Ģeometrijas jautājumi (1932. g. pav. sem.)

Trijstūŗu ģeometrijā.

Elementārās geometrijas attīstība pēdējos gadu simteņos strauji gājusi uz priekšu. Pateicoties franču zinātniekam Poncelet un vācu zinātniekam Steiner'am, kuri nopelnu ziņā nestāv pakaļ slaveniem grieķu geometriem, 19. g. s. sākumā stipri uzplaukst sintetiskā geometrija. Pagājušā g. s. 70^{tos} gados sevišķi attīstas trijstūru geometrija. Ap 1880. gadu iznākušas vairākas grāmatiņas par trijstūru geometriju, kuras domātas vidusskolu pēdējām klasēm iepriekšējā geometrijas kursa jautājumu noapaļošanai ar jaunām metodēm.

Mūsu kursu, kurš domāts dažādu geometrisku jautājumu aplūkošanai, iesāksim ar Apolonija problemas aplūkošanu.

I. Apolonija problema par riņķu pieskaršanos.

Šīs problemas saturs: Jākonstruē riņķis, kas izpilda trīs prasības, kuras saistās vai nu ar punktiem, vai taisnēm, vai riņķiem.

Piemēram: jākonstr. riņķis, kas iet caur trīs dotiem punktiem; kas iet caur doto punktu un skaras pie dotās taisnes un dotā riņķa u. t. t.

Ievedot simbolistiskus apzīmējumus: P — punkts,
T — taisne
R — riņķis, dabūjam ka Apolonija problema sastāv no 10 atsevišķiem uzdevumiem (probl.), kuriem atbilstošie noteikumi ir:

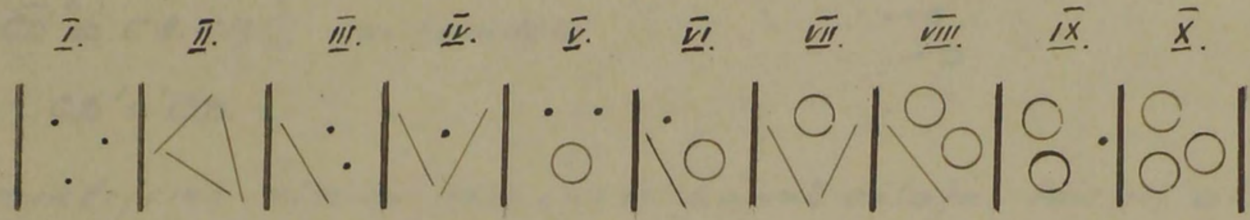
I. PPP	VI. PRT
II. TTT	VII. RTT
III. PPT	VIII. RRT
IV. PTT	IX. PRR
V. PPR	X. RRR

Apolonijs ir viens no senātnes lielākiem genijiem. Dzīvojis 3. un 2. g.s. pirms Kristus (260–190, vai arī 250–170). Apolonijs uzskatams par modernās (analītiskās) geometrijas nodibinātāju. Viņš devis elementāra rakstura plašu II. pakāpes līniju geometriju. Šīs darbs sastāv no 8 grāmatām un ir vienīgais no Apol. darbiem kas uzglabājies. Apolonijam bijuši vēl citi darbi, bet viņa originali ir nozuduši. Kāds no viņa rakstiem saucas „par pieskaršanos" (περὶ ἐπαφῶν). Šo darbu mēģināts restaurēt, kas pa daļai arī izdevies. Tanī apskatīta arī jau minētā Apol. problema. Visgrūtākais ir šīs problemas pēdīgais uzdevums (RRR) t.i. – konstruēt riņķi kas pieskaras trīs dotiem riņķiem. Lai viņa atrisinātu – iepriekš ir jāatrisina visi 9 iepriekšējie uzdevumi. 1800–1830 gados atrasta metode, kas dod iespēju šo pēdējo uzdevumu atrisināt tieši. Pie kam visu 9 iepriekšējo uzd. atrisinājumus var dabūt no šā pēdējā kā atsevišķus gadījumus, ja punktu uzskata par riņķi ar rad = 0, un taisni par riņķi ar rad = ∞. (Starpība starp jauno laiku un veco laiku geometrijas uztveri: grieķi punktu, taisni un riņķi uzskatīja kā atsevišķas figuras, tagad tos visus uzskata par riņķi; pie kam punkts un taisne ir riņķa atsevišķi gadījumi, ja riņķa rad. = 0, ∞).

Restaurēt Apolonija darbus un atrisināt minētās problemas pirmais mēģinājis Papus 3. g. s. pēc Kristus. Viņš pievedis dažas lemmas. Vidus laikos pie Apol. darba restaurēšanas strādājis F. Vieta. un 1600. gadā viņš izdevis grāmatu „Apolonius Gallus" (Darbs atrodams Rīgas bibliot.) Vieta centies Apol. problemu ciklu atrisināt tāpat, kā pats Apolonijs to darījis. Cik viņa atrisināšanas paņēmieni saskan ar Apolonija paņēm. – nevar konstatēt. Pie Apol. problemas atrisin. strādājuši ļoti daudzi autori. Ņutons pirmais mēģinājis šo uzdevumu ciklu atrisināt analitiskās geometrijas paņēmieniem. Pēc viņa Eulers un vēl daudzi citi.

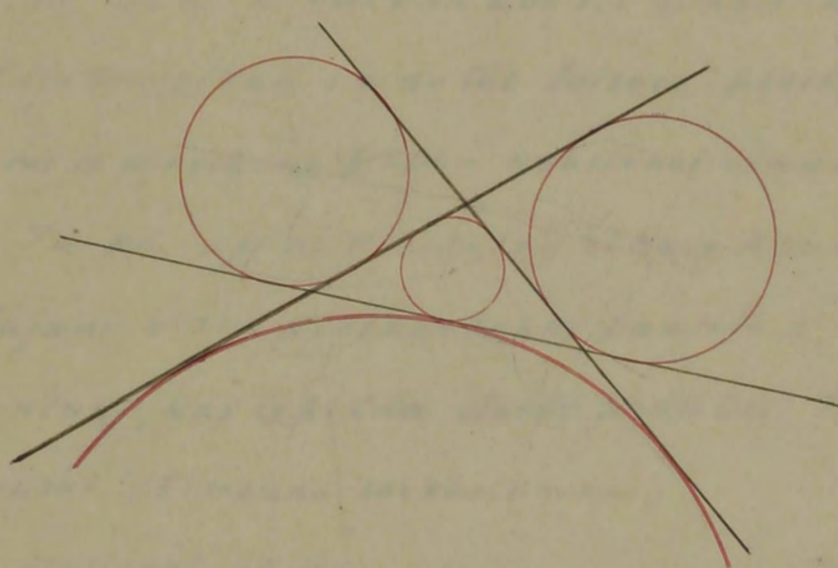
Apskatīsim visas 10 problemas (uzdev.) vispirms ar grieķu metodēm un pie tam tās pašas probl. ar jaunlaiku (pagājušā g.s.) modernām metodēm, lai būtu redzama starpība starp veco un jauno laiku atrisināšanas paņēmieniem.

Simbolistiski Apolonija problemu (10 atsevišķu probl. ciklu) varam uzstādīt arī sekojošā veidā:



I. Uzderuma atrisināšana visiem labi zināma. Rezultātā iznāk viens riņķis.

II. Arī šā uzderuma atrisin. ir zināma (Ierakstīt Δ-rī riņķi vai pierakstīt Δ-rim riņķi klāt) rezultātā dabujam četrus riņķus.

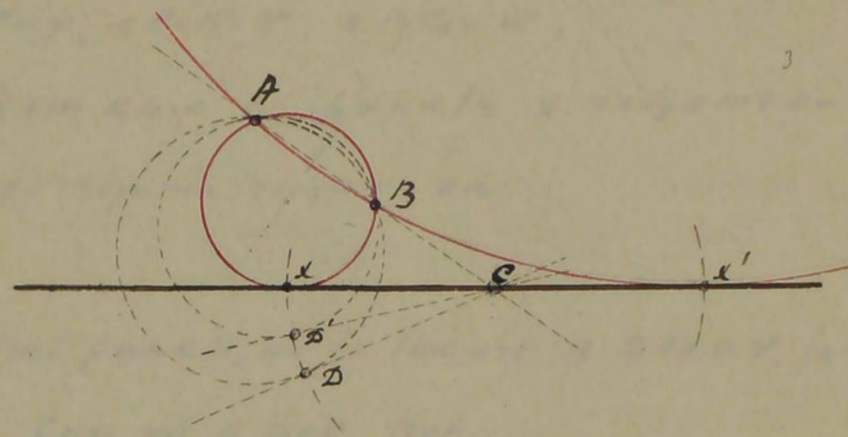


III. Doti punkti A un B un taisne. Meklēsim riņķi kas iet caur šiem punktiem un skaras dotajai taisnei. Var nojaust, ka būs divi atrisinājumi.

Analize: Zīmējam riņķi kas iet caur punktiem A un B un krusto doto taisni. Bez tam caur punktiem A un B velkam taisni, kura krusto doto taisni punktā C. Šis punkts C ir pilnīgi noteikts ar doto taisni un abiem dotājiem punktiem A un B. No (.) C velkam riņķim pieskari CD. Pamatojoties uz teoremu: tangentes kv. ir vienāds ar no tā paša punkta vilktas sekantes un viņas ārējās daļas reizinājumu dabujam, ka

$$\overline{CD}^2 = CA \cdot CB.$$

Varam apgalvot, ka lai ar kādu riņķi caur punktiem A un B nebūtu ņēmuši – no punkta C pret šo riņķi vilktas tangentes garums ir pastāvīgs lielums un līdzinās CD. Jo



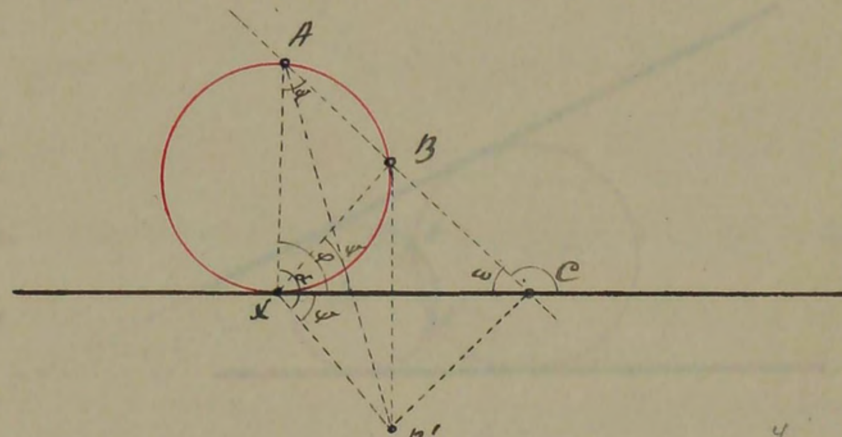
$$\overline{CD}^2 = CA \cdot CB \quad \text{un tamdēļ}$$

$$CD' = CD$$

Tā tad meklējamā riņķa skaršanās punkts dotajai taisnei atrodas uz šīs taisnes attāļumā CD no punkta C.

Konstrukcija: Caur punktiem A un B velkam riņķi. Tad caur tiem pašiem punktiem velkam taisni un atrodam šīs taisnes un dotās taisnes krustošanās punktu C. No (·) C velkam uz ņemto riņķi pieskari CD. Pēc tam ap (·) C kā centru velkam riņķi ar rad = CD un kur šis riņķis krusto doto taisni, tur atrodas meklējama riņķa un dotās taisnes pieskaršanās punkts x. Līdz ar to uzdevums ir novests uz I uzd. – konstruēt riņķi kas iet caur trīs punktiem A, B un x. Tā kā ap (·) C vilktais riņķis krusto doto taisni arī otrā punktā, dabujam otru pieskaršanās punktu x', kas dod iespēju konstruēt vēl vienu riņķi, kas izpilda dotās prasības. Tā tad uzdevumam būs divi atrisinājumi. (Zīmējumā sarkanie riņķi)

Šo uzdevumu var atrisināt vēl ar citādu metodi, ko izvedis franču zinātnieks Lemoin's 1879. g. Tikai tad jāzin atrast punktu geometrisko vietu, no kuriem dotais taisnes nogrieznis redzams zem dotā leņķa. Kā zināms šī geometriskā vieta ir riņķis.



Pāriesim pie uzdevuma: Pieņemsim ka meklējamais riņķis ir atrasts un ka viņš skaras pie dotās taisnes punktā x (iepriekš. zīm. sarkanais riņķis). Tā pat kā augstāk atradīsim punktu C. Tad ņemsim punktam B simetrisko punktu B'

Pēc tam savienosim punktus: x ar A, x ar B, x ar B', B' ar A, B' ar B un B' ar C un nosauksim leņķus — $\sphericalangle AxB' = \alpha$, $\sphericalangle AxC = \varphi$, $\sphericalangle CxB' = \psi$; $\sphericalangle BCx = \omega$.

Noskaidrosim, vai leņķis α, zem kura no punkta x redzams nogrieznis AB', ir zināms vai ne. No zīmējuma redzams ka

$$\alpha = \varphi + \psi.$$

$\sphericalangle BxC = \psi$, jo B un B' ir simetriski punkti, un tā tad arī $\sphericalangle BAx = \psi$, jo tiek merīts ar tā paša centra leņķa pusi kā $\sphericalangle BxC$. Bet

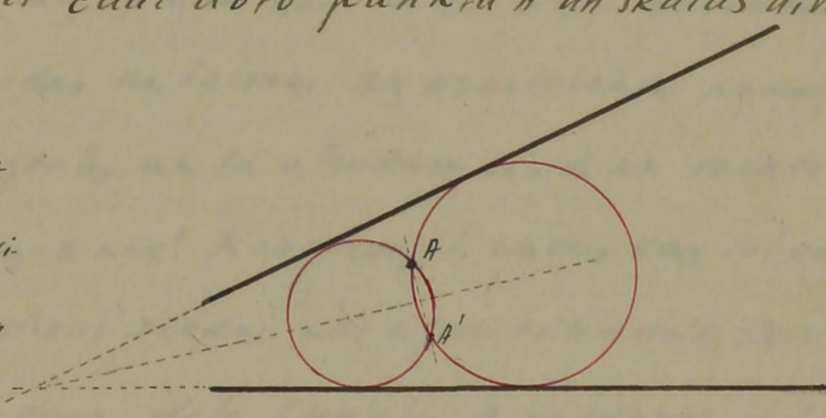
$$\varphi + \psi = 180° - \omega = \sphericalangle C, \text{ no kā seko ka}$$

$$\alpha = \sphericalangle C$$

Leņķis C ir pilnīgi noteikts ar dotiem noteikumiem un tā tad α ir zināms leņķis. Līdz ar to ir skaidrs ka dotās taisnes un meklējamā riņķa skaršanās punkts x ir dotās taisnes un riņķa, no kura punktiem nogrieznis AB' redzams zem leņķa α, krustošanās punkts. (Arī nogrieznis AB' ir zināms).

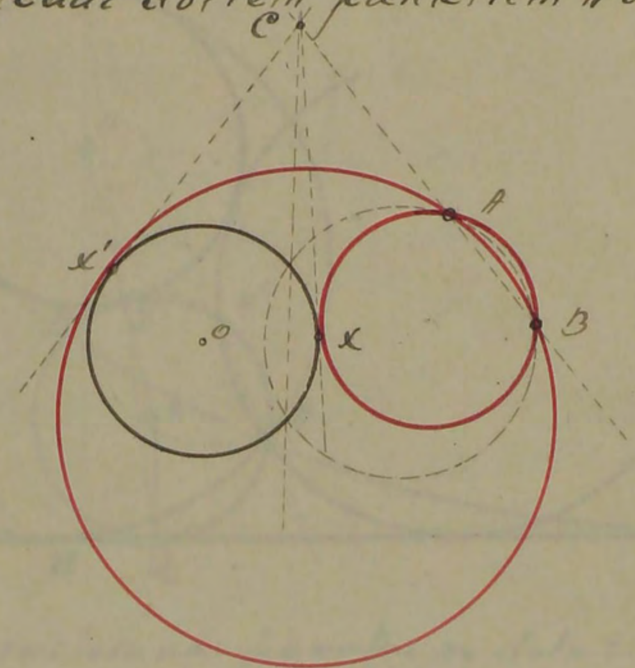
Konstrukcija: Ņemam punktu B' simetrisku ar B. Savienojam punktu B' ar A un konstruejam punktu geometrisko vietu, no kuriem nogrieznis AB' redzams zem $\sphericalangle C = \alpha$. Kur šī geomtr. vieta (riņķis) krusto doto taisni, tur atrodas meklējamā riņķa skaršanās punkts dotai taisnei. Vispārīgi dabūsim divus krustošanās punktus un tā tad arī divus riņķus, kas izpilda dotās prasības.

IV. Jākonstruē riņķis kas iet caur doto punktu A un skaras divām dotām taisnēm.



Meklējamā riņķa centrs atrodas uz abu doto taišņu veidotā leņķa bissektrises. Tamdēļ, tā kā šim riņķim jāiet caur punktu A, viņam jāiet arī caur punkta A simetrisko punktu A' attiecībā uz bissektrisi kā simetrijas asi. Ar abām dotajām taisnēm un punktu A punkts A' ir pilnīgi noteikts. Tā tad meklējamais riņķis iet caur diviem noteiktiem punktiem un skaras dotajai taisnei. Tā uzdevums ir novests uz iepriekšējo t.i III uzdevumu. Izdarot konstrukciju dabujam divus atrisinājumus

V. Konstruēt riņķi, kas iet caur dotiem punktiem A un B un skaras dotam riņķim.

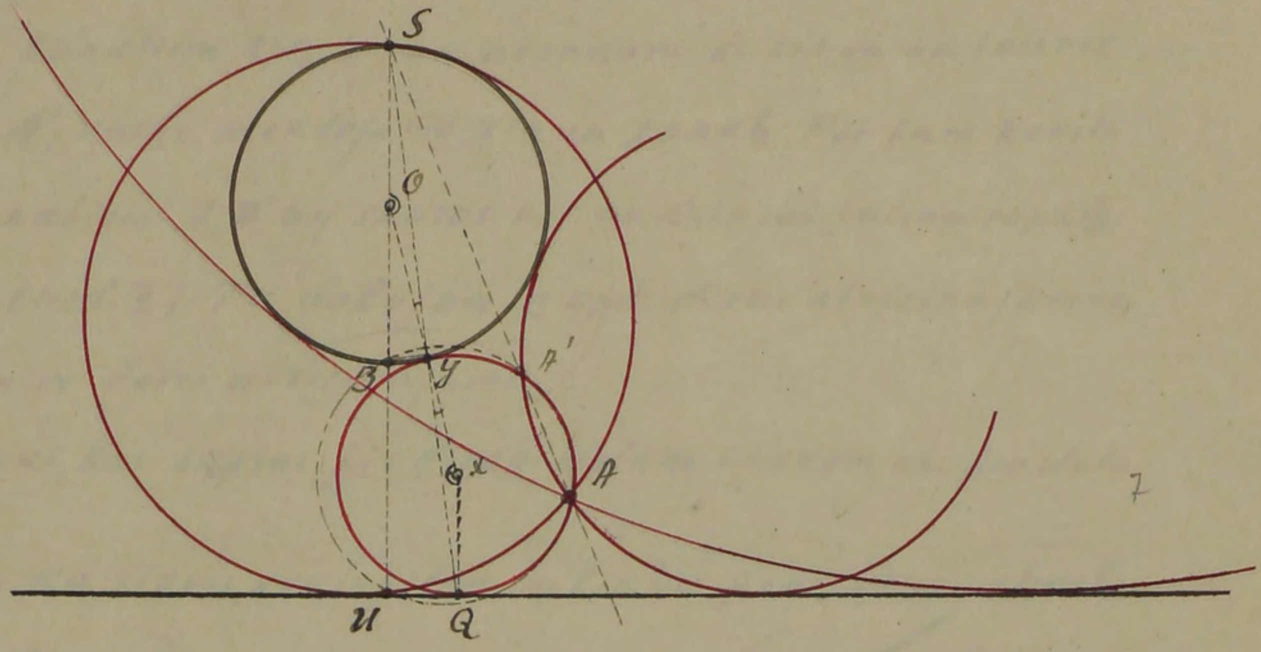


Analīze: Caur punktiem A un B velkam taisni un kautkādu riņķi, kas krusto doto riņķi. Savienojot abu riņķu (dotā un ņemtā palīga riņķa) krustošanās punktus dabujam šo riņķu kopīgo hordu, kuras pagarinājums krustojas ar taisnes AB pagarinājumu punktā C. Krustošanas punkts C ir pilnīgi noteikts ar doto riņķi un abiem dotajiem punktiem A un B t. i. – viņš nava atkarīgs no ņemtā palīga riņķa. [Šā pēdējā slēdziena pareizību pierādīt pašiem klausītājiem]. Tā tad visu caur punktiem A un B ejošu riņķu un dota riņķa kopīgo hordu pagarinājumi iet caur vienu noteiktu punktu C. Ar to ir skaidrs, ka kopīgā horda, ko izsauc dotais riņķis ar meklēto, ir no punkta C pret doto riņķi vilkta pieskare. Pieskaršanās punkts x ir šo riņķu pieskaršanās punkts. Tā kā no C var vilkt divas pieskares, dabujam vēl otru pieskaršanās punktu x'. Ar to šis uzdevums ir novests uz (pirmo) I. Atliek konstruēt riņķus kas iet caur trīs punktiem A, B, x un A, B x'.

Konstrukcija: Caur punktiem A un B ņemam kautkādu riņķi. Atrodam šā riņķa un dota riņķa kopīgās hordas un taisnes AB krustošanās punktu C. No C velkam pret doto riņķi tangentes un tā atrodam dotā un meklējamo riņķu pieskaršanās punktus x un x'. Konstruējot riņķus kas iet caur punktiem A, B, x un A, B, x' dabujam divus riņķus kas apmierina dotās prasības.

VI. Jākonstruē riņķis kas iet caur doto punktu A un skaras dotajai taisnei un dotajam riņķim.

Analīze: Apzīmēsim dotā riņķa centru ar O. Pieņemsim ka meklējamais riņķis ir atrasts (konstruēts) un ka viņa centrs atrodas punktā x. Abu riņķu pieskaršanās punktu apzīmesim ar y. Ir zināms: ja divi riņķi pieskaras viens otram, tad viņu centri un pieskaršanās punkts atrodas uz vienas taisnes. Tā tad punkti O, y un x guļ uz vienas taisnes. Velkam caur centriem O un x perpendikulus pret doto



taisni un apzīmējam šo perpend. krustošanās punktus ar doto riņķi un taisni ar S, B, U un Q (sk. zīmējumu). — Noskaidrosim ka līnija SyQ nav lauzta, bet taisna līnija. Trijstūri OSy un xQy ir vienādsānu trijstūri. Leņķi pie centriem O un x ir vienādi (jo lin. OS∥SQ). Tā tad arī leņķi pie y ir vienādi un no tā seko, ka līnija SyQ ir taisna. — Savienojam punktu S ar A un šīs taisnes krustošanās punktu ar riņķi (x) apzīmējam ar A'. Tagad varam rakstīt sakarību

$$SA\cdot SA' = SQ\cdot Sy \quad \text{---------} \; (1)$$

$\triangle SBy \backsim \triangle SQU$, jo abi ir taisnleņķa trijstūri ar kopīgu šauro leņķi.

Tamdēļ $$\frac{SQ}{SB}=\frac{SU}{Sy} \quad \text{k. t. p.} \quad SB\cdot SU = SQ\cdot Sy \quad \text{-------} \; (2)$$

No sakarībām (1) un (2) seko, ka

$$\underline{SA\cdot SA' = SB\cdot SU.}$$

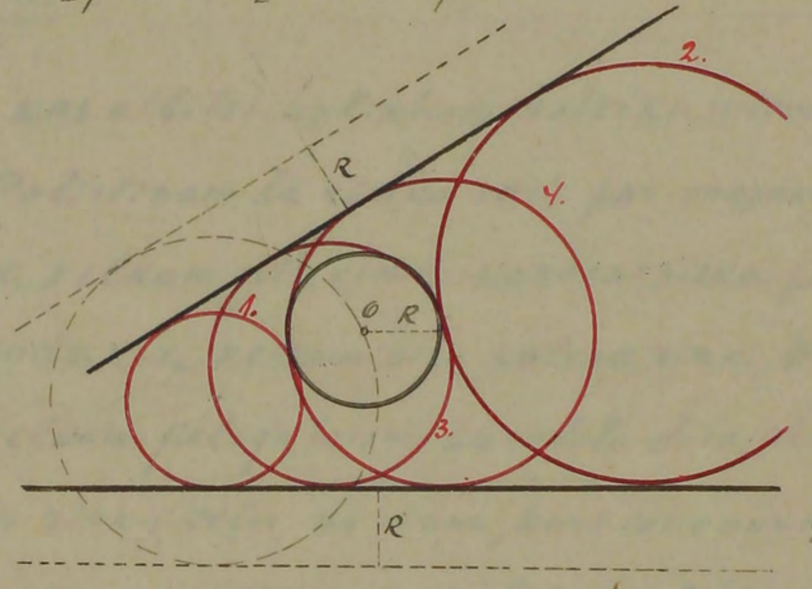
Tas nozīmē ka četri punkti A, A', B un U atrodas uz viena riņķa [Pašiem pierādīt, ka pastāvot pastrīpotai sakarībai šis slēdziens ir pareizs. Citiem vārdiem sakot — pierādīt apgriezto teoremu teoremai par no viena punkta ejošu divu riņķa sekanšu un viņu ārējo nogriežņu reizinājumu Zīm.] Punkti A, B un U ir zināmi un tā tad punktu A' viegli var konstruēt. Viņš ir caur punktiem A, B, U ejoša riņķa un stara SA krustošanās punkts. Ja punkts A' atrast, uzdevums līdz ar to ir novests uz III (vai V.) uzd. t. i. — konstruēt riņķi kas iet caur diviem dotiem p. un skaras vai nu dotai taisnei, vai riņķim.

Konstrukcija: No dotā riņķa centra velkam perpendikuli pret doto taisni un dabujam punktus S, B, U (sk. zīm.). Tad velkam caur A un S taisni.

Konstruējam riņķi caur punktiem A, B, U un atrodam šī riņķa un taisnes SA krustošanās punktu A', kas ir meklējamā riņķa punkts. Pēc tam konstr. riņķi kas iet caur punktiem A, A' un skaras vai nu dotajai taisnei (uzd. III.) vai arī dotajam riņķim (uzd. V.) Tā dabujam VI uzd. divus atrisinājumus. Pavisam šim uzdevumam ir četri atrisinājumi.

VII. Konstruēt riņķi, kas skaras pie divām dotām taisnēm un pie dotā riņķa

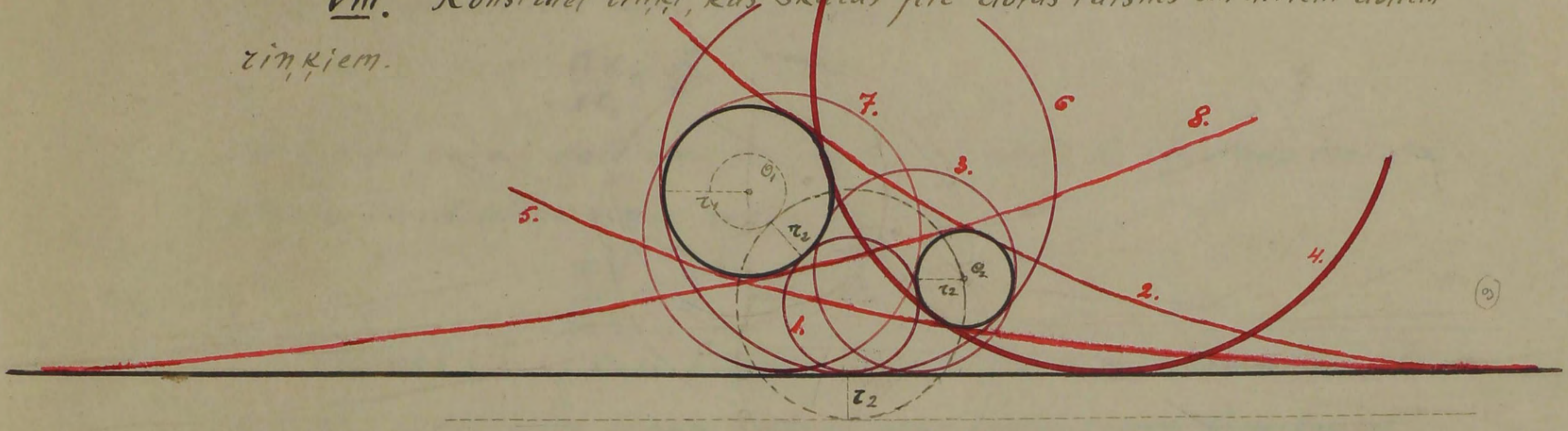
Analīze: Pieņemam ka riņķis, kas izpilda uzliktas prasības ir atrasts. (Zīmējumā riņķis 1.). Palielinam šā riņķa radiusu par dotā riņķa rad. R. Attālumā R velkam ārpus dotām taisnēm viņām paralelas taisnes. Palīga riņķis, kuru dabujam no riņķa 1. palielinot viņa rad. par R, iet caur dotā riņķa centru un skaras



abām palīga taisnēm. Tā tad meklējamo riņķi (t.i. 1.) varam dabūt no riņķa, kas iet caur dotā riņķa centru un skaras abām palīga taisnēm, ja šā riņķa rad. samazina par dotā riņķa radiusu. Tā uzdevums ir novests uz III. uzd. – konstruēt riņķi kas iet caur doto punktu un skaras divām dotām taisnēm

Konstrukcija: Velkam ārpusē dotām taisnēm paralelas taisnes attālumā R no viņām. Tad konstruējam riņķi kas iet caur dotā riņķa centru O un skaras šām palīga taisnēm. Dabujam divus riņķus kas prasībam. Samazinot šo riņķu rad. par dotā riņķa rad. R – dabujam divus meklētos riņķus (zīmējumā 1. un 2.). Viegli atrast vēl divus riņķus (zīm. 3 un 4.), ja konstr. riņķus kas iet caur dotā riņķa centru un skaras pie palīga taisnēm, kas ņemtas dotām taisnēm iekšpusē no viņām attālumā R un ir viņām paralelas – palielinot šo riņķu rad. par R. Tā tad VII uzdevumam ir 4 atrisinājumi [ja doto taisņu un riņķa savstarp. stāvoklis ir tāds kā pievestā zīmējumā].

VIII. Konstruēt riņķi, kas skaras pie dotas taisnes un diviem dotiem riņķiem.

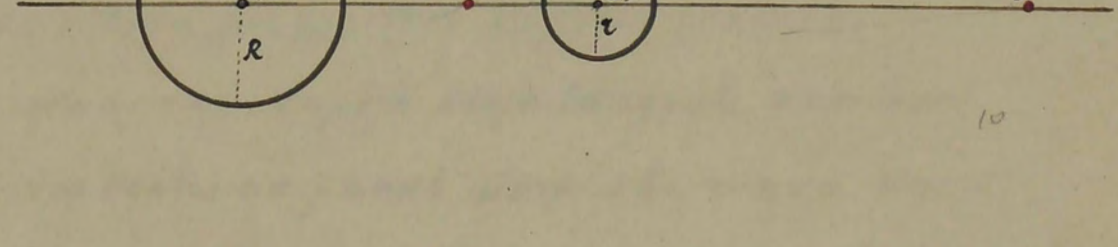


Analīze: Pieņemam ka riņķis kas atbilst uzliktiem noteikumiem ir konstruēts (zīmējumā riņķis 1.). Palielinam šā riņķa rad. par mazākā dotā riņķa rad. r_2 un ar dabūto rad. velkam riņķim 1. koncentrisku palīga riņķi. Lielākā dotā riņķī ar rad.$=r_1-r_2$ velkam otru palīga riņķi. Attāļumā r_2 no dotās taisnes uz leju velkam palīga taisni paralelu dotajai. Tagad ir skaidri redzams, ka meklējamais riņķis ceļas no riņķa, kurš iet caur mazākā dotā riņķa centru un skaras riņķim vilktam ap lielākā dotā riņķa centru ar rad.$=r_1-r_2$ un taisnei, vilktai paraleli dot. taisnei attāļumā r_2 no viņas (uz leju) – ja šā riņķa rad. pamazina par maz. dot. riņķa rad. r_2. Ar to uzdevums ir novests uz VI uzd. – konstruēt riņķi kas iet caur doto punktu un skaras dotajai taisnei un dot. riņķim, – ko protam izdarīt. VIII uzdev. ir 8 atrisinājumi. (Kā viņus visus atrast, pārdomāt pašiem)

Pirms stājamies pie IX uzdevuma atrisināšanas, izdarīsim dažus palīga noskaidrojumus. Vispirms noskaidrosim divu riņķu

Līdzības jeb homotētijas centru jēdzienu.

Doti divi riņķi ar centriem punktos O_1 un O_2 un radiusiem R un r. Savienojam abus centrus ar taisni un attāļumu starp viņiem sadalam divās daļās tā, lai attāļumi no dalījuma punkta x līdz abu



riņķu centriem attiecas tāpat, kā atbilstošie riņķu radiusi t.i

$$\frac{O_1x}{xO_2}=\frac{R}{r}.$$

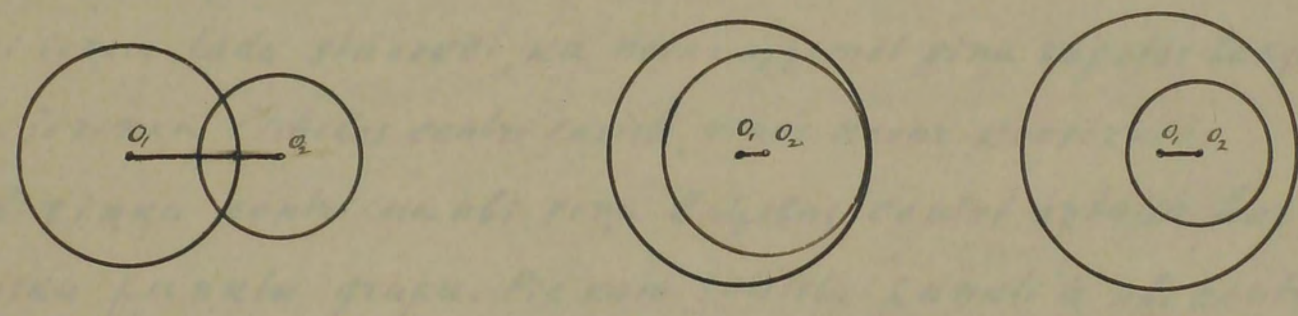
Var būt arī ārējais dalījuma punkts y, kuŗa attāļ. no abu riņķu centriem attiecas kā atbilstošie riņķu radiusi t.i

$$\frac{O_1y}{O_2y}=\frac{R}{r}.$$

Punktus x un y, kuŗu attāļumi no abu riņķu centriem attiecas tāpat kā atbilstošie riņķu radiusi, sauc par šo riņķu līdzības jeb homotētijas centriem. Punkts x ir abu riņķu iekšējais un punkts y viņu ārējais līdzības centrs.

Eulers pirmais ir rakstījis par šiem punktiem un ieredis viņiem nosaukumu „De centro similitudinis". Domājams ka jau griekiem ir bijis pazīstams līdzības centru jēdziens

Neskatoties uz to, kādu savstarpējo stāvokli ieņem abi riņķi — viņu līdzības centri vienmēr eksistē un to definicija paliek tā pati. Piemēram ja riņķu savstarp. stāvoklis ir tāds kā sekojošos zīmējumos — līdz. centri eksist. un viņu definicija nemainas

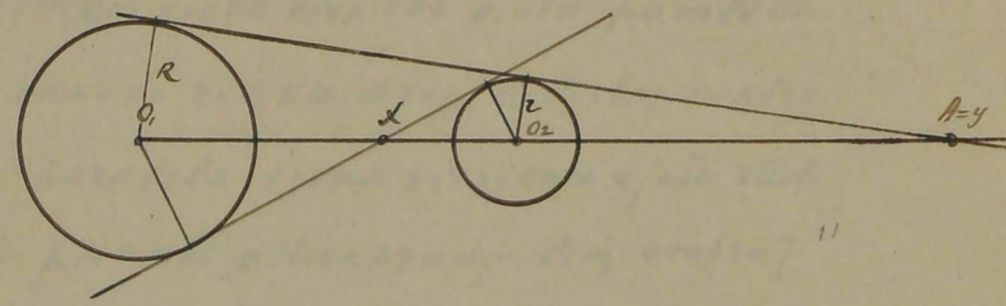


No skaidrot pašiem, kur atrodas līdzības centri, ja viens vai abi no dotiem riņķiem pārvēršas par punktu vai taisni. Vajag aplūkot 5 atsevišķus gadījumus, kuŗus simbolistiski var uzrakstīt:

|○· |○/ |· · |// |·/

Līdzības centrus var konstruēt ar abu riņķu kopējo tangenšu palīdzību, ja riņķu sast. stāvoklis ir tāds, ka viņiem var uzzīmēt kopīgās tangentes.

Pierādisim, ka punkts, kuŗā abu riņķu kopējā ārējā tangente krusto centru līniju ir riņķu ārējais līdzības centrs un punkts kuŗā abu riņķu kopējā iekšējā tang. krusto centru līniju, ir šo riņķu iekšējais līdzības centrs. Ņemsim divus riņķus un uzzīmēsim viņu kopējo ārējo tangenti. Šīs tang. un centru līnijas krustoš. punktu apzīm. ar A. Uz trijstūru līdzības pamata varam rakstīt; ka



$$\frac{O_1A}{O_2A} = \frac{R}{r},$$ kas ir līdzības centra definicija. Tā tad $A = y$ un arto ir pierādīts, ka

divu riņķu kopīgās ārējās tangentes un centru līnijas krustošanās punkts ir šo riņķu ārējais līdzības centrs.

Velkot riņķiem kopīgo iekšējo tangenti un apzīmējot šās tang. un centru līnijas krustoš. punktu ar x, atkal uz trijstūru līdzības pamata var rakstīt sakarību

$$\frac{O_1x}{O_2x} = \frac{R}{r},$$ kas dod ka x ir abu riņķu līdzības centrs. Tā tad—

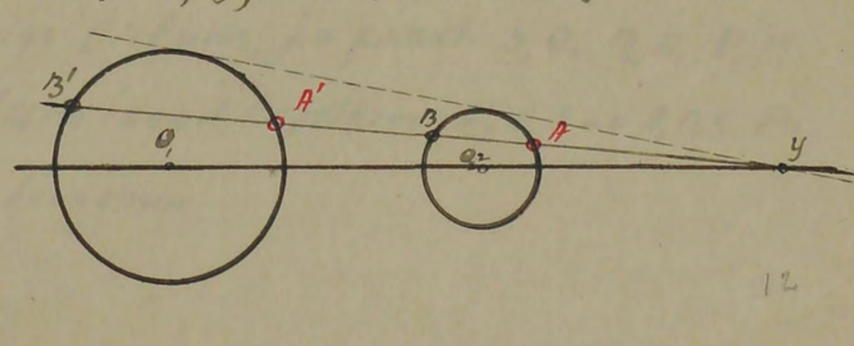
divu riņķu kopējas iekšējās tangentes un viņu centru līnijas krustošanās punkts ir šo riņķu iekšējais līdzības centrs.

Ja riņķi ieņem tādu stāvokli, ka nevar uzzīmēt viņu kopējās tangentes — kautgan šo riņķu līdzības centri eksistē, viņus nevar konstruēt.

Abi riņķu centri un abi viņu līdzības centri iztaisa harmonisku punktu grupu. Pie kam saistītie punkti ir abi centri O_1 un O_2 un abi līdzības centri x un y.

Homologu un antihomologu punktu jēdziens.

Ņemam divus riņķus un caur viņu ārējo līdzības centru y velkam staru. Stars krusto riņķus četros punktos: A, B, A' un B'. Punktus A un A' un punktus B un B' sauc par homologiem jeb atbilstošiem punktiem; puktus A un B' un punktus B un A' — par antihomologiem jeb neatbilstošiem punktiem.



Klausītājiem pašiem pierādīt sekojošas teoremas:

1. Taisne, kas savieno divu riņķu vienā virzienā ejošu paralēlu radiusu gala punktus, iet caur šo riņķu ārējo līdzības centru [citādi sakot: divu riņķu paralēlu vienā virzienā ejošu rad. gala punkti ir homologi punkti attiec. uz ārējo līdz. centru].

2. Taisne, kas savieno divu riņķu paralelu pretējos virzienos ejošu radiusu gala punktus iet caur šo riņķu iekšējo līdzības centru. [Cit. vārd. sakot: divu riņķu paralēlu pretējos virzienos ejošu rad. gala punkti ir homologi punkti attie. uz iekšējo līdzības centru]

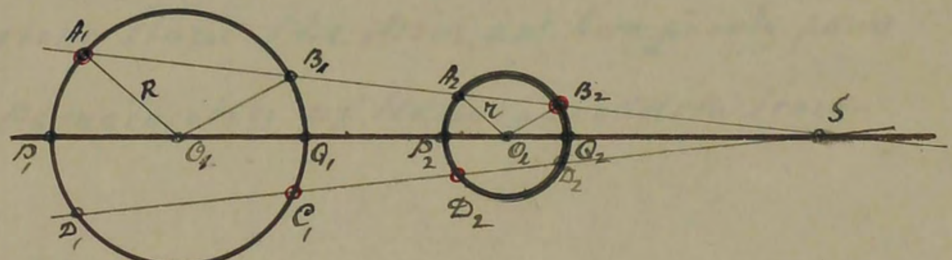
3. Apgrieztā teorema:

   Homologus punktus savienojot ar atbilstošo riņķu centriem dabujam paralelus radiusus.

Pierādīsim tagad teoremu:

Līdzības centra attālumu no diviem antihomologiem punktiem reizinājums ir pastāvīgs lielums.

Vispirms pierādīsim šo teoremu attiecībā uz ārējo līdzības centru. – Ņemam divus riņķus, kuru ārējo līdz. centru apzīm ar S. Caur S velkam staru, kas krusto riņķus punktos A_1, B_1, A_2, B_2. Centru līnijas krustošanās punktus ar riņķiem apzīm. ar P_1, Q_1, P_2, Q_2. Pamatojoties uz teoremu par sekanšu un viņu ārējo nogriežņu reizinājumu, varam rakstīt:



13

$$SA_2 \cdot SB_2 = SP_2 \cdot SQ_2$$

$$SA_1 \cdot SB_1 = SP_1 \cdot SQ_1.$$

Šīs sakarības sareizinot dabujam

$$\underline{SA_2 \cdot SB_2 \cdot SA_1 \cdot SB_1 = SP_1 \cdot SQ_1 \cdot SP_2 \cdot SQ_2.}$$

Pēdējās sakarības labā puse ir pastāvīgs lielums, jo punkti S, Q_2, P_2, Q_1, P_1 ir noteikti ar dotiem riņķiem. – Apskatīsim tagad trijstūrus A_2O_2S un A_1O_1S. Pamatojoties uz augstāk doto apgriezto teoremu

$$O_1A_1 \parallel O_2A_2$$

Tamdēļ $\triangle A_2O_2S \sim \triangle A_1O_1S$ un no tā seko ka

$$\frac{SA_2}{SA_1}=\frac{r}{R}.$$

Tā pat: $O_1B_1 \parallel O_2B_2$, $\triangle O_2B_2S \sim \triangle O_1B_1S$ un

$$\frac{SB_2}{SB_1}=\frac{r}{R}.$$

Pamatojoties uz šām proporcijām dabujam, ka

$$\frac{SB_2}{SB_1}=\frac{SA_2}{SA_1} \quad \text{vai arī} \quad SA_1\cdot SB_2 = SB_1\cdot SA_2$$

Pēdējo sakarību izlietojot pārtaisam (iepriekš. lap. pusē) pastrīpotās izteiksmes kreiso pusi un dabujam, ka

$$(SA_1\cdot SB_2)^2 = const. \qquad \text{un t. t. arī}$$

$$SA_1\cdot SB_2 = const. = K$$

Bet A_1 un B_2 ir antihomologu punktu pāris. Ar to attiecībā uz ārējo līdzības centru teorema ir pierādīta

Pašiem pierādīt, ka šī teorema ir pareiza arī attiecībā uz riņķu iekšējo līdzības centru (t.i. – pierādīt ka iekšējā līdz. centra attāļumu no diviem antihomologiem punktiem reizinājums ir pastavīgs lielums)

– Velkot caur ārējo līdz. centru S (iepriekšējā zīmējumā) vēl vienu staru, dabujam antihomologus punktus C_1 un D_2 un C_2D_1. Ņemsim četrus antihom punktus, kuri neatrodas uz viena stara (t. i divus ant. hom. punktu pārus) piem. punktus A_1, B_2 un C_1, D_2. Pamatojoties uz tikko pierādīto teorēmu, varam rakstīt, ka

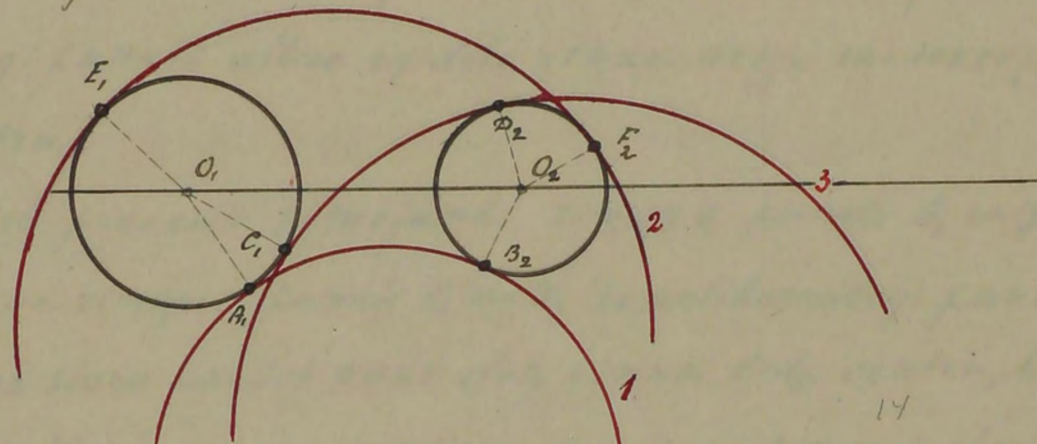
$$SC_1\cdot SD_2 = SA_1\cdot SB_2.$$

Bet šī sakarība dod, ka punkti C_1, D_2, A_1, B_2 atrodas uz vienas riņķa līnijas. Ar to ir pierādīta teorēma:

Četri antihomologi punkti atrodas vai nu uz vienas taisnes, vai uz viena riņķa (citāds viņu grupējums nava iespējams)

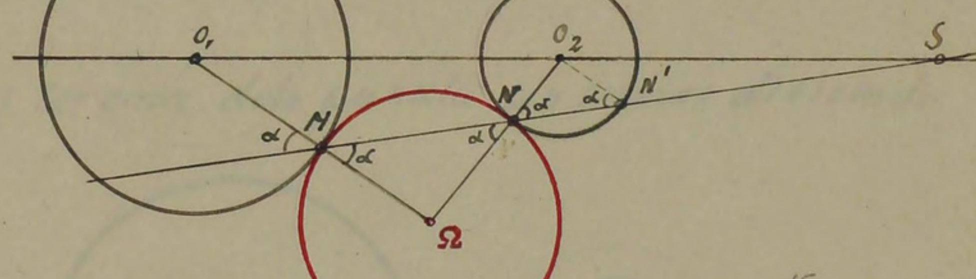
Pierādīsim vēl teoremu:

Ja pie diviem pastāvīgiem riņķiem pieskaras trešais riņķis, kas savu stāvokli var mainīt – līnija kas savieno šo riņķu skaršanās punktus iet caur doto riņķu iekšējo vai ārējo līdzības centru. – Ja mainīgais riņķis pieskaras abiem dotiem riņķiem ārēji (zīm. riņķis 1.) vai abus ietver iekšpusē (zīm. r. 2.) tad šī līnija iet caur doto riņķu ārējo līdzības centru. Ja mainīgais riņķis vienu doto riņķi ietver iekšpusē un otram skaras no ārpuses (zīm. r. 3.), tad minētā līnija iet caur doto riņķu iekšējo līdzības centru.



14

Apskatīsim gadījumu, kad mainīgais riņķis riņķis pieskaras dotiem riņķiem ārēji. Pieņemsim ka mainīgā riņķa centrs atrodas punktā Ω (doto riņķa centri atr. punktos O_1 un O_2). Riņķu skaršanās punktus apzīm. ar M un N. Caur punktiem M un N vilksim taisni un viņas krustoš. punktu ar mazo doto riņķi apzīm. ar N', krustoš. punktu ar centru līniju apzīm. ar S. Tad savienosim mainīg. riņķa centru Ω ar doto riņķu centriem un vilksim vēl palīga līniju $N'O_2$. Visi ar lociņiem apvilktie leņķi ir vienādi. No tā seko ka $O_1M \parallel O_2N'$. Bet no kādas iepriekšējās teorēmas ir zināms, ka līnija kas savieno divu paralēlu vienā virzienā ejošu radiusu gala punktus, iet caur šo riņķu ārējo līdzības centru. – Ar to attiecībā uz ārējo pieskaršanos teorēma ir pierādīta.



15

Pašiem pierādīt, ka gadījumā, ja mainīgais riņķis vienu doto riņķi ietver iekšpusē un otram skaras no ārpuses, tad skaršanās punktus savienojošā taisne iet caur doto riņķu iekšējo līdzības centru.

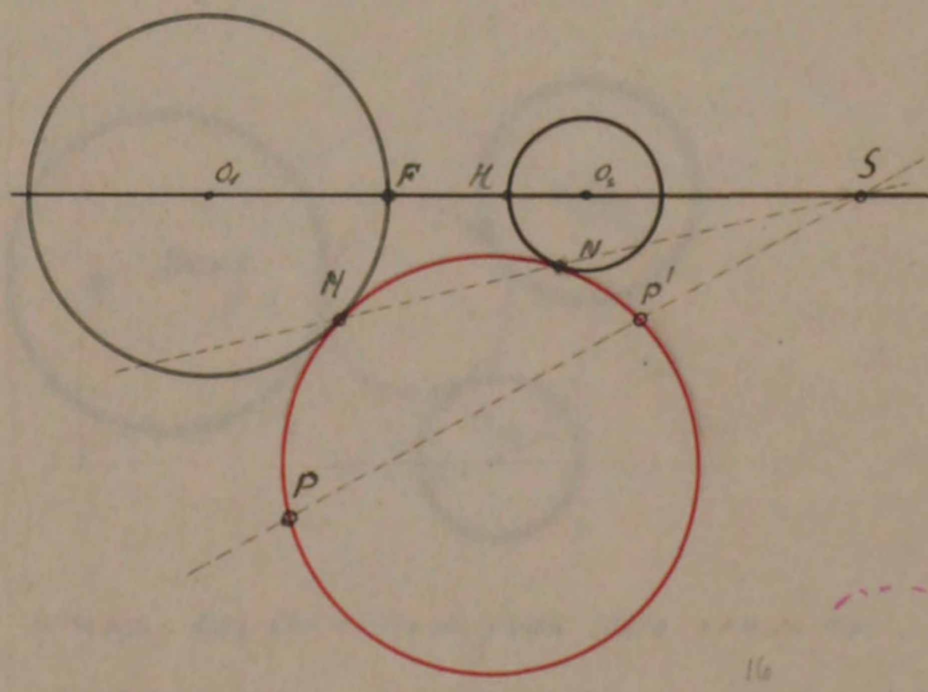
Kā tiešu secinājumu no tikko aplūkotās teor. un no teoremas par homologu punktu sakaru ar taisņu virzienu, kas šos punktus savieno ar atbilst. riņķu centriem, dabujam teoremu:

Ja pie diviem pastāvīgiem riņķiem pieskaras trešais riņķis, kas savu stāvokli var mainīt, tad neatkarīgi no tam, vai šis riņķis skaras abiem dotiem ar ēji, vai ietver abus iekšpusē, vai arī vienu ietver iekšpusē un otram skaras no ārpuses — riņķu skaršanās punkti ir antihomologi punkti attiec uz doto riņķu ārējo vai iekšējo līdzības centru.

Iepriekšējā lap. pusē pievestā zīmējumā riņķa 1. punkti A_1 un B_1, riņķa 2. punkti E_1 un F_2 un riņķa 3. punkti C_1 un D_2 ir antihomologi punkti, jo viņi ik pa diviem guļ uz stara kas iet caur doto riņķu līdz. centru, bet rad. kas tos savieno ar atbilst. riņķu centriem nav paraleli savā starpā. (antihom. punktu definicija). Punkti C_1 un D_2 ir antihom. punkti attiec uz iekšējo līdzības centru.

Atgriezīsimies tagad pie Apolonija problemas un aplūkosim atlikušos IX un X. gadījumus

IX. Konstruēt riņķi, kas iet caur doto punktu un skaras diviem dotiem riņķiem.



Analīze: Doto punktu apzīmesim ar P. Pieņemsim ka riņķis, kas izpilda minētās prasības ir atrasts. Apzīmesim riņķa pieskaršanās punktus dotiem riņķiem ar M un N. Vilksim caur šiem punktiem taisni. Kā jau zināms, šī taisne krusto centru līniju ārējā lidzības centrā S. Savienosim S ar doto punktu P un šīs taisnes un mekl. riņķa centru apzīmēsim ar P'. Pamatojoties uz teorēmu par sekantem, tagad varam rakstīt, ka

$$SN \cdot SM = SP' \cdot SP,$$

un pamatojoties uz teoremu par antihomologiem punktiem, ka

$$SN \cdot SM = SH \cdot SF. \qquad \text{Kā sekas dabujam sakarību}$$

$$SP' \cdot SP = SH \cdot SF.$$

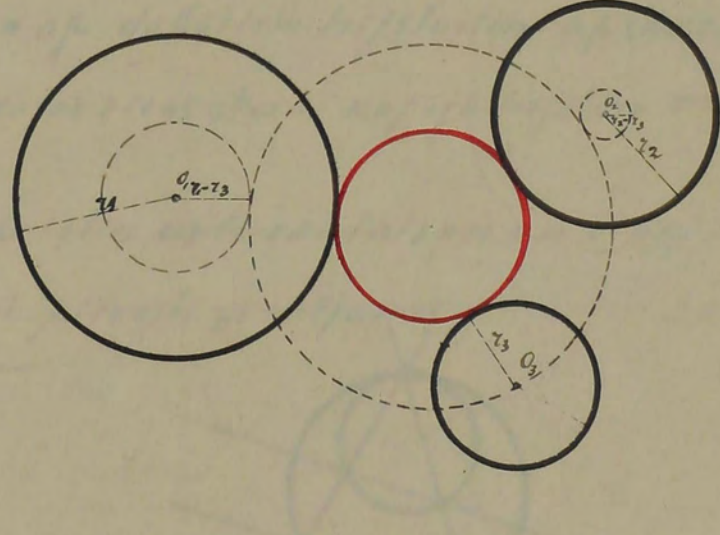
Tas nozīme ka punkti P', P, H un F atrodas uz viena riņķa. Punkti P, H un F ir zināmi, tā tad punktu P' viegli atrast. Viņš atrodas uz stara SP un ir šī stara un riņķa ejoša caur punktiem P, H un F krustošanās pkts. Ja punkts P' ir zināms, atliek konstruēt riņķi kas iet caur punktiem P, P' un skaras kaut kuram no dotiem riņķiem. Tā IX. uzd. ir novests uz V. Izdarot konstrukciju dabūsim divus riņķus, kas padodas uzliktiem noteik.

Izlietojot arī iekšējo līdzības centru (izvēloties mekl. riņķi tā, lai viņš vienu doto riņķi ietver iekšpusē un otram skaras no ārienes), dabūsim uzdevumam vēl divus atrisinājumus. Tā tad IX uzdev. ir 4 atrisin.

X. Konstruēt riņķi kas skaras trīs dotiem riņķiem.

Ņemsim trīs dažāda lieluma riņķus, kuru centri atrodas punktos O_1, O_2, O_3 un kuru rad. līdzinās r_1, r_2, r_3.

Analizēsim. – Pieņemsim ka meklētais riņķis ir atrasts. Palielināsim viņa rad. par mazakā dotā riņķa rad. r_3. Tā dabujam palīga riņķi, kas iet caur punktu O_3 un skaras diviem palīga riņķiem, kuru rad. ir $r_1 - r_3$ un $r_2 - r_3$. No tā ir redzams, ka



meklējamo riņķi varam dabūt no riņķa, kas iet caur mazākā dotā riņķa centru O_3 un skaras pie diviem riņķiem, kuru rad. līdz. $r_1 - r_3$ un $r_2 - r_3$ – ja šā riņķa rad. samazina par r_3, par mazāka dotā riņķa rad. r_3. Ar to šā uzdevuma atrisin. ir novesta uz iepriekšē-jā (IX) uzder. atrisin. — konstruēt riņķi, kas iet caur doto punktu un skaras pie diviem dotiem riņķiem.

X uzder. pavisam ir 8 atrisinājumi (viens riņķis kas skaras visiem dotiem riņķ. no arpuses, viens kas ietver visus iekšpusē, trīs kas pēc kārtas ietver vienu doto iekšpuse un atlikušiem diviem skaras no arpuses, trīs kas pēc kārtas ietver divus dotos iekšpusē un atlikušam skaras no arpuses). Izvērlolies par atrastiem dažādus meklējamos riņķus un izdarot analizi, redzēsim ka visus mekl. riņķus var dabūt no riņķiem kas iet caur mazākā dotā riņķa centru O_3 un skara pie diviem riņķiem, kuru rad. var būt $r_1 - r_3$ vai $r_1 + r_3$ un $r_2 - r_3$ vai $r_2 + r_3$ — jašo riņķu rad. pamazina vai palielina par r_3.

Tādā ceļā esam atrisinājuši Apolonija problemu ciklu ar elementarās geometrijas paņēmieniem.

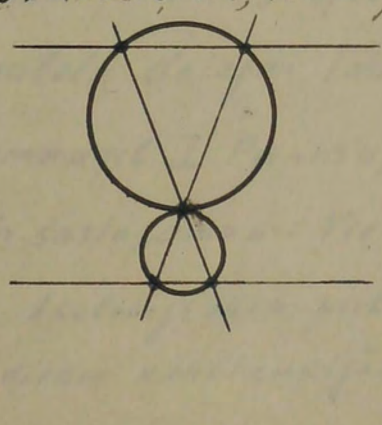
Franču geometrs F. Vieta (kurš tiek uzskatīts par algebras tēvu) Apolonija problemu atrisina citādi, izlietojot dažas Papus'a lemmas.

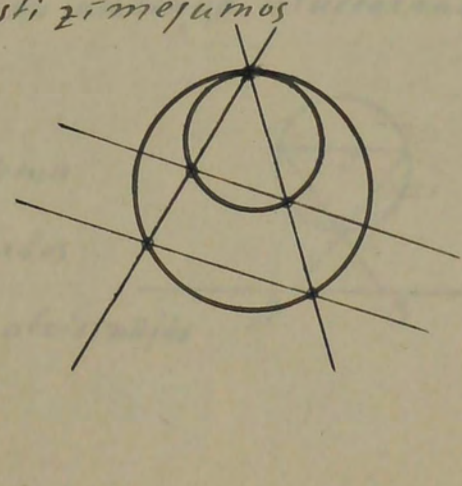
Apskatīsim Papus'a lemmas, kuras stāv sakarā ar Ap. problemas atrisināš. Vispirms apstāsimies pie lemmas, kura skan:

tiešā — Ja ņem divus riņķus, kuri pieskaras viens otram un caur skaršanās punktu velk divus starus, tad hordas kas savieno šo staru un riņķu krustošanās punktus ir paralelas savā starpā.

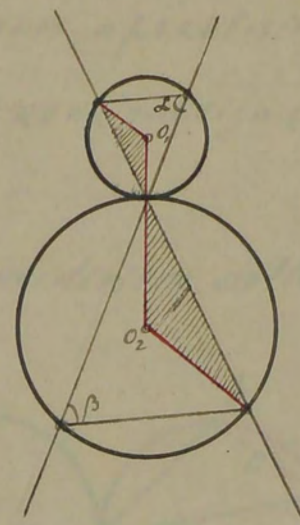
apgriestā — Ja ir dotas divas paralelas taisnes, kuras tiek krustotas ar divām slīpām un ap dabūtiem trijsturiem aprakstīti riņķi, tad šie riņķi skaras viens otram kopējā trijstūru virsotnē.

Šis lemmas ir pareizas, neskatoties uz to, vai taisnes un riņķi ieņem vienu vai otru no stāvokļiem, kuri pievesti zīmējumos





Tiešās lemmas pierādījums.–Savienojam abu riņķu centrus vienu ar otru. Tad savienojam (šo riņķu) centrus ar riņķu un viena un tā paša stara krustošanās punktiem. Tā dabujam divus trijsturus (zīm. iesvītrotie trijst.) kuriem visi atbilstošie leņķi ir vienādi. No tā viegli slēgt, ka arī leņķi α un β ir vienādi. Bet tā kā $\alpha=\beta$, hordas, kas savieno caur skaršanās punktu ejošu staru un riņķu krustošanās punktus, ir paralelas savā starpā.



19

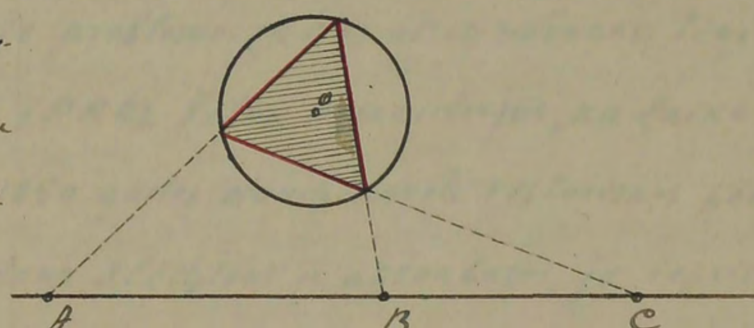
(Viegli pierādīt, ka šī lemma ir pareiza arī gadījumā, ja lielākais riņķis mazako ietver)

Apgriezto lemmu pierādīt pašiem.

– Aleksandrijas geometra Papus'a sacerējumi ir drošākie avoti, kas sniedz ziņas par to zinātnieku darbiem un metodēm, kas dzīvojuši pirms viņa (Papus'a raksti arī liek domāt, ka, kautgan Vieta centies Apolonija problemu atrisināt tā pat kā Apolon. pats – Vietas atrisinājumi tomēr neatbilst grieķu atrisinājumiem). Savos rakstos Papus atsaucas uz lemmu (problēmu):

Dots riņķis, taisne un uz šīs taisnes trīs punkti A, B un C. Dotā riņķī jāiezīmē trijstūris tā, lai katras viņa malas pagarinājums iet caur vienu no dotiem punktiem.

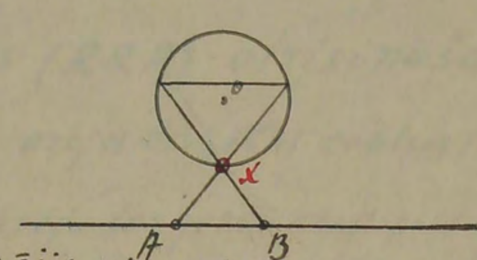
Šī ir slavenā 117. lemma (pēc Papus'a numeracijas) jeb II. Papus'a problema. Viņu var atrisināt pamatojoties uz otru vieglāku, kuras saturs izsakas:



20

Dots riņķis, taisne un uz šīs taisnes divi punkti A un B. Atrast uz dotā riņķa tādu punktu x, lai horda kas, savieno caur šo punktu un punktiem A un B ejošu taišņu un riņķa krustošanās punktus, būtu paralela dotajai taisnei

Tā ir 105-108 lemma jeb I Papus'a problema. Šī pēdējā lemma ir sastopama arī Vietas darbos. Pēc Zeuthen'a domām Apolonijs savu problēmu atrisinājis balstoties uz šām divām konstrukcijām.

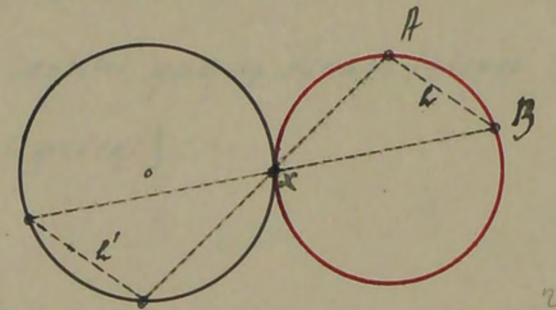


21

Pirms stājamies pie abu pēdējo lemmu pierādīšanas, apskatīsim kādā sakarā stāv četras minētas Papus'a lemmas ar riņķu konstrukciju (Apolonija problemas atrisināšanu).

Ņemsim V. gadījumu – konstruēt riņķi, kas iet caur diviem dotiem punktiem un skaras dotam riņķim.

Pieņemsim ka meklētais riņķis ir jau konstruēts. Caur pieskaršanās punktu x un punktiem A un B vēlksim taisnes. Savienojot taišņu un riņķu krustošanās punktus dabujam hordas



h un h'. Uz pirmās aplūkotās Papusa lemmas pamata $h \parallel h'$. Tā uzdevuma atrisināšana ir novesta uz 105–108 lemmas atrisināšanu – uz dotā riņķa atrast punktu x, caur kuru un caur dot. punktiem A un B ejošu taišņu un doto riņķu krustoš. punktus savienojošas hordas ir paralelas; jo šis punkts x ir dotā un meklejamā riņķa skaršanās punkts. Zinot punktu x, atliek konstruēt riņķi, kas iet caur trīs dotiem punktiem.

Ap jautājumu, kā minētās lemmas izlietot Apolonija problemas (RRR) atrisināšanai, ir patērēts ļoti daudz pūļu. Angļu geometrs Simsons, kurš dzīvoja 18 g.s., savos memuaros 1734. g. pavasarī raksta, ka beidzot pēc ilgu gadu pūlēm viņam izdevies atrast, kā 117. lemmu pielietot pie problemas (RRR) atrisināšanas. Viņš atrod, ka vispirms ir atrisināta problēma (PRR). Vēlāk noskaidrojās, ka laikam Simsona slēdzieni nava pareizi. 1750–1850 gados daudz darīts vēsturiskos pētījumos. Šos gados arī noskaidrots, ka Simsona slēdzieni ir apšaubami, jo iepriekšējā Papusa grāmatā ir atrisinātas problēmas (PRR) un (RRR) un tikai nākošājā aplūkota 117. lemma. Italietis Scorza 1819 gadā beidzot atradis, kāds sakars šai lemmai ar riņķu problemu. Ka Scorza slēdzieni ir pareizi, tam piekrīt arī vēsturnieks Zenthen's (Kopenhagenā), bet mēs tomēr to tā nevaram apgalvot.

117. lemmas sakars ar problemas (RRR) atrisināšanu.

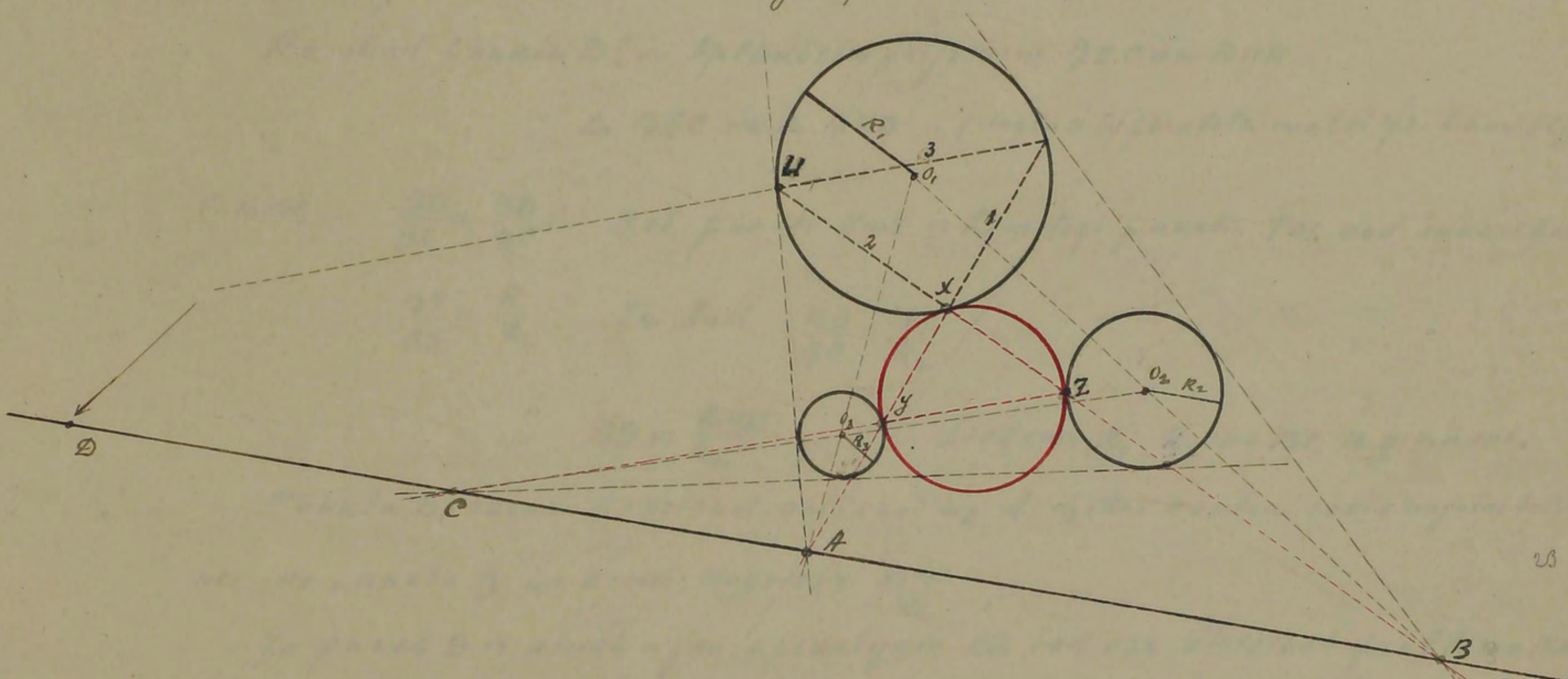
Ņemam trīs riņķus. Atrodam šo riņķu ārējos līdzības centrus (t.i. – ņemam ik pa diviem riņķiem un atrodam viņu kopīgo ārējo tangenšu krust. punkt. ar centru līnijām)

Visi trīs ārējie līdzības centri guļ uz vienas taisnes [Ja ir doti trīs riņķi, viņiem kopīgi ņemtiem ir 6 līdzības centri, 3 iekšējie un 3 ārējie. Šos centrus atrodam parastā ceļā ņemot riņķus ik pa diviem kopā un konstr. viņu kopīgās iekš. un ārējās tangentes. Attiecībā uz trīs kopīgi ņemtu riņķu līdzības centriem vēlāk pierādīsim teoremu:

1) Visi trīs ārējie līdzības centri guļ uz vienas taisnes

2) Ik pa divi iekšējie un viens ārējais līdzības centri guļ uz vienas taisnes

Šo līdzības centru īpašību laikam jau pazinuši arī grieķi]



Tad pieņemam ka ir atrasts meklējamais riņķis, kas visiem dotiem pieskaras ārēji. Skaršanās punktus apzīmējam ar x, y un z. – Savienojam pieskaršanās punktus. Uz 14. l. p. pierādītas teoremas pamata skaršanās punktus savienojošu hordu xy, xz un zy pagarinājumi iet caur atbilstošiem ārējiem līdzības centriem A, B un C. Tā meklējamā riņķī dabujam trijstūri, kura malu pagarinājumi iet caur trīs dotiem punktiem (doto riņķu ārējiem līdz. centriem) uz dotas taisnes (ārējos līdz. cent. savien. t.)

Bet sarkano riņķi pašu vēl neprotam konstruēt. Tamdēļ mēģināsim kādā no dotiem riņķiem konstruēt trijstūri, kura malas izpilda augstāk minētos noteikum. – Pagarinam sarkana trijstūra malas xy un xz lielākajā dotaja riņķī un tā dabujam malas 1. un 2. Savienojam šo malu galus un dabujam malu 3. Apskatīsim, vai arī šās 3. malas pagarinājums neiet caur kādu dotu punktu D – t. i. vai tādu punktu D pamatojoties uz dotiem noteikumiem nevar atrast? Ja uz taisnes A13 var ātri atrast punktu D caur, kuru iet lielā riņķī iezīmētā trijstūra 3. malas pagarinājums, tad izlietojot 117. lemmu Apolonija problemu (RRR) viegli varētu atrisināt. Atliktu lielākajā dotajā riņķī konstruēt trijstūri, kuŗa katras malas pagarinājums iet caur vienu no dotiem punktiem A, B un D uz dotas taisnes (doto riņķu līdzības ass). Ja šis trijstūris būtu konstruēts, pagarinot viņa malas 1. un 2. uz punktu A un B pusi dabūtu šo malu un doto riņķu krustošanās punktus x, y un z, kas ir meklējamā un doto riņķu skaršanās punkti. Velkot riņķi kas iet caur punktiem x, y un z dabūtu meklējamo riņķi.

Kā atrast punktu D? — Aplūkosim trijstūrus BZC un BUD.

$\triangle BZC \sim \triangle BUD$ (mala s ir paralela malai yz - t.i. arī $ZC \parallel UD$)

Tamdēļ $\frac{BU}{BZ} = \frac{BD}{BC}$. Bet punkti U un z ir homologi punkti. Tas dod sakarību

$\frac{BU}{BZ} = \frac{R_1}{R_2}$. Tā tad $\frac{BD}{BC} = \frac{R_1}{R_2}$ un

$$BD = \frac{R_1 \cdot BC}{R_2}.$$ Lielumi R_1, R_2 un BC ir zināmi.

Punktu D varam konstruēt atliekot uz līdzības centrus savienojošas taisnes no punkta B pa kreisi nogriezni $\frac{R_1 BC}{R_2}$.

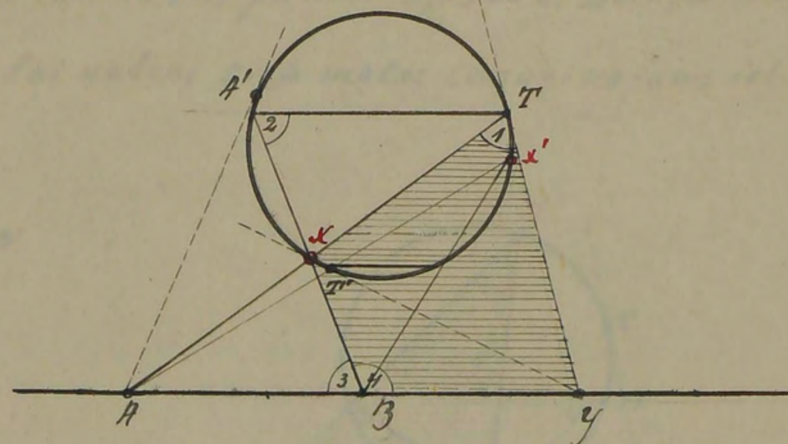
Ja punkts D ir atrasts — jau apskatījam kā tad var atrisināt problemu (RRR) izlietojot 117. Papusa lemmu.

Izlietojot arī līnijas, uz kurām atrodas ik pa divi iekšējie un viens ārējais doto riņķu līdzības centri, ar 117. lemmas palīdzību varam dabūt aplūkotai Ap. problēmai visus 8 atrisinājumus.

Tā tad lai atrisinātu problemu (RRR) — jāprot atrisināt II. Papus'a problēmu (t.i. — 117 lemmu). Bet lai atrisinātu II. Pap. problemu, savu kārt iepriekš jāprot atrisināt I. Papusa problemu (t.i. — 105-108 lemmu)

Atrisināsim I Papus'a problemu (105-108 lemmu):

Dots riņķis, taisne un uz šīs taisnes divi punkti A un B. Atrast uz dotā riņķa tādu punktu x, lai korda, kas savieno caur šo punktu un punktiem A un B ejošu taisņu un riņķa krustošanās punktus, būtu paralela dotajai taisnei



Pieņemsim, ka meklējamais punkts ir atrasts. Ņemsim palīga līniju – tangenti hordas gala punktā T (varam ņemt tang. pie riņķa arī otrā hordas gala punktā). Analizēsim leņķus, kuŗus vienkāršības dēļ apzīmēsim ar cipariem.

$\measuredangle 1 = \measuredangle 2$, jo abi tiek mēroti ar vienu loku.

$\measuredangle 2 = \measuredangle 3$, kā leņķi pie paralelām līnijām, kuŗas tiek krustotas ar slīpni.

Tamdēļ $\measuredangle 1 = \measuredangle 2 = \measuredangle 3$. Tas dod, ka

$$\measuredangle 1 + \measuredangle 4 = 180^\circ, \quad \text{jo} \quad \measuredangle 3 + \measuredangle 4 = 180^\circ, \text{ bet } \measuredangle 3 = \measuredangle 1$$

Tā tad ap iestrīpoto četrstūri var aprakstīt riņķi, jo divu pretim guļošo leņķu summa ir 180°. Tas savukārt dod iespēju pielietot teorēmu par sekantēm t. i. –

$$Ax \cdot AT' = AB \cdot Ay.$$

Vilksim vēl no punkta A pret doto riņķi tangenti, kuŗas skaršanās punktu apzīmēsim ar A'. Uz pazīstamas teoremas pamata tagad varam rakstīt, ka

$$Ax \cdot AT' = \overline{AA'}^2, \text{ kas dod, ka}$$

$$AB \cdot Ay = \overline{AA'}^2,$$

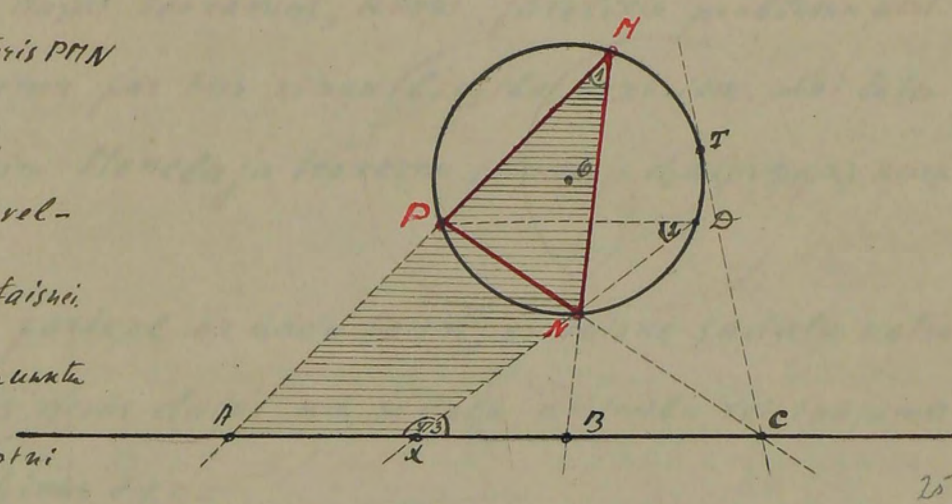
$$Ay = \frac{\overline{AA'}^2}{AB}.$$

AA' un AB zināmi lielumi, tā tad arī Ay ir zināms. – Punktu y (kurā punktā T pie riņķa vilkta pieskare krusto doto līniju) varam viegli konstruēt. Zinot y un velkot no viņa pieskari pret doto riņķi, dabūjam punktu T, caur kuru velkot hordu paraleli dotajai taisnei un savienojot hordas gala punktu ar A atrodam meklēto punktu x, jo viņš ir riņķa un stara AT' krustošanās punkts. Tā kā no punkta y pret riņķi var vilkt divas pieskares, dabūjam vēl otru skaršanās punktu T' un līdzarto arī otru hordu paralelu dotajai taisnei un otru punktu x', kas atbilst dotiem noteikumiem. Tā tad I. Papusa problemai ir divi atrisinājumi. – Šis ir paša Papusa atrisināšanas veids.

Apskatīsimies, kā ar šo problemu (105-108 lemmu) izpalīdzeties II Pap. problemas (117 lemmas) atrisināšanā. Ka jau zināms, šīs problemas saturs izsakās:

Dots riņķis, taisne un uz šīs taisnes trīs punkti A, B un C. Dotajā riņķī konstruēt tādu trijstūri, lai katras viņa malas pagarinājums iet caur vienu no dotiem punktiem.

Pieņemsim kā meklētais trijstūris PMN ir konstruēts un izdarīsim analīzi.



Caur meklēj. trijstūra virsotni P velkam līniju PD paralēli dotajai taisnei. Šīs taisnes un riņķa krustošanās punktu D savienojam ar mekl. trijst. virsotni N. Dabūtās līnijas un dotās taisnes krustošanās punktu apzīm. ar x. Tad apskatam ar cipariem apvilktos leņķus.

$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ (jo šie abi leņķi tiek mēroti ar vienu loku)

$\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3$ (kā leņķi pie paralēlēm, krustotām ar slīpnēm). Tā tad

$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$, $\sphericalangle 4 + \sphericalangle 3 = 180°$, tā tad $\sphericalangle 4 + \sphericalangle 1 = 180°$.

Tā kā četrstūra AMNX pretējo leņķu summa ir 180°, šim četrstūrim var apvilkt riņķi. Tamdēļ varam atkal lietot sekošu likumu un rakstīt, ka

$$CP.CN = CA.CX$$

Velkam vēl no punkta C dotam riņķim tangenti, kura skaras pie riņķa punktā T, un dabūjam otru sakarību

$$CT^2 = CP.CN.$$ No šim abām sak. dabūjam, ka

$$CT^2 = CA.CX,$$

$$CX = \frac{CT^2}{CA}.$$

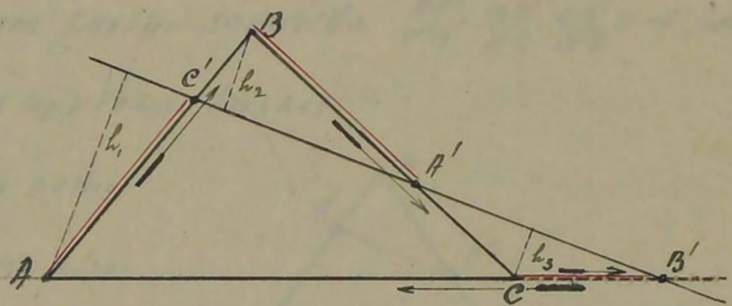
Tā tad pamatojoties uz dotajiem noteikumiem varam atrast (tādu) punktu X uz dotās taisnes. Atrodot uz dotā riņķa tādu punktu N, caur kuru un caur punktiem X un C vilktie stari krusto doto riņķi punktos, kurus savienojot dabūjam hordu paralēlu dotai taisnei — un velkot caur šo punktu un dotiem punktiem C un B starus, dabūjam meklējamā trijstūra pārējās divas virsotnes P un M. Tā tad lai varētu konstruēt meklējamo trijstūri, jāatrisina I Papusa problēma (105-108 lemmas; t.i. 117 lemma balstas uz 105-108 lemmu.

19. g. s. metodes.

Ar šām metodēm daudzas vecu laiku problemas var daudz vienkāršak atrisināt. – Apskatīsim atkal iepriekš dažas teoremas, kuras jāizlieto problemu atrisināšanā. Sevišķi svarīga ir teorema par trīs riņķu līdzības centriem. Lai šo teoremu pierādītu, iepriekš pierādīsim Menelaja teoremu (Menelajs dzīvojis 1. g. s.) kura skan:

Ja doto trijstūri ABC pāršķeļ ar kādu taisni, šī taisne sadala katru trijstūra malu tādās divās daļās, ka šo daļu attiecību reizinājuma absolutā vērtība līdzinās 1 t. i. –

$$\left|\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\right|=1$$



26.

Pareizi ir teikt, ka

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=-1,$$ jo ņemot

vērā arī virzienus, dabujam ka

$\frac{AC'}{C'B}=+$ (AC' un $C'B$ ņemti vienā virzienā)

$\frac{BA'}{A'C}=+$ (BA' un $A'C$ " " ")

$\frac{CB'}{B'A}=-$ (CB' un $B'A$ " pretejos ")

Elementarā geometrijā parasti virzienus vērā neņem un Menelaja teoremu formulē:

Trijstūri pāršķeļot ar taisni rodas 6 nogriežņi. To trīs nogriežņu reizinājums, kam nav kopīgu galu, ir vienāds ar pārējo trīs nogriežņu reizinājumu.

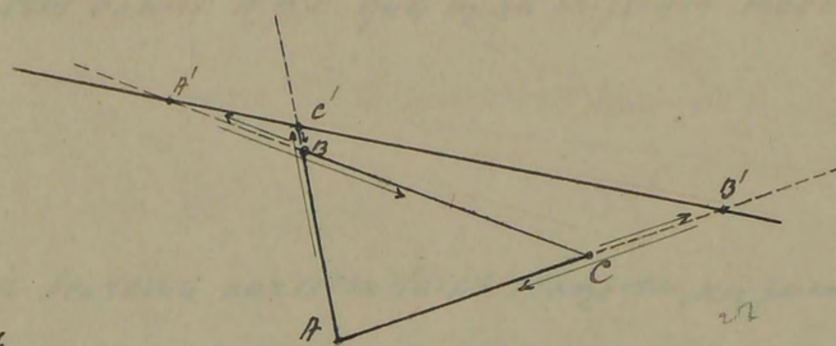
Pāriesim pie teoremas pierādīšanas. – Vilksim no trijstūra virsotnēm A, B, C perpendikulus pret šķelošo taisni un apzīm. viņus ar h_1, h_2, h_3. Uz trijstūru līdzības pamata varam rakstīt, ka

$$\frac{AC'}{C'B}=\frac{h_1}{h_2}\;;\quad\frac{BA'}{A'C}=\frac{h_2}{h_3}\;;\quad\frac{CB'}{B'A}=-\frac{h_3}{h_1}\,.$$

(~~Uzskatot šos lielumus visus kā aritmetikas lielumus un~~) visas trīs sakarības sareizinot dabujam, ka

$$\left|\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\right|=1$$ un ar to teorema ir pierādīta.

Pašiem pierādīt, ka šī teorēma ir pareiza arī gadījumā-ja šķelošā taisne nekrusto trijstūra malas, bet tikai malu pagarinājumus (t.i.- ja šī taisne iet ārpus trijstūra), kā pievestā zīmējumā.

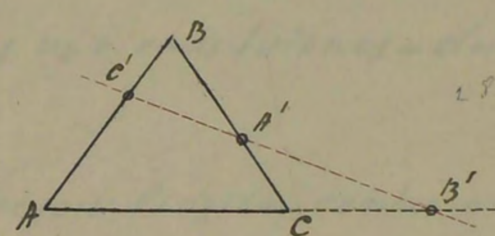


27

Pareiza ir arī apgrieztā teorema:

Ja dots trijstūris (ABC) un uz divām viņa malām un trešās malas pagarinājuma ņemti punkti (C'A'B') un ja šie punkti sadala trijstūrā malas tādos nogriežņos, starp kuriem pastāv sakarība $\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=-1$, tad ņemtie 3 punkti (C', A', B') atrodas uz vienas taisnes.

Arī šo apgriezto teoremu pierādīt pašiem ņemot arī gadījumu, kad trīs dotie punkti (C', A', B') atrodas uz dotā trijstūra (ABC) malu pagarinājuma.

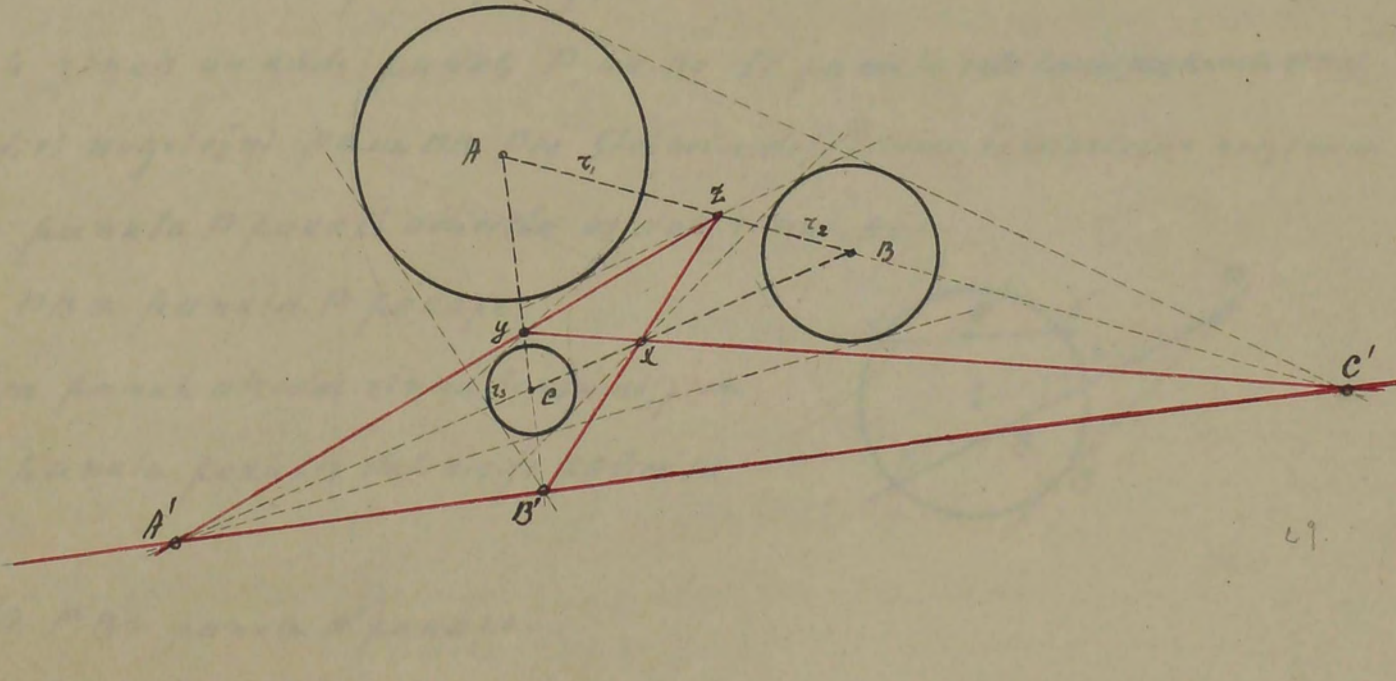


28

Svarīgāka ir Menelaja apgrieztā teorema. Viņu izlieto gadījumos, kad jāpierāda, ka trīs punkti atrodas uz vienas taisnes.— Izlietosim šo apgriezto teoremu un pierādīsim teoremu:

Trīs riņķu ārējie vai arī ikdivi iekšējie un viens ārejais līdzības centri atrodas uz vienas taisnes.

- Šīs taisnes sauc par riņķu līdzības jeb homotetijas asīm. Ik katriem trīs riņķiem ir četras līdzības asis, kuras veido pilnīgo četrmali.



29

Ņemsim trīs riņķus, kuru centri atrodas punktos A, B un C un radiusi ir r_1, r_2, r_3. Atradīsim šo riņķu ārējos līdzības centrus A', B', C' un iekšējos līdz. centrus x, y, z. Tad ņemsim centru trijstūri ABC. Ārējie līdzības centri A'B'C' guļ uz šā trijstūra malu pagarinājuma. Mēģināsim pierādīt, ka

$$\left| \frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} \right| = 1$$

Tad pamatojoties uz apgriezto Menelaja teorēmu varēsim taisīt slēdzienu, ka punkti A', B' un C' guļ uz vienas taisnes. – Tā kā šie punkti ir riņķu ārējie līdzības centri, varam rakstīt, ka

$$\left|\frac{AB'}{B'C}\right| = \frac{r_1}{r_3} \; ; \left|\frac{CA'}{A'B}\right| = \frac{r_3}{r_2} \; ; \left|\frac{BC'}{C'A}\right| = \frac{r_2}{r_1}$$

Šos nolīdzinājumus sareizinot tiešām dabūjam augstāk doto sakarību. – Ar to ir pierādīts ka visi trīs ārējie līdzības centri atrodas uz vienas taisnes – doto riņķa homotetijas ass.

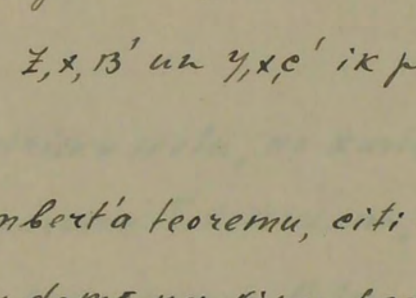
Pašiem pierādīt ka ik divi iekšējie un viens ārējais līdzības centrs arī atrodas uz vienas taisnes (t. i. – ka punkti z, y, A'; z, x, B' un y, x, C' ik pa trīs ņemti atrodas uz vienas taisnes).

Daži vēsturnieki šo teorēmu uzskata par D'Alamberta teorēmu, citi akal par Mongea teorēmu. Kāds amerikaņu vēsturnieks domā, ka šīņu pazinuši jau senie grieķi. Vēlāk redzēsim, kā ar šās teorēmas palīdzību var atrisināt Apolonija problēmu. – Tagad noskaidrosim vēl dažus jēdzienus. Vispirms

Punkta pakāpes jēdzienu.

Ja ir dots riņķis un kāds punkts P, un no šī punkta velk taisni, kas krusto riņķi, tad rodas divi nogriežņi PA un PB. Pēc Steiner'a definicijas šo nogriežņu reizinājumu sauc par punkta P pakāpi attiecībā uz doto riņķi, t. i. –

PA. PB = punkta P pakāpe.



Gadījumā ja punkts atrodas riņķa iekšpusē, piem. stāvoklī P', punkta pakāpes definicija paliek tā pati, t. i. –

P'A'. P'B' = punkta P' pakāpe.

Riņķa ārējiem punktiem pakāpe ir pozitiva;

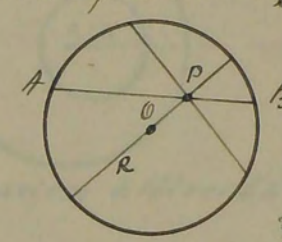
Riņķa iekšējiem punktiem pakāpe ir negativa.

Punktiem, kas atrodas uz riņķa, pakāpe ir 0.

Ārējā punkta pakāpe ir vienāda ar no šī punkta pret riņķi vilktas tangentes kvadratu – t. i.

$$PA \cdot PB = \overline{PC}^2 \; ; \text{ vai arī } \; PA \cdot PB = \overline{OP}^2 - R^2$$

Apskatīsim, kāda ir riņķa iekšējā punkta pakāpe? – Caur punktu P riņķa iekšpusē varam vilkt dažādas hordas, bet, kā zināms, visu šo hordu nogriežņu reizinājums ir vienāds ar diametra (ejošu caur P) nogriežņu reizinājumu. Tamdēļ varam rakstīt, ka



31.

$$PA \cdot PB = (R+OP)(R-OP) = R^2 - \overline{OP}^2$$

Tā tad riņķa iekšējā punkta pakāpe ir vienāda ar radiusa kvadrata un šā punkta atstatuma no riņķa centra kvadrata diferencei.

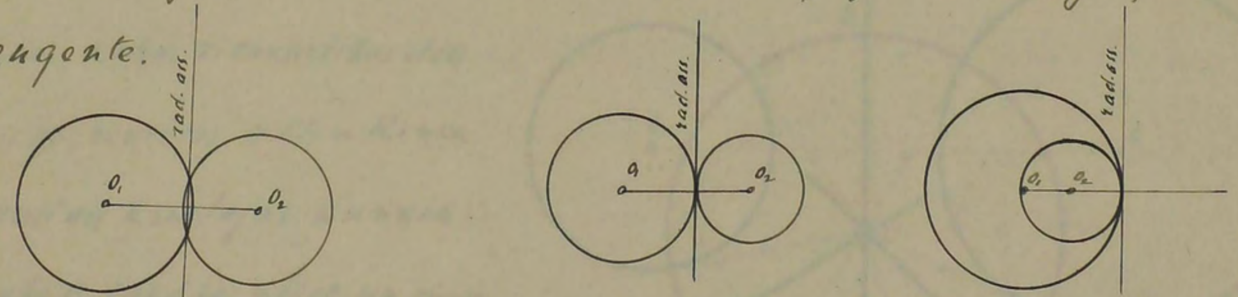
– Apstāsimies vēl drusku pie divu riņķa

radikalās ass jēdziena.

Par divu riņķu radikalo asi sauc punktu geometrisko vietu, no kuriem pret abiem dotiem riņķiem vilktās tangentes ir vienādu garumu. [Nosaukumu „radikalā ass" devis Gaultier ap 1813 g. Steiner's šo geometrisko vietu nosauc „Potenzlinie"; Plücker's — „Hordale"]

Lai ar kādu savstarpēju stāvokli neieņemtu divi riņķi – viņu radikalā ass vienmēr eksistē un ir perpendikularas pret šo riņķu centru līniju.

Ja divi riņķi krustojas, tad viņu radikalā ass ir kopējā horda, ja pieskaras – tad kopējā tangente.



32.

Pašiem pierādīt, ka, gadījumā ja doti divi riņķi, kuri atrodas viens ārpus otra un nesaskaras, tad: 1) radikalā ass ir perpendikulara pret centru līniju

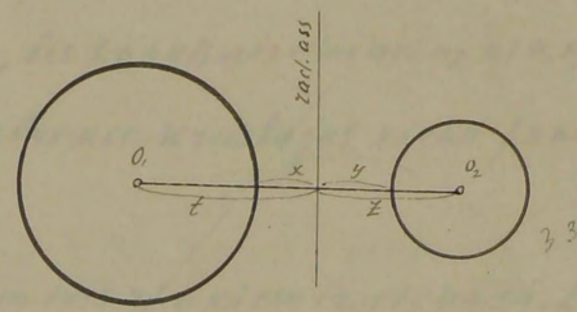
2) radikalā ass ir tuvāk lielākam riņķim, kā mazākam

3) rad. ass ir tuvāk mazākā riņķa centram, kā liel. riņķa centram.

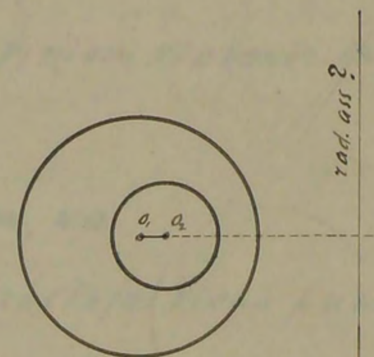
T.i. – pierādīt ka: 1) rad. ass $\perp O_1O_2$

2) $x < y$

3) $z < t$



Bez tam pašiem noskaidrot, kāds ir radikalās ass stāvoklis gadījumā, ja viens riņķis atrodas otra iekšpusē (bet nepieskaras). [Izlietojot simmetrisko atspoguļošanos viegli pierādīt, ka rad. ass atrodas riņķu ārpusē].

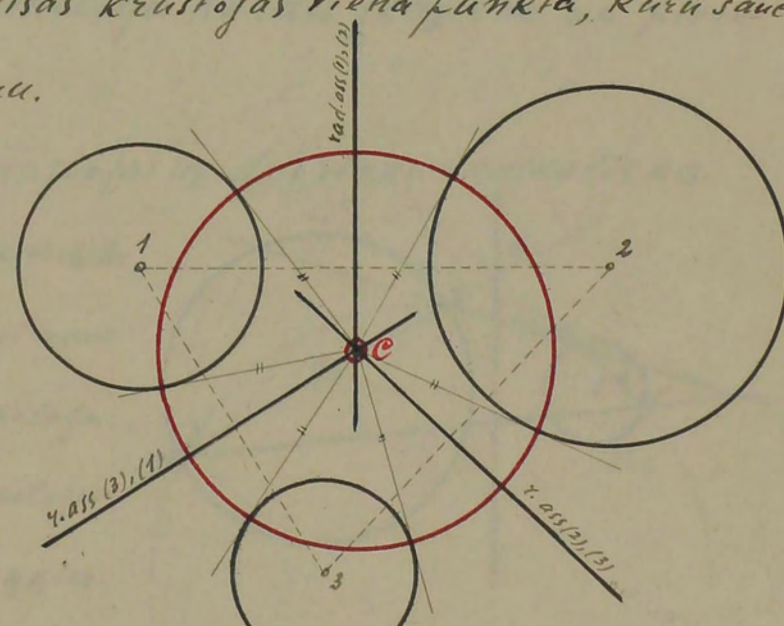


Tagad noskaidrosim, kāda ir to punktu geometriskā vieta, kuriem attiecībā uz abiem dotiem riņķiem ir vienādas pakāpes. – Kā redzējām, ārējā punkta pakāpe ir vienāda ar no šī punkta pret riņķi vilktas tangentes kvadratu. Tā tad meklējamā geometriskā vieta ir to punktu geom. vieta, no kuriem pret abiem riņķiem vilktas tangentes ir ar vienādu garumu, t.i. – šī geometriskā vieta ir doto riņķu radikalā ass. Ja dotie riņķi krustojas, tad šo punktu geom. vieta ir abu riņķu kopīgā horda, ja pieskaras, tad kopīgā tangente u.t.t. Izejot no šā viedokļa, radikalai asij varam dot sekojošu definiciju:

Radikalā ass ir to punktu geometriskā vieta, kuru pakāpes attiecībā uz abiem dotiem riņķiem ir vienādas.

Trīs riņķiem kopīgi ņemtiem ir trīs radikalās asis, neatkarīgi no viņu savstarpēja stāvokļa. – Pierādīsim, ka

Trīs riņķu radikalās asis visas krustojas vienā punktā, kuru sauc par šo riņķu radikalo centru.

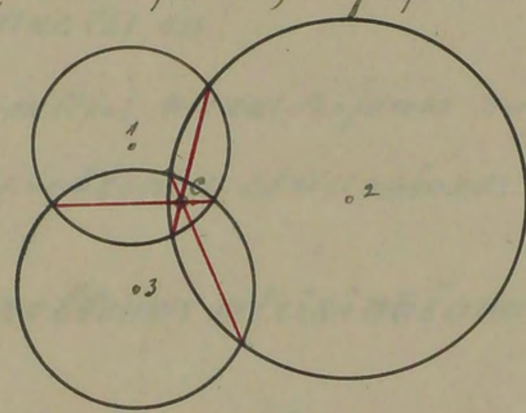


Ņemsim 3 riņķus, kurus vienkāršības dēļ nosauksim: riņķis (1), riņķis (2) u.t.t. – Riņķu (1) un (2), un (2) un (3) rad. ass krustojas punktā C. Tamdēļ punkta C pakāpe attiec. uz riņķi (1) ir vienāda ar viņa pak. attiec. uz riņķi (2), ir vienāda ar viņa pak. attiec. uz riņķi (3). Tā kā divu radik. asu (1),(2) un (2),(3) krustošanās punkta C pakāpe attiecībā uz riņķiem (1) un (3) ir vienāda, šis punkts atrodas arī uz riņķa (1) un (3) radikalās ass (1),(3). Tā tad visas trīs radikalās ass krustojas vienā punktā-radikalā centrā.

Radikalā centra pakāpe attiecībā uz visiem trīs riņķiem ir vienāda. Lai arī kāds nebūtu trīs doto riņķu savstarpējais stāvoklis – viņiem vienmēr eksistē viens noteikts radikalais centrs.

Pamatojoties uz tikko pierādīto, varam taisīt slēdzienu, ka

Trīs riņķu (ņemtu ik pa divi) kopīgās hordas krustojas vienā punktā.

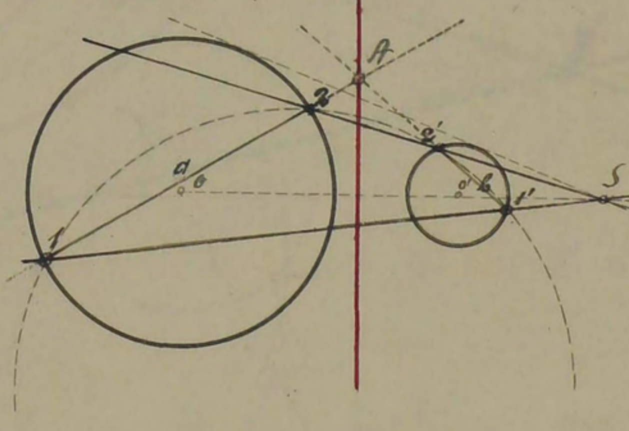


No radikalā centra pret visiem trīs riņķiem vilktās tangentes ir ar vienādu garumu (skat. zīm. 28. l.p.). Velkot riņķi ap radik. centru caur šo tangenšu pieskaršanās punktiem dabujam riņķi, kas ir perpendikulars trīs dotiem riņķiem. Šo riņķi sauc par trīs doto riņķu ortogonalo riņķi.

Trīs riņķiem ir viens ortogonalais riņķis. Diviem riņķiem ir bezgalīgi daudz ortogonalo riņķu.

– Pirms stājamies pie Apolonija problemas atrisināšanas ar jaunlaiku paņēmieniem, noskaidrosim vēl antihomologu hordu jedzienu un pierādīsim teoremu:

Divas antihomologas hordas krustojas uz doto riņķu radikalās ass.



Ņemsim divus riņķus un kaut kuru no viņu līdzības centriem. Piem. ņemsim ārējo līdz. centru S. Vilksim caur S divus starus un sameklēsim divus antihomologu punktu pārus. Piem. izvēlēsimies antihomologus punktus 2, 2' un 1, 1'. Savienosim katram riņķim piederošos punktus un dabusim hordas a un b

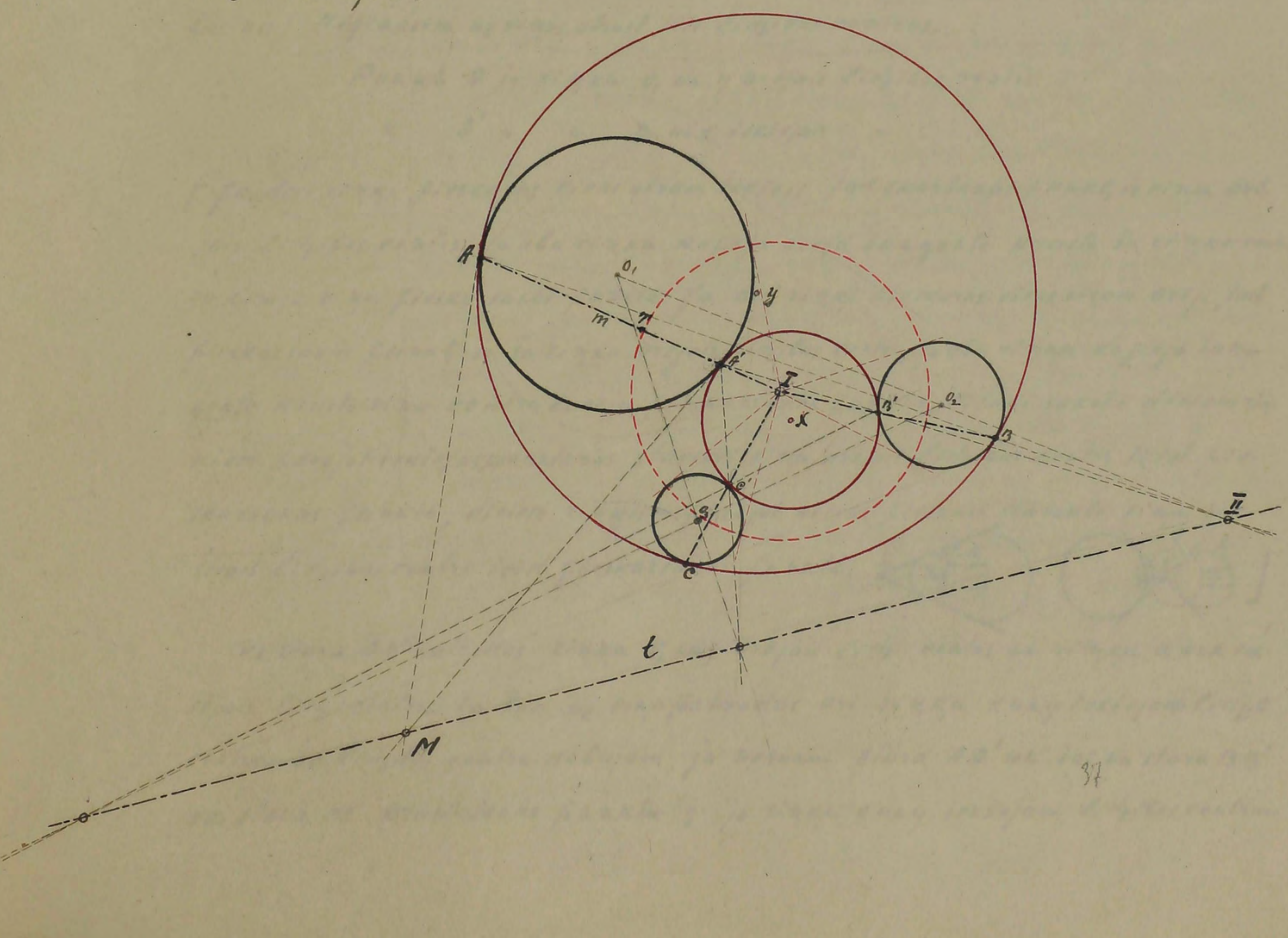
Hordas, kuŗas savieno antihomologus punktus, sauc par antihomologām hordām. - Tā tad hordas a un b ir antihomologas hordas.

Četri antihomologie punkti 1, 1', 2, 2' atrodas uz viena riņķa (pamat. uz kādu iepriekš pierad. teoremu). Velkam caur šiem punktiem palīga riņķi. Horda a ir lielākā dotā un palīga riņķa radikalā ass; horda b ir mazākā dotā un palīga riņķa radikalā ass. Punkts, kurā šīs abas radikalās asis krustojas, atrodas uz abu doto riņķa radikalās ass. Ar to ir pierādīts, ka abas antihomologās hordas krustojas uz doto riņķu radikalās ass.

Visus vajadzīgos iepriekšējos noskaidrojumus nu esam izdarījuši un varam pāriet pie Apolonija problemas atrisināšanas

Apolonija problemas atrisināšana ar Gergonne metodi.

Vispirms atrisināsim problemu (RRR). – Kā jau redzējām, šai problemai ir 8 atrisinājumi.



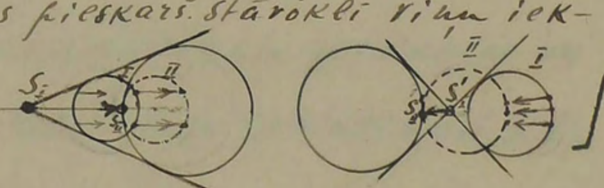
Pieņemsim ka ir atrasti divi atrisinājumi (t.i. viens atrisinājumu pāris) – riņķis, kas skaras visiem dotiem riņķiem no ārpuses un riņķis, kas ietver visus dotos riņķus iekšpusē. [Raksturīgais pie jaunlaiku metodēm: – pieņem par atrastiem uzreiz divus atrisinājumus (vienu atrisin. pāri) un tad analizē. Mēs varējam izvēlēties par atrastiem arī kaut kuru citu no 3 atlikušajiem atrisinājumu pāriem]

Analizēsim tagad atbilstošo zīmējumu (zīm. iepr. lap. p.). – Vienkāršības dēļ nosauksim ~~meklējamo~~ meklējamo mazāko riņķi par riņķi x, lielāko par riņķi y un dotos par riņķiem O_1, O_2, O_3 (riņķus nosaucam tā, kāds ir viņu centru apzīmējums). Meklējamo un doto riņķu pieskaršanās punktus apzīm. ar A, B, C un A', B', C'! – Savienosim punktus A un A' un apskatīsim turāk dabūto taisni AA'! Vai viņa nav kāda mums pazīstama līnija?

Aplūkosim riņķus O_1, x un y. Jau zinām ka trīs riņķu visi ārējie vai arī ir divi iekšējie ~~un~~ un viens ārējais līdzības centri atrodas uz vienas taisnes – šo riņķu līdzības jeb homotetijas ass. Vai arī taisne AA' nav riņķu O_1, x, y līdzības ass? Mēģināsim uz viņas atrast trīs līdzības centrus.

Punkts A ir riņķu O_1 un y ārējais līdzības centrs
" A' " " O_1 un x iekšējais " "

[Ja divi riņķi pieskaras viens otram iekšēji, tad skaršanās punkts ir viņu ārējais līdzības centrs, jo abu riņķu kopējā ārējā tangente krusto šo riņķu centru līniju viņu pieskaršanās punktā. Ja divi riņķi pieskaras viens otram ārēji, tad pieskaršanās punkts ir šo riņķu ārējais līdzības centrs, jo abu riņķu kopējā tangente krusto viņu centru līniju pieskaršanās punktā. Citādi sakot: diviem riņķiem pārejot iekšējā pieskaršanās stāvoklī viņu ārējais līdzības centrs ieiet pieskaršanās punktā; diviem riņķiem pārejot ārējā pieskarš. stāvoklī viņu iekšējais līdzības centrs ieiet pieskaršanās punktā.



]

Uz stara AA' atrodas riņķu O_1 un y ārējais līdz. centrs un riņķu O_1 un x iekšējais līdz. centrs – tā tad uz viņa jāatrodas arī riņķu x un y iekšējam līdzīb. centram. Šo līdzības centru dabujam, ja ņemam stara AA' un vai nu stara BB' vai stara CC' krustošanās punktu; jo riņķu x un y iekšējam līdzības centram jāatrodas kā uz stara AA', tā arī uz stara BB' un CC' t.i. – minētais līdzības centrs atrodas visu šo staru krustošanās punktā. Apzīmesim viņu ar I.

Punkts I ir riņķu x un y iekšējais līdzības centrs.

Apskatīsim tagad, kas šis punkts I ir priekš dotajiem riņķiem. Pamatojoties uz iepriekš pierādītām teorēmām (par trešā riņķa skaršanos diviem dot. riņķiem un par antihom. hordām) dabujam, ka punkti A', B' ir antihomologi punkti uz riņķiem O_1 un O_2; punkti A, B ir antihomologi punkti uz riņķiem O_1 un O_2; taisnes AA' un BB' ir antihomologas hordas un viņu krustošanās punkts I atrodas uz riņķu O_1 un O_2 radikalās ass. To pašu atkārtojot par parējiem diviem doto riņķu pāriem, redzam ka punkts I ir doto riņķu radikalo asu krustošanās punkts. T.i.

Punkts I ir doto riņķu radikalais centrs. – Tatad

Meklejamo riņķu iekšējais līdz. centrs $\equiv$ doto riņķu radikalais centrs.

Meklēsim tagad riņķa x un y radikalo asi. Savienosim punktus A ar B un A' ar B'. Līnijas AB un $A'B'$ ir antihomologas horda riņķos x un y (punkti A, A' (un B, B') ir atihomol. punkti uz riņķiem x, un y tamdēļ, ka šos punktos viņiem skaras riņķis O_1; punkti B, B' ir antih. punkti uz riņķ. x un y tamdēļ, ka šos punktos minetiem riņķiem pieskaras riņķis O_2). Tamdēļ punkts II, kurā krustojas taisnes AB un $A'B'$, atrodas uz riņķu x un y radikalās ass. Bet tam – tā kā punkti A, B un $A'B'$ ir antihomol. punkti uz riņķiem O_1 un O_2, taisnes AB un $A'B'$ iet caur šo riņķu ārējo līdzības centru. Tā tad punkts II atrodas uz doto riņķu līdzības ass (jo ir šo riņķu ārējais līdzības centrs). Aplūkojot vēl abus meklējamo riņķus kopīgi ar diviem atlikušajiem doto riņķu pāriem, redzam ka arī parējie divi doto riņķu arējie līdzības centri sakrīt ar meklējamo riņķu radikalās ass punktiem. T.i. doto riņķu ārējā līdz. ass t sakrīt ar mekl. riņķu radikalo asi. K.t.p.

Doto riņķu ārējā līdz. ass $\equiv$ meklējamo riņķu radikalā ass.

Apskatīsim – vai zinot meklējamo riņķu iekšējo līdzības centru un viņu radikalo asi varam šos riņķus konstruēt? – Ņemsim atkal riņķus O_1, x un y un sameklēsim viņu radikalās asis (riņķiem x un y radik. ass jau ir zināma).

Riņķu O_1 un y radik. ass ir šo riņķu kopīgā tangente t.i. tang. punktā A

Riņķu O_1 un x radik. ass ir šo riņķu kopīgā tang. t.i. tang. punktā A'

Riņķu x un y radik. ass ir doto riņķu ārējā līdzības ass t.i taisne t

Visas šīs radikalās asis krustojas vienā punktā – aplūkojamo riņķu radikalajā centrā – kuru apzīmesim ar M. Apzīmējot līniju AA' ar m, dabujam ka taisne m ir punkta M polare. Tā kā caur punktu M iet līdzības asst, šīs taisnes pols T atrodas uz taisnes m. Ja taisne t ir dota (kā tas šoreiz arī ir, jo viņa ir doto riņķa līdz. ass), viņas polu T mēs protam konstruēt. Kad pols T atrasts, velkot taisni caur punktiem T un I dabujam riņķa O_1 un doto riņķu pieskaršpunktus A un A'. To pašu atkārtojot par riņķiem O_2, x, y un riņķiem O_3, x, y, redzam kā dabūt pieskarš. punktus B, B' un C, C'.

Priekšraksts riņķu x un y konstruēšanai:

1. Jākonstruē doto riņķu radikalais centrs I
2. Jakonstruē doto riņķu ārēja līdzības asst
3. Jakonstruē taisnes t pols T pirmā dotā riņķī O_1, šīs taisnes pols otrā dotā riņķī O_2 un trešā dotā riņķī O_3
4. Jāsavieno pirmā dot. riņķī atrod. pols T ar rad. centru I; šī taisne šķeļ riņķi O_1 pieskaršanās punktos A un A'. Jasavieno riņķī O_2 atrod. taisnes t pols ar I; dab. pieskarš punktus B un B'. Jasavieno riņķī O_3 atrod. taisnes t pols ar I; dab pieskarš. punktus C un C'.

Izlietojot 3 pārējās doto riņķu līdzības asis (t.i. – izvēloties par atrastiem 3 atlikušos meklējamo riņķu pārus un analizējot) dabūsim problemai vēl 6 atrisinājumus.

Visus pārējo Apolonija uzdevumu (deviņu iepriekš. probl.) atrisinājumus dabujam šo atrisin. specificējot t.i. – uzskatot punktu un taisni par riņķiem, kuru radiuss ir nulle vai arī ∞.

Šīs izslavenais Gergonne atrisinajums (1816. g.)

Pašiem pārdomāt, kā konstruēt radikalo centru un līdzības asis, ja kāds vai arī visi dotie riņķi pārveršas par punktu vai taisni (t.i. – aplūk. 9 iepr. gadīj.)

Goultier metode Apolonija problemas atrisināšanai.

(1812. g. viņš lasījis par šo savu konstrukciju Parizes akademijā)

Goultier metodes galvenā starpība ar Gergonne metodi ir tā, ka Goultier atrod pieskaršanās punktus A, B, C, A', B' un C' bez līdzības ass polu konstruēšanas.

– Apskatīsim punktus A, T, A' un I. Visi viņi guļ uz vienas taisnes. Tamdēļ visu šo punktu polares iet caur vienu un to pašu punktu – šis taisnes polu M. Ja varētu atrast punktu M, velkot no viņa pieskares pret riņķi O_1 dabūtu meklējamos pieskaršanās punktus A un A'. Kā varētu atrast punktu M? – Jau zinām, ka punkts M atrodas uz līdzības ass t. Bez tam nupat noskaidrojam, ka caur viņu iet punkta I polare attiec. uz riņķi O_1. Tā tad šis punkts ir taisnes t un punkta I polares krustošanās punkts. Velkam no punkta I pieskares riņķim O_1. Caur pieskaršanās punktiem ejošā taisne ir šā punkta polare un viņas krust. punkts ar t ir punkts M. Tādā pat ceļā varam sameklēt taišņu B B' un C C' polus uz taisnes t un velkot no viņiem pret dotiem riņķiem O_2 un O_3 tangentes dab. skarš. punktus B, B' un C, C'. Bet tā ka punkts I ir doto riņķu radik. centrs – no viņa pret visiem dot. riņķiem vilktās tang. ir vienāda garuma. Un lai atrastu taišņu AA', BB', CC' polus uz taisnes t – atliek uzzīmēt doto riņķu ortogonalo riņķi un vilkt taisnes caur šā riņķa un doto riņķu krustoš. punktiem. Šo taišņu un taisnes t krustoš. punkti ir taisnēm AA', BB' un CC' atbilstošie poli.

Konstruēšanas priekšraksts.

1. Konstruēt doto riņķu radikalo centru I
2. Konstruēt doto riņķu ārējo līdzības asi t
3. Konstruēt dotiem riņķiem ortogonalo riņķi
4. Savienot ortog. riņķa un doto riņķu krust. punktus un atrast šo savienojošo taišņu un taisnes t krustošanās punktus M, N un P.
5. No punkta M vilkt pieskares riņķim O_1, no punkta N riņķim O_2 un no punkta P riņķim O_3. Tā dab. pieskarš. punktus A, A'; B, B' un C, C'.

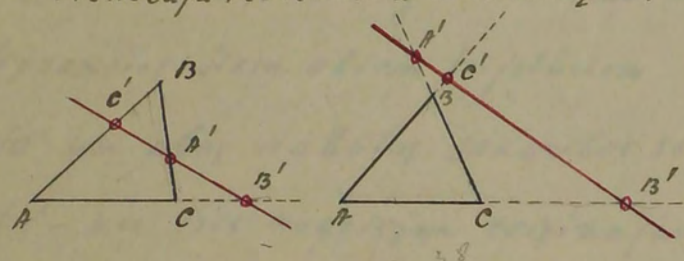
II Δ-vu ģeometrija

Mācība par transversalēm

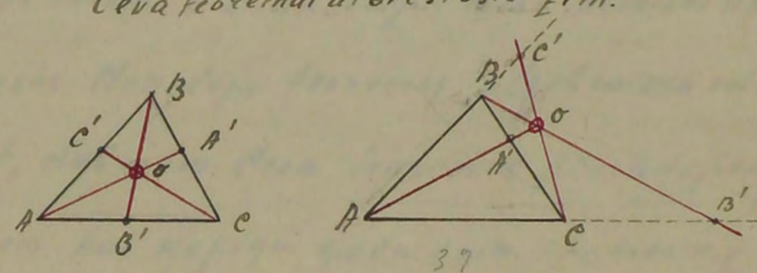
[Transversale — līnija kas krusto, šķērslinija] Šinī ģeom. nodaļā izcilus vietu ieņem divas teoremas: Menelaja teorem. un Ceva teorema. Ar Menelaja teoremu esam jau iepazinušies. Ceva teorema vārdos izteicas sekoši:

Ja ir dots trijstūris un kāds punkts, tad taisnes, kas iet caur šo punktu un trijstura virsotnēm sadala katru trijstūra malu tādās divās daļās, ka to trīs nogriežņu reizinājums, kuri neatrodas viensotram blakus, ir vienāds ar pārējo trīs nogriežņu reizinājumu.

Menelaja teoremai atbilstošie zīm.



Ceva teoremai atbilstošie zīm.



Menel. teor. atbilst. algebr. sakarība:

$$\left|\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\right| = 1$$

Ceva teorem. atbilst. alg. sakarība:

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A} = 1$$

Menelaja un Ceva teoremas ir duālas — vienas teor. vārdam „punkts" otrā atbilst vārds „taisne" un otrādi, vienas teoremas vārdam „taisne" otrā teor. atbilst vārds „punkts" (Melaja teor. dota taisne un uz viņas trīs punkti; Ceva teor. dots punkts un caur viņu ejošas trīs taisnes)

Svarīga ir arī Ceva apgriestā teorema:

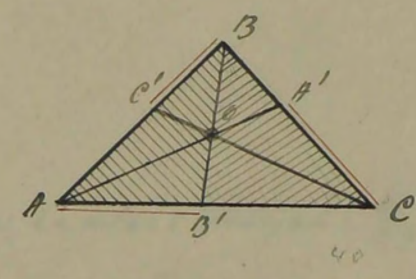
Ja ir dots trijstūris (ABC) un uz viņa malām vai arī malu pagarinājuma trīs punkti C', A', B' (visi trīs uz trijstura malām, vai arī viens uz malas un divi uz malu pagarinājuma), tad, ja starp malu nogriežņiem pastāv sakarība $\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A} = 1$ — taisnes, kuras iet caur šiem punktiem un dotā trijstūra virsotnēm, krustojas vienā punktā.

[Kā redzam, ja nogriežņus uzskatam par aritmetiskiem lielumiem, tad Menelaja un Cevas teoremām ir vienādas atbilstošās algebr. sakarības. Tamdēļ lietojot apgriestās teoremas jābūt uzmanīgiem, lai piem. Menelaja teor vietā nepaņemtu Ceva teor. vai otrādi

Menelaja apgriesto teoremu lietojam gadījumā, ja visi trīs dotie punkti C', A', B' atrodas uz trijstūra malu pagarinājuma (visi laukā no trijstūra), vai arī ja divi dotie punkti atrodas uz trijst. malām un trešais uz malas pagarinājuma. Ceva apgriesto teor. lietojam, ja visi trīs dotie punkti atrodas uz trijst. malām, vai arī ja viens punkts atrodas uz trijst. malas un divi uz malu pagarinājuma]

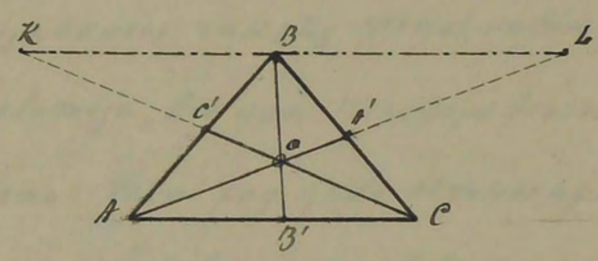
Cevas teoremu var pierādīt ar vairākiem paņēmieniem.

I. paņēmiens. Apskatam atsevišķi divus trijsturus kuŗos sadalos dotais trijst. ar taisni, kas iet caur doto punktu un kaut kuŗu no trijstura virsotnēm. Piem. ņemam trijstūrus ABB' un $B'BC$.



Trijsturis ABB' ir šķelts ar taisni $C'C$ un trijst. $B'BC$ ar taisni AA'. Uzrakstot šiem abiem trijstūriem atbilstošās Menelaja teoremas algebraiskā veidā un abas dabūtas sakarības sareizinot, dabujam Ceva teoremas pierādījumu t.i. – ka trīs nogriežņu reizinajums, kuriem nav kopīgu galu (zīm. apz. ar sark.) ir vienāds ar parējo trīs nogriežņu reizinājumu.

II. paņēmiens. Caur vienu no dotā trijstura virsotnēm, piem. caur virsotni B velkam taisni paralelu ar šai virsotnei pretim guļošo malu (zīm. taisne KL). Rodas vairāki līdzīgi trijstūri.



$$\left.\begin{array}{l}\Delta BKO \sim \Delta B'CO \\ \Delta BLO \sim \Delta B'AO\end{array}\right\} \text{ kas dod ka } \frac{CB'}{B'A} = \frac{KB}{BL},$$

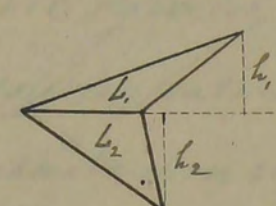
$$\Delta KBC' \sim \Delta ACC' \quad " \quad " \quad " \quad \frac{AC'}{C'B} = \frac{AC}{KB},$$

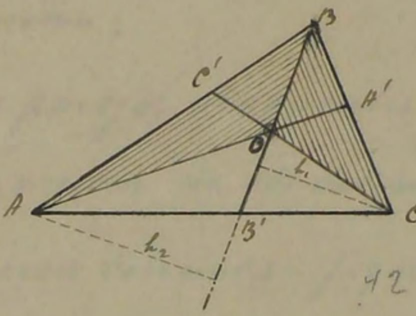
$$\Delta BLA' \sim \Delta ACA' \quad " \quad " \quad " \quad \frac{BA'}{A'C} = \frac{BL}{AC}.$$

Šīs trīs sakarības sareizinot dabujam, ka

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1,$$ un ar to Cevas teorema ir pierādīta

[Palīga noskaidrojums. – Ja diviem trijstūriem kopīgs pamats, tad viņu laukumi L_1 un L_2 attiecas tāpat kā viņiem atbilstošie augstumi h_1 un h_2 t.i. $\frac{L_1}{L_2} = \frac{h_1}{h_2}$]





42

III. paņēmiens. Ņemam trijstūŗus AOB un COB. Šiem trijsturiem ir kopīgs pamats. Tamdēļ, viņu laukumi attiec. ka atbilst. augstumi. $\frac{\Delta\, COB\ lauk.}{\Delta\, AOB\ lauk.} = \frac{h_2}{h_1}$, bet $\frac{h_1}{h_2} = \frac{CB'}{B'A}$

Tā tad

$$\frac{CB'}{B'A} = \frac{\Delta\, COB\ lauk.}{\Delta\, AOB\ lauk.}$$

Tapat no trijst. AOB un AOC, un no trijst. AOC un COB dab.

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{\Delta\, AOB\ lauk.}{\Delta\, AOC\ lauk.}$$

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{\Delta\, AOC\ lauk.}{\Delta\, COB\ lauk.}$$

Šīs trīs sakarības sareizinot labā pusē visi locekļi saīsinas un atkal dabujam: $\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1$, ar ko teorema ir pierādīta.

Pašiem pierādīt Ceva teoremu attiec. uz gadījumu, ja punkts O dots ārpus trijstūŗa. Arī apgriesto Ceva teorēmu pierādīt pašiem ņemot abus gadījumus (1 gad. – visi 3 dotie punkti atrodas uz trijstūŗa malām; 2 gad. – viens punkts atrodas trijst. malas un divi uz malu pagarinājuma)

Menelaja teorema teorema ilgu laiku bij pazīstama zem nosaukuma „Ptolomeja teorema." Tā viņa apzīmēta vēl 1800–1840 gad. iznākušos rakstos. Tikai vēlāk vēsturnieks M. Chasles konstatējis, ka tā nava Ptolomeja, bet gan Menelaja teorema.

Ceva teorema bij nosaukta par Bernulli teoremu. Tikai pag. gadu simteni ap šo laiku noskaidrots, ka viņa patiesībā ir Ceva teorema. Šai teoremai ļoti liela nozīme praktiskos aprēķinos

Menelaja un Cevas teoremu pielietošana.

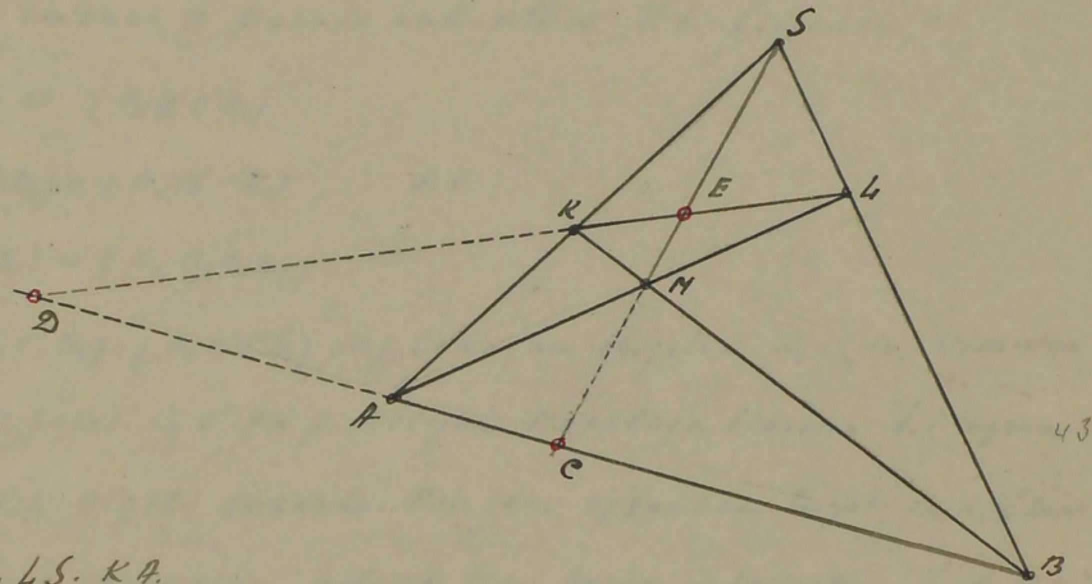
Daudz materiala par dažādu geometrisku jautājumu atrisināšanu un līdzar to par abu minēto teoremu pielietošanu ir savācis franču geometrs L. Carnot. Viņa klassiskais traktats: „Géometrie de position" ir bagata satura reta un arī dārga grāmata. Iznākusi 1803 gadā. (Piejama arī mūsu bibliotekā). Kā ievērojami geometrisku jautājumu pētnieki pag. gad. simt. sākumā minami vēl Poncelet, Steiners, Möbius un vēlāk Plückers. Arī J. Poncelet (1822. g.) izdevis klassiska satura grāmatu „Traité des propriétés projektives des figures" (Šī grāmata divos sējumos atrodas mūsu fakultātes bibliotekā).

Pielietojot minētās teoremas, vispirms pierādisim teoremu:

Pilnīgā četrmalī katru ^(apakšējo)^ diagonali divas pārējās diagonales dala harmoniski, pie kam saist. punkti ir abas četrm. virsotnes un abi dalījuma punkti.

[Pilnīgā četrmaļa jēdziens ievests no Carnot. Pilnīgais četrmalis – figura veidota no četrām taisnēm, pie kam trīs taisnes nedrīkst iet caur vienu punktu t.i. dotās taisnes var saiet vienā punktā tikai pa divas.]

Ņemam pilnīgo četrmali un uzzīmējam diagonales KL, SM un AB. Apskatam trijstūri ASB. No punkta M šinī trijst. iziet trīs stari, kas iet caur viņa virsotnēm. Tamdēļ pamat. uz Čeva teoremu varam rakst.



$$AC \cdot BL \cdot SK = CB \cdot LS \cdot KA.$$

Trijst. ASB šķelts ar taisni DL. Tamdēļ viņam varam pielietot arī Menelaja teoremu un rakstīt:

$$SL \cdot BD \cdot AK = - LB \cdot DA \cdot KS.$$

Šīs abas sakarības sareizinot un izdarot locekļu saīsināšanu, dabujam ka

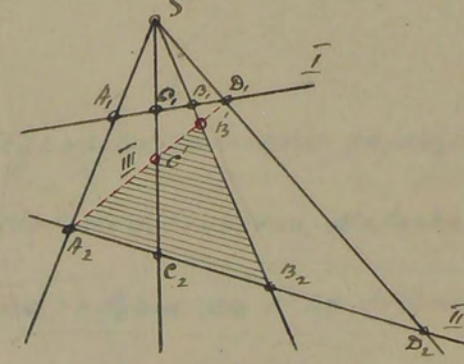
$$AC \cdot BD = - CB \cdot DA \quad \text{vai arī} \quad \frac{AC}{CB} = - \frac{AD}{DB}, \quad \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = -1$$

Ar to ir pierādīts ka pilnīgā četrmaļa apakšējo diagonali pārējās divas diag. sadala harmoniski.

Tagad noskaidrosim, kā ar Menelaja teoremas palīdzību var pierādīt, ka

Ja ņem četrus no viena punkta izejošus starus un šķeļ viņus ar kaut kādām divām taisnēm, tad 4 uz pirmās taisnes dabūto krustošanās punktu anharmoniskā attiecība ir vienāda ar 4 uz otras taisnes dabūto krustoš. punktu anharmonisko attiecību.

[citādi sakot: četru no viena punkta izejošu staru un kaut kādas taisnes krustošanās punktu anharmoniskā attiecība ir pastāvīgs lielums.]



Ņemam palīgā taisni III, kurai ir ar katru no do-
tām taisnēm I un II viens kopīgs krustošanās punkts uz do-
tā stara. Tad pierādam ka taisnes I punktu anhar- 44
moniskā attiec. ir vienāda ar taisnes III punktu anharm.
attiecību; un pēc tam ka taisnes II punktu anh. attiec.
ir vienāda ar taisnes III anharm. attiec. No tā kā sekas dabujam, ka taisnes I punktu
anh. attiec. ir vienāda ar taisnes II punktu anh. attiec. T. i. pierādam, ka

$$(A_1B_1C_1D_1) = (A_2B'C'D_1)$$

$$(A_2B_2C_2D_2) = (A_2B'C'D_1) \qquad \text{t. t.}$$

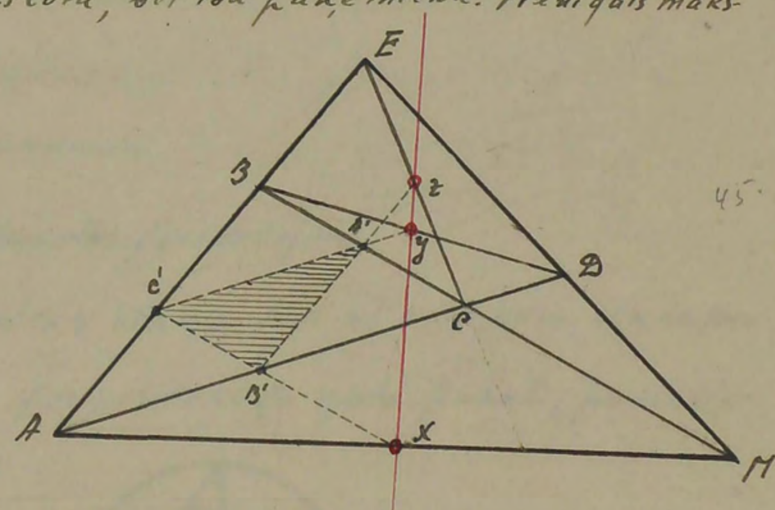
$$(A_1B_1C_1D_1) = (A_2B_2C_2D_2)$$

Lai pierādītu ka $(A_2B_2C_2D_2) = (A_2B'C'D_1)$, aplukojam trijstūri A_2B_2B'. Uzskatam
ka šis trijstūris ir šķelts ar taisni C_2C' un pielietojam Menelaja teoremu t. i. uzrak-
stam Menel. teoremai atbilst. algebr. sakarību. Pēc tam uzskatam trijst. A_2B_2B' šķel-
tu ar taisni D_2D_1 un atkal izrakstam atbilst. Men. teorem. izteiksmi. Izdalot
pirmo sakarību ar otro, dabujam ka $(A_2B_2C_2D_2) = (A_2B'C'D_1)$. Tādā pat ceļā ap-
lūkojot trijstūri C_1D_1C' un pielietojot viņam divreiz Men. teoremu dabujam, ka
$(A_1B_1C_1D_1) = (A_2B'C'D_1)$. Un ar to augstāk minētā teorema ir pierādīta.

Pierādīsim vēl vienu pilnīgā četrmaļa klassisku īpašību:

Pilnīgā četrmaļa diagonaļu vidus punkti atrodas uz vienas taisnes.

Šo teoremu var pierādīt ar drusku mākslotu, bet īsu paņēmienu. Vienīgais māks-
lotais šinī paņēmienā ir tas, ka izvēlamies trij-
stūri ABC un ņemam viņa malu vidus punktus C', 45
A' un B'. Punkti C', A', y atrodas uz vienas taisnes, jo viņi
ir no punkta B izejošu staru vidus punkti. Tāpat
punkti B', A', z un punkti C', B', x atrodas uz vienas
taisnes. Tā tad katrs no diagonaļu vidus punk-



tiem x, y, z atrodas uz trijstūra A'B'C' malas pagarinājuma. Tamdēļ attiec. uz šiem punktiem
un trijstūri A'B'C' varam pielietot apgriesto Menelaja teoremu. Ja izdosies pierādīt, ka

$$\frac{A'z}{zB'} \cdot \frac{B'x}{xC'} \cdot \frac{C'y}{yA'} = -1,$$

tad būs pierādīts, ka punkti x, y un z atrodas uz vienas taisnes. – Mēģināsim sameklēt vajadzīgās attiecības. Izvēlesimies kādu trijstūri, kuram var pielietot Men. teorēmu. No turāk stavošiem trijstūriem tāds ir trijstūris ABC. Aplūkojot šo trijstūri, redzam ka viņa trīs malas ir dotā četrmaļa malas. Par viņu šķeļošu taisni iz vēlamies ceturto četrmaļa malu EM. Pamatojoties uz tiešo Men. teoremu varam rakstīt, ka

$$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CD}{DA} = -1.$$

Kā šo attiecību vietā dabūt augš. sakarībā stāvošas attiecības? – No punkta C iziet trīs stari CA, CB un CE, kuri ir škelti ar divām paralelām taisnēm B'z un AE, tamdēļ varam rakstīt proporciju

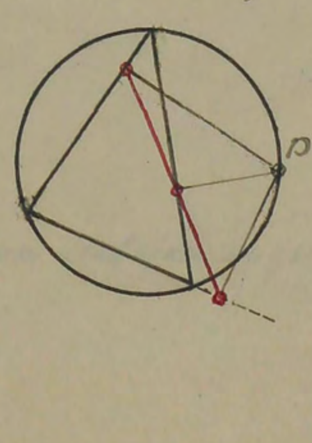
$$\frac{A'z}{BE} = \frac{zB'}{EA}, \quad \frac{A'z}{zB'} = \frac{BE}{EA}.$$

Tā tad pastāvošās un pierādamās sakar. pirmās attiecības ir inversi lielumi.

Tāpat arī no punkta B un no punkta A no katra iziet trīs stari, kas ir šķelti ar divām paralelām taisnēm un pamatojoties uz to viegli var pierādīt, ka arī pārējās divas attiecības pastavošā un pierādamā sakarība ir inversi lielumi. Ja kādu lielumu reizinājums ir „–1", tad arī viņiem inverso lielumu reizinājums ir „–1". Tā tad tiešām punkti x, y, z apmierina augšējo sakarību, kas nozīme, ka viņi atrodas uz vienas taisnes. – Šo taisni, uz kuras atrodas pilnīgā četrmaļa diagonaļu vidus punkti, daži autori sauc par Gauss'a taisni. Tikko pierādīto teoremu Steiner's nosauc par Ņutona teoremu (kaut gan Ņutona darbos tas nav konstatējams)

Tagad apskatīsim Simsona teoremu. Šīs teoremas formulējums:

Ja ir dots trijstūris un viņam apvilkts riņķis, tad no kaut kura riņķa punkta pret trijstūra malām vilktu perpendikuļu gala punkti (pamati) atrodas uz vienas taisnes.

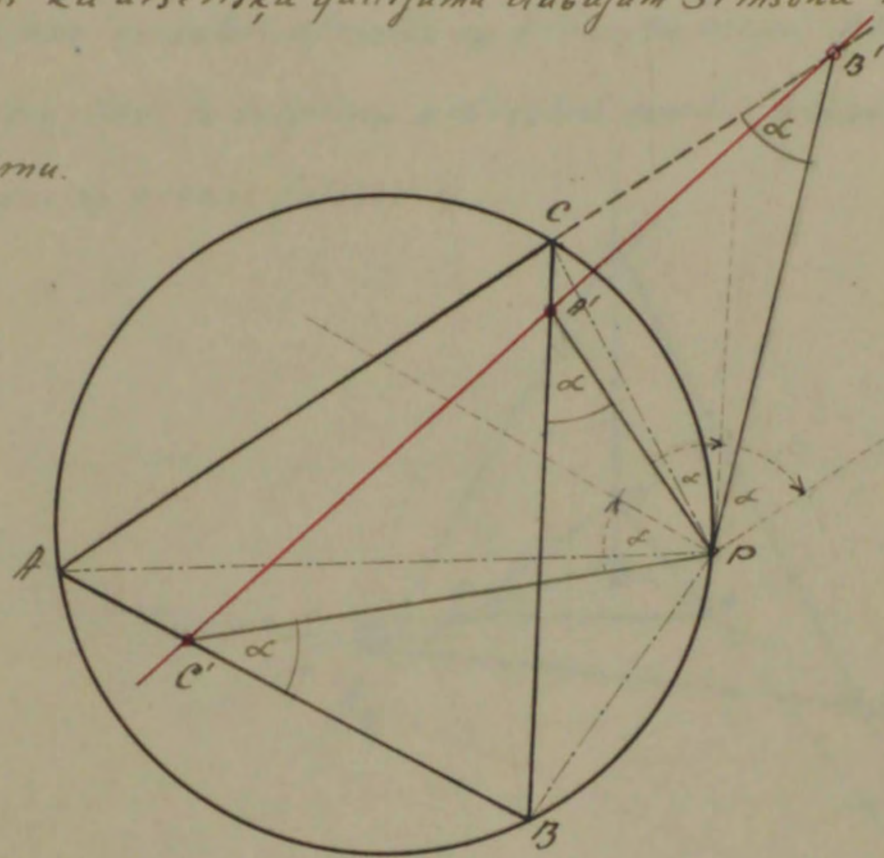


Pastāv arī vispārīgāka teorema, kura izteicas:

Ja ir dots trijstūris un viņam apvilkts riņķis, tad no kaut kura riņķa punkta P pret trijstūra malām vilktu taišņu – kuras ar visām trijstūra malām veido vienu un to pašu leņķi α – un trijstūra malu krustošanās punkti atrodas uz vienas taisnes.

No šīs vispārīgas teoremas kā atsevišķu gadījumu dabujam Simsona teoremu, ja pieņemam ka $\alpha = 90°$.

Pierādīsim vispār. teorēmu.



Ņemam trijstūri ABC un viņam apvelkam riņķi. Uz riņķa izvēlamies punktu P. No šā punkta velkam starus, kas krusto dotā trijstūra malas zem dotā leņķa α un krustošanās punktus apzīmejam ar C', A', B'. [No punkta P uz katru trijstūra malu var vilkt divus starus, kas krusto viņu zem dotā leņķa α. Lai novērstos sajukums, no punkta P uz katru trijstūra malu velkam to staru, kuru pagriežot ap punktu P par leņķi α pulksteņa rādītāja virzienā dabujam taisni paralelu atbilstošai trijstūra malai].

Izlietosim atkal apgr. Menelaja teoremu un mēģināsim pierādīt, ka starp krustošanās punktu C', A' un B' radītiem nogriežņiem pastāv sakarība

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=-1$$

Savienojam punktu P ar visām dotā trijstūra virsotnēm. Tad rodas līdzīgi trijst.

$$\triangle PAB' \backsim \triangle PA'B$$

$$\triangle PBC' \backsim \triangle PCB'$$

$$\triangle PCA' \backsim \triangle PAC'$$

Sameklējot proporcijas un viņas pareizinot tiešam dabujam augstāk stāvošo sakarību.

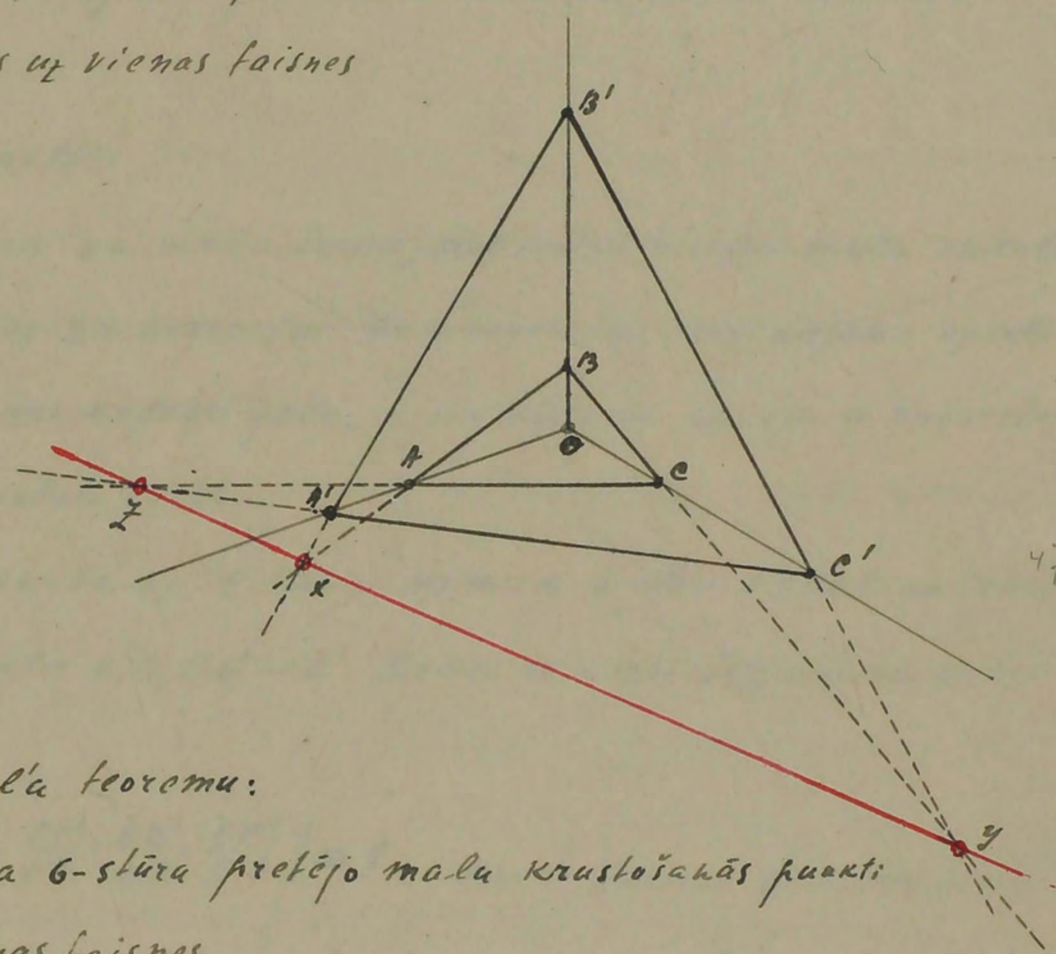
Un ar to teorema ir pierādīta.

– Iepriekš aplūkotās teoremas nosaukums „Simsona teorema" ir nepareizs. Šo teoremu kāds angļu autors jau agrāk pierādījis. Poncelet pirmais minējis šās teoremas nosaukumu, bet viņš ir pielaidis kļūdu, kaņa iet tālāk.

Pašiem pierādīt Desargea teoremu par homologiem trijstūriem. Viņa skan:

Ja divu trijstūru virsotnes atrodas uz trim no viena punkta izejošiem stariem, tad šo trijstūru atbilstošo malu krustošanās punkti atrodas uz vienas taisnes

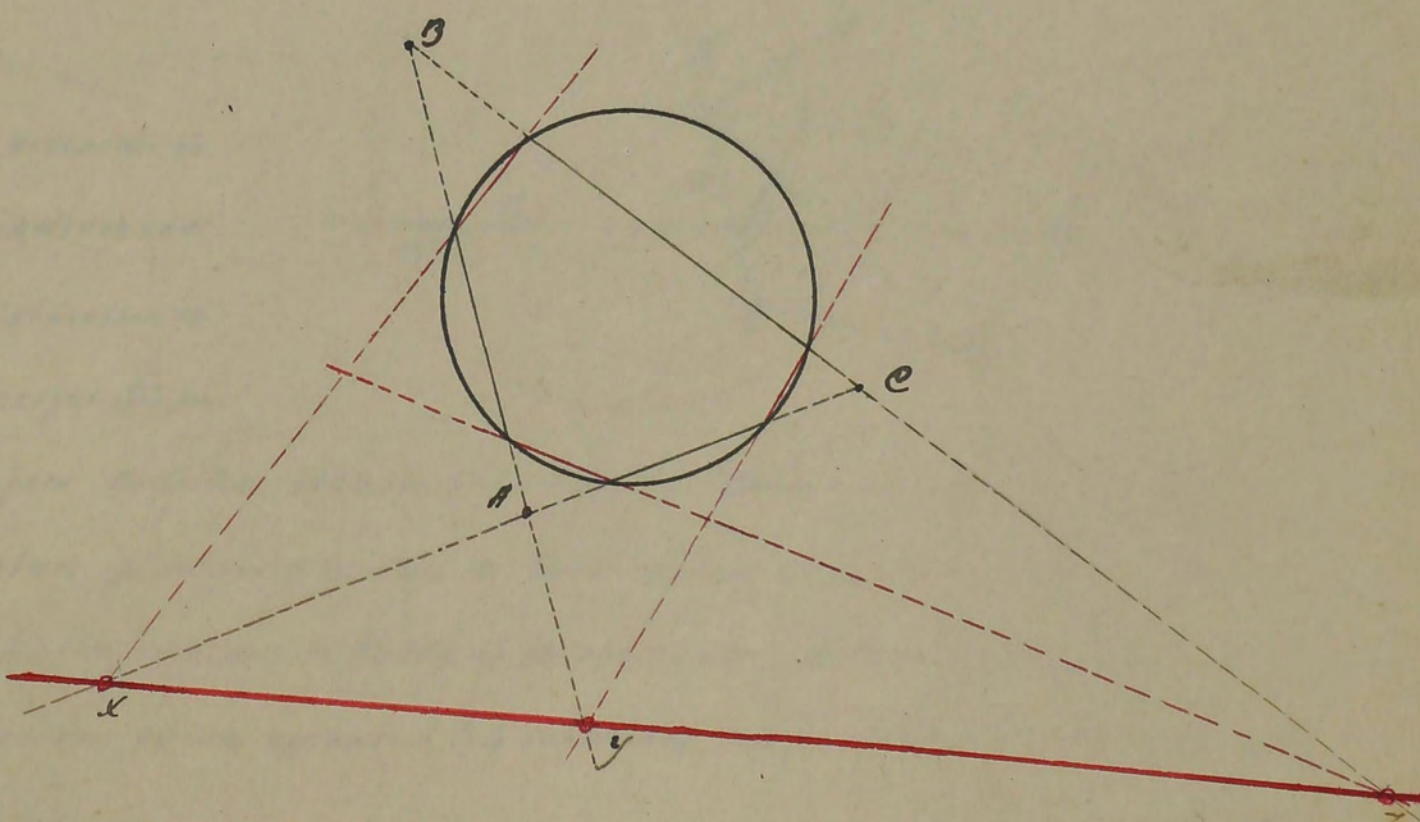
Aizrādījums. – Pieņemot ka trijst. šķelti ar taisni, trīs reizes pielietot Men. teoremu. Dabūtās sakarības reizinot vai dalot (sk. pēc vajadzības) dab. teoremai pierādījumu.



Pašiem pierādīt arī Pascal'a teoremu:

Riņķī ievilkta 6-stūra pretējo malu krustošanās punkti atrodas uz vienas taisnes

Aizrādījums: Pieņemot ka trijsturis ABC trīs reizes šķelts ar taisnēm (sark. taisn.) un atkal trīs reizes pielietojot Menelaja teoremu, dabujam pierād., ka punkti x, y un z atrodas uz vienas taisnes.



Ir vēl daudz teoremu, kuŗu pierādījumos var izlietot Menelaja un Ceva teoremas. Viņas atrodamas traktatos „par porismiem", ko izdevies savākt Chasles'am. Domājams, ka ar vārdu „porismi" tikušas apzīmētas teoremas, kas stāv sakarā ar kustēšanos.

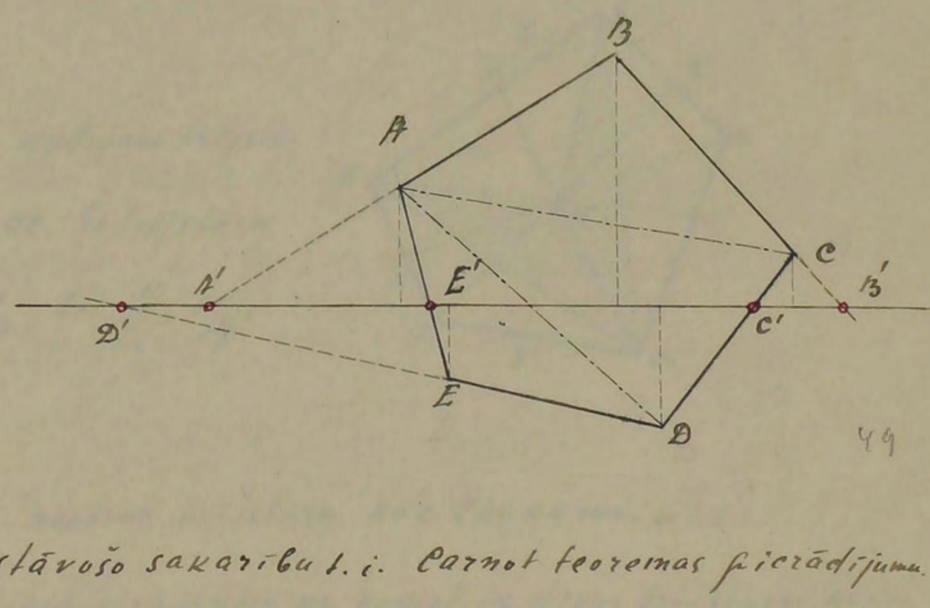
Carnot un Poncelet ir Menelaja un Ceva teoremas vispārinājuši pierādīdami, ka līdzīga satura teoremas var attiecināt arī uz poligoniem t.i. daudzstūriem. (Šīs Carnot un Poncelet teoremas atrodamas jau minētās abu autoru grāmatās). Apstāsimies pie šo teoremu pierādījuma.- Vispirms pie Carnot teoremas, kas ir Menelaja teoremas vispārinājums.

Carnot teoremu var formulēt:

Ja ir dots n-stūris un kāda taisne, viņa katru n-stūŗa malu sadala divās daļās un rodas 2n nogriežņi. To n nogriežņu reizinājuma apsolūtā vērtība, kam nav kopīgu galu, ir vienāda ar pārējo n nogriežņu reizinājuma apsoluto vērtību.

Pierādīsim šo teoremu attiecībā uz 5-stūri. — Ņemsim 5-stūri ABCDE un taisni t, kura šķeļ viņa malas punktos A', B', C', D' un E'. Rodas 10 nogriežņi, kuriem vajag apmierināt sakarību:

$$\left| \frac{AA'}{A'B} \cdot \frac{BB'}{B'C} \cdot \frac{CC'}{C'D} \cdot \frac{DD'}{D'E} \cdot \frac{EE'}{E'A} \right| = 1,$$ kas ir Carnot teoremas algebraiskā izteiksme. Ka dabutie 10 nogriežņi tiešām apmierina šo sakarību, — var pierādīt divejādi.



49

1.) No katras daudzstūŗa virsotnes nolaiž perpendikuļus uz transversali t. Sameklē līdzīgus trijstūrus un uzraksta atbilstošās proporcijas. Šīs proporcijas sareizinot dabujam augstāk stāvošo sakarību t.i. Carnot teoremas pierādījumu.

2.) No vienas daudzst. virsotnes, piem. no virsotnes A, velk divas diagonales, kuŗas sadala 5-stūri 3 trijstūros. Katrs trijstūris ir šķelts ar transversali t. Katram no šiem trijst. pielietojot Menelaja teoremu varam uzrakstīt trīs sakarības, kuŗas dalot vai reizinot (skatoties kā var iznīcināt liekos nogriežņus) dabujam meklēto sakarību.

Teorema ir pareiza arī gadījumā, ja trasversale iet ārpus daudzstūra.

Par apgriezto teoremu vairs nevaram teikt, ka tā vienmēr ir pareiza. Var būt gadījumi, kad pieci punkti A', B', C', D' un E' atrodas uz daudzst. malām (divi uz mal. un trīs uz malu pagarinājuma; vai arī visi pieci uz malu pagarinājumas) un nogriežņi apmierina iepr. lap. pusē doto sakarību, bet šie punkti tomēr neguļ uz vienas taisnes.

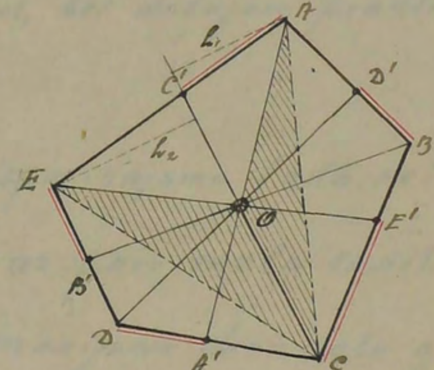
Tagad apskatīsim Poncelet teoremu, kura ir Ceva teoremas vispārinājums. Poncelet teorema apgalvo:

> Ja ir dots daudzstūris ar nepāru malu skaitu un viņam iekšpusē kāds punkts, tad stari, kas iet caur šo punktu un daudzstūra virsotnēm, sadala katrai virsotnei pretim stāvošo malu tādās divās daļās, ka visu to daļu reizinājums, kurām nav kopīgu galu ir vienāds ar visu pārējo daļu reizinājumu.

[Malu skaits tiek ņemts nepāru skaitlis tamdeļ, lai katrai virsotnei varētu atrast pretējo malu].

Pierādīsim šo teoremu attiecībā uz 5-stūri. – Ņemsim 5-stūri ABCDE un viņā kādu punktu O. Velkot starus caur šo punktu un daudzstura virsotnēm uz viņa malām dabūsim krustošanās (dalījuma) punktus A'B'C'D' un E'. Teorema būs pierādīta, ja varēs pierādīt, ka dabūtie 10 nogriežņi saistas sakarībā:

$$\frac{AC'}{C'E} \cdot \frac{EB'}{B'D} \cdot \frac{DA'}{A'C} \cdot \frac{CE'}{E'B} \cdot \frac{BD'}{D'A} = 1.$$



50

– Velkam no virsotnes C diagonales un tā dabujam trijstūŗus EOC un AOC, kuriem ir kopīgs pamats OC. Šo trijstūra laukumi attiecas kā viņu augstumi h_1 un h_2, bet $\frac{h_1}{h_2} = \frac{AC'}{C'E}$. Tamdēļ varam rakstīt, ka

$$\frac{AC'}{C'E} = \frac{\Delta AOC}{\Delta EOC}$$ kur „ΔAOC" nozīme trijstura AOC laukumu. u.t.t.

Velkot diagonales no visām pārējām 5-stura virsotnēm un ņemot ik divus trijstūras, kuriem ir kopīgs pamats, dabujam vēl četras proporcijas

$$\frac{EB'}{B'D} = \frac{\Delta EOB}{\Delta BOD}; \quad \frac{DA'}{A'C} = \frac{\Delta DOA}{\Delta COA}; \quad \frac{CE'}{E'B} = \frac{\Delta COE}{\Delta BOE}; \quad \frac{BD'}{D'A} = \frac{\Delta BOD}{\Delta AOD}$$

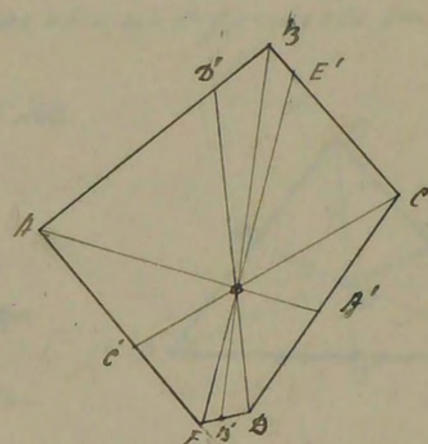
Sareizinot piecas dabūtās proporcijas, labajā pusē visi locekļi saīsinās un rezultātā dabujam, ka tiešām

$$\frac{AC'}{C'E} \cdot \frac{EB'}{B'D} \cdot \frac{DA'}{A'C} \cdot \frac{CE'}{E'B} \cdot \frac{BD'}{D'A} = 1,$$

un ar to Poncelet teorema ir pierādīta.

Ceva teorema nepadodas šāda veida vispārinājumam gadījumā, ja poligona malu skaits ir pāru skaitlis.

Poncelet gan saka, ka viņa teoremu var pielietot arī pie poligoniem, kuriem malu skaits ir pāru skaitlis, ja pieņem ka šie polig. ir cēlušies no poligoniem, kam malu skaits ir nepāru skaitlis, divām virsotnēm saejot vienā punktā. Piemēram četrstūri ABCD varam uzskatīt kā cēlušos no piecstūra ABCDE, kuram virsotnes D un E sagājušas kopā. Attiecinot uz 5-stūri Poncelet teoremas algebraiskā izteiksme ir



$$AC' \cdot EB' \cdot DA' \cdot CE' \cdot BD' = C'E \cdot B'D \cdot A'C \cdot E'B \cdot D'A$$

Ja punkts E tiecas uz punktu D, nogrieznis EB' un arī nogrieznis BE' sadilst par nulli. Tā kā augš. sakarības katra pusē viens loc. pārvēršas par 0, dabujam identitāti:

$$0 = 0.$$

Tā tad no šāda viedokļa aplūkojot daudzst. ar pāru malu skaitu un viņam pielietojot Poncelet teoremu uz pretrunu gan neatduramies, bet dabujam praktiski nenozīmīgu sakarību.

Ir bijuši vairāki mēģinājumi dabūt Ceva teoremas vispārinājumu tadā veidā, lai to varētu pielietot poligoniem kā ar nepāru, tā arī ar pāru malu skaitu. Vienkāršākā starp šādām teoremām ir teorema, kuras pierādījumu devis italu geometrs Ferrari 1895 g.

Ferrari teorema apgalvo:

Ja ir dots kāds poligons, vienalga, ar pāru vai nepāru malu skaitu un kāds punkts, tad katrs stars, kas iet caur šo punktu un kādu no poligona virsotnēm dala katru poligona malu (izņemot tās divas malas, kuras iet ar ņemto staru caur vienu virsotni) tādās divās daļās, ka visu katram staram atbilstošo daļu attiecību reizinājumu reizinājums ir 1. T.i. – ja caur pirmo virsotni ejošam staram atbilstošo daļu attiecību reizinājumu apzīmējam ar ρ_1, otram staram ar ρ_2 u.t.t. n-tam staram ar ρ_n, tad starp šiem reizinājumiem pastāv sakars:

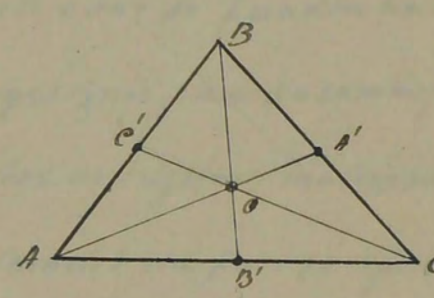
$$\rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3 \cdots\cdots \rho_n = 1$$

Paskatīsimies, vai šī teorema varētu tikt uzskatīta kā Ceva teoremas vispārinājums? T.i. – vai, gadījumā ja $n=3$, no augstāk stāvošās sakarības var dabūt Ceva teoremai atbilstošo sakarību?

– Ja trijstūra virsotni A pieņemam par pirmo, B par otro un C par trešo, tad

$$\rho_1 = \frac{BA'}{A'C}\ ;\ \rho_2 = \frac{CB'}{B'A}\ ;\ \rho_3 = \frac{AC'}{C'B}.$$ Sareizinot dab.

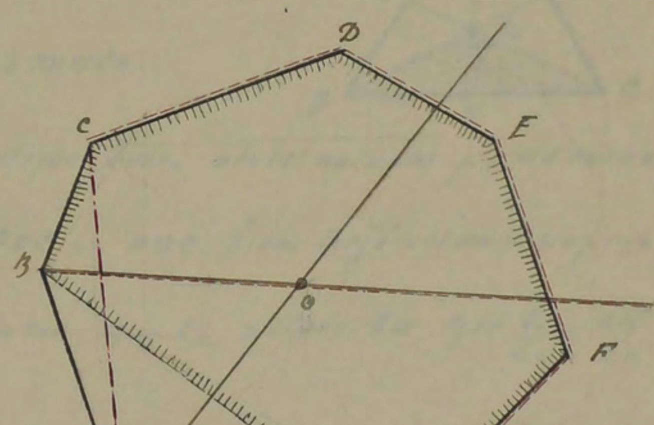
$$\rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3 = \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1.$$



52

Tā tad tiešām Ferrari teorema ietver sevī kā atsevišķu gadījumu Ceva teoremu un var tikt uzskatīta par Ceva teoremas vispārinājumu.

Ferrari savu teoremu pierāda ar šādu paņēmienu. – Ņem vienu poligona virsotni un atmet no šīs virsotnes izejošās malas. Tā dabūn poligonu, kurš šķelts ar caur doto punktu un paņemto virsotni ejošu staru. Šim poligonam pielieto Carno teoremu un uzraksta atbilstošo alg. sakarību. To pašu atkārtojot ar visām n virsotnēm un sareizinot dabūtās n sakarības, rezultātā dabū Ferrari teoremai atbilstošo algebr. sakarību, ar ko šī teorema ir pierādīta.



53

Piem. – ja dotais poligons ir polig. ABCDEFG un dotais punkts ir O. Ņemam virsotni A un atmetam malas AB un AG. Rodas poligons BCDEFG kurš šķelts ar taisni AO. Uzrakstam šam polig. atbilstošo Carnot teoremas sakarību. Tad ņemam virsotni B un atmetam malas AB un BC. Rodas poligons CDEFGA, kas šķelts ar taisni BO. Uzrakstam viņam atbilstošo Carnot teoremas izteiksmi. Izdarot to pašu attiecībā uz pārējām virsotnēm, dabujam 7 sakarības, kuras sareizinot dabujam meklēto t.i.

$$P_A \cdot P_B \cdot P_C \cdot P_D \cdot P_E \cdot P_F \cdot P_G = 1.$$

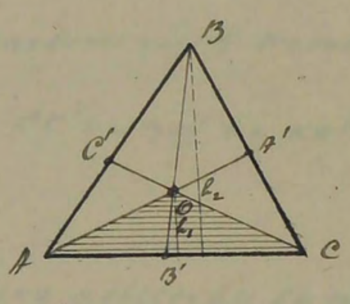
Pašiem pamēģināt atrast Ferrari teoremai kādu citu pierādīšanas veidu.

Franču zinātnieks Georgonne 1808 gadā (Nimes pilsētā) sāka izdot žurnalu „Annales de Mathématiques." Šis bij pirmais žurnāls, kas apskatīja tikai matematiskus jautājumus. Pats Georgonne viņā daudz rakstīja sniegdams gan vertīgus gan mazvertīgus darbus (par matematiskiem jautājumiem). Minētā žurnalā Georgonne uzstāda šādu uzdevumu: – Pierādīt, ka

Ja ir dots trijstūris un viņā kāds punkts, tad, neskatoties kādu stāvokli šis punkts ieņem trijstūra iekšienē, stari, kas vilkti caur šo punktu un trijstūra virsotnēm, dotajā punktā sadalās tādos nogriežņos, ka sasummējot ikkatra stara nogriežņa no dotā punkta līdz krustoš. ar trijstura malu un visa stara attiecības, rezultatā iznāk 1. T.i. pierādīt ka pareiza ir formula

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = 1$$

(Skat. zīmējumu)



Šo formulu sauc par Georgonne formulu.

Pēc neilgalaika Georgonne uzdevumam parādījās četri atrisināšanas paņēmieni. Vienkāršākais no viņiem ir šāds. – Ņemam trijstūrus AOC un ABC. Šiem trijstūriem ir kopīgs pamats, tamdēļ viņu laukumu attiecība ir vienāda ar augstumu h_1 un h_2 attiecību. Bet $\frac{h_1}{h_2} = \frac{OB'}{BB'}$. Tātad

$$\frac{OB'}{BB'} = \frac{\Delta AOC}{\Delta ABC}.$$

Aplūkojot kopīgi vēl trijstūrus AOB un ABC un trijstūrus BOC un ABC dab. vēl divas sakar.:

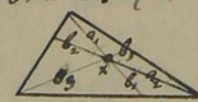
$$\frac{OC'}{CC'} = \frac{\Delta AOB}{\Delta ABC}; \quad \frac{OA'}{AA'} = \frac{\Delta BOC}{\Delta ABC}.$$

Visas šīs proporcijas saskaitot dabujam Georgonne formulu.

Ir vēl citi Georg. formulas pierādījumi, neatkarīgi no laukumu lietošanas.

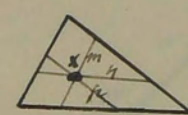
Pamēģināt pašiem pierādīt šo formulu lietojot līdzīgus daudzstūrus. Bez tam atrisināt pašiem sekojošus uzdevumus (resp. izpētīt sekoj. jautājumus):

I. Vai trijstūrī ir iespējams tāds punkts x, caur kuru vilktas transversales viņā sadalās tādās divās daļās, ka šo daļu attiecības visām transversalēm ir vienādas? Ja ir iespējams – tad cik tādu punktu var būt trijstūrī? (Piem. vienstādsp. trijstūrī ir medianu krustošanās punkts)

[

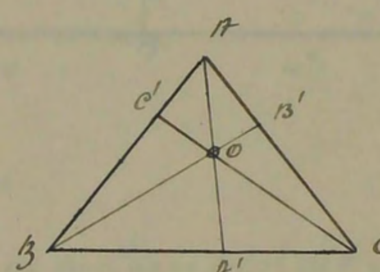
$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$?]

II. Vai trijstūrī ir iespējams tāds punkts, ka caur viņu vilktas taisnes paraleli trijstūra malām būtu visas vienāda garuma? – Ja ir iespējams, kā izteicas šo paralelu garumi un kā šos garumus un tādu punktu konstruēt?

[

$m = n = p$?]

III. Ja trijstūrī ir dots kaut kāds punkts O, caur kuru vilktas transversales – vai starp dabūtiem taisņu nogriežņiem (skat. zīmējumu) var pastāvēt kāda no trim sakarībām:



$$\frac{AO}{OA'} = \frac{AC'}{C'B} + \frac{AB'}{B'C},$$

$$\frac{AO}{AA'} = \frac{AC'}{AB} + \frac{AB'}{AC},$$

$$\frac{A'O}{AA'} = \frac{B'C}{AC} + \frac{C'B}{AB}.$$

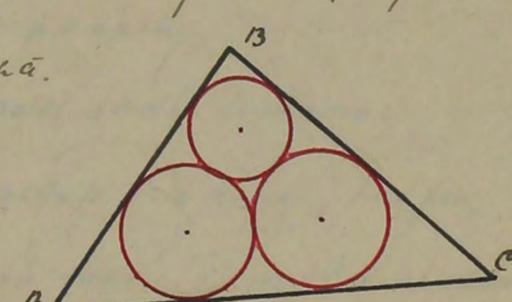
Pierādījums. – Par to kura no šām formulām pareiza, var pārliecināties ņemot trijstūrus BAA' un AA'C, uzskatot viņus kā šķeltus ar taisnēm CC' un BB' un katram pielietojot Menelaja teorēmu.

IV. Ģeometriskā ceļā (lietojot nogriežņus) pierādīt, ka divu attiecību summu (resp. starpību) var izteikt kā vienu attiecību; un ka divu attiecību dalījumu (respekt. reizinājumu) var izteikt kā vienu attiecību. T.i. konstrukcijas ceļā izteik sakarības

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{x}{y} \quad \text{un} \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{x}{y}$$

Apstāsimies drusciņ pie Malfatti problēmas, kuras saturs sekojošs:

Dotā trijstūrī konstruēt trīs riņķus, kuri katrs pieskaras pie divām trijstūra malām un visi savā starpā.

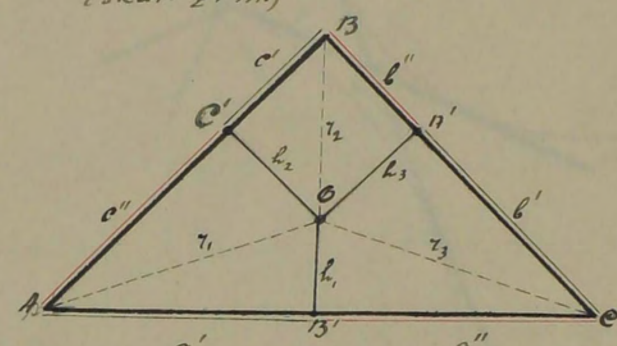


Steiner's devis šā uzdevuma konstrukciju, bet bez pierādījuma. Tikai vēlāk izdevās pierādīt Steinera konstrukcijas pareizību. [Pamēģināt pašiem atrisināt šo problēmu]

Pāriesim tagad pie Steiner'a teoremas aplūkošanas. Šī teorema apgalvo sekojošo:

Ja ir dots trijstūris un viņā kāds punkts, tad perpendikuļi, kas vilkti no šī punkta uz trijstūra malām, sadala katru malu tādos divos nogriežņos, ka to nogriežņu, kam nav kopēju galu, kvadratu summa ir vienāda ar pārējo nogriežņu kvadratu summu. T. i. - dabūtie nogriežņi apmierina sakarību

$$a'^2+b'^2+c'^2 = a''^2+b''^2+c''^2$$ (skat. zīm.)



57.

Lai pierādītu šīs sakarības pareizību, savienojam doto punktu O ar trijstūra virsotnēm un apzīm. šo nogr. garumus ar r_1, r_2, r_3. No taisnleņķa trijstūriem AOB' un COB' dabujam, ka

$$r_1^2 = a'^2 + h_1^2$$

$$r_3^2 = a''^2 + h_1^2$$ atņemot no augš. sak. apakšējo dab.

$$a'^2 - a''^2 = r_1^2 - r_3^2.$$ Tādā pat ceļā no trijst. AOC' un BOC' un no trijst. BOA' un COA' dab.

$$c'^2 - c''^2 = r_2^2 - r_1^2$$

$$b'^2 - b''^2 = r_3^2 - r_2^2$$

Pedējās trīs sakarības saskaitot un pārceļot negatīvos loc. labajā pusē dabujam augšā doto formulu un ar to teorema ir pierādīta.

Pareiza ir arī Steiner'a teoremas apgrieztā teorema, kuru var formulēt:

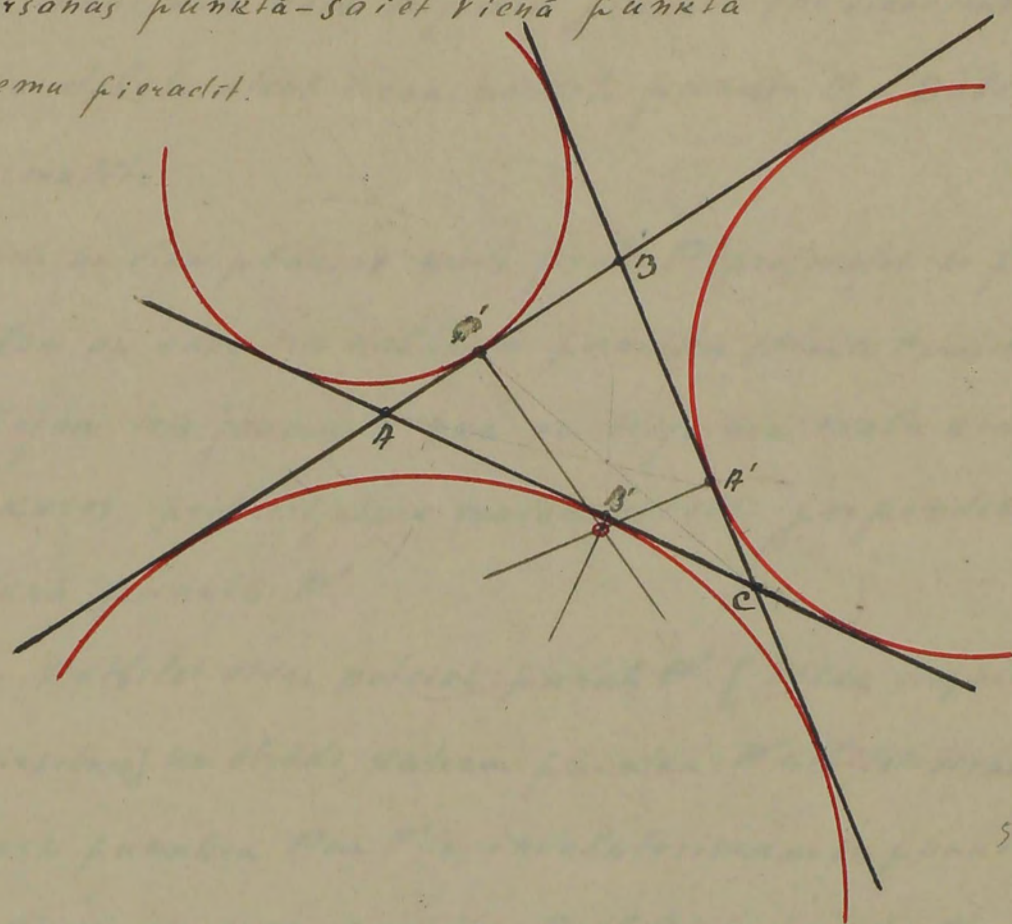
Ja ir dots trijstūris un uz katras viņa malas kāds punkts, kas dala malu tādos divos nogriežņos, ka to nogriežņu - kam nav kopēju galu - kvadratu summa ir vienāda ar pārējo nogriežņu kvadratu summu, tad dotos punktos pret trijstūra malām uzceltie perpendikuļi visi 3 saiet vienā punktā.

Kā zināms, ja pārdala katru trijstūra malu uz pusēm un dalījuma punktos uzceļ pret atbilst. malām perpendikuļus - viņi saiet vienā punktā.

Ar (apgrieztās) Steiner'a teoremas palīdzību var pierādīt šādu teoremu:

Ja ir dots trijstūris un viņam no ārpuses pievilkti trīs riņķi, tad perpendikuļi, kas uzcelti pret katru trijstūra malu šīs malas un kāda dotā riņķa saskaršanās punktā - saiet vienā punktā

- Pamēģināt pašiem šo teoremu pierādīt.



58.

Izogonalas līnijas un izogonali saistīti punkti.

[Šis nosaukums samērā jauns; minēto līniju un punktu jēdziens pazīstams jau Steiner'am.]

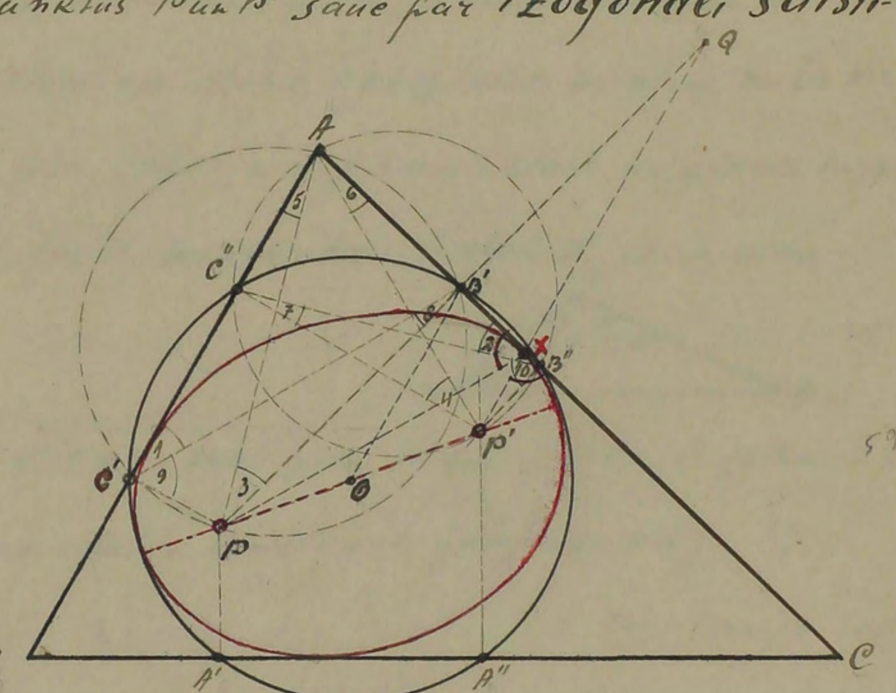
Ņemam trijstūri ABC un kādu punktu P. Punktu P varam izvēlēties trijstūra iekšpusē, ārpusē, vai arī uz kādas malas. Šoreiz ņemsim viņu trijstūra iekšpusē. Projecēsim viņu uz visām trijstūra malām un dabūsim punktus (punkta P projekcijas) A', B', C', kuri pilnīgi nosaka vienu riņķi. Vilksim caur šiem trīs punktiem riņķi un dabūsim otrus trīs punktus A'', B'', C'', kuros riņķis krusto trijstūra malas. — Izpētīsim, vai perpendikuli, kas uzcelti punktos A'', B'', C'' pret trijstūra malām nesaiet vienā punktā? Ja ņem vienu no šiem perpendikuliem, piemēram perpend., kas uzcelts no punkta A'' (Zīm. skat. nākošā lap. pusē), tad riņķa centrs O atrodas vidū starp šā perpendikuļa un taisnes OP krustošanās punktu P' un punktu P. To pašu atkārtojot ar perpend. uzceltiem no punkt. B'' un C'', redzam ka riņķa centrs O atrodas uz taisnes OP vidū starp punktu P un attiecīga perpend. un taisnes OP krustošanās punktu. Tātad visiem perp. un taisnei OP ir viens un tas pats krustošanās punkts d.i. — visi trīs perp. kas uzcelti punktos A'', B'', C'' - tiešām saiet vienā punktā P'

Ja punktu P būtu ņēmuši kaut kur dotā trijstūra plāksnē (ne tikai iekšpusē) izpildot aplūkoto konstrukciju dabūtu atkal vienu noteiktu punktu P'. – Dabūto slēdzienu (teoremu) varam formulēt:

> Ja ir dots trijstūris un viņa plāksnē kāds punkts P, projecējot šo punktu uz trijstūra malām un caur trīs dabūtiem punktiem (Punkta P projekcijām) velkot riņķi, dabujam trīs jaunus riņķa un trijstūra malu krustošanās punktus, kuros pret trijstūra malām uzcelti perpendikuļi visi trīs saiet vienā punktā P'

Tā tad katram punktam P atbilst viens noteikts punkts P' [Vēlāk redzēsim ka izņēmumu dod trijstūra virsotnes] un otrādi, katram punktam P' atbilst viens noteikts punkts P. Sakarība starp punktiem P un P' ir involutoriska un šo punktu konstrukcija ir inversibla t.i. – kā konstruējam punktam P atbilstošo punktu P', gluži tāpat konstruējam punktam P' atbilstošo punktu P.

Aplūkotā sakarībā saistītus punktus P un P' sauc par **izogonali saistītiem punktiem.**



Savienojam punktus: C' ar B', C'' ar B'', A ar P un A ar P' – dabujam veselu rindu leņķu. Tad aplūkojam četrstūrus AB'PC' un AB''P'C''. Katrā no šiem četrstūriem ir vienādi divi pretim guloši leņķi, kas ir taisni leņķi un summā dod 180°. Tā tad katram četrsturim var aprakstīt riņķi.

$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$, jo viņi atbalstās uz vienu un to pašu loku C''B'.

$\sphericalangle 4 = \sphericalangle 2$, " " " " " " palīga riņķa loku C''A

$\sphericalangle 3 = \sphericalangle 1$, " " " " " " " " " " AB'. Tamdēļ

$$\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4.$$

Tā dabujam divus taisnleņķa trijstūrus APB' un AP'C'', kuriem visi leņķi ir vienādi. Bet no tā seko, ka arī

$$\sphericalangle 5 = \sphericalangle 6$$

Tā tad stari kas vilkti no trijstūra virsotnes A caur punktiem P un P' izlaisa ar nošis virsotnes izejošiem trijstūra malām vienādus leņķus. To pašu varam pierādīt par stariem, vilktiem no pārējām divām trijstūra virsotnēm caur punktiem P un P'. Ar to ir noskaidrots, ka

Stari, kas vilkti no kādas trijstura virsotnes caur izogonali saistītiem punktiem P un P', veido ar no ņemtās virsotnes izejošām trijstūra malām vienādus leņķus; citādi sakot – šie stari ir simmetriski attiecībā uz ņemtā trijstūra leņķa bissektrisu.

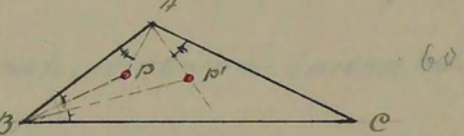
– Šos starus sauc par izogonalām taisnēm.

Savienojot punktus P un P' ar kaut kuru trijstūra virsotni dabujam divas izogonālas taisnes. Tamdēļ arī punkti P un P' nosaukti par izogonali saistītiem punktiem.

Punktam P izogonali saistīto punktu P' varam konstruēt:

1) Atrodot punkta P projekcijas uz trijstūra malām, velkot caur šiem trīs punktiem riņķi u.t.t. ko jau sākumā izdarījam

2) Velkot starus no divām trijstūra virsotnēm, piem. no virsotnēm A un B, caur punktu P un pēc tam no katras virsotnes staru, kas iztaisa ar otru no šīs virsotnes izejošu trijstūra malu tādu pat leņķi, kā pirmais stars ar pirmo trijst. malu. Kur šie abi stari krustojas, tur ir meklējamais punkts P' (skat. zīm.)



Ņemsim tagad trijsturus $C'PB'$ un $C''P'B''$. (skat. zīm. 51 lap. p.) Šie trijstūri ir līdzīgi, jo $\sphericalangle 7 = \sphericalangle 6$ (kā leņķi kas atbalstas uz vienu un to pašu loku $P'B''$)

$\sphericalangle 8 = \sphericalangle 5$ (" " " " " " " " PC') un tā tad

$\sphericalangle 7 = \sphericalangle 8$ (jo $\sphericalangle 5 = \sphericalangle 6$); bet

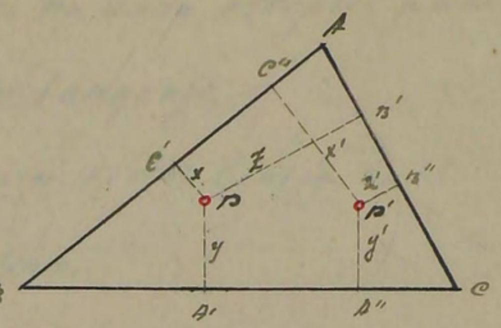
$\sphericalangle 9 = \sphericalangle 10$ (jo $\sphericalangle 9 = 90° - \sphericalangle 1$; $\sphericalangle 10 = 90° - \sphericalangle 2$ un $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$)

Tamdēļ starp aplūkojamo trijstūru malām pastāv proporcionalitāte

$\frac{PC'}{P'B''} = \frac{PB'}{P'C''}$ no kurienes seko, ka $PC' \cdot P'C'' = PB' \cdot P'B''$

Nogriežņi PC' un $P'C''$ ir punktu P un P' attālums no malas AB, PB' un $P'B''$ no malas AC. Tad esam pierādījuši teoremu:

Divu izogonali saistītu punktu attālumu no katras trijstura malas reizinājums ir pastāvīgs lielums.



61.

Ja punkta P attālumus no trijstūra malām apzīmē ar x, y, z un punkta P' attālumus ar x', y', z', tad pamatojoties uz tikko pierādīto teoremu dabujam sakarību

$$x\cdot x' = y\cdot y' = z\cdot z'$$

Punkta P attālumus no trijstūra malām x, y, z sauc par šī punkta trilinearām koordinatām (trijstūra koordinatām). Tapat attālumi x', y' un z' ir punkta P' trilinearās koordinatas.

Augstāk stāvošo sakarību varam uzrakstīt arī veidā

$$\frac{x}{\frac{1}{x'}} = \frac{y}{\frac{1}{y'}} = \frac{z}{\frac{1}{z'}}.$$

Tā tad punkta P trilinearās koord. ir proporcionelas ar punkta P' trilin. koordinatu inversiem lielumiem. Pamatojoties uz šo sakarību Mathieu's (1865.g.) punktus P un P' nosauc par inversiem punktiem attiecībā uz doto trijstūri. Šis nosaukums tagad izgājis no lietošanas.

Izogonali saistītu punktu P un P' projekcijas uz trijstūra malām ir 6 punkti, kuri visi atrodas uz viena riņķa. Savienojot abus izog. saistītos punktus dabujam taisnes nogriezni PP', uz kura vidus atrodas šā riņķa centrs.

Ja dots trijstūris un punkts P, konstruējam viņam izog. saistīto punktu P' (ar izogonalu taišņu palīdzību) un ņemot taisnes PP' vidus punktu dabujam riņķa centru, kas iet caur 6 punktiem A', B', C', A'', B'', C'' (t.i. - caur punktu P un P' projekcijām)

Pagarinām taisni PB' aiz punkta B' par gabalu B'Q = PB'. Dabūto punktu Q savienojam ar P'. Taisne P'Q krusto trijstūra malu punktā X. - Savienosim šo punktu (X) ar punktu P un pierādīsim, ka (skat. zīm. 51 lap.p.)

$$PX + P'X = const. = P'Q = \text{riņķa (O) diametrs}$$

lai ar kādu trijstūra malu nebūtu ņēmuši.

-Taisnes PX un P'X veido ar trijstūra malu AC vienādus leņķus (zīm. 51.l.p. sark. leņķi)

Tā ir pazīstama ellipses īpašība: radiusi vektori izejoši no kāda ellipses punkta veido vienādus leņķus ar šinī punktā ņemtu ellipses tangenti.

Aplūkosim trijstūri PQP'. Taisne OB' ir šā trijstūŗa vidus līnija un t.t.

$$P'Q = 2\,OB' = 2R \text{ (riņķim } O) = \text{diam.}$$

Bet $Px = xQ$ un tamdēļ $Px + P'x = P'Q$. Ar to ir skaidrs, ka

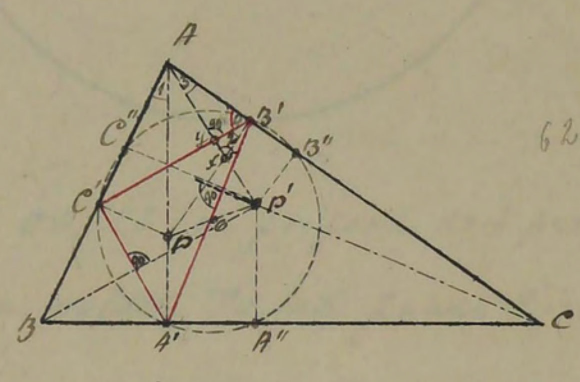
$$Px + P'x = 2R = (\text{riņķa } O) \text{ diametrs}$$, kas arī ir pazīstama ellipses īpašība (rad. vekt. summa ir pastāvīgs lielums).

Tā tad punkts x pieder ellipsei, kam par fokusiem ir izogonali saistītie punkti P un P'. Šīs ellipses centrs atrodas riņķa centrā O un viņas lielā ass ir riņķa (O) diametrs. — Ellipse ir ierakstīta ne tikai trijstūrī, bet arī riņķī. [Tikko pierādītais attiecas uz gadījumu, kad punkts P atrodas trijstūŗa iekšpusē, jo tad arī punkts P' atrodas iekšpusē]. Trijstūra malas AB, BC un CA ir ellipses pieskares.

Kā tiešu secinājumu augstāk pierādītā dabujam teorēmu:

> Ja no kāda punkta ārpus ellipses velk viņai tangentes un šo punktu savieno ar ellipses fokusiem, tad abi tabūtie stari veido ar no ņemtā punkta izejošām tangentēm vienādus leņķus; citādi sakot — abi stari ir simmetriski attiecībā uz tangenšu veidotā leņķa bissektrisu.

[Piem. 51. l. p. no punkta A vilktie stari AP un AP' ir simmetr. attiec. uz tangenšu AB un AC veidotā leņķa bissektrisu]



Savienojot punkta P projekcijās uz trijstūŗa malām A', B' un C' dabujam trijstūri $A'B'C'$, kuŗu nosauksim par projekciju trijstūri (vācu valodā — Fusspunktdreieck, franču val. — triangle podaire). Katram punktam P dotā trijstūŗa plāksnē atbilst viens projekciju trijstūris. — Meklēsim sakaru starp projekciju trijstūŗa malām un izogonalēm AP un AP'

$$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2 = \sphericalangle 3 \quad \text{(skat. zīm. 51. l. p.)}$$

$$\sphericalangle 3 + \sphericalangle 5 = 90^\circ\,; \quad \sphericalangle 2 + \sphericalangle 5 = 90^\circ$$, no kā seko, ka arī

$$\sphericalangle B'yx = 90^\circ$$

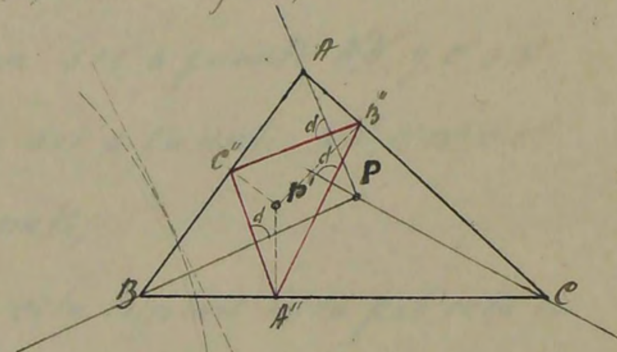
Tā tad taisne AP' ir perpendikulara projekciju trijstūŗa malai $B'C'$. Tādā pat ceļā var pierādīt, ka taisne BP' ir perpend. proj. trijst. malai $A'C'$ un taisne CP' perpend. malai $A'B'$.

Dabūtos rezultātus var izteikt teoremā:

Projekciju trijstūŗa malas ir perpendikularas stariem, kas savieno punktam P izogonali saistīto punktu P' ar dotā trijstūŗa virsotnēm.

Izlietojot šo teoremu viegli izpildīt sekojošu konstrukciju:

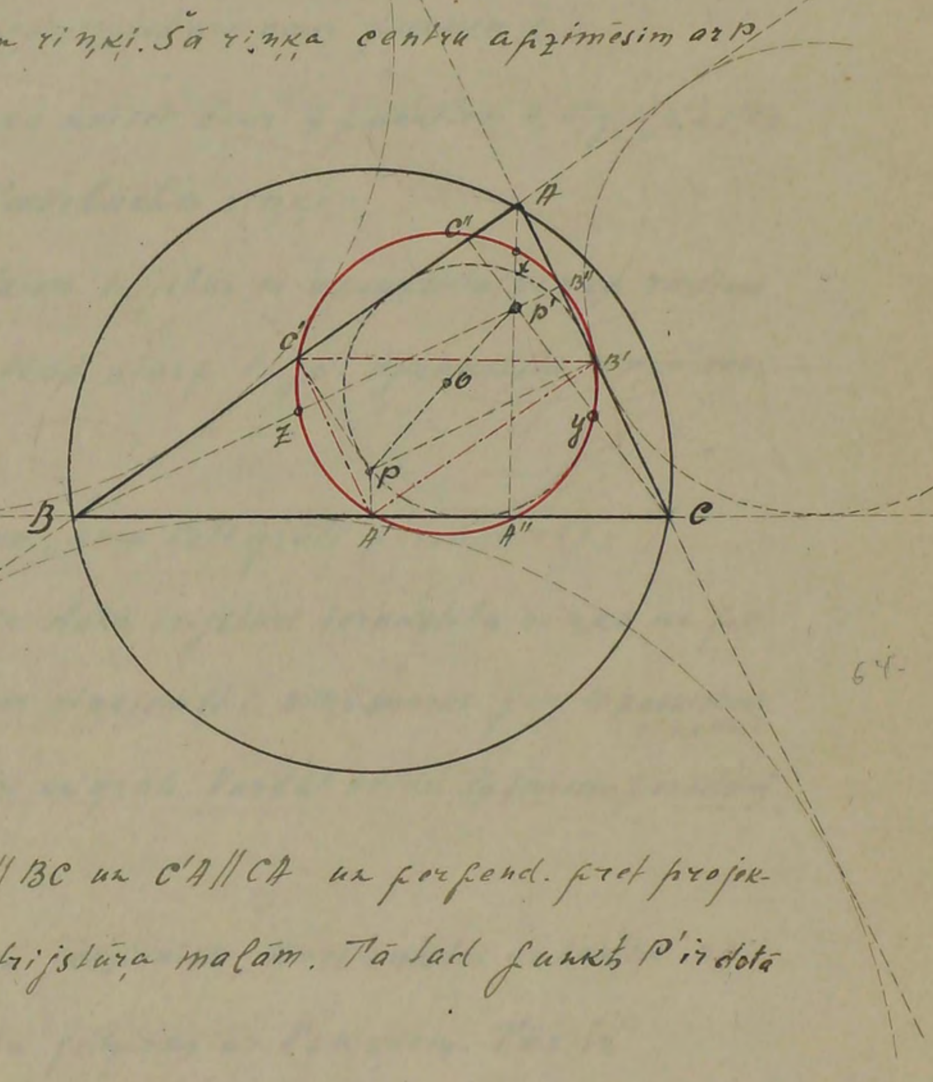
Dotā trijstūrī konstruēt jaunu trijstūri tā, lai viņa malas būtu perpendikularas stariem, kas savieno kādu punktu ar dotā trijstūŗa virsotnēm.



63.

Ja dotais punkts ir P, atliek konstruēt viņam izogonali saistīto punktu P' un pēc tam šim punktam atbilstošo projekciju trijstūri, kas būs meklējamais trijstūris.

Ņemsim trijstūri ABC un aprakstīsim viņam riņķi. Šā riņķa centru apzīmēsim ar P, un meklēsim viņam izogonali saistīto punktu P'. Tanī nolūkā konstruēsim punktam P atbilstošo projekciju trijstūri $A'B'C'$ un vilksim no virsotnes A perpendikuli pret proj. trijst. malu $B'C'$ un virs. C perpend. pret malu $A'B'$ (vai arī no virsotnes B perp. pret malu $A'C'$). Kur šie perpendikuli krustojas, tur ir meklētais punkts P'. — Punkti A', B' un C' ir dotā trijstūŗa malu vidus punkti (jo perpend., kas nolaists no riņķa centra uz hordu iet caur viņas vidus punktu). Tamdēļ taisnes $A'B' \parallel AB$, $B'C' \parallel BC$ un $C'A' \parallel CA$ un perpend. pret projekciju trijstūŗa malām ir perpend. arī pret dotā trijstūŗa malām. Tā tad punkts P' ir dotā trijstūŗa ortocentrs. Tā tad



64.

Trijstūrim aprakstīta riņķa centram izogonali saistītais punkts ir dotā trijstūŗa ortocentrs.

Vai arī — Katrā trijstūrī malu vidus punkti un šā trijst. augstumu pamati atrodas uz viena riņķa. (Šo riņķi var nosaukt par 6 punktu riņķi)

Caur punktiem $A', B', C', A'', B'', C''$ ejošā riņķa (t.i. – caur punktu P un P' projekc. uz trijstūra malām ejošā riņķa) centrs atrodas vidū starp trijstūrim apraksītā riņķa centru un trijstūra orto centru.

Aplūkosim trijstūri $BP'C$ (zīm. skat. iepr. l.p.). Apzīmēsim malas CP' vidus punktu ar y, malas BP' vidus punktu ar z.

Punkts A' ir vidus punkts un punkts A'' augstuma pamats malai BC

" y " " " " " C'' " " " CP'

" z " " " " " B'' " " " BP'

Pamatojoties uz iepr. pierādīto teorēmu, var teikt ka šie 6 punkti A', A'', y, C'', z, B'' atrodas uz viena riņķa. Kā zinām uz viena riņķa atrodas arī 6 punkti $A', A'', B', B'', C', C''$. Šie abi riņķi ir identiski, jo viņiem ir kopīgi 3 punkti.

Ja taisnes AP' vidus punktu apzīmējam ar x, ņemot citu trijstūri tādā pat ceļā varam konstatēt, ka šis riņķis (kas iet caur $A', A'', B', B'', C', C''$) iet arī caur punktu x.

Tā tad attiecībā uz doto trijstūri eksistē riņķis kas iet caur 9 punktiem $A', A'', y, B', B'', z, C'', C', x$.

Šo riņķi sauc par deviņu punktu riņķi jeb Feuerbacha riņķi.

Feuerbacha riņķa radiuss ir puse no dotam trijstūrim apraksītā riņķa radiusa (to noskaidrot pašiem) un viņa centrs atrodas vidū starp trijst. apraksītā riņķa centru un trijstūra orto centru.

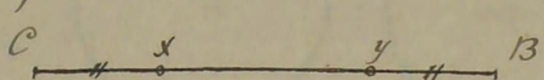
Attiecībā uz Feuerbacha riņķi pastāv teorēma (kuŗa ļoti grūti pierādama):

> Feuerbacha riņķis pieskaras pie dotā trijstūrī ierakstīta riņķa un pie visiem 3 trijstūrim pierakstītiem riņķiem (t.i. – viņš skaras pie 4 punktiem riņķiem)

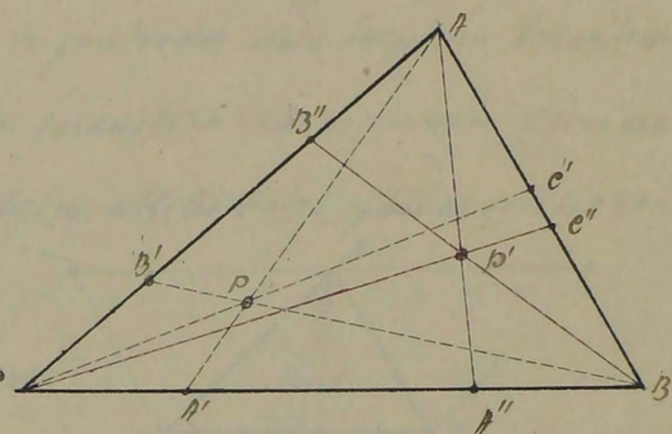
[šai teorēmai ap 40 pierādījumu, bet visi gaŗi un grūti. Varbūt vēlāk šo teorēmu pierādīsim]

Noskaidrosim vēl vienu no fundamentāliem jēdzieniem, kurš saistās ar taisņu nogriežņiem līdzīgi kā izogonāli saistītu punktu jēdziens ar leņķiem. Tas ir

Izotomiski saistītu punktu jēdziens.

Ja ir dots kāds taisnes nogrieznis CB un divi punkti, kas vienādi attālināti no nogriežņa galiem, tad šos punktus sauc par  65
izotomiskiem punktiem attiecībā uz doto nogriezni CB. (zīm. punkti x un y)

Ņemam trijstūri ABC un viņā kādu punktu P. Savienojam šo punktu P ar trijstūra virsotnēm un dabūto staru krustošanās punktus ar trijstūra malām apzīm. ar A', B' un C'. Tad konstruējam uz trijstūra malām šiem punktiem izotomiskus punktus A'', B'', C''.



66.

Savienosim tagad punktus A'', B'', C'' ar pretējām trijstūra virsotnēm un pierādīsim ka šie stari vienmēr saiet vienā punktā P'.- Pierādījumam izlietosim Ceva teoremu. Uz šīs teoremas pamata varam rakstīt, ka

$$AB' \cdot CA' \cdot BC' = CB' \cdot AC' \cdot BA'. \quad \text{Bet}$$

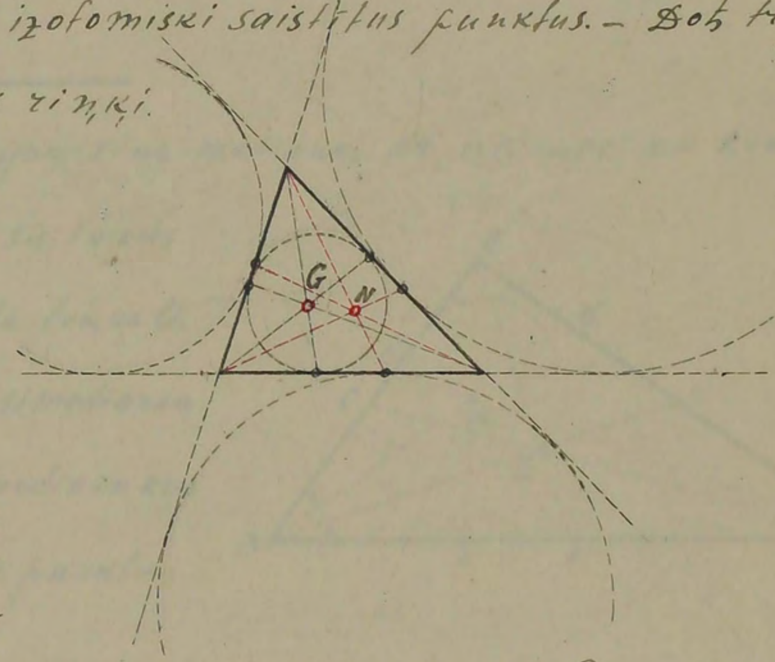
$$AB' = CB''; \quad CA' = BA''; \quad BC' = AC'';$$

$$CB' = AB''; \quad AC' = BC''; \quad BA' = CA''$$ un no pirmās sakarības dabujam sakarību

$$CB'' \cdot BA'' \cdot AC'' = AB'' \cdot BC'' \cdot CA'',$$ kas nozīmē (pamat. uz Ceva apgriezto teoremu) ka trīs aplūkojamie stari iet caur vienu punktu P'. Šo punktu P' sauc par punkta P izotomiski saistītu punktu attiecībā uz doto trijstūri.

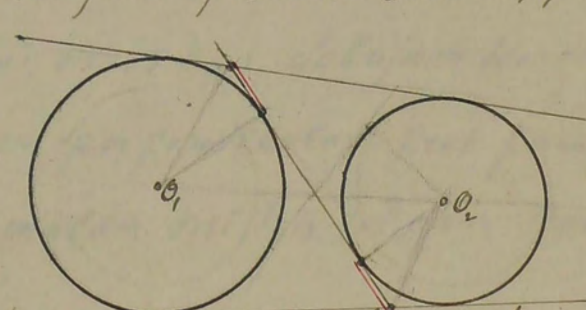
Sakarība starp diviem izotomiski saistītiem punktiem P un P' atkal ir involutoriska.

Apskatīsim piemēru, kas dod divus izotomiski saistītus punktus.- Dots trijstūris un viņā ierakstīts un trīs pierakstīti riņķi.



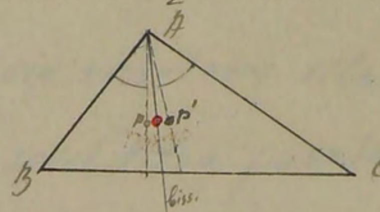
67.

Stari kas savieno iekšējā riņķa pieskaršanās punktus ar pretējām trijstūra virsotnēm iet caur vienu punktu G, kuru sauc par Georgonne punktu. Arī stari, kas savieno pierakstīto riņķu un trijstūra malu pieskaršanās punktus ar pretējām trijst. virsotnēm iet caur vienu punktu N, kuru sauc par Nagel'a punktu. Georgonne punkts G un Nagel'a punkts N ir izotomiski saistīti punkti attiecībā uz doto trijstūri. To viegli pierādīt lietojot apgriezto Ceva teoremu un sekojošu tangenšu īpašību:- divu riņķu kopējas iekšējas tangentes nogrieznis starp šās tangentes un mazākā (pirmā) riņķa skaršanās punktu un viņas krustoš. punktu ar kopējo ārējo tangenti ir vienāds ar iekšējās tang. nogriezni starp lielākā (otrā) riņķa un šīs tang. skarš. punktu un viņas krust. punktu ar otru kop. ārējo tangenti.

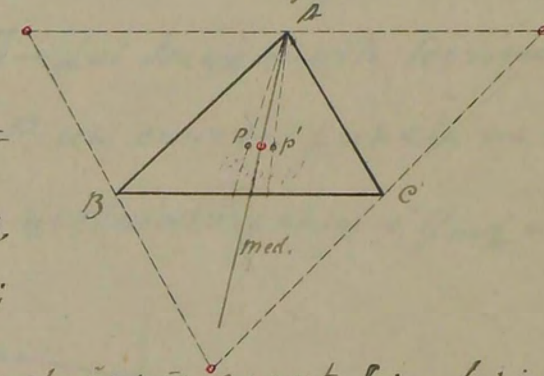


68.

Apskatīsim, vai ir iespējams punkts, kas būtu izogonali vai arī izotomiski saistīts pats ar sevi? — Ja punkts P tiecas uz punktu P', izogonales, kas iziet no viena leņķa tiecas saplūst ar šā leņķa bissektrisu. 69.



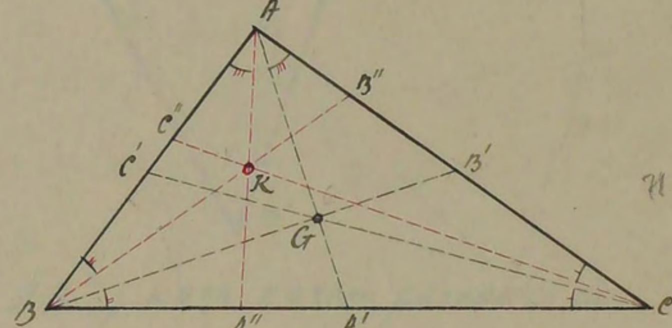
Tā tad izogonali pašam ar sevi saistītam punktam ir jāatrodas dotā trijstūra bissektrisu krustošanās punktā. Kā zināms, tāds punkts ir trijstūrī ierakstītā vai arī viņam pierakstīta riņķa centrs. Ar to ir skaidrs, ka katram trijstūrim atbilst četri paši ar sevi izogonali saistīti punkti.



Tā pat viegli ir iedomāties, ka diviem izotomiski saistītiem punktiem savirzoties kopā, stari uz kuriem viņi atrodas, sakrīt ar atbilstošās malas medianu. Tā tad izotomiski 70. pats ar sevi saistīts punkts ir trijstūra medianu krustošanās punkts t. i. — trijstūra smaguma centrs. — Velkot caur dotā trijstūra virsotnēm taisnes paralelas ar šā trijstūra malām dabujam jaunu trijstūri, kuŗa virsotnes ir paši ar sevi izotomiski saistīti punkti attiecībā uz doto trijstūri. Tā tad katram trijstūrim atbilst četri paši ar sevi izotomiski saistīti punkti

---

Ņemam kādu trijstūri ABC, uzzīmējam viņa medianas AA', BB' un CC' un konstruējam medianām izogonales AA'', BB'', CC''. Šīs taisnes ir simetriskas medianām attiecībā uz ņemtā leņķa bissektrisu. Tamdēļ arī viņas nosauktas par simedianām 71. (šis nosaukums ievests no d. Ocagne). Simedianu krustošanās punktu K sauc par Lemoine punktu.



Tā tad

Trijstūŗa medianu un simedianu krustošanās punkti G un K ir izogonali saistīti punkti attiecībā uz šo trijstūri.

Kā blakus rezultātu no iepriekš pierādītā (skat 54-55 l. p.) dabujam teoremu:

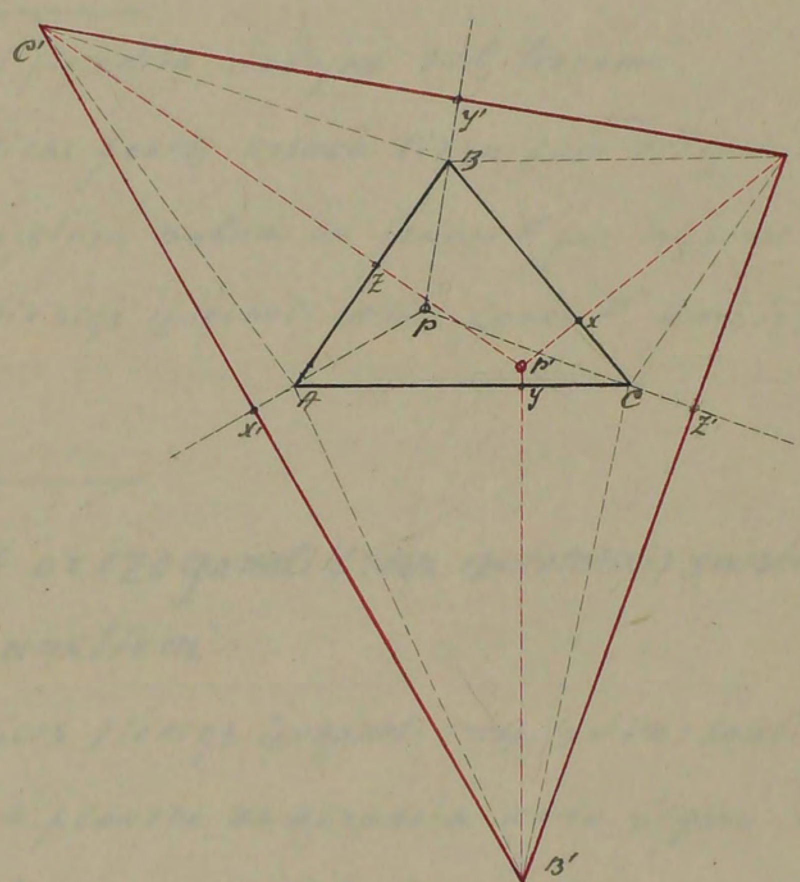
Stari, kas vilkti no dotā trijstūŗa virsotnēm perpendikulari pret punktam P atbilstošā projekciju trijstūŗa malām, visi trīs iet caur punkta P izogonali saistīto punktu P'.

Pieradīsim tagad, ka vispārīgi

Ja ir divi trijstūri un ja no pirmā trijstūra virsotnēm vilkti perpendikuļi pret otrā trijstūra malām saiet vienā punktā, tad arī otrādi — no otrā trijstūra virsotnēm pret pirmā trijstūra malām vilkti perpendikuļi saiet vienā punktā.

— Šādus divus trijstūrus sauc par ortologiem trijstūriem.

[Šo trijstūru īpašību konstatējis jau Steiner's.] — Lai tikko minēto teoremu pierādītu, ņemsim trijstūri ABC, viņā kādu punktu P un caur šo punktu un trijstūra virsotnēm vilksim starus. Uz dabūtiem stariem izvēlesimies punktus x', y' un z' un caur šiem punktiem vilksim perpendikuļus pret stariem AP, BP un CP. Tā dabūjam jaunu trijstūri $A'B'C'$. Pierād. ka arī no trijstūra $A'B'C'$ virsotnēm pret dotā trijstūra malām vilkti perpendikuļi saiet vienā punktā P'. — Šo perpend. krustoš. punktus ar dotā trijstūra malām apzīm. ar x, y un z. Ja stari $A'x$, $B'y$ un $C'z$ saiet vienā punktā, tad starp viņu radītiem nogriezņiem uz trijstūra malam jāpastāv sakarībai



$$Ay^2 + Cx^2 + Bz^2 = yC^2 + xB^2 + zA^2,$$ kaŗu varam pārakstīt šādi

$$(Ay^2 - yC^2) + (Cx^2 - xB^2) + (Bz^2 - zA^2) = 0.$$

No taisnleņķa trijstūriem $B'Ay$ un $B'Cy$ seko ka $Ay^2 - yC^2 = AB'^2 - CB'^2$

„ „ „ $A'Cx$ „ $A'Bx$ „ „ $Cx^2 - xB^2 = CA'^2 - BA'^2$

„ „ „ $C'Bz$ „ $C'Az$ „ „ $Bz^2 - zA^2 = BC'^2 - AC'^2$.

Tā tad ja būs apmierināta sakarība

$$(AB'^2 - CB'^2) + (CA'^2 - BA'^2) + (BC'^2 - AC'^2) = 0,$$

tad būs apmierināta arī augstāk dotā sakarība. Šo sakarība varam novostujaunusak., ja aplūkojam vēl citus taisnleņķa trijstūru pārus.

No taisnleņķa trijstūriem $C'Ax'$ un $B'Ax'$ dabujam, ka $AB'^2 - AC'^2 = B'x'^2 - C'x'^2$

" " " $A'By'$ " $C'By'$ " " $BC'^2 - BA'^2 = C'y'^2 - A'y'^2$

" " " $B'Cz'$ " $A'Cz'$ " " $CA'^2 - CB'^2 = A'z'^2 - B'z'^2$

un tā no iepriekšējās sakarības dabūjam

$$(B'x'^2 - C'x'^2) + (C'y'^2 - A'y'^2) + (A'z'^2 - B'z'^2) = 0$$

Bet šī pēdējā sakarība tiešām tiek apmierināta, jo viņā saistītos nogriežņus dabujam velkot no punkta P perpendikuļus pret trijstūra $A'B'C'$ malām. Līdz ar to tiek apmierināta arī pierādamā sakarība (59. l.p. pirmā sak.) un tātad stari $A'x$, $B'y$ un $C'z$ iet caur vienu punktu. Ar to ir pierādīts, ka ortologi trijstūri tiešām eksistē.

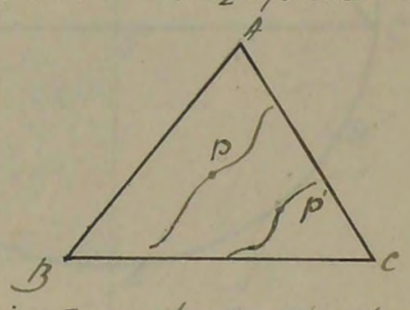
Kā blakus rezultātu no iepriekš pierādītā, dabujam vēl teoremu:

Trīs tangentes un viens fokuss nosaka vienu pašu ellipsi.

[Jo ja šās trīs tang. uzskatam par trijstūra malām un fokusu F par trijstūr. dota punktu — punktam F atbilst viens vienīgs izogonali saistīts punkts F', kurš ir trijstūrī ierakstītas ellipses otrs fokuss]

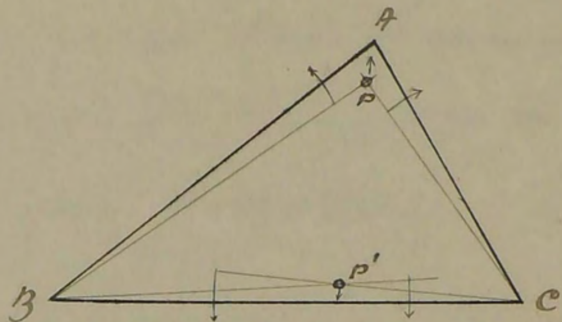
Ģeometriskas transformacijas ar izogonali (resp. izotomiski) saistītiem punktiem.

Katram punktam P atbilst viens vienīgs izogonali (resp. izotom.) saistīts punkts P'. Ja punkts P kustas dotā trijstūra plāksnē un apraksta kādu figuru tad kustas arī viņam izog. saistītais punkts P' un apraksta citu figuru. Tā ar izogonali saistītu punktu palīdzību viena geometriska figura transformējas citā figurā. Šādai transformacijai sevišķa nozīme gadījumos, kad viņa komplicētu figuru pārtransform. (atspoguļo) vienkāršākā.



[Analit. geom. kursā redzējām, ka II pak. līniju gadījumā katram punktam atbilst viena taisn. līnija — šā punkta polare; un katrai taisn. līnijai atbilst viens punkts — šīs taisnes pols. Arī šī sakarība dod iespēju izdarīt geom. transformaciju. Punktam kustoties pa kādu līniju L_1, viņa polares ietver kādu citu līniju L_2]

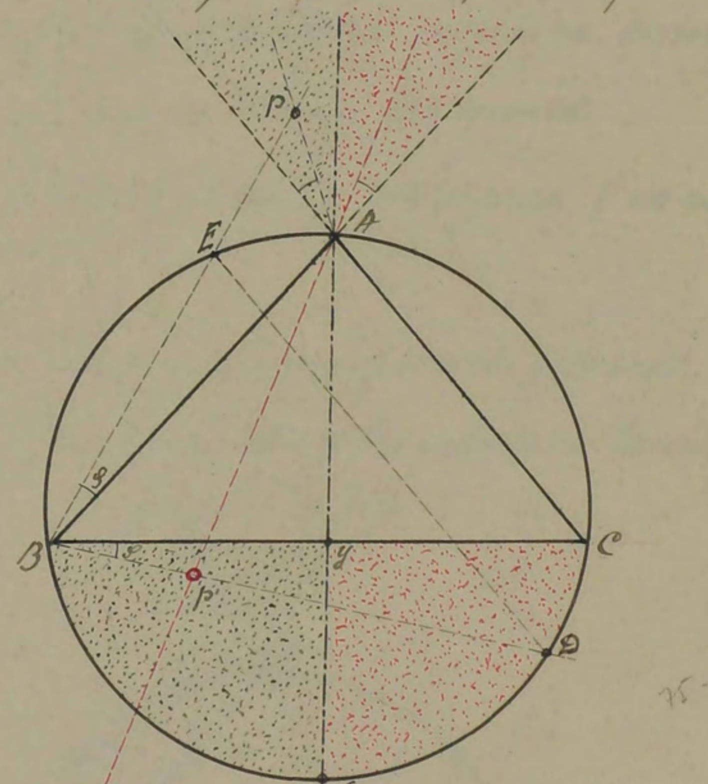
Noskaidrosim, kur atrodas dotā trijstūra ABC virsotnēm izogonali saistītie punkti? — Ja vēlēsimies punkta P ļoti tuvu pie trijstūra virsotnes A un konstr. viņa izogonali saistītu punktu P'. Savienosim punktu P ar trijstūra virsotnēm B un C un zīmēsim šiem stariem izogonalās taisnes. Kur šās izog. taisnes krustojas, tur ir punkta P izog. saistītais punkts P'. Ja punkts P tiecas ieiet virsotnē A (t.i. sakrīt ar A) viņam izog. saistītais punkts P' tiecas uz malu BC. Ja P atrodas virsotnē A, P' atrodas uz malas BC. Atkarībā no tā, kādā virzienā punkts P ieiet punktā A (virsotnē), P' var ieņemt uz līnijas BC dažādus stāvokļus. [Katram virzienam atbilst viens noteikts stāvoklis]. Ar to ir skaidrs, ka katrs līnijas BC punkts (arī viņas pagarinājuma) var tikt uzskatīts par punkta A izogonali saistītu punktu. Tālad A ir (sevišķs) singulārs punkts. To pašu rezultātu dabujam aplūkojot divas pārējās trijstūra virsotnes B un C. Tālad



74

Katram trijstūrim ir trīs singulari punkti — trīs viņa virsotnes.

Ņemsim tagad trijstūri ABC, apvilksim viņam riņķi un noskaidrosim, kur atrodas to punktu P izogonali saistītie punkti, kas ņemti plāksnes daļā starp divu trijstūra malu pagarinājumu. [Analītiskā ceļā ir noskaidrots, ka to punktu, kuri atrodas starp divu trijstūra malu pagarinājumu – izogonali saistītie punkti atrodas atbilstošai (ņemtai) trijstūra virsotnei pretim stāvošā riņķa segmentā.] Izvēlēsimies punktu P starp malu pag. aiz trijstūra virsotnes A. Tad vilksim leņķa A bisektrisu Ax. Punkts P atrodas pa kreisi no bisektrisas. Savienojam P ar A un zīmējam šim staram izogonālo (zīm. sarkanā līnija). Punktam P izog. saistītais punkts P'



75

atradīsies kaut kur uz šīs sarkanās izogonales. Savienosim vēl vienu no virsotnēm, piem. virsotni B ar punktu P un zīmēsim šim staram izogonalo taisni. Kur dabūtā taisne krustojas ar sarkano taisni, tur atrodas meklējamais punkts P' [Punktu P' varējam konstruēt arī šādi: Velkam caur punktu E taisni paralēlu ar trijst. malu AC. Savienojot šīs taisnes un riņķa krustoš punktu ar B rodas taisne, kas ir izogonala ar BP u.t.t. Viņas krust. punkts ar

sarkano taisni ir meklētais punkts P'] Tagad jānoskaidro vai punkts P' var iziet
no ~~sektora~~ segmenta BCx laukumā? Kādi būs leņķa φ robežas, lai P' nepaliek no šā sektora?
Maksimālais φ būs tad, ja būs BP būs paralēla bisektrisei.

Punktiem P, kas ņemti bissektrisas kreisā pusē izogon. saistītie punkti P' atrodas sektorā Byx. Tapat varam pieradīt, ka labā pusē no bissektrisas ņemtiem punktiem izogonāli saistītie punkti atrodas sektorā Cyx.

Tā tad ar izogonāli saistītiem punktiem plāknes daļa, kas atrodas starp trijstūra malu pagarinājumu aiz virsotnes A, transformējas riņķa segmentā, ierobežotā ar loku BC un hordu BC.

Ja punkts P būtu ņemts minētā segmentā – viņa izogonāli saist. punkts P' atrastos aiz virsotnes A starp trijstūra malu pagarinājumu.

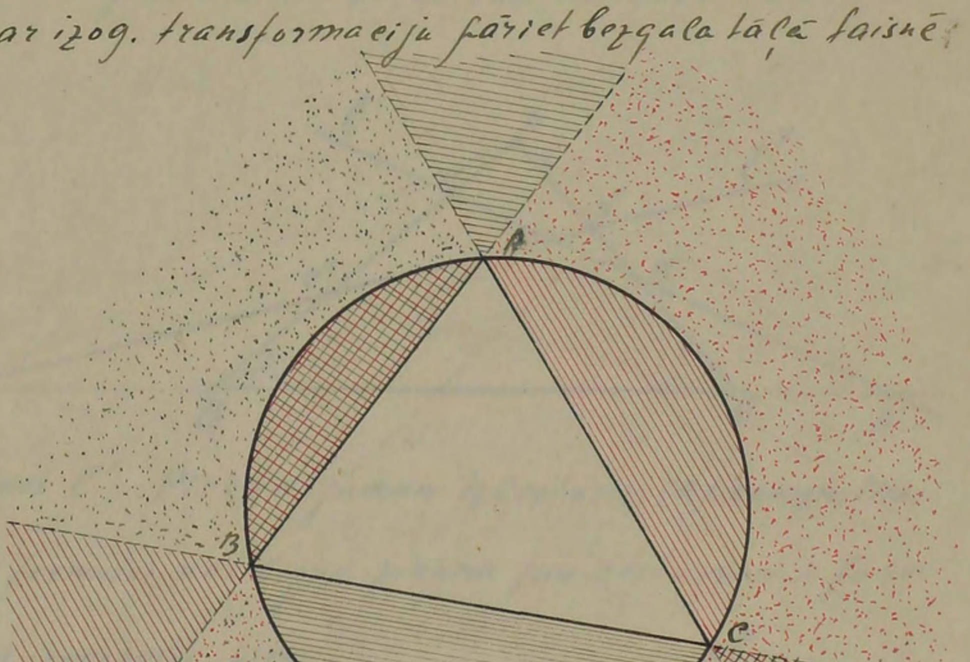
Izdarot transformaciju ar attiecībā uz trijstūri ABC izogonāli saistītiem punktiem, plāknes daļas transformējas šādi:

Plāknes daļas starp trijstūra malu pagarinaj. aiz kādas trijstūra virsotnes pāriet šai mai pretim stāvošā trijsturim apraksītā riņķa segmentā.

Plāknes daļas, kas atrodas starp trijst. malu pagarin. un riņķa loku pāriet pašas sevī

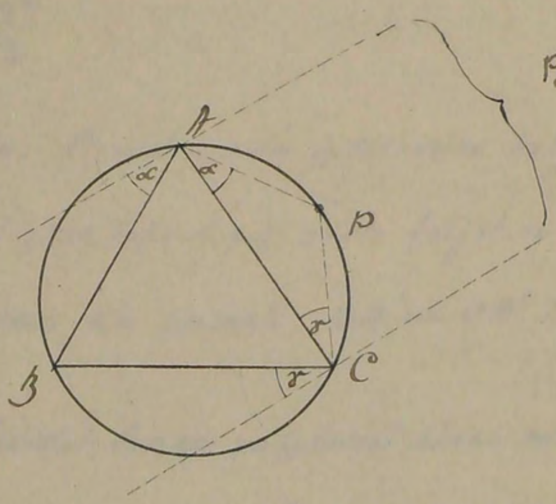
Plāknes daļa, ko ieslēdz trijstūra malas (trijstūra iekšiene) pāriet pati sevī.

Trijstūrim aprakstītais riņķis ar izog. transformaciju pāriet bezgala tālā taisnē; (ko tūliņ pierādīsim).



76.

Ņemsim trijstūri ABC, aprakstīsim viņam riņķi un meklēsim kāda riņķa punkta P izogonāli saistīto punktu P'. Savienosim punktu P ar A un C. Leņķus, ko šie stari veido ar trijstūra malu AC apzīm. ar α un γ. Tad konstruējam stariem AP un CP izogonālas līnijas, kuru krustošanās punkts ir meklētais punkts P'. 77 Bet abas šīs taisnes ir savā starpā paralēlas



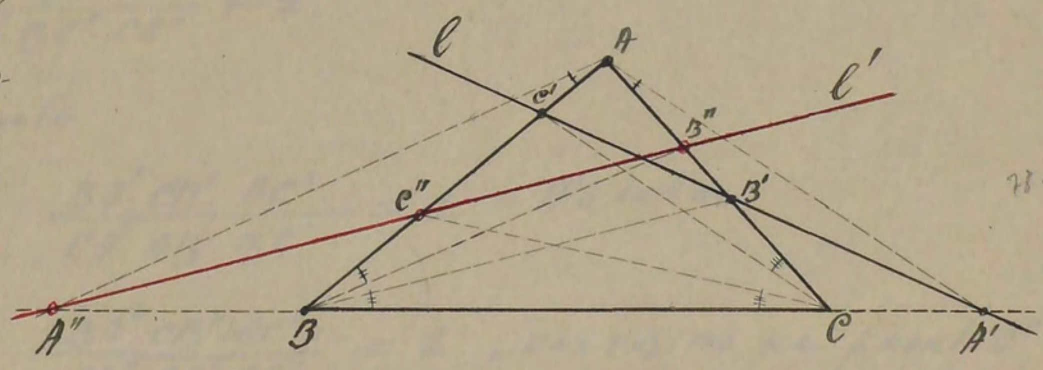
(to noskaidrot pašiem). Tamdēļ viņu krustošanās punkts atrodas bezgalīgi tālu. Tāpat visu pārējo riņķa punktu izog. saistītie punkti ir bezgal. tāli punkti. Šie punkti izlaisa bezgal. tālu (līniju) taisni. Tātad transformējot ar izog. punktiem riņķis pāriet bezgalīgi tālā taisnē un otrādi — bezgalīgi tāla taisne pāriet riņķī.

Noskaidrosim vēl

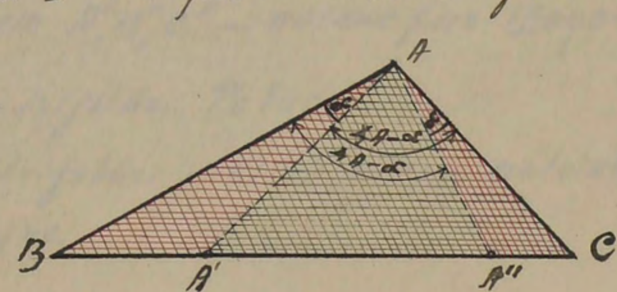
Izogonāli saistītu un savstarpēju jeb reciproku (izotomiski saistītu) taisņu jēdzienus.

Pieņ. ka dota kāda taisne un izejot no izogonālās radniecības mēģināsim atrast jaunu taisni, kas būtu noteiktā kārtā saistīta ar doto.

Ņemsim kādu trijstūri ABC un taisni l, kas šķeļ trijstūra malas (taisne l varētu būt arī tāda, kas iet ārpus trijstūra t.i. kas krusto trijst. malu pagarinājumus). Apzīmēsim šās taisnes un trijstūra malu krustoš. punktus ar A', B', C'. Tad savienosim šos punktus ar pretējām trijstūra virsotnēm un konstruēsim dabūtām taisnēm izogonales. Izogonales krusto dotā 78 trijstūra malas trīs jaunos punktos A'', B'', C''. Kā tūliņ pierādīsim —



— šie 3 punkti atrodas uz vienas taisnes l'. Pierādījumam izlietosim (apgriezto) Menelaja teorēmu un klasisku sakarību (formulu), kas bijusi zināma jau Steineram. — Ja no kādas trijstūra virsotnes velkam divas izogonales, piem. no virsotnes A izogonāles AA' un AA'', minētā formula saista nogriežņus, kas rodas uz virsotn. A pretim stāvošas malas,



ar pārejām divām trijstūra malām šādā sakarībā:

$$\frac{BA' \cdot BA''}{CA' \cdot CA''} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

Vispirms pierādīsim šīs formulas pareizību. Pierādījumam izlietosim trijstūra laukumus. – Ņemsim trijstūrus BAA' un $A'AC$ (skat zīm. iepr. l. p.) Šiem trijst. ir vienādi augstumi; tamdēļ viņu laukumi L_1 un L_2 attiecas kā pamati BA' un CA' t. i.

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{BA'}{CA'}$$ Ievedot leņķus un izteicot atkar. no viņiem laukumus

dabujam, ka $\frac{AB \cdot AA' \sin\alpha}{AA' \cdot AC \sin(A-\alpha)} = \frac{BA'}{CA'}$; $\frac{AB \cdot \sin\alpha}{AC \sin(A-\alpha)} = \frac{BA'}{CA'}$ ------- (1)

Tādā pat ceļā no trijstūriem BAA'' un $A''AC$ dabujam, ka

$$\frac{AB \cdot AA'' \sin(A-\alpha)}{AC \cdot AA'' \sin\alpha} = \frac{BA''}{CA''}; \quad \frac{AB \sin(A-\alpha)}{AC \sin\alpha} = \frac{BA''}{CA''} \text{ ----- (2)}$$

Sareizinot formulas (1) un (2), dabujam augšā stavošo formulu.

Tagad pierādīsim ka punkti A'', B'', C'' atrodas uz vienas taisnes (skat. ridējo zīm. 63 l. p.)

Attiecībā uz virsotnes A izogonalēm pastāv sak.: $\frac{BA' \cdot BA''}{CA' \cdot CA''} = \frac{BA^2}{CA^2}$

" " " B " " " $\frac{CB' \cdot CB''}{AB' \cdot AB''} = \frac{CB^2}{AB^2}$

" " " C " " " $\frac{AC' \cdot AC''}{BC' \cdot BC''} = \frac{AC^2}{BC^2}$

Sareizinot šīs trīs formulas dabujam.

$$\frac{BA' \cdot CB' \cdot AC'}{CA' \cdot AB' \cdot BC'} \cdot \frac{BA'' \cdot CB'' \cdot AC''}{AB'' \cdot BC'' \cdot CA''} = 1.$$

Uz tiešās Menelaja teoremas pamata

$$\frac{BA' \cdot CB' \cdot AC'}{CA' \cdot AB' \cdot BC'} = 1.$$ Tā tad arī

$$\frac{BA'' \cdot CB'' \cdot AC''}{AB'' \cdot BC'' \cdot CA''} = 1$$, kas nozīmē, ka punkti A'', B'', C'' atrodas uz vienas taisnes l' (slēdziena pamats: apgrieztā Menel. teorēma).

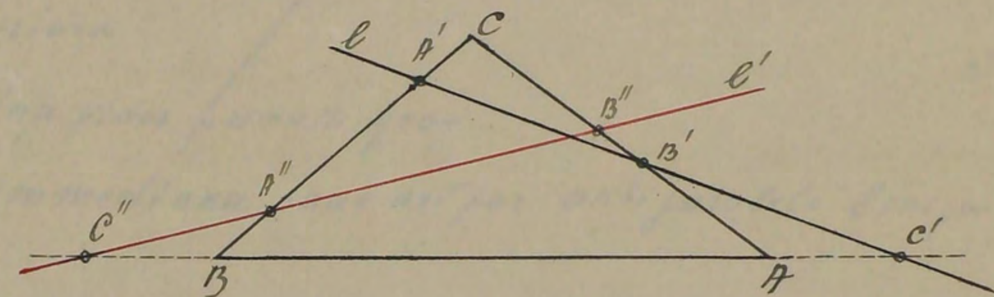
Šo taisni l', kura iet caur trīs aplūkotiem punktiem A'', B'', C'' – nosauc par izogonali saistītu taisni dotai taisnei l attiecībā uz doto trijstūri. Tā tad

Katrai taisnei attiecībā uz doto trijstūri atbilst viena noteikta ar viņu izogonali saistīta taisne

Arī ar izogonali saistītu taišņu palīdzību varam izdarīt geometriskas transformacijas. Piem. doto daudzstūri (kuru veido taisnes l) varam pārtransformēt jaunā daudzstūrī (kuru veido taisnes l')

Mēģināsim tagad izejot no izotomiskās radniecības atrast ar kādu doto taisni noteiktā kārtā saistītu taisni.

Ņemsim atkal trijstūri ABC un šķelsim viņu ar taisni l (šo taisni varam ņemt arī tādu, kas iet ārpus trijstūra un krusto viņa malu pagarinājumus). Taisne l krusto trijstūra malas punktos A', B', C'. Tad konstruejam punktiem A', B', C' izotomiski saistītus punktus A'', B'', C''. Šie trīs jaunie punkti arī atrodas uz vienas taisnes l' [To pierādīt pašiem pielietojot tiešo Menel. teoremu taisnei l un trijstūrim ABC un pēc tam punktu A', B', C' radītos nogriežņus Menel. formulā apmainot ar punktu A'', B'' un C'' radītiem nogriežņiem]. Šādas taisnes l un l' sauc parsavstarpīgām jeb recipŗokām taisnēm. Tā tad



80

Katrai taisnei attiecībā uz doto trijstūri eksistē viena noteikta recipŗoka (savstarpīga) taisne.

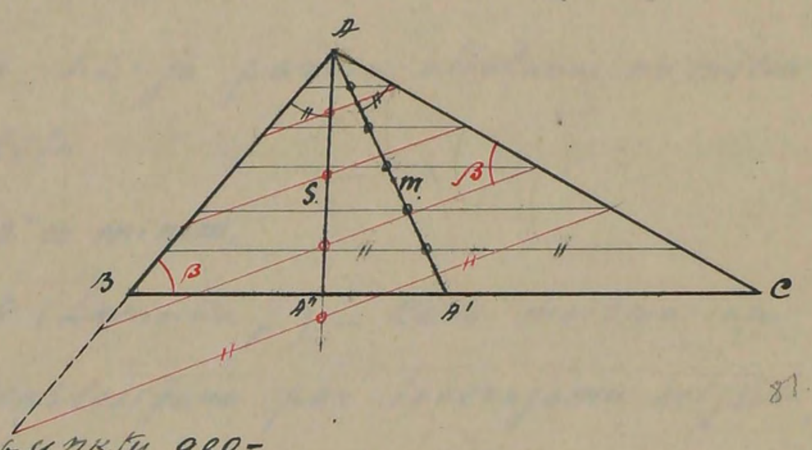
Ar izogonalās radniecības jautājumu pētīšanu daudz nodarbojies Franču autors ... (pēc amata augstāks armijas virsnieks) Mathieu's. Viņš arī devis izogonali saistītu punktu un taišņu jēdzienus (1865 g.)

Izotomisko radniecību pētījis un devis izotomiski saistītu punktu un taišņu jēdzienus G. de Longchamp's

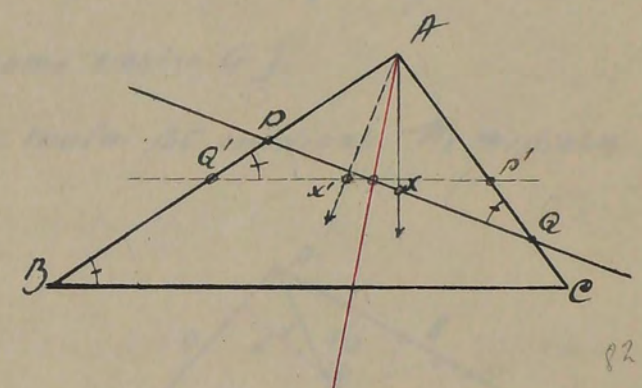
---

Simmedianas, Lemoine'a punkti un taisnes.

Medianas un simmedianas ir līnijas, simmetriskas attiecībā uz leņķa bissektrisu. Mediana ir trijstūra pamatam paralelu taisņu (ieslēgtu starp pārejām divām trijstūra malām) vidus punktu geometriskā vieta. Kā tūlin pierādīsim — simmediana ir trijstūra pamatam antiparalelu taisņu vidus punktu geometriskā vieta. Tamdēļ simmedianu sauc arī par antiparalelo līniju medianu.



-Ņemsim trijstūri ABC un uzzīmēsim vienu pamatam antiparalelu taisni PQ. Savienosim šīs antiparaleles vidus punktu x ar virsotni A un pierādīsim, ka Ax ir simmetriska ar medianu attiecība uz bissektrisu. Tanī nolūkā pagriezīsim doto trijstūri ap bissektrisu (zīm. sarkan. līn.) par 180° t.i. — apgriezīsim trijst. otrādi. Tad līnija PQ ieņems stāvokli P'Q'. Līnija P'Q' ir paralela pamatam, jo ∢Q' = ∢B. Punkts x pēc pagriešanas ieņems stāvokli x'. Tātad x' ir pamatam BC paralelas līnijas vidus punkts un taisne Ax' ir trijstūra mediana. Taisnes Ax un Ax' iztaisa ar trijstūra malām vienādus leņķus, t.i. viņas ir simmetriskas attiecībā uz bissektrisu. Bet taisne, kas ir simetr. ar med. attiec. uz bisektr. ir simmediana. Tā ir noskaidrots, ka taisne kasiet caur trijst. virsotni un pamatam antiparal. līnijas vidus punktu ir simmediana. Tā kā visas pamatam antiparalelās taisnes ir paralelas savā starpā — simed. iet arī caur visu citu antiparal. pamatam līniju vidus punktiem t.i. — viņa ir pamatam antiparal. līn. vidus punktu geom. vieta.



Jau redzējam, ka visas trīs dotā trijstūra simmedianas krustojas vienā punktā K, kuru sauc par Lemoine'a punktu. Redzējam arī, ka Lem. punkts K un trijst. smaguma centrs G ir divi izogonali saistīti punkti attiecībā uz doto trijstūri.

Minētā K punkta īpašības pirmais sācis pētīt Lemoine, bet šā punkta jēdziens bijis pazīstams jau Simon'am Lhuilier'am (1809.g.). Lhuilier uzdevis šādu uzdevumu:

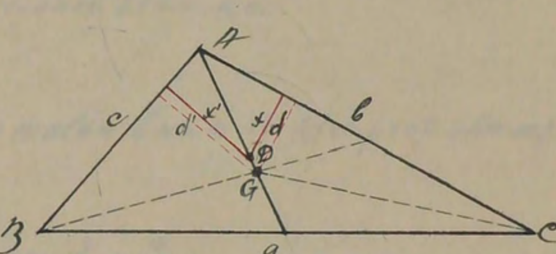
Dotā trijsturī atrast punktu, kura attāļumu kvadratu summa no trijstūra malām ir minimalā, t.i. ja punkta attaļumus no malam apzīm. ar x, y, z tad lai būtu

$$x^2+y^2+z^2 = minim.$$

Izrādas ka šis punkts ir K punkts (Lemoina p.). – Kādā matēmatiķu kongresā 1873.g. Lemoine's noturēja priekšlasījumu par ievērojamu trijstūŗa punktu t.i. par K punktu un apskatīja kādas desmit viņa īpašības. Pēc tam par šo punktu sāka interesēties daudz citi matēm. un par viņu izauga vesela literatura.

Apskatīsim dažas šā punkta galvenās īpašības. [Viena no viņām bij: Lemoina punkts K ir izogonali saistīts ar dotā trijstūŗa smaguma centru G]

Ņemsim trijsturi ABC un no virsotnes A vilksim malai BC medianu. Uz medianas izvēlēsimies kādu punktu D un noskaidrosim, kāda ir šā punkta attāļumu x un x' no trijstura malām AB un AC attiecība. – Atsauksimies uz teoremu, kuŗu pieņemsim par zināmu:



83.

Savienojot smaguma centru G ar trijstūŗa virsotnēm, trijstūris sadalās trīs jaunos trijstūŗos, kuriem ir vienādi laukumi

Konstruējam dotā trijstūŗa smaguma centru G un apzīm. viņa attaļumus no malām AC un AB ar d und d'. Savienojam G ar trijstūra virsotnēm. Pamatojoties uz augstāk minēto teoremu varam rakstīt, ka

$$\frac{cd'}{2} = \frac{bd}{2} \quad \text{voi arī} \quad \frac{d}{d'} = \frac{c}{b} = const.$$

Bet tā kā

$$\frac{d}{d'} = \frac{x}{x'},$$

$$\frac{x}{x'} = \frac{c}{b}. \quad \text{Tā tad}$$

Katra medianas punkta attāļumi līdz trijstūŗa malām ir pretēji proporcioneli šām trijstūŗa malām.

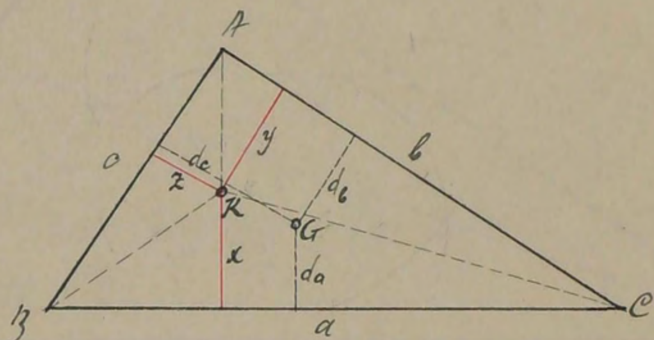
Kā zināms

Bissektrisu krustošanās punkta attālumi līdz kaut kurām divām trijstūra malām attiecas kā 1:1

Nupat redzējam, ka

Medianu krustošanās punkta G (smaguma centra) attālumi līdz divām trijstūra malam ir pretēji proporcionali ar šām trijstūra malām.

Noskaidrosim tagad, kāda ir simmedianu krustošanās punkta K, t. i. - Lemoine'a punkta - attālumu līdz divām trijstūra malām attiecība. - Ņemsim trijstūri ABC un konstruēsim viņā puktus G un K (t.i.- smaguma centru un Lemoine'a punktu) Šie punkti ir attiecībā uz trijst. ABC izogonali saistīti punkti. Kā redzējam iepriekš, divu izogonali saistītu punktu attālumu no katras trijstūra malas reizinājums ir vienāds un līdzinas pastāvīgam lielumam. Pamatojoties uz to, varam rakstīt, ka



$x \cdot d_a = y \cdot d_b = z \cdot d_c$, no kurienes seko ka

$\frac{x}{y} = \frac{d_b}{d_a} = \frac{a}{b}$ (jo G attāl. no malām bura ir pret. prop. šām m.)

$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$. Tāpat dab. ka $\frac{y}{z} = \frac{b}{c}$ un $\frac{z}{x} = \frac{c}{a}$

Lemoine'a punkta attālumi no divām trijstūra malām ir proporcionali ar šām malam

Šai teoremai atbilstošo algebraisko sakarību varam rakstīt arī veidā

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

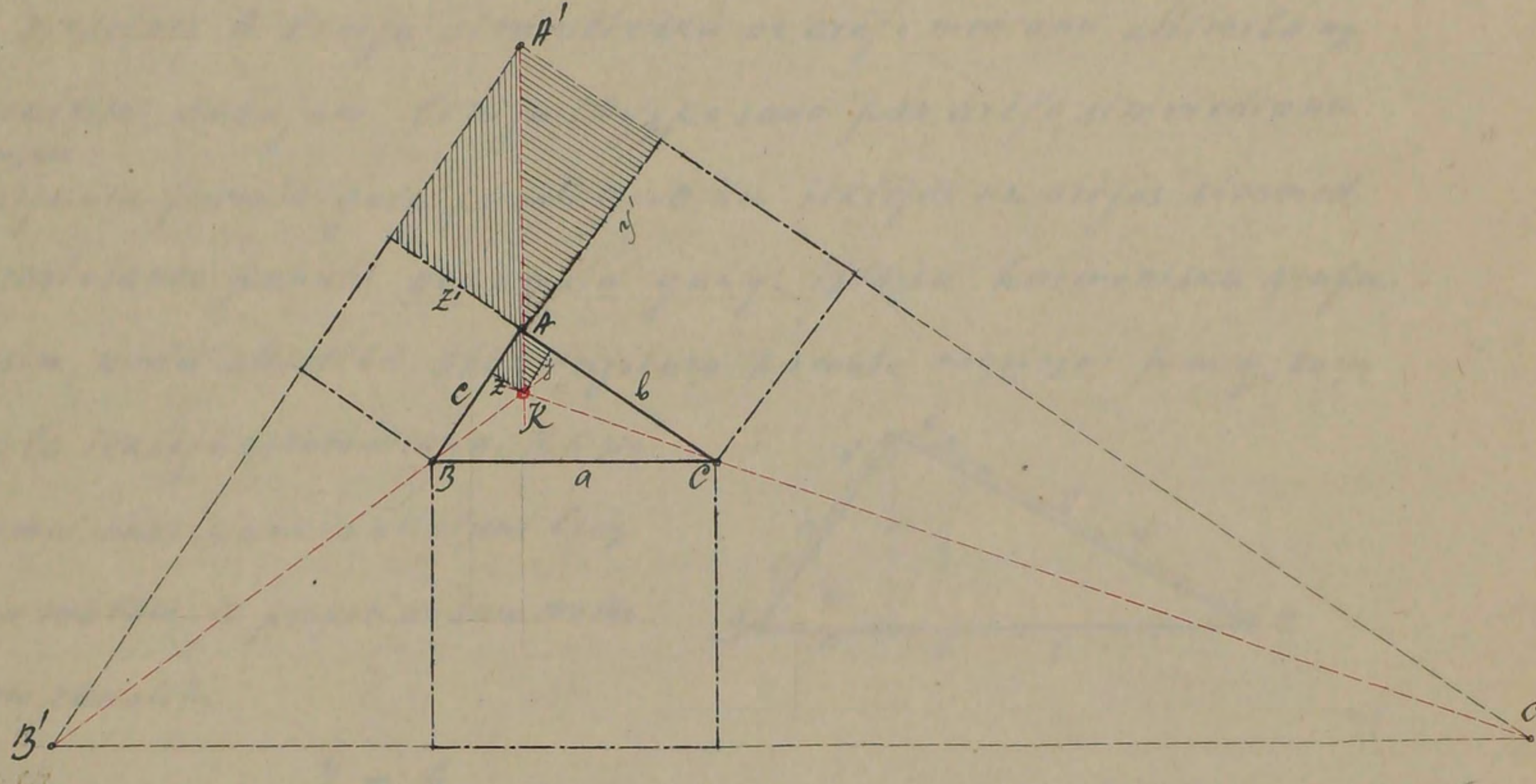
Pēdējo sakarību pārveidojot varam atrast attālumu x, y un z nozīmes. No iepr. sak. seko

$$\frac{ax}{a^2} = \frac{by}{b^2} = \frac{cz}{c^2} = \frac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2} = \frac{2\Delta}{a^2+b^2+c^2},$$ kur ar Δ apzīm. trijstūra ABC laukums. Tā tad

$$x = \frac{2a\Delta}{a^2+b^2+c^2}; \quad y = \frac{2b\Delta}{a^2+b^2+c^2}; \quad z = \frac{2c\Delta}{a^2+b^2+c^2}.$$

Apskatīsim, kā pēc iespējas vienkāršāk konstruēt Lemoine'a punktu? Vienu metodi jau pazīstam:— konstruējam dotā trijstūra simmedianu krustošanās punktu, kas ir Lemoine'a punkts.

Otra metode ir īpatnējāka. — Ņem trijstūri un uz katras malas uzbūvē kvadratu. Tad pagarina katra kvadrata ārējo malu, kas ir parallela trijstūra malām. Tā rodas trijstūris $A'B'C'$, kas ir līdzīgs dotam trijstūrim. Taisnes, kas iet caur šo abu trijstūŗu virsotnēm saiet vienā punktā — līdzības jeb homotetijas centrā.



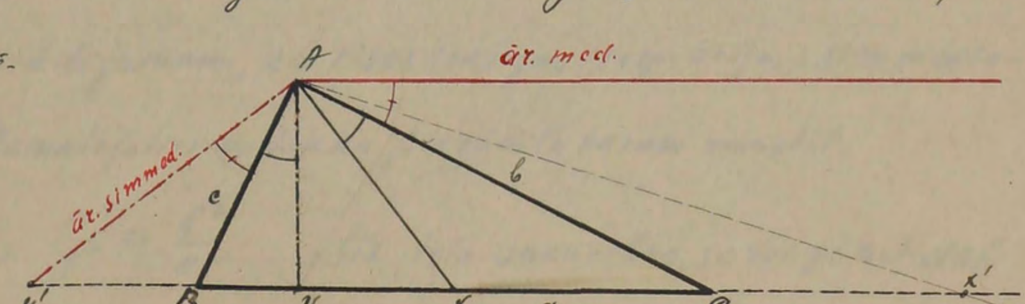
(Šo pēdējo slēdzienu, ja nebūtu zināms, — pierādīt pašiem). Pierādīsim ka šis punkts ir Lemoine'a punkts K. (- Noskaidrosim, vai AK nava simmediana). Tanī nolūkā meklēsim ša punkta attāļumu no trijst. malām (AC un AB). y un z attiecību. Ja izdosies pierādīt, ka $\frac{y}{z} = \frac{b}{c}$, ar to būs pierādīts ka dabūtais punkts tiešām ir Lemoine'a punkts. - No iestrīpotiem līdzīgiem trijstūriem dabūjam proporciju:

$$\frac{y}{z} = \frac{y'}{z'} = \frac{b}{c}, \quad (\text{jo } y' = b,\ z' = c)$$

un ar to ir pierādīts, ka dabūtais punkts ir Lemoine'a punkts.

Šo konstrukciju devis Grebe 1847. g.

Ir metodes Lemoine'a punkta konstruēšanai, kuŗas saistās ar jauniem jēdzieniem — ar ārējās medianas un ārējās simedianas jēdzieniem. Tamdēļ noskaidrosim šos jēdzienus. Par ārējo medianu vilktu no virsotnes A varētu nosaukt taisni, kas iet ārpus trijstūŗa un krusto malas BC

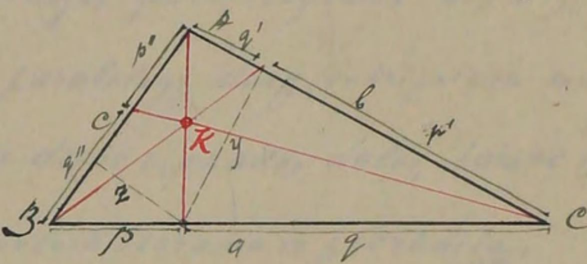


pagarinājumu tādā punktā x', ka $Bx' = Cx'$. Galīgā attālumā tāds punkts x' nav iespējams t.i. galīgā attāl. $Bx' \neq Cx'$. Bet ja punkts x' aiziet bezgalīgi tālu tad var teikt, ka $Bx' = Cx'$. Bet tādā gadījumā taisne kas vilkta caur trijstūra virsotni A ir paralela pamatam BC. Tā tad ārējā mediana ir līnija, kas iet caur trijstūra virsotni paraleli pamatam.

Velkot no virsotnes A līniju simmetrisku ar ārējo medianu attiecībā uz leņķa A bissektrisu, dabujam līniju (Ay'), ko sauc par ārējo simmedianu
Vēlāk pierādīsim, ka

Trijstūŗa pamata gala punkti B un C, un iekšējās un ārējās simmed. krustošanās punkti ar pamatu y un y' iztaisa harmonisku grupu.

Noskaidrosim, kādā attiecībā stāv trijstūŗa pamata nogriežņi p un q, kuŗos pamatu sadala iekšējā simmediana. Kā zināms katra simmedianas punkta attālumi līdz trijstūŗa sānu malām ir propor. ar šām malām. Tamdēļ varam rakstīt:



$$\frac{y}{z} = \frac{b}{c}.$$

$z = p.\sin B$; $y = q.\sin C$ un t.t. $\frac{y}{z} = \frac{q \sin C}{p \sin B}$; bet $\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{c}{b}$. Tas dod, ka

$$\frac{y}{z} = \frac{q.c}{p.b} \quad \text{un} \quad \frac{p.b}{q.c} = \frac{c}{b}; \text{ un tā tad}$$

$$\frac{p}{q} = \frac{c^2}{b^2}.$$ Ar to ir pierādīts, ka iekšēja simmediana dala Δ pamatu divās daļās, kuŗas attiecas kā sānu malu kvadrati. Tādā pat attiecībā stāv pamata daļas, kuŗās viņu dala ārējā simmediana. Tamdēļ, var teikt vispārīgi, ka

Katra simmediana dala trijstūŗa pamatu tādās divās daļās, kuŗu attiecība ir vienāda ar trijstūŗa sānu malu kvadratu attiecību.

Šo teoremu varam izlietot pierādījumam, ka visas iekšējas (resp. ārējas) simmedianas krustojas vienā punktā.– Pamatojoties uz tikko pierādīto varam rakstīt.

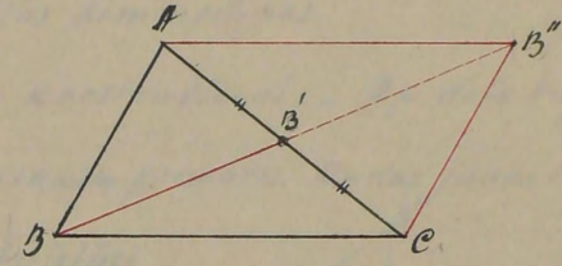
$$\frac{p}{q} = \frac{c^2}{b^2}; \quad \frac{p'}{q'} = \frac{a^2}{c^2}; \quad \frac{p''}{q''} = \frac{b^2}{a^2}$$ Šīs trīs sakarības sareizinot dab.

$$\frac{p\cdot p'\cdot p''}{q\cdot q'\cdot q''} = \frac{c^2\cdot a^2\cdot b^2}{b^2\cdot c^2\cdot a^2} = 1,$$ kas nozīmē (pamatojoties uz apgriezto Čeva teoremu), ka simmedianas AK, BK un CK krustojas vienā punktā.

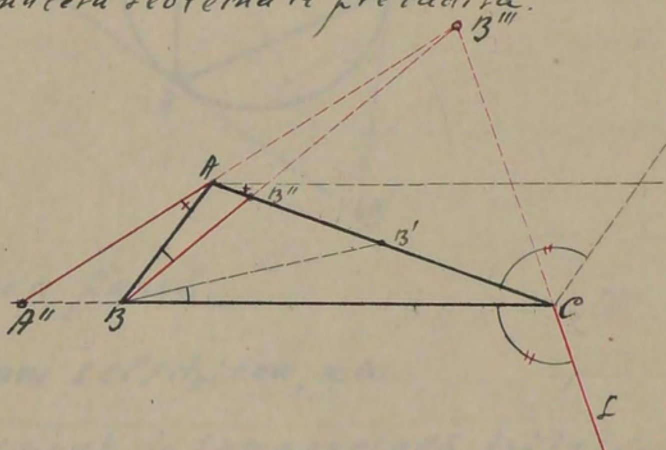
—·—

Ļoti viegli var pierādīt teoremu:

divas ārējās un viena iekšējā trijstūŗu medianas krustojas vienā punktā.



– Ņemam trijstūri ABC un konstruejam viņa virsotnēs A un C ārējās medianas (t.i. caur minētām trijst. virsotnēm velkam taisnes paralelas pretējām trijstūŗa malām). Šīs medianas krustojas punktā B'' un tā izveidojas paralelograms AB''CB. Taisne BB'' ir dabūtā paralelogr. diagonale. Otrā šā paralelogr. diag. ir trijstūŗa mala AC. Tā kā diagonales viņu krustošanās punktā dalās divās vienādās daļās, taisne BB'' ir arī trijstūŗa iekšējā mediana. – Ar to augstāk formulētā teorema ir pierādīta. 88



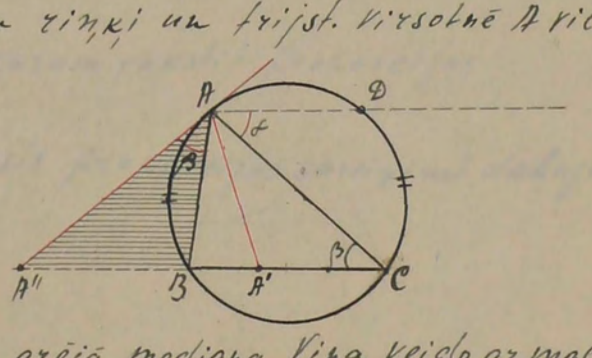
Apskatīsim, kā tas ir ar simmedianām.

Ja ņemam divas ārējās simmedianas, piemēram AA'' un CL, un vienu iekšējo BB'' – viņas ir caur trijstūŗa virsotnēm A un C ejošu ārēju un caur virsotni B ejošas iekšējās medianu izogonalas linijas. Bet tā kā divas ārējās un viena iekšējā med. krustojas vienā punktā, arī viņu izogonales t.i. divas ārējās un viena iekšējā simmedianas krustojas vienā punktā (zīm. punktā B'''). Tā tad kā sekas no augstāk minētās teoremas dabujam teoremu: 89

divas ārējās un viena iekšējā trijstūŗa simmedianas krustojas vienā punktā.

—

Ņemsim tagad trijstūri ABC, aprakstīsim viņam riņķi un trijst. virsotnē A vilksim dabūtam riņķim pieskari. Pierādīsim ka šī pieskare AA'' ir trijstūŗa ārējā simmediana. Visvieglāk to pierādīt šādā veidā. – Velkam caur virsonti A taisni AD paralelu pretim stāvošai trijst. malai. Taisne AD ir trijstūŗa ārējā mediana. Viņa veido ar malu AC 90

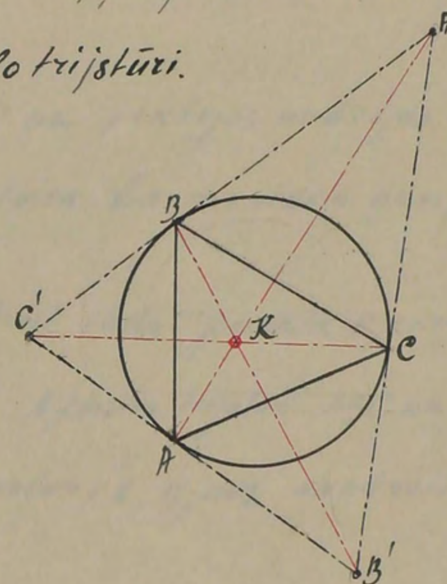


leņķi α. Apzīmēsim pieskares AA'' un trijst. malas AB veidoto leņķi ar β. Kā redzams,

$\alpha = \beta$, jo loki $\smile AB = \smile BC$ (kā loki ieslēgti starp paralelām taisnēm). Tā tad pieskare AA'' ir ārējās medianas AD izogonale; citādi sakot- viņa ir ārējā simmediana. Tāpat pārējās trijstūra virsotnēs aprakstītam riņķim vilktas pieskares ir ārējās simmedianas. Tā esam pierādijuši teoremu:

Pieskares, kas vilktas trijstūra virsotnēs pie šim trijstūrim aprakstīta riņķa, ir trijstūra ārējās simmedinas.

Pēdējo teoremu varam izlietot Lemoine'a punkta konstruēšanai. – Ap doto trijstūri ABC aprakstam riņķi un trijstūra virsotnēs velkam riņķim pieskares. Rodas jauns trijstūris $A'B'C'$, kuru nosauc par dotā trijstūra tangenciālo trijstūri.



No katras tangenciālā trijstūra virsotnes iziet divas dotā trijst. ārējās simmedianas. Bet tā kā vienā punktā krustojas divas ārējās un viena iekšējā simmedianas, – taisnes kas savieno tangenciālā trijstūra virsotnes ar pretim stavošām dotā trijst. virsotnēm (t.i. taisnes $A'A$, $B'B$ un $C'C$) ir iekšējās dotā trijst. simmedianas un viņu krustošanās punkts K ir Lemoine'a punkts.

Kā tiešu secinājumu no tikko pierādītā dabujam slēdzienu, ka

Dotā trijstūra Lemoine'a punkts ir tangenciālā trijstūra Georgonne'a punkts.

———.———

Pierādīsim, ka arī ārējā simmediana dala trijstūra pamatu tādā divās daļās, kuras attiecas kā sānu malu kvadrāti (Par iekšējām sim. to jau pierādījām 70. l.p.). T.i. pierādīsim, ka

$$\frac{BA''}{A''C} = \frac{AB^2}{AC^2} \quad \text{(zīm. skat. 71. l.p. - pēdējo)}$$

– Trijstūri $A''AB$ un $A''AC$ ir līdzīgi un tamdēļ varam rakstīt proporcijas

$$\frac{BA''}{AA''} = \frac{AB}{AC}; \quad \frac{AA''}{A''C} = \frac{AB}{AC}.$$ Abas šīs proporcijas sareizinot dabujam

$$\frac{BA''}{A''C} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

Ja ņemam vērā arī virzienus, tad

$$\frac{BA''}{A''C} = -\frac{AB^2}{AC^2}.$$

Jau redzējām ka iekšējās simmed. krust. punkts ar pamatu (A') dala pamatu daļās, kuŗu attiecība ir tāda pati, kā ārējās simmed. radītām daļām t. i.

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$ No abām pēdējām sak. dabujam, ka

$$\frac{BA'}{A'C} : \frac{BA''}{A''C} = -1.$$

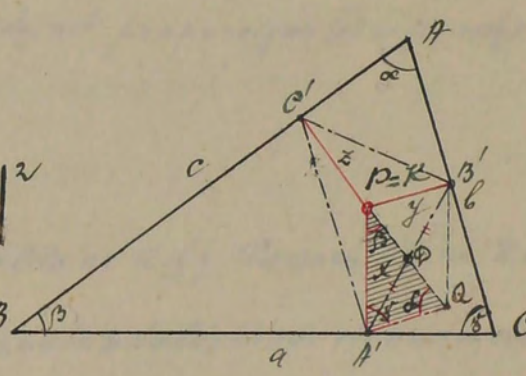
Ar to ir pierādīts, ka iekšējā un ārējā simedianas dala trijstura pamatu harmoniski. t. i. —

Trijstūŗa pamata gala punkti un iekšējās un ārējās simmedianas krustošanās punkti ar pamatu — iztaisa harmonisku grupu.

[illegible] 180

Noskaidrosim tagad, vai trijstūrī ir iespējams atrast tādu punktu P, kuŗa attālumu no trijstūrā malām — kvadratu summa ir minimalā? Ņemsim trijstūri ABC un mēģināsim viņā atrast tādu punktu, kuŗa attālumu (no trijst. malam) x, y, un z kvadrati apmierina nosacījumu

$$x^2 + y^2 + z^2 = \text{minim.}$$



92.

Izlietosim formulu

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2) = (ax+by+cz)^2 + \begin{vmatrix} b & c \\ y & z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c & a \\ z & x \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix}^2$$

Šīs formulas kreisā puse būs minimalā, kad $x^2+y^2+z^2 = \text{min.}$

Noskaidrosim, kad labā puse būs minim.. Labajā pusē pirmās iekavas starp nava nekas cits, kā dubultots trijstūra ABC laukums. Apzīmējot viņu ar Δ, varam rakstīt, ka

$$(ax+by+cz)^2 = (2\Delta)^2 = \text{const.}$$

Ar to ir skaidrs ka augstāk stāvošās izteiksmes labā puse pieņems minimalo vertību, ja

$$\begin{vmatrix} b & c \\ y & z \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} c & a \\ z & x \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = 0.$$

Kā zinams, šī determinantes līdzināsies nullei, ja

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

Bet jau iepriekš redzējām, ka šāda sakarība definē Lemoine'a punktu. Tā tad

Lemoine'a punkts ir tāds punkts trijstūrī, kuŗa attālumu no trijstūŗa malām kvadratu summa ir minimalā.

Pašiem pierādīt, ka arī trijstūŗa smaguma centrs ir raksturots ar vienu minimālu īpašību. t. i. ka

Smaguma centra attālumu no trijstūra virsotnēm kvadratu summa ir minimalā.

Konstruēsim Lemoine'a punktam atbilstošu projekciju trijstūri un noskaidrosim, kāda loma piekrīt Lemoine'a punktam šinī projekciju trijstūrī. - Apzīmēsim projekc. trijstūra virsotnes ar A', B' un C' (zīm. skat. 73 l. p.). Tad no punkta A' velkam liniju paralelu ar KB' un pagarinam nogriezni $C'K$, kuŗš krusto šo paraleli punktā Q. Trijstūŗa $A'KQ$ malas ir perpendikulas trijstūra ABC malām. Tamdēļ šo abu trijstūŗa atbilstošie leņķi ir vienādi un tātad šie trijstūri ir līdzīgi. Tas dod, ka

$$\frac{A'Q}{AC} = \frac{KQ}{AB} = \frac{KA'}{BC} \quad \text{---------} \quad (1).$$

Bet no otras puses, tā kā K ir Lemoine'a punkts, pastāv sakarība

$$\frac{KA'}{BC} = \frac{KB'}{AC} \quad \text{---------} \quad (2).$$

Salīdzinot proporcijas (1) un (2) redzam

$$\frac{A'Q}{AC} = \frac{KB'}{AC} \quad \text{t. i.} \quad A'Q = KB'.$$

Tātad figura $KA'QB'$ ir paralelograms (jo $A'Q$ ir arī paralela ar KB'). Taisnes $A'B'$ un KQ ir šā paralelograma diagonales. Diagonales krustošanās punktā D dalās divās vienādas daļās. Tātad taisne KQ. k. t. p. taisne $C'D$ ir projekciju trijstūŗa mediana. Tādā pat ceļā varam pierādīt, ka arī no virsotnēm A' un B' izejošās projekciju trijstuŗa medianas iet caur punktu K. Tātad

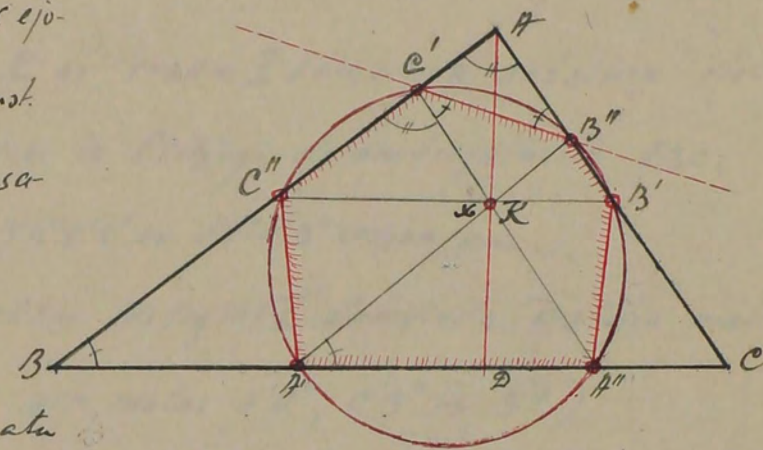
Dotā trijstuŗa Lemoine'a punkts ir šim punktam atbilstošā projekciju trijstuŗa smaguma centrs.

Kā tiešu secinājumu no tikko pierādītā dabujam pierādījumu augšā dotai teoremai; jo Lemoine'a punkta attālumi no dotā trijstuŗa malām ir tas pats, kas projekciju trijstūŗa smaguma centra attālumi no šā trijstuŗa virsotnēm. Tā kā Lem. punkta attāl. no dotā trijst. malām kvadratu summa ir minimalā, arī projekc. trijst.

smaguma centra attal. no šā trijst. virsotnēm kvadratu summa ir minimalā. (Minēto teorēmu pierādīt pašiem neatkarīgi no šā paņēmiena)

Ņemsim trijstūri ABC un mēģināsim atrast viņā tāda punktu x, lai caur viņu vilktas divas taisnes paraleli divām trijstūra malām (viena alga kurām divam) krustotu trijstūra malas četros punktos, kuri visi atrodas uz viena riņķa.

- Pieņemsim ka tāds punkts ir atrasts un ka arī viņam atbilstošais riņķis ir uzzīmēts un izdarīsim analizi. Apzīmesim caur punktu x ejošu trijst. malām AB un AC paralelu taisņu krust. punktus ar trijstūra malām ar A', A'', B'' un C'. Tagad salīdzināsim leņķus.



$$\angle B = \angle A' = \angle xC'B'' = \angle C'B''A$$

Tā tad taisne $C'B''$ ir antiparalela ar pamatu BC. Četrstūris $C'xB''A$ ir paralelograms. Paralelogr. diagonales krustošanās punkts dala tās divās vienādās daļās. Tā tad taisne AX, - tā kā viņa iet caur pamatam antiparalelas taisnes vidus punktu - ir simmediana. Ar to ir noskaidrots, ka meklējamais punkts atrodas uz simmedianas.

Pašiem noskaidrot, kur tieši punkts x atrodas uz simmedianas AD? vai varbūt katram simmed. punktam piemīt tāda īpašība, ka caur viņu vilktas taisnes paraleli divām trijstūra malām krusto trijst. malas četros punktos, kas atrodas uz viena riņķa?

Tālāk noskaidrosim - vai trijstūrī ir iespējams tāds punkts, ka caur viņu vilktas trīs taisnes paraleli dotā trijstūra malām krusto malas 6 punktos A', A'', B', B'', C', C'', kuri visi 6 atrodas uz viena riņķa. - No iepriekš noskaidrotā ir skaidrs, ka ja tāds punkts x eksistē, tad viņam ir jābūt simmedianu krustošanās punktam. Citādi sakot, ja tāds punkts eksistē, tad viņš var būt vienīgi Lemoine'a punkts K.

Pašiem atkal pierādīt ka tiešām

Lemoine'a punkts trijstūrī ir tāds punkts, caur kuru vilktas trīs taisnes paraleli trijstūra malām krusto trijstūra malas 6 punktos, kuri visi atrodas uz viena riņķa.

Šo riņķi sauc par I. Lemoine'a riņķi. Sešstūri, kas rodas savienojot uz trijstūra malām dabūtos 6 krustošanās punktus, sauc par I. Lemoine'a sešstūri (zīm. 6-stūris $A'A''B'B''C'C''$).

Jau redzējam, ka

I. Lemoine'a sešstūrī ik divas pretim guļošās malas ir antiparalelas savā starpā (iepr. zīm. malas: $A'A''$ un $C'B''$; $B'B''$ un $A'C''$; $C'C''$ un $B'A''$)

Bez tam viegli noskaidrot, ka

Savienojot Lemoine'a punktu K ar visām I. Lemoine'a sešstūra virsotnēm rodas 6 trijstūri, kas visi ir līdzīgi dotam trijstūrim ABC.

Aplūkojot vienādsānu trapeces $A'A''B'C''$, $B'B''C'A''$ un $C'C''A'B''$ redzam, ka

Trīs starp dotā trijstūŗa malām ieslēgtās I. Lemoine'a 6-stūŗa malas ir ar vienādu garumu (iepr. zīm. malas $A'C''$, $C'B''$ un $B'A''$)

Pierādīsim tagad, ka

Tās trīs I. Lemoine'a 6-stūŗa malas, kuŗas atšķeļ uz dotā trijstūŗa malām I. Lemoine'a riņķis, attiecas tāpat kā atbilstošo trijstūŗa malu kubi t.i.

$$A'A'' : B'B'' : C'C'' = a^3 : b^3 : c^3$$

Ņemot līdzīgus trijstūŗus ABC un $A'KA''$ varam rakstīt

$$\frac{A'A''}{a} = \frac{d_a}{h_a}$$ kur ar d_a apzīm. Lem. punkta K attāl. no malas a;

Ņemot līdzīgus trijstūrus ABC un $B'KB''$ dabujam proporc.

$$\frac{B'B''}{b} = \frac{d_b}{h_b}.$$ No abām proporc. seko, ka

$$\frac{A'A''}{B'B''} = \frac{a\, d_a\, h_b}{b\, d_b\, h_a}$$

Tā kā K ir Lem. punkts $\frac{d_a}{d_b} = \frac{a}{b}$. Bet $\frac{h_b}{h_a} = \frac{a}{b}$ (jo $\frac{b.h_b}{2} = \frac{a.h_a}{2} =$ trijst. ABC lauk.)

Tā tad

$$\frac{A'A''}{B'B''} = \frac{a^3}{b^3}$$

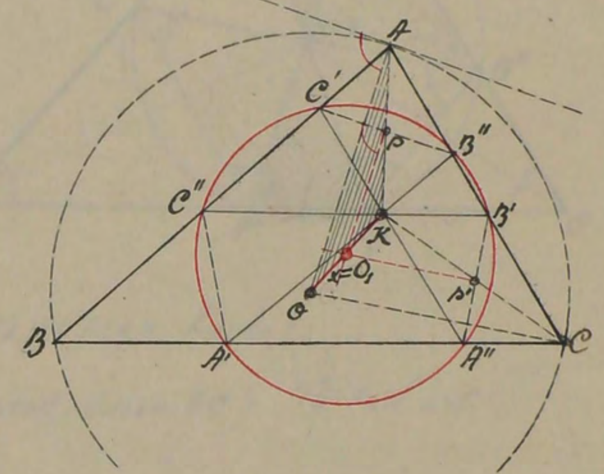
Aplūkojot vēl līdzīgus trijstūŗus ABC un $C'KC''$ tādā pat ceļā dabujam, ka $\frac{B'B''}{C'C''} = \frac{b^3}{c^3}$, ar ko augst. minētā teorema ir pierādīta.

Dabūto rezultātu var formulēt arī sekojoši:

I. Lemoine'a riņķis atšķeļ uz dotā trijstūra malām nogriežņus, kas ir proporcionāli atbilstošo trijstūra malu kubiem. T. i.

$$A'A'':B'B'':C'C'' = a^3:b^3:c^3.$$

Pagaidām par I. Lemoine'a riņķi zinam tikai tik daudz, ka viņš iet caur 6 punktiem $A', A'', B', B'', C', C''$. Mēģināsim tagad atrast šā riņķa centru. – Pieņemsim ka meklējamais I. Lem. riņķa centrs atrodas punktā O_1 un aplūkosim šo punktu kopīgi ar Lemoine'a punktu K un trijstūrim ABC apraksītā riņķa centru O. Tā kā Lemoine'a riņķis iet caur punktiem C' un B'', viņa centram O_1 ir jāatrodas uz līnijas $C'B''$ vidus perpendikuļa. Tāpat punktam O_1 ir jāatrodas uz malas $B'A''$ vidus perpendikuļa t. i. – O_1 ir abu vidus perpendikuļu krustošanās punkts. – Četrstūris $C'KB''A$ ir paralelograms. Tamdēļ taišņu (paralelogr. diagonaļu) $C'B''$ un AK krustošanās punkts P ir šo taišņu vidus punkts.

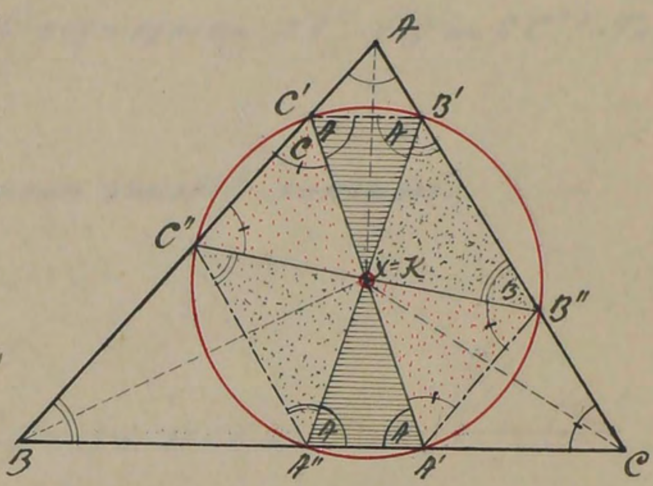


Savienosim tagad punktus O un K un atradīsim OK vidus punktu x. Tad savienosim O ar A. Taisne Px ir trijstūra AOK vidus līnija (pēc konstrukcijas), tamdēļ viņa ir paralela minētā trijstūra pamatam OA. Aplūkosim tagad leņķus. – Ja leņķis $C'Px$ izrādītos taisns leņķis, tad līnija Px būtu malas $C'B''$ vidus perpendikulis. Velkam virsotnē A trijstūrim ABC apraksītam riņķim pieskari. Pieskare veido ar minētā (apraksītā) riņķa rad. OA taisnu leņķi. Bez tam, kā jau zināms, šī pieskare un arī taisne $C'B''$ abas ir antiparalelas trijst. pamatam BC. Tā tad viņas ir paralelas savā starpā un no tā seko, ka leņķis $C'Px$ tiešām ir taisns un taisne Px ir malas $C'B''$ vidus perpendikulis. Uz šā vidus perpendik. atrodas meklējamais riņķa centrs O_1. – Gluži tādā pat ceļā izlietojot virsotni C dabujam, ka līnija $P'x$ ir malas $B'A''$ vidus perpendikulis. Abu vidus perpendikuļu Px un $P'x$ krustošanās punkts x ir meklētais I Lem. riņķa centrs O_1. Tā tad

I. Lemoine'a riņķa centrs atrodas vidū starp dotam trijstūrim apraksītā riņķa centru un šā trijstūra Lemoine'a punktu.

Tālāk ejot izpētīsim – vai trijstūra iekšpusē var atrast tādu punktu, caur kuru vilktas trīs taisnes antiparaleli dotā trijstūra malām krusto šā trijstūra malas 6. punktos, kuri visi atrodas uz viena riņķa?

Pieņemsim ka tāds punkts x ir atrasts un viņam atbilstošais riņķis konstruēts un izdarīsim analīzi. – Caur punktu x iet taisnes: t. $C'A'$ antiparalela trijst. malai AC, taisne $B'A''$ antiparalela malai AB un taisne $C''B''$ antiparalela trijst. malai BC. Savienojot šo antiparaleļu un trijstūra malu krustošanās punktus rodas 6-stūris $C'B'B''A'A''C''$.



$\measuredangle\, xA''A' = \measuredangle A$ (taisne $B'A''$ ir antip. t. AB)

$\measuredangle\, B'C'x = \measuredangle\, xA''A' = \measuredangle A$ (leņķi $B'C'x$ un $xA''A'$ atbalstas uz kopīgu hordu)

$\measuredangle\, C'B'x = \measuredangle\, xA'A''$ (abi atbalstas uz kopīgu hordu) 95.

$\measuredangle\, xA'A'' = \measuredangle A$ (taisne $C'A'$ ir antiparal. taisn. AC) Tā tad arī

$\measuredangle\, C'B'x = \measuredangle A$.

No leņķu vienādības seko, ka taisne $C'B'$ ir paralela taisnei BC un ka trijstūri $C'B'x$ un $A'A''x$ ir vienādsānu trijstūri. Gluži tādā pat ceļā dabujam, ka arī trijstūri $B'B''x$ un $A''C''x$ un trijst. $C''C'x$ un $A'xB''$ ir vienādsānu trijstūri ar paraleliem pamatiem. Tas dod iespēju taisīt slēdzienu, ka visu trijstūru sānu malas ir vienāda garuma t. i.

$$C'x = B'x = B''x = A'x = A''x = C''x.$$

Tā tad ja tāds punkts x eksistē, tad caur viņu vilktās antiparaleles šini punktā dalas uz pusi. Tas nozīmē, ka taisnes Ax, Bx un Cx ir simmedianas un tā tad punkts x (Simmed. krust. punkts) var būt vienīgi Lemoine'a punkts K.

Pierādīt pašiem, ka tiešām

Caur Lemoine'a punktu vilktas trīs taisnes antiparaleli dotā trijstūra malām krusto šā trijstūra malas 6 punktos, kuri visi atrodas uz viena riņķa.

Šo riņķi sauc par II. Lemoine'a riņķi. II. Lemoine'a riņķa centrs ir Lemoine'a punkts K.

Sešstūri, kas rodas savienojot II. Lemoine'a riņķa un dotā trijstūra malu krustošanās punktus, sauc par II. Lemoine'a sešstūri.

II. Lemoine'a sešstūri ik divas pretim gulošas malas ir vienādas un paralelas savā starpā.

Noskaidrosim tagad, kāds sakars pastāv starp nogriežņiem, ko II. Lemoine'a riņķis atšķeļ uz dotā trijstūra malām t. i. starp nogriežņiem $A'A''$, $B'B''$ un $C'C''$? – To visvieglāk konstatēt trigonometriskā ceļā.

Apzīmējot II. Lemoine'a riņķa radiusu ar ρ, varam rakstīt sakarības:

$$A'A'' = 2\rho \cos A,$$
$$B'B'' = 2\rho \cos B,$$
$$C'C'' = 2\rho \cos C, \text{ no kurām seko, ka}$$
$$A'A'' : B'B'' : C'C'' = \cos A : \cos B : \cos C.$$

Tā tad

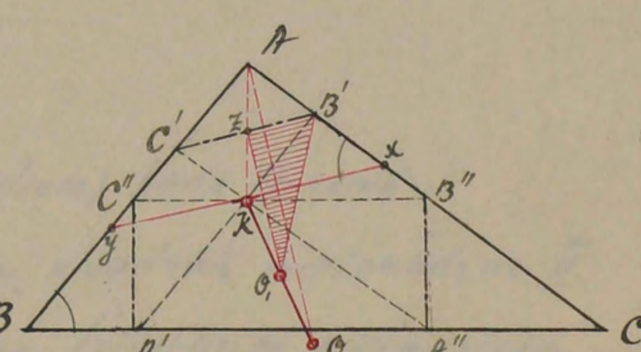
II. Lemoine'a riņķis atšķeļ no dotā trijstūra malām nogriežņus, kas ir proporcionali dotā trijstūra leņķu kosinusiem.

Tamdēļ arī angļu autori šo riņķi nosauc par kosinusu riņķi.

Kā tiešu secinājumu no iepriekšpierādītā dabujam teoremu:

Caur Lemoine'a punktu ejošas trīs taisnes antiparalelas dotā trijstūra malām – ir vienāda garuma.

Meklēsim sakaru starp trijstūrim aprakstīta riņķa radiusu R, I. Lemoine'a riņķa rad. ρ_1 un II. Lemoine'a riņķa rad. ρ_2.



Ņemsim trijstūri ABC un konstruēsim viņā I. Lem. 6-stūri $A'C''C'B'B''A''$. Tad konstr. trijstūrim aprakst. riņķa centru O un I Lem. riņķa centru O_1. II. Lem. riņķa centrs ir Lem. punkts K. Kā zinām, visu trīs minēto riņķa centri O, O_1 un K atrodas uz vienas taisnes, pie kam O_1 ir taisnes KO vidus punkts. Bez tam zinam, ka I Lem. 6-stūra 3 malas, kas ieslēgtas starp dotā trijst. malām ir antiparalelas ar viņām pretim gulošām trijst. malām un visas trīs ir vienāda garuma. Pierādīsim, ka

I. Lemoine'a 6-stūra 3 dotā trijstūra malām antiparalelo malu garums ir vienāds ar II. Lemoine'a riņķa radiusu ρ_2

-Vilksim caur Lem. punktu K taisni xy antiparalelu trijstūra malai BC.

$xy \parallel C'B'$, jo abas šīs taisnes ir antiparalelas taisnei BC.

Tā tad četrstūris $C'B'xK$ ir paralelograms un tamdēļ

$$C'B' = Kx = \rho_2.$$

[To pašu varam pierādīt arī šādi – Kā zinam, punkts Z ir taisnes AK vidus punkts. Tā kā $xy \parallel C'B'$, $C'B'$ ir trijstūra yAx vidus līnija un tā tad $C'B' = \frac{1}{2} xy = \rho_2$]

I. Lem. riņķa centrs ir O_1; tamdēļ

$$O_1B' = \rho_1.$$

$$C'B' = \rho_2 \text{ (kā tikko pierādījām)}$$

$$AO = R \text{ (jo } O \text{ ir trijst. aprakst. riņķa centrs)}$$

Jau iepriekš noskaidrojām (77 l.p.), ka trijstūris $ZB'O_1$ ir taisnleņķa trijstūris. Pamatojoties uz to varam rakstīt, ka

$$O_1B'^2 = ZB'^2 + ZO_1^2 \quad \text{-------}(1)$$

Ņemot vērā augstāk stāvošās vienādības (resp. iepriekš zīmējumu) dabujam

$$ZB' = \frac{1}{2} C'B' = \frac{\rho_2}{2}.$$

$$ZO_1 = \frac{AO}{2} = \frac{R}{2}.$$

Līdz ar to no sakarības (1) dabujam sakarību

$$\rho_1^2 = \left(\frac{\rho_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2, \quad \text{ko varam uzrakstīt veidā}$$

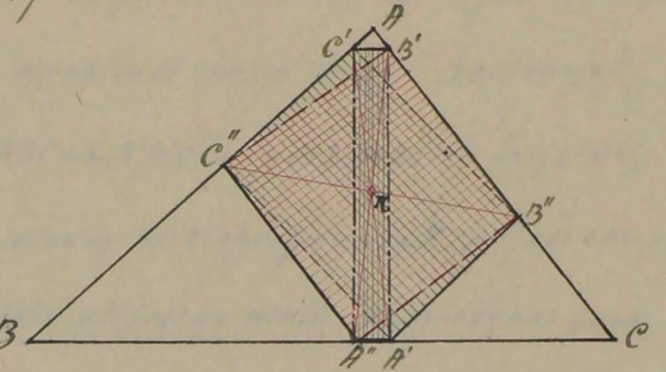
$$(2\rho_1)^2 = \rho_2^2 + R^2.$$

Dabūto sakarību varam izteikt (šādiem vārdiem) šādā teoremā:

I. Lemoine'a riņķa diametra kvadrāts ir vienāds ar II. Lemoine'a riņķa radiusa un trijstūrim apraksttīta riņķa radiusa kvadratu summu.

[Vēsturiski ņemot šī sakarība vispirms radusēs aprēķinu ceļā: visi minētie radiusi iepriekš aprēķināti atkarībā no trijstūra malām un tad sameklēta viņu sakar.]

II. Lemoine'a riņķim (resp. II. Lem. 6-stūrim) atbilstošais zīmējums dod ie-spēju konstatēt vēl vienu Lemoine'a punkta īpašību.



– Kā zinam, II. Lemoine'a 6-stūrī pretim guļošās malas ir vienādas un paralelas savā starpā. Tamdēļ četrstūri A''C'B'A', A''C''B'B'' un A'C''C'B'' ir paralelogrami. Katra minētā paralelograma abas diagonales ir vienāda garuma (jo viņas ir II. Lemoine'a riņķa diametri). Tas nozīmē, ka šie trīs paralelogrami ir taisnstūri, kuru viena mala atbalstas uz dotā trijst. malas. Ir zinams, ka trijstūrī ievilktu taisnstūru – kuru viena mala atbalstas uz kādas vienas u.t.t. trijstūra malas – centru geometriskā vieta ir taisne. Lemoine'a punkts K ir visu trīs minēto taisnstūru centrs. Tā tad viņš atrodas uz visām trim trijstūra malām atbilstošo ierakstīto taisnstūru centru geometriskām vietām t.i.

Lemoine'a punkts K ir 3 dotā trijstūrī ierakstītu taisnstūru se-riju centru geometrisko vietu (trīs taisņu) krustošanās punkts.

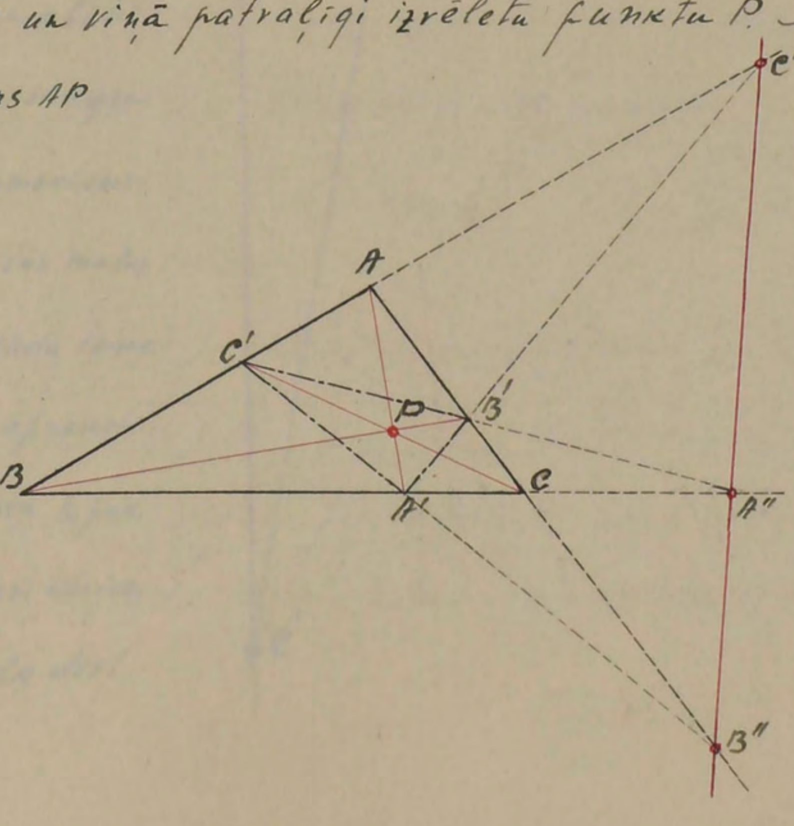
Pāriesim tagad pie

Lemoine'a taisnes aplūkošanas.

Vispirms noskaidrosim dotam punktam attiecībā uz doto trijstūri atbilstošās

Trilineārās polares jēdzienu.

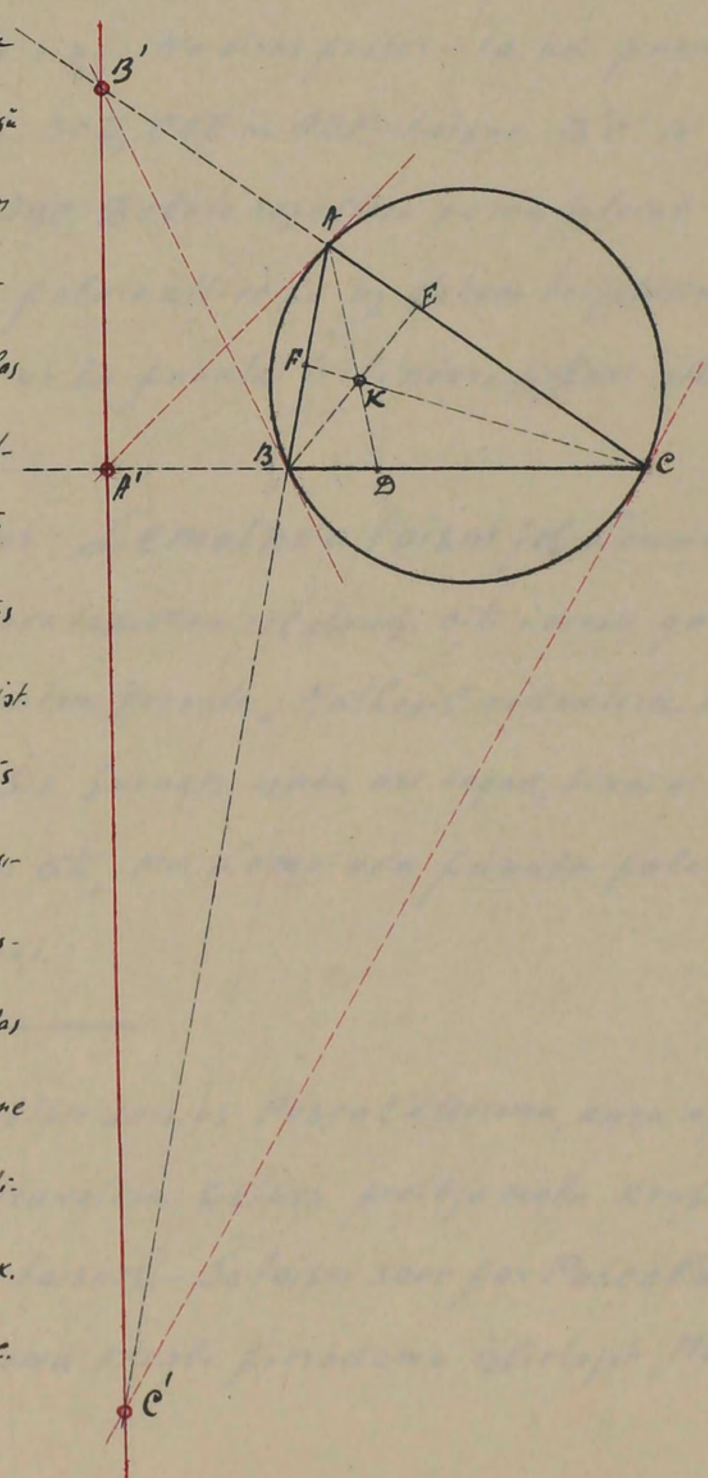
– Ņemam kādu trijstūri ABC un viņā patvaļīgi izvēlētu punktu P. Savienojam punktu P ar trijst. virsotni A. Stars AP krusto trijstūra malu BC punktā A'. Konstruējam punktiem BCA' ceturto harmonisko A''. Tāpat velkam caur P starus CP un BP un konstruējam punktiem ACB' un BAC' ceturtos harmoniskos punktus B'' un C''. Punkti A'', B'' un C'' visi trīs atrodas uz vienas



taisnes, kuru sauc par punkta P trilineāro polari attiecībā uz trijstūri ABC. (Šo taisni sauc arī par punkta P harmonisko polari attiec. uz trijstūri ABC)

Punktam P atbilstošo trilineāro polari varam konstruēt šādā ceļā. Savienojot punktus A', B' un C' dabujam trijstūri A'B'C'. Trijstūri ABC un A'B'C' ir perspektīvi trijstūri, jo viņu attiecīgās virsotnes atrodas uz trim (ik divas uz vienas) no viena punkta P izejošiem stariem. Tamdēļ (pēc Desargue'a teoremas) šo trijstūru attiecīgo malu krustošanas punkti A'', B'' un C'' atrodas uz vienas taisnes. Šī taisne ir punkta P trilineāra polare, jo, kā seko no pilnīgā četrmaļa diagonaļu īpašībām, punkti A'', B'' un C'' ir ceturtie harmoniskie ar punktiem BCA', ACB' un BAC'. [To pierādot izlietojam pilnīgo četrmaļu BC'AB'CP, CA'BC'AP un AB'CA'BP diagonales]

Meklēsim Lemoine'a punktam K atbilstošo trilineāro polari. Ņemsim trijstūri ABC un aprakstīsim viņam riņķi. Caur Lemoine'a punktu K un trijstūra virsotnēm A, B un C ejošu staru krustošanās punktus ar trijst. malām apzīmēsim ar D, E un F. Tad punktā A vilksim riņķim pieskari, kura krusto trijst. malas BC pagarin. punktā A'. No iepriekš noskaidrotā zinam, ka taisne AA' ir leņķa A ārējā simmediana. Zinam arī, ka iekšējās un ārējās simmed. krustošanās punkti ar ņemtajai trijst. virsotnei pretim guļošo trijst. malu un abi šīs malas gala punkti iztaisa harmonisku grupu. Tā tad punkti D un A' ir harmoniski saistīti attiec. uz virsotnei A pretim guļošās malas gala punktiem B un C. Noskaidrosim, kāda taisne ir punkta A' polare attiec. uz trijst. aprakstīto riņķi. Kā zināms, lai atrastu kāda II. kak. līnijai ārpusē atrodošās punkta polari attiec. uz šo līniju = caur šo punktu ir jāvelk divi



99.

stari, kas krusto II. pak. līniju un jāatrod dotam punktam un abiem katra stara un II pakāpes līnijas krustošanās punktiem ceturtie harmoniski saistītie punkti. Taisne kas iet caur abiem minētiem ceturtiem harm. saistītiem punktiem ir meklētā polare. [Ja caur doto punktu vilktais stars skaras dotai līknei, tad cetur. ham. punktu aizvieto skaršanās punkts]. No iepriekš teiktā seko, ka punkta A' polare ir simmediana AD. k. l. p. – simmed. AD pols ir punkts A'. Tā pat nonākam pie slēdziena, ka simmed. BE un CF poli attiec. uz aprakstīto riņķi ir punkti E un F. Tātad

Iekšējās simmedianas pols attiecībā uz dotam trijstūrim aprakstītu riņķi ir ārējās simmedianas un ņemtai virsotnei pretim guļošās trijstūra malas krustošanās punkts

Tā kā visas simmedianas AD, BE un CF iet caur vienu punktu – Lemoine'a punktu K – šo simmed. poli A', B' un C' atrodas uz vienas taisnes, kas ir Lemoine'a punkta polare attiecībā uz trijstūrim aprakstīto riņķi. No otras puses: – tā kā punkti A', B' un C' ir ceturtie harmoniskie ar punktiem BCD, CAE un ABF – taisne B'C' ir punkta K trilineāra polare attiec. uz trijstūri ABC. Dabūto rezultātu varam izteikt teoremā:

Lemoine'a punkta polare attiecībā uz dotam trijstūrim aprakstītu riņķi ir identiska ar šā punkta trilineāro polari attiecībā uz doto trijstūri.

– Šo līniju sauc par **Lemoine'a taisni jeb Lemoine'a līniju.**

[Nosaukumi „Lemoine'a punkts", „Lemoine'a taisne" un vēl daudzi citi ievesti galvenā kārtā no belgu matematiķa Neuberg'as matem. žurnala „Mathesis" redaktora. Neuberg's rediģē minēto žurnalu no 1881 – 1890. g.. Šis žurnals iznāk arī tagad, tikai citā redakcijā]

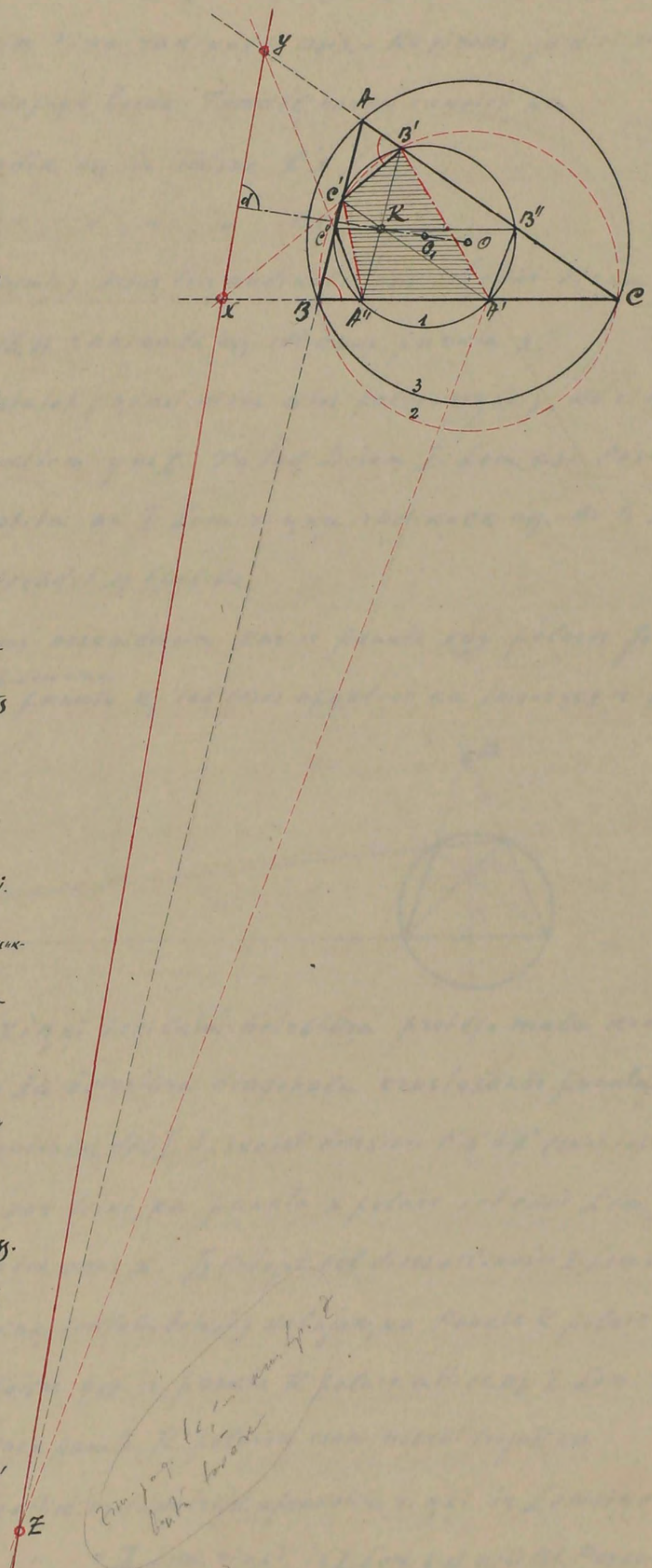
Tā tad Lemoine'a taisne nava nekas cits, kā Lemoine'a punkta polare attiecībā uz dotam trijstūrim aprakstītu riņķi.

Ar II pakāpes līnijā ierakstītu 6-stūri saistās Pascal'a teorema, kura apgalvo:

II pakāpes līnijā ierakstīta 6-stūra pretējo malu krustošanās punkti atrodas uz vienas taisnes. – Šo taisni sauc par Pascal'a taisni.

Attiecībā uz riņķi Pascal'a teorema viegli pierādama izlietojot Menelaja un Ceva teoremas.

Ņemsim trijstūri ABC un konstruēsim viņam atbilstošo I. Lemoine'a riņķi un 6-stūri. Šā sešstūra pretim gološās malas A"A' un C'B' krustojas punktā x, malas B'B" un C"A" krustojas punktā y un malas CC" un B"A' punktā z. Tā kā 6-stūris A"C"C'B'B"A' ir riņķī (I. Lem. r.) ierakstīts 6-st. — pamatojoties uz Pascal'a teoremu var apgalvot, ka punkti x, y un z atrodas uz vienas taisnes, kas ir (pamat. uz definiciju) I. Lem. 6-st. atbilstošā Pascal'a taisne. Pierādīsim, ka taisnei xyz (resp. yxz) piemīt trīs īpašības:



1) Šī taisne ir Pascal'a taisne attiecībā uz I Lemoine'a 6-stūri.

2) Šī taisne ir Lemoine'a punkta polare attiecībā uz I. Lemoine'a riņķi

3) Šī taisne ir dotam trijstūrim apraksītā riņķa un I. Lemoine'a riņķa radikalā ass.

Par 1) īpašību jau esam skaidrībā. Tālāk pierād., ka pareiza ir arī 3) īpašība. Tanī nolūkā ņemsim palīgariņķi caur punktiem B, C', B' un C [Caur šiem punktiem var vilkt riņķi, jo četrstūri BC'B'C pretleņķu summa ir 2d; t.i. $\sphericalangle B' + \sphericalangle C'B'A = 2d$, bet $\sphericalangle C'B'A = \sphericalangle B$. Tā lad $\sphericalangle B' + \sphericalangle B = 2d$]

Apzīmēsim I. Lemoine'a riņķi, šo dabūto palīga riņķi un trijstūram apvilkto riņķi ar cipariem 1, 2 un 3 un meklēsim riņķu radikalās asis. – Kā zinams, ja divi riņķi krustojas, tad riņķu radikalā ass ir kopīgā horda. Tamdēļ varam rakstīt, ka

riņķu (1,2) radik. ass ir taisne $C'X$

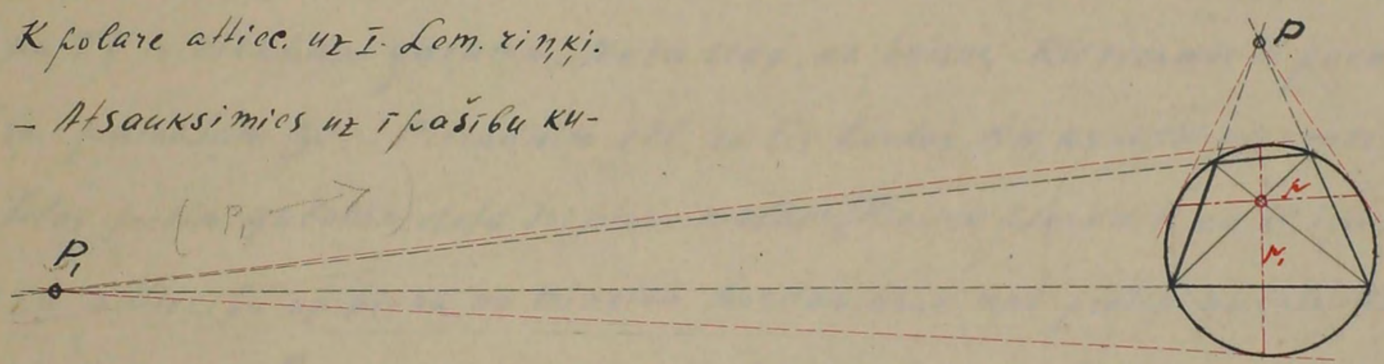
" (3,2) " " " " BX

Tā kā trīs riņķu (ik pa divi ņemtu) visas trīs radikalās asis iet caur vienu punktu – radikalo centru – arī riņķu (3,1) radikalā ass iet caur punktu X.

Tādā pat ceļā varam konstatēt (ņemot divus citus palīga riņķus), ka riņķu (3,1) radikalā ass iet arī caur punktiem Y un Z. Tā lad liešam I. Lem. 6-st. Pascal'a taisne XYZ ir dotam trijst. apvilktā un I Lem. riņķu radikalā ass. – Ar to 3) īpašība ir pierādīta. Atliek vēl pierādīt 2) īpašību.

Lai pierādītu 2) īp., vispirms noskaidrosim kur ir punktu XYZ polares. Ja izradīsies ka visu šo punktu polares attiec. uz I. Lem. riņķi iet caur punktu K, tad varēs apgalvot, ka taisne YXZ ir punkta K polare attiec. uz I. Lem. riņķi.

– Atsauksimies uz īpašību ku-



ŗu pieņemsim par zināmu: riņķī ievilkta četrstūŗa pretējo malu krustošanās punktu polares iet caur šā četrstūŗa diagonaļu krustošanās punktu. [Zīmējumā sarkanās līnijas vilktas kontroles dēļ]. Apskatot četrstūri $C'B'A'A''$ (skat. iepr. l.p.) uz tikko minētās īpašības pamata var teikt, ka punkta X polare iet caur Lem. punktu K, no kā seko, ka punkta K polare iet caur X. Izlietojot vēl divus atlikušos I. Lem. 6-st. malu pārus (t.i. apskat vēl divus I. Lem. riņķī ievilktus četrst.) dabujam, ka punkta K polare iet arī caur punktiem Y un Z. Tā lad taisne YXZ ir punkta K polare attiec. uz I. Lem. riņķi.

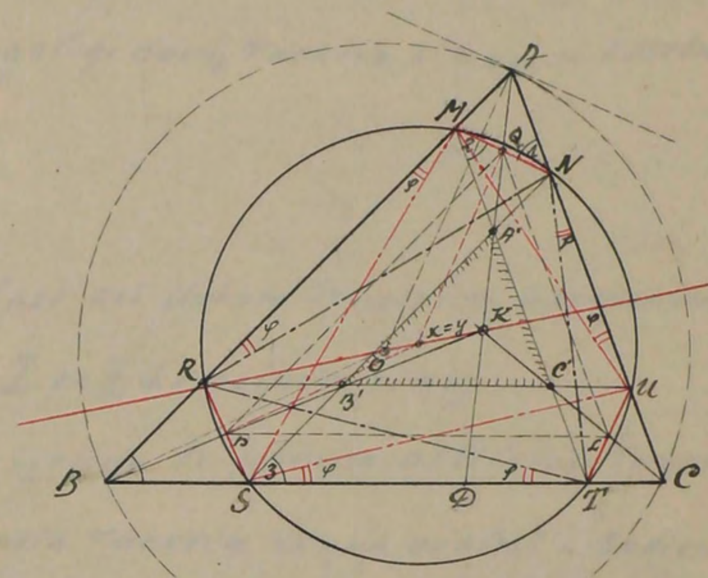
Līdz ar to attiecība uz Lemoine'a punkta K polarēm esam noskaidrojuši, ka

1) Lemoine'a punkta polare attiec. uz dotam trijst. apvilkto riņķi ir Lemoine'a taisne.
2) " " " " " I. Lem. riņķi ir I. Lem. 6-st. atbilst. Pascal'a taisne
3) " " " " " II. Lem. riņķi atrodas bezgalībā (jo K ir šā riņķa centrs)

―――

Tucker'a riņķi un Tucker'a līnija.

Jau redzējam, ka caur kaut kuru simmedianas punktu vilktas divas taisnes paraleli dotā trijstūra sānu malām krusto trijstūra malas četros punktos, kuri visi atrodas uz viena riņķa. Attiecībā uz katru trijstūri varam dabūt bezgalīgi daudz šādu riņķu.- Ņemsim trijstūri ABC un uzzīmēsim vienu no minētiem riņķiem. T.i. – vilksim caur simmed. AD punktu A' taisni NS ∥ AB un taisi MT ∥ AC. Tad zīmējam caur punktiem M, N, S un T riņķi, kas ir mekl. riņķis. Šis riņķis krusto trijstūra malas vēl divos punktos, kurus apzīm. ar R un U. Noskaidrosim, kādu stāvokli taisne RU ieņem pret dotā trijst. pamatu BC? Lai ar kur nebūtu ņēmuši punktu A' uz simmed. AD, vienmēr atbilstošā riņķa hordas MN, RS un TU ir vienāda garuma. No tā seko, ka taisne RU vienmēr ir paralela trijstūra pamatam BC.- Pierādīsim vēl, ka šīs hordas MN, RS un TU vienmēr ir antiparalelas pretim gulošām dotā trijstura malām. [Pietiek pierādīt, ka šī īpašība ir pareiza attiecībā uz vienu no minētām hordām un viņai pretim gulošo trijst. malu]. Pierādīsim, ka horda MN ir antiparalela malai BC. Lai to pierādītu, pietiek pierādīt, ka



102

$$\measuredangle 1 = \measuredangle B.$$

$\measuredangle 1 = \measuredangle 2$ (jo taisnes MT ∥ AC); $\measuredangle 2 = \measuredangle 3$ (kā leņķi kas balstās uz vienu hordu); bet $\measuredangle 3 = \measuredangle RB'S = \measuredangle B$. Tātad $\measuredangle 1 = \measuredangle B$. Ar to ir pierādīts, ka līn. MN ir antiparalela līn. BC.

– Zīmējam paralelogramam BRB'S diagonali BB'. Arī šī diag. ir simmediana, jo dala uz pusēm taisni antiparalelu pretim gulošai malai AC. Tā pat arī paralelograma CUC'T diagonale CC' ir simmediana. No trijstūra virsotnēm A, B un C vilktas simmedianas visas krustojas Lemoine'a punktā K. Tamdēļ var teikt, ka trijstūri ABC un A'B'C' ir perspektivi trijstūri, jo viņu virsotnes pa pāriem guļ uz viena no trim no viena punkta iezejošiem stariem. Perspektivus trijstūrus ar paralelām malām sauc par **homotetiskiem** trijstūriem. Tātad trijstūri ABC un A'B'C' ir homotetiski trijstūri. Viņu homotetijas centrs ir Lemoine'a punkts K.

Riņķi, kas iet caur 6 dotā trijstūra un viņā iezīmētā homotetiskā trijstūra ar homotetijas centru Lemoine'a punktā K krustošanās punktiem – sauc par Tucker'a riņķi.

Tā kā katrā trijstūrī var iezīmēt bezgalīgi daudz homot. trijst. ar homotetijas centru punktā K,

Katram trijstūrim atbilst bezgalīgi daudz Tucker'a riņķu – vesela Tucker'a riņķu serija.

Kā vēlāk noskaidrosim,

Tucker'a riņķu serijā ietilpst arī dotam trijstūrim aprakstītais riņķis un viņam atbilstošie I. un II. Lemoine'a riņķi.

Izpētīsim tagad, kādu ģeometrisko vietu izveido trijstūrim atbilstošo Tucker'a riņķu centri? Meklēsim, kur atrodas mūsu uzzīmētā Tucker'a riņķa centrs? – Savienosim trijstūrim ABC aprakstīta riņķa centru O ar Lemoine'a punktu K un ar trijstūra virsotni A. Aplūkojamā riņķa centrs meklējams uz punktā Q pret taisni MN vilkta perpendikula (t.i. uz taisnes MN vidusperpend.). Šis perpendikulis krusto līniju OK punktā x. – Pierādīsim, ka x ir meklējamais centrs. Vilksim virsotnē A ap trijst. ABC aprakstītam riņķim pieskari. Šī pieskare ir perpendikulāra riņķa radiusam OA. No otras puses, tā kā šī pieskare ir antiparalēla pamatam BC (ko jau esam iepriekš noskaidrojuši) viņa ir paralēla taisnei MN (jo MN arī ir antip. ar BC). Tā tad taisne OA ir perpendikulāra taisnei MN. No tā savukārt seko, ka taisne OA ir paralēla taisnes MN vidusperpendikulim Qx. Tas dod iespēju rakstīt proporciju

$$\frac{Kx}{KO} = \frac{KQ}{KA} = \frac{QP}{AB} \quad \text{..........(1)}$$

Aplūkojamā riņķa centram jāatrodas arī uz taisnes RS vidusperpendikuļa. Pieņemsim ka šis vidus perpendik. krusto līniju OK punktā y. Izpildot atkal to pašu ko attiecībā uz virsotni A, dabujam otru proporciju

$$\frac{Ky}{KO} = \frac{KP}{KB} = \frac{QP}{AB} \quad \text{.....(2)}$$

Salīdzinot abas proporcijas, redzam ka

$$\frac{Kx}{KO} = \frac{Ky}{KO}, \quad \text{kas dod, ka}$$

$$x = y$$

Tā tad arī malas RS vidusperpendikulis krusto taisni OK tanī pat punktā ka malas MN vidusperpendikulis. Abu minēto vidusper. krustošanās punkts x ir aplūkojamā Tucker'a riņķa centrs. Ar to ir noskaidrots, ka šā riņķa centrs atrodas uz taisnes OK. Tā kā šis Tucker'a riņķis bij brīvi izvēlēts no Tuc. riņķu serijas, varam skaitīt par pierādītu, ka

Katram trijstūrim atbilstošo Tucker'a riņķu centru geometriskā vieta ir taisne, kas iet caur šim trijstūrim aprakstītā riņķa centru un šā trijstūra Lemoine'a punktu.

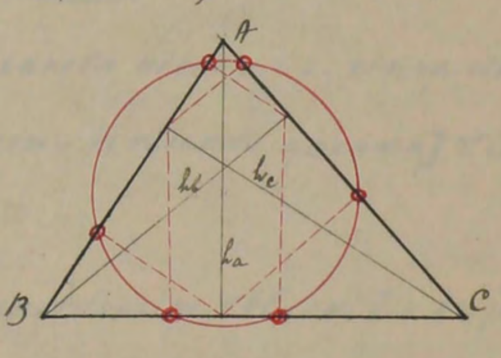
– Šo taisni sauc par Tucker'a līniju.

Kā tiešu secinājumu dabujam slēdzienu, ka

Tucker'a līnija ir perpendikulāra dotam trijsturim aprakstītā un pirmā Lemoine'a riņķa radikalai asij. T.i. Tucker'a līnija ir perpendikulāra dotam trijsturim atbilstošā I. Lemoine'a 6-stūra Pascal'a taisnei (zīm. skat. 84.l.p.)

Tā kā uz Tucker'a līnijas atrodas trijstūrim aprakstītā, I. Lemoine'a un II. Lem. riņķu centri, var taisīt slēdzienu, ka arī visi šie riņķi ietilpst Tucker'a riņķu sistemā.

Tucker'a riņķu sistemai pieder arī Taylor'a riņķis. Taylora riņķi dabujam šādā ceļā:- No trijstūra virsotnēm nolaižam perpendikuļus uz pretim guļošām malām (t.i. velkam trijst. augstumus) un no šo perpendikuļu pamatiem velkam perpendikuļus pret pārējām divām malām. Tā dabujam 6 punktus, kuri visi atrodas uz viena riņķa, kuru sauc par Taylor'a riņķi. 103



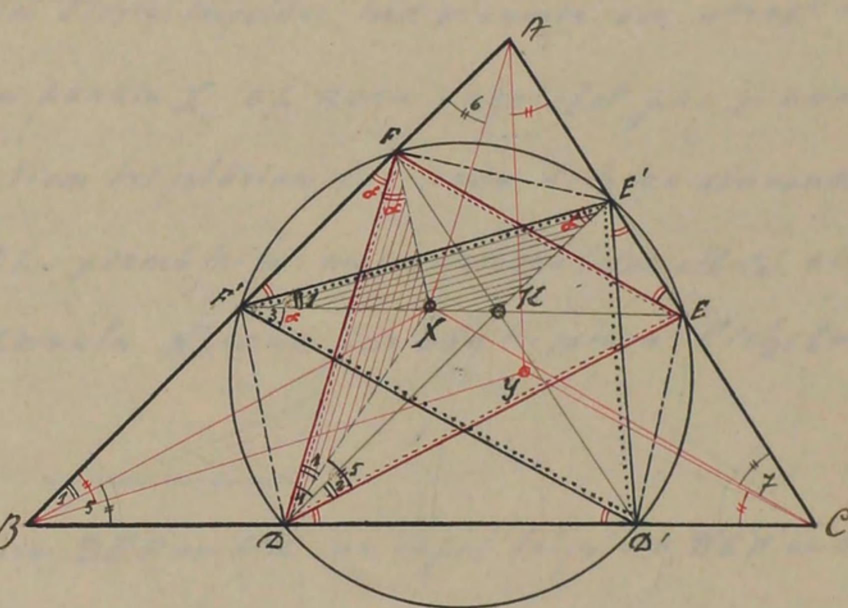
Pašiem pierādīt, ka tiešām 6 aizrādītā kārtā konstruētie punkti atrodas uz viena riņķa.

Viegli var noskaidrot (ko pašiem izdarīt) ka trijstūru RNT un SMU malas veido ar dotā trijstūra malām vienādus leņķus (katram trijst. skaitus pretējā virzienā) un ka šie abi trijstūri ir kongruenti savā starpā un līdzīgi dotam trijstūrim (zīm. skat. 86. l. p. p.). Tā nonākam pie jaunas metodes Tucker'a riņķu konstruēšanai. T. i. — dotā trijstūrī iezīmējam riņķam līdzīgu trijstūri, kas ar dotā trijstūŗa atbilstošām malām veido vienādus leņķus φ. Ap šo līdzīgo trijstūri aprakstītais riņķis ir viens no Tucker'a riņķiem. Mainot leņķa φ nozīmes un aprakstot atbilstošiem trijstūriem riņķus — dabujam Tucker'a riņķu sistemu.

Brocard'a punkti un leņķis.

Ņemam trijstūri ABC un konstruējam riņķam atbilstošo I. Lemoine'a riņķi un I. Lemoine'a 6-stūri $DD'EE'FF'$. Tad savienojam 6-stūŗa virsotnes ar diagonālēm tādā kārtā, ka pa vienai izlaižam starpā. Tā dabujam divus trijstūŗus: trijst. DEF un trijst. $D'E'F'$. — Noskaidrosim, kāds sakars pastāv starp šiem trijstūriem?

Apskatīsim leņķus.



$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ (jo abi balstās uz hordu EE')

$\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$ („ „ „ „ vienādām hordām)

Tā l. $\sphericalangle D = \sphericalangle F'$.

Tādā pat ceļā dabujam, ka arī

$\sphericalangle E = \sphericalangle D'$ un

$\sphericalangle F = \sphericalangle E'$.

No leņķu vienādības seko, ka aplūkojamiem trijstūriem arī malas ir vienādas. [Hordas, kas savelk vienā u. t. p. riņķa vienādus lokus, k. t. p. — guļ pret vienādiem ierakstītiem leņķiem — ir vienāda garuma]. T. i.

$$EF = E'D', \quad DF = E'F', \quad DE = D'F'.$$

Tā tad trijstūri DEF un $D'E'F'$ ir kongruenti. — Noskaidrosim vēl, vai šie trijstūri nav līdzīgi trijstūrim ABC?

$$\sphericalangle B = \sphericalangle AF'E = \sphericalangle AF'E + \sphericalangle 1 = \alpha + 1, \quad \sphericalangle F' = \sphericalangle 3 + \sphericalangle 1 = \alpha + \sphericalangle 1, \text{(jo } \sphericalangle 3 = \alpha\text{) T. i.}$$

$$\sphericalangle B = \sphericalangle F'.$$

Tik pat viegli varam pierādīt, ka

$$\sphericalangle C = \sphericalangle D'.$$

Ar to pietiek, lai taisītu slēdzienu, ka trijstūri DEF un D'E'F' ir līdzīgi trijstūrim ABC.

Trijstūris DEF veido ar trijstūŗa ABC atbilstošām malām leņķus, kuri visi ir vienādi. T. i.

$$\sphericalangle BFD = \sphericalangle CDE = \sphericalangle AEF = \alpha.$$ (visi šie leņķi balstās uz vienādām kordām)

Tāpat arī trijstūris D'E'F' veido ar trijstūra ABC atbilstošām malām tādus pašus leņķus, tikai skaitītus pretējos virzienos. T. i.

$$\sphericalangle AF'E' = \sphericalangle BD'F' = \sphericalangle CE'D' = \alpha$$ (visi šie leņķi balstās uz vienādām kordām).

Dabūto rezultātu var izteikt teoremā:

I. Lemoine'a 6-stūrī velkot dažādas diagonales (izņemot tās, kas iet caur Lemoine'a punktu) rodas divi kongruenti trijstūri, kuri ir līdzīgi dotajam trijstūrim un kuŗu malas veido ar atbilstošām dotā trijstūŗa malām vienādus leņķus, skaitītus katram trijstūrim savā virzienā.

Ja plāknē doti divi līdzīgi trijstūri, tad vienmēr var atrast trijstūŗu plāknē tādu punktu X, ap kuŗu pagriežot par zināmu leņķi vienu no dotiem trijstūriem tas ieņem līdzīgu stāvokli ar otru trijstūri (t. i. - pirmā trijst. malas ~~kļūs~~ paralelas atbilst. otrā trijst. malām). - Šo punktu X sauc par abu trijstūŗu līdzības centru.

Noskaidrosim, kur atrodas trijstūŗu DEF un ABC un tāpat trijstūŗu D'E'F' un ABC līdzības centri?

- Lemoine'a punktu K var uzskatīt kā piederošu trijstūrim DEF un meklēt viņam atbilstošu (analogu) punktu trijstūrī D'E'F' un otrādi. Pieņemsim ka punkts K pieder trijstūrim D'E'F' un meklēsim trijstūrī DEF viņam analogu punktu X [T. i. meklēsim trijst. DEF tādu punktu X, kuŗš uzliekot trijstūri D'E'F' uz trijst. DEF sakristu ar punktu K]. Konstruēsim trijstūrī DEF uz malas DF jaunu trijstūri tā, lai no virsotnes F izejošās malas garums līdzinātos nogrieznim E'K un no virsotnes D izejošās malas garums nogrieznim F'K [varētu ņemt arī kaut kuŗu no parējām trijstūŗa DEF malām, piem. malu DE un konstr. uz viņas trijst. tā, lai no D izejošās otras malas garums līdzinātos F'K un no virsotnes E izejošas malas garums būtu D'K] jaunā trijstūra trešā virsotne ir meklējamais punkts X, kurš uzliekot trijst. DEF un D'E'F' vienu uz otra tā, lai viņi sakristu, sakritīs ar punktu K.

Pierādīsim, ka dabūtais punkts X ir trijstūru DEF un ABC līdzības centrs, t.i. ka pagriežot trijstūri DEF ap punktu X viņa malas var ieņemt stāvokli paralelu ar trijstūra ABC atbilstošām malām. – Ap četrstūri FXDB var aprakstīt riņķi, jo

$$\angle B + \angle FXD = 180^\circ.$$

[Trijstūri DFX un F'E'K ir kongruenti (pēc konstrukcijas), tamdēļ pret vienādām malām gulošie leņķi ir vienādi t.i. $\angle DFX = \angle F'E'K = \alpha$; $\angle FDX = \angle E'F'K = \angle 1$. Ņemot trijst. DFX leņķu summu dabujam: $\angle FXD + \alpha + \angle 1 = 180^\circ$; bet $\angle 1 + \alpha = \angle B$; t.i. $\angle B + \angle FXD = 180^\circ$]

Pamatojoties uz to var teikt, ka

$$\angle ABX = \angle FDX = \angle 1$$ (jo abi šie leņķi balstās uz palīga riņķa hord. FX)

Tā kā $\angle B = \angle D$,

$$\angle XBD = \angle XDE = \angle 5.$$

Pagriežot trijstūri DEF ap punktu X par $\angle DXB$ taisne XD ieņems stāvokli XB un mala DE kļūs paralela malai BC. Līdz ar to mala DF nonāks paralelā stāvoklī ar malu AB un mala EF ar malu AC.

Tā tad dabūtais punkts X ir trijstūru DEF un ABC līdzības centrs.

Pieņemot ka punkts K pieder trijstūrim DEF un atrodot riņam atbilstošu punktu y trijstūrī D'E'F', gluži tādā pat ceļā var pierādīt, ka šis punkts y ir trijstūru D'E'F' un ABC līdzības centrs.

Savienosim punktu X ar trijstūra virsotnēm A, B un C un pierādīsim, ka šie stari iztaisa ar trijstūra malām vienādus leņķus skait. vienā virzienā. T.i. pierādīsim, ka

$$\angle 5 = \angle 6 = \angle 7.$$

$\angle 5 = \angle XDE$, bet $\angle XDE = \angle 3 = \alpha$ (trijst. DXE un F'D'K ir kongruenti). Tā tad

$$\angle 5 = \alpha$$

Pagriežot trijstūri DEF ap punktu X par $\angle DXB = \angle FXA$, taisne FX sakritīs ar AX, bet bet trijst. mala AB būs paralela malai DF. Tamdēļ

$$\angle 6 = \alpha$$ (kā leņķi ar savstarp. paralelām malām)

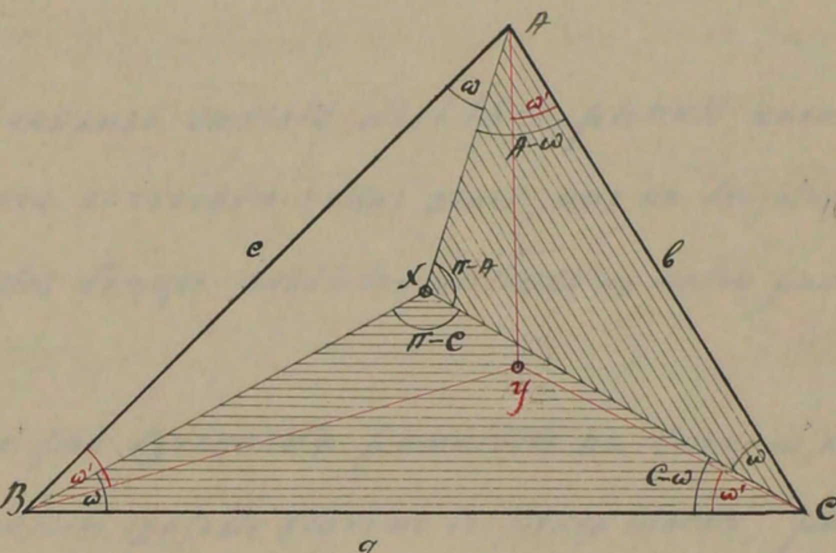
Nav grūti pierādīt (ko izdarīt pašiem), ka arī

$$\measuredangle\gamma = \alpha.$$

Bez tam pašiem pierādīt, ka arī stari, kas savieno punktu y ar trijstūra ABC virsotnēm veido ar trijstūra malām vienu un to pašu leņķi α, tikai skaitītu pretējā virzienā salīdzinot ar no punkta x izejošo staru veidoto leņķi.

Punktus, kuriem piemīt tāda īpašība kā punktiem x un y, sauc par Brocard'a punktiem. Leņķi, kuru veido no šiem punktiem izejošie stari ar dotā trijstūra malām, sauc par Brocard'a leņķi un apzīmē ar ω

Mēģināsim aprēķināt leņķa ω vērtību.



Pagaidām apzīmēsim ar ω tikai to leņķi, ko veido ar trijstūra malām no punkta x izejošie stari. Leņķi ko veido no punkta y izejošie stari apzīmēsim ar ω' un vēlāk pierādīsim, ka tiešam $\omega = \omega'$.

Ņemsim trijstūrus BXC un AXC. Pielietojot viņiem sinus likumu varam rakstīt proporcijas

$$\frac{a}{Cx} = \frac{\sin C}{\sin\omega}; \quad \frac{Cx}{b} = \frac{\sin(A-\omega)}{\sin A}.$$ Abas proporcijas sareizinot dab.

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin C.\sin(A-\omega)}{\sin\omega \sin A},$$ bet $\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$ un tamdēļ var rakstīt

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin C.\sin(A-\omega)}{\sin\omega \sin A}. \qquad A = \pi-(B+C) \text{ un t.t.}$$

$$\frac{\sin(B+C)}{\sin B.\sin C} = \frac{\sin(A-\omega)}{\sin\omega.\sin A}.$$ Atverot iekavas un abas puses izdalot ar saucējiem dab. sak.

$$\operatorname{ctg} C + \operatorname{ctg} B = \operatorname{ctg}\omega - \operatorname{ctg} A,$$ no kurienes seko, ka

$$\operatorname{ctg}\omega = \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C. \ldots \text{(I. Klasiskā sakarība)}$$

Brocard's nav pirmais, kas šo formulu (sakarību) konstatējis. Vācu architekts A.L. Crelle šo formulu konstatējis 1816 g. Brocard's, tāpat kā Lemoine's, interesējies par aplūkoto punktu īpašībām un uz Neuberga ierosinājumu abi šie punkti un leņķis ω nosaukti Brocard'a vārdā.

Pašiem pierādīt, ka arī attiecībā uz leņķi ω', ko veido ar trijstūŗa ABC malām no punkta Y izejošie stari, pareiza ir formula

$$\mathrm{ctg}\,\omega' = \mathrm{ctg}A + \mathrm{ctg}B + \mathrm{ctg}C.$$

No šīs un no iepriekšējās sakarības seko, ka

$$\mathrm{ctg}\,\omega = \mathrm{ctg}\,\omega'.$$

Tā kā katrs no leņķiem ω un ω' ir mazāks par $90°$, nonākam pie slēdziena, ka

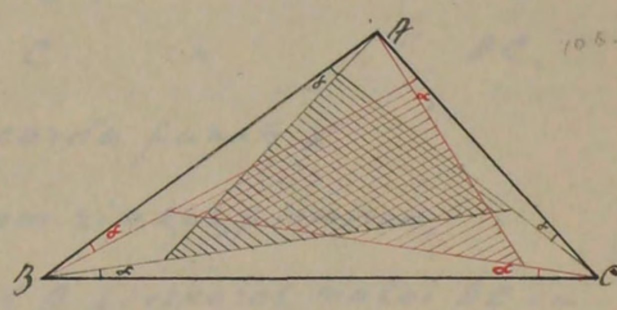
$$\underline{\omega = \omega'}.$$

Tā tad

Katra trijstūŗa iekšpusē eksistē divi tādi punkti, kuŗus savienojot ar trijstūŗa virsotnēm rodas stari, kas ar trijstūŗa malām veido vienādus leņķus, skaitītus attiecībā uz katru punktu savā virzienā.

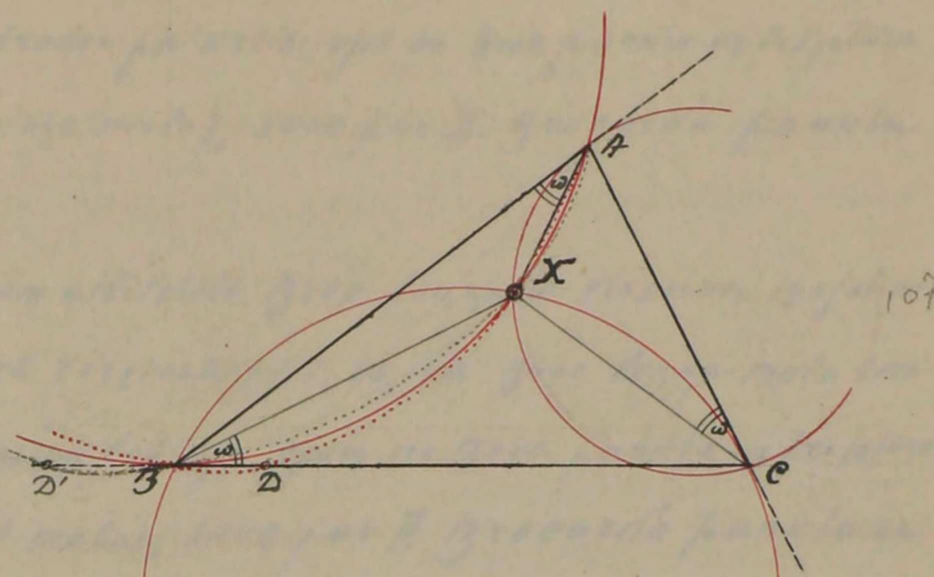
– Šos punktus sauc par Brocard'a punktiem un leņķi ω, ko veido no šiem punktiem izejošie stari ar trijstūŗa malām, par Brocard'a leņķi

Apskatīsim tagad dažas metodes Brocard'a punktu konstruēšanai.– Viena no viņām ir šāda: Dotajā trijstūrī ABC no visām virsotnēm velkam starus zem viena un tā paša leņķa α, skaitīta vienā virzienā.



Šie stari izveido dotā trijstūŗa iekšpusē jaunu trijst. Liekot leņķim α augt, iekšējais trijstūris dilst, kamēr pārvēršas par punktu, kas ir viens no Brocard'a punktiem. Otru Brocard'a punktu dabujam, ja pie dotā trijstūŗa virsotnēm atliekam vienādus leņķus, skaitītus pretējā virzienā, kā pirmā gadījumā ~~un~~ liekamsim leņķim atkal pieaugt tik ilgi kamēr iekšējais (sarkanais) trijstūris pārvēršas par punktu.

Tālāk apskatīsim metodi, kuŗa dod iespēju uzreiz konstruēt Brocard'a punktus.– Pieņemsim ka viens no šiem punktiem, piem punkts X, ir atrasts un izda-



rīsim analīzi. — Vilksim riņķi caur punktiem A, B un X un pierādīsim, ka šis riņķis pieskaras punktā B taisnei BC.

Pieņemot, ka šis riņķis krusto malu BC kādā punktā D atduramies uz pretrunu [jo tādā gadījumā leņķis $\sphericalangle XAB$ tiktu mērīts ar loku $\frac{1}{2}BX$, bet leņķis XBC ar loku $\frac{1}{2}DX$, kas ir tikai daļa no loka $\frac{1}{2}BX$. U.t.t. abi šie leņķi nebūtu vienādi, kas runātu pretim tam, ka X ir Brocard'a punkts]. Pieņemot, ka minētais riņķis krusto malas BC pagarinājumu kādā punktā D' arī nonākam pie pretrunas [jo tādā gadījumā $\sphericalangle XBC = \frac{\frown XB + \frown BD'}{2}$, bet $\sphericalangle XAB = \frac{\frown XB}{2}$ un tātad abi šie leņķi nevarētu būt vienādi, kas atkal ienestu pretrunu]. Tātad atliek, ka riņķis, kas vilkts caur punktiem A, B un X, punktā B skaras pie taisnes BC. Tāpat var pierādīt, ka riņķis, kas vilkts caur punktiem B, C un X, punktā C skaras pie trijstūra malas AC un arī riņķis, kas vilkts caur punktiem A, C, X, punktā A skaras pie malas AB. Ar to ir skaidrs, kā konstruēt aplūkoto Brocard'a punktu X. — Konstruējam kaut kurus divus no trim minētiem riņķiem, piemēram

riņķi, kas iet caur punktiem A un B un punktā B pieskaras malai BC un
" " " " " B un C " " C " " AC.

Abu šo riņķu krustošanās punkts ir Brocard'a punkts X.

Otru Brocard'a punktu dabujam, ja velkam riņķus, piemēram,

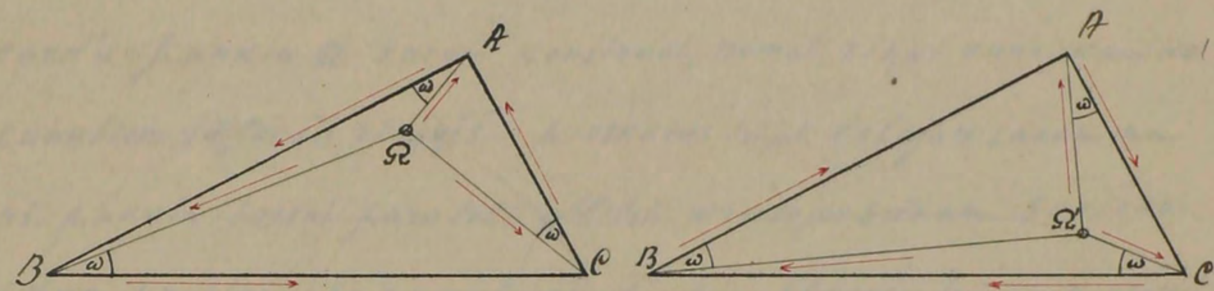
riņķi, kas iet caur punktiem A un B un punktā A pieskaras malai AC un
" " " " " B un C " " B " " AB.

Šo riņķu krustošanās punkts ir otrs Brocard'a punkts.

No 1870–1885 g. pastāvēja nesaprašanās, kuru no Brocard'a punktiem saukt par I., un kuru par II. Tagad tas ir noskaidrots.

Brocard'a punktu, kuram atbilstošo Broc. leņķu ω virsotnes izejot no šā punkta apejam pozitīvā virzienā (t.i. tā, ka Broc. leņķa malu ierobežotā plāksnes daļa atrodas pa kreisi, ejot no Broc. punkta uz trijstūŗa virsotni un pēc tam pa trijstūŗa malu), sauc par I. Brocard'a punktu un apzīmē ar Ω

Brocard'a punktu, kuŗam atbilstošo Broc. leņķu ω virsotnes izejot no šā punkta apejam negatīvā virzienā (t.i. tā, ka Broc. leņķa malu ierobežotā plāksnes daļa atrodas pa labi, ja ejam no Broc. punkta uz trijstūŗa virsotni un pēc tam pa trijst. malu), sauc par II. Brocard'a punktu un apzīmē ar Ω'.



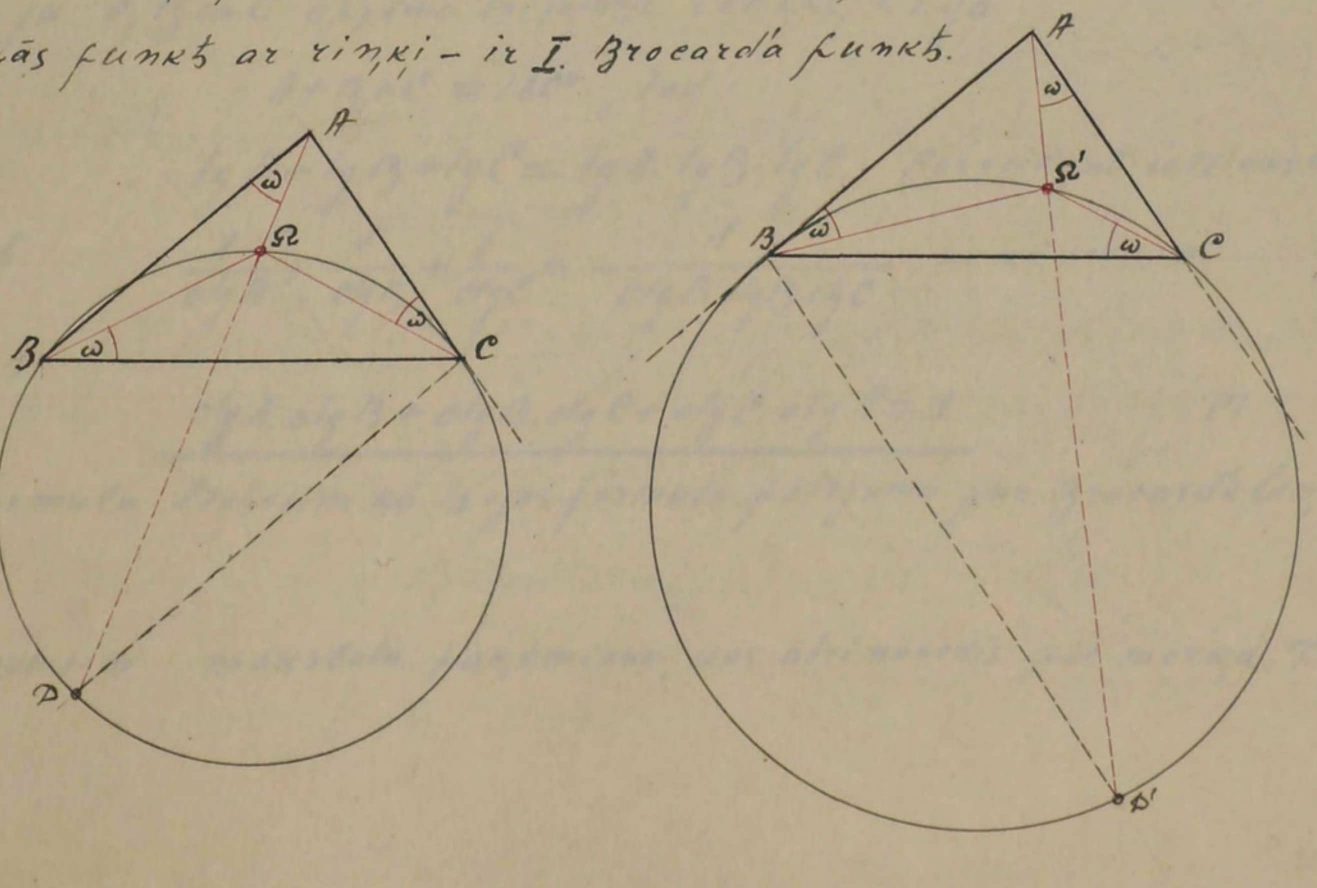
108

Abi Brocard'a punkti, ja viņi atrodas vienā zīmējumā, ir izogonali saistīti punkti. Tamdēļ,

Velkot no abiem Brocard'a punktiem perpendikuļus pret trijstūŗa malām rodas 6 krustošanās punkti, kas visi atrodas uz viena riņķa.

Brocard'a punktus varam konstruēt arī šādā ceļā:

1) caur dotā trijstūŗa ABC punktiem B un C velkam riņķi, kas punktā C pieskaras pie trijst. malas AC. Pēc tam caur C velkam taisni paralelu malai AB, kuŗa krusto minēto riņķi punktā D. Taisnes AD (kas savieno punktu D ar trijst. virsotni A) krustošanās punkts ar riņķi – ir I. Brocard'a punkts.



109

2) Caur dotā trijstūra ABC punktiem B un C velkam riņķi, kas punktā B pieskaras trijstūra malai AB. Caur punktu B velkam taisni paralelu trijst. malai AC, kura krusto riņķi punktā D'. Savienojam punktus D' un A. Taisnes AD' un riņķa krustošanās punkts ir II. Brocard'a punkts.

Pašiem pierādīt, ka aizrādītā kārtā konstruētie punkti tiešām ir abi Brocard'a punkti. T. i. - ka stari, kas savieno šos punktus ar trijstūra virsotnēm tiešām veido ar trijst. malām vienu un to pašu leņķi ω, (tikai) skaitītu attiecībā uz katru punktu savā virzienā.

Piezīme: I Brocard'a punktu Ω varam konstruēt, ņemot riņķi caur kaut kuras trijst. malas gala punktiem tā, lai šis riņķis pieskaras trijst. labajam sānam un velkot caur šo pieskarš. punktu taisni paraleli atbilst. kreisajam sānam. Savienojot šās taisnes un riņķa krustošanās punktu ar pretim stāvošo trijst. virsotni, dabujam savienojošās taisnes un riņķa līnijas otru krust. punktu, kas ir I Brocard'a punkts. Tāpat velkot riņķi caur kaut kuras trijst. malas gala punktiem tā, lai viņš pieskaras kreisajam sānam un caur skarš. punktu velkot taisni paralelu atbilst. labajam sānam dabujam šis taisnes un riņķa krustoš. punktu, kura savienojot ar pretim stavošo trijst. virsotni dab. ~~uz~~ riņķa otru krustošanās punktu, kas ir II Brocard'a punkts.

Pats Brocard's punktu Ω nosaucis par segmentāro punktu.

Noskaidrosim tagad - vai Brocard'a leņķis ω ir ierobežots lieluma ziņā? Kā zināms, ja A, B un C apzīmē trijstūra leņķus, t. i. - ja

$$A+B+C=180^\circ \text{, tad}$$

$$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B\cdot\operatorname{tg}C.$$ Pārveidojot šo izteiksmi cotangensos. dab.

$$\frac{1}{\operatorname{ctg}A}+\frac{1}{\operatorname{ctg}B}+\frac{1}{\operatorname{ctg}C}=\frac{1}{\operatorname{ctg}A\cdot\operatorname{ctg}B\cdot\operatorname{ctg}C},$$ no kā seko, ka

$$\underline{\operatorname{ctg}A\cdot\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}B\cdot\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}C\cdot\operatorname{ctg}A=1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Šo pēdējo formulu lietosim kā izejas formulu pētījumā par Brocard'a leņķa lielumu.

Tālāk ņemsim mākslotu paņēmienu, kas ātri novedīs pie mērķa. T. i.

$$(\operatorname{ctg}A-\operatorname{ctg}B)^2+(\operatorname{ctg}B-\operatorname{ctg}C)^2+(\operatorname{ctg}C-\operatorname{ctg}A)^2=$$

$$=2(\operatorname{ctg}^2A+\operatorname{ctg}^2B+\operatorname{ctg}^2C)-2(\operatorname{ctg}A\cdot\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}B\cdot\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}C\cdot\operatorname{ctg}A)=$$

$$=2(\operatorname{ctg}^2\omega-2)-2=2(\operatorname{ctg}^2\omega-3),$$ jo

pamatojoties uz form. (1) $\operatorname{ctg}A\cdot\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}B\cdot\operatorname{ctg}C+\operatorname{ctg}C\cdot\operatorname{ctg}A=1$, un Brocard'a leņķa definicijas formula

$$\operatorname{ctg}\omega=\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C$$ dod, ka

$$\operatorname{ctg}^2\omega=\operatorname{ctg}^2A+\operatorname{ctg}^2B+\operatorname{ctg}^2C+2.$$

Tā kā augšā stāvošā izteiksme ir kvadratu summa, kas nevar būt negatīvs lielums, nonākam pie slēdziena, ka

$$\operatorname{ctg}^2\omega-3\geq 0$$ u.t.t.

$$\operatorname{ctg}\omega\geq\sqrt{3}$$ (kvadr. saknei ņemam tikai vienu zīmi, jo leņķis ω ir mazāks par $90°$ u.t.t viņa ctg. nevar būt negatīvs).

$$\operatorname{ctg}\omega\geq\operatorname{ctg}30°$$, kas nozīme, ka

$$\underline{\omega\leq 30°}$$ Tā tad

Brocard'a leņķa maximums ir $30°$

Apskatīsim, cik liels ir (šis) leņķis ω vienādmalu trijstūrī? Šinī gadījumā

$A=60°$, $B=60°$, $C=60°$ u.t.t pamat. uz definic. form. dab.

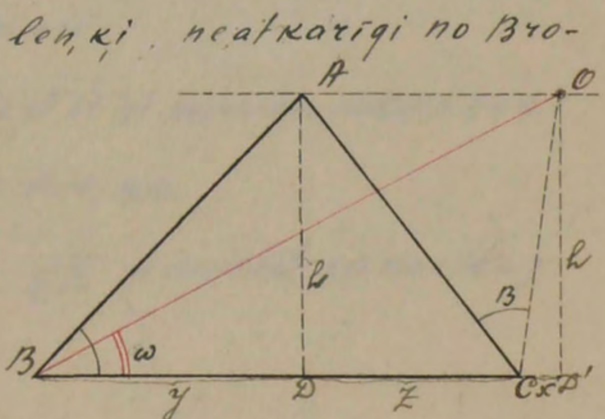
$$\operatorname{ctg}\omega=3\operatorname{ctg}60°=3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$, kas rāda, ka

$$\omega=30°$$

$0°$ Brocardá leņķis varētu līdzināties tikai gadījumā, ja trijstūris būtu saspiedies par taisni. Šis gadījums ir jāatmet. Un tā beidzot dabujam, ka leņķis ω ir ieslēgts šādās robežās:

$$\underline{0°<\omega\leq 30°}$$

Apskatīsim kā var konstruēt Brocard'a leņķi neatkarīgi no Brocard'a punktiem.



Ņemam trijstūri ABC. Malas AC ārpusē punktā C piezīmējam $\angle B$. Caur virsotni A velkam taisni paraleli pamatam BC. Šīs taisnes un piekonstruētā leņķa ārējās malas krustošanās punktu O savienojam ar trijstūra virsotni B. Rodas $\measuredangle OBC$, kas ir meklējamais leņķis ω. Pierādīsim, ka tiešām

$$\measuredangle OBC = \omega.$$

– No punktiem A un O nolaidīsim perpendikuļus uz pamatu BC. Tā dabujam vairākus taisnleņķa trijstūrus, kuri dod iespēju rakstīt sekoj. sakarības.

$$h\,ctg\,\omega = BD', \quad bet.$$

$$BD' = y + z + x = h\,ctg\,B + h\,ctg\,C + h\,ctg\,A = h(ctg\,A + ctg\,B + ctg\,C).$$

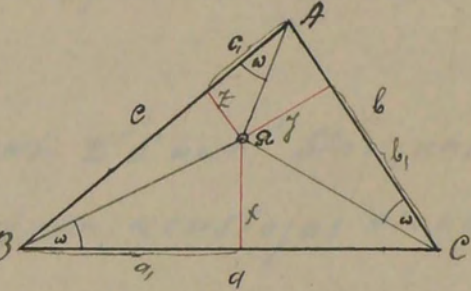
Tā tad

$$h\,ctg\,\omega = h\,(ctg\,A + ctg\,B + ctg\,C) \quad un$$

$$ctg\,\omega = ctg\,A + ctg\,B + ctg\,C, \quad \text{ar ko ir pierādīta konstr. pareizība.}$$

Pastāv arī sakarība, kas saista Brocard'a leņķi ar dotā trijstūra malām. – Izvedīsim viņu.

Ņemsim trijstūri ABC un konstruēsim viņā vienu no Brocard'a punktiem, piemēram I Broc. punktu. Punkta Ω attālumus no trijstūra malām apzīm. ar x, y un z; staru ΩB, ΩC un ΩA projekcijas uz atbilst. trijstūra malām – ar a_1, b_1 un c_1. Pielietojot šim gadījumam Steiner'a formulu varam rakst.



$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = (a - a_1)^2 + (b - b_1)^2 + (c - c_1)^2, \quad \text{no kurienes}$$

$$2(aa_1 + bb_1 + cc_1) = a^2 + b^2 + c^2$$

$$aa_1 + bb_1 + cc_1 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

Apzīmējot trijstūru $B\Omega C$, $C\Omega A$ un $A\Omega B$ laukumus ar Δ_1, Δ_2 un Δ_3, redzam ka

$$2\Delta_1 = ax = aa_1\,tg\,\omega, \quad jo \quad x = a_1\,tg\,\omega;$$

$$2\Delta_2 = by = bb_1\,tg\,\omega \quad \text{"} \quad y = b_1\,tg\,\omega;$$

$$2\Delta_3 = cz = cc_1\,tg\,\omega \quad \text{"} \quad z = c_1\,tg\,\omega. \quad \text{Trīs dabūtās sakar. saskaitot:}$$

$$2\Delta = tg\,\omega\,(aa_1 + bb_1 + cc_1), \quad \text{vai arī}$$

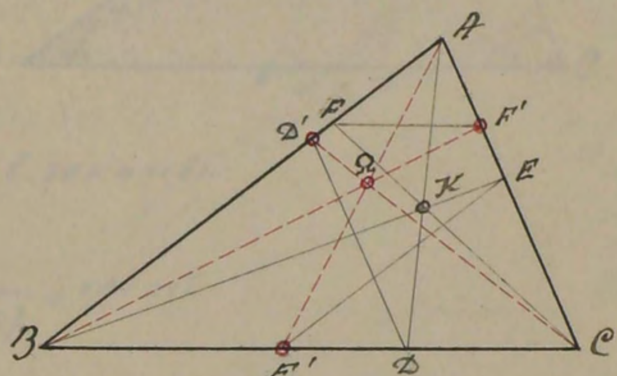
$$2\Delta\,ctg\,\omega = aa_1 + bb_1 + cc_1. \quad \text{Ievietojot šo izt. augstāk dabūtā sak.}$$

$$2\Delta\,ctg\,\omega = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}, \quad \text{kas dod, ka}$$

$$ctg\,\omega = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\Delta} \quad \ldots\ldots (\text{II klasiskā sakarība})$$

Aplūkosim vēl vienu īpatnēju metodi Brocard'a punktu konstruēšanai. Rīkosimies pēc priekšraksta, ko uzgājis Lemoine's savā trijstūrī un kas dod iespēju no Lemoine'a punkta tūliņ atrast Brocard'a punktus.

Ņemam trijstūri ABC un viņā Lemoine'a punktu K. Caur virsotni A un K velkam taisni (t.i. simmed.), kuŗa krusto malu BC punktā D. Tad caur D taisni paralelu vienam trijstūŗa sānam. Šoreiz velkam taisni paralelu labajam sānam t.i. malai AC. To pašu konstrukc. izpildam ņemot arī parējās trijstūŗa virsotnes. T.i. – rīkojamies šādi:

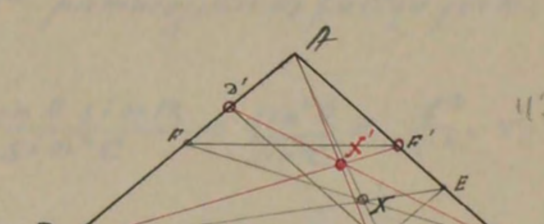


Caur virsotni A velkam simmed., kas krusto malu BC punktā D un caur punktu D taisni paralelu malai AC;

caur virsotni B velkam simmed., kas krusto malu AC punktā E un caur E taisni paralelu malai AB; 112

caur virsotni C velkam simmed., kas krusto malu AB punktā F un caur F taisni paralelu malai BC.

Tā rodas uz trijstūŗa malām trīs jauni punkti D' E' un F'. Stari, kas savieno šos punktus ar pretim stāvošām trijst. virsotnēm, krustojas vienā punktā, kas ir I. Brocard'a punkts.



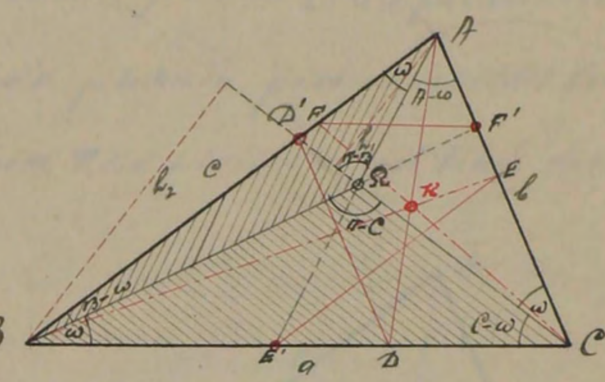
113

Lemoine'a punkta vietā trijstūŗa iekšpusē var ņemt kaut kuŗu punktu X. Velkot caur šo punktu un trijstūŗa virsotnēm starus un pēc tam caur šo staru un trijstūŗa malu krustošanās punktiem (D, E, F) taisnes paraleli atbilstošai labajai trijst. sānu malai, dabujam uz trijstūra malām trīs punktus (D', E', F'), kuŗus savienojot ar pretējām trijstūŗa virsotnēm rodas trīs stari, kas krustojas vienā punktā X'. [Mēģināt pašiem pierādīt, ka tiešām trīs dabūtie stari AE', BF' un CD' krustojas vienā punktā].

Tā tad ar šo konstrukciju attiecībā uz doto trijstūri katram plāksnes punktam X var piesaistīt otru noteiktu punktu X'

Atgriezīsimies tagad pie pierādījuma, ka ar apskatīto konstrukciju no Lemoine'a punkta K dabūtais punkts Ω tiešām ir I Brocard'a punkts.– Ņemsim trijstūri ABC, pieņemsim ka Broc. punkts Ω ir dots un izdarīsim analīzi.

Vispirms izvedīsim palīga formulu, kas būs vajadzīga pie tālākiem pārveidojumiem.– Ņemot trijstūrus BΩC un BΩA un pielietojot tiņiem sinus likumu dabujam proporcijas



$$\frac{a}{B\Omega} = \frac{\sin(\pi - C)}{\sin(C-\omega)},$$

$$\frac{B\Omega}{c} = \frac{\sin\omega}{\sin(\pi - B)},$$ kuras savienojot dab. sakarību

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C} = \frac{\sin C \cdot \sin\omega}{\sin B \cdot \sin(C-\omega)},$$ vai arī

$$\frac{\sin A \cdot \sin B}{\sin^2 C} = \frac{\sin\omega}{\sin(C-\omega)},$$ kas ir meklētā palīga formula.

Vilksim tagad transversali caur punktu Ω un kādu no trijstūra virsotnēm, piemēram caur Ω un virsotni C, un noskaidrosim, kādā attiecībā šī transversale sadala pretējo trijst. malu. T.i. – noskaidrosim, kāda ir nogriežņu AD' un D'B attiecība. Nolaidīsim no virsotnēm A un B perpendikulus uz transv. CD'. Rodas līdzīgi trijstūri, kas dod iespēju rakstīt proporciju

$$\frac{AD'}{D'B} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{b\sin\omega}{a\sin(C-\omega)},$$ kuru, pamatojoties uz palīga form., varam pārrakst.

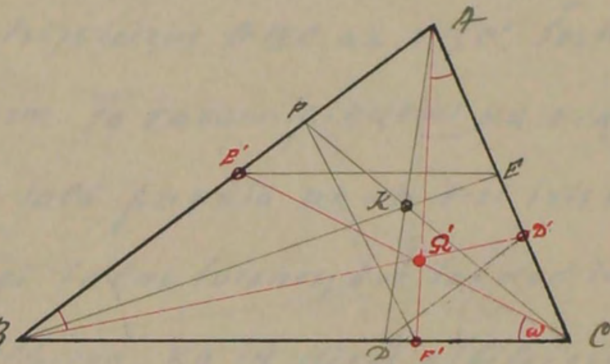
$$\frac{AD'}{D'B} = \frac{b}{a}\cdot\frac{\sin A \cdot \sin B}{\sin^2 C} = \frac{\sin B}{\sin A}\cdot\frac{\sin A \cdot \sin B}{\sin^2 C} = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 C} = \frac{b^2}{c^2}.$$ T.t.

$$\frac{AD'}{D'B} = \frac{b^2}{c^2}.$$

Caur D' velkam taisni paralelu trijst. malai AC, kas krusto malu BC punktā D. Sastādam tagad nogriežņu BD un DC attiecību. Tā kā D'D // AC, dab. atkal prop.

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BD'}{D'A} = \frac{c^2}{b^2}.$$

Tā tad punkts D ir punkts, kurā simmed. krusto trijst. malu BC. T.i. – taisne DA ir simmediana. Tāpat varam pierādīt, ka arī taisnes, kas savieno caur transversaļu BΩ un AΩ krustoš. punktiem ar trijst. malām F' un E' paralēli trijst. malām BC un AB vilktu taišņu un trijst. malu krustoš punktus F un E ar pretim guļošām trijst. virsotnēm – ir simmedianas. Kā zināms, visas simmedianas krustojas Lemoine'a punktā K. – Ar to ir pierādīts, ka ar 99. l. p. apskatīto konstrukciju no Lemoine'a punkta K dabūtais punkts Ω tiešām ir I. Brocard'a punkts. [Pats par sevi ir saprotams, ka atrodot no Lemoine'a punkta Brocard'a punktu pietiek izpildīt šo konstrukciju tikai attiecībā uz divām trijstūra virsotnēm. T.i. – pietiek atrast tikai divus no stariem AE', BF' un CD']



115

Ja caur Lemoine'a punktu K un trijstūra virsotnēm velkam starus un pēc tam caur šo staru un trijst. malu krustoš. punktiem taisnes paralelas atbilstošām kreisām sānu malām, tad uz trijst. malām dabujam trīs jaunus krustoš. punktus. Stari, kas savieno šos pēdējos punktus ar pretīm guļošām trijst. virsotnēm, krustojas vienā punktā, kas ir otrs Brocard'a punkts Ω'. T.i.:

Caur punktu D velkam taisni paralelu malai AB,
" " E " " " " BC,
" " F " " " " AC.

Rodas punkti D', E' un F'. Stari AF', BD' un CE' krustojas II. Brocard'a punktā Ω'. [Ka šādā ceļā no punkta K dabūtais punkts Ω' tiešām ir II. Brocard'a punkts – pierādām līdzīgi kā I. Broc. punkta gadījumā].

Ņemot K vietā kaut kuru citu punktu X un izdarot attiecībā uz viņu (un doto trijstūri) tikko aprakstīto konstrukciju, dabujam punktam X noteiktā kārtā piesaistītu punktu X''.

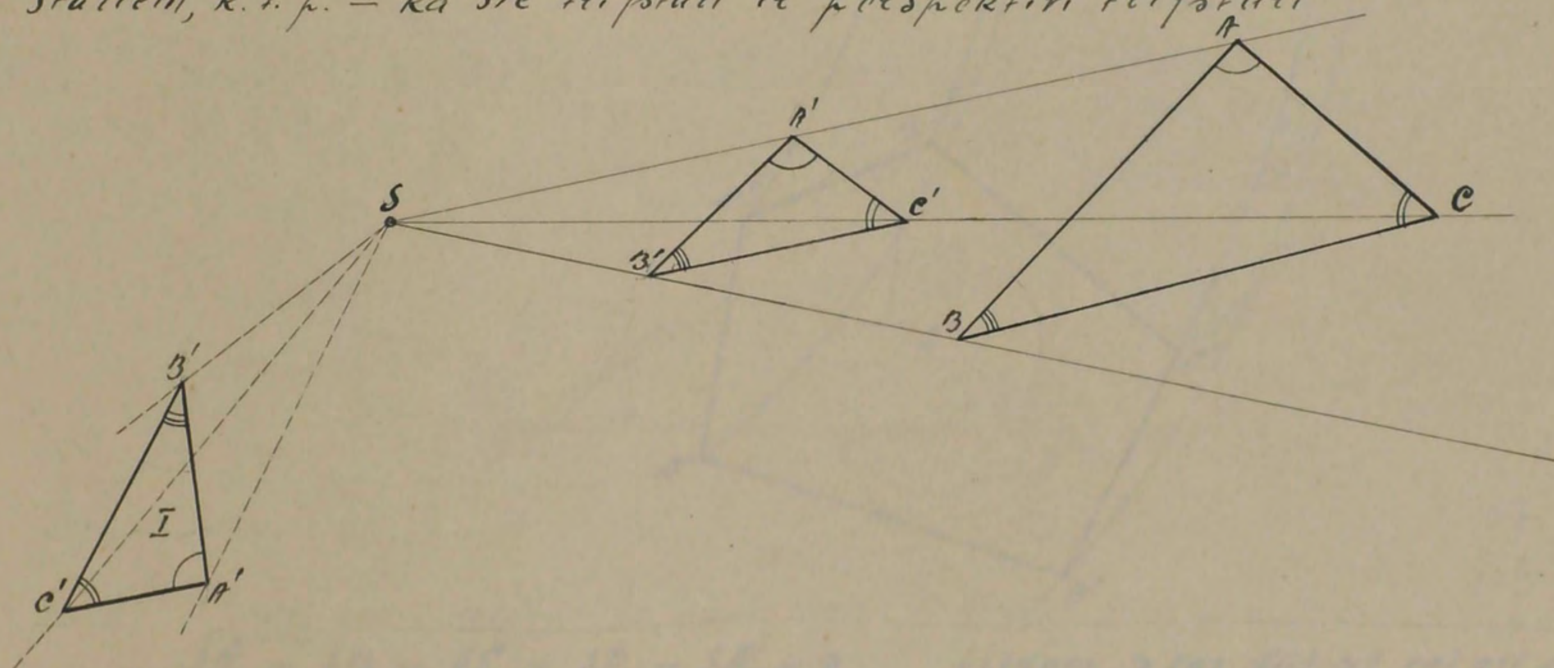
Punktus, kas saistīti tādā kārtā, kā punkti X un X' (skat. 99. l. p.) vai arī X un X'' ap pagājušā gadu simt. 70. gadiem likts priekšā nosaukt par Brocard'iskiem punktiem. Šis nosaukums tomēr nav iesakņojies.

Pamēģināt pašiem konstruēt Brocard'iskus punktus ievērojamākiem trijstūra punktiem.

Līdzības centrs un viņa sakars ar Brocard'a punktiem.

Līdzīgas figuras parasti novieto līdzīgā stāvoklī, t. i. tā, ka viņu atbilstošās malas ir paralelas. Vispārīgi līdzīgu figuru savstarpējais stāvoklis var būt kaut kāds.

Ņemam divus līdzīgus līdzīgi novietotus trijstūŗus ABC un A'B'C'. Šos trijstūŗus var nosaukt par perspektiviem trijstūriem. To varam pieņemt, ka viņu ik divas attiecīgās malas krustojas bezgalīgi tālā punktā un ka visi trīs šie krustošanās punkti atrodas uz vienas bezgalīgi tālas taisnes; bet tas dod iespēju (pamatojoties uz Desarg. teoremu) taisīt slēdzienu, ka ik divas atbilstošās šo trijstūŗu virsotnes atrodas uz viena no trim no viena centra izejošiem stariem, k. t. p. — kā šie trijstūri ir perspektivi trijstūri



116.

Perspektivus trijstūŗus ar savstarp. paralelām malām sauc par homotetiskiem trijstūriem. Pamatojoties uz augstāk izvesto slēdzienu var teikt arī, kā homotetiski trijstūri ir līdzīgi līdzīgā stāvoklī novietoti trijstūri.

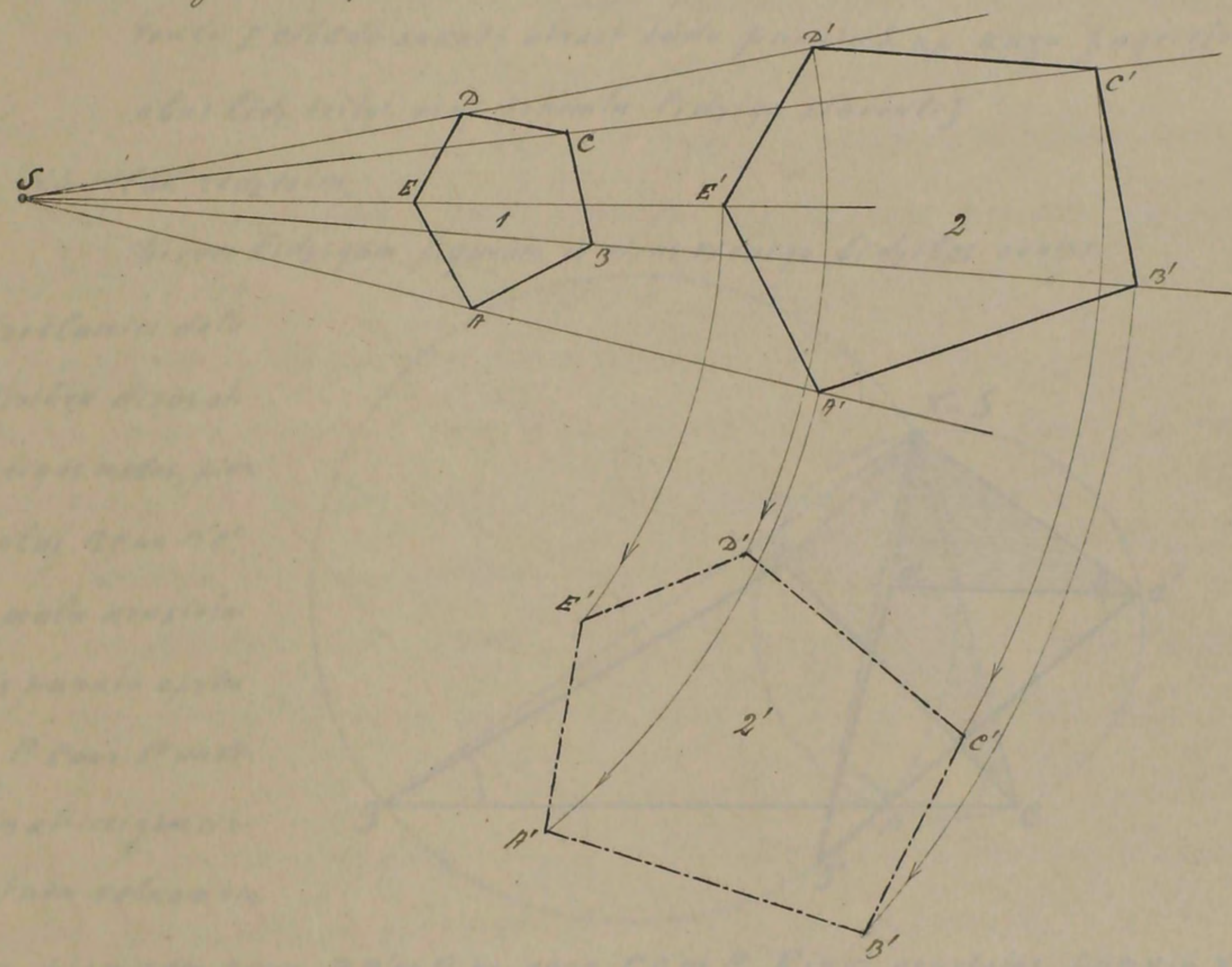
Tā tad trijstūri ABC un A'B'C' ir arī homotetiski trijstūri. Punkts S ir šo trijstūŗu homotetijas centrs.

Homotetiski trijstūri vienmēr ir līdzīgi, bet līdzīgi trijstūri vienmēr nav homotetiski. Piemēram pagriežot trijstūri A'B'C' stāvoklī I, viņš gan paliek līdzīgs trijst. ABC, bet nav vairs viņam homotetisks, jo viņu malas nav vairs paralelas.

Runājot par homotetiskām figurām, pašlaik apstāsimies tikai pie taisn-līniju figurām, kaut gan homotetiska radniecība pastāv arī pie līklīniju figurām, piem. pie elipsēm u.t.t.

Homotetiskas figuras var definēt šādi:

– Ņemam kādu figuru, piem. figuru ABCDE, un izvēlamies kādu punktu S. Caur šo punktu un daudzstūŗa (šoreiz 5-stūŗa) virsotnēm velkam starus. Uz katra stara izvēlamies jaunu punktu tā, lai



117

$$\frac{SA}{SA'} = \frac{SB}{SB'} = \frac{SC}{SC'} = \frac{SD}{SD'} = \frac{SE}{SE'} = \eta \,, \quad \text{piekam } \eta \text{ var būt } >1, \text{ vai arī } <1.$$

Rodas jauna figura A'B'C'D'E', kas ir līdzīga un līdzīgi novietota dotajai fig., jo abām šām fig. visas atbilstošās malas ir paralelas un visi atb. leņķi vienādi.

Figuras 1 un 2 sauc par homotetiskām figurām un punktu S par viņu homotetijas centru.

Pagriežot fig. 2 ap punktu S par zināmu leņķi, piem. pagriežot viņu stāvoklī 2', viņa gan paliek līdzīga fig. 1, bet nav vairs ar viņu homotetiska.

Punktu S sauc par fig. 1 un 2' līdzības centru.

Apstāsimies tagad pie jautājuma – kā atrast divām līdzīgām kaut kādā stāvoklī bet vienā plāknē novietotām figurām līdzības centru?

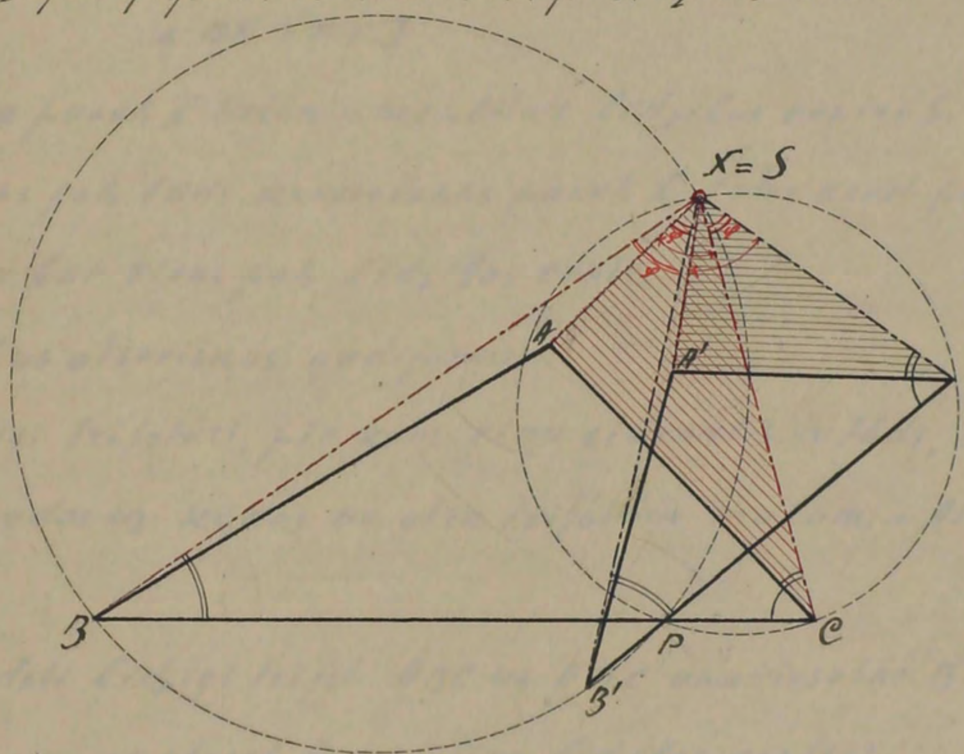
Apskatīsim šo jautājumu tikai attiecībā uz trijstūriem, jo katru taisnlīniju figuru var sadalīt trijstūros. Tā tad mūsu uzdevums ir šāds:

Plāknē doti divi līdzīgi patvaļīgi novietoti trijstūri ABC un $A'B'C'$. Atrast šo trijstūru līdzības centru S. T.i. – atrast tādu punktu, ap kuru pagriežot vienu vai abus līdzīgos trijst. viņi nonāktu homotetiskā stāvoklī. [Citādi sakot – atrast tādu punktu S, ap kuru pagriežot vienu vai abus līdz. trijst. viņi ieņemtu līdzīgu stāvokli]

Kā vēlāk redzēsim,

Divām līdzīgām figurām ir viens vienīgs līdzības centrs.

– Izvēlamies doto trijstūru divas attiecīgās malas, piem. malas BC un $B'C'$. Šo malu krustošanās punktu apzīm. ar P. Caur P un divām attiecīgām virsotnēm velkam riņķus,



piemēram caur B, B' un P un caur C, C' un P. Riņķi krustojas punktā X. – Izpētīsim šā punkta (X) īpašības un pierādīsim, ka viņš ir meklējamais līdzības centrs S. To varēsim skaitīt par pierādītu, ja izdosies pierādīt, ka

$$\angle AXA' = \angle BXB' = \angle CXC'.$$

Savienojam X ar virsotnēm B, C, B' un C'. Rodas trijstūri BCX un $B'C'X$, kuri ir līdzīgi, jo

$\angle XBC = \angle XB'C'$ (kā leņķi kas atbalstas uz vienu u.t.p. loku lielr.)

$\angle BCX = \angle B'C'X$ (" " " " " " " mazr.)

No tā seko, ka $\underline{\angle BXB' = \angle CXC' = \varphi}$ (jo $\angle BXC = \angle B'XC'$, bet $\angle BXB' = \angle BXC - \angle B'XC$, $\angle CXC' = \angle B'XC' - \angle B'XC$)

Savienosim tagad X ar A un A' un pierādīsim, ka arī trijst. ACX un $A'C'X$ ir līdzīgi.

$\angle ACX = \angle A'C'X$ (jo $\angle BCX = \angle B'C'X$, bet $\angle C = \angle C'$),

$\frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ ... (pamatojoties uz doto)

$\frac{BC}{B'C'} = \frac{XC}{XC'}$ .. (jo $\triangle BCX \sim \triangle B'C'X$). Tātad

$\frac{AC}{A'C'} = \frac{XC}{XC'}$ un tiešām trijstūri ACX un A'C'X ir līdzīgi, jo viņiem ir pa vienam vienādam leņķim un malas, kas kas šos leņķus ieslēdz ir proporcionālas. Tā kā līdzīgos trijstūros pret attiecīgām malām gulošie leņķi ir vienādi, dab. ka

$\angle AXC = \angle A'XC'$ un no tā seko, ka

$\angle AXA' = \angle CXC' = \varphi$. ($\angle AXA' = \angle AXC - \angle A'XC$, $\angle CXC' = \angle A'XC' - \angle A'XC$)

[Ņemot trijstūrus ABX un A'B'X tādā pat ceļā varam pierādīt, ka arī viņi ir līdzīgi un ka arī $\angle BXB' = \varphi$.]

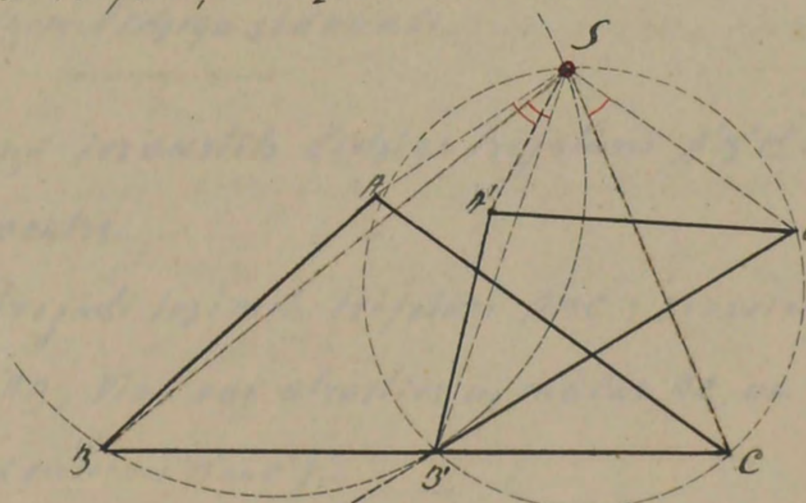
Ar to ir pierādīts, ka punkts X tiešām ir meklētais līdzības centrs S. Un tā kā diviem riņķiem var būt viens pats tāds krustošanās punkts X (otrs krust. punkts ir P) – diviem trijstūriem var būt viens pats līdzības centrs.

Apskatīsim dažus atsevišķus gadījumus.

I. Doti divi līdzīgi trijstūri, pie kam viņu stāvoklis ir tāds, ka pirmā trijstūra virsotne atrodas uz kādas no otra trijstūra malām. – Atrast līdzības centru.

Pieņemsim ka doti līdzīgi trijst. ABC un A'B'C' un ka virsotne B' atrodas uz malas BC. – Noskaidrosim, kā atrast šo trijstūŗu līdzības centru?

Iedomājamies ka šis stāvoklis ir cēlies no vispārējā stumjot mazo trijst. uz augšu, kamēr punkts P sakrīt ar virsotni B' – varam rīkoties pēc tā paša iepriekšējā priekšraksta. T.i.

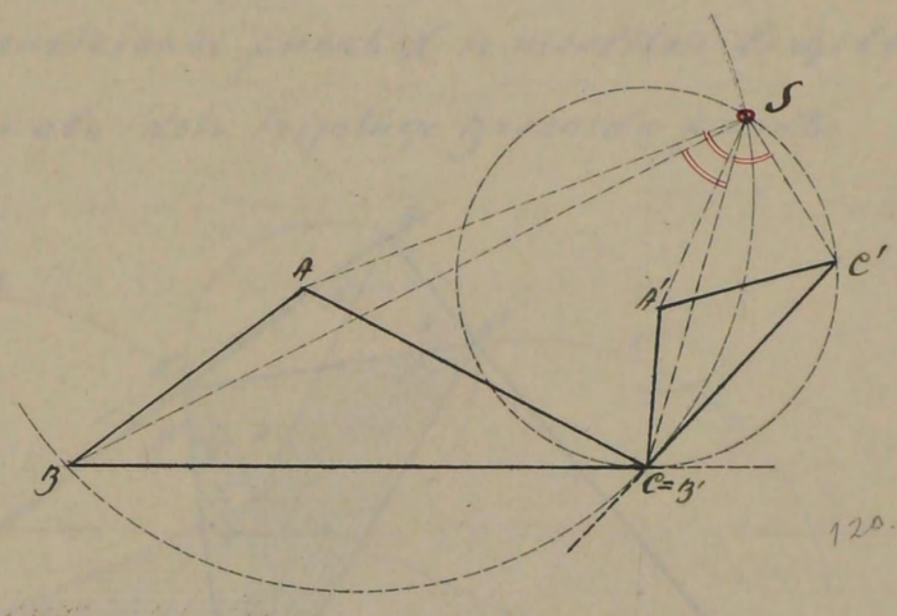


– Velkam riņķi caur punktiem C, C' un B' un otru riņķi caur punktiem B un B' tā, lai viņš punktā B' pieskaras taisnei B'C'. Šo riņķu krustošanās punkts ir meklējamais līdzības centrs S. [Pašiem pierādīt, ka tiešām $\angle ASA' = \angle BSB' = \angle CSC'$]

II. Doti divi līdzīgi trijstūri tādā stāvoklī, ka pirmā trijstūra viena virsotne sakrīt ar kādu no otra trijstūra virsotnēm. — Atrast šo trijstūru līdzības centru.

- Pieņemsim ka ir doti līdzīgi trijstūri ABC un $A'B'C'$, pie kam virsotne C sakrīt ar virsotni B', un noskaidrosim, kā var atrast šo trijst. līdzības centru.

Vedot šo trijstūru stāvokli sakarā ar jau aplūkotiem, nākam uz domām, ka meklējamais līdzības centrs būs šādu divu riņķu krustošanās punkts:



1) riņķa, kas vilkts caur punktiem B, $B'=C$ un punktā B' pieskaras taisnei CC'; 2) riņķa, kas vilkts caur punktiem $C=B'$, C' un punktā C pieskaras malai BB'. - Vai tādā ceļā konstruētais punkts S tiešām ir meklētais līdzības centrs, t.i. - vai tiešām

$$\sphericalangle ASA' = \sphericalangle BSB' = \sphericalangle CSC'$$

- to atkal pamēģināt noskaidrot pašiem.

Līdzības centra jēdzienu var attiecināt uz dažādā mērogā zīmētām ģeografiskām kartēm. Piemēram - ja dotas viena u.t.t. apgabala divos dažādos mērogos zīmētas kartes, var atrast tādu punktu X (pilsētu), ap kuru pagriežot vienu vai abas kartes viņas ieņem līdzīgu stāvokli.

III Dots trijstūris ABC un viņā ierakstīts līdzīgs trijstūris $A'B'C'$ - jāatrod šo trijstūru līdzības centrs.

Trijstūris $A'B'C'$ var tikt trejādi iezīmēts trijstūrī ABC: virsotne A' var atrasties uz lielā trijstūra malas AB, viņa var atrasties uz malas AC, un var atrasties arī uz malas BC. (Tā pat arī virsotnes B' un C').

Vispirms apstāsimies pie gadījuma, kad virsotne A' atrodas uz lielā trijstūra kreisās sānu malas AB. — Uzmeklēsim šiem trijstūriem līdzības centru S, t.i. - punktu, ap kuru pagriežot kādu no trijstūriem, viņi nonāktu homotetiskā stāvoklī un šis punkts kļūtu par abu trijstūru homotetijas centru.

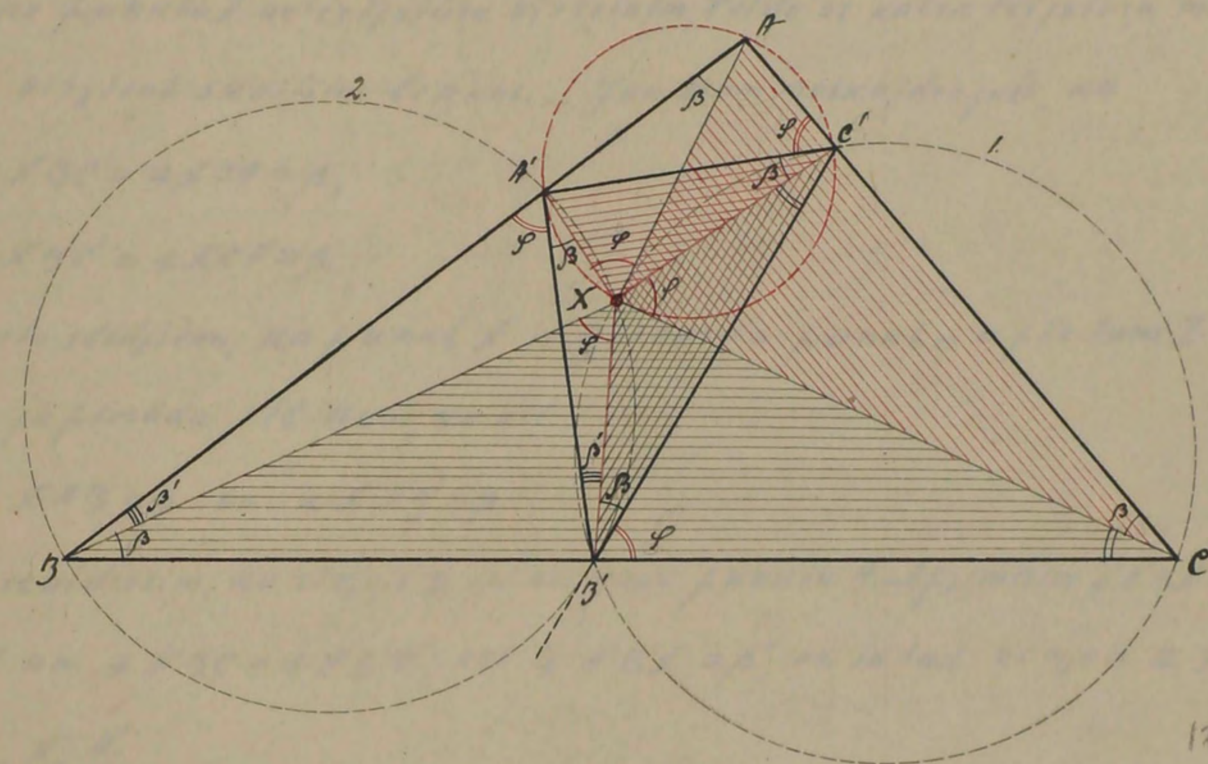
Rīkojamies pēc tā paša priekšraksta, kā iepriekšējos gadījumos. T. i.-

1) Velkam riņķi caur punktiem B un B' tā, lai viņš pieskaras malai B'C';

2) " " " " " C, C' un B'.

Pieradīsim, ka šo riņķu krustošanās punkts X ir meklētais līdzības centrs un ka šis punkts ir arī abu doto trijstūru Brocard'a punkts.

– Trijstūri BCX un B'C'X ir līdzīgi, jo $\sphericalangle XBC = \sphericalangle XB'C'$, $\sphericalangle XCB = \sphericalangle XC'B'$, kā leņķi, kas tiek mērīti ar vienādiem puslokiem. Ja pieņemam, ka



121

$\sphericalangle XBC = \beta$, tad arī $\sphericalangle XB'C' = \beta$.

No abu minēto trijstūru līdzības seko, ka arī

$\sphericalangle BXC = \sphericalangle B'XC'$ un tas savukārt dod, ka

$\underline{\sphericalangle BXB' = \sphericalangle CXC' = \varphi}$ (jo $\sphericalangle BXB' = \sphericalangle BXC - \sphericalangle B'XC$, $\sphericalangle CXC' = \sphericalangle B'XC' - \sphericalangle B'XC$)

Noskaidrosim, ka arī trijstūri ACX un A'C'X ir līdzīgi.

$\sphericalangle XCA = \sphericalangle XC'A' = \beta$ (Šie leņķi celas no vienādiem leņķ. atņemot vienādus leņķus. Abus minētos leņķus varam pielīdz. leņķim β tamdēļ, ka $\sphericalangle XCA = \sphericalangle XB'C'$ kā leņķi, kas atbalstās uz riņķa 1. loka XC'. Bet $\sphericalangle XCA = \beta$).

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$ (pamatojoties uz doto)

$$\frac{XC}{XC'} = \frac{BC}{B'C'}$$ (" " trijstūru BCX un B'C'X līdzību). T. t.

$$\frac{XC}{XC'} = \frac{AC}{A'C'}.$$

Tā kā trijstūriem ACX un $A'C'X$ ir pa vienam vienādam leņķim un malas, kas šos leņķus ieslēdz ir proporcionalas – šie trijstūri tiešām ir līdzīgi. Tas dod, ka

$\sphericalangle A'XC' = \sphericalangle AXC$ un no tā kā sekas dabujam, ka

$\sphericalangle AXA' = \sphericalangle CXC' = \varphi$ (jo $\sphericalangle AXA' = \sphericalangle A'XC' - \sphericalangle AXC'$, $\sphericalangle CXC' = \sphericalangle AXC - \sphericalangle AXC'$). Tā tad

$\underline{\sphericalangle AXA' = \sphericalangle BXB' = \sphericalangle CXC' = \varphi}$

ar ko ir pierādīts, ka punkts X tiešām ir abu doto trijstūŗu līdzības centrs.

Atliek vēl pierādīt, ka šis punkts abos trijstūros ir Brocard'a punkts. T. i. – ka stari, kas savieno punktu X ar trijstūŗu virsotnēm, veido ar katra trijstūŗa malām vienādus vienā virzienā skaitītus leņķus. – Jau esam noskaidrojuši, ka

$\sphericalangle XBC = \sphericalangle XCA = \beta$,

$\sphericalangle XB'C' = \sphericalangle XC'A' = \beta$.

Tā tad, lai taisītu slēdzienu, ka punkts X ir Brocard'a punkts – un pie tam I. Brocard'a punkts – jāpierāda vēl tikai, ka arī

$\sphericalangle XAB = \beta$ un $\sphericalangle XA'B' = \beta$.

Vispirms noskaidrosim, ka riņķis 2. iet arī caur punktu A'. – Apzīmēsim $\sphericalangle A'BX$ ar β'. Tā kā $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$ un $\sphericalangle XBC = \sphericalangle XB'C'$, arī $\sphericalangle A'B'X = \beta'$ un tā tad riņķis 2. iet caur punktiem B, B', X, A'.

Līdz ar to ir skaidrs, ka

$\sphericalangle XA'B' = \sphericalangle XBB' = \beta$ (jo abi šie leņķi balstas uz loku XB').

Tikpat viegli varam pierādīt, ka arī punkti A', X, C', A atrodas uz viena riņķa. Tamdēļ

$\sphericalangle XAB = \sphericalangle XC'A' = \beta$ (jo abi šie leņķi balstas uz loku XA').

Tā esam pierādījuši, ka punkts X ir abu doto trijstūŗu I. Brocard'a punkts. Katrā trijstūrī ABC var iezīmēt bezgala daudz mazāku viņam līdzīgu trijstūŗu $A_i B_i C_i$ ($i = 1, 2, \dots \infty$), tā, ka virsotnes A_i atrodas uz lielākā (dotā) trijstūŗa kreisās sānu malas AB.

Visiem vienā trijstūrī ABC tā iezīmētiem līdzīgiem trijstūriem $A_i B_i C_i$, ka virsotnes A_i atrodas uz dotā trijstūŗa kreisās sānu malas AB, ir viens kopīgs līdzības centrs, kas ir trijstūŗa ABC un visu trijstūŗu $A_i B_i C_i$ I. Brocard'a punkts.

Bez tam, kā tūliņ noskaidrosim,

Katra dotā trijstūrī ierakstītā līdzīga trijstūra malas veido ar dotā trijstūra attiecīgām malām vienādus leņķus. Šo leņķu vērtība katram līdzīgu trijstūru pārim ir citāda.

-No zīmējuma redzam, ka

$$\sphericalangle B + \sphericalangle BA'B' = \sphericalangle B' + \sphericalangle CB'C', \text{ un tā kā } \sphericalangle B = \sphericalangle B'$$

$$\sphericalangle BA'B' = \sphericalangle CB'C'.$$

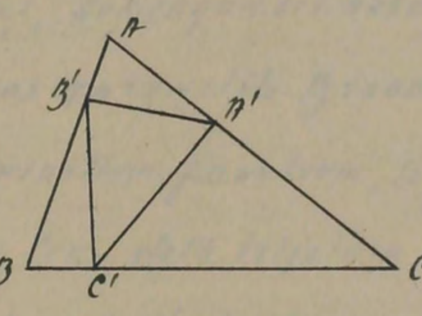
$$\sphericalangle C + \sphericalangle CB'C' = \sphericalangle C' + \sphericalangle AC'A', \quad \sphericalangle C = \sphericalangle C', \text{ tamdēļ}$$

$$\sphericalangle CB'C' = \sphericalangle AC'A'. \text{ Tā tad}$$

$$\sphericalangle BA'B' = \sphericalangle CB'C' = \sphericalangle AC'A' = \varphi$$

[To pašu varējam arī tā pierādīt: $\sphericalangle BA'B' = \varphi$ (balstās uz vienu u.t.t. 2 riņķa loku BB'), $\sphericalangle CB'C' = \varphi$ (jo abi šie leņķi balstās uz riņķa 1. loku CC'), $\sphericalangle AC'A' = \varphi$ (jo abi šie leņķi balstās uz sarkanā riņķa loku AA')]

Ja trijstūrī ABC ierakstītā līdzīgā trijstūra A'B'C' virsotne A' atrodas uz lielākā trijstūra labās sānu malas AC – tā pat var pierādīt -ka abu šo trijstūru līdzības centrs S ir šo trijstūru II. Brocard'a punkts. Tā tad



122.

Brocard'a punkti ir divu dotā trijstūrī ABC ierakstītu līdzīgu trijstūru saimju līdzības centri – ja saimes sastād. trijst. virsotnes A_z atrodas uz mal. AB vai BC.

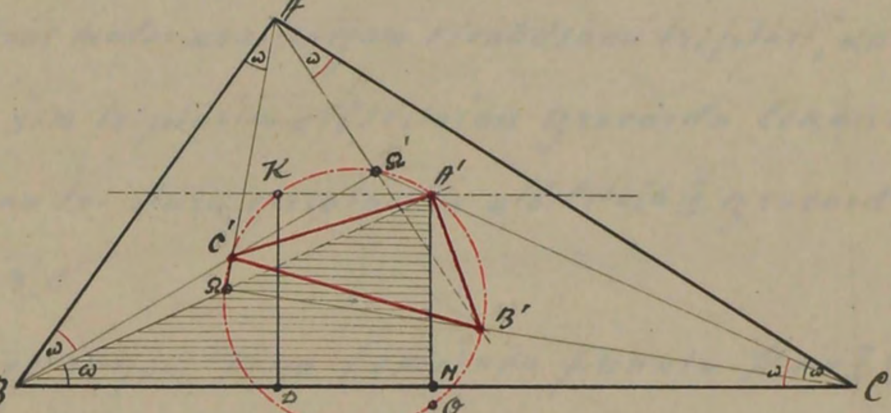
Gadījums, kad trijstūrī ABC ierakstītā līdzīgā trijstūra A'B'C' virsotne A' atrodas uz lielākā trijstūra pamata malas BC, neko interesantu nedod – un tamdēļ šo gadījumu atsevišķi neapskatīsim.

Brocard'a trijstūri, taisne un riņķi

Ņemam trijstūri ABC un viņā abus Brocard'a punktus Ω un Ω'. Tad velkam starus no Broc. punktiem uz trijstūra virsotnēm.

Staru ΩB un $\Omega' C$ krustošanās punktu apzīmejam ar A',
" ΩC un $\Omega' A$ " " " B',
" ΩA un $\Omega' B$ " " " C'.

Savienojot punktus A', B' un C' dabujam trijstūri $A'B'C'$, ko sauc par I. Brocard'a trijstūri.



123

Punkti $A', B', C', \Omega, \Omega', K, O$ (kur ar K apzīm. trijst. ABC Lemoin'a punkts un ar O šim trijst. aprakstīta riņķa centrs) atrodas uz viena riņķa — ko sauc par Brocard'a riņķi. Pats Brocard's šo riņķi nosaucis par 7 punktu riņķi, bet tagad šis nosaukums izzudis. Mēs definēsim Brocard'a riņķi — kā riņķi, kas aprakstīts Brocard'a I. trijstūrim. [Ka šis riņķis tiešām iet caur septiņiem minētiem punktiem, to pierādīsim drusku vēlāk]

Aprēķināsim punkta A' attāļumu līdz dotā trijstūra malai BC. — Tā kā trijstūris $BA'C$ ir vienādsānu trijstūris, punkts A' atrodas uz malas BC vidus perpendikuļa $A'M$ (ar M apzīm. malas BC vidus punkts). No taisnleņķa trijst. $BA'M$ dab., ka

$$A'M = BM \cdot tg\,\omega, \quad \text{bet kā iepriekš pierād., } ctg\,\omega = \frac{a^2+b^2+c^2}{4\Delta}; \quad BM = \frac{a}{2}.$$

$$A'M = \frac{a}{2}\,\frac{4\Delta}{a^2+b^2+c^2} = \frac{2a\Delta}{a^2+b^2+c^2}. \quad \text{Bet senāk pierād., ka arī}$$

$$KD = \frac{2a\Delta}{a^2+b^2+c^2}.$$

Tā tad punkta A' attāļums līdz malai BC ir tāds pat, kā Lemoin'a punkta K attāļums līdz šai malai, k.t.p. — abi šie punkti atrodas uz vienas malai BC paralēlas taisnes. Līdz ar to ir skaidrs, ka punktu A' varam uzskatīt kā punkta K projekciju uz malas BC vidus perpendikuli. To pašu varam pierādīt par punktiem B'un K attiecībā uz malu CA, un par punktiem C'un K attiecībā uz malu AB.

Pamatojoties uz to, Brocard'a I trijstūri varam definēt šādi:

I. Brocard'a trijstūra virsotnes ir Lemoine'a punkta projekcijas uz dotā trijstūra malu vidusperpendikuļiem.

Tātad

Lai konstruētu kādam trijstūrim atbilstošo I. Brocard'a trijstūri, jāatrod dotā trijstūra Lemoine'a punkta projekcijas uz šā trijstūra malu vidus punktos (pret viņām) uzceltiem perpendikuļiem — kas ir meklējamā Brocard'a trijstūra virsotnes.

Bez tām, kā redzams no iepriekšējā zīmējuma, I Brocard'a trijstūri varam konstr. šādi:

Uz dotā trijstūra katras malas konstruējam vienādsānu trijstūri, kam leņķis pie pamata ir šim trijstūrim atbilstošais Brocard'a leņķis ω. Trīs dabūto vienādsānu trijstūŗu virsotnes ir atbilstošā I. Brocard'a trijstūra virsotnes A', B', C'.

— Ņemam trijstūri ABC un konstruējam viņā Lemoine'a punktu K un I. Brocard'a trijstūri A'B'C'. (skat. zīm. nākošā l.p.). Pēc formas var jau vērot, ka trijstūris A'B'C' ir līdzīgs dotam trijstūrim. Tūliņ arī pierādīsim, ka tiešām šie abi trijstūri ir līdzīgi, tikai viņu stāvoklis ir apgriezts — Atradīsim arī trijstūrim ABC apvilktā riņķa centru O. Taisne A'O ir perpendikulāra malai BC. Kā jau noskaidrojām, taisne A'K ir paralēla malai BC. Tā tad

$A'K \perp A'O$ k.t.j. $\angle OA'K$ ir taisns un trijstūris $A'OK$ ir taisnleņķa trijst.

Tāpat dabujam, ka arī

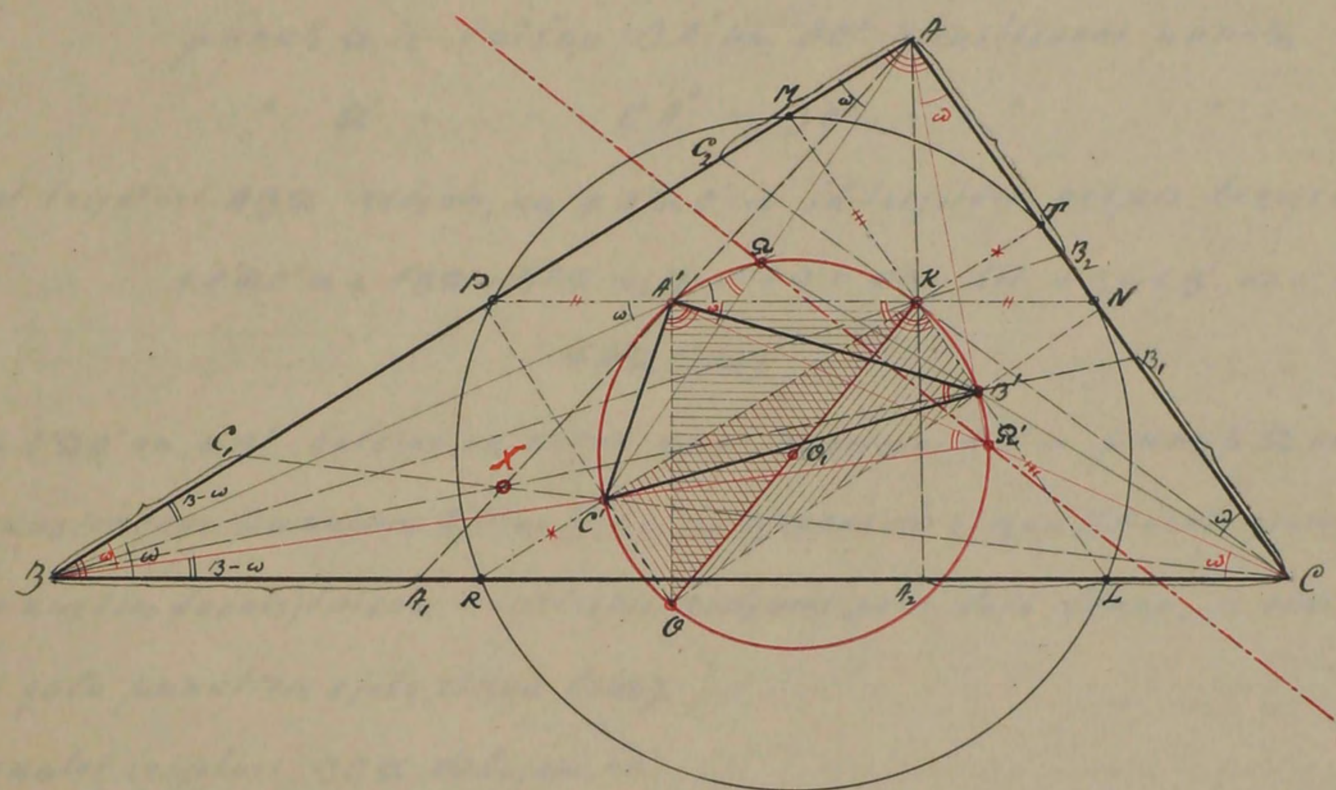
$B'K \perp B'O$ " $\angle OB'K$ " " $B'OK$ " " "

$C'K \perp C'O$ " $\angle OC'K$ " " $C'OK$ " " ".

Visiem šiem trijstūriem OK ir kopīga hipotenuza. Tamdēļ visas trijstūŗu virsotnes t.i. punkti A', B', C', O, K atrodas uz viena riņķa, kuŗa diametrs ir nogrieznis OK. Kā jau zinām, šis riņķis ir Brocard'a riņķis. — Tā tad Brocard'a riņķis iet caur dotā trijstūŗa Lemoine'a punktu K un caur viņam apvilktā riņķa centru O. Brocard'a riņķa centrs, kā redzam, ir nogriežņa OK vidus punkts. Senāk noskaidrojam, ka arī I. Lemoine'a riņķa centrs ir nogr. OK vidus punkts. Tā nonākam pieslēdziena, ka

Brocard'a riņķis ir koncentrisks ar I. Lemoine'a riņķi.

Tagad viegli varam pierādīt, ka trijstūri ABC un $A'B'C'$ ir līdzīgi. – Kā zi-



nam, $A'K \parallel BC$, $B'K \parallel CA$ un $C'K \parallel AB$. Tamdēļ četrstūri $BRKP$, $MKTA$ un $LCNK$ ir paralelogrami. Pamatojoties uz to

$\sphericalangle B = \sphericalangle A'KC'$; bet $\sphericalangle A'KC' = \sphericalangle B'$ (jo abi šie leņķi balstas uz loku $A'C'$). T.t.

$$\sphericalangle B = \sphericalangle B'.$$

Tāpat dab. ka $\sphericalangle A = \sphericalangle C'KB'$; bet $\sphericalangle C'KB' = \sphericalangle A'$ (" " " " $B'C'$) un t.t.

$$\sphericalangle A = \sphericalangle A'.$$

Ar to pietiek, lai taisītu slēdzienu, ka trijstūri ABC un $A'B'C'$ ir līdzīgi. Betkā redzams, šie trijstūri ir simmetriski (t.i. – ejot pa konturu no virsotnes uz virsotni alfabetiskā kārtībā pārvietošanās virzieni ir pretēji) un nevar tikt novesti homotētiskā stāvoklī neizejot no plāknes. Lai trijst. $A'B'C'$ varētu novest homotetiskā stāvoklī ar trijstūri ABC, viņš iepriekš būtu jāpagriež ap vienu no savām malām par 180° un pēc tam jāgriež trijst. plāknē ap abu trijstūru līdzības centru.

Tikko pierādīto varam izteikt teoremā:

Katrs trijstūris ir inversi (apgriezti) līdzīgs ar viņam atbilstošo I. Brocard'a trijstūri.

Pierādīsim tagad, ka arī abi Brocard'a punkti Ω un Ω' atrodas uz Broc. riņķa. — Pamatojoties uz 110 l. p. apskatīto I. Brocard'a trijstūra konstrukciju (definiciju) varam teikt, ka

punkts Ω ir taisņu BA' un AC' krustošanās punkts,

" Ω' " " CA' " BC' " ".

Apskatot trijstūri $AB\Omega$ redzam, ka $\sphericalangle A'\Omega C'$ ir šā trijstūra ārējais leņķis un tamd.

$$\sphericalangle A'\Omega C' = \sphericalangle AB\Omega + \sphericalangle BA\Omega = \sphericalangle B - \omega + \omega = \sphericalangle B; \text{ bet } \sphericalangle B = \sphericalangle B' \text{ u.t.t.}$$

$$\sphericalangle A'\Omega C' = \sphericalangle B'$$

Tā kā $\sphericalangle A'\Omega C'$ un $\sphericalangle B'$ balstās uz vienu u. t. p. nogriezni $A'C'$ — punkts Ω atrodas uz riņķa, kas iet caur punktiem A', C' un B', t. i. uz Brocard'a riņķa. [Punktu ģeometriskā vieta, no kuriem dotais taisnes nogrieznis redzams zem dotā leņķa, ir caur dotā nogriezņa gala punktiem ejošā riņķa loks].

Apskatot trijstūri $BC\Omega'$ dabujam, ka

$$\sphericalangle A'\Omega' C' = \sphericalangle BC\Omega' + \sphericalangle CB\Omega' = \omega + \sphericalangle B - \omega = \sphericalangle B = \sphericalangle B', \text{ t. i.}$$

$$\sphericalangle A'\Omega' C' = \sphericalangle B',$$

kas nozīmē, ka arī punkts Ω' atrodas uz Brocard'a riņķa (jo arī $\sphericalangle A'\Omega' C'$ un $\sphericalangle B'$ abi balstās uz nogr. $A'C'$).

Ar to esam pierādījuši, ka tiešām punkti $A', B', C', O, K, \Omega, \Omega'$ visi 7 atrodas uz viena riņķa. Tamdēļ arī Brocard's šo riņķi nosaucis par 7. punktu riņķi.

Diametru OK sauc par Brocard'a diametru. Taisni, kas iet caur Brocard'a punktiem Ω un Ω' — sauc par Brocard'a taisni.

Pierādīsim teoremu:

Brocard'a taisne ir perpendikulara pret Brocard'a diametru. Citādi sakot — Brocard'a punkti ir simmetriski attiecībā uz Brocard'a diametru.

Teorema būs pierādīta, ja pierādīsim, ka $\smile \Omega K = \smile \Omega' K$.

Uz loku ΩK balstas leņķis $\Omega A'K$ un uz loku $\Omega'K$ - leņķis $\Omega'A'K$. Tā kā $A'K \parallel BC$,

$$\sphericalangle \Omega A'K = \sphericalangle \Omega A'B = \omega; \quad \sphericalangle \Omega'A'K = \omega. \text{ Tā tad}$$

$$\sphericalangle \Omega A'K = \sphericalangle \Omega'A'K, \text{ kas nozīmē, ka arī}$$

$$\smile \Omega K = \smile \Omega' K.$$

Tālāk pierādīsim, ka

Dotais trijstūris ABC un viņam atbilstošais I. Brocard'a trijstūris $A'B'C'$ ir perspektīvi trijstūri.

T.i. - pierādīsim, ka taisnes AA', BB' un CC' krustojas vienā punktā X.

- Tā kā taisnes $A'K$, $B'K$ un $C'K$ visas iet caur Lemoine'a punktu K un ir paralelas dotā trijstūra malām (t.i. - šīs taisnes ir Lemoine'a paraleles), šo taisņu un trijstūra malu krustošanās punkti P, R, L, N, T, M visi atrodas uz I. Lemoine'a riņķa. Jau noskaidrojam, ka I. Lemoine'a riņķis ir koncentrisks ar Brocard'a riņķi. Taisnes nogriežņi starp diviem koncentriskiem riņķiem ir vienādi. Tāpēc,

$$A'P = KN, \quad B'L = KM, \quad C'R = KT.$$

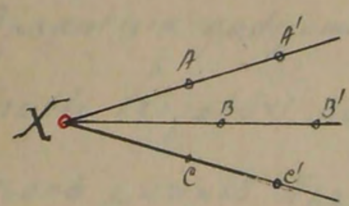
Projecējot šos nogriežņus no dotā trijstūra virsotnēm uz viņam pretimguļošām malām, dabūsim atkal vienādus nogriežņus t.i.

$$A_1B = A_2C, \quad B_1C = B_2A, \quad C_1B = C_2A.$$

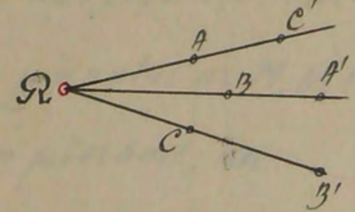
Tas nozīmē, ka punkti A_1 un A_2 ir izotomiski saistīti punkti attiecībā uz malu BC,
" B_1 " B_2 " " " " " " CA,
" C_1 " C_2 " " " " " " AB,

un tā tad taisnes AA_1, BB_1, CC_1 ir izotomiski saistītas ar taisnēm AA_2, BB_2 un CC_2. Taisnes AA_2, BB_2, CC_2 visas iet caur Lemoine'a punktu K. Tā tad arī ar viņām izotom. saist. taisnes AA_1, BB_1, CC_1 k.t.p. - taisnes AA', BB', CC' - visas saiet vienā punktā X, kas ir izotomiski saistīts ar Lemoine'a punktu K attiecībā uz trijst. ABC.

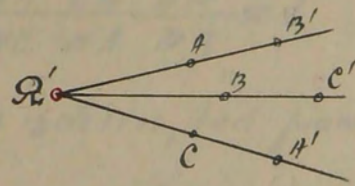
Tā tad trijstūri ABC un $A'B'C'$ ir perspektīvi trijstūri. - No zīmējuma redzam, ka šie abi trijstūri ir perspektīvi arī attiec. uz punktiem Ω un Ω' kā perspekt. centriem, ja par atbilstošām virsotnēm pieņemam citas virsotnes. T.i. - sekojošā kārtā izvēlētām atbilstošām virsotnēm ir šādi atbilst. perspekt. centri:



Trijst. $\begin{pmatrix} A\,B\,C \\ A'B'C' \end{pmatrix}$ perspekt. centrs ir X



" $\begin{pmatrix} A\,B\,C \\ C'A'B' \end{pmatrix}$ " " " Ω



" $\begin{pmatrix} A\,B\,C \\ B'C'A' \end{pmatrix}$ " " " Ω'

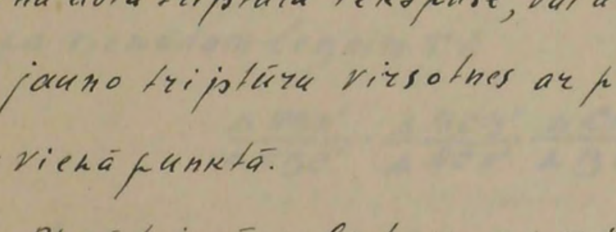
Tā beigās nonākam pie teoremas:

Dotais trijstūris un viņam atbilstošais I. Brocard'a trijstūris ir trīskārt perspektīvi trijstūri. Šo trijstūru persp. centri ir abi Brocard'a punkti un Lemoine'a punkta izotomiski saistītais punkts.

Ņemsim trijstūri ABC un pie katras viņa virsotnes piekonstruēsim divus vienādus leņķus, (kas var būt arī vienādi ar pie parējām virsotnēm piekonstruētiem leņķiem). Piekam visus šos leņķus atliksim vai nu dotā trijstūra iekšpusē, vai arī visus ārpusē. Tādā kārtā uz katras dotā trijstūra malas dabūsim jaunu trijstūri. Atkarībā no tā, kā būsim atlikuši leņķus, visi trīs jaunie trijstūri atradīsies vai nu dotā trijstūra iekšpusē, vai arī visi trīs ārpusē.– Pierādīsim, ka taisnes, kas savieno jauno trijstūru virsotnes ar pretim guļošām dotā trijstūra virsotnēm, visas krustojas vienā punktā.

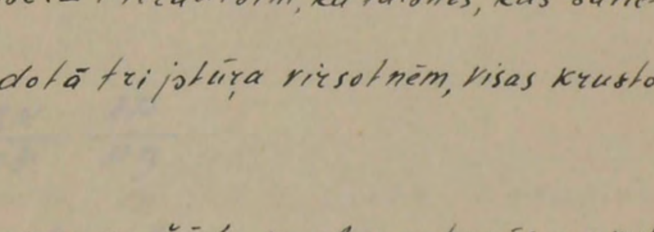
Pierādījumā izlietosim apgriezto Čeva teoremu un šādu no elementārās geometrijas pazīstamu īpašību: Ja diviem trijstūriem ir pa vienam vienādam leņķim, tad viņu laukumu attiecība ir vienāda ar šos leņķus ieslēdzošo malu reizinājumu attiecību. Šī īpašība paliek spēkā arī gadījumā, ja abi minētie leņķi papildina viens otru līdz 180°.

I.

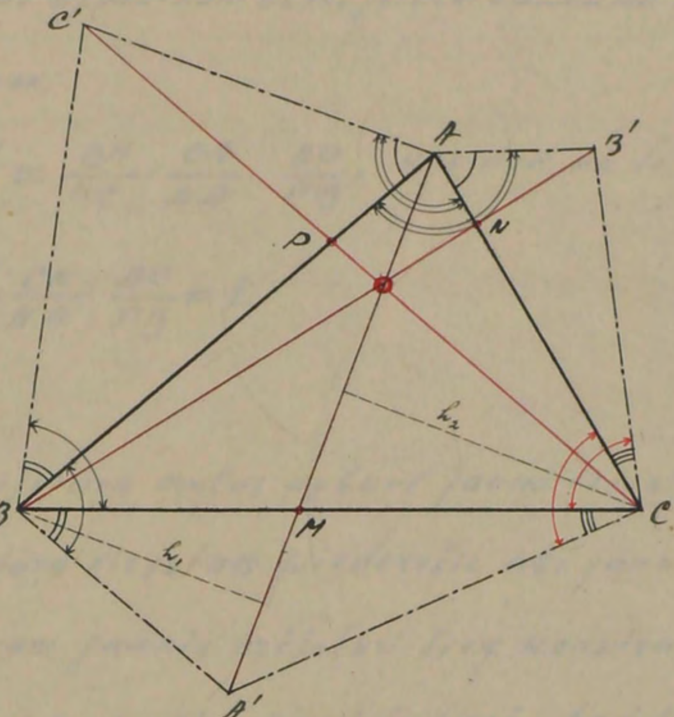


$$\frac{S}{S'} = \frac{bc}{b'c'}$$

II.



Apskatīsim gadījumu, kad uz dotā trijstūra ABC malām viņa ārpusē tiek piekonstruēti trijstūri BCA', CAB', ABC' un pierādīsim, ka taisnes AA', BB' un CC' krustojas vienā punktā. Apzīmēsim šo taišņu un trijstūra malu krustošanos punktus ar M, N, P un mēģināsim pierādīt, ka



$$\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CN}{NA}\cdot\frac{AP}{PB}=1.$$

Ja tas izdosies, tad pamatojoties uz apgriezto Čeva teorēmu varēs taisīt slēdzienu, ka taisnes AA', BB' un CC' krustojas vienā punktā — Ņemot trijstūrus ABA' un ACA', kuriem AA' ir kopīgā mala, varam rakstīt prop. 128

$$\frac{\Delta ABA'}{\Delta ACA'}=\frac{h_1}{h_2}=\frac{BM}{MC}.$$ Ņemot vēl divus trijst. pārus, kam taisnes BB' un CC' ir kop. m.

$$\frac{\Delta BCB'}{\Delta BAB'}=\frac{CN}{NA},$$

$$\frac{\Delta CAC'}{\Delta CBC'}=\frac{AP}{PB}.$$

Sareizinot trīs pēdējās proporcijas, dabujam sakarību

$$\frac{\Delta ABA'}{\Delta ACA'}\cdot\frac{\Delta BCB'}{\Delta BAB'}\cdot\frac{\Delta CAC'}{\Delta CBC'}=\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CN}{NA}\cdot\frac{AP}{PB}.$$

Pārkārtosim kreisās puses saucējā locekļus tā, lai dabūtu trijst. laukumu attieсības, kuriem ir pa vienādam leņķim. T. i.

$$\frac{\Delta ABA'}{\Delta CBC'}\cdot\frac{\Delta BCB'}{\Delta ACA'}\cdot\frac{\Delta CAC'}{\Delta BAB'}=\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CN}{NA}\cdot\frac{AP}{PB}.$$

Ņemot vērā iepriekšējā l. p. p. minēto par divu trijstūru laukumu attiecību, kuriem ir pa vienādam leņķim, laukumu attiecības var apmainīt ar malu reizin. attiecībām.

$$\frac{BA\cdot BA'}{BC\cdot BC'}\cdot\frac{CB\cdot CB'}{CA\cdot CA'}\cdot\frac{AC\cdot AC'}{AB\cdot AB'}=\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CN}{NA}\cdot\frac{AP}{PB}.$$

Pārgrupējam atkal kreisā pusē locekļus — katra reizinātāja pirmo locekli apgriežot otrādi (jo kā redzēsim, no tam pati sakar. neizmainās) — un rezultātā dabujam

$$\frac{BC\cdot BA'}{BA\cdot BC'}\cdot\frac{CA\cdot CB'}{CB\cdot CA'}\cdot\frac{AB\cdot AC'}{AC\cdot AB'}=\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CN}{NA}\cdot\frac{AP}{PB}.$$

Kreisā pusē stāvošos reizinātājus atkal apmainam ar trijstūru laukumu attiecību (kuriem ir pa vienādam leņķim) un tā dab. sak.

$$\frac{\Delta BCA'}{\Delta BAC'}\cdot\frac{\Delta CAB'}{\Delta BCA'}\cdot\frac{\Delta BAC'}{\Delta CAB'}=\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CN}{NA}\cdot\frac{AP}{PB},$$ kas dod, ka tiešām

$$\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CN}{NA}\cdot\frac{AP}{PB}=1.$$

Ar to ir pierādīta teorema:

Ja uz katras dotā trijstūra malas uzbuvē jaunu trijstūri tā, ka pie katras dotā trijstūra virsotnes piederošie abi jaunā trijstūru leņķi ir vienādi, - pie kam jaunie trijstūri tiek konstruēti vai nu visi dotā trijstūra iekšpusē, vai arī visi ārpusē - tad taisnes, kas savieno jaunā trijstūru virsotnes ar viņam pretim gulošām dotā trijstūra virsotnēm, visas krustojas vienā punktā.

Šīs teoremas pierādījums tādā veidā, kā mēs tikko lietojam, ir atrodams vācu autora Tellkampffa 1825. g. izdotā geometrijas grāmatā.

Kā secinājumu no augstāk formulētās teoremas, dabujam teoremu:

Taisnes, kas savieno uz dotā trijstūra malām uzbuvēta vienādsānu trijstūru, kuriem leņķis pie pamata ir vienāds, virsotnes ar pretim stāvošām dotā trijstūra virsotnēm, krustojas vienā punktā - ja šie vienādsānu trijstūri atrodas visi dotā trijst. iekšpusē, vai arī visi ārpusē.

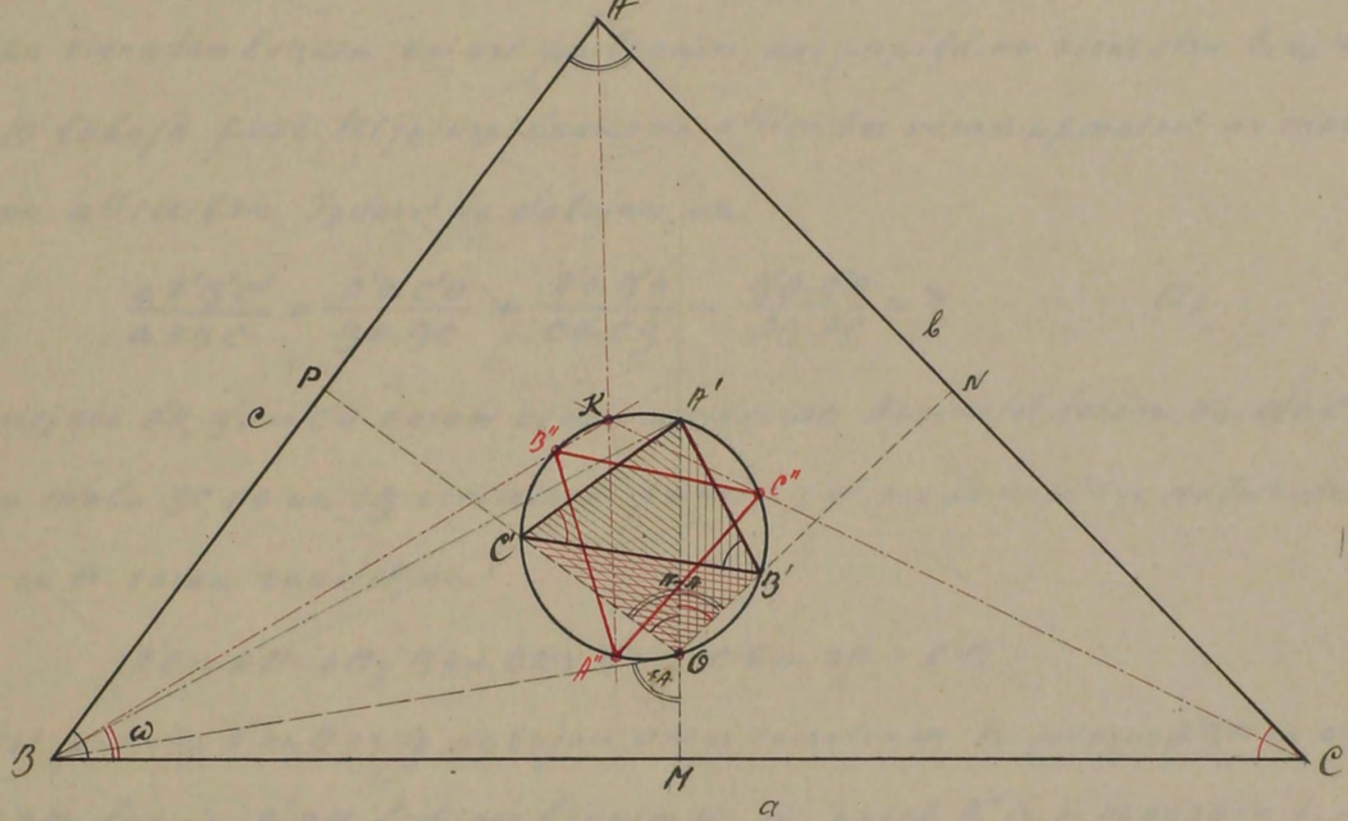
Pamatojoties uz to pašu teoremu var apgalvot, ka

Taisnes, kas savieno uz dotā trijstūra malām uzbūvētu vienādmalu trijstūru virsontes ar viņām pretim stāvošām dotā trijstūra virsotnēm, krustojas vienā punktā.

Bez tam, kā tiešu secinājumu no augstāk minētās teoremas, dabujam slēdzienu, ka dotais trijstūris un viņam atbilst. I. Brocard'a trijst. ir perspektīvi trijstūri, jo I. Broc. trijst. virsotnes ir uz dotā trijst. malām viņa iekšpusē uzbuvētu vienāds. trijst. virsotnes, kam leņķis pie pamata ir Brocard'a leņķis ω, u.t.t. taisn. AA', BB' un CC' krustojas vienā punktā.

Noskaidrosim, kā var aprēķināt I. Brocard'a trijstūŗa malas un šim trijstūrim apraksītā riņķa radiusu.

– Trijstūris ABC un viņam atbilstošais I Brocard'a trijstūris A'B'C' ir līdzīgi. Kā zinams, līdzīgu trijstūŗu laukumu attiecība ir vienāda ar šo trijstūŗu attiecīgo elementu kvadratu attiecību. Tamdēļ, ja trijst. ABC apraksītā riņķa radiusu apzīmējam ar R un trijst. A'B'C' apraksīt. riņķa rad. ar R', varam rakstīt proporc.



129

$$\frac{\Delta A'B'C'}{\Delta ABC} = \frac{\overline{A'B'}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{\overline{B'C'}^2}{\overline{BC}^2} = \frac{\overline{C'A'}^2}{\overline{CA}^2} = \frac{R'^2}{R^2}.$$ Ja $\frac{\Delta A'B'C'}{\Delta ABC} = \eta$, tad

$A'B' = c\sqrt{\eta}$; $B'C' = a\sqrt{\eta}$; $C'A' = b\sqrt{\eta}$; $R' = R\sqrt{\eta}$.

Tā tad, lai aprēķinātu trijstūŗa A'B'C' malas un viņam apraksītā riņķa radiusu, pietiek aprēķināt lielumu η.

– No iepriekš pierādītā zinam, ka $\sphericalangle A' = \sphericalangle A$, $\sphericalangle B' = \sphericalangle B$ un $\sphericalangle C' = \sphericalangle C$. Trijstūŗa A'B'C' laukumu varam izteikt šādā veidā:

$$\Delta A'B'C' = \Delta A'C'O + \Delta A'B'O - \Delta C'B'O. \quad \text{u.t.t.}$$

$$\frac{\Delta A'B'C'}{\Delta ABC} = \frac{\Delta A'C'O}{\Delta ABC} + \frac{\Delta A'B'O}{\Delta ABC} - \frac{\Delta C'B'O}{\Delta ABC} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Trijstūriem A'C'O un ABC ir pa vienam vienādam leņķim, jo

$\sphericalangle C'OA' = \sphericalangle B'$ (abi šie leņķi balstas uz loku C'A'), bet $\sphericalangle B' = \sphericalangle B$, kas dadka

$\sphericalangle C'OA' = \sphericalangle B$.

Tā pat arī trijstūriem $A'B'O$ un ABC ir pa vienādam leņķim, jo

$\sphericalangle A'OB' = \sphericalangle C'$ (abi šie leņķi balstās uz loku $A'B'$), $\sphericalangle C' = \sphericalangle C$ un tamdēļ

$\sphericalangle A'OB' = \sphericalangle C$.

Bet trijstūriem $C'B'O$ un ABC ir pa leņķim, kas papildina viens otru līdz $180°$, t. i. –

$\sphericalangle C'OB' = 180° - \sphericalangle A'$ (jo $\sphericalangle C'OB' + \sphericalangle A' = 180°$), $\sphericalangle A' = \sphericalangle A$, t. t.

$\sphericalangle C'OB' = 180° - \sphericalangle A$.

Tamdēļ – pamatojoties uz 115. l. p. minēto īpašību par trijstūru laukumu attiecību, kuriem ir pa vienādam leņķim vai arī pa leņķim, kas papildina viens otru līdz $180°$-sakarības (1) labajā pusē trijstūru laukumu attiecības varam apmainīt ar malu reizinājumu attiecībām. Izdarot to dabujam, ka

$$\frac{\Delta A'B'C'}{\Delta ABC} = \frac{A'O \cdot C'O}{BA \cdot BC} + \frac{A'O \cdot B'O}{CA \cdot CB} - \frac{B'O \cdot C'O}{AB \cdot AC} = \eta \text{ .... } (2)$$

Nogriežņus $A'O$, $B'O$ un $C'O$ varam viegli aprēķināt. Apzīmējot taisņu $A'O$, $B'O$, $C'O$ un trijstūra malu BC, CA un AB krustošanās punktus (t. i. – šo trijstūra malu vidus punktus) ar M, N un P varam rakstīt, ka

$$A'O = A'M - OM; \quad B'O = ON - B'N; \quad C'O = OP - C'P.$$

Savienojot punktus A' un O ar B dabujam divus taisnleņķa trijstūrus $A'BM$ un OBM. Trijstūra $A'BM$ leņķis $A'BM$ līdzinās leņķim ω, jo punkts A' ir vienādsānu trijstūra virsotne, kuram leņķi pie pamata ir Brocard'a leņķi ω. No šā trijstūra dabujam, ka

$$A'M = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \omega.$$

Taisnleņķa trijstūrī OBM leņķis BOM līdzinās leņķim A, jo abi šie leņķi tiek mērīti ar trijstūrim ABC aprakstīta riņķa loka BC pusi. Tamdēļ

$OM = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} A$. Līdz ar to dabujam, ka

$$A'O = \frac{a}{2}(\operatorname{tg}\omega - \operatorname{ctg} A).$$

Tādā pat ceļā varam pierādīt, ka

$$B'O = -\frac{b}{2}(\operatorname{tg}\omega - \operatorname{ctg} B),$$

$$C'O = -\frac{c}{2}(\operatorname{tg}\omega - \operatorname{ctg} C).$$

Ievietojot dabūtās $A'O$, $B'O$ un $C'O$ izteiksmes sakarībā (2), dabujam:

$$\eta = -\frac{1}{4}(\operatorname{tg}\omega - \operatorname{ctg} A)(\operatorname{tg}\omega - \operatorname{ctg} C) - \frac{1}{4}(\operatorname{tg}\omega - \operatorname{ctg} A)(\operatorname{tg}\omega - \operatorname{ctg} B) - \frac{1}{4}(\operatorname{tg}\omega - \operatorname{ctg} B)(\operatorname{tg}\omega - \operatorname{ctg} C),$$

$$\eta = -\frac{1}{4}\left[3tg^2\omega - 2tg\omega(ctgA + ctgB + ctgC) + ctgA\cdot ctgC + ctgA\cdot ctgB + ctgB\cdot ctgC\right],$$ bet

$$ctgA + ctgB + ctgC = ctg\omega,$$

$$ctgA\,ctgB + ctgB\,ctgC + ctgC\,ctgA = 1. \quad \text{T. t.}$$

$$\eta = -\frac{1}{4}(3tg^2\omega - 2tg\omega\cdot ctg\omega + 1), \quad \text{k. t. j.}$$

$$\underline{\eta = \frac{1}{4}(1 - 3tg^2\omega).}$$

Līdz ar to varam skaitīt par aprēķinātiem kā I. Brocard'a trijstūra malas, tā arī šim trijstūrim apvakstīta riņķa radiusu. Minēto elementu metriskā vertība (grums) ir šāda:

$$A'B' = AB\frac{1}{2}\sqrt{1-3tg^2\omega} = \frac{1}{2}c\sqrt{1-3tg\omega} \quad \text{u. t. t.},$$

$$R' = \frac{1}{2}R\sqrt{1-3tg^2\omega}.$$

Kā blakus rezultātu no tikko pierādītā dabujam jau iepriekš citādā ceļā izvesto slēdzienu, ka Brocard'a leņķis ω ir ierobežots. – Tā kā trijstūra malu garums izteicas realos skaitļos, ir nepieciešami, lai

$$1 \geq 3tg^2\omega.$$

[Kā redzams no augstāk stāvošām algebr. sakarībām, ja $1 = 3tg^2\omega$, tad I. Broc. trijstūra malas līdzinās nullei t. i. tādā gad. šis trijstūris pārvēršas par punktu]. – No iepriekšejās nevienādības seko, ka

$$tg\omega \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$, kas nozīmē, ka $\omega \leq 30°$ u. t. t. Brocard'a leņķa maksimums ir 30°

Apstāsimies tagad pie II. Brocard'a trijstūra aplūkošanas. II. Brocard'a trijstūri var definēt šādā veidā:

– No dotā trijstūra ABC virsotnēm velkam iekšējās simmedianas. (Zīm. sk. 118 lp.) Visas šīs simmedianas iet caur Lemoine'a punktu K, kas atrodas uz Brocard'a riņķa. Katra simmediana krusto Brocard'a riņķi vēl vienā punktā. Apzīmējam

no virsotnes A izejošas simmedianas un Brocard'a riņķa otro krust. punktu ar A'',

" " B " " " " " " " B'',

" " C " " " " " " " C''.

Savienojot punktus A", B" un C" dabujam trijstūri A"B"C", ko sauc par II. Brocard'a trijstūri. Arī šis trijstūris ir ierakstīts Brocard'a riņķī. T.t.

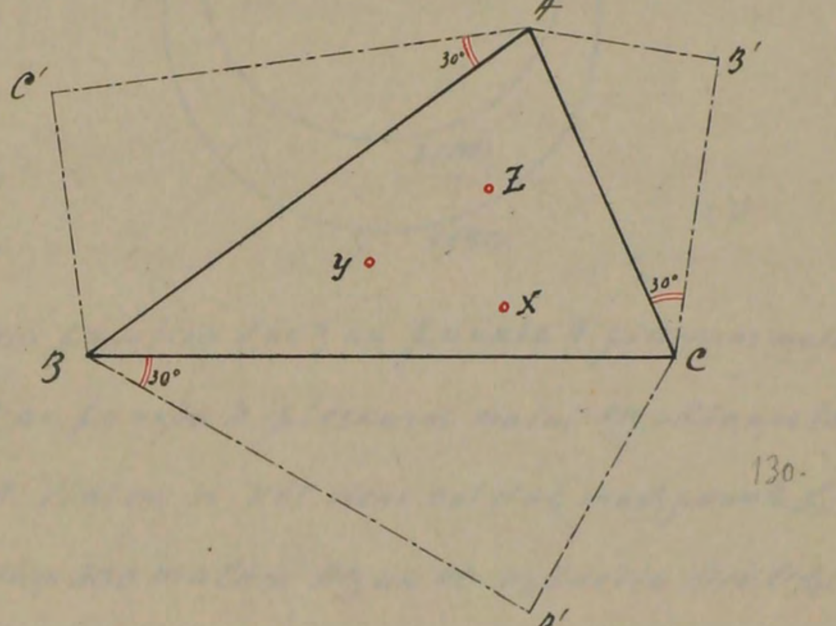
Abi Brocard'a trijstūri ir ierakstīti Brocard'a riņķī.

Beztam var apgalvot, ka

Dotais trijstūris un viņam atbilstošais II. Brocard'a trijstūris ir perspektīvi trijstūri ar perspektīves centru dotā trijstūra Lemoine'a punktā K.

[To ir pa divām šo trijst. virsotnēm atrodas uz viena no trim no punkta K izejošiem stariem].

— Ņemsim kādu trijstūri ABC un uz katras viņa malas uzbūvēsim kaut kādu figuru, tikai ar noteikumu, lai visas trīs uzbūvētās figuras būtu tieši līdzīgas. Piemēram, uz katras dotā trijstūra malas uzbūvēsim pa taisnleņķa trijstūrim, kuram viens šaurais leņķis līdzinās 30°. Kā zinams, divām tieši līdzīgām figurām vienmēr eksistē viens noteikts līdzības centrs. Visām trīs uz dotā trijstūra malām uzbūvētām tieši līdzīgām figurām būs trīs līdzības centri (ik divām fig. viens līdz.c.) X, Y, Z. - Pastāv teorema, kura apgalvo, ka šo līdzīgo figuru līdzības centri ir



130.

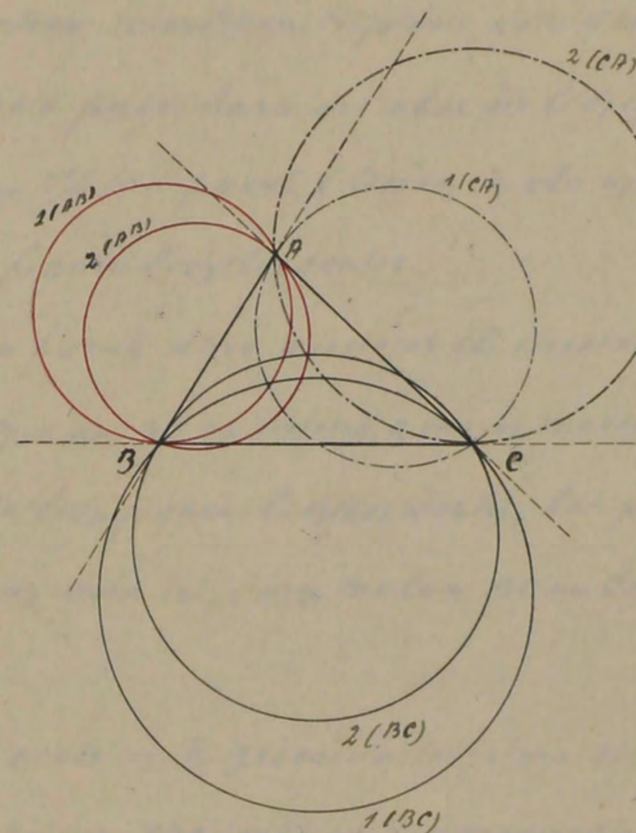
dotajam trijstūrim atbilstošā II. Brocard'a trijstūra virsotnes. Tā tad neatkarīgi no tā, kāds ir uz dotā trijstūra malām uzbūvēto līdzīgo figuru veids, viņu līdzības centri ir vieni un tie paši trīs punkti. Citādi sakot: uz (dotā) dotā trijstūra malām uzbūvēto līdzīgo figuru līdzības centri ir invarianti punkti. - Pētot uz (dotā) trijstūra malām uzbūvētu līdzīgu figuru līdzības centru īpašības, Brocard's arī nonācis pie II. Brocard'a trijstūra.

Pirms stājamies pie augstāk minētās teoremas pierādīšanas, iepazīsimies ar vienu jaunu jēdzienu, kurš pastāv jau no Steiner'a laikiem un saistās ar riņķiem, kas iet caur trijstūra malas gala punktiem pieskaroties kādai no pārējām trijstūra malām. Šo jēdzienu varam definēt sekojošā kārtā:

— Ņemam trijstūri ABC un katrai no viņa malām piekonstruējam divus riņķus tā, lai

abi malai AB atbilstošie riņķi iet caur punktiem A, B un viens no viņiem skaras malai BC, bet otrs mal. CA,
" " BC " " " " " B, C " " " " CA, " " " AB,
" " CA " " " " " C, A " " " " AB, " " BC.

Tādā kārtā dotajam trijstūrim tiek piesaistīti 6 riņķi. Steiner's šos riņķus nosaucis ar vārdu „Beikreis". Franči minētiem riņķiem devuši nosaukumu „cercle adjoint". Tulkojot mēs viņus varam nosaukt par trijstūrim pievienotiem jeb saistītiem riņķiem.



131.

Ņemsim no šiem 6 riņķiem divus un pietam tādus, kuri abi iet caur vienu u.t.p. trijstūra virsotni un viņā pieskaras katrs vienai no šīs virsotnes izejošai malai. Piemēram ņemsim riņķus: 1) riņķi, kas iet caur punktiem A un B un punktā A pieskaras malai AC; 2) riņķi, kas iet caur punktiem A un C un punktā A pieskaras malai AB. - Riņķus tā izvēlamies tamdēļ, ka bez punkta A viņiem ir vēl viens noteikts krust. punkts X.

— Pierādīsim, ka punkts X ir uz trijstūra ABC malām AB un AC uzbūvētu tiešilīdzīgu - patvaļīgi izvēlēta veida - figuru līdzības centrs.

Savienosim punktu X ar dotā trijstūra virsotnēm A, B un C. Tā dabūsim trijstūrus ABX, BCX un CAX. Apskatīsim šo trijstūru leņķus.

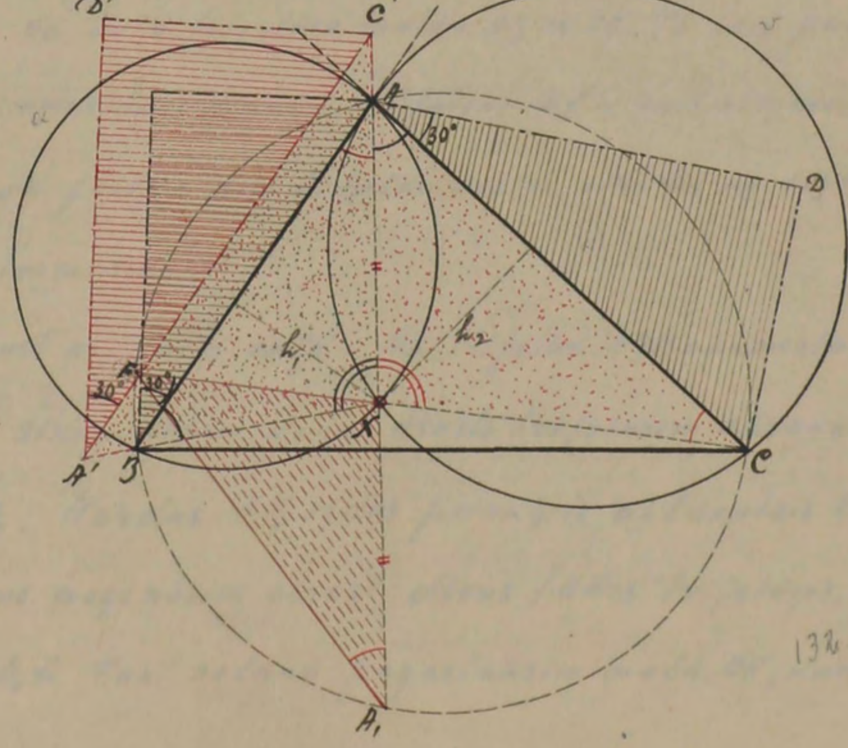
$\sphericalangle ABX = \sphericalangle CAX$ (jo abi $= \frac{1}{2} \smile AX$),

$\sphericalangle BAX = \sphericalangle ACX$ (" " $= \frac{1}{2} \smile AX$).

Tā tad trijstūri ABX un CAX ir līdzīgi un tamdēļ arī

$\sphericalangle AXB = \sphericalangle AXC.$

Ja vienu no šiem līdzīgajiem trijstūriem, piemēram trijstūri CAX griezīu



132

ap punktu X kamēr mala AX saplūst ar otra trijstūra malu BX un mala CX ar malu AX t.i.- kamēr trijstūris CAX nonāk stāvoklī C'A'X, tad līdz ar to trijstūri ABX un CAX būtu novesti homotetiskā stāvoklī. Ja uz katras no dotā trijstūra malām AB un AC būtu uzbūvētas līdzīgas figuras (piemēram taisnleņķa trijstūris, kam viens šaurais leņķis līdzinas 30°)- ir skaidrs, ka ar minēto pagriešanu arī abas šīs līdzīgas figuras tiktu novestas homotetiskā stāvoklī.- Tā tad punkts X tiešām ir abu uz trijstūra ABC malām AB un BC uzbūvētu līdzīgu figuru līdzības centrs.

Gluži tādā pat ceļā varam pierādīt, ka punkts kurā krustojas abi virsotnei B atbilstošie riņķi (t.i.- riņķi kas iet caur punktiem B, A un B, C un virsotnē B skaras malām BC un AB), ir uz dotā trijstūra malām AB un BC uzbūvētu līdz. figuru līdzības centrs, bet punkts, kurā krustojas virsotnei C atbilstošie riņķi- ir uz dotā trijstūra malām BC un CA uzbūvētu līdzīgu figuru līdzības centrs.

Tālāk pierādīsim, ka šie trīs līdzības centri ir II. Brocard'a trijstūra virsotnes. Vispirms noskaidrosim, ka viņi atrodas uz trijstūra ABC iekšējām simmedianām. Iesāksim ar punktu X. Kā zinams no iepriekšējā,- ja taisne ir simmediana, tad ikkatra viņas punkta attālumu līdz šai simmedianai atbilstošām trijstūra sānu malām attiecība ir vienāda ar pašu atbilst. sānu malu attiecību. Tā tad atliek pierādīt, ka punktam X piemīt šī īpašība.- Trijstūri ABX un CAX ir līdzīgi. Tamdēļ viņu augstumi h_1 un h_2 attiecas kā attiecīgās malas. T.i.

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{AB}{AC}.$$

Bet h_1 un h_2 ir punkta X attālums no dotā trijstūra malām AB un AC. Tā tad punkts X ir virsotnei A atbilstošās iekšējās simmedianas punkts un taisne AX ir iekš. simmediana. Līdzīgā kārtā varam pierādīt, ka arī pārējie divi līdzības centri atrodas uz virsotnei B un virsotnei C atbilst. iekšējām simmedianām.

Līdzības centru X varam atrast arī šādā ceļā: Ap trijstūri ABC aprakstam riņķi. Tad no virsotnes A velkam iekšējo simmedianu, kura krusto trijstūrim aprakstīto riņķi vēl otrā punktā, ko apzīm. ar A_1. Hordas AA_1 vidus punkts ir aplūkotais līdzības centrs X.- Pierādīsim to. Vispirms mēģināsim atrast divus tādus trijstūrus, kuri satur viens malu AX un otrs malu A_1X. Tanī nolūkā pagarināsim malu CX, kamēr tā krusto trijstūrim ABC aprakstīto riņķi. Apzīmēsim šo krustošanās punktu ar F un savienosim viņu ar punktu A_1. Tā dabūsim trijstūri FA_1X. Pierādīsim tagad, ka trijstūri ABX un FA_1X ir kongruenti. Apskatot leņķus redzam, ka

$$\sphericalangle BAX = \sphericalangle FA_1X, \qquad (\text{jo } \sphericalangle BAX = \sphericalangle ACX, \text{ bet } \sphericalangle ACX = \sphericalangle FA_1X)$$

$$\sphericalangle ABX = \sphericalangle A_1FX \qquad (\text{"} \sphericalangle ABX = \sphericalangle CAX, \text{ "} \sphericalangle CAX = \sphericalangle A_1FX).$$

Tā kā $\sphericalangle BAX = \sphericalangle FA_1X$, arī $\smile BA_1 = \smile AF$. $(\smile AB = \smile AF + \smile FB;\ \smile FA_1 = \smile BA_1 + \smile FB)$ t.i.

$\smile AB = \smile FA_1$, bet no tā seko, ka arī hordas, kas šos lokus savelk ir vienādas,

t.i. $AB = FA_1$.

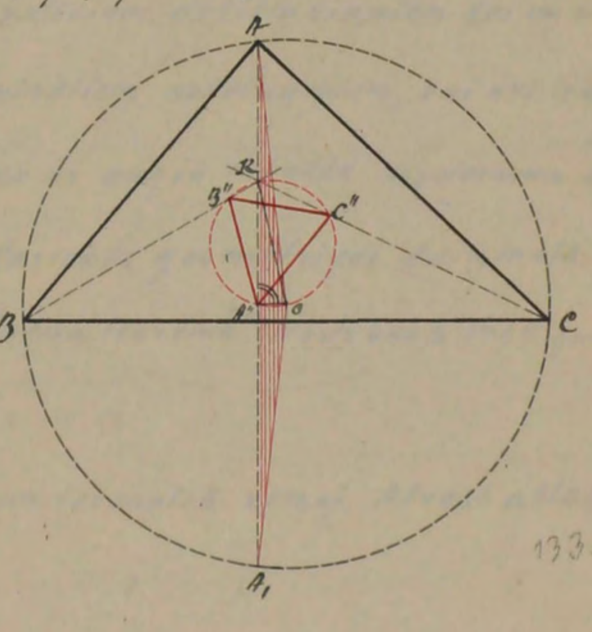
Ar to ir pierādīts ka trijstūri ABX un FA_1X ir kongruenti (jo viņiem ir pa vienādai malai un arī abi vienādajai malai piegulušie leņķi ir vienādi) un t.t.

$$AX = A_1X \qquad (\text{jo šīs malas atrodas kongruentos trijstūros pret vienādiem leņķiem})$$

Velkot simmedianas (iekšējās) no dotā trijstūra virsotnēm B un C un ņemot nogriežņu, ko uz šām simmedianām atšķeļ dotam trijstūrim aprakstītais riņķis, vidus punktus — dabujam parējos divus uz dot. trijstūra malām uzbūvētu līdzīgu figuru līdzības centrus.

Tā esam iepazinušies ar diviem augstāk minēto līdzības centru konstruēšanas paņēmieniem. Praksē ērtāks ir tikko aplūkotais paņēmiens.

Ņemsim tagad kādu trijstūri ABC, konstruēsim viņa II. Brocard'a trijstūri un pierādīsim, ka šā trijstūra virsotnes ir uz trijst. ABC malām uzbūvētu tieši līdzīgu figuru līdzības centri. — Savienosim trijstūrim ABC aprakstīta riņķa centru O ar hordas (simmedianas) AA_1 gala punktiem un tā dabūsim vienādsānu trijstūri AA_1O. Taisne OA'' ir perpendikulāra šā trijstūra pamata malai AA_1, jo leņķis $KA''O = 90°$, kā leņķis kas atbalstās uz Brokard'a diametru OK. Tamdēļ II. Brocard'a trijstūra virsotne A'' ir hordas AA_1 vidus punkts t.i.



133.

$$AA'' = A_1A''.$$

Bet mēs jau pierādījām, ka hordas AA_1 vidus punkts ir uz trijstūra ABC malām AB un AC uzbūvētu tieši līdzīgu figuru līdzības centrs. Tā tad punkts A'' ir minēto līdzīgo figuru līdzības centrs. Tā pat varam pierādīt, ka II. Brocard'a trijstūra virsotne B'' ir uz dotā trijstūra malām BA un BC uzbūvētu līdzīgu figuru līdzības centrs un virsotne C'' ir uz dotā trijstūra malām CB un CA uzbūrētu līdzīgu figuru līdzības centrs. Tā beidzot esam pierādījuši teoremu:

Triju uz dotā trijstūra malām uzbūvētu brīvi izvēlēta veida tieši līdzīgu figuru līdzības centri ir šim trijstūrim atbilstošā II. Brocard'a trijstūra virsotnes.

Ar to arī aprobežosimies geometrijas daļas aplūkošanā, ko mēdz nosaukt par Lemoine'a jeb Brocard'a geometriju un pāriesim pie dažu atsevišķu geometrisku jautājumu apskatīšanas.

III. [illegible]

Eulera teorema.

Vārds „Eulera teorema" saistās ar šādu uzdevumu: Doti divi riņķi – viens lielāks un otrs mazāks viņa iekšpusē. Konstruēt trijstūri, kas būtu ierakstīts lielajā riņķī un apraksttīts mazajam riņķim.

Kā drīz redzēsim, šādu trijstūri būs iespējams konstruēt tikai gadījumā, ja starp lielākā riņķa radiusu R, mazākā riņķa rad. r un attālumu starp abu riņķu centriem d pastāves noteikta funkcionala sakarība. Divus no minētiem lielumiem varēs ņemt patvaļīgi, bet trešo vairs ne. Redzēsim, ka attiecībā uz diviem dotiem riņķiem vai nu nav iespējams neviens trijstūris, kas padodas augstāk minētiem noteikumiem, vai arī ir iespējami bezgalīgi daudzi šādi trijstūri. Domājams ka ar augšā minētā uzdevuma atrisināšanu (pētīšanu) nodarbojušies jau grieķi klasiskās geometrijas laikmetā. Šis uzdevums geometrijā pazīstams zem nosaukuma „Eulera teorema". Nodrukāts 1765. godā. Pats Eulers minēto uzdevumu uzstāda šādā veidā:

Dots trijstūris un viņam apraksttīts un ierakstīts riņķi. Atrast attālumud starp šo riņķu centriem.

Garu algebraisku aprēķinu ceļā Eulers atrod, ka

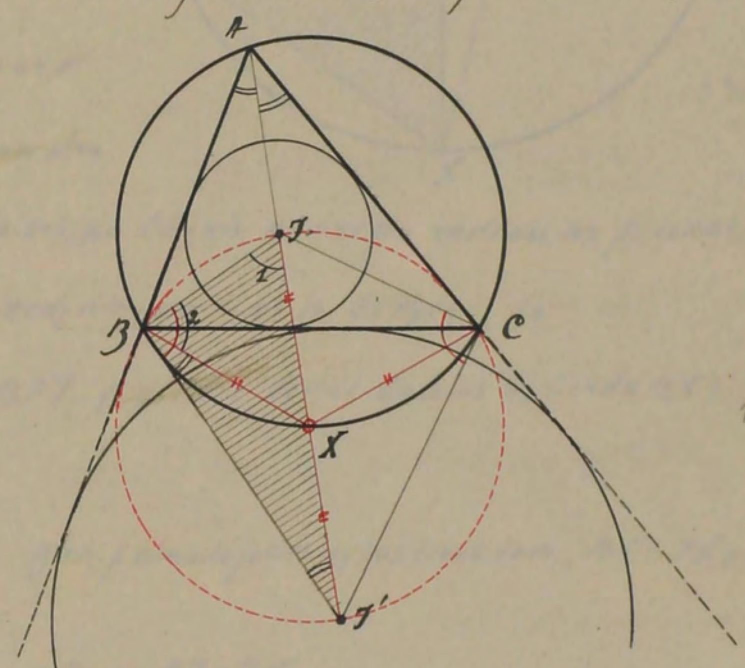
$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

Šo sakarību sauc par Eulera formulu. – Tagad ir noskaidrots, ka tā paša uzdevuma atrisinājumu kāds maz pazīstams angļu autors Chapple's 1746. g. devis šādā veidā:

> Ja $d^2 = R^2 - 2Rr$, tad eksistē bezgalīgi daudz trijstūru, kas ir ierakstīti lielajā riņķī un aprakstīti mazajam riņķim.

Tā tad pareizāk būtu nosaukt iepriekšējā l.p. minēto uzdevumu par Chapple'a teoremu, jo Chapple's pirmais devis viņa atrisinājumu.

Mēs izvedīsim Eulera formulu, t.i. - atrisināsim minēto uzdevumu - tīri geometriskā ceļā. Vispirms pierādīsim vienu palīga teoremu. - Ņemsim trijstūri ABC un uzzīmēsim viņam aprakstītu riņķi, ierakstītu riņķi un vienai no sānu malām, piemēram malai BC, pierakstītu riņķi. Ierakstītā riņķa centru apzīmēsim ar J, un pierakstītā riņķa centru ar J'. Abi šie centri atrodas uz leņķa A bissektrisas. Apzīmēsim minētās bissektrisas un trijstūrim aprakstītā riņķa krustošanās punktu ar X un pierādīsim, ka



$$JX = BX = CX = J'X.$$

Tā kā $\angle BAX = \angle CAX$, arī $\smile BX = \smile CX$ u.t.t.

$$BX = CX.$$

$\angle JBJ' = 90°$, (jo taisn. BJ un BJ' ir blakus leņķu bis.)

Tamdēļ ap trijstūri JBJ' aprakstītā riņķa centrs ir taisnes JJ' vidus punkts. Tāpat arī $\angle JCJ' = 90°$, un arī ap trijstūri $JJ'C$ aprakstītā riņķa centrs ir nogriežņa JJ' vidus punkts.

Tā tad punkti J, B, J', C visi atrodas uz viena riņķa, kura centrs ir nogriežņa JJ' vidus punkts. Pierādīsim ka punkts X ir šā riņķa centrs. - Trijstūris JBX ir vienādsānu trijstūris, jo

$$\angle 1 = \angle \frac{A}{2} + \angle \frac{B}{2} \quad \text{(kā trijst. } ABJ \text{ ārējais leņķis)}; \quad \angle 2 = \angle \frac{A}{2} + \angle \frac{B}{2} \quad (\angle JBC = \angle \frac{B}{2},\ \angle CBX = \angle \frac{A}{2}) \text{ T.t.}$$

$$BX = JX = CX \quad (\text{jo } BX = CX),$$

kas nozīmē ka punkts X ir riņķa, kurš iet caur punktiem J, B, C u.t.t. arī J' centrs. Tamdēļ

$$JX = BX = CX = J'X.$$

Tā esam pierādījuši teoremu:

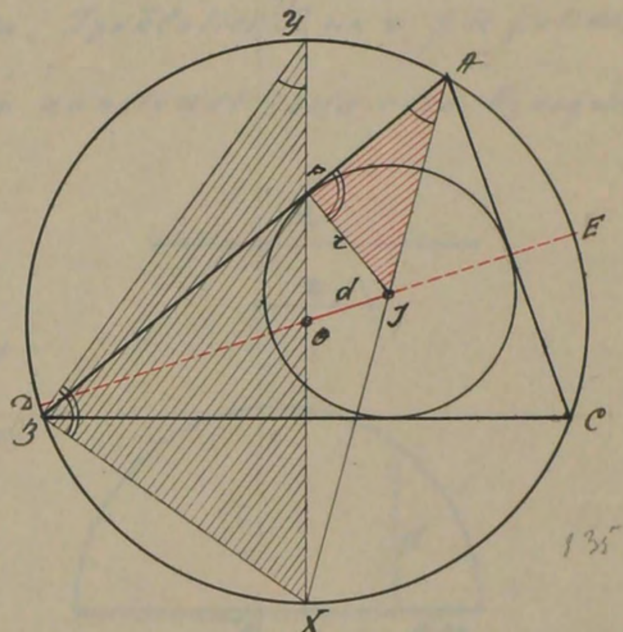
> Katrai trijstūra virsotnei atbilstošā bissektrisa krusto šim trijstūrim aprakstīto riņķi punktā, kas ir vienādi attālināts no pārējām divām trijstūra virsotnēm, no trijstūri ierakstītā riņķa centra un no šai virsotnei pre-

tim gulošai malai pierakstīta riņķa centra.

Pāriesim tagad pie Eulera formulas pierādīšanas. T.i. - pierādīsim, ka

Trijstūrim aprakstīta riņķa rad. R, ierakstīta riņķa rad. r un attālums starp šo riņķu centriem d - saistās sakarībā $d^2 = R^2 - 2Rr$.

- Ņemsim trijstūri ABC, aprakstīsim tam riņķi un ierakstīsim. Aprakstītā riņķa centru apzīmēsim ar O, ierakstītā ar J. Centrs O atrodas uz dotā trijstūra malas BC vidus perpendikulā XY, un centrs J uz leņķa A bissektrisas AX. Savienojot virsotni B ar punktiem X un Y, dabujam taisnleņķa trijstūri BXY (leņķis YBX ir taisns, jo atbalstas uz diametru XY). Apzīmējot ierakstītā riņķa un malas AB saskaršanās punktu ar F un savienojot šo punktu ar punktu J, dabujam otru taisnleņķa trijstūri AFJ (leņķis AFJ ir taisns, kā leņķis, ko veido radiuss ar pieskari).



Apskatot abus minētos taisnleņķa trijstūrus redzam, ka viņi ir līdzīgi, jo

$\sphericalangle BYX = \sphericalangle BAJ$ (abi šie leņķi balstās uz hordu BX).

Tamdēļ varam rakstīt proporciju

$$\frac{r}{AJ} = \frac{BX}{2R}.$$ Bet, pamatojoties uz iepriekš. teor., $BX = JX$ u.t.t.

$$\frac{r}{AJ} = \frac{JX}{2R}, \quad 2Rr = AJ \cdot JX.$$

Kā zinams, $AJ \cdot JX = DJ \cdot JE$, vai arī $AJ \cdot JX = (R+d)(R-d)$, tamdēļ

$$2Rr = (R+d)(R-d),$$ kas dod, ka

$$\underline{d^2 = R^2 - 2Rr.}$$

Šis ir visīsākais un geometrijā visbiežāk lietojamais Eulera form. pierādījums.

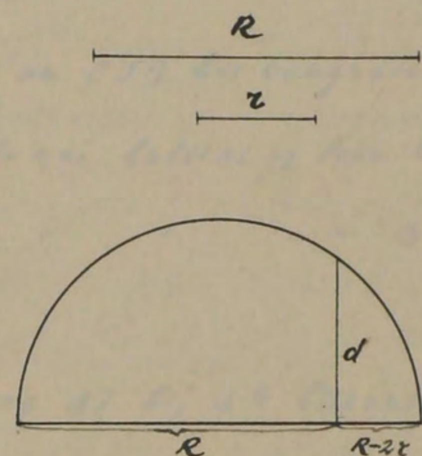
Kā blakus rezultātu no izvestās formulas dabujam slēdzienu, ka

Trijstūrī ierakstīta riņķa diametrs ir mazāks par šim trijstūrim aprakstīta riņķa radiusu.

Jo $d^2 = R(R-2r)$, $d^2 > 0$, $R > 0$; t.i. arī $R - 2r > 0$, kas dod, ka

$$2r < R$$

Ja patvaļīgi izvēlamies divu riņķu radiusus, tad – lai varētu konstruēt trijstūri, kas būtu ierakstīts lielākajā riņķī un aprakstīts mazākajam – maz. riņķis jānovieto lielākā iekšpusē tā, lai attālums starp šo riņķu centriem (d) būtu vidējais proporcionalais starp lielāka riņķa radiusu un starp lielākā riņķa radiusa un mazākā riņķa diametra diferenci. Citiem vārdiem sakot – lielumiem R, r und vajadzētu apmierināt Eulera formulu. Izvēloties R un r pēc patikas, viņiem ar Eulera formulu piesaistīto d varam konstruēt šādā ceļā: Uz nogriezņa $R+(R-2r)$ kā diametra konstriejam riņķa loku. Attālumā R no viena diametra gala punkta (t.i. p. attālā $R-2r$ no otra diam. gala punkta) uzstādam pret diametru perpendikuli. Šā perpendikuļa nogrieznis starp diametru un riņķa loku ir meklētais attālums starp abu riņķu centriem d.

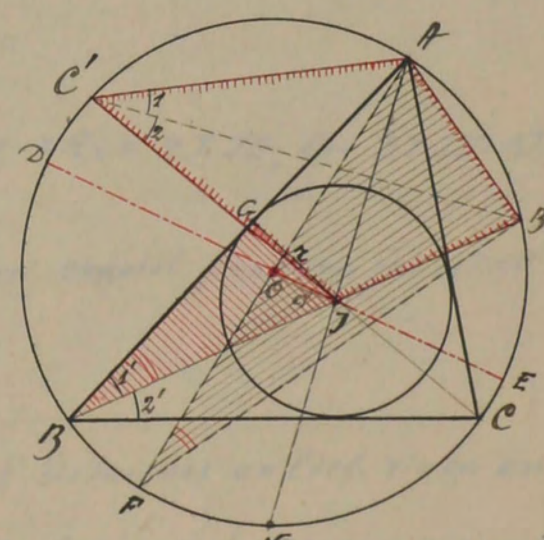


Pierādīsim tagad iepriekšējās teoremas apgriezto teoremu. T.i. pierādīsim teoremu:

Ja ir doti divi riņķi, kuru radiusi R un r un centru attālums d saistas sakarībā $d^2=R^2-2Rr$, tad var konstruēt bezgalīgi daudz trijstūru, kuri katrs ir ierakstīts lielākajā dotajā riņķī un aprakstīts mazākajam dotajam riņķim.

Ņemsim divus riņķus ar radiusiem R un r un novietosim viņus tādā stāvoklī, ka R, r un d (centru attālums) apmierina sakarību

$$d^2=R^2-2Rr. \text{------}(1)$$



Uz lielākā riņķa izvēlēsimies kādu punktu A. No šī punkta vilksim pret mazāko riņķi divas tangentes, kuras krusto lielāko riņķi punktos B un C. Savienojot punktu B ar C dabujam trijstūri ABC. Izlietojot formulu (1) mēģināsim pierādīt, ka arī mala BC skaras mazākajam riņķim. – Taisne AJ ir leņķa A bissektrisa un krusto liel. riņķī arī otrā punktā, ko apzīmēsim ar X. Tad vilksim taisni caur punktiem B un J un apzīm. šīs taisnes un liel. riņķa krust. punktu ar B', bet taines CJ un liel. riņķa krust. punktu apzīmēsim ar C'. Pēc tam savienosim punktu C' ar punktiem A un B', un punktu A ar punktu B'. Tālāk rīkosimies pēc šāda plāna:- Mēģināsim pierādīt, ka

$$JB' = AB' \text{ un } JC' = AC'.$$

T.i.- mēģināsim pierādīt, ka četrstūris $AC'JB'$ ir deltoids. [Par deltoidu sauc četrstūri, kuram no vienas virsotnes izejošās abas malas ir vienāda garuma un arī no šai virsotnei pretim guļošās virsotnes izejošās abas malas ir vienāda garuma]
Kad tas būs pierādīts, varēsim taisīt slēdzienu, ka

$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ (jo trijstūri $AC'B'$ un $C'JB'$ būs kongruenti), un ka

$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 1'$ (" abi šie leņķi balstās uz loku AB'),

$\sphericalangle 2 = \sphericalangle 2'$ (" " " " " " " $B'C$). T.t.

$\underline{\sphericalangle 1' = \sphericalangle 2'}$,

kas nozīmē, ka taisne BJ ir $\sphericalangle B$ bissektrisa. Taisne AJ bij $\sphericalangle A$ bissektrisa. Tamdēļ šo līniju krustošanās punkts J ir trijstūrī ABC ievilkta riņķa centrs. Bet punkts J ir mazākā dotā riņķa centrs. Tā tad maz. dotais riņķis ir identisks ar trijstūrī ABC ievilkta riņķa centru. T.i.- mazākais dotais riņķis skaras arī pie aplūkotā kārtā konstruētas malas BC. Kas tas pats - trijstūris ABC ir meklētais trijstūris.

- Lai pierādītu ka četrstūris $AC'JB'$ ir deltoids, izlietosim formulu (1), kuru varam uzrakstīt veidā

$$2Rr = (R+d)(R-d).$$

Kā redzams no zīmējuma, $R+d = DJ$; $R-d = JE$. Tamdēļ $2Rr = DJ \cdot JE$, bet $DJ \cdot JE = BJ \cdot JB' = CJ \cdot JC'$. T.t.

$2Rr = BJ \cdot JB' = CJ \cdot JC'$, vai arī rakstot proporcijas veidā

$$1)\ \frac{BJ}{r} = \frac{2R}{JB'};\quad 2)\ \frac{CJ}{r} = \frac{2R}{JC'}.$$

Velkot taisni caur punktiem A un O un savienojot šīs taisnes un liel. riņķa krust. punktu F ar B', dabujam taisnleņķa trijstūri AFB'. Savienojot mazākā riņķa un malas AB pieskaršanās punktu G ar centru J, dabujam otru taisnleņķa trijstūri GBJ.

$\triangle AFB' \sim \triangle GBJ$, jo $\sphericalangle GBJ = \sphericalangle AFB'$. Pamatojoties uz to var rakstīt, ka

$$i) \quad \frac{BJ}{r} = \frac{2R}{AB'}.$$

Salīdzinot proporcijas 1) un i) dabujam, ka

$$JB' = AB'.$$ Līdzīgā kārtā varam pierādīt, ka arī

$$JC' = AC'$$

Tā tad četrstūris $AC'JB'$ tiešām ir deltoids un ar to var skaitīt par pierādītu, ka no lielākā dotā riņķa punkta A velkot tangentes pret mazāko doto riņķi un savienojot šo tangenšu un lielākā riņķa krustošanās punktus B un C, rodas trijstūris ABC, kas ir iezīmēts lielākajā riņķī un apzīmēts mazākajam. Punkts A tika ņemts patvaļīgi (tikai ar noteik., lai viņš atrastos uz lielākā riņķa). Tamdēļ ņemot kaut kuru citu no liel. riņķa punktiem un izdarot aplūkoto konstrukciju, atkal dabūsim trijstūri, kas apmierina uzliktos noteikumus. Ņemot visus liel. riņķa punktus, varam dabūt bezgalīgi daudz šādu trijstūru. Tā tad — ja riņķa rad. R, r un centru attālums d apmierina sakarību $d^2 = R^2 - 2Rr$, tad eksistē bezgalīgi daudz trijstūru, kas ir ierakstīti lielākajā riņķī un aprakstīti mazākajam.

Īpašību — ka, ja eksistē viens trijstūris, kas ir ierakst. liel. dotā riņķī un aprakst. mazākajam, tad eksistē bezgalīgi daudz šādu trijstūru — pirmais novērojis L. Huilier's 1811 g. Turpretim ne Euler's ne Chapple's, kaut gan viņi pirmie atrad. nepieciešamo sakarību, kadai jāpastāv starp R, r un d lai varētu konstr. minēto trijstūri, šo īpašību nav pamanījuši.

Pašiem pierādīt, ka

Trijstūrim aprakstīta riņķa radiuss R, kādai no šī trijstūra malām pierakstīta riņķa rad. r' un abu minēto riņķu centru attālums d' saistos sakarībā

$$d'^2 = R^2 + 2Rr'.$$

Vēlāk, pateicoties Poncelet, izauga vesela geometrijas nodaļa par poligoniem, kas ir ierakstīti vienā dotā II pakāpes līnijā un aprakstīti otrai dotai II pakāpes līnijai. Šinī poligonu teorijā atrodama Poncelet teorema, kas apgalvo, ka

Ja ir doti divi riņķi un ja eksistē viens n-malu poligons, kas ir ierakstīts lielākajā dotajā riņķī un apvakstīts mazākajam riņķim, tad attiecībā uz šiem abiem riņķiem eksistē bezgalīgi daudz n-malu poligonu, kuri apmierina augstāk minētos noteikumus.

– Tādā gadījumā starp riņķu radiusiem R, r un centru attāļumu d pastāv zināma funkcionala sakarība.

$$d = f(R, r, n).$$

Trijstūru gadījumā šī sakarība bij

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

Poncelet teorija apskata ne tikai riņķus un riņos ierilktus un apvilktus poligonus, bet arī pārējās II pakāpes līnijas un ar viņām aizrādītā kārtā saistītus poligonus; piemēram – divas ellipses un vienai no viņām apvilktus un otrā ierilktus poligonus. Šos gadījumus varam izlūkot kā cēlušos no diviem riņķiem un vienam notiņiem ierilktiem, bet otram apvilktiem poligoniem projecējot šo divu riņķu un ar viņiem saistīto poligonu sistemu no dažādiem projecēšanas centriem. [Jo atkarībā no projecēšanas centra izvēles riņķis var projecēties kaut kuras otras pakāpes līnijas veidā, bet n-malu poligons ar projekcēšanu viekmēr pāriet citā n-malu poligonā.]

Poncelet savā projektivās geometrijas kursā apskata dažādus divu II pak. līniju un ar viņām saistītu poligonu gadījumus.

Vispārīgā veidā šo poligonu teoriju izstrādājis Jacobi ar elliptisko funkciju palīdzību. [Sk. viņa darbu III. sējumu].

Mēs pašlaik aprobežosimies tikai ar divu riņķu un vienā no viņiem ierilktu, bet otram apvilktu

četrstūru aplūkošanu.

Trijstūru gadījumā abu riņķu rad. R, r un centru attāļumu d saistīja Eulera formula, kuru varam uzrakstīt arī šādā veidā

$$\frac{1}{R+d} + \frac{1}{R-d} = \frac{1}{r}; \qquad n=3$$

Kā redzēsim, 4-stūru gadījumām atbilstošās formulas veids būs

$$\frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2} = \frac{1}{r^2}; \qquad n=4$$

Ta tad trijstūru un četrstūru gadījumos lielumus R, r un d saistošās formulas ir stipri simmetriskas. Gadījumos, kad poligonu malu skaits ir lielāks par 4, t.i. kad

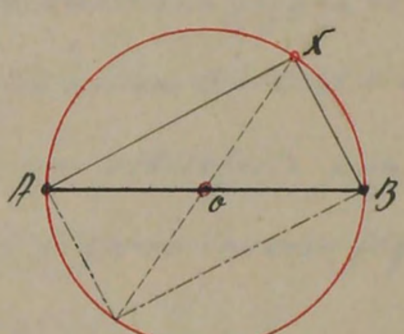
$$n > 4,$$

šī simmetrija izjūk un lielumus R, r un d saistošas formulas iznāk stipri komplicētas.

Pirms stājamies pie četrstūru aplūkošanas, kas mums jau zināmā kārtā saistīti ar diviem dotie riņķiem, izdarīsim atkal dažus palīga noskaidrojumus. – Vis pirms atradīsim punktu geometrisko vietu, kuru attālumu no diviem dotiem punktiem kvadratu summa ir pastāvīgs lielums. T.i. – ja dotos punktus apzīmējam ar A un B – atradīsim tādu punktu X geometrisko vietu, kuru attāl. no punktiem A un B saistas sakarībā

$$\overline{AX}^2 + \overline{BX}^2 = const.$$

Pieņemot ka viens tāds punkts X ir dots un savienojot viņu ar punktiem A un B dabujam trijstūri ABC. Šo trijstūri papildinam līdz paralelogramam. Velkam paralelograma diagonales un viņu krustošanās punktu apzīmējam ar O. Pamatojoties uz to, ka paralelograma diagonaļu kvadratu summa ir vienāda ar visu malu kvadratu summu, varam rakstīt



138.

$$\overline{AB}^2 + 4\overline{OX}^2 = 2\overline{AX}^2 + 2\overline{BX}^2,$$ kas dod, ka

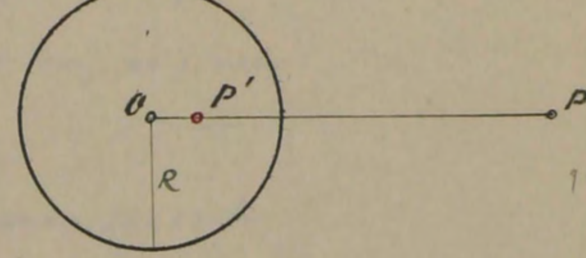
$$OX = \frac{\sqrt{2(\overline{AX}^2+\overline{BX}^2)-\overline{AB}^2}}{2} = const.$$

Tā tad punktu X attālums no viena noteikta punkta (taisnes AB vidus punkta) ir pastāvīgs lielums. Ar to ir pierādīts, ka

Punktu, kuru attālumu no diviem dotiem punktiem kvadratu summa ir pastāvīgs lielums, geometriskā vieta ir riņķis, kura centrs ir dotos punktus savienojošā nogriežņa vidus punkts un kura radiuss līdzinās dotos punktus savienojošā nogriežņa pusei

Tālāk noskaidrosim inversu punktu jēdzienu. – Ja ir dots riņķis ar radiusu R un centra punktā O un kāds punkts P, un pēc tam uz stara OP ņemts tāds punkts P', ka punktu P un P' attālumu no dotā riņķa centra O reizinājums līdzinās dotā riņķa radiusa kvadratam, tad punktus P un P' sauc par inversiem punktiem attiecībā uz doto riņķi. Punktu O sauc par punktu P un P' inversijas centru. Inversi punkti P un P' tiek definēti ar šādu form.

$$OP \cdot OP' = R^2,$$

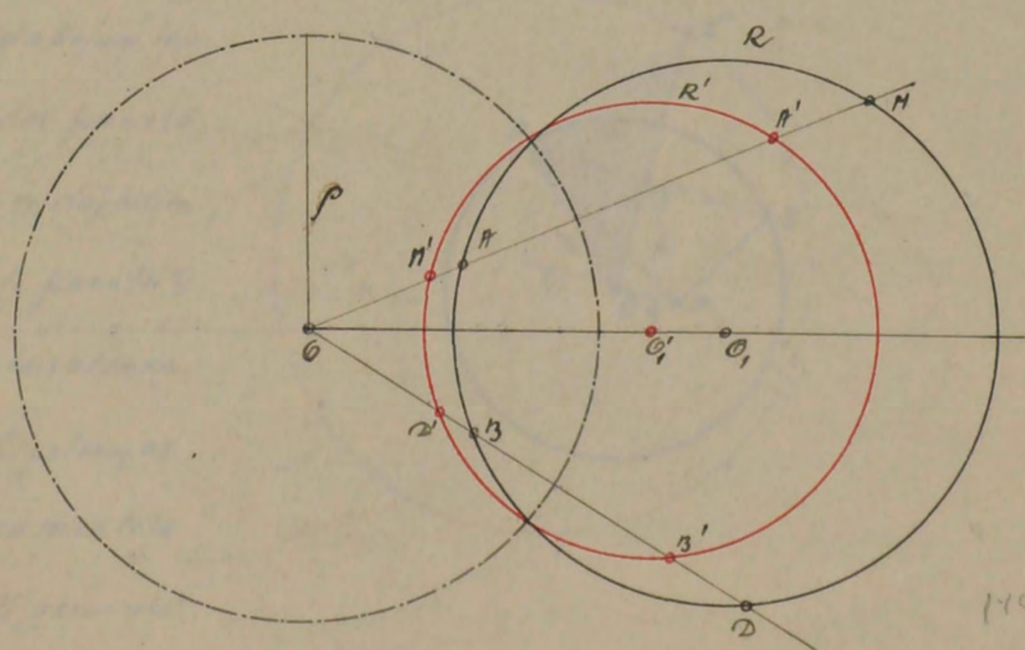


kur ar O apzīm. dotā riņķa centrs un ar R radiuss. No definicijas formulas redzams, ka - ja punkts P atrodas dotā riņķa ārpusē, tad viņa inversais punkts P' atrodas šā riņķa iekšpusē; un otrādi - ja punkts P atrodas dotā riņķa iekšpusē, tad inversais punkts P' atrodas ārpusē. Starp punktiem P un P' pastāv inversa sakarība. T.i. - ja punktu P uzskata par dotu, tad punkts P' ir viņa inversais punkts attiec. uz doto riņķi; un otrādi - ja punktu P' uzskata par dotu, tad punkts P ir viņa inversais punkts attiecībā uz to pašu riņķi.

Ar inversi saistītiem punktiem P un P' var izdarīt geometriska figuru transformaciju. Attiecībā uz doto riņķi katram dotās figuras punktam P atbilst viensnoteikts punkts P'. Visiem dotās figuras punktiem P_i $(i=1,2 \ldots \infty)$ atbilstošie punkti P_i' izveido jaunu figuru. Šo figuru nosauc par dotās figuras inverso figuru attiecībā uz doto riņķi (jeb attiecībā uz doto inversijas centru)

Noskaidrosim, kāda ir riņķa inversā figura attiecībā uz kādu citu riņķi, kā pamata riņķi. Citādi sakot: noskaidrosim, kādā figurā pārtransformejas dotais riņķis R izdarot transformaciju ar attiecībā uz riņķi - kuŗa centrs atrodas punktē O un radiuss līdzinās ρ - inversi saistītu punktu palīdzību. Ņemsim gadījumu, kad inversijas centrs O neatrodas uz dotā riņķa R. - No centra O vilksim starus, kas krusto doto riņķi punktos A, B u.t.t. un apzīmēsim šo krust. punktu inversos punktus ar A', B' u.t.t.. Pamatojoties uz inversu punktu def. varam rakstīt.

$$OA \cdot OA' = \rho^2,$$
$$OB \cdot OB' = \rho^2 \text{ u.t.t.}$$



Ņemot visus dotā riņķa punktus

Ai (i=1,2, ···· ∞) dabūsim bezgalīgi daudz inversu punktu Ai', kuri izveidos jaunu slēgtu figuru. Noskaidrosim šīs figuras veidu. – Apzīmēsim stara OA un riņķa R otru krustošanās punktu ar M. Pamatojoties uz teoremu par riņķa sekantēm varam rakst.

$$OA \cdot OM = const.$$ Bez tam, kā zinam,

$$OA \cdot OA' = \rho^2$$

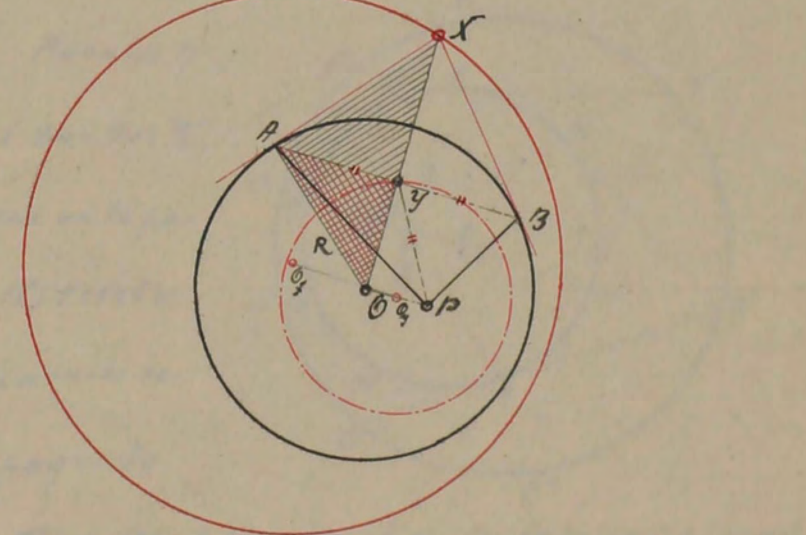
Izdalot pēdējās sakarības vienu ar otru dabujam jaunu sakarību:

$$\frac{OA'}{OM} = \frac{\rho^2}{const} = const.$$

Šī sakarība rāda, ka punkti A' apraksta figuru, kas ir līdzīga figurai, ko apraksta punkti M. Punkti M apraksta riņķi u.t.t. arī punkti A' apraksta riņķi. Ar to ir noskaidrots ka

Dotā riņķa inversā figura attiecībā uz inversijas centru, kas neatrodas uz šā riņķa, ir riņķis. – Inversijas centrs, dotā riņķa centrs un jaunā (dotam r. inversā) riņķa centrs atrodas uz vienas taisnes.

Ņemsim riņķi, viņa iekšpusē kādu punktu P un taisnu leņķi, kura virsotne atrodas punktā P. Leņķa malu un riņķa krustošanās punktus apzīmēsim ar A un B. Punktos A un B vilksim riņķim tangentes. Tangenšu krustošanās punktu apzīmēsim ar X. – Pieņemsim ka taisnais leņķis var griezties ap punktu P un mēģināsim atrast visiem iespējamiem šā leņķa stāvokļiem atbilstošo punktu X geometrisko vietu. [Šo uzdevumu varam izteikt arī tādā veidā: Dots riņķis un viņa iekšpusē taisnleņķa trijstūris, kura hipotenuza ir riņķa horda. Pieņemot ka šis trijstūris griežas ap taisnā leņķa virsotni, atrast atbilstošo hipotenuzes polu geometrisko vietu]



– Savienojot punktus O un X dabujam taisni, kas krusto hordu AB viņas vidus punktā Y. Vispirms noskaidrosim, kāda ir dažādiem taisnā leņķa stāvokļiem atbilstošo punktu Y geometriskā vieta.. Kā zinams, taisnleņķa trijstūra mediana ir vienāda ar hipotenuzas pusi. Izlietosim šo īpašību, lai sameklētu summu $OY^2 + PY^2$. Tā kā $PY = AY$, varam rakst.

$$OY^2 + PY^2 = OY^2 + AY^2 = OA^2 = R^2 = const.$$

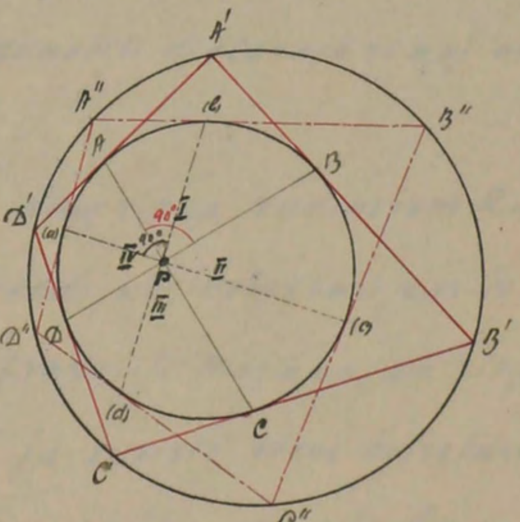
Tā tad punktu Y attāļumu no diviem pastāvīgiem punktiem O un P kvadratu summa ir pastāvīgs lielums, kas nozīmē, kā šo punktu geometriskā vieta ir riņķis, kuŗa centrs ir nogriežņa OP vidus punkts (skat. 132. l. p.)

Punkti X un Y attiecībā uz doto riņķi ir inversi punkti. [Jo taisnleņķa trijstūri AOX un AOY ir līdzīgi un tamdēļ

$$\frac{OX}{OA} = \frac{OA}{OY}, \quad \text{k. t. p.} \quad OX \cdot OY = OA^2 = R^2,$$ kas ir inversu punktu definicijas formula] Tā tad punktu X geometriskā vieta ir punktu Y geometriskās vietas inversā figura attiecībā uz doto riņķi. Kā tikko redzējam, punktu Y geometriskā vieta ir riņķis un tā tad arī punktu X geometriskā vieta ir riņķis (skat. 134. l. p.). Tādā ceļā esam noskaidrojuši, ka

Taisnam leņķim — kuŗa virsotne atrodas dotā riņķa iekšpusē pastāvīgā punktā — griežoties ap savu virsotni dažādiem leņķa stāvokļiem atbilstošos leņķa malu un dotā riņķa krustošanas punktos vilkto riņķa tangenšu krustošanas punkti apraksta riņķi.

Tagad varam pāriet pie četrstūŗu aplūkošanas, kas ir ievilkti lielākajā dotajā riņķī un apvilkti mazākajam riņķim. Vispirms pierādīsim, ka tāds četrstūris, kas izpilda tikko minētās prasības, ir iespējams. — Ņemsim riņķi un riņķa iekšpusē kādu punktu P, caur kuŗu vilksim divas savstarp. perpendikulāras līnijas. Apzīmēsim šo taišņu un dotā riņķa krustošanās punktus ar A, B, C un D. Minētos krustošanās punktos vilksim riņķim tangentes. Apzīmēsim punktos A un B vilkto tangenšu krustošanās punktu ar A', punktos B un C ar B', punktos C un D ar C' un punktos D un A ar D'. Punktus A', B', C' un D' varam uzskatīt kā viena un tā paša taisna leņķa stāvokļim $\underline{I}$, $\underline{II}$, $\underline{III}$ un $\underline{IV}$ atbilstošo tangenšu krustošanās punktus. [T. i. šos punktus varam uzskatīt kā cēlušos taisnam leņķim pagriežoties no stāvokļa $\underline{I}$ stāvokļos $\underline{II}$, $\underline{III}$ un $\underline{IV}$].



Tamdēļ pamatojoties uz iepriekš pierādīto varam taisīt slēdzienu, ka punkti A', B', C' un D' atrodas uz viena riņķa. Līdz arto ir pierādīts, ka četrstūris, kas vienā riņķī ir ierakstīts un otram aprakstīts, tiešām eksistē.

Pierādīt pašiem:

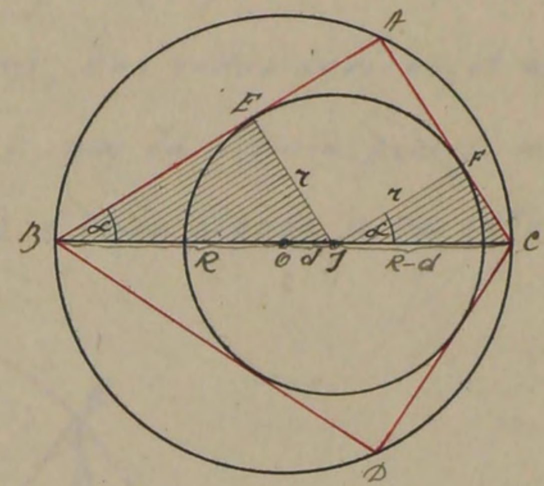
1) Taisnes, kas savieno riņķim apvilkta četrstūra pretim guļošos pieskaršanās punktus (t.i. pretim guļošos četrstūra un riņķa saskaršanās punktus) ir savstarpīgi perpendikulāras. – Aplama teorema, jo visus 4 pieskar. punktus var izvēlēties!

2) Riņķim apvilkta četrstūra diagonales un pretim guļošos pieskaršanās punktus savienojošās taisnes krustojas visas vienā punktā.

Tālāk pierādīsim, ka – ja eksistē viens četrstūris, kas ir ierakstīts vienā riņķī un aprakstīts otram riņķim, tad attiecībā uz šiem riņķiem eksistē bezgalīgi daudz tādu četrstūru, kā minētais.

– Uz lielākā riņķa ņemam kādu citu punktu A". No šī punkta velkam mazākam riņķim pieskari. Pieskaršanās punktu (a) savienojam ar punktu P. Tad punktā P pret šo taisni (aP) uzceļam perpendikuli. Tad perpendikuļa un mazākā riņķa krustošanās punktā (B) velkam šim riņķim pieskari. Dabūtā pieskare krusto lielāko riņķi tanī pat punktā A", no kura izgājām (pamat. uz iepriekš pierādīto). Pagarinot dabūtā taisnā leņķa malas, kamēr tās krusto maz. riņķi (punktos ...) un velkot krustoš. punktos pieskares maz. riņķim, tā pat kā iepriekšējā gadījumā dabujam punktus A", B", C" un D", kas visi atrodas uz tā paša lielākā riņķa u.t.t. arī četrstūris A"B"C"D" izpilda vajadzīgos noteikumus. Izdarot šādu konstrukciju attiec. uz visiem lielākā riņķa punktiem, dabujam bezgalīgi daudz četrstūru, kas ir ierakstīti lielākajā riņķī un aprakstīti mazākajam.

Meklēsim tagad, kāds sakars pastāv starp divu riņķu radiusiem R un r un viņu centru attālumu d – ja šie riņķi ir tādi, ka četrstūri, kas ir ierakstīti lielākajā riņķī, tanī pašā laikā ir aprakstīti mazākajam riņķim. Jau redzējām, ka attiecībā uz diviem riņķiem, ja eksistē viens četrstūris, kam piemīt minētās īpašības, tad attiecībā uz šiem riņķiem eksistē bezgalīgi daudz tādu četrstūru. Izvēlēsimies no visiem daudzajiem četrstūriem tādu, kuŗa divas virsotnes atrodas uz doto riņķu centru līnijas. Tad savienosim mazākā riņķa centru J ar šā riņķa un četrstūra malu AB un AC skaršanās punktiem E un F. Tā dabūsim taisnleņķa trijstūrus EBJ un FJC, kuriem



$$\sphericalangle EBJ = \sphericalangle FJC = \alpha.$$

Tamdēļ varam rakstīt, ka

$$\frac{r}{R+d} = \sin\alpha \; ; \quad \frac{r}{R-d} = \cos\alpha \; ;$$ noku-

rienes dabujam meklēto sakarību

$$\frac{r^2}{(R+d)^2} + \frac{r^2}{(R-d)^2} = 1 \quad \text{k. t. p.}$$

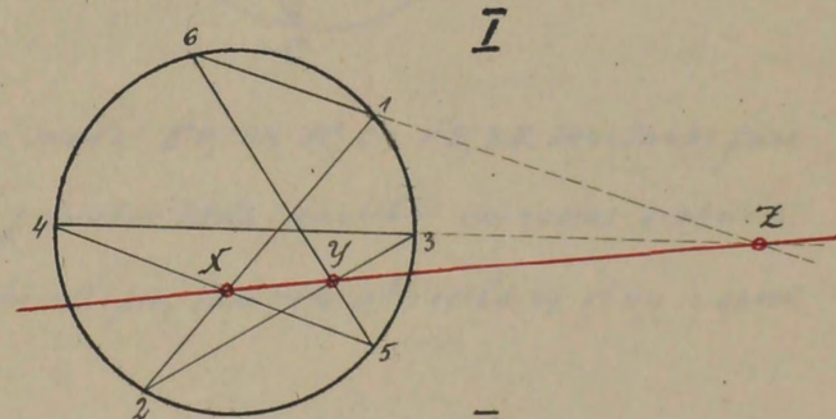
$$\frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2} = \frac{1}{r^2}.$$

Šo pašu formulu komplicētu aprēķinu ceļā 18. g. s. beigās atradis Eulera skolnieks šveicietis N. Fuss.

Projecējot šo četrstūri un abus riņķus no kāda proj. centra, dabujam atkal divas vienāda nosaukuma II pakāpes līnijas, kuŗas viena ir aprakstīta četrstūrim, bet otra ierakstīta tanī pašā četrstūrī

Tiešā un apgrieztā Pascal'a teoremas ir spēkā neskatoties uz to, kāda ir atbilstošā 6-stūŗa forma. [T. i. neskatoties uz to - vai 6-st. ir izliekts, vai arī viņš ir tāds, kuŗa malas krustojas] - Piemēram:

I

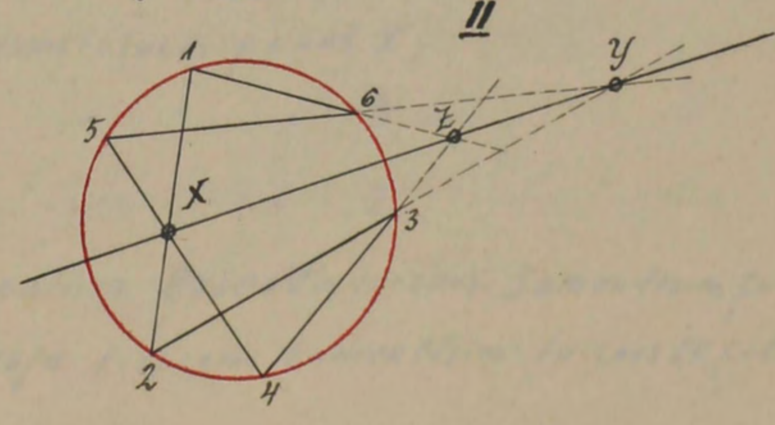


I. Riņķī ievilkta 6-stūŗa 123456 pretējo malu krustošanās punkti. t. i.

malu 12 un 45 krust. punkts X,
" 23 " 56 " " Y,
" 34 " 61 " " Z,

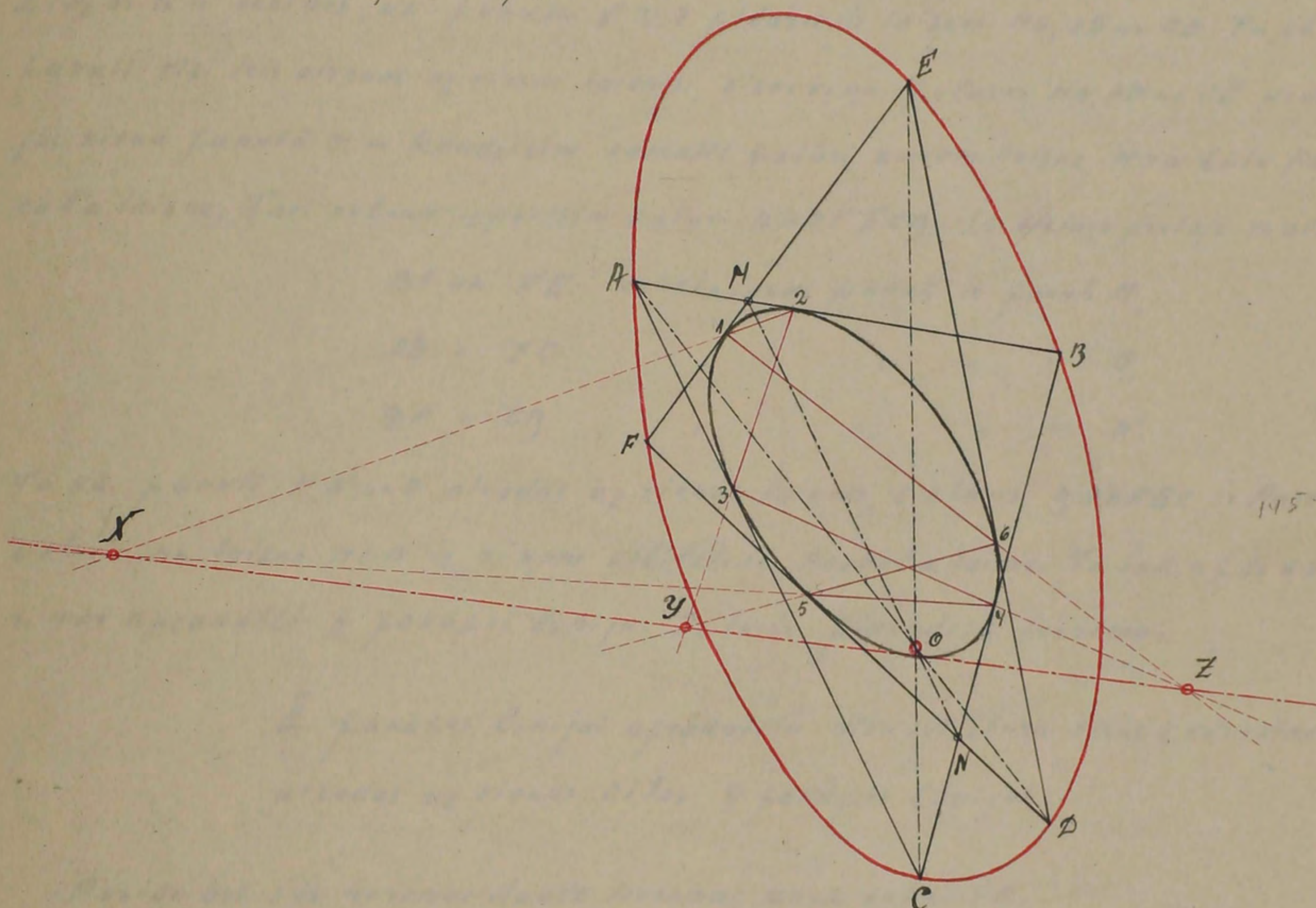
atrodas uz vienas taisnes.

II



II. Ja kāda 6-stūŗa 123456 pretējo malu (t. i. malu 12 un 45, 23 un 56, 34 un 61) krustoš. punkti X, Y, Z atrodas uz vienas taisnes, tad šim 6-st. var apvilkt II. pak. līniju.

Ņemsim kādu II pakāpes līniju, piemēram ellipsi, aprakstīsim viņai divus trijstūrus, piem. trijstūrus ABC un DEF, un mēģināsim pierādīt, ka visas 6 šo trijstūru virsotnes atrodas uz vienas citas II pakāpes līnijas. — To varēsim skaitīt par pierādītu, ja izdosies pierādīt, ka 6-stūris, kas rodas savienojot aprakstīto trijstūru virsotnes, ir Pascal'a 6-stūris; t.i. — ka šā 6-stūra pretējo malu krustošanās punkti atrodas uz vienas taisnes. [Jo-ja figura ir Pascal'a 6-st. tad viņai var aprakstīt II pak. līniju]



Apzīmēsim dotās ellipses un trijstūru malu EF, AB, AC, CB, FD, DE skaršanās punktus attiecīgi ar 1, 2, 3, 4, 5, 6. Savienosim šos punktus tādā kārtībā, ka rodas 6-stūris 123456. Dabūtais 6-stūris ir ierakstīt dotā ellipsē, tamdēļ attiecībā uz viņu ir spēkā Pascal'a teorema. T.i.

pretējo malu 12 un 45 krustošanās punkts X,
" " 23 " 56 " " Y,
" " 34 " 61 " " Z

atrodas visi uz vienas taisnes — minētā 6-stūra Pascal'a taisnes. Sameklēsim punktu X, Y, Z polares. — Iesāksim no pretējā. Vispirms sameklēsim taisnes EC polu.

Spriežam tā:

Punkta E polare ir taisne 61,

" C " " " 34.

tā tad taisnes CE pols atrodas uz taisnēm 61 un 43, t.i.

taisnes CE pols ir taišņu 61 un 34 krustošanās punkts Z.

Tāpat dabujam, ka " AD " " " 23 " 56 " " Y,

" MN " " " 12 " 45 " " X.

Līdz ar to ir skaidrs, ka punktu X, Y, Z polares ir taisnes MN, AD un CE. Tā kā šie punkti visi trīs atrodas uz vienas taisnes, visas viņu polares MN, AD un CE krustojas vienā punktā O. – Raudzīsim saskatīt 6-stūri, kuŗam taisne MON būtu Pascal'a taisne. Tanī nolūkā izpētīsim 6-stūri BADFECB. Šā 6-stūŗa pretējo malu

BA un FE krustošanās punkts ir punkts M,

AD " EC " " " " O,

DF " CB " " " " N.

Tā kā punkti M, N un O atrodas uz vienas taisnes, 6-stūris BADFEC ir Pascal'a 6-stūris un taisne MON ir viņam atbilstošā Pascal'a taisne. Tā tad ap šo 6-stūri var apvilkt II pakāpes līniju. Ar to ir pierādīta teorema:

II. pakāpes līnijai apvilktu divu trijstūŗu visas 6 virsotnes atrodas uz vienas citas II pakāpes līnijas.

Pastāv arī šīs teoremas duālā teorema, kuŗa skan tā:

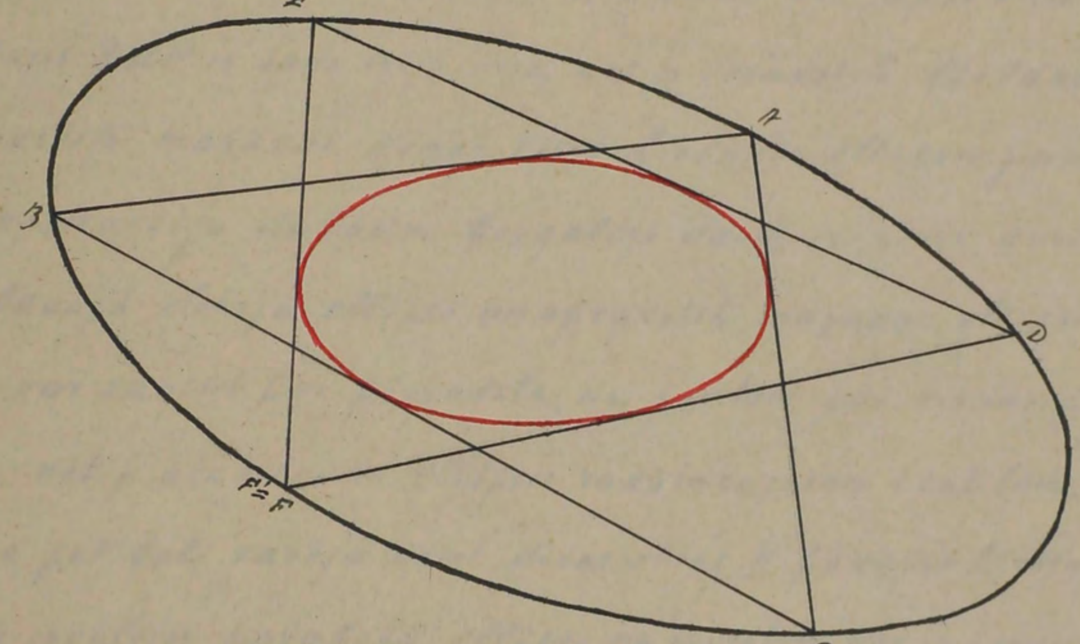
II. pakāpes līnijā ievilktu divu trijstūŗu visas 6 malas pieskaŗas vienai citai II. pakāpes līnijai.

Abas šīs teoremas var formulēt arī tā:

Ja ap II. pakāpes līniju ir apvilkti divi trijstūri, tad vienmēr eksistē cita II. pakāpes līnija, kuŗā šie trijstūri ir ievilkti.

– Ja II. pakāpes līnijā ir ievilkti divi trijstūri, tad vienmēr eksistē cita II pakāpes līnija, ap kuŗu šie trijstūri ir apvilkti.

Pēdējo teoremu t.i. iepriekš pierādītai duālo teoremu - pierādīt pašiem. Pierādījumā var izlietot Briančona teoremu līdzīgā kārtā, kā iepriekšējā pierādījumā izlietojam Pascal'a teoremu. [Briančona teorema apgalvo: II. pakāpes līnijai apvilktā 6-stūra diagonales, kas savieno pretim guļošās virsotnes, krustojas vienā punktā. Spēkā ir arī pretējais apgalvojums: - ja 6-st. ir Briančona 6-stūris t.i. - ja viņa diagonales, kas savieno pretim guļošās virsotnes krustojas vienā punktā - tad viņā var ierakstīt II. pakāpes līniju. Tā tad, lai pierādītu pēdējo teoremu, jāpierāda ka 6-stūris, kas rodas savienojot abu trijstūru ABC un DEF virsotnes, ir Briančona 6-stūris] Vēl jāpiezīmē, ka arī



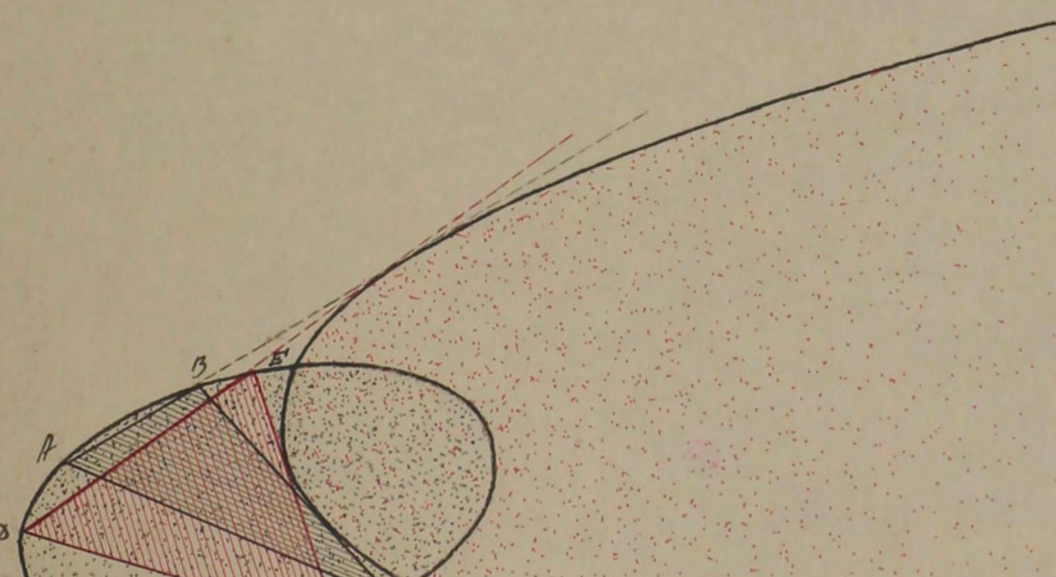
Briančona teorema nava atkarīga no atbilstošā 6-stūra formas. Citādi sakot - viņa ir spēkā kā attiecību uz izliektiem 6-stūriem, tā arī attiec uz 6st. kuru malas krustojas.

Kā secinājumu no iepriekš pierādītas teor. dabujam Poncelet teoremu, kura skan:

> Ja ir dotas divas II pakāpes līnijas un viens trijstūris, kas ir vienā dotajā līnijā ierakstīts un otrai apvilkts, tad eksistē bezgalīgi daudz tādu trijstūru, kuri katrs ir vienā dotajā līnijā ierakstīts un otrai apvilkts.

- Pieņemsim ka ir dotas divas II. pak. līnijas - piemēram divas ellipses - un trijstūris ABC, kas ir lielākajā ellipsē ierakstīts un mazākajai apvilkts. Tad ņemsim kādu liel. ellipses punktu D un no viņa vilksim pret mazāko divas tangentes, kas krusto pirmo el. punktos E un F. No punkta E velkam atkal pret mazāko el. pieskari. Pierādīsim ka šīs pieskares un pieskares DF krustošanās punkts F' ir punkts F, kas atrodas uz lielākās ellipses.

Dotais trijstūris ABC un arī jaunais trijstūris DEF' abi ir apraksītīti mazajai ellipsei. Tamdēļ, pamatojoties uz iepriekš pierādīto var apgalvot, ka visas 6 šo trijstūru virsotnes A, B, C, D, E, F' atrodas uz vienas un tās pašas II. pakāpes līnijas. Pēc konstrukcijas 5 no šām virsotnēm – t.i. virsotnes A, B, C, D, E – atrodas uz lielākās dotās ellipses. Kā zinams, 5 punkti pilnīgi nosaka vienu II. pakāpes līniju. Tā kā II pakāpes līnijai, uz kuras atrodas visas abu mazākai ellipsei apraksītīto trijstūru virsotnes, un lielākai dotajai ellipsei ir kopīgi 5 punkti, abas šīs līnijas ir identiskas. Tas dod, ka no lielākas ellipses punktiem D un E pret mazāko ellipsi vilkto tangenšu krustošanās punkts F' arī atrodas uz lielākās dotās ellipses, t. i. – viņš sakrīt ar punktu F. Tā tad arī apskatītā kārtā konstruētais trijstūris DEF ir tāds trijstūris, kas ir ierakstīts lielākajā dotajā ellipsē un apraksītīts mazākai. Ņemot visus lielākās ellipses punktus un izdarot to pašu konstrukciju dabūsim bezgalīgi daudz trijstūru, kuri katrs būs ierakstīts lielākajā dotajā ellipsē un apraksītīts mazākai ellipsei. – Ar to Poncelet teoremu var skaitīt par pierādītu; un pie tam par vispārīgi pierādītu, jo pierādījums nebij atkarīgs no ellipses raksturojošām īpašībām. Divu ellipšu vietā tik pat labi varēja ņemt divas citas II. pakāpes līnijas. Piemēram, ja par dotiem izvēlētos parabolu, ellipsi un trijstūri, kas ir ierakstīts ellipsē un apraksītīts parabolai, Poncelet teoremas pierādījums būtu tāds pat.



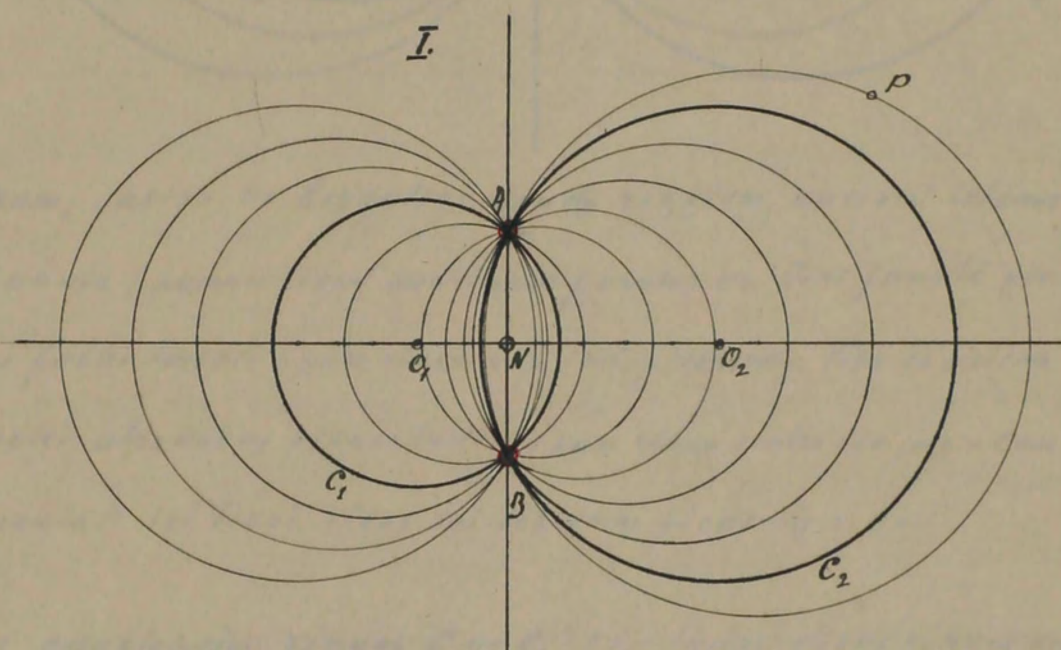
147

Koaksialu riņķu sistemas.

Ar vārdiem „koaksialu riņķu sistema" apzīmē bezgalīgi daudz riņķu, kam visiem ir viena un tā pati radikalā ass.

Tā kā radikalo asi nosaka divi riņķi – koaksialu riņķu sistema tiek pilnīgi noteikta ar ik diviem šai sistemai piederošiem riņķiem.

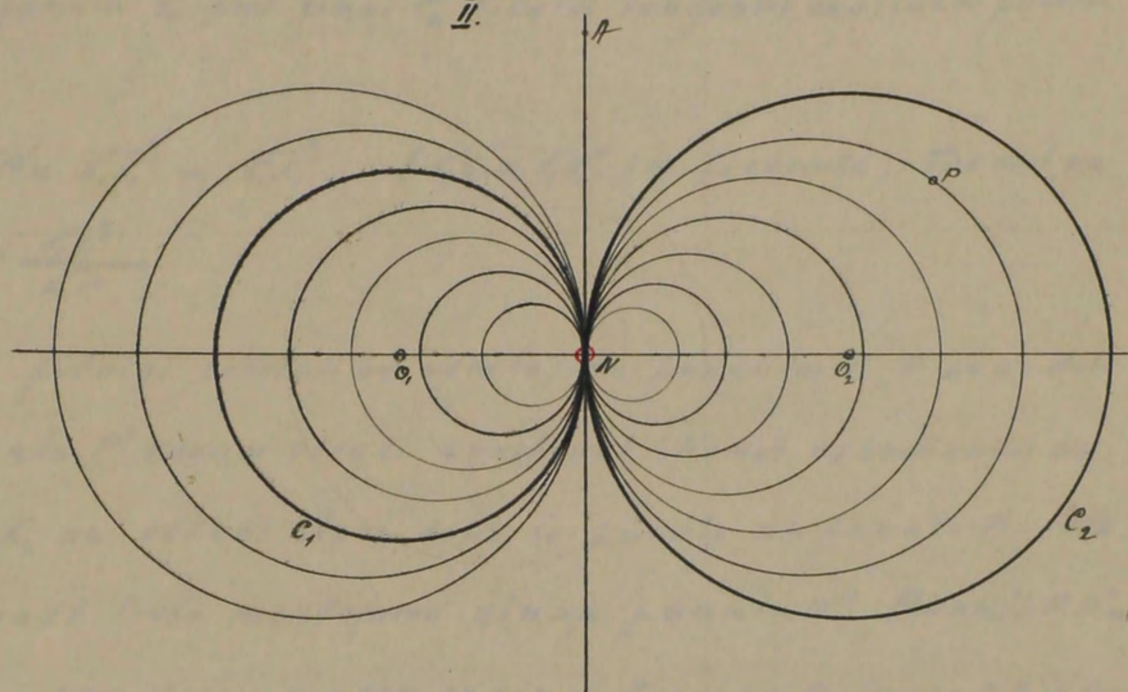
I. Vispirms apskatīsim, kā sastādas koaksialu riņķu sistema, ko nosaka divi realos punktos krustojošies riņķi. – Pieņemsim ka ir doti divi riņķi C_1 un C_2 (ar centriem punktos O_1 un O_2) kuri krustojas punktos A un B. Kā zinams, divu realos punktos krustojošos riņķu radikalā ass ir šo riņķu kopīgā horda, t.i. taisne, kas iet caur krustošanās punktiem un ir perpendikulara šo riņķu centru līnijai. Tā tad riņķu C_1 un C_2 radikalā ass ir taisne AB,



kas ir perpendikulara centru līnijai O_1O_2. Arī ik diviem citiem riņķiem, kas ies caur punktiem A un B taisne AB būs kopīgā horda u.t.t. būs arī šo riņķu radikalā ass. Pie kam ir skaidrs, ka arī šo riņķu centri atradīsies uz taisnes O_1O_2, jo viņiem ir jāatrodas uz taisnes, kas ir perpendikulara taisnei AB un iet caur viņas vidus punktu N. Tā tad

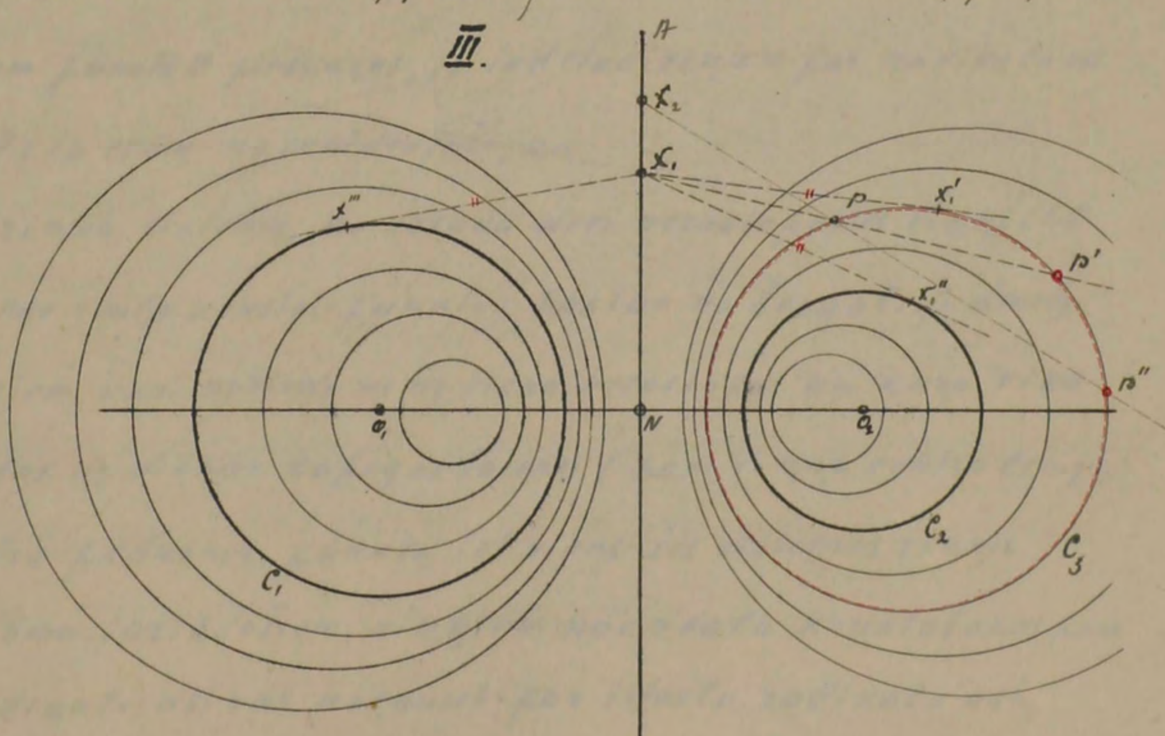
Koaksialu riņķu sistema, ko nosaka divi realos punktos krustojošies riņķi, sastāv no bezgalīgi daudz riņķiem, kuri visi iet caur diviem kopīgiem punktiem (pamata riņķu C_1 un C_2 krust. punktiem) un kuŗu centri visi atrodas uz vienas kopīgas taisnes (pam. riņķu centru līn. O_1O_2) – Caur katru plāknes punktu P iet tikai viens šādas sistemas riņķis.

II. Ja ņemam divus riņķus C_1 un C_2, kuri pieskaŗas viens otram punktā N, tad šo riņķu radikalā ass ir viņu kopīgā iekšējā pieskare, t.i. taisne kas iet caur pieskaršanās punktu N un ir perpendikulara abu ņemto riņķu centru līnijai O_1O_2. Arī ik diviem citiem riņķiem, kas iet caur punktu N un viņā pieskarās taisnei AN, - šī taisne ir radikalā ass.



Visu riņķu, kas iet caur punktu N un viņā skaras taisnei AN, centri atrodas uz riņķu C_1 un C_2 centru līnijas O_1O_2. Tā nonākam pie slēdziena, ka koaksialu riņķu sistema, ko nosaka divi riņķi, kas pieskaras viens otram, sastāv no bezgalīgi daudz riņķiem, kuri visi iet caur vienu un to pašu punktu (pamata riņķu skaršanās punktu) un šinī punktā pieskaras vienai un tai pašai taisnei (pam. riņķu kop. iekš. pieskarei). Visu šo sistemu sastādošo riņķu centri atrodas uz vienas taisnes (pam. riņķu centru līnijas). - Caur katru plāknes punktu P iet tikai viens šai sistemai piederošs riņķis.

III. Ņemsim tagad divus nesastopošos riņķus C_1 un C_2, t.i. - tādus divus riņķus, kuriem nav reālu krustošanās punktu - un noskaidrosim, kā konstruēt šos riņķus saturošas koaksialu riņķu sistemas citus riņķus. - Vispirms konstruēsim riņķu C_1 un C_2 radikalo asi NA. Tad izvēlēsimies kādu plāknes punktu P apskatīsim, kā konstruēt riņķi, kas iet caur šo punktu un kuram kopīgi ņemtam ar riņķi C_1 vai arī C_2 ir tā pati radikalā ass, kā riņķiem C_1 un C_2, t.i. taisne NA. - Pieņemsim



ka tāds caur punktu P ejošs riņķis C_3 ir konstruēts. Tad ņemsim uz riņķu C_1 un C_2 radikalās ass kādu punktu X_1 un vilksim staru X_1P. Šis stars krusto meklēto riņķi arī otrā punktā P'. Apzīmējot no punkta X_1 pret mekl. riņķi vilktās tangentes skaršanās punktu šim riņķimar X_1' un no punkta X_1 pret riņķi C_2 vilktās tangentes skaršanās punktu ar X_1'' varam rakstīt, ka

$$\overline{X_1P} \cdot \overline{X_1P'} = \overline{X_1X_1'}^2 = \overline{X_1X_1''}^2. \quad (\overline{X_1X_1'} = \overline{X_1X_1''} \text{ pēc pieņemtā}). \text{ Tas dod, ka}$$

$$\overline{X_1P'} = \frac{\overline{X_1X_1''}^2}{\overline{X_1P}}.$$

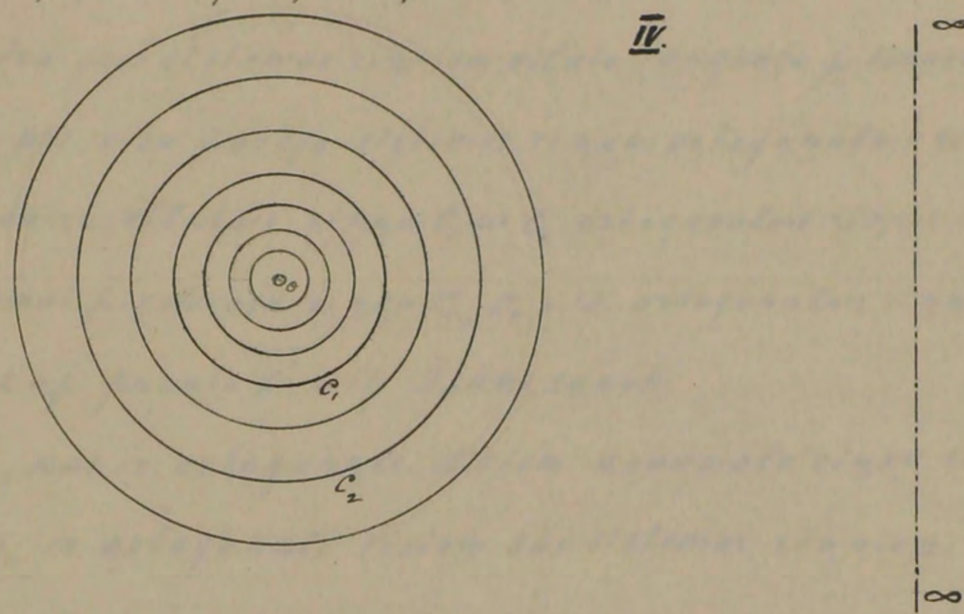
Nogriežņi X_1X_1'' un X_1P ir pilnīgi noteikti ar ņemtajiem punktiem X_1, P un ar doto riņķi C_2. Tā tad arī punktu P' varam viegli konstruēt. Ņemot uz radikalās ass NA kādu citu punktu X_2 un velkot staru caur šo punktu un punktu P – tādā pat ceļā varam konstruēt trešo meklejamā riņķa punktu P''. Punkti P, P' un P'' pilnīgi nosaka riņķi, kam kopīgi ņemtam ar riņķi C_2 vai arī C_1 – taisne NA ir par radikalo asi. – Rodas jautājums, vai apskatītā kārtā konstruētais riņķis C_3 nava atkarīgs no uz radik. ass NA ņemtajiem palīga punktiem? T. i. – vai ņemot punktu X_1 un X_2 vietā šīs ass punktus Y_1 un Y_2, un izdarot apskatīto konstrukciju nerodas kāds cits caur punktu P ejošs sistemas riņķis C_3'? Izrādas ka caur punktu P neatkarīgi no uz radik. ass paņemtiem punktiem, iet viens pats riņķis C_3. – Jo ja pielaistu ka caur punktu P iet vēl cits sist. riņķis C_3', tad šiem riņķiem būtu vēl viens cits krustošanās punkts un viņu radikalā ass tad būtu viņu kopīgā horda, kas runātu preti tam, ka visu sistemas riņķu radikalā ass ir taisne NA. Tā pat nonākam pie pretrunas pielaižot ka riņķi C_3 un C_3' viens otram punktā P pieskaras, jo tad (tad) viņiem par radikalo asi būtu kopīgā pieskare. Ar to esam noskaidrojuši, ka

> Koaksialu riņķu sistema, ko nosaka divi nesastopošies riņķi (t. i. riņķi, kam nav reālu krustoš. punktu) sastāv no bezgalīgi daudz tādiem riņķiem, kuri neviens ne ar vienu nesastopas un kuru visu centri atrodas uz vienas kopīgas taisnes (pam. riņķu centru līn.) – Caur katru plāknes punktu iet viens šīs sistemas riņķis.

Tā kā aplūkoto sistemu sastādošiem riņķiem nav reala krustošanās punktu, šo riņķu kopīgo radikalo asi var nosaukt par idealo radikalo asi.

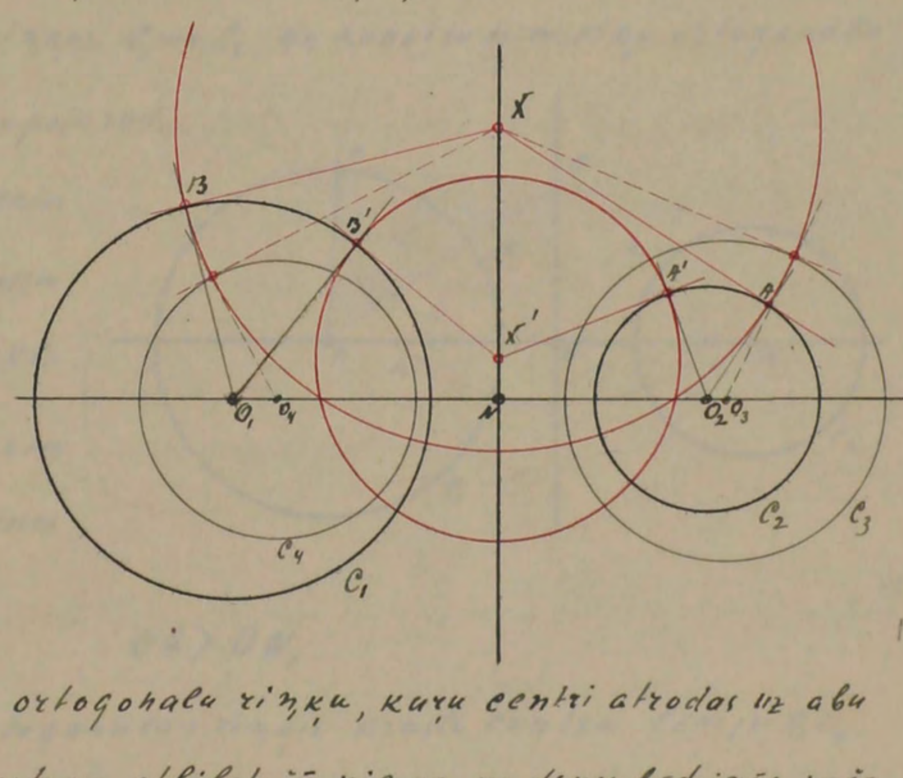
IV. Ja ir doti divi koncentriski riņķi – viņu radikalā ass ir bezgalīgi tāļa taisne. Varam pieņemt, ka ik diviem riņķiem, kas ir koncentriski ar abiem dotajiem par radikalo asi ir tā pati bezgalīgi tāļā taisne. Tamdēļ var teikt, ka

Koaksialu riņķu
sistemą, ko nosaka
divi koncentriski
riņķi, sastār no bez-
galīgi daudz kon-
centriskiem riņ- 151
ķiem, kuŗu ko-



pīgā radikalō ass ir bezgalīgi tāļa taisne.

Ja ir doti divi riņķi, vienmēr var konstr. riņķi, kas krusto viņus zem taisna leņķa. T.i. – vienmēr var konstruēt divu doto riņķu ortogonalo riņķi. Konstrukciju izdaram tā:- Atrodam abu doto riņķu radikalo asi. Tad uz šīs ass paņemam kādu punktu X un no viņa velkam vienam no dotiem riņķiem pieskari. Pēc tam ap punktu X kā ap centru velkam riņķi ar radiusu, vienādu ar pieskares XA garumu. Dabūtais riņķis ir doto riņķu C_1 un C_2 ortogonalais riņķis, jo pieskares kas vilktas pret šo riņķi un katra doto krustošanās punktos A un B ir savā starpā perpendikularas. Ņemot uz radikalās ass NX kādu citu punktu X' un izdarot to pašu konstr. dabūsim atkal riņķi, kas būs ortogonals dotajiem. Tā kā katram radikalās ass punktam atbilst viens divu doto riņ-
ķu ortogonalais riņķis – diviem do- 152



tiem riņķiem eksistē bezgalīgi daudz ortogonalu riņķu, kuŗu centri atrodas uz abu doto riņķu radikalās ass un katram centram atbilstošā riņķa radiuss līdzinās no šī centra pret vienu doto riņķi vilktās tangentes garumam.

Kā zinam, koaksialu riņķu sistema sastāv no riņķiem, pret kuriem no kāda radikalās ass punkta vilktas tangentes ir vienāda garuma. Tamdēļ, kaut kuŗu divu koaksialu riņķu sistemai piederošu riņķu ortogonalais riņķis iet caur visiem no šā ortog. riņķa centra pret sistemas riņķiem vilkto tangenšu pieskaršanās punktiem un tā tad viņš ir arī visu pārējo sistemas riņķu ortogonalais riņķis. Piemēram ap punktu X kā centru vilktais riņķu C_1 un C_2 ortogonalais riņķis ir arī atbilstošai koaks. riņķu sistemai piederošu riņķu C_3, C_4 u.t.t. ortogonalais riņķis. Tā pat arī ortog. riņķis, kas vilkts ap punktu X' u.t. Īsāki sakot:

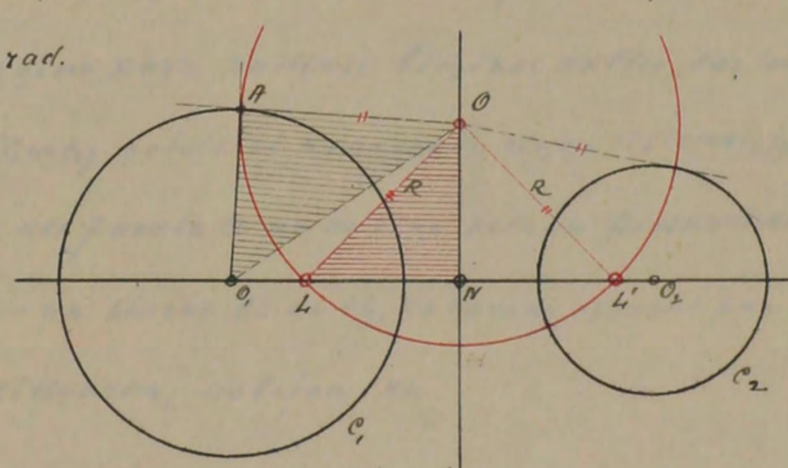
Katrs riņķis, kas ir ortogonals diviem koaksialu riņķu sistemas riņķiem, ir ortogonals visiem šās sistemas riņķiem.

Pierādīsim tagad, ka

Visi divu doto riņķu ortogonalie riņķi (k.t.p. - visi divu doto riņķu noteiktās koaksialu riņķu sistemas ortogonalie riņķi) krusto doto riņķu centru līniju divos tos pašos punktos.

— Šos punktus Poncelet nosaucis par robežpunktiem. Parasti šos punktus apzīmē ar burtiem L un L'.

Vispirms pierādīsim, ka divu doto riņķu ortogonalie riņķi visi krusto doto riņķu centru līniju.— Ņemsim divus riņķus C_1 un C_2 un konstruesim viņu ortogonalo riņķi. Ortogonalā riņķa centru ņemsim patr. rad. ass punktā O. No šā punkta riņķim C_1 vilktās pieskares pieskaršanās punktu apzīmēsim ar A. Tā tad ortogonalō riņķa radius R līdzināsies pieskarei OA.- Radikalās ass un centru līnijas O_1O_2 krustoš. punktu apzīmēsim ar N un mēģināsim pierādīt, ka



153

$$OA > ON,$$

jo ar to būs pierādīts, ka ņemtais ortogonalais riņķis krusto centru līniju O_1O_2.

— No taisnleņķa trijstūriem OAO_1 un OO_1N dabujam, ka

$$\overline{OA}^2 = \overline{OO_1}^2 - \overline{O_1A}^2 \; ; \quad \overline{ON}^2 = \overline{OO_1}^2 - \overline{O_1N}^2 \text{, bet}$$

$$\overline{OO_1}^2 - \overline{O_1A}^2 > \overline{OO_1}^2 - \overline{O_1N}^2, \qquad \text{jo } O_1A < O_1N. \quad \text{Tā tad}$$

$$\overline{OA}^2 > \overline{ON}^2 \quad \text{k.t.p.} \quad OA > ON.$$

Ortogonalā riņķa centru O ņēmam patvaļīgā doto riņķu radikalās ass punktā. Tamdēļ pierādīto varam attiecināt uz visiem pamatriņķu C_1 un C_2 ortog. riņķiem.

Tā tad ik viens ortogonalais riņķis krusto pamatriņķu centru līniju divos realos punktos L un L', kas ir simmetriski attiecībā uz pam. riņķu radikalo asi. [Pēdējo slēdzienu, t.i. ka $LN = L'N$, var nolasīt no zīmējuma]

Tālāk pierādīsim, ka šie krustošanās punkti L un L' ir pastāvīgi punkti. T.i. – ka neatkarīgi no paņemtā ortogonalā riņķa

$$LN = L'N = \text{const.}$$

– No taisnleņķa trijstūra OLN (zīm. skat. iepr. l.p.) dabujam, ka

$$\overline{LN}^2 = \overline{LO}^2 - \overline{ON}^2, \qquad \text{bet } LO = AO \text{ un tamdēļ}$$

$$\overline{LN}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{ON}^2$$

No taisnleņķa trijstūra OAO_1 dab., ka $\overline{AO}^2 = \overline{O_1O}^2 - \overline{O_1A}^2$. u.t.t.

$$\overline{LN}^2 = \overline{O_1O}^2 - \overline{O_1A}^2 - \overline{ON}^2 = \overline{O_1N}^2 - \overline{O_1A}^2 = \text{const.} \quad \text{k.t.p.}$$

$$LN = \text{const.} \qquad (\text{jo } O_1N = \text{const}; O_1A = \text{const, kā riņķa } C_1 \text{ radiuss}).$$

Ar to ir pierādīts, ka visi divu pamatriņķu ortogonalie riņķi krusto šo pamatriņķu centru līniju divos tos pašos pastāvīgos punktos t.i. – robežpunktos.

Uzskatot robežpunktus L un L' par riņķiem, kuŗu radiuss līdzinās nullei, var teikt ka arī abi šie riņķi pieder pamatriņķu (C_1 un C_2) noteiktai koaksialu riņķu sistemai. Jo ja ņemam kādu atbilst. sistemas radikalās ass punktu O un no viņa velkam pieskari kādam sistemas riņķim – piemeram riņķim C_1 – un starus OL un OL', ko varam uzskatīt par no punkta O pret riņķiem L un L' vilktam pieskarēm, dabujam ka

$$OA = OL = OL',$$

un tā tad arī riņķiem L un L' ir tā pati radikālā ass, kas pārējiem atbilst. koaks. riņķu sist. riņķiem. T.i. – arī riņķi L un L' pieder šai koaks. riņķu sistemai. Pamatojoties uz to punktus L un L' var nosaukt arī par atbilstošās koaksialu riņķu sistemas robežriņķiem.

Robežpunktiem L un L' ir daudz svarīgu īpašību un viņiem liela nozīme dažādu nopietnu geometrijas jautājumu noskaidrošanā

No pārrunātā ir skaidrs, ka

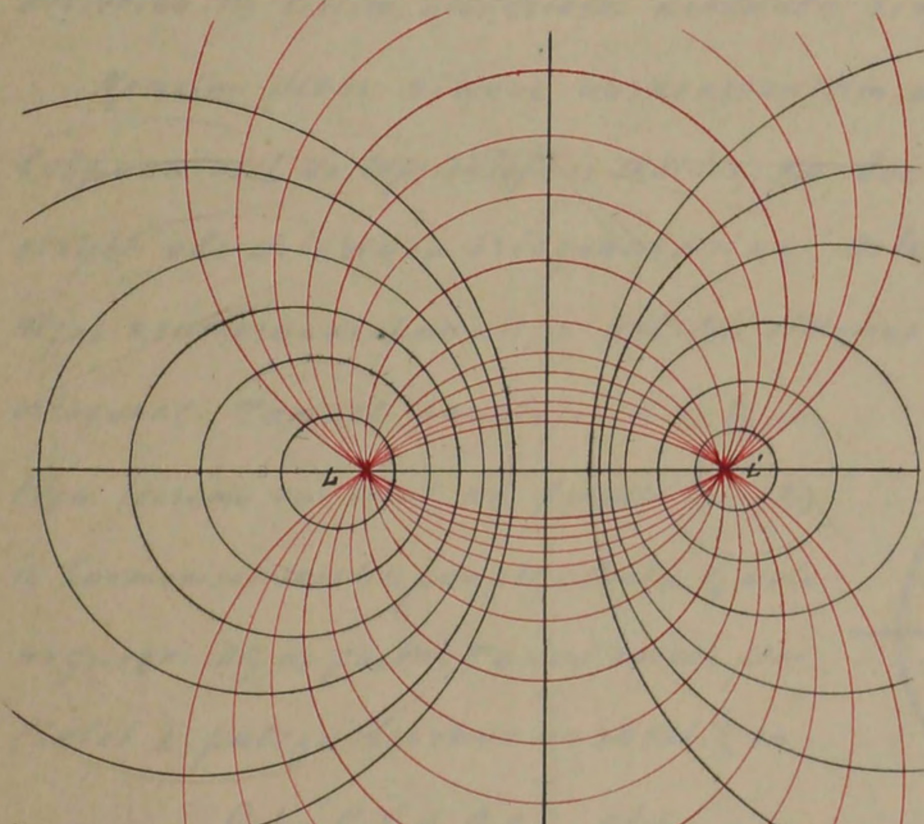
Katras koaksialu riņķu sistemas ortogonalie riņķi paši sastāda vienu koaksialu riņķu sistemu, kuras riņķiem par radikalo asi ir pirmās sistemas centrulīnija un par centrulīniju pirmās sistemas radikalā ass.

– Divas šādā kārtā saistītas koaksialu riņķu sistemas sauc par saistītām koaksialu riņķu sistemām.

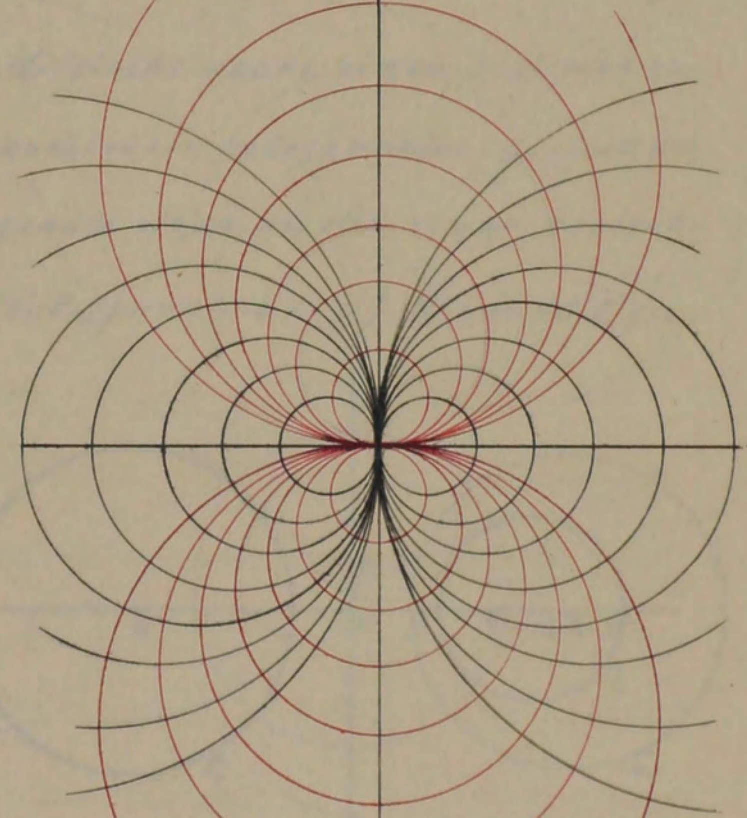
Vispārīgi var teikt, ka

Ja pirmai no saistītām koaksialu riņķu sistemām ir reala radikalā ass, tad otrai ir ideala radikalā ass un otrādi. (zīm. 1.)

– Gadījumā, kad vienu sistemu sastāda riņķi, kas vienā un tani pašā punktā skaras vienai un tai pašai taisnei – abas saistītās koaksialu riņķu sistemas ir identiskas. T.i. – pagriežot vienu sistemu ap skaršanās punktu par 90°, viņa sakrīt ar otru sist.



Zīm. 1.



Zīm. 2.

154.

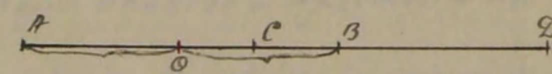
Pierādīsim tagad šādu teoremu:

Robežpunkti L un L' ir inversi punkti attiecībā uz ik katru atbilstošās koaksialu riņķu sistemas riņķi.

Pierādījumā izlietosim divas palīga teoremas:

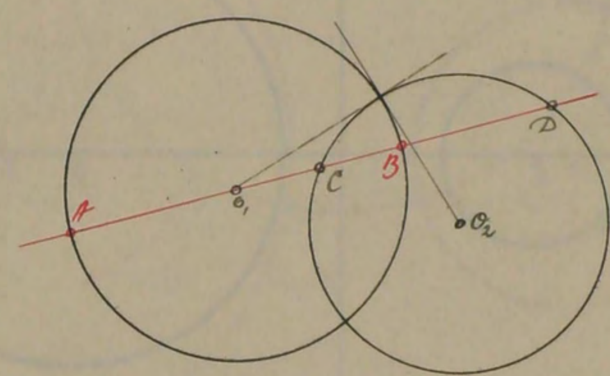
I. Ja uz taisnes ir doti četri harmoniski saistīti punkti A,B,C,D, tad pārdalot nogriezni starp vienu saistītu punktu pāri - piem. pāri AB - uz pusi un dalījuma punktu apzīmējot ar O, rodas nogriežņi starp kuriem pastāv sakarība

$$OC\cdot OD = \overline{OA}^2 = \overline{OB}^2$$



II. Ja ir doti divi ortogonali riņķi, tad taisne, kas vilkta caur kaut kuŗa dotā riņķa centru, krusto abus riņķus četros punktos A,B,C,D, kas ir harmoniski saistīti punkti. T.i.

$$\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}=-1$$



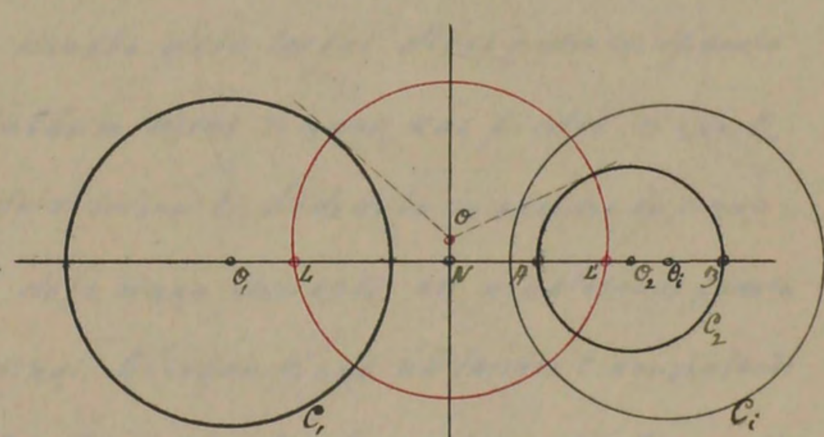
155

Abas tikko minētās palīga teoremas pierādīt pašiem. — Pāriesim tagad pie pierādījuma, ka punkti L un L' ir inversi punkti attiecībā uz visiem atbilstošās koaksialu riņķu sistemas riņķiem.

Ņemsim divus riņķus un konstruēsim atbilstošās koaks. riņķu sistemas robežpunktus. [No iepriekšējā ir skaidrs, ka, lai konstruētu robežpunktus, pietiek konstruēt abu doto riņķu ortogonalo riņķi. Ortogonalā riņķa un doto riņķu centrulīnijas krustošanās punkti ir atbilst. sistemas robežpunkti L un L']. Riņķi (O, O_2) ir ortogonali. Tamdēļ pamatojoties uz II. palīga teoremu var teikt, ka punkti L, L' un A,B ir harmoniski saistīti punkti. Centrs O_2 dala nogriezni AB uz pusēm. Tā tad varam pielietot I palīga teoremu un rakstīt, ka

$$O_2L\cdot O_2L' = \overline{O_2A}^2 \quad \text{k.t.p.}$$

$$O_2L\cdot O_2L' = R_2^2.$$



156

Ņemot kādu citu koaksialu riņķu sistemas riņķi (O_i), dabūsim to pašu sakarību

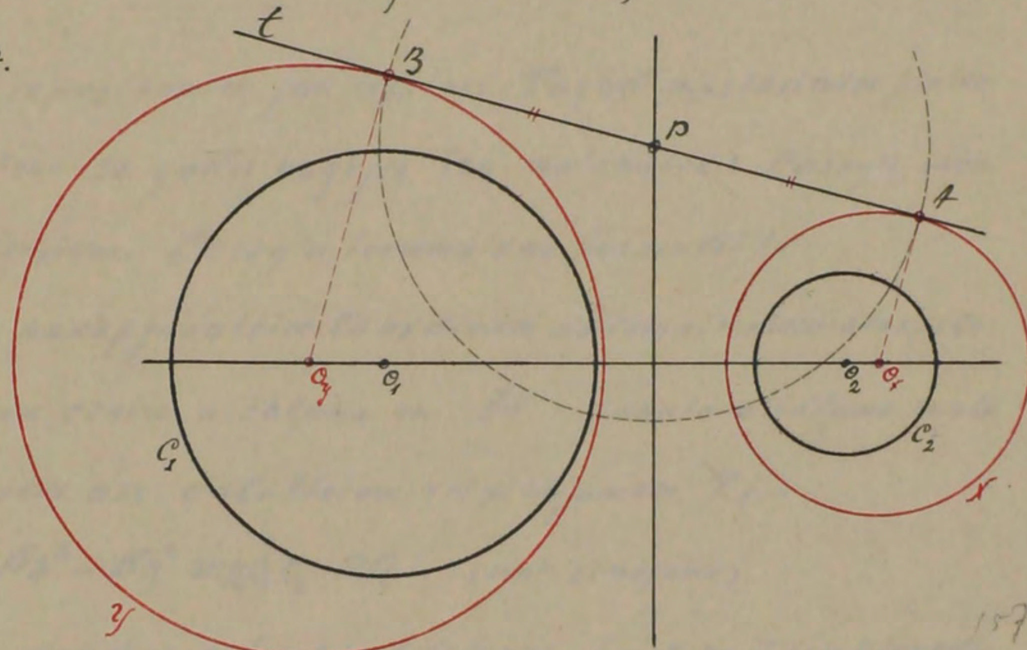
$$O_iL\cdot O_iL' = R_i^2. \qquad (i=1,2,3\ldots\ldots\infty)$$

Tā tad punkti L un L' ir inversi attiec. uz ik katru atbilst. koaks. riņķu sistemas riņķi.

Noskaidrosim — Cik vienai un tai pašai koaksialu riņķu sistemai piederoši riņķi var pieskarties vienai dotai taisnei? Tanī nolūkā atrisināsim šādu uzdevumu:

Doti divi riņķi C_1, C_2 un taisne t. Konstruēt riņķi, kas pieder riņķu C_1 un C_2 noteiktai koaksialu riņķu sistemai un pieskaras taisnei t.

Pieņemsim ka tāds riņķis X ir konstruēts un izdarīsim analizi. — Apzīmēsim dotās taisnes un atbilstošās radikalās ass krustošanās punktu ar P, - dotās taisnes un riņķa X saskaršanās punktu ar A. Ap punktu P kā ap centru velksim riņķu C_1, C_2 ortogonalo riņķi, kurš, kā zinam, ir arī riņķa X ortogonalais riņķis. Tamdēļ šis ortogonalais riņķis krustos taisni t viņas un riņķa X saskaršanās punktā A. [Tādā kārtā viegli varam atrast dotās taisnes un atbilst. koaks. riņķu sistemas riņķa skaršanās punktu A.] Bez tam ir zinams, ka visu atbilstošās koaksialu riņķu sistemas riņķu centri atrodas uz pamatriņķu centru līnijas $O_1 O_2$. Tā tad arī riņķa X centrs atrodas uz taisnes O_1O_2. Zinot punktu, kurā riņķis skaras taisnei, un taisni, uz kuras atrodas šā riņķa centrs, varam konstruēt riņķi. Tā kā ortogonalais riņķis krusto doto taisni divos punktos — punktā A un punktā B — izpildot konstrukciju dabūsim divus riņķus, kas pieder riņķu C_1, C_2 noteiktai koaks. riņķu sistemai un skaras dotai taisnei t. Līdz ar to ir skaidrs šo riņķu konstruēšanas paņēmiens: — Ap dotās taisnes un doto riņķu radikalās ass krustošanās punktu P kā ap centru velkam doto riņķu ortogonalo riņķi. Ortogon. riņķa un taisnes t krustošanās punktos uzstādam pret taisni t perpendikulus. Šie perpendikuli krusto centru līniju divos punktos; punktā O_x un O_y, kas ir meklejamo riņķu centri. Tad, velkot ap punktu O_x kā centru ar radiusu O_xA riņķi, dabujam vienu meklēto riņķi; un velkot riņķi ap punktu O_y kā centru ar rad. O_yB, dabujam otru riņķi, kas padodas uzliktiem noteikumiem. Tā kā ortogonalais riņķis var krustot doto taisni tikai divos punktos, ir iespējami tikai divi riņķi, kas pieder minētai koaks. riņķu sistemai un pieskaras dotai taisnei. Viens no šiem



riņķiem atrodas pa labi un otrs pa kreisi no sistemas riņķu radikalās ass. Tas pats būs spēkā attiecībā uz kādu citu dotu taisni un koaksialu riņķu sistemu. Tamdēļ, var taisīt vispārīgu slēdzienu:

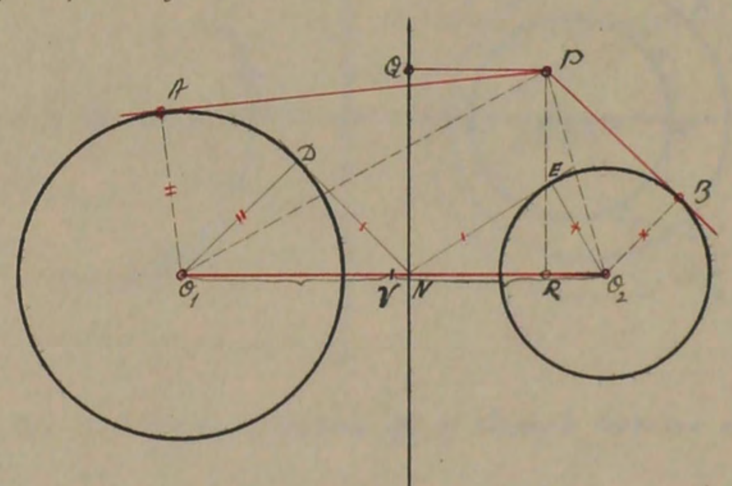
Katrai taisnei pieskaras tikai divi vienai un tai pašai koaksialu riņķu sistemai piederoši riņķi. Pie kam viens no šiem riņķiem atrodas pa labi un otrs pa kreisi no atbilstošas koaksialu riņķu sistemas radikalās ass.

Ar punkta pakāpes jēdzienu iepazināmies jau iepriekš. Tagad apstāsimies pie teoremas, kuŗu pagājušā gadu simteņa 50. gados uzgājis īru matematiķis Casey's, un kuŗa saistas ar punktu pakāpes jēdzienu. Casey'a teoremu var formulēt tā:

Katra punkta pakāpju-attiecībā uz diviem dotiem riņķiem-starpība līdzinās doto riņķu centru attāluma un šā punkta attāluma no abu doto riņķu radikalās ass dubultotam reizinājumam. T.i.-

$$\overline{PA}^2-\overline{PB}^2=2O_1O_2\cdot PQ \qquad \text{(skat. zīmējumu).}$$

Šī teorema ir ļoti svarīga daudzos citos pierādījumos. Lai viņu pašu pierādītu, ņemsim divus riņķus ar centriem punktos O_1 un O_2, un kādu punktu P. No punkta P vilksim abiem ņemtiem riņķiem pieskares PA un PB. Punkta P projekciju uz ņemto riņķu radikalo asi apzīmēsim ar Q, un šā punkta projekciju uz centru līniju O_1O_2 - ar R.



Savienojot centru O_1 ar punktiem A un P, un centru O_2 ar punktiem B un P dabujam taisnleņķa trijstuŗus PAO_1 un PO_2B. Aplūkojot šos trijstūŗus redzam, ka pareiza ir sakarība

$$\overline{PA}^2-\overline{PB}^2=\overline{PO_1}^2-\overline{AO_1}^2-\overline{PO_2}^2+\overline{BO_2}^2.$$

158

Bet kā redzams no taisnleņķa trijstūriem PO_1R un PRO_2 $\quad \overline{PO_1}^2=\overline{O_1R}^2+\overline{PR}^2;\ \overline{PO_2}^2=\overline{O_2R}^2+\overline{PR}^2.$ Tamdēļ ka

$$\overline{PA}^2-\overline{PB}^2=\overline{O_1R}^2+\overline{PR}^2-\overline{O_2R}^2-\overline{PR}^2-\overline{AO_1}^2+\overline{BO_2}^2=\overline{O_1R}^2-\overline{O_2R}^2-(\overline{AO_1}^2-\overline{BO_2}^2)=$$
$$=(O_1R+O_2R)(O_1R-O_2R)-(\overline{AO_1}^2-\overline{BO_2}^2).$$

Velkot no ņemto riņķu radikalās ass un viņu centru līnijas krustošanās punkta N šiem riņķiem pieskares ND un NE, un savienojot punktus D ar O_1 un E ar O_2 dabujam atkal taisnlenķa trijstūŗus DO_1N un ENO_2, kas dod iespēju rakstīt sakarību

$$\overline{AO_1}^2 - \overline{BO_2}^2 = \overline{O_1N}^2 - \overline{ND}^2 - \overline{O_2N}^2 + \overline{NE}^2 = \overline{O_1N}^2 - \overline{O_2N}^2 \quad (\text{jo } ND = NE). \text{ Tā tad}$$

$$\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = (O_1R + RO_2)(O_1R - RO_2) - (O_1N + NO_2)(O_1N - NO_2) = O_1O_2[(O_1R - RO_2) - (O_1N - NO_2)]$$

Ja centru līnijas O_1O_2 vidus punktu apzīmējam ar V, tad varam rakstīt, ka

$$O_1R - RO_2 = 2VR,$$

$$O_1N - NO_2 = 2VN. \quad \text{Tas dod, ka}$$

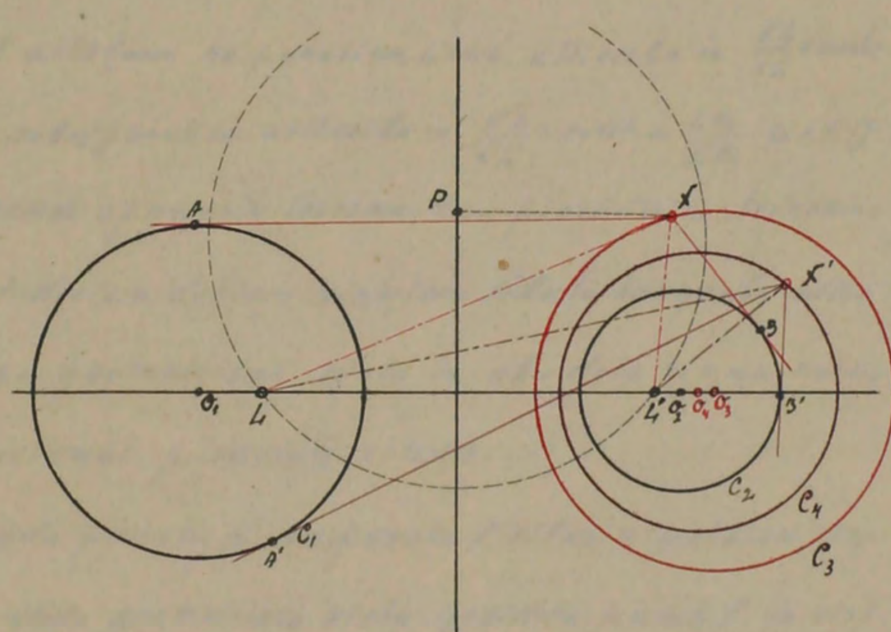
$$O_1R - RO_2 - (O_1N - NO_2) = 2(VR - VN) = 2\,NR = 2PQ \quad (\text{jo } NR = PQ).$$

Un tā beidzot dabujam sakarību

$$\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 2\,O_1O_2 \cdot PQ,$$

ar ko Casey'a teorema ir pierādīta.

Ņemsim kaut kuŗus trīs vienai un tai pašai koaksialu riņķu sistemai piederošus riņķus C_1, C_2 un C_3. Riņķus C_1 un C_2 uzskatīsim kā pamatriņķus un riņķi C_3 kā palīga riņķi. – Pierādīsim, ka no ik viena riņķa C_3 punkta (t. i. – no visiem riņķa C_3 punktiem) pret pamatriņķiem C_1 un C_2 vilktu tangenšu attiecība līdzinās vienam un tam pašam pastāvīgam lielumam.



Ņemsim kādu riņķa C_3 punktu, piem. punktu X, un vilksim no viņa riņķiem C_1 un C_2 tangentes XA un XB. Bez tam iedomāsimies, kā no punkta X var vilkt tangenti arī riņķim C_3, pie kam šīs tangentes gaŗums līdzinās nullei. Punkta X projekciju uz minēto riņķu radikalo asi apzīmēsim ar P. Tad attiecinot uz riņķiem C_1, C_3 un pēc tam uz riņķiem C_2, C_3 Casey'a teoremu dab.

$$\overline{XA}^2 - 0^2 = 2\,O_1O_3 \cdot XP,$$

$$\overline{XB}^2 - 0^2 = 2\,O_2O_3 \cdot XP.$$

Abas pēdējās sakarības izdalot, dabujam ka

$$\frac{\overline{XA}^2}{\overline{XB}^2} = \frac{O_1O_3}{O_2O_3} = \text{const.} \quad (\text{jo attiec. uz riņķiem } C_1, C_2, C_3 \text{ nogr. } O_1O_3 \text{ un } O_2O_3$$

ir pastāvīgi lielumi). T. i. –
$$\frac{XA}{XB} = \text{const.} (= k)$$

Punkts X bij patvaļīgi izvēlēts riņķa C_3 punkts. Tamdēļ pierādīto varam attiecināt uz visiem riņķa C_3 punktiem. Ņemot kādu citu tai pašai koaksialu riņķu sistemai piederošu riņķi, piem. riņķi C_4, uz viņa kādu punktu X' un velkot no šā punkta riņķiem C_1, C_2 tangentes $X'A'$ un $X'B'$ tāpat dabujam, ka

$$\frac{X'A'}{X'B'} = const. (= k')$$

Pierādīto varam izteikt šādā teoremā:

No ikkatra dotajai koaksialu riņķu sistemai piederoša riņķa punktiem pret kaut kuriem citiem diviem šai pašai koaksialu riņķu sistemai piederošiem riņķiem vilktu tangenšu attiecība ir pastāvīgs lielums.

Uzskatot robežpunktus L un L' par atbilstošai koaksialu riņķu sistemai piederošiem riņķiem – pamatojoties uz pierādīto varam teikt, ka

Ik katra dotajai koaksialu riņķu sistemai piederoša riņķa punktu attāļumu – no šai sistemai atbilstošiem robežpunktiem – attiecība ir pastāvīgs lielums.

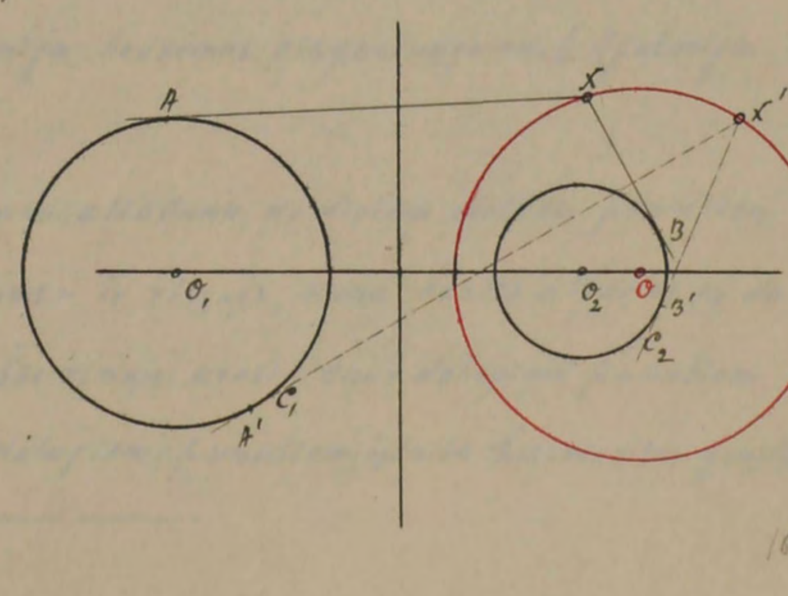
[T. i. – piemēram – visu riņķa C_3 punktu X attāļumu no punktiem L un L' attiecība ir $\frac{XL}{XL'} = const. = \frac{LO_3}{L'O_3}$; visu riņķa C_4 punktu attāļumu no robežpunktiem attiecība ir $\frac{X'L}{X'L'} = const. = \frac{LO_4}{L'O_4}$ u.t.t.]

Pierādīsim tagad iepriekšējās teoremas apgriezto teoremu. T.i. – pierādīsim teoremu:

Punktu – no kuriem pret diviem dotiem riņķiem vilktu tangenšu attiecība ir pastāvīgs lielums – geometriskā vieta ir abu doto riņķu noteiktai koaksialu riņķu sistemai piederošs riņķis.

– Ņemsim divus riņķus C_1, C_2 un kādu punktu X. No punkta X vilksim pret šiem riņķiem tangentes XA, XB un noskaidrosim, kādu geometrisko vietu izveidotu punkts X, ja viņš pārvietotos tā, ka visu laiku pastāvētu sak.

$$\frac{XA}{XB} = const = c$$



– No senāk apskatītā zinam, ka caur katru plāknes punktu, tā tad arī caur punktu X, var iet tikai viens pamatriņķu (C_1, C_2) noteiktai koaks. riņķu sistemai piederošs riņķis. Viņa centrs O atrodas uz doto riņķu centru līnijas O_1O_2. Tā kā punkts X atrodas uz tai pašai koaks. riņķu sistemai piederoša riņķa, kurai pieder riņķi C_1 un C_2, pamatojoties uz doto noteikumu un iepriekš pierādīto (teoremu) varam rakstīt, ka

$$\frac{\overline{XA}^2}{\overline{XB}^2} = \frac{O_1O}{O_2O} = C^2.$$

Ja punkts X būs nonācis citā stāvoklī, piem. stāvoklī X', arī caur punktu X' ies viens pats sistemai (C_1, C_2) piederošs riņķis. Ja šā riņķa centru (kam arī jāatrodas uz taisnes O_1O_2) apzīmējam ar O', tad varam atkal rakstīt

$$\frac{\overline{X'A'}^2}{\overline{X'B'}^2} = \frac{O_1O'}{O_2O'} = C^2.$$

No abām pēdējām sakarībām dabujam, ka

$$\frac{O_1O}{O_2O} = \frac{O_1O'}{O_2O'}, \quad \text{kas nozīmē, ka}$$

$O \equiv O'$ (jo punkti O_1, O_2, O, O' visi atrodas uz vienas taisnes un centri $O_1 O_2$ savas vietas nevar mainīt). Bet(no) no tā savukārt seko, ka riņķis, uz kuŗa atrodas punkts X ir identisks ar riņķi, uz kuŗa atrodas punkts X', jo šiem riņķiem ir kopīgs centrs un viņi abi pieder vienai un tai pašai koaksiālu riņķu sistemai.- Atlo pieliek, lai taisītu slēdzienu, ka ģeometriskā vieta, ko veido punkts X pārvietojoties saskaņā ar iepr. l. p. minēto noteikumu, ir riņķis, kas pieder doto riņķu noteiktai koaks. riņķu sistemai.

Ja par dotiem riņķiem C_1, C_2 pieņemam robežpunktus L un L', tad no tikko pierādītās teoremas kā atsevišķu gadījumu dabujam teoremu:

> Punktu ģeometriskā vieta – kuŗu attālumu no koaks. riņķu sistemas robežpunktiem attiecība ir pastāvīgs lielums – ir atbilstošajai koaksiālu riņķu sistemai piederošs riņķis.

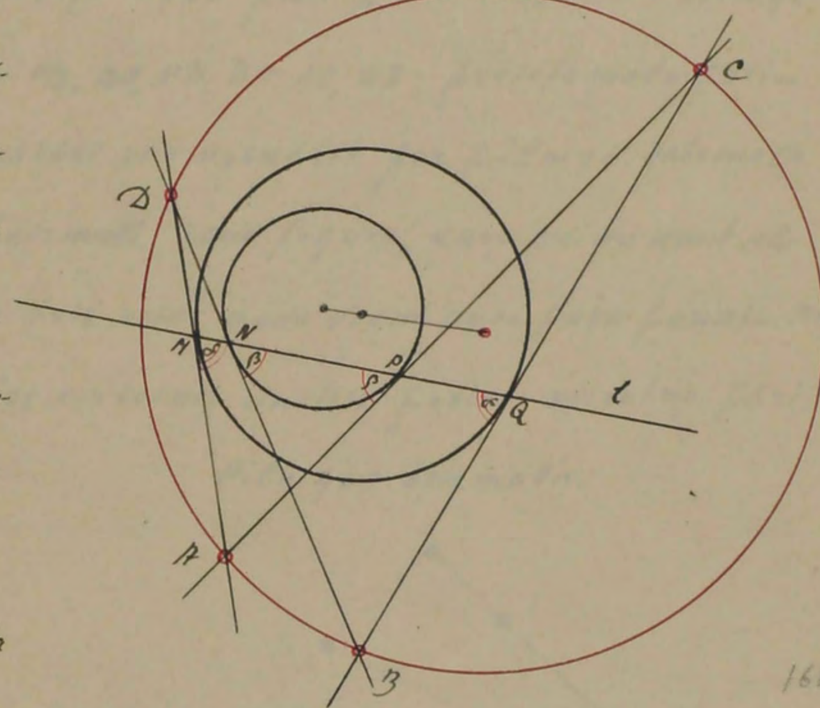
Šo teoremu varam uzskatīt par Apolonija teoremas vispārinājumu. [Apolonija teoremu var formulēt tā:

> Punktu ģeometriskā vieta – kuŗu attālumu no diviem dotiem punktiem attiecība ir pastāvīgs lielums – ir riņķis, kuŗa centrs atrodas uz doto punktu noteiktās taisnes. Šis riņķis krusto caur dotajiem punktiem ejošu taisni punktos, kuri ar dotajiem (punktiem) izlaisa harmonisku grupu]

Pierādīsim teoremu:

Ja ir doti divi riņķi un taisne, kas krusto šos riņķus, un visos četros taisnes un riņķu krustošanās punktos atbilstošam riņķim vilktas tangentes, tad ir divu tangenšu – kuŗas viena skaŗas lielākam un otra mazākam dotam riņķim – krustošanās punkti visi četri atrodas uz viena riņķa, kas pieder doto riņķu noteiktai koaksiālu riņķu sistemai.

Ņemsim kaut kādus divus riņķus – piemēram tādus, kuri viens atrodas otra iekšpusē – un taisni, kas krusto šos riņķus. Taisnes un riņķu krustošanās punktus apzīmēsim ar M, N, P, Q. Punktos M un Q vilksim lielākajam un punktos N un P mazākajam riņķim tangentes. Apzīmēsim ir divu tangenšu – kuŗas viena skaŗas lielākajam un otra mazākajam riņķim – krustošanās punktus ar A, B, C un D.



Ja dotās taisnes t un tangenšu AC un BC veidotos leņķus apzīmējam ar β un α, tad redzam, ka pie visiem dotās taisnes un tangenšu krustošanās punktiem veidojas tikai tādi leņķi, kas līdzinas vai nu α un β, vai arī $180^\circ-\alpha$ un $180^\circ-\beta$. Tamdēļ attiecinot uz dabūtiem trijstūriem sinus likumu, varam rakstīt, ka

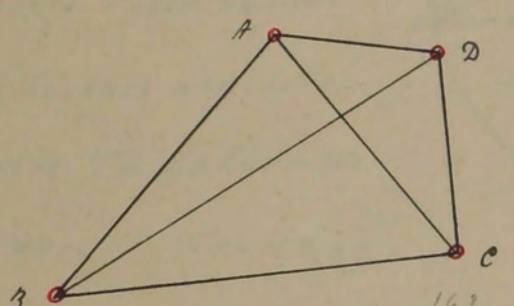
$$\frac{AP}{AM}=\frac{BN}{BQ}=\frac{CP}{CQ}=\frac{DN}{DM}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\text{const.}$$

Tā kā no punktiem A, B, C, D dotiem riņķiem vilktu tangenšu attiecība ir pastāvīgs lielums (jo attiecībā uz abiem dotiem riņķiem un taisni t leņķi α un β ir nemainīgi), pamatojoties uz iepriekš pierādīto (apgriezto) teoremu varam taisīt slēdzienu, ka tangenšu krustošanās punkti A, B, C, D visi atrodas uz viena riņķa, kas pieder abu doto riņķu noteiktai koaksiālu riņķu sistemai.

Dažas riņķī ierakstīta četrstūra īpašības.

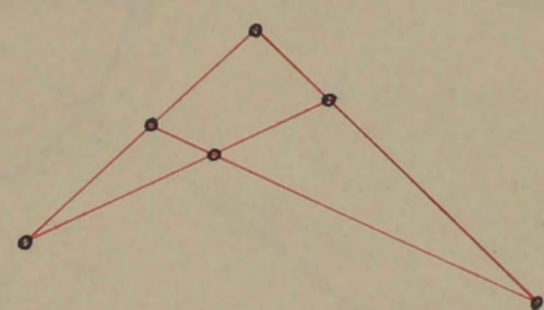
Vispirms noskaidrosim vienu jaunu jēdzienu, kas būs jāizlieto turpmākos pierādījumos. Tas ir pilnīgā četrstūra jēdziens. — Par pilnīgo četrstūri sauc figuru, kas rodas savienojot ar taisnēm - cik tas ir iespējams - kaut kādus četrus punktus, no kuriem trīs neatrodas uz vienas un tās pašas taisnes. Pilnīgajam četrstūrim ir četras virsotnes, sešas malas un trīs pretējo malu pāri. Zemāk uzzīmētā pilnīgā četrstūra virsotnes ir A, B, C, D; malas – AB, BC, CD, DA, AC, BD; pretējo malu pāri – (AB, CD), (BC, AD) un (AC, BD). Pilnīgo četrstūri var uzskatīt par pilnīgā četrmaļa duālo figuru. Kā zinam, par pilnīgo četrmali sauc figuru, kuŗu veido kaut kādas četras krustojošās taisnes, no kuŗām trīs neiet caur vienu un to pašu punktu. Pilnīgajam četrmalim ir četras malas, sešas virsotnes un trīs pretējo virsotņu pāri.

Pilnīgais četrstūris.



162

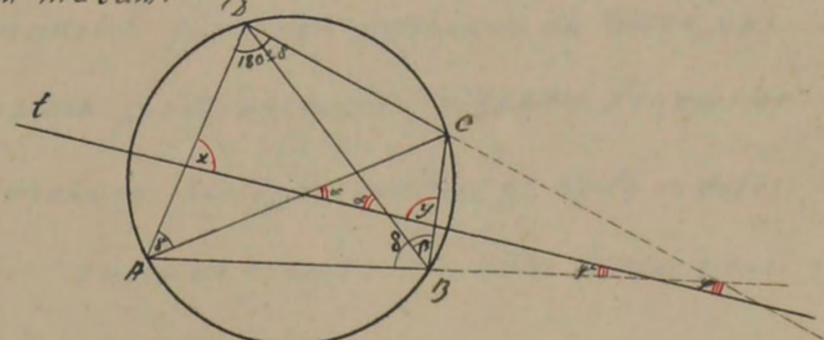
Pilnīgais četrmalis.



Ņemsim tagad riņķī un viņā ierakstīto pilnīgo četrstūri. Tad šķelsim šo četrstūri ar tādu taisni, kas ar vienu pilnīgā četrstūra pretējo malu pāri veido vienādus leņķus. – Pierādīsim, ka šī taisne veido arī ar ik divām pārējām pretējām malām vienādus leņķus. T.i. - pierādīsim teoremu:

Taisne, kas veido vienādus leņķus ar divām riņķī ierakstītā pilnīgā četrstūra pretējām malām, veido vienādus leņķus arī ar ik divām pārējām šā četrstūra pretējām malām.

Pieņemsim ka ir dota taisne t, kuŗa ar riņķī ierakstītā pilnīgā četrstūra pretējo malu pāri AC, DB veido leņķi α. No zīmējuma redzam, ka arī leņķi x un y, ko veido taisne



163

t ar pretējām pilnīgā četrstūra malām BC, AD, - ir vienādi, jo

$$x = \alpha + \delta; \quad y = \alpha + \beta; \quad \text{bet } \delta = \beta \text{ u.t.t.}$$

$$x = y.$$

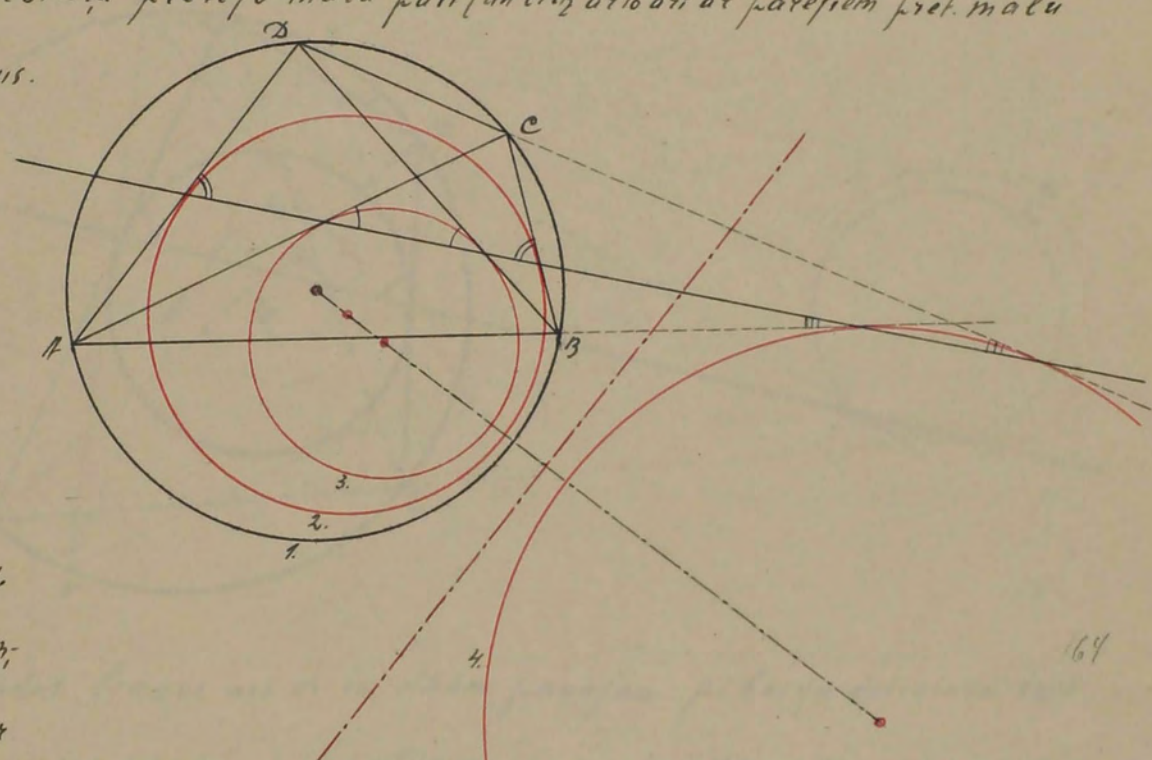
Apskatot leņķus φ un ψ, ko veido taisne t ar pretējo malu pāri AB, CD, dab. ka

$$\psi = \delta - y; \quad \varphi = 180^\circ - (x + 180^\circ - \delta) = -(x - \delta); \quad \text{bet } x = y. \text{ Tamdēļ}$$

$$\psi = -\varphi$$

Tā tad arī leņķi, ko veido taisne t ar trešo riņķī ierakstītā pilnīgā četrstūra pretējo malu pāri, ir vienādi, tikai viņu virzieni ir pretējie.

Ņemsim tagad riņķi un viņā ierakstītu pilnīgo četrstūri un šķelsim viņus ar taisni, kas ar vienu pilnīgā četrstūra pretējo malu pāri (un līdz ar to arī ar pārējiem pret. malu pāriem) veido vienādus leņķus.

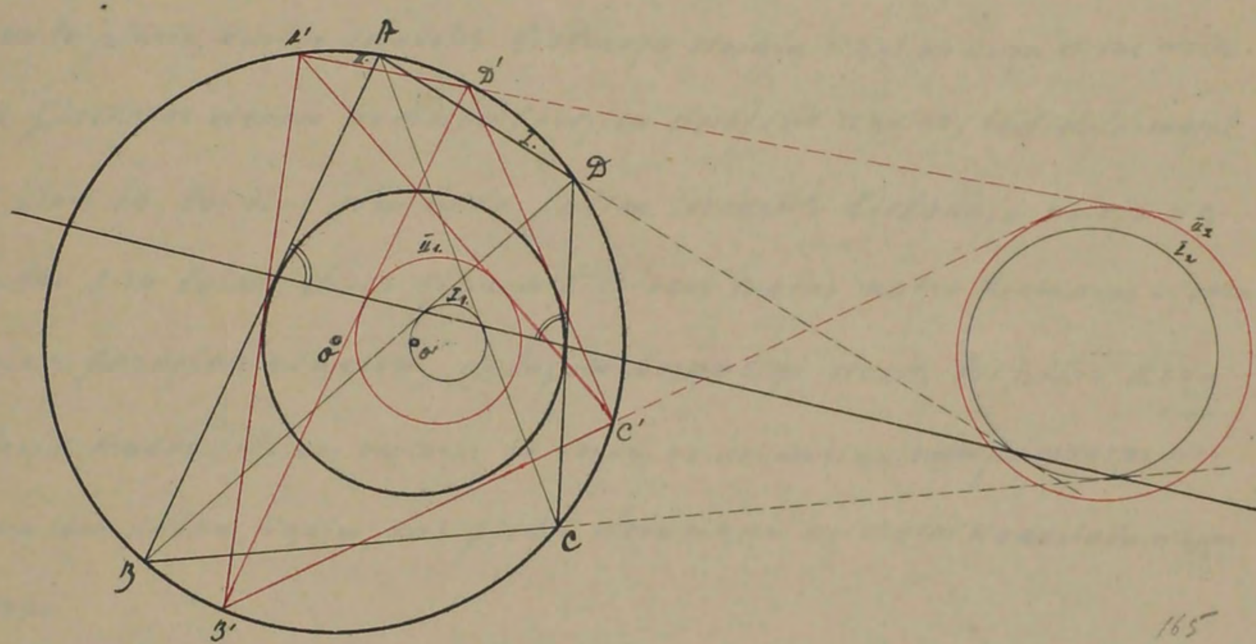


64

Tad konstruēsim riņķus, kas skaņās ik divām pretējām pilnīgā četrstūra malām šo malu un ņemtās taisnes krustošanās punktos. Tā dabūsim trīs jaunus riņķus t.i. riņķus 2, 3, 4. - Pierādīsim ka visi trīs šie riņķi un arī dotais riņķis (1) pieder vienai un tai pašai koaksiālu riņķu sistemai. - Pamatojoties uz 155. l. p. pierādīto teoremu varam apgalvot, ka riņķi 3, 2 un 1 pieder vienai un tai pašai koaksiālu riņķu sistemai. Pamatojoties uz to pašu varam apgalvot, ka arī riņķi 3, 4 un 1 pieder vienai u. t. p. koaks. sistem. Tā tad riņķi 1, 2, 3, 4 visi pieder vienai un tai pašai koaks. riņķu sistemai (jo divi riņķi - piem. riņķi 3 un 1 - pilnīgi nosaka koaks. riņķu sistemu). Tā esam pierādījuši teoremu:

Ja ir dots riņķis, viņā ierakstīts pilnīgais četrstūris un taisne, kas veido ar dotā pilnīgā četrstūra pretējām malām vienādus leņķus - tad riņķi, kas pieskaŗas šā četrstūra pretējām malām šo malu un dotās taisnes krustošanās punktos, un dotais riņķis - visi četri pieder vienai un tai pašai koaksiālu riņķu sistemai.

Pieņemsim ka ir doti divi riņķi - viens otra iekšpusē - un pilnīgais četrstūris $ABCD$, kas ir lielākajā riņķī (O) ierakstīts un kuŗa viens pretējo malu pāris pieskaŗas mazākajam riņķim (O'). Tad iedomāsimies, ka abi dotie riņķi (O, O') paliek nemainīgi, bet četrstūris var deformēties tā, ka viņš visu laiku paliek ierakstīts riņķī (O) un viņa atbilstošo pretējo malu pāris visu laiku pieskaŗas riņķim (O'). Tā deformējot doto pilnīgo četrstūri varam dabūt bezgalīgi daudz pilnīgo četrstūŗu, kuri visi ir ierakstīti riņķī (O) un kuŗu atbilstošo pretējo malu pāris skaŗas riņķim (O'). — Pierādīsim ka arī pārējie visu šo četrstūŗu pretējo malu pāri ik viens pieskaŗas riņķim (visi pāri kopīgi ņemot piesk. bezg. daudz riņķ.) kas pieder doto riņķu (O, O') noteiktai koaksiālu riņķu sistemai. — Taisne, kas vilkta caur mazāka dotā riņķa un pilnīgā četrstūŗa pretējo malu AB un CD pieskaršanās punktiem, veido ar šām malām vienādus leņķus. Tamdēļ pamatojoties uz 156. l. p. pierādīto teoremu



165

var teikt, ka viņa veido vienādus leņķus arī ar ik divām pārējām pilnīgā četrstūŗa $ABCD$ pretējām malām. Tas savukārt dod iespēju taisīt slēdzienu (pamatojoties uz iepr. l. p. pierādīto teoremu), ka arī ik viens no pārējiem pilnīgā četrstūŗa $ABCD$ pretējo malu pāriem pieskaŗas riņķim, kas pieder riņķu (O, O') noteiktai koaksiālu riņķu sistemai. T. i. pretējo malu pāris AC, BD pieskaŗas riņķim I_1 un pret. malu pāris AD, BC piesk. riņķim I_2, kas pieder tai pašai koaks. riņķu sistemai kā riņķi (O, O'). Ja četrstūris $ABCD$ no stāvokļa I. tiktu novests stāvoklī II., pamatojoties uz to pašu atkal var apgalvot, ka četrst. $A'B'C'D'$ pretējo malu pāri $A'C'$, $B'D'$ un $A'D'$, $B'C'$ pieskaŗas minētai koaksiālu riņķu sistemai piederošiem riņķiem II_1 un II_2. Tā tad vispārīgi:

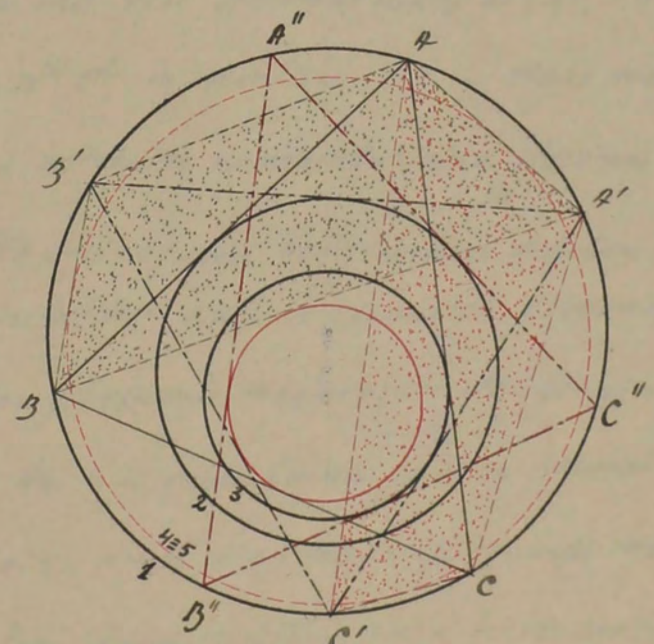
Ja ir doti divi riņķi viens otra iekšpusē, tad eksistē bezgalīgi daudz pilnīgo četrstūŗu, kuri ir ierakstīti lielākajā dotajā riņķī un kuŗu viens pretējo malu pāris pieskaŗas mazākajam dotajam riņķim. Ik viens šo 4-st. pārējo pretējo malu pāris pieskaŗas riņķim (katrs pāris savam riņķim) kas pieder abu doto riņķu noteiktai koaksiālu riņķu sistemai.

Poncelet teorema par poligoniem kas ierakstīti vienā riņķī un aprakstīti otram riņķim.

Jau iepriekš iepazināmies ar Poncelet teoremu, kuŗa apgalvoja, ka – ja ir doti divi riņķi, kas nostādīti tādā stāvoklī, ka eksistē viens trijstūris, kas ir lielākajā riņķī ierakstīts un mazākajam aprakstīts, tad attiecībā uz abiem dotiem riņķiem eksistē bezgalīgi daudz tādu trijstūŗu. Poncelet šo savu teoremu ir tā papildinājis, ka viņa ieiet kā atsevišķs gadījums teoremā, kuŗa skan:

> Ja ir doti trīs riņķi – kas pieder vienai un tai pašai koaksiālu riņķu sistemai – un trijstūris, kuŗš ir ierakstīts lielākajā dotajā riņķī un kuŗa divas malas katra pieskaras vienam no diviem pārējiem dotājiem riņķiem, tad deformējot šo trijstūri tā, lai viņš visu laiku paliek ierakstīts lielākajā dotajā riņķī un lai visu laiku divas viņa atbilstošās malas katra pieskaras vienam no diviem pārējiem riņķiem, dabūjam bezgalīgi daudz trijstūŗu, kuŗu visu trešās malas (tās kas neskaŗas ne vienam no dotiem riņķiem) pieskaras vienam un tam pašam riņķim, kas pieder doto riņķu noteiktai koaksiālu riņķu sistemai.

Lai šo teoremu pierādītu, ņemsim trīs vienai un tai pašai koaks. riņķu sistemai piederošus riņķus 1, 2, 3 un trijstūri ABC, kuŗa virsotnes A, B, C atrodas uz riņķa 1 un mala AB pieskaras riņķim 2, bet mala AC riņķim 3. Tad novedīsim doto trijstūri stāvoklī A'B'C' un mēģināsim pierādīt, ka arī trijstūŗu malas BC un B'C' pieskaras vienam un tam pašam dotajai koaksiālu riņķu sistemai piederošam riņķim. – Savienosim virsotni A ar virsotn. A' un B' un virsotni B ar virsotn. B' un A'. Tā dabūsim pilnīgo četrstūri AB'BA' kas ir ierakstīts riņķī 1 un kuŗa pretējo malu pāris AB, A'B' pieskaras riņķim 2. Tas dod iespēju taisīt slēdzienu (pamatojoties uz iepriekš pierādīto teoremu) ka

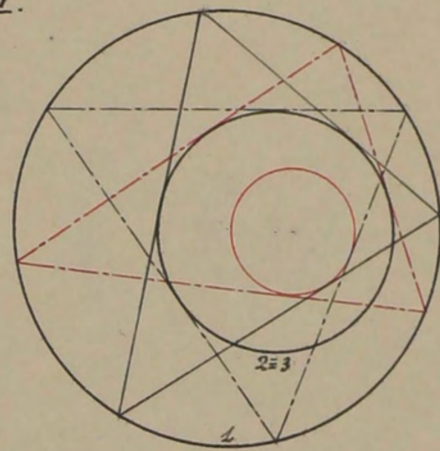


arī pilnīgā četrstūra $AB'BA'$ pretējās malas AA', BB' pieskaras riņķu (1,2) noteiktai koaksiālu riņķu sistemai piederošam riņķim 4. Tādā pat ceļā nonākam pie slēdziena, ka arī pilnīgā četrstūra $AC'CA'$ pretējo malu pāris AA', CC' pieskaras riņķu (1,3) noteikt. koaks. riņķu sistemas riņķim 5. – Tā kā riņķi 1, 2, 3 visi pieder vienai u.t.p. koaks. riņķu sistemai, koaks. riņķu sistemas (1,2) un (1,3) ir identiskas. Tā tad riņķi 4, 5 abi pieder vienai un tai pašai koaksiālu riņķu sistemai. Bez tam viņi abi pieskaras vienai un tai pašai taisnei AA'. Kā zinam no iepriekšējā, katrai taisnei var pieskarties tikai divi vienai u.t.p. koaksiālu riņķu sistemai piederoši riņķi, pie kam viens no šiem riņķiem atrodas vienā pusē un otrs otrā no atbilstošās sistemas radikalās ass. Riņķi 4 un 5 abi atrodas atbilstošās radikalās ass vienā pusē. Tas noved pie slēdziena, ka riņķis 4 ir identisks ar riņķi 5. Tā tad visas malas AA', BB', CC' pieskaras pie viena kopīga doto riņķu noteiktas koaks. riņķu sistemas riņķa (4≡5). – Ja savienotu virsotnes B ar C' un C ar B', tad dabūtu pilnīgo četrstūri $BC'CB'$, kurš ir ierakstīts riņķī 1. un kura pretējo malu pāris BB', CC' pieskaras riņķim 4. No tā seko, ka arī šā četrstūra pretējas malas $B'C'$ un BC pieskaras vienam un tam pašam koaksiālu riņķu sistemai (1,4) – k.t.p. sist. (1,2,3) – piederošam riņķim.

Ja trijstūri ABC būtu noveduši stāvoklī $A''B''C''$, tā pat būtu pierādījuši, ka malas $B''C''$ un BC pieskaras kopīgam dotās koaks. riņķu sistemas (1,2) riņķim u.t.t. – ka ik katra mala $B^{(i)}C^{(i)}$ un mala BC pieskaras vienam kopīgam minētās sist. riņķim. Katra taisne var pieskarties tikai vienam no dotās koaks. riņķu sistemas radikalās ass vienā pusē novietotiem šīs sistemas riņķiem. Tā tad visi sistemas (1,2,3) riņķi, kuriem reizē pieskaras mala BC un kāda no malām $B^{(i)}C^{(i)}$, ir identiski t.i. – visas malas $B^{(i)}C^{(i)}$ pieskaras vienam un tam pašam doto riņķu noteiktas koaksiālu riņķu sistemas riņķim. – Ar to Poncelet teorema ir pierādīta. Kā secinājumus no šīs teoremas dabujam teoremas:

I. Ja ir doti divi riņķi un trijstūris, kurš ir ierakstīts lielākajā dotajā riņķī un kura divas malas pieskaras mazākajam dot. riņķim, tad deformējot šo trijstūri tā, lai viņš visu laiku paliek ierakstīts lielākajā riņķī un lai visu laiku divas viņa malas pieskaras mazākajam riņķim, dabujam bezgalīgi daudz trijstūru, kuru trešās malas arī pieskaŗas vienam un tam pašam doto riņķu noteiktai koaksiālu riņķu sistemai piederošam riņķim.

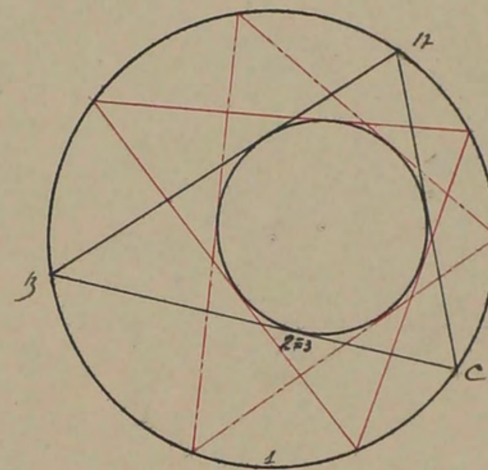
I.



Šo teoremu varam uzskatīt kā iepriekšējās teoremas atsevišķu gadījumu, ja pieņemam, ka riņķi 2 un 3 ir saplūduši kopā.

II. Ja ir doti divi riņķi un trijstūris, kas ir lielākajā dotajā riņķī ierakstīts un mazākajam aprakstīts, tad deformējot šo trijstūri tā, ka divas viņa malas visu laiku pieskaŗas mazākajam dotajam riņķim, un visas virsotnes atrodas uz lielākā dot. riņķa, dabujam bezgalīgi daudz trijstūŗu, kas visi ir lielākajā dotajā riņķī ierakstīti un mazākajam aprakstīti.

II.

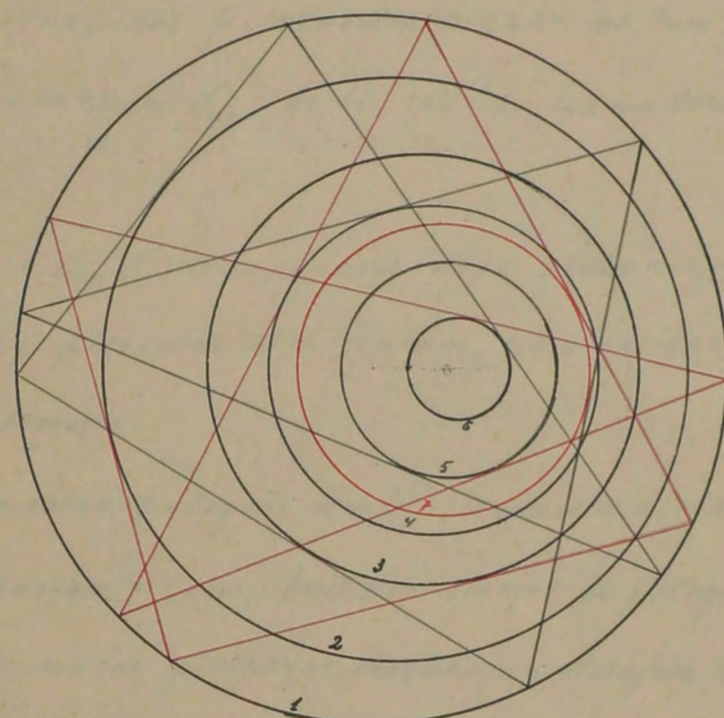


Šī ir jau no iepriekšējā mums pazīstamā Poncelet teorema. Viņa iznāk kā 159. l.p. formulētās Poncelot teoremas atsevišķs gadījums, ja pieņemam ka riņķi 2 un 3 ir saplūduši kopā un visas dotā trijstūŗa malas. t.i. - arī trešā mala BC - pieskaŗas riņķim 2≡3. Tā tad arī visas aizrādītās deformacijas ceļā dabūto trijstūŗu malas pieskarsies riņķim 2≡3.

Tagad viss ir pietiekoši sagatavots, lai viegli varētu pierādīt slaveno Poncelot teoremu par poligoniem, kuŗu varam formulēt šādiem vārdiem:

Ja ir doti n vienai un tai pašai koaksiālu riņķu sistemai piederoši riņķi un n-stūŗu poligons, kurš ir ierakstīts lielākajā dotajā riņķī un kuŗa visas malas - izņemot vienu - ik viena pieskaŗas vienam no pārējiem dotajiem riņķiem, tad deformējot šo poligonu tā, lai viņš visu laiku paliek ierakstīts lielākajā dotajā riņķī un lai visu laiku ik viena no viņa (n-1) malām pieskaras vienam no (n-1) dotiem riņķiem - dabujam bezgalīgi daudz poligonu, kuŗu visu $n^{tās}$ (atlikušās) malas arī pieskaŗas vienam un tam pašam riņķim, kas pieder doto koaksialo riņķu sistemai.

Piemēram: Ja ir doti 6 vienai un tai pašai koaksialu riņķu sistemai piederoši riņķi un 6-stūris, kurš ir ierakstīts riņķī 1 un kuŗa piecas malas katra pieskaŗas vienam no pārējiem pieciem dotajiem riņķiem, tad šā 6-stūŗa un arī visu to 6-stūŗu - kuŗus dabujam no dotā viņu deformējot augstāk minētā kārtā - sestās malas arī visas pieskaŗas vienam un tam pašam doto riņķu noteiktās koaksialu riņķu sistemas riņķim 7. 168



Pieņemsim ka ir doti n vienai un tai pašai koaksialu riņķu sistemai piederoši riņķi un n-stūŗu poligons $A_1 A_2 A_3 \ldots\ldots\ldots A_{n-1} A_n A_1$, kuŗa visas virsotnes atrodas uz dotā riņķa C

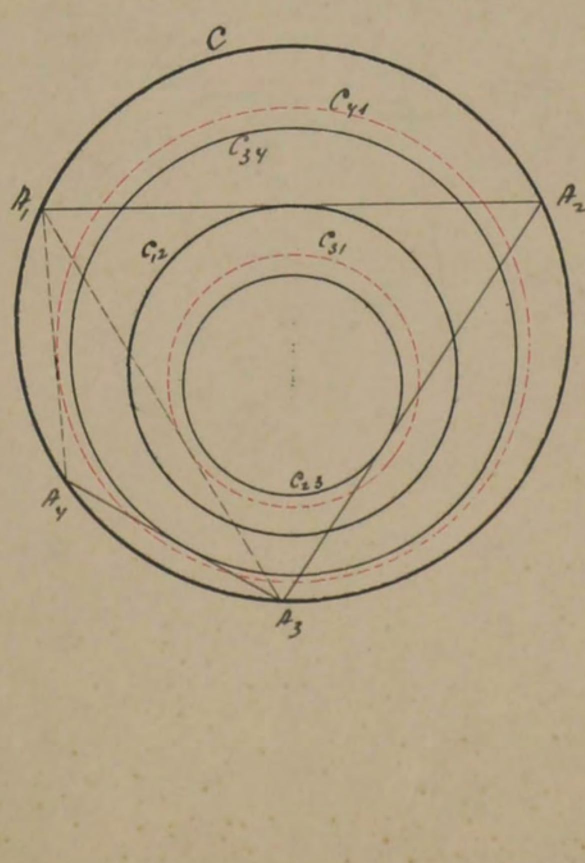
un mala $A_1 A_2$ pieskaŗas dotajam riņķim $C_{1,2}$

" $A_2 A_3$ " " " $C_{2,3}$

$\vdots$

" $A_{n-1} A_n$ " " " $C_{n-1,n}$

Pierādīsim, ka arī poligona mala $A_n A_1$ pieskaŗas tai pašai koaksialu riņķu sistemai piederošam riņķim $C_{n,1}$ un turpina pieskarties šim riņķim pa visu deformacijas laiku.



Pierādījumu izdarīsim pakāpeniski. Vispirms ņemsim virsotnes A_1, A_2 un A_3. Savienojot virs. A_3 un A_1 dabujam trijstūri $A_1 A_2 A_3$ kuŗa malas $A_1 A_2$ un $A_2 A_3$ skaŗas dotiem riņķiem C_{12} un C_{23}. Ir skaidrs, ka arī daudzstūri deformējot malas $A_1 A_2$ un $A_2 A_3$ turpinās skarties tiem pašiem riņķiem un tā tad pamatojoties uz iepriekš pierādīto varam taisīt slēdzienu, 167 ka arī mala $A_3 A_1$ pa visu deformacijas laiku skarsies vienam un tam pašam riņķu (C_{12}, C_{23}) noteiktās koaksialu riņķu sistemas riņķim C_{31}. Tālāk — apskatot trijstūri $A_1A_3A_4$ — tādā pat kārtā nonākam pie slēdziena, ka arī mala A_4A_1 pa deformacijas laiku turpinās pieskarties riņķu (C_{34}, C_{31}) — k.t.p. riņķa (C_{12}, C_{23}) — noteiktas koaksialu riņķu sistemas riņķim C_{41}. Tā turpinam, kamēr beidzot — apskatot trijstūri $A_1A_{n-1}A_n$ — nonākam pie slēdziena, ka arī dotā poligona mala A_nA_1 pa visu minētās deformacijas laiku turpinās pieskarties vienam un tam pašam doto riņķu noteiktas koaksialu riņķu sistemas riņķim C_{n1}. Ar to 161. l.p. formulēto Poncelet teoremu var skaitīt par pierādītu.

Pieņemot ka visi riņķi $C_{12}, C_{23}, \dots\dots C_{n-1}C_n$ ir saplūduši kopā vienā riņķī un ka visas dotā poligona malas (arī mala A_nA_1) pieskaras šim riņķim, kā atsevišķu gadījumu no tikko pierādītās teoremas dabujam teoremu:

Ja ir doti divi riņķi un n-stūru poligons, kurš ir ierakstīts lielākajā dotajā riņķī un aprakstīts mazākajam riņķim, tad deformejot šo poligonu tā, lai visu laiku viņa $(n-1)$ malas pieskaras mazākajam dotajam riņķim — dabujam bezgalīgi daudz n-stūru poligonu, kuri visi ir ierakstīti lielākajā dotajā riņķī un aprakstīti mazākajam riņķim.

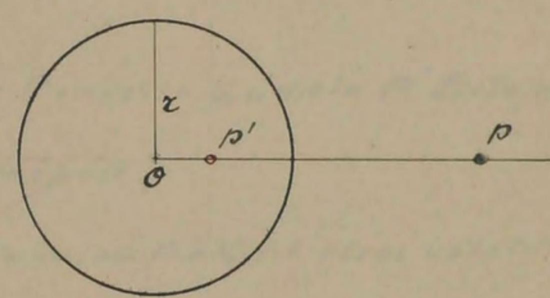
Tas pats ir spēkā arī attiecībā uz citām II. pakāpes līnijām un viņās ierakstītiem un aprakstītiem poligoniem. Tikai attiecībā uz pārējām II. pakāpes līnijām (ne riņķiem) Poncelet teoremas pierādījums ir daudz grūtāks.

IV Inversija.

Nav vēl izdevies noskaidrot, kas būtu uzskatams par inversijas jēdziena izgudrotāju. Šo jēdzienu izlietojuši jau grieķi astronomiskos pētījumos. Bez tam inversijas jēdziens tiek diezgan plaši izlietots kartografijā. Sākot apmēram no 1830–1840 g. minētais jēdziens pētīts tieši no geometriskā viedokļa. Sevišķi par viņu interesejušies šādi autori: italietis Bellavitis, anglis Stubbs, vācietis Möbius un francuzis Liouville.

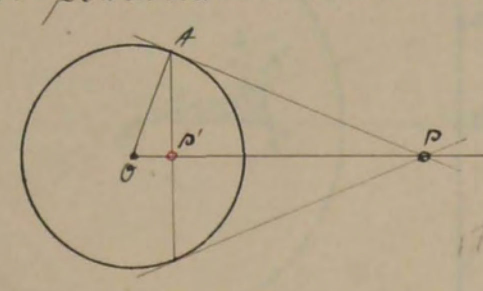
Ja ir dots kāds riņķis ar centru punktā O un radiusu r, tad, kā jau zinam no iepriekšējā, divus punktus P un P' sauc par inversiem punktiem attiecībā uz doto riņķi - ja viņi atrodas uz vienas taisnes ar riņķa centru O un ja to attālumu - no riņķa centra - reizinājums līdzinās dotā riņķa radiusa kvadratam. T. i.

$$OP.OP' = r^2$$



Doto riņķi sauc par inversijas jeb pamata riņķi, viņa centru par inversijas centru un radiusu par inversijas radiusu jeb inversijas konstanti. Kā redzams no inversijas definicijas formulas - ja dotais punkts P atrodas inversijas riņķa ārpusē, tad viņa inversais punkts P' atrodas inv. riņķa iekšpusē, un otrādi. Punkti P un P' ir inversi saistīti punkti, - t. i. ja punktu P uzskatam par doto, tad punkts P' ir viņa inversais punkts; un otrādi - ja punktu P' uzskatam par doto, tad punkts P ir viņa inversais punkts.

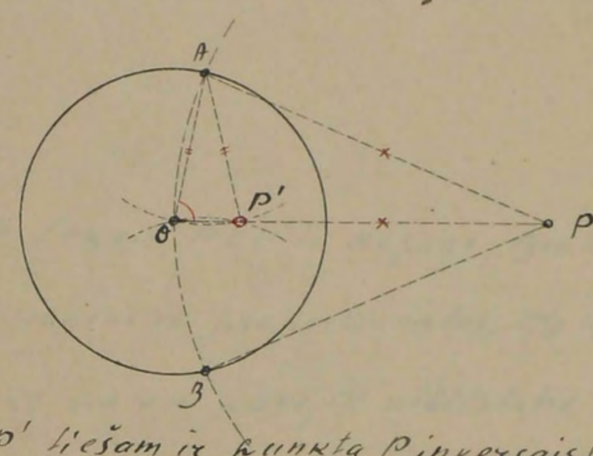
Ja punkts P atrodas inversijas riņķa ārpusē, tad punkts P' ir punkta P polares un taisnes OP krustošanās punkts. Ja punkts P atrodas inversijas riņķa iekšpusē, tad punkts P' ir punktā P pret taisni OP perpendikulari vilktas hordas pols. Lai to pierādītu, pietiek apskatīt taisnleņķa trijstūri AOP, kas dod iespēju rakstīt sakarību



$$OP.OP' = \overline{OA}^2 = r^2.$$

Šo pēdējo īpašību parasti izlieto inversu punktu konstruēšanai. [Ja riņķa vietā būtu kāda cita II. pakāpes līnija, tad tādā ceļā inversos punktus vairs nevarētu konstruēt]

Kāds Vīnes matemātikas skolotājs Adlers devis metodi, kā konstruēt inversus punktus lietojot tikai cirkeli. Konstrukciju izpilda šādi: – Ap punktu P kā ap centru ar radiusu OP velk loku, kurš krusto doto riņķi (inversijas riņķi) punktos A un B. Tad ap punktiem A un B kā ap centriem velk lokus ar radiusu OA = OB. Abu šo loku otrs krustošanās punkts ir punkts P'.



Pierādīsim, ka tādā ceļā konstruētais punkts P' tiešām ir punkta P inversais punkts attiecībā uz doto riņķi. – Savienosim punktu P ar punktiem A un O un punktu A ar p. O un P'. Tā dabūsim līdzīgus trijstūrus AOP un AOP', kas dod, ka

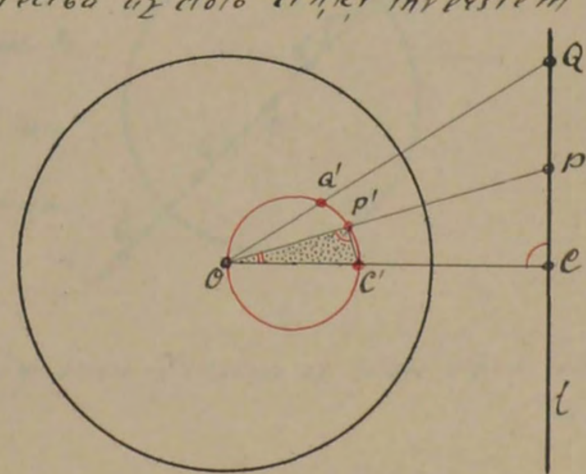
$$\frac{OP'}{r} = \frac{r}{OP} \qquad \text{t.i.} \quad OP.OP' = r^2.$$

Tā tad konstrukcija ir pareiza.

Pašiem pārdomāt, kā varētu konstruēt punkta P inverso punktu P' lietojot tikai cirkeli, ja punkts P atrastos inversā riņķa iekšpusē.

Tā kā attiecībā uz doto riņķi katram plāksnes punktam P atbilst viens noteikts inversais punkts P' – ja punkts P apraksta kādu figuru, arī punkts P' apraksta kādu citu figuru. T.i. – inversija dod iespēju vienu geometrisku figuru pārtransformēt otrā. Mācībā par geometriskām transformacijām inversija ir galvenais pamats.

Pieņemsim ka ir dots riņķis ar centru punktā O un ar radiusu r, un kautkāda taisne t, kas neiet caur šā riņķa centru. – Noskaidrosim, kāda ir dotās taisnes inversā figura attiecībā uz doto riņķi. [T.i. – noskaidrosim kādā figurā pārtransformējas dotā taisne izdarot transformaciju ar attiecībā uz doto riņķi inversiem punktiem]. No punkta O (t.i. – no inversijas centra) vilksim pret taisni t perpendikulu. Apzīmēsim šā perpendikula un taisnes t krustošanās punktu ar C un konstruēsim punkta C inverso punktu C'. Tad ņemsim vēl kādu dotās taisnes punktu P



un konstruēsim arī viņa inverso punktu P'. Savienojot punktus P' ar C' dabujam trijstūŗus $OC'P'$ un OCP. Izpētīsim kāds sakars pastāv starp šo trijstūŗu malām. - Punkti C, C' un P, P' ir inversi punkti, tamdēļ

$$OC.OC' = r^2; \quad OP.OP' = r^2.$$ Tas dod, ka

$$OC.OC' = OP.OP' \quad k.\ t.\ p.$$

$$\frac{OC}{OP} = \frac{OP'}{OC'}.$$

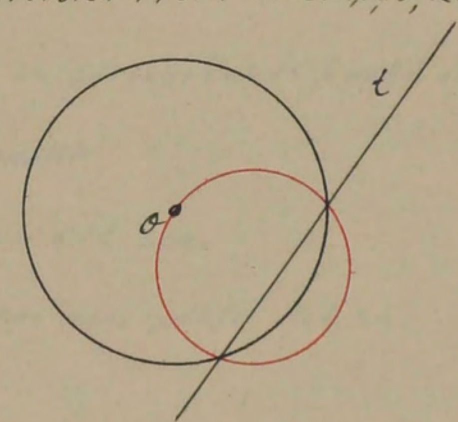
Kā redzams zīmējumā trijstūriem $OC'P'$ un OCP leņķis $P'OC'$ ir kopīgs. Bez tam, kā rāda iepriekšējā sakarība, šo leņķi ieslēdzošās malas ir proporcionalas. Tā tad abi minētie trijstūri ir līdzīgi. No tā savukārt seko, ka arī pārējie atbilstošie šo trijstūŗu leņķi ir vienādi. T. i.

$$\sphericalangle OP'C' = \sphericalangle OCP = d.$$

Ņemot kādu citu dotās taisnes punktu Q un konstruējot viņa inverso punktu Q' - tādā pat ceļā nonākam pieslēdziena, ka arī

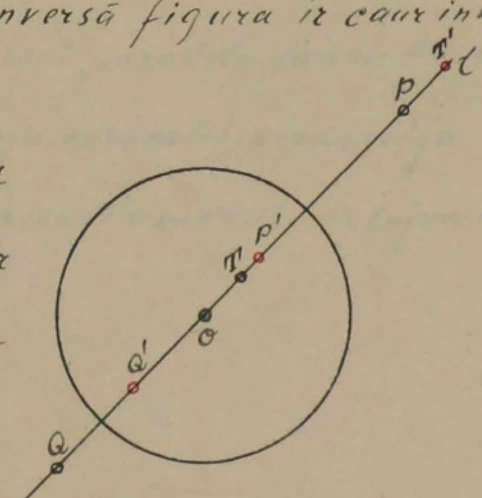
$$\sphericalangle OQ'C' = d. \quad u.\ t.\ t.$$

Tā tad dotās taisnes punktiem inverso punktu geometriskā vieta ir riņķis, kuŗa diametrs ir nogrieznis OC'.



Tā pat varam pierādīt, ka arī gadījumā ja dotā taisne t krusto inversijas riņķi, - viņas inversā figura ir caur inversijas centru ejošs riņķis. - Noskaidroto varam izteikt teoremā: 174

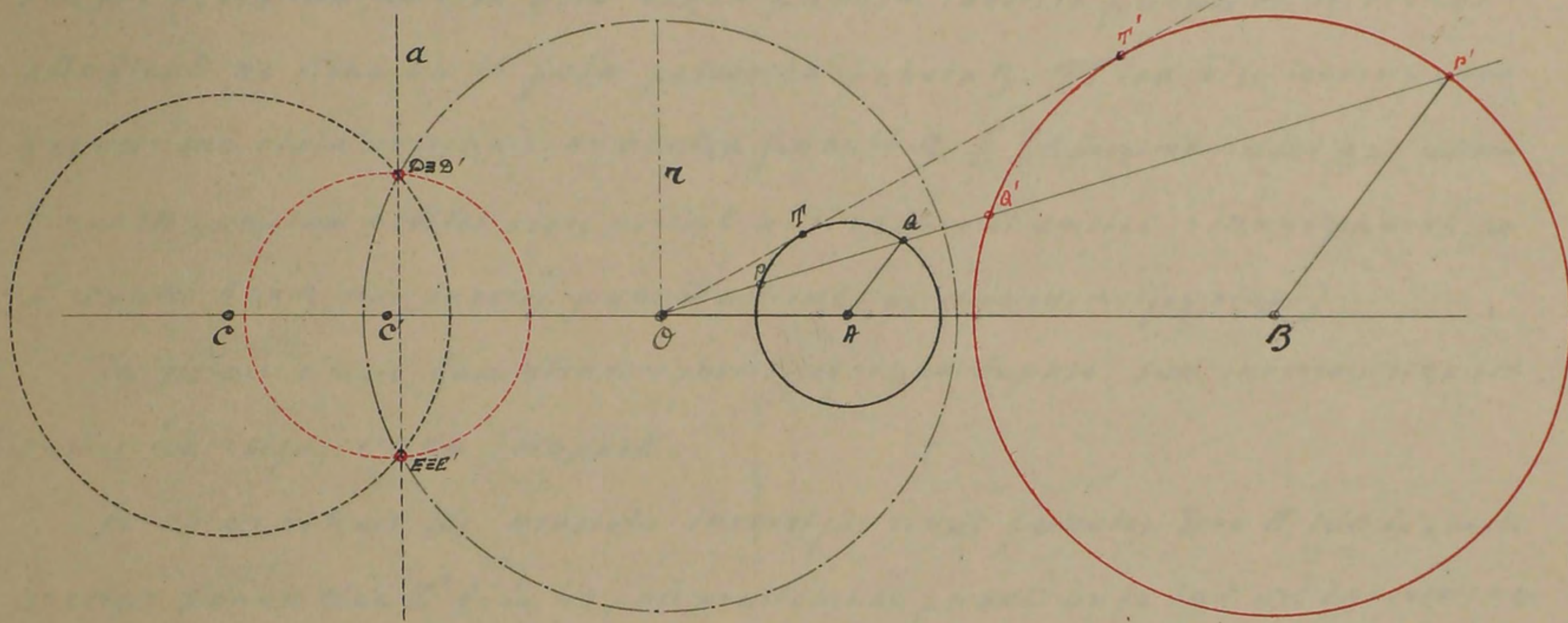
Caur inversijas centru neejošas taisnes inversā figura ir caur inversijas centru ejošs riņķis.



Ja dotā taisne iet caur inversijas centru, tad visu riņas punktu inversie punkti atrodas uz pašas dotās taisnes. Ar inversiju visi inversijas riņķa iekšpusē atrodošies dotās taisnes punkti pāriet tās pašas taisnes ārpus inversijas riņķa atrodošos punktos un otrādi. Tā tad 175

Caur inversijas centru ejošas taisnes inversā figura ir pati dotā taisne.

Jau iepriekš noskaidrojam, ka riņķa inversā figura ir riņķis. Apskatīsim šo jautājumu vēl papildus. Pieņemsim ka ir dots inversijas riņķis ar centru punktā O un rad. līdzīgu r, un riņķis A. Noskaidrosim, kāda ir riņķa A punktiem inverso punktu geometriskā vieta attiecībā uz doto inversijas riņķi. – No inversijas centra O vilksim kādu staru,



176

kas krusto doto riņķi punktos P un Q. Tad konstruēsim šo punktu inversos punktus P' un Q'. Starp punktiem P, Q un viņu inversiem punktiem P', Q' pastāv sakars

$$OP \cdot OP' = r^2; \quad OQ \cdot OQ' = r^2.$$

Ja no inversijas centra O velkam dotajam riņķim tangenti un pieskaršanās punktu apz. ar T, tad pamatojoties uz teoremu par riņķa sekantēm varam rakstīt

$$OP \cdot OQ = \overline{OT}^2 = const = k_1. \text{ Ņemot vēl sak.}$$

$$OP \cdot OP' = r^2 = const \qquad \text{un viņas abas izdalot, dab. ka}$$

$$\frac{OQ}{OP'} = \frac{k_1}{r^2} = k_2 \ (const.)$$

Savienojot punktus A un Q un no punkta P' velkot taisni paralelu taisnei AQ dabujam līdzīgus trijstūrus QOA un $P'OB$, kuri dod iespēju uzrakstīt proporciju

$$\frac{OQ}{OP'} = \frac{OA}{OB}. \text{ Ņemot vērā iepriekšējo sakarību dabujam ka}$$

$$\frac{OA}{OB} = k_2, \text{ kas dod, ka}$$

$$OB = \frac{OA}{k^2} = k_3 \ (const.)$$

Tā tad visiem dotā riņķa punktiem P atbilstošie aizrādītā kārtā konstruētie punkti B ir identiski. No līdzīgiem trijstūriem QOA un $P'OB$ vēl seko, ka arī

$$\frac{AQ}{BP'} = K_2 \quad \text{t. i. } BP' = \frac{AQ}{K_2} = const = \rho. \quad \text{Tā kā}$$

$$BP' = \rho$$

neatkarīgi no tā, kāda dotā riņķa punkta P inverso punktu esam ņēmuši – nonākam pie slēdziena, ka visu dotā riņķa punktu inversie punkti P' ir vienādi attālināti no viena un tā paša pastāvīga punkta B. Tā tad visu inverso punktu geometriskā vieta ir riņķis ar centru punktā B. [Jāpiezīmē – kaut gan katram riņķa (A) punktam atbilst viens noteikts ar viņu inversi saistīts riņķa (B) punkts, paši centri A un B nav inversi punkti attiecībā uz doto inversijas riņķi]

Ja dotais riņķis būtu atradies inversijas riņķa ārpusē, tad inversais riņķis atrastos inversijas riņķa iekšpusē.

Ja dotais riņķis (C) krustotu inversijas riņķi punktos D un E, tad šo punktu inversie punkti D' un E' būtu tie paši krustošanās punkti un tā tad arī inversais riņķis (C') krustotu inversijas riņķi tos pašos punktos D un E.

Tādā ceļā vēl reiz nonākam pie slēdziena ka

> Caur inversijas centru neejošā riņķa inversā figura ir caur inversijas centru neejošs riņķis. Caur inversijas centru ejošā riņķa inversā figura ir caur inversijas centru neejoša taisne.

[Pēdējo slēdzienu dabujam kā tiešu secinājumu no teoremas: caur inversijas centru neejošas taisnes inversā figura ir caur inversijas centru ejošs riņķis]

Uzskatot arī taisni kā riņķi ar bezgalīgi lielu radiusu, varam teikt vispārīgi, ka

> **Riņķa inversā figura vienmēr ir riņķis** [K. t. p. – Izdarot transformaciju ar inversi saistītiem punktiem riņķis vienmēr pāriet riņķī]

Šādu radniecību Möbius's apzīmē ar terminu „Kreisverwandschaft"

– Gadījumā, kad dotais riņķis krusto inversijas riņķi viegli taisīt slēdzienu, ka dotais riņķis (C) inversais riņķis (C') un inversijas (O) pieder visi vienai un tai pašai koaksialu riņķu sistemai, jo viņiem visiem ir kopīga radikalā ass (iepr. zīmēj. taisne a). Pamatojoties uz kontinuitates principu Poncelet taisa slēdzienu, ka arī gadījumā, ja dotam un inversijas riņķim nav reālu krustošanās punktu, dotais riņķis, inversais riņķis un inversijas riņķis visi pieder. t. u. t. p. koak. riņķu sist.

Neatkarīgi no pēdējā slēdziena (ģeometriskā ceļā) pašiem pierādīt teoremu:

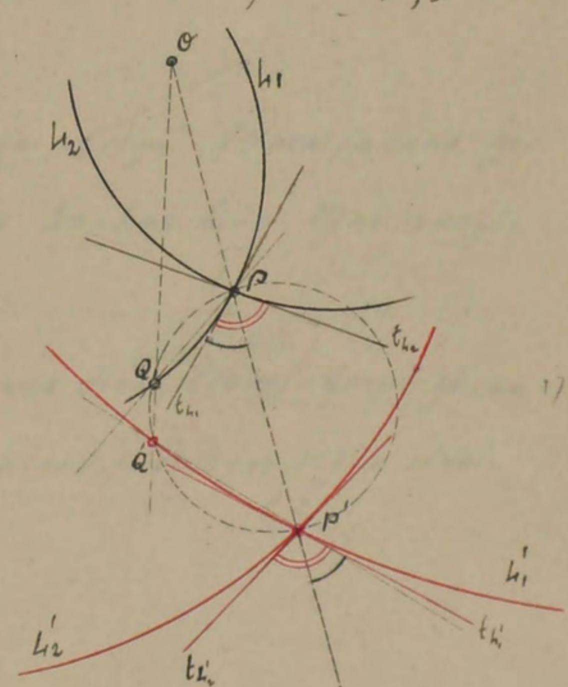
Inversijas riņķis, dotais riņķis un viņa inversais (transformetais) riņķis visi trīs pieder vienai un tai pašai koaksiālu riņķu sistemai.

Pieņemot ka stars OP (sk. zīm. 167. l.p.) nonāk stāvoklī OT – punkti P un Q abi nonāk punktā T, bet viņu inversie punkti P' un Q' punktā T'. Tā tad pieskare, kas vilkta dotajam riņķim no inversijas centra, ir pieskare arī dotā riņķa inversam riņķim. Tā nonākam pie teoremas:

Dotā un inversā riņķa ārējais līdzības centrs ir šo riņķu inversijas centrs.

Tā kā izdarot transformaciju ar inversi saistītiem punktiem taisne pāriet riņķī – t.i. II pakāpes līnijā – inversija tiek saukta par kvadratisku radniecību. Izdarot transformaciju ar projektīvās ģeometrijas paņēmieniem taisne pāriet taisne un tamdēļ šo radniecību sauc par linearu radniecību.

Ņemsim tagad kaut kādas divas krustojošās līnijas L_1 un L_2 un konstruēsim viņu inversās līnijas L_1' un L_2', izvēloties par inversijas centru punktu O. – Pierādīsim ka inversās līnijas L_1' un L_2' krustojoties veido tādu pat leņķi, kā dotās līnijas L_1 un L_2.



Doto līniju krustošanās punktu apzīmējam ar P un šā punkta inverso punktu ar P'. Tad no inversijas centra O velkam vēl vienu staru, kas krusto līkni L_1 punktā Q un šīs līknes inverso līkni L_1' punktā Q', kas ir punkta Q inversais punkts. Caur punktiem P, Q un P', Q' velkam sekantes PQ un P'Q'. Tā dabujam četrstūri PQQ'P' pierādīsim, ka ap šo četrstūri var aprakstīt riņķi. – Tā kā punkti P un P', un Q un Q' ir inversi punkti, varam rakstīt, ka

$$OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ' = r^2$$

Bet šī sakarība rāda, ka ap četrstūri PQQ'P' tiešām var aprakstīt riņķi. Konstruējam šo riņķi un apskatam leņķus.

Tā tad leņķis, ko veido taisne OP ar līknei k_1 punktā P vilkto pieskari t_{k_1} - ir vienāds ar leņķi, ko veido taisne OP ar līknei k_1' punktā P' vilkto pieskari t_{k_1}'. Gluži tādā pat ceļā varam pierādīt ka arī līknēm k_2 un k_2' punktos P un P' vilktās pieskares t_{k_2} un t_{k_2}' veido vienādus leņķus ar staru OP. - Tā tad leņķis ko veido abu doto līkņu pieskares t_{k_1} un t_{k_2} ir vienāds ar leņķi, ko veido abu inverso līkņu pieskares t_{k_1}' un t_{k_2}'. Dabūto rezultatu varizteikt. teoremā:

Leņķis, ko veido divas dotas līknes, un leņķis, ko veido šo līkņu inversās līknes - abi ir vienāda lieluma. [Citādi sakot: Leņķis, ko veido divas līknes, pie inversijas savu lielumu nemaina]

Šī ir ļoti svarīga teorema. Sevišķi liela nozīme viņai ir gadījumos, kad dotās līknes ir ortogonalas. Tad, pamatojoties uz iepriekšējo teoremu, varam apgalvot, ka

Divu ortogonalu līkņu inversās līknes arī ir divas ortogonalas līknes.

Bez tam kā tiešu secinājumu no augstāk stāvošas teoremas dabujam teoremu:

Ja ir dotas divas līknes kas pieskaras viena otrai, tad arī viņu inversās līknes pieskaras viena otrai.

Tamdēļ arī inversiju sauc par „pieskaršanās transformaciju" (Vācu valodā: Berührungstransformation"). Šinī jautājumā daudz strādājis Sophus Lie. Viņš izkopis veselu kontaktu (pieskaršanās) teoriju.

Inversija ir viens specials transformacijas gadījums, kas divas līknes - kuŗas viena otrai pieskaŗas - pārtransformē divās jaunās līknēs, kuŗas atkal pieskaŗas viena otrai.

Izdarot transformaciju vispārīgi ar formulām

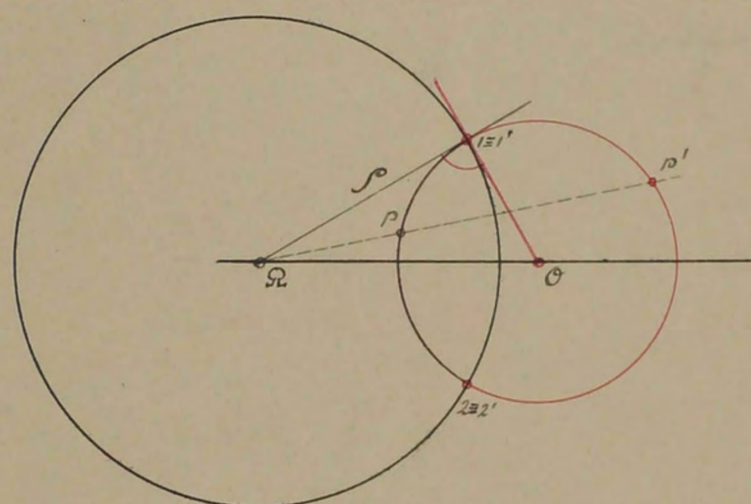
$$x' = f_1(x, y),$$

$$y' = f_2(x, y),$$

var nākt priekšā gadījumi, kad - lai gan abas dotās līknes viena otrai pieskaŗas, šo līkņu transformētas līknes viena otrai nepieskaŗas, bet krustojas.

Ņemsim tagad inversijas riņķi ar centra punktā Ω un radiusu ρ. – Jau zinam no iepriekšējā, ka – ja punkts P apraksta riņķi inversijas riņķa iekšpusē, tad viņa inversais punkts P' apraksta riņķi inversijas riņķa ārpusē un otrādi. Bez tam viegli var iedomāties, ka – ja punkts P apraksta riņķi kas pieskaras inversijas riņķim no iekšpuses vai arī no ārpuses, tad inversais punkts P' apraksta riņķi, kas pieskaras inversijas riņķim no ārpuses vai arī iekšpuses tanī pat punktā, kurā inversijas riņķim pieskaras punkta P aprakstītais riņķis.

Pieņemsim ka punkts P apraksta riņķi (O) kas krusto inversijas riņķi (Ω) zem taisna leņķa. Tad transformēsim šos abus riņķus ar attiecībā uz riņķi (Ω) inversi saistītiem punktiem. Pie tādas transformacijas riņķa (Ω) punkti paliek invarianti un tā tad riņķis (Ω) (pāriet pats sevī) paliek invariants. Invarianti paliek arī riņķa (O) un riņķa (Ω) krustošanas punkti 1, 2. Tā tad riņķa (O) inversā figura iet caur punktiem 1 un 2. Bez tam šai figurai jābūt ortogonalai pret riņķi (Ω), jo riņķi (O) un (Ω) bij ortogonali. Bet caur diviem riņķa (Ω) punktiem 1, 2 var iet tikai viens riņķis ortogonals ar riņķi (Ω). Tā nonākam pie slēdziena, ka arī riņķis (O) pie šīs transformacijas pāriet pats sevī; pie kam viņa punkti, kas atrodas riņķa (Ω) ārpusē, pāriet šā riņķa iekšpusē un otrādi. Dabūto rezultatu var izteikt teoremā:



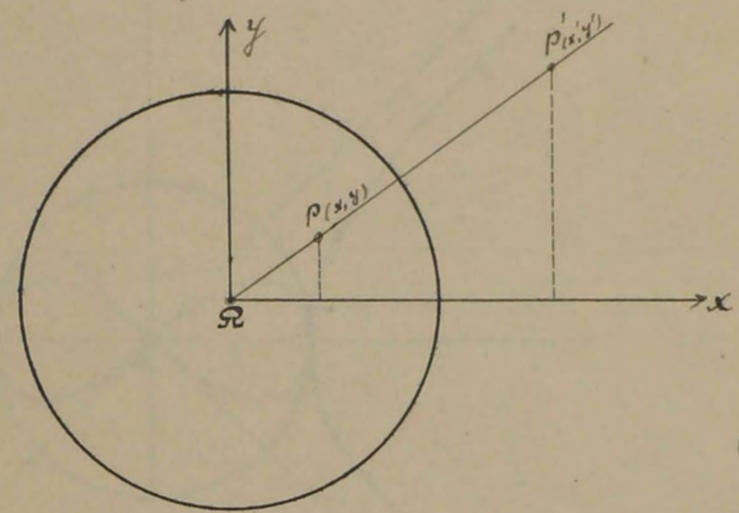
Katra ar inversijas riņķi ortogonala riņķa inversā figura ir pats dotais riņķis [R. t. p. – katrs ar inversijas riņķi ortogonals riņķis pie inversijas pāriet pats sevī]

Arī šai teoremai ir ļoti liela praktiska nozīme.

Daži inversijas pielietošanas gadījumi.

Sastādīsim analitiskas izteiksmes, kas dod iespēju pāriet no dotā punkta koordinatām x, y uz inversā punkta koordinatām x', y' un otrādi. – Par koordinātu sistēmas sākuma punktu izvēlēsimies inversijas centru $\Re$. Tā kā punktam P atbilstošā inversā punkta P' stāvoklis ir atkarīgs no punkta P stāvokļa un no inversijas radiusa ρ, koordinatas x', y' būs atkarīgas no lielumiem x, y un ρ.

No uzzīmētiem trijstūriem dabujam, ka



$$\frac{\Re P}{\Re P'} = \frac{x}{x'}, \quad \text{k.t.p.}$$

$$\frac{\overline{\Re P}^2}{\Re P\cdot\Re P'} = \frac{x}{x'}.$$

Bet tā kā P un P' ir inversi punkti,

$$\Re P\cdot\Re P' = \rho^2, \quad \text{un iepr. sak. pārv.}$$

$$\frac{x^2+y^2}{\rho^2} = \frac{x}{x'}, \quad \text{no kurienes dab.}$$

$$x' = \rho^2\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Tāpat dabujam, ka arī

$$y' = \rho^2\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Proporciju $\frac{\Re P}{\Re P'} = \frac{x}{x'}$ varam arī šādi pārveidot:

$$\frac{\Re P\cdot\Re P'}{\overline{\Re P}^2} = \frac{x}{x'}, \quad \frac{\rho^2}{x'^2+y'^2} = \frac{x}{x'}, \quad \text{no kurienes dabujam, ka}$$

$$x = \rho^2\frac{x'}{x'^2+y'^2}; \quad \text{un tāpat}$$

$$y = \rho^2\frac{y'}{x'^2+y'^2}.$$

Tā dabujam, ka inversija saista dotā un inversā punkta koordinatas x, y un x', y' racionalā kārtā, un pie tam dubultracionalā kārtā, jo x' un y' izteicas racionali atkarībā no x un y, bet x un y izteicas racionali atkarībā no x' un y'. Tamdēļ inversiju nosauc arī par biracionalu transformaciju [T. i.– inversija pieder pie biracionalām transformacijām].

Ņemsim tagad ortogonalu hiperbolu un meklēsim viņas inverso figuru.– Par inversijas riņķa centru izvēlēsimies hiperbolas centru O un par inversijas radiusu hiperbolas realo pusasi a. Pieņemsim vēl, ka hiperbola ieņem tādu stāvokli attiecībā uz koordinatu asim, ka viņas nolīdzinājums ir

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad \text{k.t.p.}$$

$$x^2 - y^2 = a^2$$

Ievietojot šinī nolīdzinājumā iepriekšējā l. p. dabūtās izteikames

$$x = a^2 \frac{x'}{x'^2 + y'^2},$$

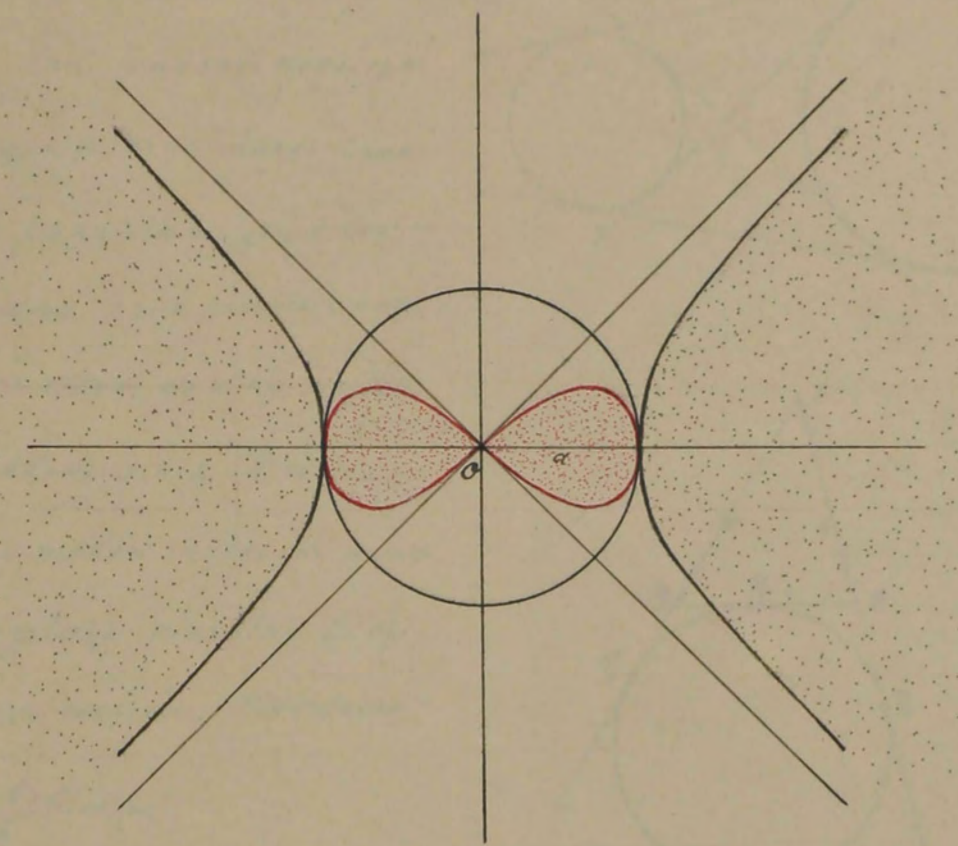
$$y = a^2 \frac{y'}{x'^2 + y'^2}, \ (\text{jo } \rho = a),$$

dabujam nolīdzinājumu

$$\left(a^2 \frac{x'}{x'^2 + y'^2}\right)^2 - \left(a^2 \frac{y'}{x'^2 + y'^2}\right)^2 = a^2,$$

kuru pārveidojot rezultātā dabujam nolīdzin.

$$a^2(x'^2 - y'^2) = (x'^2 + y'^2)^2,$$



180

kas ir lemniskatas nolīdzinājums. Tā tad

Ortogonalas hiperbolas inversā figura ir lemniskata.

– Pierādīt pašiem, ka parabolas inversā figura ir cissoida. [Vispirms pārdomāt, kā būtu izdevīgāk šinī gadijumā izvēlēties inversijas riņķi]

Kā redzams, inversās figuras pakāpe ir divreiz lielāka par dotās figuras pakāpi. T. i. –

Ja dotās līnijas pakāpe ir n, tad inversās līnijas pakāpe ir $2n$. — aplam (jo lemnis inversā ir h

Ja dotā līnija ir riņķis, tad dabujam izņēmu, jo kā redzējam – ar inversiju riņķis pāriet riņķī. t. i. tās pašas pakāpes līnijā.

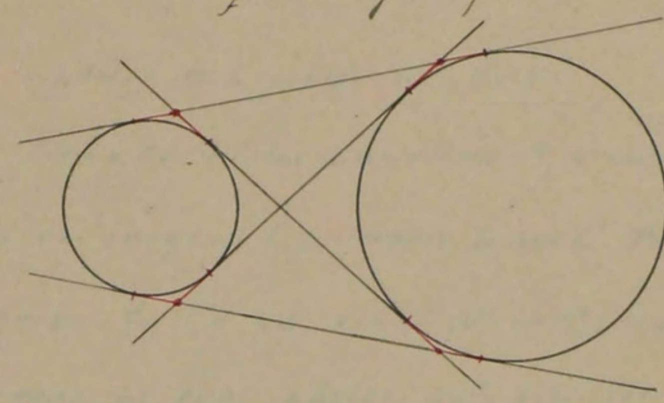
Feuerbacha teoremas pieradijums.

Ar Feuerbacha teoremas saturu iepazinamies jau iepriekš. Tas bij šāds:

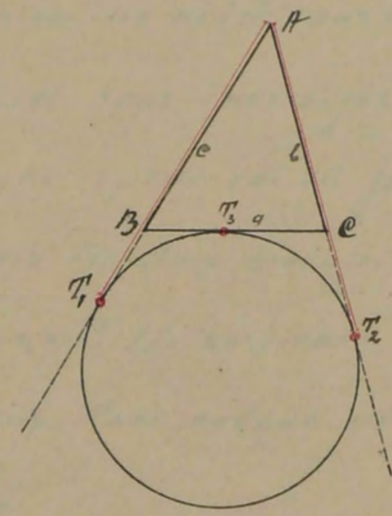
Ja ir dots trijstūris, tad šim trijstūrim atbilstošais Feuerbacha riņķis pieskaras dotajā trijstūrī ierakstītam riņķim un visiem trim šim trijstūrim pierakstītiem riņķiem.

Tikko minētai teoremai ir ap 30 pierādijumu, kuri katrs dibinas uz saviem pamatprincipiem. – Mēs pieradīsim šo teoremu ar inversijas palīdzību.

Pierādījumā atsauksimies uz divām sekojošām elementarās geometrijas īpašībām.



I. Ja ir doti divi riņķi un uzzīmētas viņu ārējās un iekšējās kopīgās tangentes, tad tangenšu nogriežņi starp ārējās un iekšējās tangentes krustošanās punktiem un starp pieskaršanās punktiem riņķim (kaut kuram) - visi 8 ir vienāda garuma. (zīm. sarkanie nogr.)



II. Ja ir dots trijstūris un vienai no viņa malām pierakstīts riņķis, tad attālums starp šā riņķa un kādas no pārējām trijstūra malām skaršanās punktu un pretim guļošo trijstūra virsotni līdzinas dotā trijstūra pusperimetram. Piemēram

$$AT_1 = AT_2 = \frac{a+b+c}{2} = p$$

To viegli pierādīt: $BT_1 = AT_1 - c$;

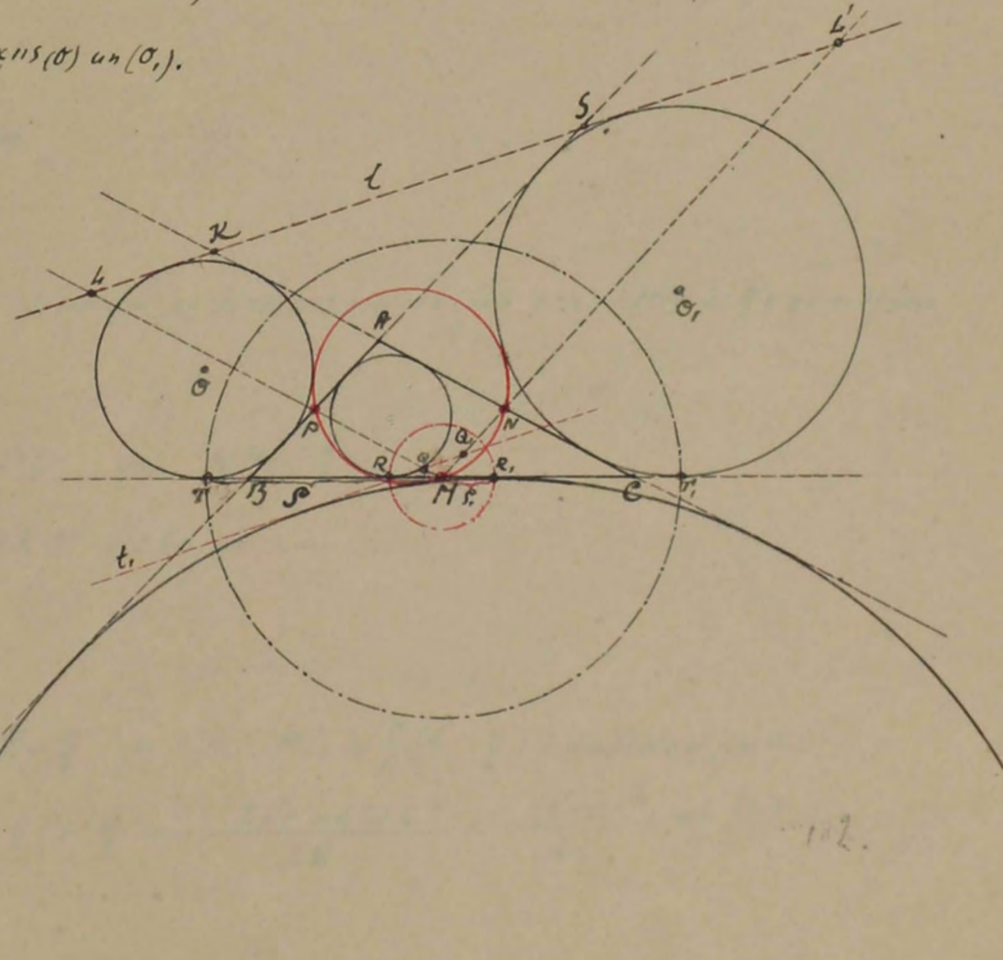
$CT_2 = AT_1 - b$ (jo $AT_1 = AT_2$). Abas pēdējās vienād. saskait.

$BT_1 + CT_2 = 2AT_1 - c - b$ Bet $BT_1 + CT_2 = BT_3 + CT_3 = a$. Tā tad

$a = 2AT_1 - c - b$, un tas dod, ka

$$AT_1 = \frac{a+b+c}{2}.$$

Pāriesim tagad pie Feuerbacha teoremas pierādīšanas. - Ņemsim trijstūri ABC un viņa sānu malām pierakstīsim riņķus (O) un (O_1).



Dotā trijstūra malas ir arī šo riņķu kopīgās pieskares. Konstruējam vēl ceturto minēto riņķu kopīgo pieskari l, kura pierādījumā ir svarīgāka kā trīs pārējās. - Tad izvēlamies malas BC vidus punktu M par inversijas riņķa centru un par inversijas radiusu nogriezni starp punktiem M un kādu no malas BC un riņķa (O) vai (O_1) skaršanās punkt.

T vai T_1. Tas ir – pieņemam ka

$$\rho = MT = MT_1 \qquad \text{(jo pamat. uz I īpašību } BT = CT_1\text{)}$$

Tālāk rīkojamies tā: – caur trijstūra malu AB un AC vidus punktiem P, N un caur punktu M velkam taisnes, kamēr viņas krustojas ar tangenti t punktos L un L'. Tad transformējam (ar invers.) riņķus (O), (O_1) uz taisni t. Tā kā riņķi (O) un (O_1) ir ortogonali ar inversijas riņķi (M), pēc transformacijas viņi pāriet paši sevī. Bet taisne t, tā kā viņa skaras abiem minētiem riņķiem un neiet caur inversijas centru M, pēc transformacijas pāriet riņķī, kas iet caur inversijas centru M un skaras riņķiem (O) un (O_1). Tamdēļ liekas derīgi izpētīt, vai šis jaunais riņķis – taisnes t inversais riņķis – neiet arī caur pārējo trijstūra malu vidus punktiem P un N? T. i. – vai šis riņķis nav Feuerbacha riņķis? (Jo, kā zināms, Feuerbacha riņķis iet caur visiem trijstūra malu vidus punktiem). Tanī nolūkā noskaidrosim, vai punkti P un N nav inversi ar punktiem L un L'.

Vispirms izteiksim inversijas riņķa radiusu ρ atkarībā no dotā trijstūra malām. No zīmējuma redzam, ka

$$\rho = TB + BM.$$

$TB = CT - CB$, bet pamat. uz II. īpašību, $CT = p$. $CB = a$. Tā lad $TB = p - a$ un

$$\rho = p - a + \frac{a}{2} = \frac{2p - a}{2} = \frac{b+c}{2}.$$

$$\rho = \frac{b+c}{2}.$$

Tālāk mēģināsim pierādīt, ka

$$MP \cdot ML = \rho^2.$$

T. i. – ka punkti P un L ir inversi punkti attiec. uz inversijas riņķi (M). – No zīmējuma redzam, ka

$$ML = MP + PL, \quad \text{un} \quad MP = \frac{b}{2}.$$

No līdzīgiem trijstūriem SLP un SKA dabujam, ka

$$\frac{PL}{AK} = \frac{PS}{AS}$$

$AK = AB = c$; $PS = AS + AP = b + \frac{c}{2}$ u. t. t. $PL = \frac{c}{b}\left(b + \frac{c}{2}\right)$, kas dod, ka

$$ML = \frac{c}{b}\left(b + \frac{c}{2}\right) + \frac{b}{2} = \frac{2bc + c^2 + b^2}{2b} = \frac{(b+c)^2}{2b}; \text{ un tas}$$

savukārt, ka

$$MP \cdot ML_1 = \frac{b\,(b+c)^2}{2 \cdot 2b} = \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 = \rho^2$$

Tā tad liešām punkti P un L_1 ir inversi punkti. Gluži tādā pat veidā varam pierādīt, ka arī punkti N un L_1' ir inversi punkti. Ar to ir skaidrs ka tangentes t inversā figura ir riņķis, kas iet caur dotā trijstūŗa malu vidus punktiem M, P un L_1; t.i. tangentes t inversā figura ir Feuerbacha riņķis. Tā kā tangente t pieskaras riņķiem (O) un (O_1) – Feuerbacha riņķis (kā taisnes t inversā figuŗa) arī pieskaŗas riņķiem (O) un (O_1).

Tā pat varam pierādīt, ka Feuerbacha riņķis pieskaŗas arī trešai trijstūŗa malai, t.i. malai BC, pierakstītam riņķim.

Pierādīsim vēl ka Feuerbacha riņķis pieskaŗas arī trijstūrī ierakstītam riņķim. Apzīmēsim malas BC un trijstūrī ierakstītā riņķa skaršanās punktu ar R, un malas BC un viņai pierakstīta riņķa skaršanās punktu ar R'. Kā zinam no iepriekšējā, (no agrienes)

$$R B = R_1 C \quad \text{u.t.t. arī}$$

$$MR = MR_1 = \rho_1$$

Ņemsim tagad par inversijas riņķa centru malas BC vidus punktu M un par viņa radiusu ρ_1. Šis riņķis ir ortogonals trijstūrī ierakstītam un malai BC pierakstītam riņķim. Tamdēļ izdarot transformaciju abi minētie riņķi pāriet paši sevī, bet viņu kopīgā tangente t_1 – tā kā viņa neiet caur inversijas centru M, – pāriet riņķī, kas skaŗas trijstūrī ierakst. un malai BC pierakst. riņķiem un iet caur inversijas centru M.

Apzīmējot taisnes MP un tangentes t_1 krustošanās punktu ar Q un taisnes MN un tangentes t_1 krustošanās punktu ar Q_1 – tā pat kā iepriekšējā gadījumā varam pierādīt [To izdarīt pašiem], ka

$$MQ \cdot MP = \left(\frac{c-b}{2}\right)^2 = \rho_1^2$$

$$MQ_1 \cdot MN = \left(\frac{c-b}{2}\right)^2 = \rho_1^2.$$

$$\left[\rho_1 = MR = \frac{a}{2} - RB = \frac{a}{2} - (p-c) = \frac{a}{2} - \frac{a+b-c}{2} = \frac{c-b}{2}\right]$$

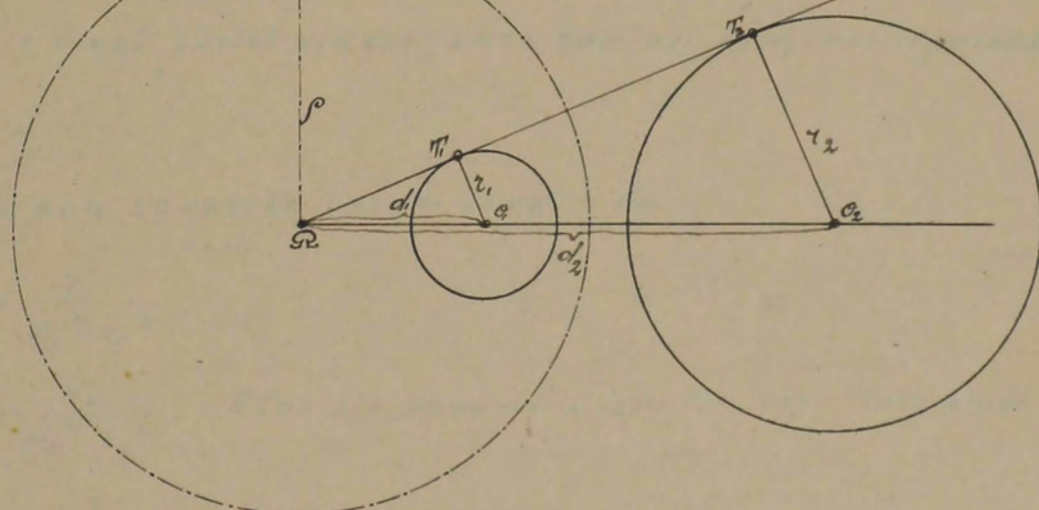
Tā tad punkti P, Q un punkti N, Q_1 ir inversi punkti un tamdēļ tangentes t_1 inversā figura iet arī caur trijstūŗa mala vidus punktiem P un N. T.i. taisnes t_1 inversā figura ir Feuerbacha riņķis. Tā kā tangente t_1 skaras trijst. ierakstītam riņķim arī Feuerbacha riņķis (tang. t_1 inversā fig.) skaŗas šim riņķim. Ar to Feuerbacha teorema ir pierādīta.

Apolonija problemas atrisināšana.

Apskatīsim tagad, kā ar inversijas palīdzību var atrisināt problemu: - konstruēt riņķi, kas pieskaras trīs dotiem riņķiem. Šo metodi pirmais lietoja Plikers 183

Ja varētu atrast tādu inversijas centru Ω un inversijas radiusu ρ, ka visi trīs dotie riņķi ar inversiju pārtransformējas vienādos riņķos (t.i.- riņķos, kuru radiusi ir vienādi), tad viegli varētu konstruēt riņķus, kas skaras visiem 3 pārtransformētiem riņķiem. [Atliktu apraksīt riņķi trīs vienādo riņķu centru trijstūrim un viņa radiusu samazināt par vienādo riņķu radiusu u.t.t.] Pārtransformējot visus četrus riņķus atpakaļ vienādie riņķi pāriet dotajos riņķos, bet riņķi, kas skaras trīs vienādajiem riņķiem - pāriet riņķos, kas skaras trīs dotajiem riņķiem. Untā Apolonija problema būtu atrisināta. Tā tad galvenais jautājums ir: - vai tāds inversijas centrs Ω un inversijas radiuss ρ ir iespējami? - Atbilde ir pozitīva.

Pieņemsim ka ir dots inversijas riņķis ar centru Ω un radiusu ρ, un kaut kāds riņķis (O_1). Konstruēsim riņķim (O_1) inverso riņķi (O_2). Apzīmēsim dotā riņķa radiusu ar r_1 un inversā riņķa rad. ar r_2. Bez tam dotā riņķa centra O_1 attālumu no inversijas centra Ω apzīmēsim ar d_1 un inversā riņķa centra O_2 attālumu no inv. centra Ω ar d_2. - Mēģināsim izteikt (inversā riņķa centra attālumu no inversijas riņķa centra) d_2 un r_2 atkarībā no zināmiem lielumiem d_1, r_1 un ρ. - No punkta Ω velkam dotam riņķim pieskari ΩT_1. Kā zinam no iepriekšējā, šī pieskare skaras arī inversam riņķim punktā T_2, kas ir punkta T_1 inversais punkts. Tamdēļ varam rakstīt, ka



183

$$\Omega T_1 \cdot \Omega T_2 = \rho^2$$

Bez tam no līdzīgiem trijstūriem $T_1 \Omega O_1$ un $T_2 \Omega O_2$ dabujam proporciju

$$\frac{\Omega O_1}{\Omega O_2} = \frac{\Omega T_1}{\Omega T_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Izejot no iepriekšējām sakarībām un ņemot vērā to, ka minētie trijstūri ir taisnleņķa trijstūri, dabujam vienādību

$$\frac{\Omega O_1}{\Omega O_2} = \frac{\overline{\Omega T_1}^2}{\Omega T_1 \cdot \Omega T_2}$$ un no riņas vienādību

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{d_1^2 - r_1^2}{\rho^2}\,,$$ kas dod, ka

$$d_2 = \rho^2 \frac{d_1}{d_1^2 - r_1^2}$$ vai arī, ievedot apzīmējumu $\rho^2 = K$,

$$\underline{d_2 = K \frac{d_1}{d_1^2 - r_1^2}.}$$

Tādā pat ceļā dabujam, ka

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{d_1^2 - r_1^2}{\rho^2}\,, \quad \text{u.t.t.}$$

$$\underline{r_2 = K \frac{r_1}{d_1^2 - r_1^2}}$$

Ja ir doti inversijas riņķis un kāds riņķis (O_1) – abas pastrīpotās formulas pilnīgi nosaka šā riņķa inverso riņķi (O_2). Bez tam abas šīs formulas dod iespēju atrast tādu inversijas riņķi (t.i.– inversijas centru Ω un radiusu ρ), ka izdarot transformāciju divi doti riņķi pāriet riņķos, kuŗu radiusi līdzinas diviem iepriekš noteiktiem skaitļiem.

Pieņemsim ka ir doti patvaļīgi izvēlēti riņķi, kuŗu radiusi ir r_1 un r_2.– Noskaidrosim, kā vienmēr var atrast tādu inversijas centru Ω un tādu inversijas rad. ρ, ka izdarot transformaciju dotie riņķi pāriet riņķos, kuŗu radiusi līdzinas iepriekš noteiktiem skaitļiem r_1' un r_2'.

Izlietojot pēdējo pastrīpoto sakarību varam rakstīt, ka

$$(1)\qquad \begin{aligned} r_1' &= K \frac{r_1}{d_1^2 - r_1^2}\,, \\ r_2' &= K \frac{r_2}{d_2^2 - r_2^2}\,. \end{aligned}$$

Abas šīs sakarības izdalot rezultātā dab.

$$\frac{r_1'}{r_2'} = \frac{d_2^2 - r_2^2}{d_1^2 - r_1^2} \cdot \frac{r_1}{r_2} \qquad \text{k.t.p.}$$

$$(2)\qquad \frac{r_1'}{r_2'} \cdot \frac{r_2}{r_1} = \frac{d_2^2 - r_2^2}{d_1^2 - r_1^2}.$$

Bet

$$\frac{r_1'}{r_2'} \cdot \frac{r_2}{r_1} = const = C \quad (Jo\ r_1, r_2, r_1'\ un\ r_2'\ ir\ doti\ lielumi).\ Tamdēļ$$

$$\frac{d_2^2 - r_2^2}{d_1^2 - r_1^2} = C.$$

Viegli variedomāties, ka $(d_1^2 - r_1^2)$ nava nekas cits kā no inversijas centra Ω pirmajam dotajam riņķim (O_1) vilktas tangentes kvadrāts un $(d_2^2 - r_2^2)$ nava nekas cits, kā no inv. centra Ω otram dotajam riņķim (O_2) vilktas tangentes kvadrāts. Tātad meklējamais centrs Ω ir punkts no kuŗa pret diviem dotiem riņķiem vilktu tangenšu kvadratu attiecība ir pastāvīgs lielums C. Kā redzējām, attiecībā uz diviem dotiem riņķiem tādu punktu var būt bezgalīgi daudz. Viņu geometriskā vieta ir riņķis, kas pieder abu doto riņķu (O_1, O_2) noteiktai koaksialu riņķu sistemai. Ar to ir skaidrs, ka par meklejamo inversijas centru Ω var ņemt kaut kuŗu riņķa — no kuŗa punktiem pret riņķiem (O_1) un (O_2) vilktu tangenšu kvadratu attiecība ir C — punktu. Ja centru Ω izvēlamies, lielumi d_1 un d_2 kļūst zinami, bet no sakar. (1) tad varam aprēķināt K. Zinot K nozīmi arī inversijas radiusu ρ varam uzskatīt par zināmu, jo

$$\rho = \sqrt{K}.$$

Izvēloties par inversijas centru kādu citu minētā riņķa punktu Ω', dabusim arī citu inversijas radiusu ρ'. Tā tad attiecībā uz diviem dotiem riņķiem (O_1) un (O_2) eksistē bezgalīgi daudz inversijas riņķu, kuri dod iespēju pārtransformēt abus dotos riņķus divos jaunos riņķos, kuŗu radiusi līdzinas iepriekš noteiktiem skaitļiem r_1' un r_2'. Kā redzams no sakarības (2), gadījumā kad

$$r_1' = r_2',$$

$$C = \frac{r_2}{r_1}.$$

T. i. — gadījumā kad gribam lai abi dotie riņķi pārtransformejas riņķos, kuŗu radiusi ir vienādi, atbilstošo inversijas riņķu centru geometriskā vieta ir riņķis, no kuŗa punktiem pret abiem dotiem riņķiem (O_1) un (O_2) vilktu tangenšu kvadratu attiecība ir vienāda ar doto riņķu radiusu attiecību.

Pieņemsim tagad ka ir doti trīs riņķi (O_1), (O_2) un (O_3) un noskaidrosim, kā var atrast inversijas riņķi, kas dod iespēju šos riņķus pārtransformēt trīs jaunos riņķos, kuŗu radiusi līdzinas vienam un tam pašam iepriekšdotom skaitlim a. T. i.:

$$r_1' = r_2' = r_3' = a.$$

No iepriekšējā ir skaidrs, ka inversijas riņķa centram Ω, kurš dotos riņķus (O_1) un (O_2) pārtransformē divos jaunos riņķos, kuŗu radiusi ir vienādi ar

$$r_1' = r_2' = a$$

– ir jāatrodas uz riņķa, no kuŗa punktiem pret riņķiem (O_1) un (O_2) vilktu tangenšu kvadratu attiecība līdzinas abu doto riņķu radiusu attiecībai $\frac{r_2}{r_1}$. Un tā kā meklejamam inversijas riņķim arī riņķi (O_2) un (O_3) ir jāpārtransformē riņķos, kuŗu radiusi ir vienādi ar

$$r_2' = r_3' = a,$$

viņa centram Ω ir jāatrodas arī uz riņķa, no kuŗa punktiem pret riņķiem (O_2) un (O_3) vilktu tangenšu kvadratu attiecība līdzinas doto riņķu radiusu attiec. $\frac{r_3}{r_2}$.

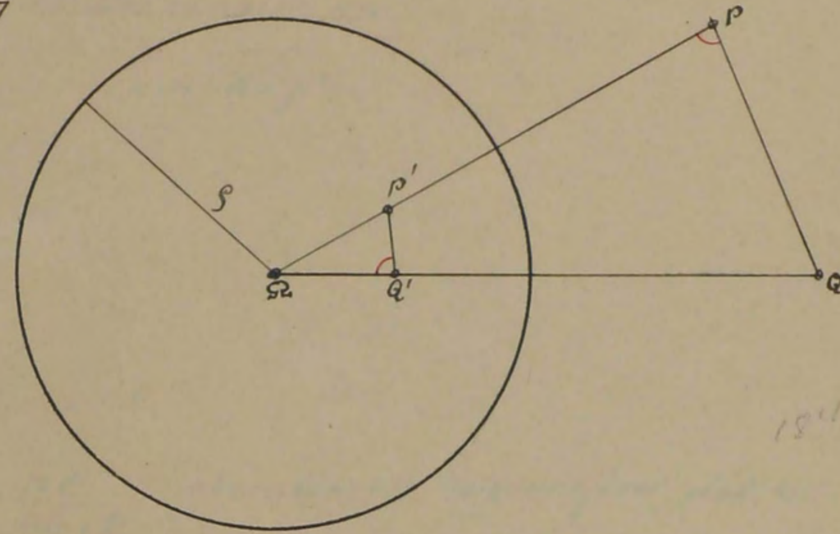
Tā nonākam pie slēdziena, ka meklējamais inversijas centrs Ω ir riņķiem (O_1, O_2) un riņķiem (O_2, O_3) atbilstošo inversijas centru riņķu krustošanās punktā. Tā kā divi riņķi var krustoties divos punktos, dabūsim divus tādus inversijas centrus Ω un Ω', un līdz ar to arī divus inversijas radiusus ρ un ρ', kas dod iespēju trīs dotos riņķus pārtransformēt trīs jaunos vienāda, iepriekš noteikta, lieluma riņķos. Tā tad attiecībā uz trīs dotiem riņķiem eksistē divi inversijas riņķi, kas dod iespēju dotos riņķus pārtransformēt trīs jaunos vienāda lieluma riņķos.

Līdz ar to ir noskaidrots, ka ar inversijas palīdzību tiešām var atrisināt Apolonija problemu tādā kārtā, kā tas minēts 177. l. p.

Ptolomeja teoremas pierādījums.

Pielietojot inversiju īpatnējā veidā var pierādīt Ptolomeja teoremu. T. i. teoremu: Riņķī ievilkta četrstūŗa diagonaļu reizinajums līdzinas šā četrstūŗa pretējo malu reizinajumu summai.

Vispirms izdarīsim vienu palīga noskaidrojumu.– Ņemsim inversijas riņķi ar centru punktā Ω un rad. ρ, un kaut kādus divus punktus P un Q. Tad konstruēsim šo punktu inversos punktus P' un Q' un noskaidrosim, kāds sakars pastāv starp abus dotos punktus savienojošo nogriezni PQ un abus inversos punktus savienojošo nogriezni $P'Q'$ [Jāpiezīmē, ka nogrieznis $P'Q'$ nav nogr. PQ inversā figura, jo nogr. PQ inversā figura ir riņķa loks]



Punkti P, P' un Q, Q' ir inversi punkti, tamdēļ pastāv sakarības

$$\Omega P\cdot\Omega P' = \rho^2.$$

$$\Omega Q\cdot\Omega Q' = \rho^2$$, kas dod, ka

$$\Omega P\cdot\Omega P' = \Omega Q\cdot\Omega Q' \quad \text{k.t.p.}$$

$$\frac{\Omega P}{\Omega Q} = \frac{\Omega Q'}{\Omega P'}.$$

Ņemot vērā pēdējo sakarību un arī zīmējumu nonākam pie slēdziena, ka trijstūri $P'\Omega Q'$ un $P\Omega Q$ ir līdzīgi, jo viņiem ir kopīgs leņķis $P'\Omega Q'$ un malas, kas ieslēdz šo leņķi, ir proporcionalas. [Tikai stāvoklis abiem minētiem trijstūriem nav homotetisks] Pamatojoties uz trijstūru līdzību dabujam vēl proporciju

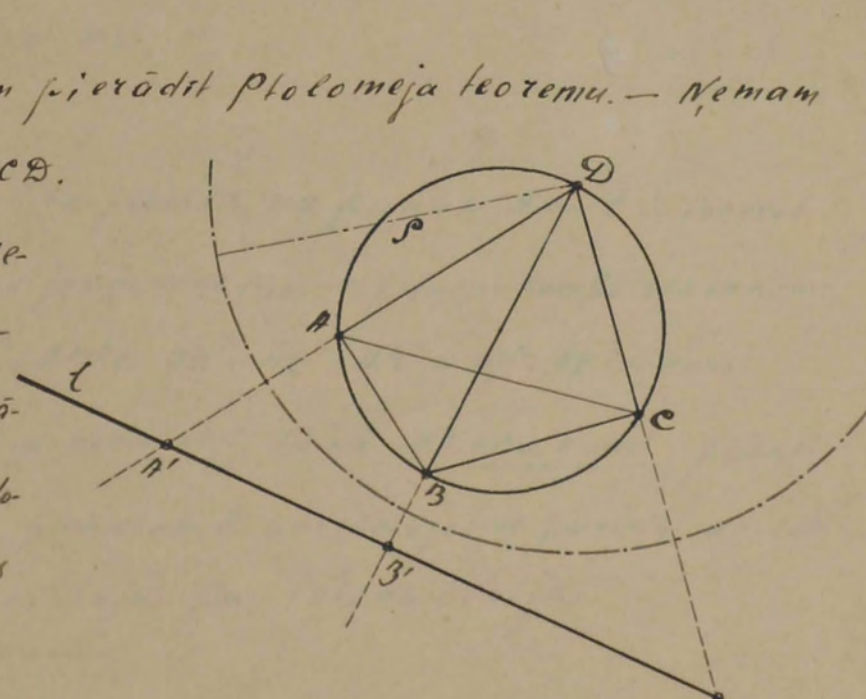
$$\frac{P'Q'}{PQ} = \frac{\Omega P'}{\Omega Q},$$ no kuŗas dabujam

$$\frac{P'Q'}{PQ} = \frac{\Omega P'\cdot\Omega P}{\Omega Q\cdot\Omega P} \quad \text{k.t.p.} \quad \frac{P'Q'}{PQ} = \frac{\rho^2}{\Omega P\cdot\Omega Q}$$ un tā tad

$$P'Q' = K\frac{PQ}{\Omega P\cdot\Omega Q}. \qquad (1)$$

kas ir meklētā sakarība. Viņa dod, ka attālums starp diviem inversiem punktiem līdzinas inversijas konstantei K pareizinātai ar daļu, kuŗas skaitītājs ir attālums starp abiem dotiem punktiem, bet saucējs doto punktu attālumu no inversijas centra reizinājums.

Izlietojot sakarību (1) viegli varam pierādīt Ptolomeja teoremu. — Ņemam riņķi un viņā ierakstītu četrstūri $ABCD$. Tad par inversijas centru izvēlamies vienu no četrstūŗa virsotnēm, piemēram virsotni D un par inversijas radiusu kaut kādu skaitli ρ. Izdarot transformaciju dotais riņķis — tā kā viņš iet caur inversijas



centru D – pāriet taisnē l neejošā caur inversijas centru. Taisnes l un staru DA, DB un DC krustošanās punkti A', B' un C' ir četrstūra virsotņu A, B un C inversie punkti.- Pamatojoties uz sakarību (1) varam rakstīt, ka

$$A'B' = AB\frac{k}{AD.BD}, \qquad kur\ k=\rho^2$$
$$B'C' = BC\frac{k}{BD.CD},$$
$$A'C' = AC\frac{k}{AD.CD}.$$

Kā redzams no zīmējuma

$$A'C' = A'B' + B'C' \quad u.t.t.$$

$$\frac{AC}{AD.CD} = \frac{AB}{AD.BD} + \frac{BC}{BD.CD}.$$ Atsvabinoties no saucējiem, dab. ka

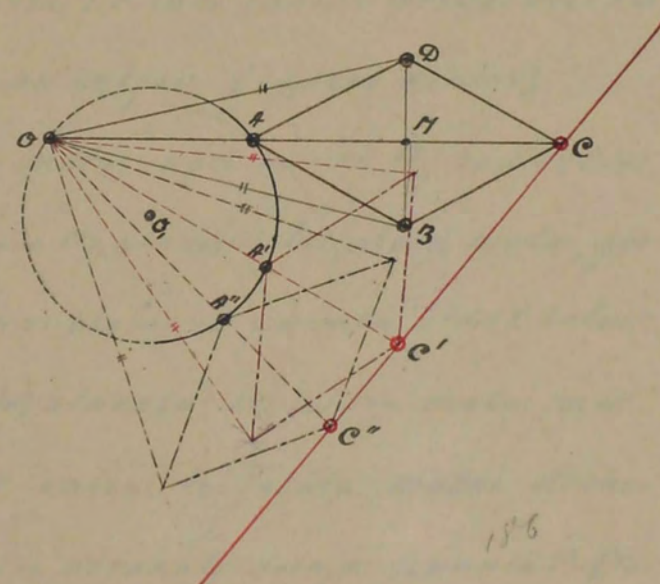
$$\underline{AC.BD = AB.CD + BC.AD}$$

un ar to Ptolomeja teorema ir pierādīta

Beigās apskatīsim instrumentu, kurš dod iespēju kustību pa riņķi pārvērst kustībā pa taisni. Tas ir Peaucelliera (franču virsnieka) pagājušā g.s. pēdējos gados konstruēts instruments. Viņa uzbūve ļoti vienkārša:- Rombs, kura leņķi var mainīties, bet malu garums paliek nemainīgs. Uz romba diagonales AC turpinājuma atrodas punkts O, kura attālums no romba virsotnēm B un D ir vienāds un paliek nemainīgs. T.i.-

$$OD = OB = const.$$

Liekot rombam pārvietoties tā, ka viņa virsotne A pārvietojas pa caur punktu O ejošā riņķa loku – virsotne C pārvietojas pa taisnu līniju.



Lai pierādītu ka tas tiešām tā, atliek pierādīt, ka punkti A un C ir inversi punkti attiecībā uz punktu O kā inversijas centru visos iespējamos romba stāvokļos

$$OA.\ OC = (OM-AM)(OM+AM) = \overline{OM}^2-\overline{AM}^2 = \overline{OD}^2-\overline{MD}^2-\overline{AM}^2 = \overline{OD}^2-\overline{AD}^2 = const.,$$

jo pēc noteikuma attālumi OD un AD paliek nemainīgi. Tā kā $\underline{OA.OC = const}$, punkti A un C tiešām ir inversi punkti un tā tad punktam A pārvietojoties pa riņķi, kas iet caur inversijas centru O, punkts C pārvietojas pa taisnu līniju.

Uzdevumi

1. a) Pierādīt, ka trijstūra ārējo leņķu bissektrisu un atbilstošiem leņķiem pretim guļošo trijstūra malu krustošanās punkti visi trīs atrodas uz vienas un tās pašas taisnes

b) Pierādīt, ka divu trijstūra iekšējo leņķu un viena ārējā leņķa bissektrisu un pretimguļošo trijstūra malu krustošanās punkti visi trīs atrodas uz vienas un tās pašas taisnes

2. Dots trijstūris un punkts. Caur šo punktu un trijstūra virsotnēm vilkti stari, kas krusto atbilstošām virsotnēm pretim guļošās trijstūra malas. Ņemot uz katras trijstūra malas ceturto harmonisko punktu ar uz šīs malas guļošām trijstūra virsotnēm un minēto krustošanās punktu, dabūjam trīs jaunus punktus. Pierādīt ka šie trīs jaunie punkti visi atrodas uz vienas un tās pašas taisnes.

3. Noskaidrot-kur atrodas divu dotu riņķu iekšējais un ārējais līdzības centrs, ja viens no šiem riņķiem ir pārvērties par punktu. [citādi sakot – noskaidrot, kur atrodas dotā riņķa un dotā punkta iekšējais un ārējais līdzības centrs].

4. Ja ir dots trijstūris un uz vienas viņa malas kāds punkts P, tad velkot no šā punkta taisni paralelu pa labi (no punkta P) stāvošai trijstūra malai, pēc tam no šīs paraleles un otras trijstūra malas krustošanās punkta atkal velkot taisni paralelu pa labi (no pēdējā krust. punkta) stāvošai trijstūra malai u. t. t. un tā turpinot – pēc tam, kad būsim dabujuši katrai trijstūra malai divas paraleles, poligons noslēgsies. t. i. atgriezīsimies atpakaļ dotajā punktā P. [Tas pats būs gadījumā, ja vilksim taisnes paraleles no dotā un krustošanās punktiem pa kreisi stāvošām trijstūra malām] – Pierādīt to.

5. Pierādīt, ka arī gadījumā ja izejot no uz kādas trijstūra malas dota punkta P tādā pat kārtā, kā tas aizrādīts iepriekšējā uzdevumā, zīmējam trijstūra malām antiparaleles – dabujam noslēgtu poligonu.

6. Pierādīt, ka to pašu, ko iepriekšējos uzdevumos, dabujam arī gadījumā, ja

izejot no uz kādas trijstūra malas dota punkta P aizrādītā kārtā velkam taisnes paralelas hordām, kas savieno riņķu – kuri skaras divām trijstūra malām – pieskaršanās punktus.

7. Atrast trijstura ortocentra un šim trijstūrim apvilkta riņķa centra attālumu – no trijstūra pamatnes – attiecību.

8. Pierādīt, ka trijstūra augstumu pēdu punkti un šā trijstura malu vidus punkti visi atrodas uz viena un tā paša riņķa, kura radiuss līdzinas trijstūrim apvilkta riņķa radiusa pusei un kura centrs atrodas vidū starp trijstūrim apvilkta riņķa centru un ortocentru. (Šo riņķi sauc par Feuerbacha riņķi).

9. Ja ap trijstūri apvilkts riņķi un uz viņa (riņķa) ņem kādu punktu P, tad šim punktam atbilstošā Simsona taisne dala atgriezumu starp ņemto punktu P un trijstūra ortocentru uz pusēm. – Pierādīt to.

10. Pierādīt, ka punkts, kas ir simmetrisks ar trijstūra ortocentru attiecībā pret kādu šā trijstūra malu, atrodas uz trijstūrim apvilkta riņķa.

11. Dots trijstūris un viņā iezīmēti bezgalīgi daudz taisnstūri, kuru pamatnes balstas uz dotā trijstūra pamatnes. – Atrast šo taisnstūru diagonaļu krustošanās punktu geometrisko vietu.

12. Ja trijstūrim apvilkts riņķi un uz šā riņķa ņem kādu punktu P, tad punkts kurā punktam P atbilstošā Simsona taisne krusto taisni, kas savieno dotā trijstūra ortocentru ar ņemto punktu P – atrodas uz Feuerbacha riņķa. Pierādīt to.

13. Riņķa iekšpusē dots kāds punkts P. Savienojot šo punktu ar visiem riņķa punktiem dabujam bezgalīgi daudz staru. Atrast šo staru vidus punktu geometrisko vietu.

14. Ja ir dots trijstūris – uz katras viņa malas uzbūvējot trijstūrī ievilktu taisnstūru seriju (katras serijas taisnstūru pamati balstas uz vienas un tās pašas trijstūra malas) dabujam trīs dotajā trijstūrī ievilktu taisnstūru serijas un līdz ar to trīs taisnes, kuras katra ir vienai un tai pašai taisnstūru serijai piederošu taisnstūru diagonaļu krustošanās punktu geometriskā vieta. (skat. 11. uzdev.). – Pierādīt, ka

šis trīs taisnes visas krustojas vienā un tanī pašā punktā, kas ir dotā trijstūra Lemoine'a punkts.

15. Ja trijstūrī ir dots kāds punkts P un caur šo punktu un trijstūra virsotnēm vilktas transversales, tad taisnes, kas savieno šo transversaļu vidus punktus ar — tai virsotnei, no kuras transversale iziet pretim stāvošo — trijstūra malu vidus punktiem, krustojas visas trīs vienā un tanī pašā punktā. — Pierādīt, ka tas tiešām tā.

16. Pierādīt, ka I. Lemoine'a riņķis sadala katru atbilstošā trijstūra malu trīs nogriežņos (piem. malu a nogriežņos a_1, a_2, a_3; malu b nogr. b_1, b_2, b_3 un malu c nogriežņos c_1, c_2, c_3), kuru attiecība visām malām līdzinas trīs to pašu lielumu λ, μ, ν attiecībai; kur λ, μ, ν ir trijstūra malu funkcijas.

17. Noskaidrot — kur atrodas taisnleņķa trijstūra Lemoine'a punkts?

18. Pierādīt, ka — ja ω ir Brocard'a leņķis, tad

$$\sin^3\omega = \sin(A-\omega)\sin(B-\omega)\sin(C-\omega).$$

19. Pierādīt, ka izejot no formulas $\sin^3\omega = \sin(A-\omega)\sin(B-\omega)\sin(C-\omega)$ un pieņemot, ka $A+B+C = 180°$ — var dabūt formulu

$$\operatorname{cotang}\omega = \operatorname{cotang}A + \operatorname{cotang}B + \operatorname{cotang}C.$$

20. Ja ir dots trijstūris un uz katras viņa malas viens (patvaļīgi izvēlēts) punkts, tad riņķi — kuri katrs iet caur diviem (uz trijstūra malām) dotajiem punktiem un caur to trijstūra virsotni, no kuras iziet abas ņemtajiem punktiem atbilstošas trijstūra malas — visi trīs krustojas vienā un tanī pašā punktā. Pierādīt to.

21. Noskaidrot, kas ir trīs — iepriekšejā uzdevumā aizrādītā kārtā konstruētu — riņķu krustošanās punkts, ja trīs dotie punkti ir trijstūra malu vidus punkti?

22. Ir dots trijstūris un uz katras viņa malas divi tādi punkti, ka ik četri punkti, kas guļ uz divām trijstūra malām, atrodas uz viena un tā paša riņķa. Ņemot pa četriem (katrus divus punktus uz vienas malas) 6 dotos punktus, dabujam trīs riņķus. — Pierādīt, ka visi šie trīs riņķi ir identiski.

23. Dots trijstūris ABC, kurš var deformēties tā, ka viņa pamatne BC un leņķis pie virsotnes A paliek nemainīgi. Doto trijstūri aizrādītā kārtā deformējot rodas bezgalīgi daudz trijstūru, kuriem visiem ir kopīgs pamats un leņķi pie pamatam pretim stāvošām virsotnēm ir vienādi. Atrast šo trijstūru ortocentru (H), smaguma centru (G), ierakstītu riņķu centru (J), I Brocard'a punktu (Ω) un Lemoine'a punktu (K) geometriskās vietas.

24. Atrast iepriekšējā uzdevumā minēto punktu geometriskās vietas trijstūriem, kuri rodas doto trijstūri ABC deformējot tā, ka viņa pamatne BC paliek nemainīga (nekustīga), bet virsotne A kustas pa taisni — paralelu pamatnei BC.

25. Dotas trīs savstarpēji ortogonalas plāksnes un viena slīpa plāksne, kas ortogonalās plāksnes pāršķeļ. (Piemēram trīs koordinatu plāksnes un viena slīpa plāksne). Slīpā plāksne veido ar katru ortogonalo plāksni vienu no leņķiem α, β un γ, kuru summa tiek apzīmēta ar S. T. i. —

$$\alpha + \beta + \gamma = S.$$

— Noskaidrot: vai šī summa S paliek ierobežots lielums slīpajai plāksnei pēc patikas mainot savu stāvokli? Un ja summa S ir ierobežots lielums — kādās robežās viņa ir ieslēgta?

26. Atrast formulu, kura saista trijstūrim apraksītā riņķa radiusu, kādai no viņa malām pieraksītā riņķa radiusu un attālumu starp trijstūrim aprakstītā un pieraksītā riņķa centriem.

27. Ja ir dots ap riņķi aprakstīts četrstūris, tad tie leņķi — kas atrodas pie pretējo malu un riņķa pieskaršanās punktus savienojošo taišņu krustošanās punkta (t. i. — divi dažāda lieluma leņķi) — katrs ir vienāds ar to divu četrstūra leņķu summas pusi, kuri neatrodas pretim aplūkojamam leņķim pie minēto taišņu krustošanās punkta. Pierādīt to.

28. Pierādīt, ka nepieciešamais un pietiekošais noteikums lai ap riņķim aprakstītu četrstūri savukārt varētu aprakstīt riņķi ir — lai taisnes, kas savieno četrstūra pretējo malu un viņā ierakstītā riņķa pieskaršanās punktus, būtu perpendikularas savā starpā.

29. Sastādīt vienai un tai pašai koaksialu riņķu sistemai piederošu riņķu vispārīgo nolīdzinājumu.

30. Ir dota koaksialu riņķu sistema un abi viņas robežpunkti L un L'. Katram no šiem punktiem attiecībā uz ikvienu atbilstošās koaksialu riņķu sistemas riņķi ir viena polare; un tā tad attiecībā uz visiem šīs sistemas riņķiem katram no punktiem L un L' ir bezgalīgi daudzas polares. Pierādīt, ka visas punkta L polares iet caur punktu L' un otrādi – visas punkta L' polares iet caur punktu L.

31. Konstruēt koaksialu riņķu sistemu, ja ir doti viens šai sistemai piederošs riņķis un viens viņas robežpunkts.

32. Konstruēt koaksialu riņķu sistemu, ja ir doti abi viņas robežpunkti.

33. Doti divi riņķi viens otra iekšpusē. Mazākam riņķim vilktas divas pieskares AA' un BB'; pie kam punkti A, A' un B, B' ir šo pieskaru un lielākā riņķa krustošanās punkti. Punkta A attālums no abu doto riņķu radikalās ass apzīmēts ar p, punkta A' attālums ar p', punkta B attālums no šīs pašas ass ar q un punkta B' ar q'. Pierādīt, ka

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{\sqrt{p} + \sqrt{q}}{\sqrt{p'} + \sqrt{q'}}.$$

34. Pierādīt, ka – ja transformē parabolu (ar inversi saistītu punktu palīdzību) izvēloties par inversijas centru viņas fokusu, tad parabolas inversā figura iznāk kardioida. [Pierādījumā parabolas nolīdzinājumu izdevīgāk ņem polarkoordinatās]

35. Uz vienas taisnes doti četri harmoniski saistīti punkti A, B, C, D. – Pierādīt, ka izvēloties par inversijas centru kaut kuru tās pašas taisnes punktu, uz kuras atrodas četri dotie punkti, arī šo punktu inversie punkti A', B', C', D' ir harmoniski saistīti punkti.