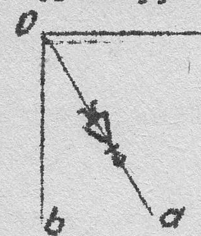
L/ABC/ L/BCA/ L/CAB/	poz.	L/ACB/ L/CBA/ L/BAC/	negativi

Ja maina trijstūra virsotņu kārtību, absolūtā vērtība nemainās,bet zīme paliek vai mainās.
S a k a , ka l i e l u m s a l t e r n ē, ja tas maina z ī m i , bet n e m a i n a a b s o l ū t o v ē r t ī b u .
Ja no pozitiva trijstūra laukuma jādabū negativs, maina vietām divus sekojošus burtus: ABC, ACB
Ja lielums alternē,kad pārmaina divus elementus,tad tas alternē attiecībā pret šiem elementiem. L alternē attiec.pret A,B,C.

ZB-100.
1941.g.maijā.

T R I J P L Ā K Š Ņ U   K A K T I .

Trijplākšņu kaktus mēs apzīmēsim ar rakstību /O,abc/. Tie ir figūras, ko telpā veido trīs stari ar kopējo sākuma punktu. Nosaucot trijplākšņu kaktu, mēs dodam tā šķautņu kārtību.



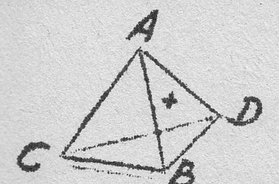
Kakts ir pozitivi orientēts, jeb labās rokas kakts, ja novērotājs, kas atrodas uz pirmā kakta stara ar kājām pret virsotni, redz otro staru pa labi un trešo pa kreisi; un negatīvi orientēts, pretējā gadījumā, t.i. ja otrais stars ir pa kreisi un trešais pa labi.

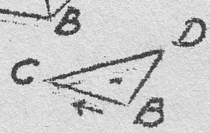
Labās rokas kaktam ir tā pati orientācija, kas labās rokas trīs pirkstiem: īkšķim, rādītāja un vidējam pirkstam.
a b c

/O,abc/ /O,bca/ /O,cab/	+	/O,acb/ /O,cba/ /O,bac/	-

T E T R A E D R I .

Lai izceltu orient. raksta atsevišķi vienu no virsotnēm A,BCD.





Tetraedrs /A,BCD/ ir pozitivi orientēts, ja trijplākšņu kakts/A,BCD/ ir pozitivi orientēts, un tā tilpums būs pozitīvs.

Ja trijpl.kakts neg.orientēts, tad tetraedra tilpums neg.
Orientacija ar trijst.palīdzību: skatās no virsotnes A uz pamatu. Ja pamats negatīvi orientēts tetraedrs orientēts pozitivi un otrādi.
Ja pārmaina vietām A un B, tetraedra orientācija mainīsies.

Apzīmējot ar T/ABCD/ tetraedra orientēto tilpumu, T/ABCD/ ir fja, kas alternē attiecībā pret burtiem ABCD.

VEKTORU UN LEŅĶU ĪPAŠĪBAS

Ar vektoriem un leņķiem, tos saskaitot, var rīkoties tāpat kā ar skaitļiem.

I. Summa ir <u>komutatīva</u>, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
" <u>associatīva</u>, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = /\vec{a}+\vec{b}/+\vec{c}$
" <u>distributīva</u>, t.i. vairāku lielumu summas vietā var pieskaitīt atsevišķos lielumus: $\vec{a}+/\vec{b}+\vec{c}/ = \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

II. Ar summām var rīkoties pilnīgi automātiski, neskatoties uz zīmējumu, ja katrs nākošais saskaitāmais sākās ar to elementu, ar ko iepriekšējais beidzas:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$

Tas pats ari leņķiem starp taisnēm /a/ /b/ /c/ /d/

$$/a,b/+/b,c/+/c,d/ = /a,d/ + k\pi$$

un leņķiem starp stariem, asīm vai vektoriem.

D E T E R M I N A N T I .

Atrisinot lineāru, t.i. pirmās pakāpes vienādojumu sistemas, jāsastopas ar determinantiem:

ZB-100
1941.g.maijā.

Aplūkojam 2 v-mu sist.,kas satur 2 nezin.:

$$\begin{array}{l|c|c} a_1x + b_2y = c_1 & b_2 & -a_2 \\ a_2x + b_2y = c_2 & -b_1 & +a_1 \end{array}$$

lai atrisinātu sistemu, reizina katru vienādojumu ar piemērotu skaitli, lai saskaitot pazustu viens nezināmais

$$/ a_1b_2 - a_2b_1/ \, x = c_1b_2 - c_2b_1$$

$$/ a_1b_2 - a_2b_1/ \, y = a_1c_2 - a_2c_1$$

Ja neviens no lielumiem, ar kuru reizinām, nav nulle, tad otrā v-mu sist.līdzvērtīga pirmai. Dalot ar nezināmo kopējo koef.dabū:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Saucēji un skaitītāji ir divu skaitļu reizinājuma starpība,ko var rakstīt determinanta veidā

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

1.rinda
2.rinda
galvenā diagonāle

Katrs skaitlis determinantā ir determinanta elements.

Elementi, kas atrodas viens otram blakus, izveido rindu.Elementi, kas atrodas viens zem otra, izveido kolonnu.

Locekļu kopību a_1b_2 sauc par galveno diagonāli.
Locekļi a_2b_1 izveido blakus diagonāli.

DIVRINDU DETERMINANTI VAI OTRĀS KĀRTAS DETERMINANTI
= =

K R Ā M E R A formulas dod aplūkotas vienādojumu sistēmas atrisinājumu:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} . \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

D E T E R M I N A N T U Ī P A Š Ī B A S .
= =

1/ Determinantā var pārmainīt vietām rindas ar kolonnām

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

~~aprēķināsim~~ dabūto det-u, lai pārbaudītu
saskalda

$$\begin{vmatrix} a\alpha + b\beta & a\gamma + b\delta \\ c\alpha + d\beta & c\gamma + d\delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\alpha & a\gamma + b\delta \\ c\alpha & c\gamma + d\delta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b\beta & a\gamma + b\delta \\ d\beta & c\gamma + d\delta \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha\delta \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \beta\gamma \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha\delta \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - \beta\gamma \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} /\alpha\delta - \beta\gamma/ = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

Lai dabūtu abu determinantu reizinājumu, var komponēt rindas ar r-dām. Bet det-a vērtība nemainās, pārmainot vietām rindas ar kolonām, tā tad to pašu reizinājumu iegūst arī, ja: komponē rindas ar kolonām

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{vmatrix}$$

Divus divrindu determinantus var reizināt, komponējot:

—— . —— rindas ar rindām

—— . | rindas ar kolonām

| . —— kolonas ar rindām

| . | kolonas ar kolonām

M A T R I C A S.

Matricas ir skaitļu tabulas, kas izskatā analogas determinantiem, tikai katrā pusē tām 2 vertikālas svītras un rindu un kolonu skaits var būt nevienāds:

$$\begin{Vmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c' & d \end{Vmatrix}$$

Determinants apzīmē skaitlisku vērtību, jo norāda, kas ar skaitļiem jādara.
Matrica ir tikai skaitļi, kas sakārtoti zināmā kārtībā. No matricas var dabūt determinantus paturot vienādu rindu un kolonu skaitu, piem.:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}$$

Matricu reizināšana. Ja ir divas divrindu un divkolonu matricas, šīs matricas var reizināt un reizinot pielieto determinentu reizināšanas paņēmienu, komponējot I. M. r i n d a s ar II. k o l o n ā m

$$\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{Vmatrix}$$

Vienādojumu atrisināšana ar determinantu palīdzību.

Sistēmas $a_1x + b_1y = c_1$

$a_2x + b_2y = c_2$

atrisinājumu dod

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Saucējā x un y koeficientu izveidotais determinants, ko sauc par dotās sistemas determinantu.

ZB- 100.
1941.g.maijā.

patur absolūto vērtību, bet maina zīmi, t.i. alternē attiecībā pret burtiem un indekiem

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a_2b_1 - a_1b_2 = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Apzīmējot determinanta elementus ar to pašu burtu un 2 indekiem, rakstam

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22}$$

ja pārmaina divas rindas vai divas kolonas, to pašu panāk, pārmainot vietām pirmos vai otros indekus. Determinants alternē attiecībā pret indekiem.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$$

3/ Ja diviem divrindu determinantiem ir kopēja rinda vai kolona, to summu /vai starpību/ var uzrakstīt divrindu determinanta veidā.

Kopējo rindu raksta tāpat, bet atšķirīgās locekļus saskaita/vai atņem/

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c+e & d+f \end{vmatrix} ;$$

tiešām

$$ad - bc + /af-bc/ = a/d+f/ - b/c+e/$$

$$a/d+f/ - b/c+e/ = a/d+f/ - b/c+e/$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{starpībai}$$

4/ Ja visiem divrindu determinanta vienas rindas vai vienas kolonas locekļiem ir kopīgs reizinātājs, to var iznest pirms determinanta

$$\begin{vmatrix} ak & b \\ ck & d \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \text{Pārbaude: } akd - bkc = k/ad - bc/$$

Sekas:

1/ Ja determinanta divas rindas vai divas kolonas satur proporcionālus elementus, det-a skaitliskā vērtība ir nulle.

$$\begin{vmatrix} a & ka \\ c & kc \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} = k.0 = 0$$

2/ Determinanta vienas rindas vai vienas kolonas elementiem var pieskaitīt otras rindas vai kolonas elementus pareizinātus ar patvaļīgu faktoru, caur ko determinanta vērtība nemainās.

$$\begin{vmatrix} a + kc & b + kd \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} kc & kd \\ c & d \end{vmatrix}}_{=0} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

/sadala pirmās rindas locekļus divos saskaitāmos pēc /3/īpašības/

Piemērs:

$$\begin{vmatrix} 45 & 63 \\ 13 & 17 \end{vmatrix} \overset{-3}{=} \begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 13 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 13 & -9 \end{vmatrix} = -54$$

Tieši: 765 - 819 = -54.

Determinanta reizinājums.

Lai sareizinātu divus divrindu determinantus, uzrakstajaunu divrindu determinantu, kas dabūts, komponējot abu doto determinantu rindas

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\alpha + b\beta & a\gamma + b\delta \\ c\alpha + d\beta & c\gamma + d\delta \end{vmatrix}$$

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Var ņemt

$$\alpha_1 = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} \quad \alpha_3 = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

y un z pazudīs un paliks tikai koeficienti pie x un brīvais loceklis. Vienādojums būs:

$$/a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3/\ x = /d_1\alpha_1 + d_2\alpha_2 + d_3\alpha_3/$$

koef. pie x $D = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

šo lielumu raksta trīsrindu determinanta veidā:

$$\begin{array}{cl} \text{kolonas} & \\ D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{array}{l} \text{blakus diagonāle} \\ \text{rindas} \\ \text{galvenā diagonāle} \end{array} \end{array}$$

Determinanta aprēķināšana. I. Lai aprēķinātu determinanta vērtību, atkārto vēlreiz abas pirmās rindas vai kolonas. Sareizina elementus, kas atrodas galvenā diagonālē un tai parallelās taisnēs, tos saskaita un pieskaita blakus diagonālē un tās parallelēs esošo elementu reizinājums, kam iepriekš mainīta zīme /Sarrus /Sarusa/ paņēmiens/.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3$$

Tāpat var rīkoties arī ar kolonām:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right. \qquad D = a_1\,b_2\,c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_1c_2b_3 - c_1b_2a_3 -$$

$$- b_1a_2c_3$$

II. veids: reizinājumiem, kam zīmi nemaina, locekļi atrodas galvenā diagonālē un trijstūros, kam viena mala paral.-a galvenai diagonālei; reizinājumiem, kam zīmi maina, locekļi atrodas blakus diagonālē un trijstūru virsotnēs, kam viena mala parallela šai diagonālei

x Skaitītājā otrā kolona tā pati, bet I kolonā brīvie locekļi c_1 c_2 tāpat y skaitītājā tā koeficientu vietā brīvie locekļi.
Saucēju determinants ir dotās sistemas determinants.

Brīvie locekļi, lietojot šīs formulas, jāpārnes vienādojumu labā pusē. Tā $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ vietā jāraksta $a_1x + b_1y = -c_1$
Formulas derīgas, ja sistēmas determinants nav nulle. / $D \neq 0$ /
Ja sist. $D = 0$ dabū nenoteiktu izteiksmi $\frac{0}{0}$ vai galīgus skaitļus, dalītus ar nulli.

Šī gadījuma iztirzājums sekos vēlāk.

Homogena 2 lineāru v-mu sistema ar 3 nezināmiem.

Vārds homogens nozīmē to, ka visi locekļi ir tās pašas pakāpes attiecībā pret x,y,z, /te pirmās pakāpes/

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = 0$$

Uzskata z par dotu, un dabū 2 līn.v-mus ar 2 nezināmiem, ko var atrisināt pēc Krāmera formulām.

$$a_1x + b_1y = -c_1z$$
$$a_2x + b_2y = -c_2z$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -c_1z & b_1 \\ -c_2z & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = z\frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -c_1z \\ a_2 & -c_2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = z\frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Formulas var uzrakstīt veidā:

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}} \text{ vai } x:y:z = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Lielumi x,y,z ir proporcionāli determinantiem. Var vienu pieņemt patvaļīgi lielu, tad pārējos 2 varēs atrast; it īpaši var pieņemt x, y un z vienādus ar determinantiem; tad prop.faktors ir 1.
Determinantu atrašanai uzraksta matricu, kas satur sistemas koefic.

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{Vmatrix}$$

determ-u prop.-u x-am dabū, nosvītrojot I.kolonu
" " y " " II. "
un sākot ar c,
det-u prop.z-am dabū nosvītrojot pēdējo kolonu.

TRĪSRINDU DETERMINANTI.

Lai atrisinātu 3 lineārus vienādojumus ar trīs nezināmiem

$$\begin{array}{l|l} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & \alpha_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 & \alpha_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 & \alpha_3 \end{array}$$

var pareizināt katru vienādojumu ar α_i tā, lai pēc saskaitīšanas 2 no nezināmiem pazūd un dabū vienu vienādojumu ar vienu nezināmo.

koef.pie y $b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3 = 0$
koef.pie z $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = 0$

ir divu homogenu lineāru vienādojumu sistema ar trim nezināmiem

$$\overset{+}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \qquad \overset{-}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Bieži determinanta vispārīgo locekli apzīmē ar to pašu burtu, kam divi indeki: pirmais apzīmē rindu, otrais kolonu

a_{ik} . D-tu raksta $|a_{ik}|$,

kas nozīmē, ka aplūko determinantu, kam locekļi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Determinanta elementam atbilstošais m i n o r s un elementa a d j u n k t s .

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Kāda elementa m i n o r s ir determinants, ko dabū atmetot elementam atbilstošo rindu un kolonu.

Apzīmē ar D un attiecīgiem indekiem: a_{21} atbilstošais minors ir D_{21}

Elementa adjunkts ir tā koeficients determinanta izvirzijumā. Apzīmē ar: A un indekiem, kādi attiecīgam elementam: a_{21} adjunkts ir A_{21}. Jāaplūko tie determinanta izvirzījuma locekļi, kur ietilpst a_{21}

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad A_{21} = a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Pastāv tuva sakarība starp elementa minoriem un elementa adjunktiem

$A_{21} = -D_{21}$ Vispār $\underline{\underline{A_{ik} = /-1/^{i+k}\, D_{ik}}}$ $\quad A_{11} = D_{11} \quad D_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Ja pirmās kolonas katru elementu reizina ar atbilstošo adjunktu un saskaita, dabū determinanta vērtību

$D = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$

Tiešām summā figurē katrs determinanta izvirzījuma loceklis ar attiecīgo zīmi.

Vispār determinantu var izteikt kā summu locekļiem,ko dabū vienas rindas vai kolonas elementus reizinot ar to adjunktiem/katrā summā maina tikai vienu indeku/

$$D = \sum_{i=1}^{i=3} a_{ik} A_{ik} = \sum_{k=1}^{k=3} a_{ik} A_{ik}$$

izvirzījums pēc rindas

izvirzījums pēc kolonas

Adjunktu zīmju tabula norāda,kāda zīme jāliek pirms elementa minora, lai dabūtu adjunktu

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Ja determinantam divas rindas vai divas kolonas ir proporcionālas, determinanta skaitliskā vērtība ir 0.

Tiešām, ja determinantu izvirza pēc rindas vai kolonas, kā adjunkti satur proporcionālus elementus, visi attiecīgie adjunkti

$$A_{ik} = 0 \quad \text{un tā tad} \quad D = 0$$

1. Determinantā var mainīt rindas ar kolonām un otrādi, nemainot determinanta vērtību.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Aprēķinot dabū tos pašus elementus ar to pašu zīmi, tikai citādā sakārtojumā /atzīmēti reizinājumi, kam zīmi nemaina/.

2. Ja maina vietām divas rindas vai divas kolonas, determinants alternē

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Piem.:ja pārmaina vietām otro un trešo kolonu,pirmās kolonas adjunkti maina zīmi.

$$a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

$$a_{11}/-A_{11}/+a_{21}/-A_{21}/ +a_{31}/-A_{31}/$$

Pirmā determinanta vērtība pretēji otrā determinanta vērtībai .

3. Ja diviem determinantiem atšķiras tikai vienas rindas vai kolonas elementi,to summu vai starpību var uzrakstīt determinanta veidā.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ r & s & t \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d+r & e+s & f+t \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Pārliecinās,izvirzot trīs determinantus pēc otrās rindas

$$d/-\begin{vmatrix} bc \\ hi \end{vmatrix}/+ e \begin{vmatrix} ac \\ gi \end{vmatrix} + f/-\begin{vmatrix} ab \\ gh \end{vmatrix}/ +r/-\begin{vmatrix} bc \\ hi \end{vmatrix}/ +s \begin{vmatrix} ac \\ gi \end{vmatrix} + t/-\begin{vmatrix} ab \\ gi \end{vmatrix}/ =$$

$$= /d+r/ /-\begin{vmatrix} bc \\ hi \end{vmatrix}/ + /e+s/ \begin{vmatrix} ac \\ gi \end{vmatrix} + /f+t/ /-\begin{vmatrix} ab \\ gh \end{vmatrix}/$$

Lasot augšējo sakarību no labās uz kreiso, redzam, ka determinantu,

ZB-100
1941.g.maijā.

kam vienas rindas vai kolonas elementi ir divu lielumu summa, var uzrakstīt kā divu determinantu summu.

4. Vienas rindas vai vienas kolonas elementu kopīgu faktoru var iznest determinanta priekšā

$$\begin{vmatrix} a & kb & c \\ d & ke & f \\ g & kh & i \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Pārliecinās aprēķinot determinantu pēc Sarusa paņēmiena / visi locekļi satur k pirmā pakāpē/ vai arī izvirzot pēc otrās kolonas.

Sekas: 1/Determinanta skaitliskā vērtība nemainās, ja vienas rindas vai kolonas elementiem pieskaita citas rindas vai kolonas elementus pareizinātus ar patvaļīgu faktoru /kombinē rindas vai kolonas/

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \quad D_1 = \begin{vmatrix} a + kg & b+hk & c+ki \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} =$$

Sadala determinantu divu determinantu summā uz 3.īpaš.pamata

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} kg & kh & ki \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \qquad D_1 = D$$

Piemērs: /Sarrus/

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} = 50 + 96 + 84 - 105 - 48 - 80 = 230 - 233 = -3.$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{matrix}$$

Trijstūra paņēmiens

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} = 50 + 84 + 96 - 105 - 80 - 48 = -3$$

Izvirzījums pēc pēdējās rindas

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} = 7./-3/-8./-6/+10./-3/ = -21 +48 -30 = -3.$$

Kombinējot

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & 8 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$-1 \qquad\qquad -1$$

TRĪSRINDU DETERMINANTA REIZINĀŠANA.

Lai pareizinātu 2 trīsrindu determinantus, raksta trīsrindu determinantu kā elementi dabūti komponējot doto determinantu elementus.

ZB- 100
1941.g.maijā.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & D \end{vmatrix} = D^3$$

Δ - saistītais $\quad D.\Delta = D^3$

Šī sakarība ir netikai vienādojums, bet identitāte, tādēļ kreiso un labo pusi var dalīt ar determinantu, ja arī determinanta vērtība būtu 0 : $\Delta = D^2$

Ja $D \neq 0$ arī $\Delta \neq 0$ un otrādi.

Ja $D = 0$ $\Delta = 0$ un otrādi

<u>C e t u r t ā s kārtas determinantu</u> var aprēķināt, izvirzot pēc vienas rindas vai kolonas, t.i. reizina vienas rindas vai kolonas elęmentus ar atbilstošiem adjunktiem, kas būs trīsrindu determinanti, un saskaita. Adjunktu priekšā liekamās zīmes noteic ar izteiksmi $/-1/^{i+k}$ vai skaitot "+", "-".

Piemērs:

$$\begin{array}{c} + \\ - \\ + \\ - \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 13 \\ 12 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = -12 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 13 \end{vmatrix} + 14 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 13 \end{vmatrix} - 15 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 13 \end{vmatrix} + 16 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix}$$

Var arī pārveidot determinantu, kombinējot rindas vai kolonas tā, lai iespējami daudz elementi taptu par 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 13 \\ 12 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 1 & 2 \\ 12 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 1 & 1 \\ 12 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 9 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$-1 \quad -1 \quad -1 \qquad\qquad -1$

Atgriežamies pie 3 lineāriem vienādojumiem ar trim nezināmiem

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = D$$

sist. determ.

Ja grib izslēgt y un z, jāpareizina sistemas vienādojumi ar adjunktiem A_1, A_2, A_3, kas atbilst I kolonai un jāsaskaita.

Koeficienti pie y un z ir nulle un pie x ir D :

$$Dx = D_1 \qquad D_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \text{ja } D \neq 0 \qquad x = \frac{D_1}{D}$$

Reizinot sistemas v-mus ar otrai kolonai atbilstošiem adjunktiem B_1, B_2, B_3 koeficienti pie x un z ir nulle un pie y ir D:

$$Dy = D_2 \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad y = \frac{D_2}{D}$$

ZB- 100
1941.g.maijā.

Reizinot sistemas v-mu ar C_1, C_2, C_3 un saskaitot , dabū

$$Dz = D_3 \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \qquad z = \frac{D_3}{D}$$

x, y un z šādā kārtā dabūjam ar Krāmera formulām, kur saucējs sistemas determinants un skaitītājā determinants, ko dabū nezināmo koeficientus aizvietojot ar brīviem locekļiem d_i.

Vienkāršāk tomēr atrisināt trīs vienādojumu sistēmu ar 3 nezināmiem kam koeficienti ir vienkārši skaitļi, pārveidojot 2 vienādojumu sistemā ar 2 nezināmiem, ko var vieglāk atrisināt.

HOMOGĒNAS LINEĀRU VIENĀDOJUMU SISTĒMAS

2 homogēnu vienādojumu sistēma ar 2 nezināmiem

$$a_1x + b_1y = 0$$
$$a_2x + b_2y = 0 \qquad D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Ja sistēma $D \neq 0$, vienīgie sistēmas atrisinājumi būs

$$x = \frac{\begin{vmatrix} o & b_1 \\ o & b_2 \end{vmatrix}}{D} = 0 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & o \\ a_2 & o \end{vmatrix}}{D} = 0$$

Šo atrisinājumu, kur x un y abi ir nulles , sauc par sistēmas triviālo atrisinājumu.

Lai varētu pastāvēt netriviāli atrisinājumi, nepieciešams, ka $D=0$; ja $a_1 \neq 0$, tad atrisinot pirmo vienādojumu dabū:

$$x = -\frac{b_1}{a_1}y$$

ievietojot II.vienādojumā

$$a_2/-\frac{b_1}{a_1}/y + b_2y = 0$$

ir bezgalīgi daudz atrisinājumu, jo y var ņemt patvaļīgu

$$y\underbrace{/a_1b_2 - a_2b_1/}_{= D} = 0$$

Ja D=0,abi nezināmie nav katrā ziņā nulles un ir bezgalīgi daudz atrisinājumu.

Saka, ka atrisinājumu ir ∞^1, ja vienu lielumu, piem. y var patvaļīgi izvēlēties.

Ja $a_1=a_2=b_1=b_2=0$ ir ∞^2 atrisinājumu,x un y var ņemt kā patīk.

3 homogēnu vienādojumu sistēma ar 3 nezināmiem

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = 0 \qquad D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = 0$$

I.Ja $D \neq 0$, lietojot Krāmera formulas, dabū x,y un z kā daļas, kam skaitītāji ir nulles:

$x = y = z = 0$ vienādojuma triviāls atrisinājums.

ZB- 100
1941.g.maijā.

II. $D = 0$ ir nepieciešams noteikums, lai būtu netriviāls atrisinājums.

Lai sīkāk noteiktu sistēmas atrisinājumus, būs derīgs determinanta ranga jēdziens.

Aplūkojot determinantu, kam izsvītro zināmu skaitu rindu un kolonu, dabūtie determinanti ir ar dažādām kārtām. Šo determinantu skaitā ietilpst arī dotais determinants.

Determinanta **r a n g s** ir maksimalā kārta no tā dabūtam determinantam, kas nav vienlīdzīgs nullei.

Spec.gadijumā, ja pats determinants nav vienlīdzīgs nullei, tā rangs ir vienāds ar tā kārtu, tā tad rangs = 3, ja determinants ir trešās kārtas un nav vienlīdzīgs nullei.

Ja rangs = 2 determinantā vismaz viens adjunkts im otrās kārtas
Ja rangs = 1 " " " elements nav vienlīdzīgs nullei
Ja rangs = 0 " visi elementi ir nulles

Ja rangs = 2, vajadzības gadījumā mainot nezināmo nosaukumu, panākam ka

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Aplūkojot abus pirmos vienādojumus, redzam, ka šis determinants ir x un y koeficientu determinants.

Atrisinot abus pirmos vienādojumus, dabūjam

$$x : y : z = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Šie determinanti ir sistemas determinanta trešās rindas adjunkti, ievietojot tiem proporcionālās x,y un z vērtības trešā vienādojumā, dabū 0. Tādēļ var vienu nezināmo izvēlēties patvaļīgu un atrisinājumu būs ∞. /tie atkarīgi no viena parametra/.

Ja rangs = 1, visi divrindu determinanti ir 0, tikai locekļi nevienlīdzīgi 0. Pieņemsim, ka $a_1 \neq 0$, kas vienmēr panākams, vajadzības gadījumā pārdēvējot nezināmos

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} a_1b_2 - b_1a_2 = 0 \\ a_1c_2 - c_1a_2 = 0 \end{matrix}$$

Noruna:

Ja pastāv šāda sakarība un ja kāds saucējs ir nulle, arī attiecīgo skaitītāju pielīdzinam nullei, piem. ja $b_1 = 0$, arī $b_2 = 0$.
Arī I un III vienādojumu koeficienti proporcionāli, kas nozīmē, ka

$$t = \frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} \qquad a_2 = ta_1 \quad b_2 = tb_1 \quad c_2 = tc_1 ;$$

$$s = \frac{a_3}{a_1} = \frac{b_3}{b_1} = \frac{c_3}{c_1} \qquad a_3 = sa_1 \quad b_3 = sb_1 \quad c_3 = sc_1 ,$$

tā tad otrais un trešais vienādojums ir pirmā sekas, jo tos dabūjam pirmo vienādojumu reizinot ar t vai s.
Paliks tikai viens vienādojums kur $x = -\frac{b_1}{a_1} y - \frac{c_1}{a_1} z$

Šīs x vērtības apmierinās II un III vienādojumu.
y un z vērtības var ņemt patvaļīgi, ir ∞^2 atrisinājumu.

ZB- 100
1941.g.maijā.

Ja rangs = 0 visi lielumi $a = b = c = 0$. Var ņemt x,y un z vērtības kā patīkas. Atrisinājumu būs ∞^3.
Ja dota n homogenu linearu vienādojumu sistema ar n nezināmiem, tad lai šai sistemai būtu netriviali atrisinājumi, ir nepieciešami un pietiekami, ka sistemas determinants ir 0. Šo īpašību var izlietot dažādos gadījumos.

Izlietosim to, lai atrastu noteikumu, kad n+1 linearu nehomogenu vienādojumu sistemai ar n nezināmiem ir atrisinājumi. Tā kā vienādojumu skaits ir lielāks par nezināmo skaitu, koeficienti būs saistīti ar kādu noteikumu. Sākam ar divu vienādojumu sistemu ar vienu nezināmo

$$a_1x + b_1 = 0$$
$$a_2x + b_2 = 0$$

Katrs no šiem vienādojumiem dod pa x vērtībai; lai tās būtu vienādas, koeficientiem jābūt saistītiem ar kādu sakarību. Tās atrašanai pareizināsim brīvos locekļus ar jaunu nezināmo.

$$a_1x + b_1y = 0$$
$$a_2x + b_2y = 0$$

Lai jaunā homogenā sistēma dotu tās pašas x vērtības kā pirmā, jābūt y vienlīdzīgs 1, bet tad homogenai sistēmai ir netriviāli atrisinājumi un

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

Viegli redzēt, ka šis noteikums ir pietiekams.

Līdzīgā kārtā, ja dota 3 nehomogenu lineāru vienādojumu sistema ar diviem nezināmiem

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$
$$a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

pareizinot brīvos locekļus ar jaunu nezināmo z, dabūjam

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = 0$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = 0$$

Šīs homogenās sistemas atrisinājumiem, kas apmierina iepriekšējo, jābūt z = 1, tā tad ir jāpastāv netrivialiem atrisinājumiem un

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Ar to šis noteikums ir pietiekams.

A N A L I T I S K Ā   G E O M E T R I J A   U Z   T A I S N E S.

Punkta abscisa.

Ja dota taisne, izvēlas sākuma ptu O, pozitivu vērsumu un garuma vienību. Atliekot garuma vienību no sākuma pta O pozitivā vērsumā, dabujam vienības punktu E. Pozitivo vērsumu un garuma vienību var raksturot ar vienības vektoru OE.

Lai raksturotu kādu ptu X uz taisnes, pietiek ņemt OX $\overline{OX}$ algebrisko garumu, ko apzīmē ar x un sauc par pta X abscisu, vai pta X koordinātu.

$$\overline{O} \quad E \quad X_{(x)}$$

$\overline{OE}$ noteic uz taisnes koordinātu sistemu, ko nosaka $\overline{OE}$ garums un vērsums, kas sakrīt ar pozitivo vērsumu. Šo vērsumu bieži raksturo pierakstot pie taisnes burtus x' x: pozitivais vērsums iet no x' uz x. Katru punktu X raksturo ar tā abscisu x. Pēc iespējas apzīmēsim ptus un to abscisas ar tiem pašiem lieliem un maziem burtiem: A/a/, B /b/ u.t.t.

Abscisas ir nenosaukti skaitļi; pateicoties tam, ar abscisām var izdarīt visas algebriskas darbības bez ierobežojumiem.

Katram ptam uz taisnes atbilst viens vienīgs reals skaitlis x un otrādi: katram x atbilst viens pts. Pta X atrašanai, ja dota tā abscisa ievērosim sekojošo:

ja x lielāks par 0 — X pa labi no pta 0
ja x mazāks par 0 — X pa kreisi no pta 0

x absolūtā vērtība $|x|$ nosaka pta X attālumu no sākuma pta, un zīme - kuŗā pusē no 0 pta pts X atrodas; tā tad zinot x varam konstruēt atbilstošo ptu X. Ar aplūkoto paņēmienu ir nodibināta viennozīmīgā sakarība taisnes ptu un realo skaitļu starpā. Aplūkosim, kādi pti atbilst vienādojumu saknēm.

$$ax + b = 0 \qquad x = - \frac{b}{a}$$

Pirmās pakāpes vienādojums attiecībā pret x nosaka vienu ptu.

$$ax^2 + 2bx + c = 0 \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

Ja $b^2 - ac$ pozitivs, var izvilkt sakni un rodas divas realas x vērtības un divi reali pti. Vienādojums nosaka divus ptus. Tā tad ja $b^2 - ac > 0$ - 2 dažādi pti; ja $b^2 - ac = 0$ 2 sakrītoši pti; ja $b^2 - ac < 0$ tad vienādojumam nav reālu sakņu, bet gan ir imagināras saknes. Paplašinot pta jēdzienu, pieņemam, ka arī imaginārus skaitļus var uzskatīt par taisnes ptu abscisām, tikai šie pti būs imagināri. Tad otrās pakāpes vienādojumam arī gadījumā, kad $b^2 - ac < 0$ atbildīs divi pti, proti, divi imaginārī pti uz taisnes.

Piemērs:
$x^2 + 1 = 0$, kam ir saknes $x=+i$ $x = -i$; tās atbilst diviem imaginārīem ptiem, pirmam abscisa i un otram -i

Ja ir n-tās pakāpes vienādojums:

$$ax^n + a x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

ir n x nozīmes, kas apmierina šo vienādojumu. Šis vienādojums dod n ptu, tie atkal var būt visi reali un dažādi, vai ari daži no tiem vai pat visi sakrīt vai ir imaginārī.

Tā $x^n = 0$ dod n ptu, kas sakrīt ar sākuma ptu.

K O O R D I N Ā T U   T R A N S F O R M Ā C I J A S

Aplūkosim kā mainās ptu abscisas, ja mainām koordinātu sistemu.

Mainot sākuma ptu vai mēra vienību, vai abus, izdara koordinātu transform., t.i. pāriet no vienas koordinātu sistemas uz otru.

1/ Maina sākuma ptu no 0 uz 0'.

ZB-100
1941.g.maijā

x^1 $\quad O'_a$ $\quad O$ $\quad E$ $\quad X_x$ $\quad x$

Pta O' abscisa vecā koordinātu sistēmā ir a , O'/a/

$x = \overline{OX}$ un $x' = \overline{O'X}$ ir pta X abscisas vecā un jaunā koord. sistēma $a = \overline{OO'}$ $\overline{OO'} + \overline{O'X} = \overline{OX}$ $a + x' = x$

Vecā abscisa ir vienāda ar jauno abscisu, kam pieskaitīta jaunā sākuma pta abscisa koordinātu sistemā.

$$x = x' + a$$

$$x' = x - a$$

2/ Maina garuma vienību no OE uz OE', nemainot sākuma ptu O.

x' $\quad O$ $\quad E$ $\quad E'$ $\quad X_{(x)}^{(x')}$ $\quad x$

Taisnes punkta X abscisas vecā un jaunā koordinātu sistēmā, ko apzīmējam ar x un x' , ir $\overline{OX}$ algebriskie garumi, izmērīti ar attiecīgo garuma mēra vienību; x un x' tā tad ir vienādi ar vektora $\overline{OX}$ un pieņemtā vienības vektora algebrikko garumu attiecību, neatkarīgi no garuma mēra vienības.

$$x = \frac{\overline{OX}}{\overline{OE}}, \quad x' = \frac{\overline{OX}}{\overline{OE'}}, \quad \frac{x}{x'} = \frac{\overline{OX}}{\overline{OE}}, \quad \frac{\overline{OE'}}{\overline{OX}} = \frac{\overline{OE'}}{\overline{OE}} = \alpha$$

Skaitlis α ir vektora $\overrightarrow{OE'}$ algebriskais garums, ja mēra vienība ir OE.

$$\frac{x}{x'} = \alpha \qquad \boxed{x = \alpha \cdot x'} \qquad x' = \frac{x}{\alpha}$$

Punkta vecā abscisa ir vienāda ar punkta jauno abscisu, kas pareizināta ar jaunā vienības punkta abscisu vecā koordinātu sistemā.

3/ Maina sākuma punktu un garuma mēra vienību.
Šai reti lietojamā transformacijā vecā abscisa ir jaunās abscisas linearā funkcija:

$$x = ax' + b$$

kur skaitļi a un b raksturo transformāciju. Transformācijas formula iegūstama, pēc kārtas izdarot abas aplūkotās transformācijas.

DIVU PUNKTU ATTĀLUMS. ATTIECĪBA, KĀDĀ PUNKTS SADALA TAISNES GABALU.

Divu punktu attāluma noteikšana.

x' $\quad o$ $\quad A(a)$ $\quad B(b)$ $\quad x$

Lai noteiktu dotu punktu A/a/ un B/b/ attālumu, noteiksim $\overline{AB}$, t.i. abu punktu orientēto attālumu. Pēc Šāla formulas

$$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = -\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OB} - \overline{OA} = b - a \quad .$$

Vektora algebriskais garums ir vienāds ar vektora gala punkta abscisu mīnus vektora sākuma punkta abscisa:

$$\boxed{\overline{AB} = b - a}, \quad |\overline{AB}| = |b - a| = AB$$

Attiecība, kādā punkts sadala taisnes gabalu.

$$\begin{array}{cccccc} x & O & A(a) & B(b) & C(c) & x \end{array}$$

Doti trīs taisnes punkti A/a/, B/b/, C/c/, kas nosaka trīs vektorus $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{AC}$. Aplūkosim attiecību, kādā viens no dotiem punktiem sadala abu pārējo punktu noteikto taisnes gabalu, piem. attiecību, kādā C sadala AB. Aplūkojot taisnes gabalu attiecības, burtu kārtība nav svarīga:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{AC}{CB}\ \text{, bet}\ \frac{\vec{CA}}{\vec{CB}}\ \text{un}\ \frac{\vec{AC}}{\vec{CB}}$$

ir pretēji skaitļi. Par attiecību, kādā C sadala gabalu AB vienmēr uzskatīsim attiecību $\frac{\vec{AC}}{\vec{CB}}$, t.i. skaitītājā kā pirmo rakstām sākuma punktu A, kā otro - sadalītāju punktu C, saucējā - kā pirmo sadalītāju punktu C, kā otro-gala punktu B.

$$\vec{AC} = c - a \qquad \frac{\vec{AC}}{\vec{CB}} = \frac{c-a}{b-c}$$
$$\vec{CB} = b - c$$

Ja doti A/a/, B/b/ un attiecības $\frac{\vec{AC}}{\vec{CB}}$ vērtība λ, var atrast punktu C/c/ :

$$\lambda = \frac{c-a}{b-c}$$

ir vienādojums attiecībā uz nezināmo c; to atrisinot dabūjam

$$c - a = \lambda b - \lambda c,$$
$$c/1+\lambda/ = a + \lambda b,$$
$$\boxed{c = \frac{a + \lambda b}{1 + \lambda}}$$

formulas, kas dod c vērtību, zinot a, b un λ.

Katram punktam C /izņemot C = B/ atbilst viena vienīga $\frac{\vec{AC}}{\vec{CB}} = \lambda$ vērtība; katra λ vērtība, /izņemot $\lambda = -1$/ nosaka vienu vienīgu punktu C. Skaitli λ tā tad varam ņemt par punkta C koordinātu; to sauksim par <u>attiecības koordinātu</u>, jo λ ir kādas attiecības vērtība. Apskatīsim λ [illegible] pa taisni AB [illegible] B.

1/ Ja C sakrīt ar A, tad $\vec{AC} = 0$, $\lambda = 0$

2/ Kad C iet B virzienā, tad vektoriem $\vec{AC}$, $\vec{CB}$ ir vienādi vērsumi, λ ir pozit. pieaug.

Ja C ir AB viduspunktā M, tad $\lambda = +1$

Ja C iet tālāk uz B, λ absolūtā vērtība pieaug.

Ja C ļoti tuvu punktam B, tad λ neaprobežoti pieaug, būdams pozitīvs, t.i. tiecas uz $+\infty$. Ja C tuvojas B no otras puses/labās/, tad λ negatīvs.

Ja C atrodas patvaļīgi tuvu B, tad CB patvaļīgi mazs, AC galīgs, tā tad λ absolūtā vērtība patvaļīgi liela.

Punktam C neaprobežoti tuvojoties punktam B no labās puses $|\lambda|$ neaprobežoti pieaugs, λ būs negatīvs, t.i. λ tuvojas $-\infty$.

Analītiskajā geometrijā būs lietderīgi simbolus $+\infty$ un $-\infty$ uzskatīt par to pašu skaitli, ko rakstīsim ∞. Ar šo norunu varam teikt, ka ptā B $\lambda = \infty$

Ja C attālinas pa taisni uz labo pusi, pārveidojam λ izteiksmi:

$$\lambda = \frac{\vec{AB} + \vec{BC}}{\vec{CB}} = \frac{\vec{AB}}{\vec{CB}} - 1.$$

pirmā daļa ir negatīva un tiecās uz O, ja C neaprobežoti attālinās no B. Tā tad λ mazāks par -1 un λ tuvojas -1.
Ja C pa kreisi no A ptā C, λ negatīvs:

$$\lambda = \frac{\vec{AC}}{\vec{CB}} = \frac{\vec{AC} \quad : AC}{\vec{CA}+\vec{AB} \quad : AC} \qquad \lambda = \frac{1}{-1 + \frac{\vec{AB}}{\vec{AC}}}$$

saucēja otrais loceklis ir negatīvs un tuvojas O, ja C neaprobežoti attālinās, tā tad λ negatīvs, atrodas starp -1 un O un tiecas uz -1, C neaprobežoti attālinoties

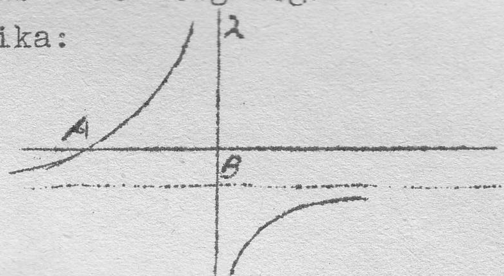
$-1 \leftarrow \lambda$ o   +1 ∞ $\lambda < o$ $\lambda \rightarrow -1$

$\lambda > o$

A   M   B

Lai varētu teikt, ka katrai λ vērtībai atbilst viens vienīgs pts, jāpieņem, ka taisnei ir tikai viens bezgalīgi tāļš pts, kam atbilst $\lambda = -1$; šī pta abscisa būs bezgalīga.

λ maiņas grafika:



Skaitli λ var uzskatīt kā divu skaitļu dalījumu; tad arī bezgalīgam λ atbildīs galīgi x_1, x_2

$$\lambda = \frac{x_1}{x_2} \quad \text{ja } x_1 = \text{const. un } x_2 \rightarrow 0, \quad \frac{x_1}{x_2} \longrightarrow \infty$$

Skaitļus x_1 un x_2, kā attiecība ir λ, sauc par punkta C homogenām attiecības koordinātām, jo x_1, x_2 nosaka C. To pašu ptu C dod arī skaitļi

$$\rho x_1, \; \rho x_2$$

Homogenās koordinātas var lietot visos gadījumos, kad pts bezgalīgi attālinās.

Tāpat Dekarta koordinātās var raksturot katru bezgalīgi tālu ptu.

O $X_{(x)}$

Ja x attālinās, x absolutā vērtība neaprobežoti pieaug, ko mēs rakstam: $x = \infty$.

Liekam $x = \frac{x_1}{x_2}$, katram x atbilst bezgalīgi daudz x_1 un x_2/skaitļi/ jo skaitļi ρx_1, ρx_2 dod to pašu x. Skaitļus x_1, x_2 sauc par pta X homogenām koordinātām.

Kas notiek ar vienādojuma $ax + b = 0$ noteikto ptu, ja a tuvojās 0 ?

$x = -\frac{b}{a}$ ja $a \neq 0$; ja b const. a tuvojās 0 $\left|\frac{b}{a}\right|$ neaprob.pieaug

un ja $a=0$ $x = \infty$. Pārejam uz homogenām koordinātām

$a\frac{x_1}{x_2} + b = 0$ atsvabinoties no saucēja dabūjam

$$ax_1 + bx_2 = 0$$

kam ir bezgalīgi daudz atrisinājumu, ko vispārīgā veidā var rakstīt

$$x_1 = \rho b \qquad x_2 = -\rho a$$

ρ patvaļīgs skaitlis, kas nelīdzinas 0. Ja $a \to 0$ un b galīgs, tad x_1 = galīgs, $x_2 \to 0$

šie skaitļi raksturo bezgalīgi tālo ptu. Esam tā tad konstatējuši, ka vienādojumam $ax + b = 0$, kad pirmais koefic.=0 sakne ir ∞

2.pak.vienādojumam $ax^2 + bx + c = 0$ liek $x = \frac{x_1}{x_2}$

$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 = 0$ ja $a = 0$, ax_1^2 pazūd

ir viens atrisinājums, kur x_1 = galīgs, $x_2 = 0$

Ja 2.pak.vienādojuma pirmais koeficients ir 0, ir viena galīga sakne un viena bezgalīga. Ja abi pirmie koeficienti pazūd, abas saknes top bezgalīgas.

V E K T O R U T E O R I J A S E L E M E N T I

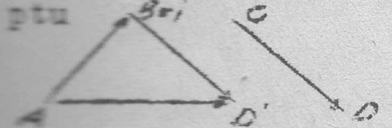
Vektors ir geometrisks lielums, ko nosaka 1/ tā garums 2/ tā nesējas taisnes virziens 3/ tā vērsums.
Vektoru var attēlot, ar diviem ptiem, ko uzskatamības dēļ savieno un liek bultu galā, kas norāda vērsumu.

A un B - sākuma un gala pti. Vektora nesēja taisne ir taisne, uz kuras atrodas vektora sākuma un gala pts.
Vektoru var paralleli pārvietot telpā piem:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$

D a r b ī b a s a r v e k t o r i e m .

S a s k a i t ī š a n a . Lai saskaitītu divus vektorus, tos novieto tādā stāvoklī, ka viena gala pts ir otra vektora sākuma pts. Summa ir vektors, kas savieno pirmā vektora sākuma ptu ar otrā gala ptu



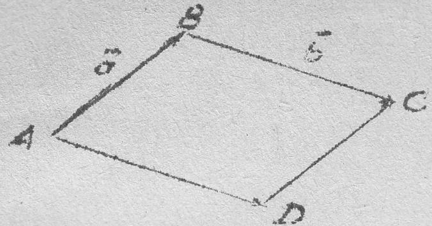
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{AD'}$

Ja jāsaskaita vairāki vektori, piem. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, vispirms saskaita divus, to summai pieskaita trešo u.t.t.

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = /\vec{a} + \vec{b}/ + \vec{c} = \vec{d} + \vec{c} = \vec{s}$

Figuru, kas sastāv no vektoriem $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ un $\vec{s}$ sauc par vektoru saskaitīšanas poligonu.
Ja jāsaskaita divi vektori, saskaitāmo kārtību var mainīt.

IB- 100
1941.g.maijā.



$\vec a + \vec b = \vec{AC}$

caur A un C velk parall.abiem vektoriem

$\vec{AD} = \vec b \quad \vec{DC} = \vec a$

$\vec b + \vec a = \vec{AC} \qquad \vec a + \vec b = \vec b + \vec a$

Vektoru summa ir komutatīva /nav atkarīga no saskaitāmo kārtības/

$\vec a + \vec b + \vec c = \vec{AD}$

$\vec a + /\vec b + \vec c/ = \vec a + \vec{BD} = \vec{AD}$

$\vec a + \vec b + \vec c = \vec a + /\vec b + \vec c/$

Vektoru summa ir associatīva /saskaitāmo vietā var ņemt to summu/ un otrādi: summas vietā var pieskaitīt tās locekļus, t.i. vektoru summa ir distributīva.

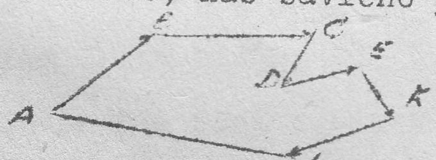
Šo triju īpašību dēļ ar vektoriem var rīkoties kā ar parastiem skaitļiem, jo katru reizi jāsaskaita 2 vektori, no kuriem viens ir divu citu summa

$$\vec a + \vec b + \vec c + \vec d + \ldots + \vec k = \{[/\vec a + \vec b/ + \vec c] + \vec d + \ldots\} + \vec k =$$

$$= \{/\vec a + \vec b/ + \vec c + \vec d + \ldots\} + \vec k = \{/\vec a + \vec b/ + /\vec c + \vec d/ + \ldots\} + \vec k \text{ u.t.t.}$$

Asociatīvais un distributīvais likums spēkā patvaļīgam saskaitāmo vektoru skaitam. Arī komutatīvā īpašība spēkā, jo vektoru summā var pārmainīt vietām ikkurus divus vektorus, kas atrodās viens otram blakus, tā tad var panākt patvaļīgu kārtību.

Ja dots zināms skaits vektoru, kur katra vektora gala pts ir nākošā sākuma pts, /vektori izveido poligonu/, tad šo vektoru summa ir vektors, kas savieno poligona sākuma ptu ar gala ptu.



$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} + \vec{EK} + \vec{KL} = \vec{AL}$

Ja vektora sākuma un gala pts sakrīt, vektora garums ir 0, to sauc par nulles vektoru un apzīmē ar 0.

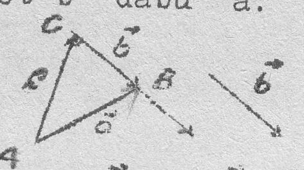
$\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = 0$

Divus vektorus, kas summā dod nulli, sauc par pretējiem vektoriem.

A t s k a i t ī š a n a . Vektoru atskaitīšana ir analoga skaitļu atņemšanai. Ja doti vektori $\vec a$, $\vec b$, tad to starpība $\vec c$ būs vektors, kam pieskaitot $\vec b$ dabū $\vec a$.

$\vec c = \vec a - \vec b$

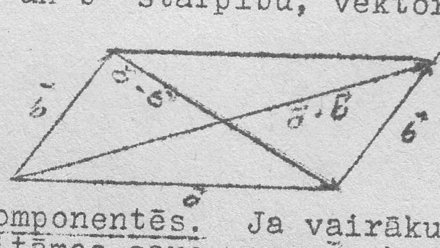
$\vec c + \vec b = \vec a$



$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} \qquad \vec a = \vec b + \vec c$

$\vec a - \vec b = \vec c$

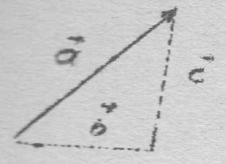
Lai konstruētu $\vec a$ un $\vec b$ starpību, vektoram $\vec a$ pieskaita vektoram $\vec b$ pretējo vektoru



Vektoru sadalīšana komponentēs. Ja vairāku vektoru summa vienāda ar vektoru $\vec a$, tad saskaitāmos sauc par $\vec a$ komponentēm. Sadalīt doto vektoru $\vec a$ divi komponentēs, nozīmē atrast tādus $\vec b$, $\vec c$ kā

$\vec a = \vec b + \vec c$

atrisinājumu bezgalīgi daudz, tos no-



saka ar papildus noteikumiem:

1/ vektori $\vec{b}$ un $\vec{c}$ paral-li dotām taisnēm,
2/ doti $\vec{b}$ un $\vec{c}$ garumi u.t.t.

<u>Vektora reizināšana ar skalāru.</u> Ja vektors jāreizina ar kādu veselu skaitli, ņem vektoru attiecīgo reižu skaitu kā saskaitāmo

$\vec{a} \,.\, 3 = 3\,\vec{a}$

abiem vektoriem ir tas pats virziens, vērsums un jaunā vektora garums vienlīdzīgs vektora garuma un skalāra reizinājumam.

Lai pareizinātu $\vec{a}$ ar kādu dotu skaitli $\lambda > 0$ ņem vektoru, kam tas pats virziens un vērsums kā vektoram ā un garums ir λ reiz vektora garums.

Ja jāreizina ā ar negatīvu skaitli μ ,reizinājums ir vektors, kam tas pats virziens, pretējs vērsums un garums ir $|\mu|$.a
Pastāv sakarības

$$\mu\vec{a} + \lambda\vec{a} = /\mu + \lambda/\,\vec{a}$$
$$\mu\vec{a} + \mu\vec{b} = \mu/\vec{a} + \vec{b}/$$

Lai tās pārbaudītu konstruē izteiksmei atbilstošos vektorus. Otrai sakarībai, ja $\mu > 0$, atbilst šāds zīmējums:

Dabū līdzīgus trijstūrus, tādēļ malas proporcionālas un tas pats vērsums. Ja $\mu < 0$ otrā trijstūrī būtu jāņem pretēji vērstas malas.

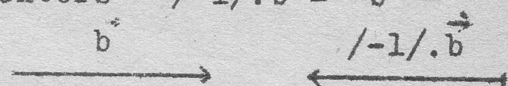
$\mu(\lambda\vec{a}) = (\mu\lambda)\vec{a}$,jo abās pusēs uzrakstīto vektoru garums: $|\mu|\cdot|\lambda|\cdot a$ un viegli pārbaudīt, ka arī vektoru vērsumi ir tie paši. Varam ar augšējiem paņēmieniem aprēķināt izteiksmes, kam ir forma

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + \ldots.$$

Pārbaudam, vai

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + /-1/\vec{b} \quad ?$$

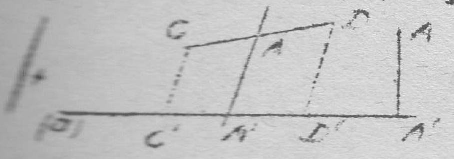
tiešām $/-1/.\vec{b}$ ir vektoram $\vec{b}$ pretējais vektors $/-1/.\vec{b} = -\vec{b}$



P R O J E K C I J A S

Plāksnē parallelprojekcijas noteikšanai izvēlās taisni, uz kuru projicē, un otro taisni, kas nosaka projekcijas virzienu.

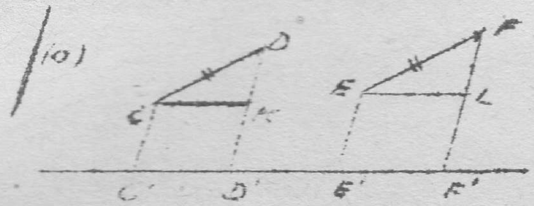
Par punkta A projekciju A' uz taisni /a/ parallēli /t/ sauc ptu, kur par-le taisnei /t/ šķeļ projekciju taisni /a/.



Ja /a/ perpendikulāra /t/,runā par <u>ortogonālu projekciju</u> uz /a/.

Ja punkts A pārvietojās pa vektoru $\vec{CD}$, tā projekcija A' pārvietosies pa taisnes gabalu, kas ietverts starp C un D projekcijām. Vektors $\vec{C'D'}$ ir vektora $\vec{CD}$ projekcija uz taisni /a/ . $\vec{C'D'}$ vērsumu nosaka pta A' pārvietošanās vērsums, ja A iet no C uz D

Dots vektors $\vec{CD} = \vec{EF}$
Jāpierāda, ka arī šo vektoru projekcijas vienādas $\vec{C'D'} = \vec{E'F'}$?



Velkam no C un D taisnes parallēli taisnei /a/, tādēļ

$\angle C = \angle E$; $\angle D = \angle F$ kā leņķi, ko veido ∥ taisnes

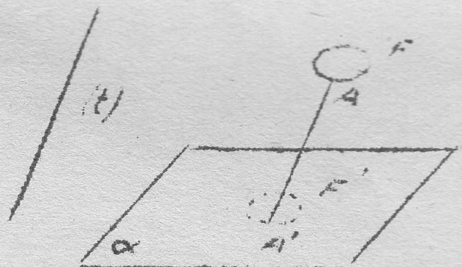
$CD = EF$ $\triangle CDK \cong EFL$ $\vec{C'D'} = \vec{CK}$ $\vec{E'F'} = \vec{EL}$

$CK = EL$

tiem abiem tas pats virziens, vērsums un arī garums, tādēļ

$\vec{C'D'} = \vec{E'F'}$

Vienlīdzīgiem vektoriem ir vienlīdzīgas projekcijas. Vektoru parallēli pārvietojot plāksnē, tā projekcija nemainās.
Telpā iespējamas: 1/ Projekcijas parallēli taisnei
2/ Projekcijas parallēli plāksnei

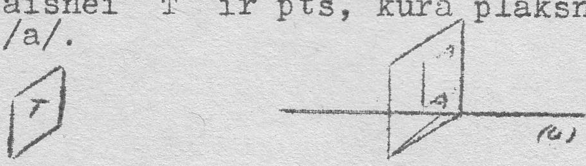


Punkta A projekcija uz plāksni α parallēli taisnei t ir punkts A' kur parallēle taisnei /t/ šķeļ plāksni α .

Projekcija var būt slīpleņķa un ortogonāla, kad taisne perpendikulāra plāksnei. Ja A pārvietojās pa figūru F, tās projekcija F' būs A' geometriskā vieta.

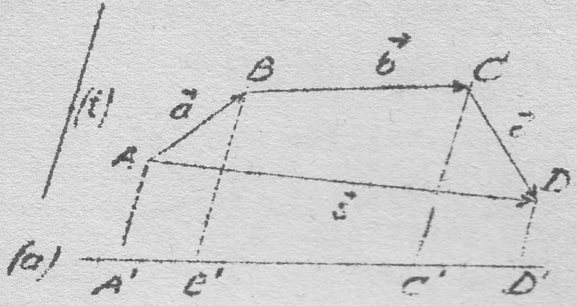
Telpas vektora projekcija uz plāksni ir vektors plāksnē.

2/ Projicē uz taisni paralleli plāksnei. Punkta projekcija uz taisni /a/ paralleli taisnei T ir pts, kurā plāksne parallēla plāksnei T šķeļ taisni /a/.



Ja taisne /a/ un plāksne T ir perpendikulāras, projekcija ir ortogonāla.
Vektora projekcija ir neatkarīga no vektora stāvokļa /pierādījums analogs aplūkotam/.
Vektora summas projekcija ir vienāda ar vektoru projekciju summu.

ZB- 100
1941.g.maijā.



Saskaitāmos vektorus $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ novieto tā, lai tie sastāda poligonu.
Ja projicē šo trīs vektoru summu, dabū

$$\overrightarrow{AB}_{proj} = \overrightarrow{A'B'}$$
$$\overrightarrow{BC}_{proj} = \overrightarrow{B'C'}$$
$$\overrightarrow{CD}_{proj} = \overrightarrow{C'D'}$$
$$\overrightarrow{AD}_{proj} = \overrightarrow{A'D'}$$

$$\overrightarrow{AB}_{proj} + \overrightarrow{BC}_{proj} + \overrightarrow{CD}_{proj} = /\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}/_{proj}.$$

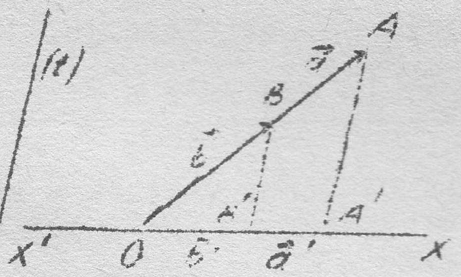
Ja jāatrod vairāku vektoru summas projekcija, var ņemt atsevišķo vektoru projekcijas un saskaitīt.
Ja dota pirmās pakāpes sakarība vektoru starpā, šī sakarība paliek spēkā vektoru projekciju starpā.

ja $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{c}$,

tad $\alpha\vec{a}' + \beta\vec{b}' = \vec{c}'$ kur $\vec{a}_{proj} = \vec{a}'$; $\vec{b}_{proj} = \vec{b}'$; $\vec{c}_{proj} = \vec{c}'$,

Šim nolūkam jāpierāda, ka no sakarības $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ seko $\vec{b}' = \alpha\vec{a}'$, kur $\vec{a}' = \vec{a}_{proj}$, $\vec{b}' = \vec{b}_{proj}$.

Tā kā vektoru projekcija neatkarīga no vektoru stāvokļa, vektorus atliek no viena sākuma pta O



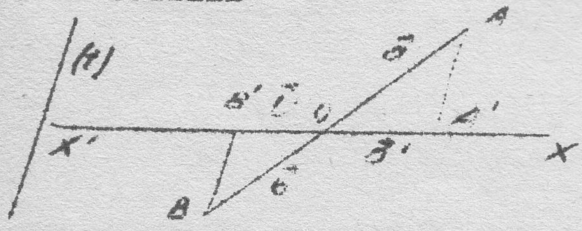
1/ $\alpha > 0$ $\triangle OAA' \sim \triangle OBB'$

$\frac{OB}{OA} = \frac{OB'}{OA'}$ α ir pozitīvs, tādēļ $\frac{b}{a} = \alpha$

$\frac{OB}{OA} = \alpha = \frac{OB'}{OA'}$, jeb $OB = \alpha OA$ $OB' = \alpha . OA'$

$$\vec{b}' = \alpha\vec{a}'$$

2/ $\alpha < 0$ $\triangle OAA' \sim OBB'$



ir spēkā tās pašas sakarības taisnes gabalu starpā, kur α aizvietots ar $|\alpha|$ tā tad

$OB' = |\alpha| OA'$ $\vec{b}' = \alpha\vec{a}'$

bet $\vec{b}'$ un $\vec{a}'$ ir pretēji vērsumi, tā tad īpašība pierādīta.

Tā pat šī īpašība pierādama telpā.

<u>Pierādījums vispārīgai sakarībai:</u> No $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3 + \ldots \alpha_n\vec{a}_n = \vec{b}$

seko $/\alpha_1\vec{a}_1/_{proj} + /\alpha_2\vec{a}_2/_{proj} + /\alpha_3\vec{a}_3/_{proj} + \ldots + /\alpha_n\vec{a}_n/_{proj} = \vec{b}'$

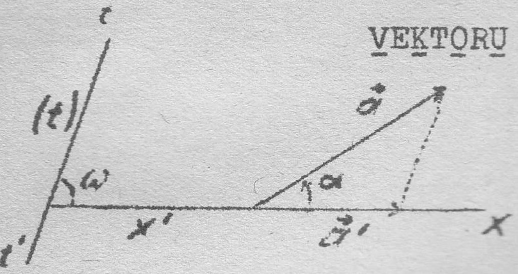
$/\alpha_1\vec{a}_1/_{proj} = \alpha_1/\vec{a}_1/_{proj} = \alpha_1\vec{a}_1'$ u.t.t. saskaitot dabūjam:

$$\alpha_1\vec{a}_1' + \alpha_2\vec{a}_2' + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n' = \vec{b}'$$

ZB- 100
1941.g.maijā.

ko var izteikt arī citādi:
Visas linearas sakarības vektoru starpā paliek spēkā, kad vektorus projicē.

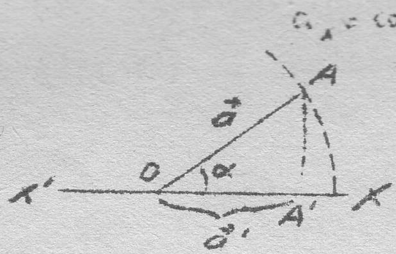
VEKTORU PROJEKCIJU NOTEIKŠANA.



Vektorus mums nāksies projicēt uz asīm. Vektorus, kas atrodas uz ass faksturo ar algebrisko garumu; algebrisko garumu rakstīsim a_x

a_x var būt + , -

Meklēsim sakarību starp lielumiem a_x, a $/x'x, \vec{a}/ = \alpha$
Dod taisnei /t/ noteiktu vērsumu t't un apzīmē $/x'x, t't/ = \omega$
1/ Projekcija ortogonāla : ω ir taisns leņķis: $\omega = \frac{\pi}{2}$
Vispirms ņemam vienības vektoru $\bar{a}$ t.i. vektoru ar garumu 1 : a=1



$a_x > 0$ ja $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$

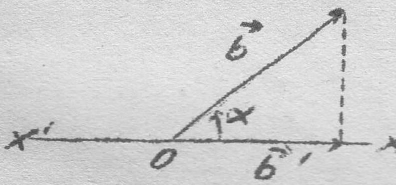
$a_x < 0$ $\alpha > \frac{\pi}{2}$

Ņem tagad kaut kādu vektoru $\vec{b}$ un ar $\bar{a}$ apzīmē vienības vektoru, kam tas pats virziens un vērsums kā vektoram b $\vec{b}$, tad

$$\vec{b} = b\,\vec{a}$$
$$\vec{b}' = b\,\bar{a}'$$

Šī pati sakarība pastāv starp vektoru algebriskiem garumiem $b_x = b a_x$

$$b_x = b\cos\alpha$$

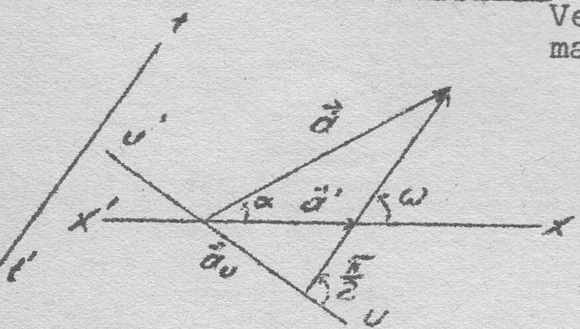


vektora $\vec{b}$ ortogonālās projekcijas algebriskais garums vienāds ar vektora garumu reizinātu ar cos leņķim starp vektoru un projekcijas asi.

Šai gadījumā varam arī mainīt leņķa $\alpha = /x'x, \vec{a}/$ orientāciju, jo

$$/\vec{a}, x'x/ = -/x'x, \vec{a}/ \qquad \text{bet} \quad \cos\left[-/x'x, \vec{a}/\right] = \cos /x'x, \vec{a}/$$

2/ Projekcija ir slīpleņķa



Velk palīga asi u'u caur vektora $\vec{a}$ sākuma ptu, kas perpendikulāra asij t't

$$/x'x, t't/ = \omega$$
$$/u'u, t't/ = \frac{\pi}{2}$$
$$/u'u, x'x/ = \frac{\pi}{2} - (x'x, t't) = \frac{\pi}{2} - \omega$$

$$/u'u, \vec{a}/ = /u'u, x'x/ + /x'x, \vec{a}/ = \frac{\pi}{2} - \omega + \alpha = \frac{\pi}{2} - (\omega - \alpha)$$

Ar $\vec{a}'$ apzīmējam $\vec{a}$ projekciju uz x'x ar $\vec{a}_u$ projekciju uz u'u paralleli taisnei t't

Uzskatot $\vec{a}_u$ kā $\vec{a}$ projekciju:

$$a_u = a\cos /u'u, \vec{a}/ = a\cos / \frac{\pi}{2} - /\omega - \alpha/ = a\sin /\omega - \alpha/$$

uzskatot $\vec{a}_u$ kā $\vec{a}'$ projekciju, ja a > 0

$a_u = |a'| \cos/u'u, \vec{a'}/ = a_x \cos/u'u, \vec{a'}/ = a_x \cos/u'u, x'x/.$

Ja $a_x < 0$ t.i. $\vec{a'}$ un $x'x$ ir pretēji vērsumi $|a'| = -a_x$

$a_u = |\vec{a'}| \cos/u'u, \vec{a'}/ = -a_x \cos[/u'u, x'x+\pi/] = a_x \cos/u'u, x'x/.$

Abos gadījumos tā tad $|a'| \cos/u'u, \vec{a}'/=a_x \cos/u'u, x'x/ = a_x \sin\omega$

$$\underline{\underline{a_u = a_x \sin\omega}}$$

Esam atraduši: $a_u = a \sin/\omega - \alpha/$

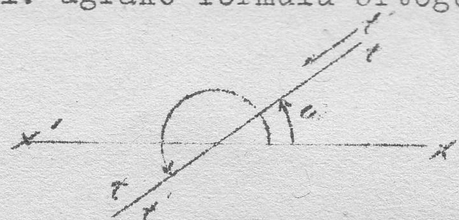
$a_u = a_x \sin\omega$.

Izdalot vienu sakarību ar otru: $1 = \dfrac{a \sin/\omega - \alpha/}{a_x \sin\omega}$

Reizinot ar a_x $\boxed{a_x = \dfrac{\sin/\omega - \alpha/}{\sin\omega}}$

Formula lietojama vektoru projekcijām, ja $\omega \neq \frac{\pi}{2}$. Ja $\omega = \frac{\pi}{2}$, dabū $a_x = a \dfrac{\sin/\frac{\pi}{2} - \alpha/}{\sin\frac{\pi}{2}} = a \cos\alpha$

t.i. agrāko formulu ortogonālai projekcijai.



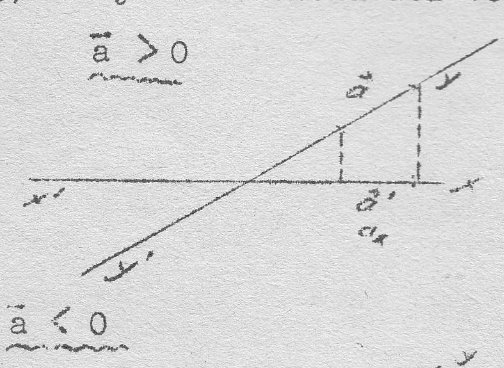
Lai noteiktu leņķi ω , taisne t bija jāorientē. Ja taisni /t/ būtu orientējuši pretējā vērsumā, tad $/x'x, t't/$ jaunā vērtība būtu $\omega + \pi$.

Aizvietojot projekcijas formulā ω ar $\omega + \pi$ dabū:

$$a_x = a \frac{\sin/\omega + \pi - \alpha/}{\sin/\omega + \pi/} = a \frac{-\sin/\omega - \alpha/}{-\sin\omega} = a \frac{\sin/\omega - \alpha/}{\sin\omega}$$

t.i. to pašu lielumu a_x kā agrāk; tas tā tad neatkarīgs no /t/ orientācijas.

3/ Projicē uz vienu asi vektoru, kas atrodas uz citas ass



Dots $\vec{a}$ uz ass $y'y$; alg.gar. $\bar{a}$. Vektoru projicē ortogonāli uz $x'x$. $a = |\bar{a}|$

$\bar{a}$ ort.proj.algebrisks garums uz $x'x$ būs: $a_x = a \cos/x'x, \bar{a}/$

Ja $\bar{a} > 0$ $a = \bar{a}$,

$\bar{a}$ iet /+/ vērsumā pa $y'y$

$/x'x, \bar{a}/ = /x'x, y'y /$

Aizvietojot: $a_x = \bar{a} \cos/x'x, y'y/$

Ja $\bar{a} < 0$, $a = -\bar{a}$, $\bar{a}$ iet /-/vērsumā pa $y'y$

$/x'x, a/ = /x'x, y'y/ + \pi$

$a_x = -\bar{a} \cos[/x'x, y'y/ + \pi] = \bar{a} \cos/x'x, y'y/$

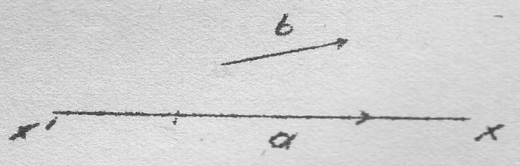
ZB-100

1941.g.maijā.

Abos gadījumos iegūstam to pašu formulu $\boxed{a_x = \bar{a} \cos/x'x\ y'y/}$

ko lieto gadījumī, kad vekt. $\vec{a}$ noteikts ar $\bar{\ }$ tā algebrisko garumu uz y'y ass un tiek ortogonāli projicēts uz x'x asi

4 / Vektora $\vec{b}$ projekcija uz $\bar{a}$

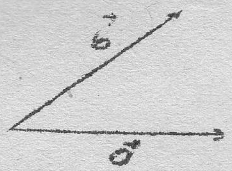


Ņem vektora $\vec{a}$ nesēju taisni, kam piešķir to pašu vērsumu, kāds ir vektoram $\bar{a}$ un aplūko $\bar{b}$ projekciju. Ortogonālai projekcijai:

$b_a = b \cos/x'x, \vec{b}/ = b \cos/\vec{a}, \vec{b}/$

dod vienu vektora projekciju uz otru.

DIVU VEKTORU SKALĀRS REIZINĀJUMS. /produkts/



Divu vektoru $\vec{a}$ un $\vec{b}$ skalārais reizinājums ir vienāds ar abu vektoru garumu reizinājumu, kas pareizināts ar abu vektoru izveidotā leņķa cos:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos/\vec{a}, \vec{b}/$$

1/ Divu vektoru skalārais reizinājums ir 0:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \text{ja } a = 0; \quad b=0; \quad \cos/\vec{a}, \vec{b}/ = 0$$

t.i. vektori ir perpendikulāri. Tiešām, ja $\cos/\vec{a}, \vec{b}/ = 0$,

$$/a, b/ = \frac{\pi}{2}$$

2/ Komutatīvā īpašība $\vec{b} \cdot \vec{a} = ba \cos/\vec{b}, \vec{a}/ \quad ba = ab$

$\cos/\vec{a}, \vec{b}/ = \cos/\vec{b}, \vec{a}/$; jo cos ir pāŗu funkcija.

tā tad

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

Distributīvā un asociatīvā īpašība

Ja $\vec{s} = \vec{b} + \vec{c}$, tad $\vec{a} \cdot \vec{s} = \vec{ab} + \vec{ac}$

Pierādīšanai izlieto vektora projekciju uz vektora :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a\underbrace{b \cos/\vec{a}, \vec{b}/}_{b_a} = ab_a .$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = ac_a \qquad \vec{a} \cdot \vec{s} = as_a \qquad s_a = b_a + c_a$$

pareizinot šo sakarību ar a dabū

$$as_a = ab_a + ac_a \qquad \vec{a}.\vec{s} = \vec{a}.\vec{b} + ac$$

Lasot šo sakarību no labās uz kreiso, redzam skalāra reizinājuma asociatīvo īpašību. Lai skalāri sareizinātu vektoru summas

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \ldots + \vec{a}_n \text{ un } \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3 + \ldots + \vec{b}_n ,$$

pietiks skalāri reizināt katru pirmās summas vektoru ar katru otrās summas vektoru un saskaitīt dabūtos reizinājumus. Citiem vārdiem: skalāri reizinot vektorus, var rīkoties kā ar skaitļiem. Vektora

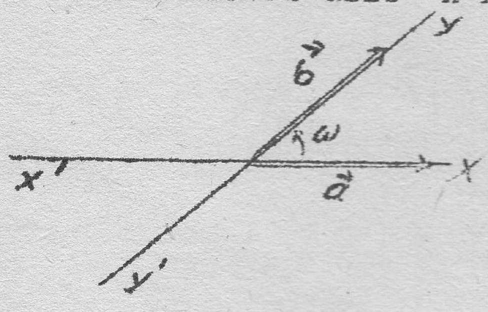
ZB- 100

1941.g.maijā.

skalārais reizinājums pašam ar sevi ir vienāds ar vektora garuma kvadrātu:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = a^2$$

Dotas divas asis x'x , y'y . Asu savstarpējo stāvokli nosaka /x'x, y'y/ = ω



Uz x'x dots vekt. $\vec{a}$ ar algebr. garumu $\bar{a}$, uz y'y $\vec{b}$ ar algebr.garumu $\bar{b}$ meklēsim $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos/\vec{a}\,\vec{b}/$ izteiksmi ar $\bar{a}$, $\bar{b}$ palīdzību. Zīmējuma gadījumā $\bar{a} = a$; $\bar{b} = b$ un abu vektoru leņķis = asu leņķim.

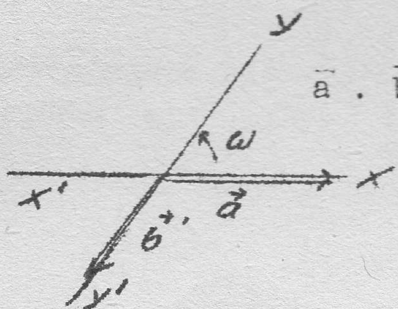
Ievietojot dabū:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \bar{a} \cdot \bar{b} \cos \omega$$

= = = = = = = = = = =

Abu vektoru skalārs reizinājums vienāds ar abu vektoru algebr.vērtību reizinājumu pareizinātu ar asu izveidotā leņķa cos.

Ja $\vec{b}$ iet pretējā vērsumā kā y'y ass :



$$\bar{a} = a$$

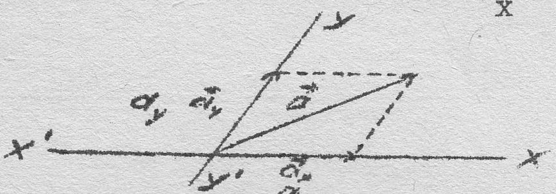
$$\bar{b}' = -b' \qquad /\vec{a},\vec{b}'/ = \omega + \pi$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b}' \cos \omega = ab' \cos\left[/\vec{a},\vec{b}'/ - \pi\right] = ab'\cos/\vec{a},\vec{b}'/$$

Tā pat pārbaudāmi pārējie zīmējuma gadījumi, kas visi dod to pašu izteiksmi. Ja abi vektori uz vienas ass

$$\omega = 0 \qquad \text{un} \qquad \vec{a}.\vec{b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$$

Katru vektoru var sadalīt 2 komponentēs, kam ir doti virzieni. $\vec{a}$ sadalīs saskaitāmos $\vec{a}_x$ un $\vec{a}_y$ projecējot uz katru asi paralleli otrai; $\vec{a}_x$ un $\vec{a}_y$ var raksturot ar to algebr.garumu. Katrs plāksnes vektors $\vec{a}$ tā tad nosaka 2 skaitļus a_x , a_y



Otrādi a_x un a_y nosaka vienu pašu vektoru, ja garuma vienība noteikta. Var konstruēt $\vec{a}_x$ un $\vec{a}_y$, kas iet pa asīm un kam algebr. garums ir a_x , a_y tad $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$.

Skaitļus a_x, a_y sauksim par vektora $\vec{a}$ komponentēm.

Aplūkosim divus vektorus $\vec{a}$ un $\vec{b}$. Tie nosaka algebr.garumus savām projekcijām uz koordinātu asīm, t.i.savas komponentes, ko rakstām tiem blakus. $\vec{a}/a_x, a_y/, \vec{b}/b_x, b_y/$

Aprēķ. $\vec{a}$ un $\vec{b}$ skalāro reizinājumu , liekot ω = /x'x, y'y/

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = /\vec{a}_x + \vec{a}_y/\cdot/\vec{b}_x + \vec{b}_y/ = \vec{a}_x\vec{b}_x + \vec{a}_x\vec{b}_y + \vec{a}_y\vec{b}_x + \vec{a}_y\vec{b}_y =$$

$$= a_x b_x + a_x b_y \cos\omega + a_y b_x \cos\omega + a_y b_y$$

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + /a_x b_y + a_y b_x/ \cos\omega + a_y b_y}$$

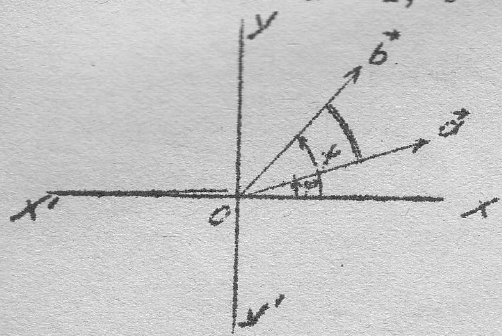
Ja asis ortogonālas $\omega = \frac{\pi}{2}$ tad $\boxed{\vec{a}.\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y}$

Vektora $\vec{a}$ garuma kvadrātu dabūjam, liekot $b_x = a_x$, $b_y = a_y$, jo $a^2 = \vec{a}.\vec{a}$. $\vec{a}^2 = a_x^2 + a_y^2 + 2a_x a_y \cos\omega$

ja $\omega = \frac{\pi}{2}$ t.i. /x'x, y'y/ ortogonālas $\boxed{\vec{a}^2 = a_x^2 + a_y^2}$

Ja asis ortogonālas, vektora garuma kvadrāts ir vienlīdz. ar abu vektora komponentu kvadrātu summu.

P i e l i e t o j u m s . Par vektoriem $\vec{a}$ un $\vec{b}$ ņemam divus vienības vektorus: a = 1, b = 1, koordinātu asis ņemam ortogonālas.



Apzīmējam

$\varphi = /x'x, \vec{a}/$ $\psi = /x'x, \vec{b}/$, tad $/\vec{a}, \vec{b}/ = \psi - \varphi$

$a_x = \cos\varphi$ $a_y = \cos/\frac{\pi}{2} - \varphi/ = \sin\varphi$.

$b_x = \cos\psi$ $b_y = \sin\psi$

$\vec{a}.\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi$

$\vec{a}\,.\,\vec{b} = \cos/\psi - \varphi/$

/pēc skal.reiz.definicijas/.

tā tad iegūstam sakarību $\cos/\psi - \varphi/ = \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi$ kā sekas divu vektoru skalārā reizinājuma īpašībām.

ZB - 100

1941.g. maijā.