Cand. math. J. Esers

Algebriskā analize

Teōrija un uzdevumi

Reālās ģimnazijas kurss

Rīgā 1937

L. Ū. Studentu Padomes Grāmatnīcas izdevums

Cand. math. **J. Esers**

Algebriskā analize

Teōrija un uzdevumi

Reālās ģimnazijas kurss

Izglītības ministrijas mācības grāmatu vērtēšanas komisijā atzīta par derīgu lietošanai vidusskolās.

Rīgā 1937

L. Ū. Studentu Padomes Grāmatnīcas izdevums

„Latvju Kultūras" spiestuve, Rīgā, Tērbatas ielā 15/17

PRIEKŠVĀRDI.

Algebriskās analizes mācīšana un mācīšanās vidējās mācības skolās ir vispār viens no grūtākajiem uzdevumiem, tāpēc ka analizes viela ir ļoti plaša savā apjomā un dziļa savā saturā. Mūsu apstākļos šo uzdevumu vēl apgrūtina mūsu jaunajai skolai piemērotu mācības grāmatu trūkums šai priekšmetā. Šo grūto uzdevumu grib atvieglot šī grāmata, kuŗā saturs saskan ar jaunām programmām algebriskā analizē un kuŗā viela sakārtota tā, kā programmās paredzēts.

Esmu aplūkojis I. nodaļā lielumu, skaitļu un matēmatiskās izteiksmes jēdzienus no algebriskās analizes viedokļa. Tas ir tiešs ievads funkciju mācībā, spilgti pastrīpo analizes raksturu un atvieglo turpmāko nodaļu apstrādāšanu un izpratni. Funkciju mācībā iepazīstamies ar lielumu funkcionālām sakarībām, liekam dinamisko elementu statiskā elementa vietā, kas dominēja elementārā matēmatikā un mācāmies funkcionālo sakarību pētīšanas metodes. Šo jēdzienu izpratne un metožu zināšana ir viens no svarīgākajiem uzdevumiem matēmatikā un vispārīgā izglītībā, jo tas ir līdzeklis lietu un parādību kvantitātīvo īpašību pētīšanā un izprašanā, kas eksistē ārējā pasaulē. Tāpēc nodaļai par funkcijām ir veltāma mūsu uzmanība. Bet šī nodaļa dibinās uz robežlielumiem un uz bezgalīgi maziem lielumiem, tāpēc rūpīgi esmu piegājis arī II. nodaļai, kuŗā šie jautājumi apskatīti. Šie jautājumi apstrādāti trijās nodaļās, kas izveido grāmatas I. daļu — analizes ievadu. Pārējā viela vēl iedalīta divi daļās: II. daļa — diferenciālrēķini un III. daļa — integrālrēķini.

Grāmatā sakopoti arī ļoti daudz uzdevumu pieaugušo grūtību kārtībā, tā kā nav vajadzība pēc īpaša uzdevumu krājuma. Uzdevumi sākti no visvienkāršākiem un aiziet līdz vissarežģītākajiem. Tāpēc katrs var tos izlietot tik, cik to prasa un atļauj apstākļi. Tā kā uzdevumi ievietoti pēc attiecīgajiem paragrafiem un dotas arī uzdevumu atbildes, tad grāmatu var lietot arī pašmācībai un kā palīglīdzekli šā priekšmeta zināšanu atsvaidzināšanai. Šo uzdevumu atvieglo vēl tas apstāklis, ka tekstā ievietoti arī raksturīgi piemēri un to atrisinājumi. Lai uzdevumu saturs būtu interesantāks un lietišķīgāks, tad tas skaŗ arī techniskos un reālās dzīves jautājumus. Tik daudz par vielas saturu un apjomu. Vēl pāris vārdus par tās apstrādājumu.

Pierādījumi doti īsi, noteikti, iekšēji loģiski un pamatoti. Formulējumos un definējumos centos būt precīzs.

Terminoloģijā ievēroti 1935. g. matēmatisko zinātņu darbinieku kongresa lēmumi.

J. Esers.

Valmierā, 1937. gadā.

Satura rādītājs

I. daļa.
Analizes ievads

I. Lielumi un skaitļi.

II. Bezgalīgi lielie un bezgalīgi mazie lielumi. Robežlielumi.

III. Funkcijas.

II. daļa.

Diferenciālrēķini

IV. Funkcijas atvasinājums un diferencēšanas likumi.

V. Bezgalīgās rindas.

VI. Funkcijas augšana un dilšana. Maksims un minims.

VII. Nenoteiktās izteiksmes.

III. daļa.

Integrālrēķini

VIII. Nenoteiktais un noteiktais integrāls.

I DAĻA

ANALIZES IEVADS

I. nodaļa.

Lielumi un skaitļi.

Apskatīsim algebriskā analizē vairāk nepieciešamākās skaitļu īpašības, lielumus un skaitļu nozīmi lielumu pētīšanā.

1. §. Lielumi un to nozīmes.

Objekti viens no otra atšķiŗas ar savām īpašībām jeb pazīmēm. Piemēram, viens galds var būt apaļš, liels, smags, ozola koka un atrasties istabā; otrs — ovāls, mazs, viegls, bērza koka un atrasties ārā. Dažas šās objektu īpašības, kā tilpums, smagums ir tādas, ka tās var būt lielākas vai mazākas, salīdzinot ar tādas pašas dabas pazīmēm un salīdzināšanas rezultātā iegūt skaitli.

Objektu pazīmes, kas var būt lielākas, vai mazākas, salīdzinot ar tādas pašas dabas pazīmēm un kuŗas var izteikt skaitliski, sauc par lielumiem.

Piemēram, tilpums, laukums, gaŗums, svars, temperātūra, spēks, ātrums u. t. t. ir lielumi. Lielumi var būt dažādi. Katrai zinātņu nozarei, kas nodarbojas ar dabas pētīšanu, var būt savi raksturīgi lielumi. Piemēram, fizikai fizikāli lielumi — temperātūra, blīvums, īpatnējais svars u. c.; mēchanikai — ātrums, paātrinājums u. t. t. Lai cik dažādi lielumi arī nebūtu, tiem visiem ir viena kopīga īpašība: tos var izteikt skaitliski ar

1. skaitīšanu, 2. mērīšanu, 3. aprēķināšanu.

Tā dabūto skaitli sauc par **lieluma skaitlisko nozīmi** jeb **lieluma nozīmi.** Piemēram, kāda pagasta iedzīvotāju skaitu atrodam skaitliski ar skaitīšanu; upes dziļumu ar mērīšanu, Saules attālumu no Zemes ar aprēķināšanu.

Lai lielumus mērītu, jāizvēlas vienība jeb mērs. Mainot lieluma mēru, mainās arī lieluma nozīme. Piemēram, ja kāda ķermeņa svars ir P, vienlīdzīgs 3 kilogramiem vai 3000 gramiem, tad 3 ir svara skaitliskā nozīme, ja par mēru jeb vienību ir pieņemts kilograms, bet 3000 ir svara skaitliskā nozīme, ja par mēra vienību ir pieņemts grams.

Lieluma nozīme zinātnē un dzīvē ir ļoti svarīgs jēdziens, jo tikai tāpēc, ka katru lielumu iespējams saistīt ar vienu skaitli — lieluma nozīmi, ir iespējams izteikt matēmatiskās formulās tās dažādās sakarības, kas pastāv lielumu starpā. Visās formulās lielumu vietā ir to nozīmes. Piemēram, Pitagora teorēma: taisnleņķa trijstūŗa hipotenūzas kvadrāts ir vienlīdzīgs katetu kvadrātu summai. Formulā to izsakām

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Šai formulā burti neapzīmē hipotenūzu un katetes, bet to skaitliskās nozīmes. Parasti lielumu un tā skaitlisko nozīmi apzīmē ar vienu un to pašu burtu un ja šis simbols ir kādā matēmatiskā izteiksmē, tad šis simbols uzskatāms kā lieluma nozīmes simbols, bet nevis kā paša lieluma simbols. Tāpēc ar lieluma nozīmēm izpildāmās darbības sauc par darbībām, izpildāmas ar pašiem lielumiem.

Ievērosim, ka katrs dabas likums, kas runā par lielumu sakarībām, runā tieši par lielumiem, bet ne par to skaitliskām nozīmēm, tikai šā likuma matēmatiskā formulējumā ir ne paši lielumi, bet to skaitliskās nozīmes.

2. §. Pastāvīgie un mainīgie lielumi.

Jau vienkārša dabas novērošana liek iedalīt lielumus divi klasēs: pastāvīgos un mainīgos. Domāsim par ritošu riteni. Kamēr tas rit pa gludu ceļu, tikmēr tā centra attālums no zemes nemainās. Centra attālums no zemes ir pastāvīgs lielums. Tiklīdz ritošais ritenis atsitas pret kādu nelīdzenumu, tas lēkādams traucas tālāk un līdz ar to tā centra attālums no zemes mainās, tas ir mainīgs lielums. Pirmajā gadījumā attāluma nozīme ir viena un tā pati, otrā — dažādas.

Lielumu, kam ir tikai viena nozīme, sauc par pastāvīgu lielumu.

Lielumu, kam var būt dažādas nozīmes, sauc par mainīgu lielumu.

Gandrīz visi dabā novērojamie lielumi ir mainīgi lielumi, kas parādās vienā vai otrā procesā, bet matēmatiskās formulās tie ir mainīgi skaitļi, tie ir simboli, kuŗi var apzīmēt kaut kuŗu skaitli. Mainīgā lieluma nozīme ir mainīgs skaitlis. Pastāvīgā lieluma nozīmē ir pastāvīgs skaitlis, tas ir simbols, kas apzīmē vienu un to pašu skaitli.

Lielumi var būt pastāvīgi pēc savas dabas, piemēram, trijstūŗa iekšējo leņķu summa, daudzstūŗa ārējo leņķu summa, vai arī pastāvīgi pēc uzdevuma jeb jautājuma nosacījumiem, piemēram, riteņa centra attālums no zemes pirmajā gadījumā, hordas gaŗums noteiktā vietā vilktai hordai u. t. t. Pirmā veida pastāvīgus lielumus sauc par absolūti pastāvīgiem lielumiem; otrā veida par relātīviem pastāvīgiem lielumiem. Relātīvie pastāvīgie lielumi vienā jautājumā ir pastāvīgi, bet citā jautājumā tie var būt mainīgi. Absolūtie pastāvīgie lielumi dabā sastopami maz.

3. §. Intervalls un lielumu maiņas raksturs.

Mainīgais lielums savā mainīšanās procesā vispār var pieņemt skaitliskās nozīmes, kas atrodas divi skaitļu a un b starpā.

Nozīmju kopu, kas atrodas starp a un b, sauc par intervallu (a, b).

Skaitļus a un b sauc par intervalla robežām. Ja a un b pieskaita intervallam, tad tas ir slēgts intervalls. To, ka x mainās slēgtā intervallā, apzīmē nevienlīdzībā:

$$a \leqslant x \leqslant b.$$

Ja vienu, vai abas robežas nepieskaita intervallam, tad tas ir atklāts intervalls, ko apzīmē šādi:

$$a < x < b; \quad a \leqslant x < b \quad \text{vai} \quad a < x \leqslant b.$$

No ģeometriskā viedokļa par intervallu sauc punktu kopu starp a un b.

Lielumi var mainīties kādā intervallā pēc dažādākiem likumiem, atkarībā no tā, kādas ir to nozīmes un nozīmju secība.

Ja lielums mainās tā, ka katra tā nozīme ir lielāka par iepriekšējo un mazāka par nākošo, tad lielumu sauc par augošu; ja lielums mainās tā, ka katra tā nozīme ir mazāka par iepriekšējo un lielāka par nākošo, tad lielumu sauc par dilstošu.

Ja lielums savā mainīšanās procesā tikai aug, vai tikai dilst, tad lielums mainās monotoni — pretējā gadījumā — svārstīgi.

4. §. Matēmatiskā izteiksme un tās nozīme.

Apskatīsim dažus svarīgākos jautājumus par matēmatisko izteiksmi.

Par matēmatisku izteiksmi sauc skaitļu savienojumu ar matēmatiskajām zīmēm.

Piemēram, $\frac{1+5\sqrt{16}}{9-2}$ ir matēmatiska izteiksme. Tā norāda, kādas darbības ir jāizpilda ar skaitļiem 1, 5, 16, 9 un 2.

Matēmatiskās izteiksmes darbību skaits var būt lielāks vai mazāks. Atsevišķā gadījumā arī vienu skaitli var uzskatīt kā matēmatisku izteiksmi, kuŗā darbību skaits ir 0. Piemēram, saka, ka vienlīdzība $6-2x=x$, izteic prasību, lai divas izteiksmes būtu vienlīdzīgas, kaut gan labajā pusē ir tikai viens skaitlis x. Matēmatiskā izteiksme ne tikai norāda, kādas darbības ir jāizpilda ar tai ietilpstošiem skaitļiem, bet apzīmē arī darbību rezultāta skaitli. Tas sevišķi redzams vispārīgo skaitļu izteiksmēs, kur rezultātu nav nemaz iespējams dabūt kā vienu noteiktu skaitli. Piemēram, izteiksme $\frac{a+b}{a-b}$ no vienas puses norāda, kādas darbības jāizpilda, bet no otras puses, apzīmē arī darbību rezultātu.

Ar skaitļiem varam izpildīt dažādas darbības. Šās darbības iedala divi klasēs: **algebriskās un transcendentās.**

Par algebriskām darbībām sauc s a s k a i t ī š a n u, a t ņ e m - š a n u, r e i z i n ā š a n u, d a l ī š a n u, k ā p i n ā š a n u un s a k - n e s v i l k š a n u, j a k ā p i n ā t ā j s u n s a k n e s r ā d ī t ā j s ir pastāvīgs racionāls skaitlis. V i s a s p ā r ē j ā s d a r b ī b a s ir t r a n s c e n d e n t a s.

Piemēram, kāpināšana ar irracionālu kāpinātāju, saknes vilkšana, ja sakņu rādītājs ir irracionāls skaitlis un logaritmēšana ir transcendentas darbības.

Līdzīgi sadala arī matēmatiskās izteiksmes.

M a t ē m a t i s k u i z t e i k s m i, k u ŗ ā i r t i k a i a l g e b r i s k a s d a r b ī b a s, s a u c p a r a l g e b r i s k u i z t e i k s m i; i z t e i k s m i, k u ŗ ā i r k a u t v i e n a t r a n s c e n d e n t a d a r - b ī b a, s a u c p a r t r a n s c e n d e n t u i z t e i k s m i.

Piemēram, $\frac{a+\sqrt{3}}{5-b}$ ir algebriska, bet $5+\lg_b a$ un $\frac{3+a^{\sqrt{2}}}{4-b}$ ir transcendentas izteiksmes.

M a i n ī g o s s k a i t ļ u s, k a s i r m a t ē m a t i s k a j ā i z - t e i k s m ē, s a u c p a r š ā s i z t e i k s m e s a r g u m e n t i e m.

Pēc argumentu skaita matēmatiskās izteiksmes iedala vienu, divu, triju u. t. t. argumentu izteiksmēs. Piemēram, ja x, y un z ir mainīgi skaitļi, tad izteiksme $\frac{2+5y}{3y}$ ir viena argumenta izteiksme, $\frac{2y^2+4y^3z}{\sqrt{z}+\lg_a y}$ ir divi argumentu izteiksme.

Ja matēmatiskās izteiksmes $\frac{3x+5y}{2x-y}$ argumentiem x un y piešķirsim kādas patvaļīgas nozīmes, piemēram, $x=2$ un $y=1$, tad arī pati izteiksme dabūs kādu skaitlisku nozīmi, šai gadījumā $\frac{11}{3}$. Saka, ka $\frac{11}{3}$ ir šās matēmatiskās izteiksmes skaitliskā nozīme, ja $x=2$ un $y=1$.

Nozīmi, ko iegūst matēmatiskā izteiksme, ja tās argumentiem x, y, z, ... u ir nozīmes a, b, c, ... d, sauc par šās izteiksmes nozīmi, ja $x=a$, $y=b$, $z=c$ ... $u=d$ un apzīmē šādi:

$$\left[\;\diagdown\;\right]_{\substack{x=a\\ y=b\\ z=c\\ \cdots\\ u=d}}$$

kur iekavās raksta doto izteiksmi.

Apskatāmo piemēru varam uzrakstīt nu šā:

$$\left[\frac{3x+5y}{2x-y}\right]_{\substack{x=2\\ y=1}}=\frac{3.2+5.1}{2.2-1}=\frac{11}{3}.$$

Lai vienkāršotu matēmatisku izteiksmi un līdz ar to jautājumu, kas ap to saistās, tad bieži vien, tās arguments jāapmaina ar kādu jaunu argumentu, saistot veco argumentu ar jauno kādā formulā un ievietojot dotajā matēmatiskajā izteiksmē vecā argumenta vietā šo jauno. Piemēram, izteiksmi $\frac{2+x^2}{2-x^2}$ ar formulu $x=\sqrt{y}$ varam pārveidot izteiksmē ar argumentu y, kas ir vienkāršāka nekā ar x, jo nav kvadrāta. Tiešām, paturot to pašu rakstību, kā izteiksmes nozīmes atrašanai, rakstām:

$$\left[\frac{2+x^2}{2-x^2}\right]_{x=\sqrt{y}}=\frac{2+(\sqrt{y})^2}{2-(\sqrt{y})^2}=\frac{2+y}{2-y}.$$

Arī algebrā, piemēram, *binomālo* nolīdzinājumu $ax^n+b=0$ ar formulu $x=z\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ pārveido vienkāršākā veidā: $z^n+1=0$. Prazdami atrisināt binoma nolīdzinājuma visvienkāršāko veidu, protam atrisināt arī tā vispārīgo veidu. Tā sarežģītāku jautājumu varam pārvērst vienkāršākā.

Uzdevumi.

Atrast izteiksmju nozīmes:

1. $[x-y]_{\substack{x=3\\y=1}}$ Atb. (2) 2. $\left[\frac{x-y}{x+y}\right]_{\substack{x=3\\y=1}}$ Atb. ($\frac{1}{2}$)

3. $\left[\frac{x-y}{x+y}\right]_{\substack{x=3\\y=2}}$ " ($\frac{1}{5}$) 4. $\left[\frac{2+x^2}{2x+1}\right]_{x=3}$ " ($\frac{11}{7}$)

5. $\left[\sin(x+y)\right]_{\substack{x=\frac{\pi}{2}\\y=0}}$ " (1) 6. $\left[\frac{\sin(u+v)}{1+u\cos v}\right]_{\substack{u=0\\v=\frac{\pi}{2}}}$ " (1)

Pārveidot izteiksmes:

7. $[2+x^2]_{x=\sqrt{y}}$ Atb. $(2+y)$ 8. $\left[\frac{1+(x^2+2)^2}{1-(x^2+2)^2}\right]_{x=\sqrt{y^2-2}}$ Atb. $\left(\frac{1+y^2}{1-y^2}\right)$

9. $\left[\frac{1+(y+2)^2}{1-(y+2)^2}\right]_{y=x-2}$ " $\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$ 10. $\left[\frac{1+x^4}{1+x^2}\right]_{x=\sqrt{y}}$ " $\left(\frac{1+y^2}{1+y}\right)$

11. $\left[\frac{8+5\sqrt{z}}{6+4\sqrt{z}}\right]_{z=(y-1)^2}$ Atb. $\left(\frac{3+5y}{2+4y}\right)$

12. Atrast izteiksmei y^2+2 formulu, lai tā pārveidotos izteiksmē $x+2$.

13. Atrast izteiksmei $1+(y+2)^2$ formulu, lai tā pārveidotos izteiksmē $1+x^2$. (Atb. $y=\sqrt{x}$; $y=x-2$).

5. §. Matēmatiskās izteiksmes harakteristika.

Matēmatiskā izteiksme norāda noteiktu darbību kopību, kas izpildāma ar tās argumentiem. Vai šī darbību kopība ir zināma, vai nav zināma, katru reizi ir iespējams apzīmēt to ar kādu simbolu. Piemēram, izteiksmē $\frac{u+v}{u-v}$ ir norādījums uz trim darbībām: saskaitīšanu, atņemšanu un dalīšanu. Apzīmējot šo darbību kopību ar kādu simbolu, piemēram, ar burtu f, tas norāda, ka divi skaitļi jāsaskaita, jāatņem un summa jāizdala ar starpību. Lai vēl norādītu ar kādiem skaitļiem apzīmētās darbības izpildāmas, tad iekavās aiz f raksta šos skaitļus, tā dabūjot simbolu

$$f(u, v).$$

Šis simbols apzīmē to pašu, ko izteiksme $\frac{u+v}{u-v}$. Tāpēc varam ņemt vienu otra vietā, vai arī rakstīt vienlīdzību

$$f(u, v) = \frac{u+v}{u-v}$$

Burtu f sauc par šās izteiksmes harakteristiku.

Par matemātiskas izteiksmes harakteristiku sauc simbolu (parasti burtu), kas apzīmē to darbību kopību, kas izpildāma ar izteiksmes argumentiem.

Parasti harakteristiku apzīmē ar F, f, vai grieķu alfabēta burtiem, piemēram, φ, ψ, u. t. t. Pie burtiem liek arī indekus, piemēram, F_1, F_2.

Matēmatisko izteiksmju simboliskā apzīmēšana un rakstīšana atvieglo kāda jautājuma uzrakstīšanu un lasīšanu.

Dažādām matēmatiskām izteiksmēm jāizvēlas dažādas harakteristikas, izņemot gadījumu, ja izteiksmes atšķiŗas tikai ar argumentiem. Piemēram, izteiksmes

$$\frac{x-y}{x+y} \text{ un } \frac{u-v}{u+v}$$

atšķiŗas tikai ar argumentiem, tad apzīmējot ar f darbību kopību, ko apzīmē šās izteiksmes, varam rakstīt:

$$f(x, y) = \frac{x-y}{x+y} \text{ un } f(u, v) = \frac{u-v}{u+v}.$$

Vispārīgi, ja reiz uzrakstīta vienlīdzība

$$f(x, y) = \frac{x-y}{x+y},$$

tad līdz ar to ir noteikta tā darbību kopība, ko apzīmē burts f. Ja pēc tam x un y vietā liekam citus skaitļus, tad tas nozīmē, ka ar šiem skaitļiem, kas ievietoti, ir izpildāmas tās pašas darbības, kas ar x un y. Tāpēc, ja $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$, tad līdz ar to varam, piemēram, rakstīt $f(u, v) = \frac{u-v}{u+v}$, $f(3, 2) = \frac{3-2}{3+2}$ u. t. t. Ja šie dotie skaitļi ir pastāvīgi, tad dabūjam izteiksmes nozīmi pie attiecīgām argumentu nozīmēm, kā, piemēram, iepriekšējā piemērā $f(3, 2) = \frac{1}{5}$.

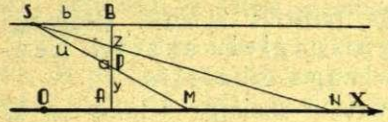
II. nodaļa.

Bezgalīgi lielie un bezgalīgi mazie lielumi. Robežlielumi.

Šai nodaļā apskatīsim tādus lielumu mainīšanās procesus, kur tie *nebeidz nekad mainīties*, kur tie *mainās visu laiku*. Katra pieņemtā nozīme *nav pēdējā*, *aiz tās seko vēl citas, nepieņemtas*. Šais procesos redzamu vietu ieņem bezgalīga augšana, bezgalīga dilšana un mainīgā tuvošanās savai robežai.

6. §. Bezgalīgi lielie lielumi.

Ņemsim horizontālu taisni un izvēlēsimies kādu tās punktu O, no kuŗa skaitīsim punktu attālumus pa labi par pozitīviem un pa kreisi par negātīviem. Šo taisni sauc par abscisu asi jeb x asi, (.) O par sākuma punktu un attālumu nozīmes par punktu abscisām.



1. zīm.

Izvēlēsimies kādu ass kustošu punktu M, kā abscisa ir x un vilksim parallēlu taisni asij. Abām taisnēm ir kopīgs perpendikuls AB (1. zīm.), ko krusto punktā P nekustīgā punkta S un kustošā punkta M savienotāja taisne SM. Pieņemsim, ka $AB = a$; $AP = y$; $PB = z$, $SP = u$ un $SB = b$. Domāsim, ka punkts M kustas pozitīvā virzienā un nekad nebeidz kustēties, tad tā abscisa x visu laiku pieaug. Tai pašā laikā arī y pieaug. Abi lielumi x un y ir augoši lielumi. Neskatoties uz šo kopīgo pazīmi, tie stipri dažādi. Lielums y pieaugdams būs visu laiku mazāks par iepriekš doto skaitli a, turpretim x, lai ar nezin cik lielu pozitīvu skaitli N iepriekš neapzīmētu, reiz kļūs un paliks lielāks par to; y sauc par augošu ierobežotu lielumu; x — par *bezgalīgi augošu* jeb *bezgalīgi lielu lielumu*.

Ievērosim, ka bezgalīgi augošs jeb bezgalīgi liels lielums ir tikai tāds, kas netikai *ka var kļūt*, bet arī *var palikt lielāks* par kaut kuŗu lielu pastāvīgu pozitīvu skaitli. Piemēram, ja punkts M kustētos vienu vienību pa labi un tad atpakaļ uz nullpunktu, divi vienības pa labi un tad atkal atpakaļ uz nullpunktu u. t. t., u. t. t. Agri vai vēlu tā abscisa kļūs lielāka par kaut kuŗu lielu pastāvīgu pozitīvu skaitli, bet nebūs bezgalīgi augošs ieb bezgalīgi liels lielums.

Līdz šim abscisa bija pozitīva. Ja domāsim punktu M kustamies negatīvā virzienā, tad arī tā abscisas absolūtais lielums neaprobežoti pieaugtu un būtu bezgalīgi augošs jeb bezgalīgi liels lielums. Vispārīgi, ja + A ir bezgalīgi liels lielums, tad arī — A ir bezgalīgi liels lielums.

Atzīmēsim, ka bezgalīgi lielam lielumam ir šādas īpašības: 1) tas ir mainīgs lielums, 2) tas var kļūt lielāks un 3) palikt lielāks par kaut kuŗu lielu pastāvīgu pozitīvu skaitli (pēc absolūtās nozīmes). Iepazinušies ar bezgalīgi augoša jeb bezgalīgi liela lieluma īpašībām, pieņemsim tā definīciju.

Mainīgu lielumu, kā absolūtā nozīme kļūst un paliek lielāka par kaut kuŗu lielu pastāvīgu pozitīvu skaitli, sauc par bezgalīgi lielu lielumu.

To, ka lielums A ir bezgalīgi liels, matēmatiski izsaka nevienlīdzībā

$$|A| > E,$$

kur E ir patvaļīgi liels pastāvīgs pozitīvs skaitlis. Bezgalīgi liela lieluma nozīmi sauc par bezgalīgi lielu skaitli. Bezgalīgi liels skaitlis ir mainīgs skaitlis.

Redzam, ka bezgalīgi liels lielums ir mainīgs lielums un ka neviens pastāvīgs lielums, lai tas būtu cik liels būdams, nevar būt bezgalīgi liels lielums, jo tas nevar kļūt lielāks par kaut kuŗu patvaļīgi lielu pastāvīgu pozitīvu skaitli, piemēram, nevar kļūt lielāks par sevi pašu vai savu daudzkārtni.

Piemēri. Kuba tilpums ir bezgalīgi liels lielums, ja tā šķautne ir bezgalīgi liela. Riņķa līnijas garums un laukums ir bezgalīgi lieli lielumi, ja radijs ir bezgalīgi liels. Ievilktā regulārā daudzstūŗa malu skaits n un iekšējo leņķu summa 2d (n — 2) ir bezgalīgi lieli lielumi, ja malu skaitu dubultojam, dalīdami malu savilktos lokus neaprobežoti daudz reizes uz pusēm. Naturālo skaitļu rindas locekļu skaits ir bezgalīgi liels lielums. Bezgalīgi dilstošas ģeometriskas progresijas locekļu skaits ir bezgalīgi liels lielums. Skaitļu skaits ir bezgalīgi liels lielums. Pirmskaitļu skaits ir bezgalīgi liels lielums.

7. §. Bezgalīgi mazie lielumi.

Atgriezīsimies vēl pie 1. zīmējuma un apskatīsim gabalu u un z mainīšanos, ja (.) M kustas tāpat kā iepriekšējā gadījumā. Ar (.) M neaprobežotu kustēšanos taisne SM griežas ap (.) S un līdz ar to u un z dilst. Neskatoties uz šo kopīgo pazīmi, tie atkal ir stipri dažādi lielumi. Lielums u dildams paliek visu laiku lielāks par iepriekš dotu skaitli b, turpretim z, lai cik mazu pozitīvu skaitli ε *) iepriekš arī nedotu, reiz kļūs un paliks mazāks par to; z sauc par *bezgalīgi dilstošu* jeb *bezgalīgi mazu lielumu*. Atzīmēsim arī, ka bezgalīgi dilstošs jeb bezgalīgi mazs lielums ir tikai tāds, kas netikai ka *var kļūt*, bet arī *var palikt* mazāks par kaut kuru mazu pastāvīgu pozitīvu skaitli. Piemēram, ja (.) M kustētos vienu vienību pa labi un tad atpakaļ uz nullpunktu, divi vienības pa labi un tad atkal atpakaļ uz nullpunktu u. t. t. u. t. t. Agri vai vēlu (.) M abscisa x kļūs lielāka par kaut kuru lielu pastāvīgu pozitīvu skaitli, bet nepaliks lielāka par to. Pie tādas (.) M kustības (.) P tuvosies punktam B un z kļūs agrāk vai vēlāk mazāks par kaut kuru mazu pastāvīgu pozitīvu skaitli, bet nepaliks mazāks par to, jo līdz ar (.) M atgriešanos nullpunktā (.) P virzīsies uz (.) A un lielums z nebūs bezgalīgi dilstošs jeb bezgalīgi mazs lielums.

Ja (.) S ņemtu uz leju no abscisu ass un izdarītu attiecīgās konstrukcijas un kustības, tad z būtu negātīvs bezgalīgi mazs lielums. Vispārīgi, ja $+\alpha$ ir bezgalīgi mazs lielums, tad arī $-\alpha$ ir bezgalīgi mazs lielums. Ievērosim, ka bezgalīgi mazam lielumam ir šādas īpašības:

1) *tas ir mainīgs lielums*, 2) *tas var kļūt mazāks* un 3) *palikt mazāks par kaut kuru mazu pastāvīgu pozitīvu skaitli* (*pēc absolūtās nozīmes*).

Iepazinušies ar bezgalīgi dilstoša jeb bezgalīgi maza lieluma īpašībām, pieņemsim tā definīciju.

> *Mainīgu lielumu, kā absolūtā nozīme kļūst un paliek mazāka par kaut kuru mazu pastāvīgu pozitīvu skaitli, sauc par bezgalīgi mazu lielumu.*

To, ka lielums α ir bezgalīgi mazs, matēmatiski izteiksim nevienlīdzībā

$$|\alpha| < \varepsilon,$$

kur ε ir patvaļīgi mazs pastāvīgs pozitīvs skaitlis.

Bezgalīgi maza lieluma nozīmi sauc par bezgalīgi mazu skaitli. Bezgalīgi mazs skaitlis ir mainīgs skaitlis. Bezgalīgi mazs lielums ir mainīgs lielums un neviens pastāvīgs lielums, lai tas būtu, cik mazs būdams, nevar būt bezgalīgi mazs lielums, jo tas nevar kļūt un palikt mazāks par kaut kuru patvaļīgi mazu pastāvīgu pozitīvu

*) ε — epsilons — grieķu alfabēta mazais burts, ar kuru parasti apzīmē patvaļīgi mazu pastāvīgu skaitli.

skaitli, piemēram, nevar kļūt mazāks par sevi pašu, vai savu daļu. Mēdz teikt, ka galīgi lielumi ir tādi, kas nav ne bezgalīgi lieli, ne bezgalīgi mazi.

Piemēri. Bezgalīgi dilstošas ģeometriskās progresijas loceklis ir bezgalīgi mazs lielums, ja tā indeks neaprobežoti aug. Sinus līnijas garums ir bezgalīgi mazs lielums, ja leņķis neaprobežoti tuvojas 0 vai π. Tangentlīnijas garums ir arī tādā pašā gadījumā bezgalīgi mazs lielums. Kotangentlīnijas garums ir bezgalīgi mazs lielums, ja leņķis tuvojas $\frac{\pi}{2}$ vai $\frac{3\pi}{2}$. Ja ievilktā regulārā daudzstūra malu skaitu dubultosim neaprobežoti daudz reižu, tad daudzstūra mala un tās savilktais loks ir bezgalīgi mazi lielumi.

No bezgalīgi lielu un bezgalīgi mazu lielumu definīcijām secināms, ka

bezgalīgi liels lielums ir apgriezts lielums bezgalīgi mazam un otrādi, bezgalīgi mazs lielums ir apgriezts lielums bezgalīgi lielam.

Tiešām, apzīmēsim bezgalīgi lielu lielumu ar A un kādu pēc patikas lielu pastāvīgu pozitīvu skaitli ar E, tad

$$|A| > E,$$

no kā secinams, ka

$$\frac{1}{|A|} < \frac{1}{E} \text{ jeb } \left|\frac{1}{A}\right| < \frac{1}{E}.$$

Ja E ir pēc patikas liels pastāvīgs pozitīvs skaitlis, tad $\frac{1}{E}$ ir pēc patikas mazs pastāvīgs pozitīvs skaitlis un pēdējā nevienlīdzība norāda, ka $\frac{1}{A}$ ir bezgalīgi mazs lielums. Analogi pierādāma arī atzinuma pārējā daļa.

8. §. Robežlielumi un to galvenās īpašības.

Atgriezīsimies vēl pie 6. paragrafa zīmējuma un apskatīsim y un u mainīšanos, ja (.) M kustas tāpat kā iepriekšējā gadījumā uz bezgalību, t. i., ja (.) M abscisa ir bezgalīgi augošs lielums. y aug, palikdams mazāks par a, nekad nekļūs tam vienlīdzīgs un starpība a — y kļūst bezgalīgi maza; u dilst, palikdams lielāks par b, nekad nekļūs tam vienlīdzīgs un starpību u — b kļūst bezgalīgi maza. Par lielumiem a un b saka, ka tie ir mainīgo lielumu y un u robežas.

Ja mainīgā un pastāvīgā lieluma starpība ir bezgalīgi maza, tad pastāvīgo lielumu sauc par mainīgā lieluma robežu.

Ja a ir x robeža, tad to rakstām

$$x - a = \alpha,$$

kur α ir bezgalīgi mazs lielums;

$x \to a$, ko lasa x tiecas uz a vai arī

$\lim x = a$, ko lasa limes no x ir a.

Ievērojot bezgalīgi mazu lielumu definīciju, robežlielumu varam definēt arī šā:

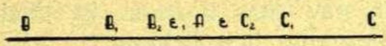
ja mainīgā un pastāvīgā lieluma starpības absolūtā nozīme kļūst un paliek mazāka par kaut kuru mazu pastāvīgu pozitīvu skaitli, tad pastāvīgo lielumu sauc par mainīgā lieluma robežu.

To izsakām nevienlīdzībā

$$|x - a| < \varepsilon,$$

kur ε ir pēc patikas mazs pastāvīgs pozitīvs skaitlis.

Nav jādomā, ka mainīgam lielumam, tuvojoties robežai, ir monotoni jāaug, vai monotoni jādilst, tas var arī svārstīties. Piemēram, ja a ir nekustīga (.) A abscisa (2. zīm.) un x kustīga (.) M abscisa, pie kam zināms, ka (.) M kustas no (.) B līdz (.) C un tad nāk atpakaļ līdz (.) B_1, kas ir AB vidū; no (.) B_1 tas iet atpakaļ līdz C_1, kas ir AC vidū; no tā līdz B_2, kas ir AB_1 vidū u.t.t., u.t.t., tad abscisa x svārstās ap a tā, ka $a - x = \alpha$, kur α ir bezgalīgi mazs un tāpēc a ir x robeža.



2. zīm.

Redzam, ka mainīgais lielums, tuvodamies pastāvīgam lielumam kā savai robežai, var būt visu laiku mazāks par to, lielāks par to un var arī svārstīties ap to. Ne katram mainīgam lielumam ir robeža. Piemēram, $\sin x$, ja x neaprobežoti augs, svārstīsies starp $+1$ un -1 un netuvosies nekādai robežai.

Bezgalīgi maza lieluma robeža ir nulle.

Tiešām, katru reizi ir pareiza vienlīdzība

$$x - 0 = x.$$

Ja pieņemam, ka x ir bezgalīgi mazs lielums, tad arī starpība $x - 0$ ir bezgalīgi mazs lielums un tā tad uz robežas definīcijas pamata varam teikt, ka bezgalīgi maza lieluma robeža ir nulle.

Otrādi, ja pieņemtu, ka kāda mainīgā lieluma robeža ir 0, tad varētu rakstīt $x - 0 = \alpha$, no kā secināms, ka $x = \alpha$. Tā tad,

ja mainīgā lieluma robeža ir nulle, tad tas ir bezgalīgi mazs lielums.

Uz norunas pamata arī pastāvīgu lielumu var uzskatīt kā mainīgu lielumu, kā visas nozīmes ir vienlīdzīgas, un nulli var uzskatīt tad kā bezgalīgi mazu lielumu, jo tas ir un paliek mazāks par kaut kuŗu patvaļīgi mazu pastāvīgu pozitīvu skaitli. Tāpēc, pamatojoties uz šo norunu, varam vienlīdzību $a - a = o$ iztulkot, ka pastāvīgā lieluma robeža ir pats pastāvīgais lielums.

Bezgalīgi lielam lielumam robežas nav.

Tiešām, lai kādu pastāvīgu skaitli b arī neņemtu, starpība $x - b$ ar x neaprobežotu augšanu, neaprobežoti aug un tāpēc nevar būt bezgalīgi maza. Tomēr formulu vienkāršības dēļ saka, ka bezgalīgi liela lieluma robeža ir bezgalība un apzīmē

$$x \to \infty.$$

Lai pasvītrotu, ka x, būdams aizvien pozitīvs, tiecas uz bezgalību, tad raksta

$$x \to +\infty;$$

pretējā gadījumā

$$x \to -\infty;$$

Ievērosim, ka bezgalības simbolam nav citas nozīmes kā tikai tā, ka x ir bezgalīgi augošs jeb bezgalīgi liels lielums.

Vēl atzīmēsim, ka

vienlīdzīgiem lielumiem ir vienlīdzīgas robežas.

Ja $x = y$ un a ir x robeža, tad vienlīdzības $x - a = y - a$ kreisā pusē ir bezgalīgi mazs lielums, tāpēc arī $y - a$ ir bezgalīgi mazs, kas nozīmē, ka $\lim y = a$.

To, ka a ir x robeža, izsaka vienlīdzībā

$$x - a = \alpha \ldots (1).$$

No (1) vienlīdzības rakstām, ka

$$x = a + \alpha \ldots (2).$$

No (1) dabū (2) vienlīdzību un no (2) varam dabūt (1). Tā tad

mainīgo lielumu var uzskatīt kā tā robežas un bezgalīgi maza lieluma summu, un arī, ja kādu mainīgu lielumu var uzskatīt kā pastāvīga un bezgalīgi maza lieluma summu, tad pastāvīgais lielums ir mainīgā robeža.

Uzdevums. Nosaukt gadījumus, kur jau elementarajā matēmatikā esam lietojuši robežlielumus.

9. §. Bezgalīgi mazo un bezgalīgi lielo lielumu galvenās teorēmas.

1. teor. G a l ī g a s k a i t a b e z g a l ī g i m a z u l i e l u m u s u m m a i r b e z g a l ī g i m a z s l i e l u m s.

Ņemsim galīgā skaitā bezgalīgi mazus lielumus: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \delta$ un sastādīsim šo lielumu summu $\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\delta$, par ko jāpierāda, ka tā ir bezgalīgi maza. Tas būs pierādīts, ja pierādīsim, ka

$$|\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\delta|<\varepsilon,$$

kur ε ir patvaļīgi mazs pastāvīgs pozitīvs skaitlis.

Ja $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \delta$ ir bezgalīgi mazi lielumi, tad varam rakstīt nevienlīdzības:

$$|\alpha|<\frac{\varepsilon}{n}$$

$$|\beta|<\frac{\varepsilon}{n}$$

$$|\gamma|<\frac{\varepsilon}{n} \quad \text{(nevienlīdzību skaits n).}$$

$$\ldots\ldots$$

$$|\delta|<\frac{\varepsilon}{n}$$

Saskaitīsim šīs nevienlīdzības:

$$|\alpha|+|\beta|+|\gamma|+\ldots+|\delta|<\varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Absolūto lielumu summa ir lielāka vai vienlīdzīga summas absolūtai nozīmei, tāpēc varam rakstīt, ka

$$|\alpha|+|\beta|+|\gamma|+\ldots+|\delta|\geqslant|\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\delta| \quad \ldots (2).$$

No (1) un (2) nevienlīdzības secinām, ka

$$|\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\delta|<\varepsilon, \text{ k. b. j.}$$

Pirmās teorēmas pirmo secinājumu apzīmēsim ar 1. teor.,$_1$; otro ar 1. teor.,$_2$ u. t. t. Līdzīgi apzīmēsim arī citu teorēmu secinājumus.

1. teor.,$_1$. D i v u b e z g a l ī g i m a z u l i e l u m u s t a r p ī b a i r b e z g a l ī g i m a z a.

Starpību $\alpha-\beta$ varam uzskatīt kā algebrisku summu $\alpha+(-\beta)$, kas ir bezgalīgi mazs lielums.

1. teor.,$_2$. M a i n ī g a m l i e l u m a m, k a s a t r o d a s k ā d ā m a i ņ a s p r o c e s ā, v a r b ū t t i k a i v i e n a r o b e ž a.

Tiešām, ja kādam mainīgam x būtu divi robežas a un b, tad

$$x-a=\alpha$$

un

$$x-b=\beta \text{ (robež. defin) jeb}$$

$$b-a=\alpha-\beta,$$

bet $\alpha-\beta$ ir bezgalīgi mazs (1. teōr., $_1$) un tas var būt vienlīdzīgs galīgam lielumam tikai tad, ja tas ir vienlīdzīgs 0. Tāpēc

$$b-a=o, \text{ jeb } b=a, \text{ k. b. j.}$$

1. teōr., $_3$. Bezgalīgi maza lieluma reizinājums ar veselu pozitīvu galīgu skaitli ir bezgalīgi mazs.

Tiešām, $\alpha n=\alpha+\alpha+\alpha+\ldots+\alpha$; labā puse ir bezgalīgi maza (1. teōr.).

Piezīme. Ja bezgalīgi mazu saskaitāmo skaits ir bezgalīgi liels, tad summa var būt bezgalīgi maza, galīga un dažreiz pat bezgalīgi liela. To redzam no sekojošā: ņemsim taisnes gabalu, kā gaŗums ir 1 un sadalīsim to m vienlīdzīgās daļās, tad katras daļas gaŗums ir $\frac{1}{m}$ un varam rakstīt

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\ldots+\frac{1}{m}=1.$$

Ja dalīšanu iedomāsimies izdarītu neaprobežotā skaitā, tad gabaliņu skaits ir bezgalīgi liels un to gaŗums $\frac{1}{m}$ ir bezgalīgi mazs. To summa ir galīgs skaitlis 1. Ja iedomāsimies, ka gabals saīsinās un tā gaŗums tiecas uz nulli, bet dalīšana ir tāda pati kā iepriekšējā gadījumā, tad gabaliņu summa ir bezgalīgi maza; ja iedomāsimies taisni neaprobežotā gaŗumā, sastāvošu no daļām, kuŗu gaŗums aizvien saīsinās un tiecas uz nulli, tad dabūjam bezgalīgi lielu summu.

2. teōr. Bezgalīgi maza lieluma reizinājums ar galīgu, vai bezgalīgi mazu lielumu ir bezgalīgi mazs.

Ja α ir bezgalīgi mazs lielums, tad to var izvēlēties mazāku par

$$\frac{\varepsilon}{|n|},$$

kur ε ir patvaļīgi mazs pastāvīgs pozitīvs skaitlis un n kāds galīgs skaitlis. Tāpēc rakstām nevienlīdzību

$$|\alpha|<\frac{\varepsilon}{|n|} \text{ jeb } |\alpha|\cdot|n|<\varepsilon,$$

$$\text{bet } |\alpha|\cdot|n|=|\alpha n|, \text{ tāpēc } |\alpha n|<\varepsilon, \text{ k. b. j.}$$

Vēl jāpierāda teorēmas otrā daļa: $\alpha . \beta$ ir bezgalīgi mazs, ja α un β ir bezgalīgi mazi. Pēc pieņēmuma varam rakstīt, ka

$$\times \begin{array}{l} |\alpha| < \sqrt{\varepsilon} \\ |\beta| < \sqrt{\varepsilon} \end{array} \quad (\text{ņemam } \sqrt{\varepsilon} > 0)$$

$$|\alpha| . |\beta| < \varepsilon \text{ jeb } |\alpha . \beta| < \varepsilon, \text{ k.b.j.}$$

2. teōr., $_1$. Galīga skaita bezgalīgi mazu lielumu reizinājums ir bezgalīgi mazs.

Ja būtu, piemēram, $\alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3$, tad grupējot, rakstām $\alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3 = \alpha_1 (\alpha_2 . \alpha_3) = \alpha_1 . \alpha' = \alpha$. Tāpat varam pārliecināties, ka $\alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3 \ldots \alpha_n = \alpha$, ja n ir galīgs un α bezgalīgi mazs.

2. teōr., $_2$. Bezgalīgi maza lieluma vesela pozitīva pakāpe ir bezgalīgi mazs lielums.

$\alpha^n = \alpha . \alpha . \alpha \ldots \alpha$, kas ir bezgalīgi mazs (2. teōr., $_1$).

2. teōr., $_3$. Veselas pozitīvas pakāpes sakne no bezgalīgi maza lieluma ir bezgalīgi mazs lielums.

Tiešām, ja $\alpha^n = \beta$ (2. teōr., $_2$), tad $\sqrt[n]{\beta} = \alpha$, k. b. j.

Piezīme. 2. un 3. secinājums ir spēkā arī pie

$$n = \frac{p}{q}, \text{ ja } \frac{p}{q} > 0.$$

2. teōr., $_4$. Bezgalīgi maza lieluma dalījums ar galīgu ir bezgalīgi mazs lielums.

Tiešām, ja $\alpha n = \beta$, tad $\frac{\beta}{n} = \alpha$, k. b. j.

2. teōr., $_5$. Galīga vai bezgalīgi maza lieluma dalījums ar bezgalīgi lielu ir bezgalīgi mazs lielums.

$$\frac{\alpha}{A} = \alpha . \frac{1}{A} = \beta, \text{ k. b. j.}$$

3. teōr. Bezgalīgi liela lieluma reizinājums ar galīgu vai bezgalīgi lielu lielumu ir bezgalīgi liels.

Apzīmēsim bezgalīgi lielu lielumu ar A un ar n vai nu galīgu vai bezgalīgi lielu lielumu un sastādīsim reizinājumu An un pierādīsim, ka tā apgrieztais lielums $\frac{1}{An}$ ir bezgalīgi mazs.

Tiešām, $\frac{1}{An} = \frac{1}{A} . \frac{1}{n}$ ir bezgalīgi mazs, jo $\frac{1}{A}$ ir bezgalīgi mazs un $\frac{1}{n}$ ir vai nu galīgs vai bezgalīgi mazs, tāpēc to reizinājums ir bezgalīgi mazs (2. teōr.). Ja $\frac{1}{An}$ ir bezgalīgi mazs, tad An ir bezgalīgi liels, k. b. j.

3. teōr., $_1$. Bezgalīgi liela lieluma dalījums ar galīgu lielumu ir bezgalīgi liels.

Tiešām, $\frac{A}{n} = A \cdot \frac{1}{n}$ ir bezgalīgi liels (3. teōr.).

3. teōr., $_2$. Galīga lieluma dalījums ar bezgalīgi mazu ir bezgalīgi liels.

Dots: a — galīgs, α bezgalīgi mazs un jāpierāda, ka $\frac{a}{\alpha} = A$.

Tiešām, $\frac{a}{\alpha} = a \cdot \frac{1}{\alpha}$ ir bezgalīgi liels (3. teōr.).

3. teōr. $_3$. Bezgalīgi liela lieluma dalījums ar bezgalīgi mazu lielumu ir bezgalīgi liels.

Tiešām, $\frac{A}{\alpha} = A \cdot \frac{1}{\alpha}$ ir bezgalīgi liels (3. teōr.).

4. teōr. Bezgalīgi liela lieluma un galīga vai bezgalīgi maza lieluma summa ir bezgalīgi liela.

Ja A ir bezgalīgi liels lielums, tad tā absolūtā nozīme var kļūt un palikt lielāka par kaut kuŗu patvaļīgi lielu pastāvīgu pozitīvu skaitli E, bet tādā gadījumā pieskaitot n, summa arī agri vai vēlu reiz kļūs un paliks lielāka par kaut kuŗu patvaļīgi lielu pastāvīgu pozitīvu skaitli E, kas nozīmē, ka $A+n$ ir bezgalīgi liels lielums, k. b. j.

5. teōr. 1) Divu bezgalīgi mazu lielumu attiecība, 2) divu bezgalīgi lielu lielumu attiecība, 3) bezgalīgi maza lieluma reizinājums ar bezgalīgi lielu lielumu, 4) divi bezgalīgi lielu lielumu summa un 5) divi bezgalīgi lielu lielumu starpība ir vai nu bezgalīgi mazs, galīgs, vai bezgalīgi liels lielums.

1) Ņemsim bezgalīgi mazu lielumu α, tad 2α un α^2 arī ir bezgalīgi mazi lielumi (1. teōr.). Attiecībā $\frac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha$ ir bezgalīgi maza; $\frac{2\alpha}{\alpha} = 2$ ir galīga un $\frac{\alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}$ ir bezgalīgi liela. Teōrēmas pirmā daļa noskaidrota.

2) Ņemsim divi bezgalīgi lielus lielumus A_1 un A_2 un sastādīsim attiecību

$$\frac{A_1}{A_2},$$

ko pārveidosim šā:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{\frac{1}{A_2}}{\frac{1}{A_1}}.$$

Skaitītājs un saucējs ir bezgalīgi mazi lielumi un par to attiecību jau noskaidrojām, ka tā ir bezgalīgi maza, galīga, vai bezgalīgi liela. Tāpēc teorēmas otrā daļa arī pierādīta.

3) Pieņemsim, ka α ir bezgalīgi mazs lielums, bet A bezgalīgi liels, tad rakstot $\alpha . A=\frac{\alpha}{\frac{1}{A}}$, redzam, ka arī teorēmas trešā daļa ir pareiza.

4) A_1+A_2 lai ir divi bezgalīgi lielu lielumu summa. Apzīmēsim A_1 apgriezto lielumu ar α_1 un A_2 ar α_2, tad

$$A_1=\frac{1}{\alpha_1} \text{ un } A_2=\frac{1}{\alpha_2} \text{ un } A_1+A_2=\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1 . \alpha_2}.$$

Zinām, ka $\alpha_1+\alpha_2$ ir bezgalīgi maza (1. teōr.) un $\alpha_1 . \alpha_2$ arī ir bezgalīgi mazs (2. teōr.), tāpēc arī teorēmas ceturtā daļa ir pierādīta.

5. $A_1-A_2=A_1+(-A_2)$,

par ko jau pierādījām teorēmas ceturtajā daļā. Tā tad teorēma pierādīta visiem gadījumiem.

Izteiksmes, kam var būt bezgalīgi mazas, galīgas vai bezgalīgi lielas nozīmes, sauc par nenoteiktām izteiksmēm. Kā nenoteikto izteiksmju piemēri minami: divu bezgalīgi mazu, divu bezgalīgi lielu lielumu attiecība, bezgalīgi maza lieluma reizinājums ar bezgalīgi lielu lielumu un divu bezgalīgi lielu lielumu summa un starpība.

6. teōr. Ja visā mainīšanās procesā $y>x$ un ja x ir bezgalīgi liels lielums, tad arī y ir bezgalīgi liels lielums.

Ja y nebūtu bezgalīgi liels, tad bezgalīgi liels lielums x būtu mazāks par vienu galīgu lielumu y, kas ir pretrunā bezgalīgi liela lieluma definīcijai. Tāpēc y jābūt bezgalīgi lielam, k. b. j.

10. §. Robežlielumu teorēmas.

7. teōr. Galīga skaita mainīgo lielumu summas robeža ir vienlīdzīga šo lielumu robežu summai.

Ņemsim mainīgos lielumus galīgā skaitā $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$, kā robežas ir $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$. Uz robežlielumu definīcijas pamata rakstām šādas vienlīdzības un saskaitām:

$$
\begin{aligned}
& x_1 - a_1 = \alpha_1 \\
& x_2 - a_2 = \alpha_2 \\
+\; & x_3 - a_3 = \alpha_3 \\
& \dots\dots \\
& x_n - a_n = \alpha_n, \text{ kur } \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n \text{ ir bezgalīgi mazi.}
\end{aligned}
$$

$$
(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) - (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) = \\
= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n \quad \dots\dots\dots\dots (1)
$$

Vienlīdzības labā puse ir bezgalīgi mazs lielums (1. teōr.). Pirmā iekava ir mainīgs, otrā pastāvīgs lielums. Tā tad mainīgā un pastāvīgā lieluma starpība ir bezgalīgi mazs lielums, kas nozīmē, ka pastāvīgais lielums ir mainīgā robeža (robežliel. defin.). Tāpēc rakstām:

$$
\lim (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n,
$$
$$
\text{bet } a_1 = \lim x_1,\ a_2 = \lim x_2,\ a_3 = \lim x_3, \dots,\ a_n = \lim x_n
$$

(pēc pieņēmuma). Tā tad

$$
\lim (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) = \lim x_1 + \lim x_2 + \\
+ \lim x_3 + \dots + \lim x_n, \text{ k. b. j.}
$$

Teorēmas pierādījumā nav svarīgi mainīgo lielumu zīmes, tāpēc šai teorēmā varam runāt par algebrisku summu. Teorēma nav spēkā pie bezgalīgi daudz saskaitāmiem, jo tad (1) vienlīdzības labā puse var arī nebūt bezgalīgi mazs lielums.

7. teōr., $_1$. Divu lielumu starpības robeža ir vienlīdzīga šo lielumu robežu starpībai.

Starpību uzskatām kā algebrisku summu, kuŗai piemērojam (7. teōr.). Tā tad

$$
\lim (x - y) = \lim x - \lim y.
$$

8. teōr. Galīgā skaita mainīgo lielumu reizinājuma robeža ir vienlīdzīga šo lielumu robežu reizinājumam.

Vispirms ņemsim divi mainīgos lielumus x_1 un x_2, kā robežas ir a_1 un a_2. Tad varam rakstīt:

$$\lim x_1 = a_1 \text{ un } \lim x_2 = a_2 \text{ jeb}$$

$$\begin{array}{l} \times \begin{array}{l} x_1 = a_1 + \alpha_1 \\ x_2 = a_2 + \alpha_2 \end{array} \\ \hline x_1 . x_2 = a_1 a_2 + a_1 \alpha_2 + a_2 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2 = a_1 a_2 + \alpha, \end{array}$$

kur α ir bezgalīgi mazs.

Tas nozīmē, ka

$$\lim (x_1 . x_2) = a_1 a_2.$$

Ieliekot a_1 un a_2 vietā $\lim x_1$ un $\lim x_2$, varam rakstīt, ka

$$\lim (x_1 x_2) = \lim x_1 . \lim x_2, \text{ k. b. j.}$$

Tagad ņemsim trīs lielumus x_1, x_2 un x_3, kā robežas ir a_1, a_2 un a_3 un pierādīsim teōrēmas pareizību šai gadījumā.

$$\lim (x_1 x_2 x_3) = \lim [(x_1 x_2) . x_3] = \lim (x_1 x_2) . \lim x_3 =$$
$$= \lim x_1 . \lim x_2 . \lim x_3.$$

Līdzīgā kārtā varam teōrēmu vispārināt kaut kuŗam galīga skaita reizinātāju reizinājumam.

9. teōr. Divu lielumu dalījuma robeža ir vienlīdzīga šo lielumu robežu dalījumam, ja dalītāja robeža nav nulle.

Pieņemsim, ka

$$\lim x = a, \ \lim y = b \text{ un } \lim y \neq 0.$$

Jāpierāda, ka

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y}.$$

Tas būtu pierādīts, ja izdotos pierādīt, ka

$$\frac{x}{y} - \frac{a}{b} = \delta,$$

kur δ ir bezgalīgi mazs lielums.

No pieņēmuma varam secināt, ka

$$x = a + \alpha \text{ un } y = b + \beta,$$

kur α un β ir bezgalīgi mazi lielumi.

Izdalīsim šīs vienlīdzības vienu ar otru un no dabūtās vienlīdzības abām pusēm atņemsim $\frac{a}{b}$:

$$\frac{x}{y} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha}{b + \beta} - \frac{a}{b} \text{ jeb}$$

$$\frac{x}{y} - \frac{a}{b} = \frac{ab + b\alpha - ab - a\beta}{b(b + \beta)} = \frac{b\alpha - a\beta}{b(b + \beta)}.$$

Skaitītājs $b\alpha - a\beta$ ir bezgalīgi mazs (2. un 1. teōr.); saucējs $b(b+\beta)$ ir galīgs un nav nulle, jo $b \neq 0$ (pēc pieņēmuma) un tāpēc arī $b+\beta \neq 0$, ja $\beta \to 0$. Apzīmējot skaitītāju $b\alpha - a\beta = \gamma$ un saucēju $b(b+\beta) = c$, varam rakstīt:

$$\frac{x}{y} - \frac{a}{b} = \frac{\gamma}{c} \text{ jeb}$$

$$\frac{x}{y} - \frac{a}{b} = \delta,$$

kur δ ir bezgalīgi mazs lielums (2. teōr., 4.), k. b. j.

10. teōr. Mainīga lieluma racionālas pakāpes robeža ir vienlīdzīga mainīga lieluma robežas pakāpei.

Pieņemsim, ka x ir mainīgs lielums un n kaut kāds racionāls skaitlis. Jāpierāda, ka

$$\lim x^n = (\lim x)^n .$$

Vispirms apskatīsim gadījumu, ka n ir naturāls skaitlis.

$$\lim x^n = \lim (xxx \ldots x) = \lim x \lim x . \lim x \ldots \lim x =$$
$$= (\lim x)^n , \text{ k. b. j.}$$

Tagad pieņemsim, ka

$n = \frac{p}{q}$, kur p un q ir naturāli skaitļi.

Apzīmēsim $x^{\frac{p}{q}}$ ar y, tad varam rakstīt, ka

$$y = x^{\frac{p}{q}} \text{ jeb } y^q = x^p ,$$

Vienlīdzīgiem lielumiem ir vienlīdzīgas robežas, tāpēc

$$\lim y^q = \lim x^p ,$$

bet pēc nupat pierādītā

$$\lim y^q = (\lim y)^q \text{ un } \lim x^p = (\lim x)^p ,$$

tāpēc ka p un q ir naturāli skaitļi. Tā tad

$$(\lim y)^q = (\lim x)^p \text{ jeb } \lim y = (\lim x)^{\frac{p}{q}} .$$

Ieliekot y vietā tā nozīmi $x^{\frac{p}{q}}$, rakstām, ka

$$\lim x^{\frac{p}{q}} = (\lim x)^{\frac{p}{q}}, \text{ k. b. j.}$$

Vēl jāapskata gadījums, ka n ir negātīvs.

Pieņemot, ka $m = -n$ jeb $n = -m$, varam rakstīt, ka

$$\lim x^n = \lim x^{-m} = \lim \frac{1}{x^m} = \frac{\lim 1}{\lim x^m} = \frac{1}{\lim x^m} = \frac{1}{(\lim x)^m} =$$
$$= (\lim x)^{-m} = (\lim x)^n, \text{ k. b. j.}$$

Tā tad teorēma pierādīta kaut kuŗai racionālai pakāpei.

10. teor., 1. Racionālas pakāpes saknes robeža ir vienlīdzīga saknei no zemsaknes lieluma robežas.

Tiešām, $\lim \sqrt[n]{x} = \lim x^{\frac{1}{n}} = (\lim x)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\lim x}$, k. b. j.

11. §. Algebriskas izteiksmes robeža.

Pieņemsim, ka x, y, ...z ir mainīgi lielumi, kuŗu robežas ir a, b, ...c un ka izpildot ar šiem lielumiem vienu algebrisku darbību, dabūjam jaunu mainīgu lielumu u, kā robeža ir d. Tad, pamatojoties uz robežlielumu teorēmām, varam uzrakstīt tabulu:

ja	$u = x + y + \ldots + z$,	tad $d = a + b + \ldots + c$,
„	$u = x \cdot y \ldots z$,	„ $d = a \cdot b \ldots c$,
„	$u = \frac{x}{y}$,	„ $d = \frac{a}{b}$.
„	$u = x^m$,	„ $d = a^m$.
„	$u = \sqrt[m]{x}$,	„ $d = \sqrt[m]{a}$.

No šīs tabulas varam secināt:

ja mainīgais lielums u dabūjams no citiem mainīgajiem x, y,...z tikai ar vienu algebrisku darbību, tad tā robežu d dabū ar to pašu drbību no doto mainīgo robežām a, b, ... c.

Tabulā uzrakstītās izteiksmēs ir tikai viena darbība. Tādas izteiksmes sauc par elementārajām jeb vienkāršām izteiksmēm, pretējā gadījumā par saliktām izteiksmēm.

No tabulas redzam, kas ir elementāras izteiksmes robeža un kā to atrast. Arī vispārīgi

par matēmatiskas izteiksmes robežu sauksim to lielumu, uz ko tiecas šī izteiksme, ja tās arguments tiecas uz savu robežu.

Matēmatiskas izteiksmes f(x) robežu, ja tās arguments $x \to a$, apzīmē šā:

$$\lim_{x \to a} f(x).$$

Noskaidrosim, kā atrast saliktas algebriskas izteiksmes robežu. Tai nolūkā domāsim tā: ja ar algebriskas izteiksmes argumentiem un to robežām izpildīsim pēc kārtas vienas un tās pašas darbības, tad pēc katras darbības dabūsim jaunu mainīgo un tā robežu. Beidzot dabūsim algebrisko izteiksmi un tās robežu. Tā tad

lai atrastu algebriskas izteiksmes robežu, ar tās argumentu robežām jāizpilda tās pašas darbības, kas ar argumentiem.

Piemērs.

$$\lim_{x \to 2}(x^2+3x^3)=2^2+3.2^3=28.$$

Šo likumu pamato arī 9. teorēma, kuŗa nav spēkā, ja saucēja robeža ir nulle. Tāpēc tādos gadījumos arī šis likums nav spēkā. Noskaidrosim, ko var teikt par daļas $\frac{x}{y}$ robežu, ja:

1) $\lim x \neq 0$, $\lim y=0$ un

2) $\lim x=0$ un $\lim y=0$.

1) Ja $\frac{x}{y}>0$ un x ar y tiecas uz robežu, tad dalījums $\frac{x}{y}$ neaprobežoti aug, tāpēc $\lim\frac{x}{y}=+\infty$;

ja $\frac{x}{y}<0$, tad x un y tiecoties uz robežu, dalījuma absolūtā vērtība neaprobežoti aug, tāpēc $\lim\frac{x}{y}=-\infty$.

Robežatrašanas likums tagad ir lietojams arī šai gadījumā: izteiksmes robeža ir ∞.

2) Ja $\lim x=0$ un $\lim y=0$, tad $\lim\frac{x}{y}=\frac{\lim x}{\lim y}=\frac{0}{0}$, kas ir nenoteikta izteiksme.

Tas pats sakāms arī vispāri par algebrisku daļu, kuŗas skaitītājs un saucējs ir nulle, ja argumentu apmaina ar robežu. Piemēram,

$$\lim_{x \to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\frac{1-3+2}{1-1}=\frac{0}{0}.$$

Šī izteiksme pie $x=1$ ir nenoteikta. Ar vispārīgo paņēmienu tai nevar atrast robežu. Lai atrastu tās robežu, pārveidosim izteiksmi tā, lai nebūtu reizē skaitītājā un saucējā nulle:

$$\lim_{x \to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x \to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim_{x \to 1}(x-2)=1-2=$$
$$=-1.$$

Robežas atrašanai, saīsinām daļu ar $x-1$. To varam darīt, jo $x \neq 1$, bet $x \to 1$ un tāpēc $x-1 \neq 0$ un saīsināšana iespējama. Šis piemērs rāda arī to, ka nav katru reizi viens un tas pats, vai ņemam $x=1$, vai $x \to 1$. Atrasto robežu -1 pieņem par izteiksmes īsto vērtību, ja $x=1$. Tāpat arī vispārīgi,

> j a m a t e m a t i s k a izteiksme $f(x)$ p i e $x=c$ ir nenoteikta, tad par tās īsto nozīmi jeb īsto vērtību pieņem robežu, uz ko tiecas šī izteiksme, ja tās arguments tiecas uz c.

Apskatīsim piemēru, kā var atrast algebriskai izteiksmei robežu, ja arguments $x \to \infty$.

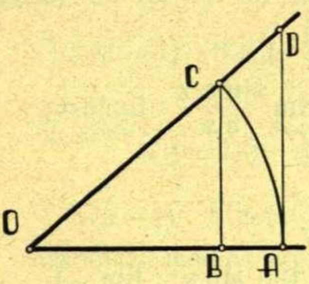
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\sqrt{1+x^2}}{5x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}}}{\frac{5x}{x}+\frac{2}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{5+\frac{2}{x}}=\frac{3}{5}.$$

Ja apskata izteiksmes robežu jautājumu, tad pieņem, ka arguments visā mainīšanās procesā nav vienlīdzīgs savai robežai. Tāpēc apskatītā piemērā ar x varēja dalīt skaitītāju un saucēju.

12. §. Dažu izteiksmju robežas.

1. Atradīsim

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.$$



3. zīm.

Šai nolūkā ņemsim pozitīvu šaurleņķi $\angle$ AOC un ap tā virsotni O kā centru vilksim $\smile AC = x$ ar radiju $OA=1$. No (.) C novilksim pret OA perpendikulu BC un no (.) A perpendikulu AD. Tādā gadījumā $BC=\sin x$ un $AD=\operatorname{tg} x$. Domāsim savienotus (.) A ar (.) C un salīdzināsim sekojošo figūru laukumus: $\triangle AOC$, $\overset{\smile}{\triangle} AOC$ un $\triangle AOD$. Acīmredzot varam rakstīt nevienlīdzību:

$$\triangle AOC < \overset{\smile}{\triangle} AOC < \triangle AOD, \text{ jeb}$$

$$\frac{OA.BC}{2}<\frac{OA.\smile AC}{2}<\frac{OA.AD}{2}, \text{ saīsinot ar } \frac{OA}{2}, \text{ dabūjam}$$

$$BC < \smile AC < AD.$$

Ieliekot BC, $\smile AC$ un AD vietā to nozīmes, varam rakstīt

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Izdalīsim nevienlīdzību ar $\sin x$:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Ņemot nevienlīdzībā apgrieztos lielumus, varam rakstīt

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

$\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$, tāpēc $1 - \cos x$ ir bezgalīgi mazs un arī $1 - \frac{\sin x}{x}$ ir jābūt bezgalīgi mazam, jo nevienlīdzībā tālāk stāvošo locekļu starpība ir lielāka nekā tuvāk stāvošo. Ja tas tā, tad tas nozīmē, ka 1 ir $\frac{\sin x}{x}$ robeža, t. i.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

No pēdējās nevienlīdzības redzam, ka

$$\frac{\sin x}{x} < 1, \text{ bet } \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Vispārīgi runājot, tas nozīmē, ka, ja

$$f(x) \gtrless a,$$

tad nevar vēl secināt, ka $\lim f(x) \gtrless a$, tas var būt arī vienlīdzīgs a, t. i.

$$\lim f(x) \gtreqqless a.$$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin a x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin a x}{a x} \cdot a = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin a x}{a x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} a =$

$= a \lim\limits_{Y \to 0} \frac{\sin Y}{Y} = a . 1 = a.$

Robežas atrašanai pieņēmām $ax = Y$.

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} =$

$= 1 . 1 = 1.$

4) Atradīsim

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Ja n tiecas uz bezgalību, tad nevar tā spriest, ka

$$\frac{1}{n}\to 0,\quad 1+\frac{1}{n}\to 1 \text{ un tāpēc } \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to 1,$$

jo še jāievēro, ka n vienlaicīgi tiecas uz bezgalību kā iekavās, tā kāpinātājā un nevar likt, lai papriekš $n\to\infty$ iekavās un tad kāpinātājā.

Vispirms apskatīsim gadījumu, ka n ir naturāls skaitlis. Uzrakstīsim Ņūtona binoma attīstījumu binomam $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2.1}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3.2.1}\cdot\frac{1}{n^3} +$$

$$+ \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)\ldots 3.2.1}\frac{1}{n^k} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 2.1}{n(n-1)\ldots 2.1}\cdot\frac{1}{n^n}.$$

Pārveidosim locekļus, dalīdami katru locekli ar n attiecīgu pakāpi, kādā tas ir saucējā:

$$T_2 = n.\frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

$$T_3 = \frac{1}{2.1}\cdot\frac{n(n-1)}{n^2} = \frac{1}{2.1}\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

$$T_4 = \frac{1}{3.2.1}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} = \frac{1}{3.2.1}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right).$$

. . . .

$$T_{k+1} = \frac{1}{k.(k-1)(k-2)\ldots 3.2.1}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{n^k} =$$

$$= \frac{1}{k(k-1)\ldots 3.2.1}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

. . . .

$$T_{n+1} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1}{n^n} =$$

$$= \frac{1}{n(n-1)\ldots 3.2.1}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\ldots\left(\frac{1}{n}\right).$$

Dabūjam binoma attīstījumu šādā formā:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2.1}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3.2.1}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{k(k-1)\ldots 3.2.1}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{n(n-1)\ldots 3.2.1}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(\frac{1}{n}\right).$$

Labajā pusē katra iekava ir pozitīva, tā tad lielāka par nulli. Ja katru iekavu apmaināin ar nulli, tad labā puse pamazinās un vienlīdzības vietā dabūjām nevienlīdzību:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2 \ . \ . \ . \ (1),$$

kas spēkā pie katra pozitīva n.

No otras puses, katra iekava ir mazāka par vienu. Tāpēc apmainot katru iekavu ar 1 un skaitļus 3, 4, 5, ..., kas atrodas pirms iekavām saucējos, ar 2, locekļi palielinās un dabūjam nevienlīdzību:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{k-1}}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Nevienlīdzības labo pusi pārveidosim, grupējot pirmos divi locekļus vienā un pārējos otrā grupā:

$$(1+1)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{2}{2^{k-1}}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=$$
$$=2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{k-1}}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

Iekavās ir ģeometriska progresija, kurā $a_1=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$ un locekļu skaits $(n-1)$. Locekļu summa ir

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Pēc pārveidošanas dabūjām, ka

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2+1-\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Atmetot nevienlīdzības labajā pusē $\frac{1}{2^{n-1}}$, tā vēl vairāk palielinās un varam rakstīt

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3 \ . \ . \ . \ . \ (2).$$

Šī nevienlīdzība ir spēkā katram veselam pozitīvam n. No (1) un (2) izteiksmes dabūjam

$$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3.$$

Tālāk pieņemsim, ka n neaprobežoti pieaug, tad attīstījuma katrs loceklis arī pieaug, jo katra iekava $\left(1-\frac{1}{n}\right)$, $\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots$

pieaug, tuvodamās vienam. Visi locekļi ir pozitīvi, tāpēc summa $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ arī pieaug, nepārsniegdama 3, kas norāda, ka $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tuvojas robežai. Šo robežu apzīmē ar

$$e$$

Tā tad varam rakstīt, ka

$$\lim_{n \to +\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

e ir transcendents skaitlis, kas izsakāms ar tuvinājumu, piemēram, ar 15 decimālzīmēm:

$$e = 2{,}71828\,1828\,459045.$$

Skaitlim e ir ļoti liela nozīme teorētiskos jautājumos. Tas analizē ieņem tādu pašu redzamu vietu kā ģeometrijā π; tāpat arī teorētiskā fizikā, mechanikā u. c. Tas ir naturālo logaritmu baze. Ja A ir skaitlis, kā naturālais logaritms ir a, tad to raksta:

$$a = \ln A.$$

Līdz šim n bija vesels pozitīvs skaitlis. Izrādas, arī tad izteiksme tuvojas robežai e, ja n ir negatīvs. Tas var būt arī daļskaitlis. 5) Pieņemot $n = \frac{1}{x}$, dabūjam: $\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

13. §. Bezgalīgi mazo lielumu kārtas.

Lielumus salīdzina tā, ka ņem vienu tās pašas dabas lielumu kā pamata lielumu, kā mēru un sastāda pārējo lielumu attiecības pret šo lielumu. Tāpat var salīdzināt arī vairākus bezgalīgi mazos lielumus, pieņemot vienu no tiem par pamata bezgalīgi mazo lielumu un sastādot pārējo lielumu attiecības pret šo lielumu. Redzējām, ka divi bezgalīgi mazo lielumu attiecība ir nenoteikta izteiksme. Tāpēc, lai varētu spriest par attiecību, ir jāņem šīs attiecības robeža, ja tāda eksistē. Šai sakarībā minēsim šādu definīciju:

ja divu bezgalīgi mazu lielumu α un β attiecības robeža $\lim\frac{\beta}{\alpha} = 0$, tad β ir augstākas kārtas bezgalīgi mazs lielums nekā α; ja šo lielumu attiecības robeža $\lim\frac{\beta}{\alpha} = \infty$, tad β ir zemākas kārtas bezgalīgi mazs lielums nekā α; ja šo lielumu attiecības robeža $\lim\frac{\beta}{\alpha} = k$, kur k ir galīgs lielums, kas nav vienlīdzīgs nullei, tad β ir vienādas kārtas bezgalīgi mazs lielums ar α.

Par bezgalīgi mazo lielumu kārtu nevar runāt kā par kaut ko, kas ir tikai paša lieluma īpašība. Par to var runāt tikai attiecībā pret kādu citu lielumu. Kārta norāda itkā uz to, ka augstākas kārtas bezgalīgi mazs lielums ir mazāks un ka tas straujāki samazinās nekā zemākās kārtas.

Mēģināsim noskaidrot, kā noteikt, cik liela ir bezgalīgi maza lieluma kārta. Šai nolūkā ņemsim bezgalīgi mazu lielumu rindu:

$$\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots \alpha^n, \ldots$$

Šīs rindas katrs nākošais lielums ir augstākas kārtas nekā visi iepriekšējie, jo

$$\lim \frac{\alpha^{n+\beta}}{\alpha^n} = \lim \alpha^\beta = 0.$$

Ja tas tā, tad ir dabīgi pieņemt šo rindu kā bezgalīgi mazo lielumu kārtas mērīšanas skālu, pieņemot α par pirmās, α^2 par otrās, ... α^n par n-tās kārtas bezgalīgi mazu lielumu.

Lai noteiktu β kārtu, meklē rindā α^n, kā kārta ir vienāda β kārtai, t. i., lai

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^n} = \mathbf{k}, \textbf{ kur } \mathbf{k} \neq 0 \textbf{ un } \neq \infty,$$

tad bezgalīgi mazā lieluma β kārta ir n.

Piemēram, atradīsim bezgalīgi mazā lieluma

$$\beta = 4\alpha^5 + 7\alpha^2 - 5\alpha^8$$

kārtu. Tā kā $7\alpha^2$ ir zemākas kārtas bezgalīgi mazs lielums, kas ir itkā lielāks par pārējiem, tad var domāt, ka arī β būs tādas pašas kārtas, tāpēc ņemsim

$$\lim \frac{4\alpha^5 + 7\alpha^2 - 5\alpha^8}{\alpha^2} = \lim (4\alpha^3 + 7 - 5\alpha^6) =$$

$$= \lim 4\alpha^3 + \lim 7 - \lim 5\alpha^6 = 7.$$

Tā tad β ir otrās kārtas bezgalīgi mazs lielums.

Piemērā pieņēmām, ka $7\alpha^2$ ir zemākās kārtas bezgalīgi mazs lielums un proti — otrās. Noskaidrosim, vai tas tā ir vispāri, ka bezgalīgi maza lieluma reizinājumam ar pastāvīgu skaitli ir tāda pati kārta kā reizinātājam. Ņemsim α un reizināsim ar a, kur α ir bezgalīgi mazs, bet a galīgs lielums, dabūsim β. Sastādīsim attiecības robežu:

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{a\alpha}{\alpha} = a,$$

kas norāda uz vienādu kārtu.

11. teōr. Bezgalīgi maza un galīga lieluma reizinājumam ir tāda pati kārta kā bezgalīgi mazam reizinātājam.

Ņemsim divi bezgalīgi mazu lielumu reizinājumu un noskaidrosim tā kārtu:

$$\beta = \alpha\gamma,$$

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\alpha\gamma}{\alpha} = \lim \gamma = 0.$$

Tā tad reizinājumam ir augstāka kārta.

12. teōr. Divu bezgalīgi mazu lielumu reizinājums ir augstākas kārtas bezgalīgi mazs lielums nekā katrs reizinātājs.

Bezgalīgi mazu lielumu apskatā iepazīsimies ar ekvivalentiem bezgalīgi maziem lielumiem. Šai sakarībā pieņemsim to definīciju:

ja divi bezgalīgi mazu lielumu attiecības robeža ir vienlīdzīga vienam, tad šos lielumus sauc par ekvivalentiem bezgalīgi maziem lielumiem.

Tā tad, ja

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1,$$

tad α un β ir ekvivalenti lielumi, ko raksta

$$\alpha \sim \beta$$

un lasa α ir ekvivalents β. Piemēram, ja x ir bezgalīgi mazs, tad $\sin x \sim x$ un $\operatorname{tg} x \sim x$, tāpēc ka

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ un } \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$$

Ņemsim divi vienādas kārtas bezgalīgi mazus lielumus α un β un sastādīsim to attiecības robežu

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = k$$

un pieņemsim, ka $k \neq 0$ un $k \neq \infty$. Tad

$$\frac{\beta}{\alpha} = k + \varepsilon \text{ jeb } \beta = k\alpha + \varepsilon\alpha,$$

kur $k\alpha$ ir vienādas kārtas bezgalīgi mazs lielums ar β (11. teōr.) un $\varepsilon\alpha$ ir augstākas kārtas (12. teōr.). Tāpēc secinām:

13. teōr. Ja β un α ir vienādas kārtas bezgalīgi mazi lielumi, tad β var uzkatīt kā divu saskaitāmo summu: $\beta = k\alpha + \varepsilon\alpha$, kur pirmais ir vienādas kārtas ar β, bet otrs augstākas.

Vienādas kārtas saskaitāmo $k\alpha$ sauc par β galveno daļu.

Noskaidrosim, ko var teikt par bezgalīgi mazo lielumu un tā galveno daļu. Tai nolūkā apskatīsim to attiecības robežu:

$$\lim \frac{\beta}{k\alpha} = \lim \frac{k\alpha + \varepsilon\alpha}{k\alpha} = \lim\left(1 + \frac{\varepsilon}{k}\right) = 1 + \lim \frac{\varepsilon}{k} = 1 + 0 = 1$$

un tāpēc

$$\beta \sim k\alpha.$$

14. teōr. Bezgalīgi mazs lielums ir ekvivalents savai galvenai daļai.

Ja $\lim \frac{\beta}{\alpha^n} = k$, kur $k \neq 0$ un $k \neq \infty$, tad $k\alpha^n$ ir β galvenā daļa (13. teōr. un galv. daļa def.). Tā tad

β galvenās daļas atrašanai jāatrod $\lim \frac{\beta}{\alpha^n} = k$, kur $k \neq 0$ un $k \neq \infty$ un jāsastāda reizinājums $k\alpha^n$, kas tad ir β galvenā daļa.

14. §. Uzdevumi.

Atrast izteiksmju robežas:

1. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x + 5}{x^2 + 7}$ . . . Atb. $\frac{1}{2}$. 2. $\lim\limits_{y \to -2} \frac{y^2 + 1}{y + 3}$ . . . . . . Atb. 5.

3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2\cos x - 3\operatorname{tg} x}{1 - 2x + x^3 - x^4}$. „ 2. 4. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(2 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)$ . . . „ 2.

5. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 1}{2x}$ . . . . . „ ∞. 6. $\lim\limits_{y \to \infty} \frac{4y^2 + 7y - 1}{2y^2}$ . . . . „ 2.

7. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^3 + 3x - 2}{2x^4 + 5}$ . . . „ 0. 8. $\lim\limits_{t \to 0} \frac{2t^3 + 3t^2}{t^3}$ . . . . . . „ ∞

9. $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$ . . . „ 0.

10. $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + ax + b} - \sqrt{x^2 + cx + b})$ . . . . $\left(\frac{a - c}{2}\right)$.

Piezīme. Irracionālas izteiksmes robežas aprēķināšanai bieži vien ir izdevīgi irracionālitāti pārnest no skaitītāja saucējā un otrādi.

Atrast izteiksmju īstās vērtības:

11. $\left[\frac{x^3-1}{x-1}\right]_{x=1}$ . . . . . Atb. 3. 12. $\left[\frac{4(x-1)^2}{x(x-1)}\right]_{x=1}$ . . . . . Atb. 0.

13. $\left[\frac{4x^3+3x^2-5x}{6x}\right]_{x=0}$. „ $-\frac{5}{6}$. 14. $\left[\frac{x^3(x-3)(2x+1)}{(x-3)(x-2)}\right]_{x=3}$ „ 189.

15. $\left[\frac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}\right]_{x=2}$ . . „ 1.

16. $\left[\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\right]_{h=0}$ **(n naturāls sk.)** . . . . **Atb.** nx^{n-1}

17. $\left[\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right]_{x=0}$ . . Atb. $\frac{1}{2}$. 18. $\left[\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\right]_{h=0}$. „ $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

19. $\left[\frac{\sin^2 x}{x^2}\right]_{x=0}$ . . . . . . „ 1. 20. $\left[\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}\right]_{x=0}$. „ $\sqrt{2}$.

21. Pierādīt, ka $\cos x$ un $\operatorname{ctg} x$ pie $x \to \frac{\pi}{2}$ ir vienādas kārtas bezgalīgi mazi lielumi.

22. Bezgalīgi mazie lielumi β un γ attiecībā pret α ir 2. un 4. kārtas bezgalīgi mazie lielumi. Aprēķināt $\beta \pm \gamma$; $\beta\gamma$ un $\frac{\gamma}{\beta}$ kārtu. (2, 6, 2.).

23. α ir pirmās kārtas bezgalīgi mazs lielums. Aprēķināt $\frac{\alpha}{\alpha-1}$ un $\sqrt[3]{\sin\alpha}$, kārtu. Atb. $\left(1;\ \frac{1}{3}\right)$.

III. nodaļa.

Funkcijas.

Funkcija ir viens no centrālajiem jēdzieniem ap ko grupējas visi līdz šim apskatītie jēdzieni, kalpodami kā līdzekļi funkcijas īpašību pētīšanā. Tas savos pamatos ir fundāmentāls līdzeklis dabas un dzīves izzināšanai un izpratnei, jo tas vislabāki dod atbildi vienam matēmatikas pamatuzdevumam: izzināt un izprast kvantitātīvās saites, kas eksistē ārējās pasaules lietās un parādībās.

15. §. Arguments un funkcija.

Redzējām, ka izšķir pastāvīgos un mainīgos lielumus, pie kam par mainīgu lielumu sauc tādu, kam apskatāmā jautājumā var būt dažādas nozīmes. Piemēram, ņemot riņķi un velkot chordas dažādos attālumos no centra, dabūjam katru reizi noteikta garuma chordu. Chordas attālums un garums ir mainīgi lielumi. Še zināmas robežas (no 0—2R) katrai brīvi izvēlētai jeb patvaļīgai attāluma nozīmei atbilst chordas garuma nozīme. No tā secinām, ka mainīgiem lielumiem var būt divas kategorijas: vieniem, zināmās robežās dodam patvaļīgas nozīmes; otriem, līdz ar to jau ir noteiktas atbilstošās nozīmes.

Mainīgo lielumu, kā nozīmes dotajā jautājumā izvēlamies patvaļīgi, sauc par neatkarīgo mainīgo lielumu jeb argumentu.

Mainīgo lielumu, kā nozīmes dotajā jautājumā atbilst argumenta nozīmēm, sauc par šā argumenta funkciju.

Piemērā chordas attālums ir arguments un chordas garums tā funkcija. Minēsim vēl piemērus. Kvadrāta laukums ir malas funkcija. Kuba tilpums ir šķautnes funkcija. Riņķa līnijas garums un laukums ir radija funkcijas.

Vēl cits piemērs: lai uzzīmētu cilindru, izvēlamies patvaļīgas nozīmes radijam un augstumam, kurām atbilst noteikta cilindra tilpuma nozīme. Cilindra radijs un augstums ir argumenti un tilpums to funkcija. Taisnkaktu parallēlplākšņa tilpums ir atkarīgs no augstuma, garuma un platuma un tāpēc tilpums ir to funkcija. Redzam, ka funkcijai var būt arī vairāki argumenti. Šādu funkciju sauc par vairāku argumentu funkciju. Piemēram, parallēlplākšņa tilpums ir triju argumentu funkcija, cilindra tilpums ir divu argumentu funkcija.

Funkcijas jēdziens ir sastopams visās disciplīnās, kas nodarbojas ar ārējās pasaules lietu un parādību kvantitātīvo īpašību pētīšanu. Piemēram, fizika māca, ka noteiktam strāvas stiprumam, tecēšanas laikam un vada pretestībai atbilst noteikts Džoula siltums. Kosmografijā mācāmies, ka noteiktā zemes vietā (ģeografiskā platumā) noteiktam ķermenim ir noteikts svars. Zinām arī, ka katrā dienas stundā ir noteikta temperātūra u. t. t. Visur tur, kur katrai x nozīmei atbilst y nozīme, kur y apzīmē kaut ko, kas atbilst kaut kam ar x apzīmētam, varam vārda plašākā nozīmē runāt par funkciju.

Ir svarīgi zināt, kādā atkarībā ir viens lielums no pārējiem dotā jautājuma lielumiem. Jautājums ir atrisināts, ja ir izdevies **atrast likumu**, kas saista funkciju ar tās argumentiem, **izteikt to matemātiski** un dabūt tā saucamo **funkcijas matemātisko izteiksmi**, no kuŗas tad var aprēķināt argumenta nozīmēm atbilstošās funkcijas nozīmes. Piemēram, ja kvadrāta mala ir x un laukums y, tad no formulas $y = x^2$ varam aprēķināt katrai argumenta x nozīmei atbilstošo funkcijas nozīmi y. Rodas jautājums, vai katrai funkcijai ir iespējams atrast matēmatisko izteiksmi. Pietiek atcerēties piemēru par dienas temperātūru kā laika funkciju, lai atbildētu, ka nav iespējams. Šādas funkcijas sauc par **empīriskām funkcijām**. Funkcijas, kuŗām ir iespējams atrast matēmatisko izteiksmi sauc par **matēmatiskām funkcijām**.

16. §. Funkciju šķirošana.

Redzējām, ka var būt viena un vairāku argumentu funkcijas; matēmatiskas un empīriskas funkcijas. Apskatīsim tuvāk matēmatisko funkciju šķirošanu.

Funkciju sauc par **atklātu funkciju**, ja tā ir izteikta ar saviem argumentiem.

Piemēram, $z = 2x + 5$, $z = \frac{3x^3 + 4\sqrt{y}}{x - 5y}$. Vispārīgi, ja z ir x atklāta funkcija, tad raksta

$$z = f(x);$$

ja divu argumentu x un y, tad $z = f(x, y)$ u. t. t. Šie simboli jau apskatīti tuvāk 5. §.

Atklātu funkciju sauc par algebrisku, ja tās nozīmi dabū no argumentu nozīmēm ar galīga skaita algebriskām darbībām, pretējā gadījumā par transcendentu.

Piemēram, atklātas algebriskas funkcijas izteiksme ir $y = \frac{2x^3 + 5\sqrt{x}}{x - 1}$, bet transcendentas $y = \sin x$.

Vienkāršākās transcendentās funkcijas ir: 1) trigonometriskās funkcijas: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$; 2) ciklometriskās funkcijas: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$; 3) logaritmiskā funkcija: $y = \lg_a x$; 4) eksponentfunkcija: $y = a^x$.

Ja algebriskas funkcijas izteiksmē arguments nav zem saknes, tad funkciju sauc par racionālu, pretējā gadījumā funkciju sauc par irracionālu.

Piemēram, racionālas funkcijas izteiksme ir $y=\frac{ax^3+b}{cx+d}$, bet irracionālas $y=\frac{x+\sqrt{1-x}}{a+2x}$.

Racionālas funkcijas iedala veselās un daļu funkcijās.

Ja funkcijas izteiksmē arguments nav dalītājā, tad funkcija ir vesela, pretējā gadījumā daļu funkcija.

Viena argumenta veselas racionālas funkcijas vispārīgā veida izteiksme ir polinoms:

$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

(n ir naturāls skaitlis).

Daļas racionālu viena argumenta funkciju var uzrakstīt kā divu polinomu dalījumu:

$$y=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}.$$

Piemērs:

$$y=\frac{(x-2)^2}{x-3}+\frac{2x-4}{x^2-9}-\frac{1}{x-1};$$

izdarot attiecīgus algebriskus pārveidojumus, dabūjam:

$$y=\frac{x^4-2x^3-6x^2+14x-3}{x^3-x^2-9x+9}.$$

Definējot funkciju, teicām, ka katrai argumenta nozīmei atbilst noteikta funkcijas nozīme. Ir arī tā, ka katrai funkcijas y nozīmei atbilst noteikta argumenta x nozīme. Tāpēc varam teikt, ka x ir y funkcija. Tādā gadījumā dabūjam **apvērsto** jeb inverso funkciju. Piemēram, ja tiešā funkcija izteikta ar $y=3x-5$, tad apvērstā ar $x=\frac{5+y}{3}$.

Atkarībā no tā, cik funkcijas nozīmes atbilst argumenta nozīmei, funkcijas iedala vienvērtīgās, divvērtīgās, trīsvērtīgās u. t. t. daudzvērtīgās funkcijās. Piemēram, $y=4x+5$ izsaka vienvērtīgu, $y=\pm\sqrt{x}$ divvērtīgu un $y=\operatorname{Arc\,sin} x$ daudzvērtīgu funkciju. Daudzvērtīgu funkciju var uzskatīt kā vienvērtīgu funkciju, ievedot kādu papilda nosacījumu. Piemēram, $y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$ izsaka divvērtīgu funkciju, bet ievedot papildu nosacījumu, ka kvadrātsakne ņemama ar $+$ zīmi, dabūjam vienvērtīgu funkciju, ko izsaka $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Funkciju sauc par **pāŗu funkciju**, ja argumentu nozīmēm, kas atšķiŗas tikai ar zīmi, funkcijas nozīmes ir vienlīdzīgas:

$$f(+a) = f(-a).$$

Piemēram, $y = 3x^6 - x^4 + 5x^2 - 7$ un $y = \cos x$.

Funkciju sauc par **nepāŗu funkciju**, ja argumentu nozīmēm, kas atšķiŗas tikai ar zīmi, arī funkcijas nozīmes atšķiŗas tikai ar zīmi:

$$f(+a) = -f(-a).$$

Piemēram, $y = \sin x$; $y = \operatorname{tg} x$.

Funkciju sauc par **periodisku**, ja funkcijas nozīme nemainās, argumenta nozīmei pieskaitot vai atņemot vienu vai vairākas reizes noteiktu skaitli, sauktu periodu.

Piemēram,

$\sin x = \sin(x + 2k\pi)$, $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + k\pi)$, 2π un π ir periodi (k vesels skaitlis).

Funkciju sauc par **apslēptu funkciju**, ja tās nozīme ir kopā ar argumentu nozīmēm nolīdzinājumā.

Piemēram, $y^2 - (4 + x)y + 3x = 0$. Vispārīgi, lai izteiktu, ka y ir x apslēpta funkcija, raksta

$$f(x, y) = 0;$$

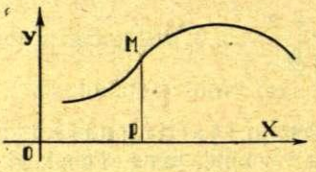
ka z ir x un y apslēpta funkcija — $f(x, y, z) = 0$, u. t. t. Izrēķinot funkcijas nozīmi no nolīdzinājuma, apslēpta funkcija pāriet atklātā. Piemēram, $y - 3x + 5 = 0$ ir apslēptas funkcijas izteiksme, bet $y = 3x - 5$ atklātas. Visas apslēptas funkcijas nevar pārvērst atklātās funkcijās, jo sākot ar 5. pakāpes nolīdzinājumiem, nav iespējams atrisināt nolīdzinājumu radikālos.

17. §. Funkciju grafikas un tabulas.

Zinām, ka skaitļus var attēlot uz skaitļu līnijas, ja izvēlamies sākuma punktu, gaŗuma vienību un pozitīvo virzienu. Šo līniju sauksim par abscisu asi jeb x asi (6. §.). Tad varam teikt, ka

skaitļa ģeometriskais attēls ir punkts, kā abscisa ir vienlīdzīga šim skaitlim.

Katru mainīgu lielumu var saistīt ar skaitļiem — tā nozīmēm, kuŗas var attēlot uz abscisu ass. Ja argumenta un funkcijas nozīmes attēlotu uz abscisu ass, tad varētu viegli sajaukt argumenta nozīmju attēlotāju punktus ar funkcijas nozīmju attēlotāju punktiem. Lai to novērstu, tad caur sākuma punktu velk perpendikulāru taisni abscisu asij, ko sauc par ordinātu asi jeb y asi, kuŗas pozitīvo virzienu pieņem uz augšu no abscisu ass un uz abscisu ass attēlo argumenta nozīmes, bet uz ordinātu ass funkcijas nozīmes. Tomēr tas nedod redzamu funkcijas maiņas pārskatu atkarībā no argumenta maiņas. Tāpēc y nozīmes neattēlo tieši uz ordinātu ass, bet uz perpendikula, kas vilkts x asij no atbilstošā argumenta nozīmes attēla.



4. zīm.

Tā dabūtie punkti attēlo funkcijas atsevišķas nozīmes.

Ja x nozīmes ņemtu tik tuvu citu citai, ka y nozīmju attēli sekotu cits citam tā, ka rastos vairs ne atsevišķu punktu virkne, bet līnija, tad dabūtu funkcijas grafiku jeb funkcijas ģeometrisko attēlu (4. zīm.). Praksē grafiku atrod, atrodot dažus grafikas punktus, kuŗus ņem tik tuvu citū citam, lai starppunktus varētu uzzīmēt pēc grafikas vispārīgā rakstura. Attāluma nozīmes uz ordinātu ass, sauc par ordinātām. Abscisu un ordinātu kopā nosauc par punkta koordinātām, un asis par koordinātu asīm, kuŗas sastāda koordinātu sistēmu.

1. piemērs. Dabā un ikdienišķā dzīvē bieži sastopami tieši proporcionāli lielumi, ko matēmatiski izsaka:

$$y = kx.$$

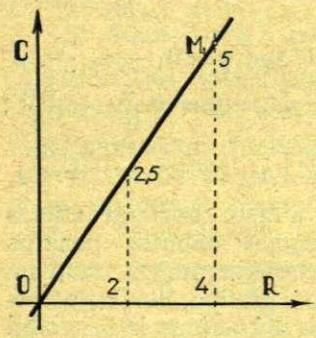
Piemēram, sakars starp Reomira un Celsija termometru skālām ir $C = \frac{5}{4} R$; sakars starp ceļu, ātrumu un laiku vienmērīgā kustībā pa taisni ir $s = vt$.

Atradīsim funkcijas $C = \frac{5}{4} R$ grafiku. Tā ir pirmās pakāpes funkcija, tāpēc tās grafika ir taisne un grafikas atrašanai pietiek atrast divus punktus, kuŗi jāsavieno ar taisni.

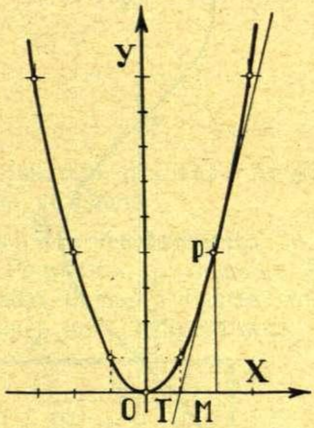
Tāpēc sastādīsim tabulu, kuŗā sakopoti vismaz divi skaitļu pāŗi.

ja $R = 0$, tad $C = 0$;
$R = 4$, tad $C = 5$.

Ar grafikas palīdzību (5. zīm.) varam atrast arī funkcijas starpnozīmes. Piemēram, ja gribam zināt, cik ir pēc Celsija skālas, ja pēc Reomira ir +2°, tad +2 punktā abscisu asij jāvelk perpendikuls līdz krustojumam ar grafiku. Perpendikula garums dod Celsija gradu skaitu, kā garums šai gadījumā ir 2,5. Ja grafika ir zīmēta uz milimetra papīra, tad tāda grafika ļauj ātri pāriet no Reomira skālas uz Celsija skālu un otrādi. Tabulā un arī 5. zīmējumā ir zināmas tieši divi funkcijas nozīmes 0 un 5, atbilstošas argumenta nozīmēm 0 un 4 un ar grafikas palīdzību atrodam arī starpnozīmi 2,5, atbilstošu argumenta nozīmei 2, kas atrodas 0 un 4 starpā. Starpnozīmju atrašanu ar to nozīmju palīdzību, kas dotas tieši, sauc par interpolēšanu.



5. zīm.



6. zīm.

2. piemērs. Atradīsim grafiku otras pakāpes funkcijai

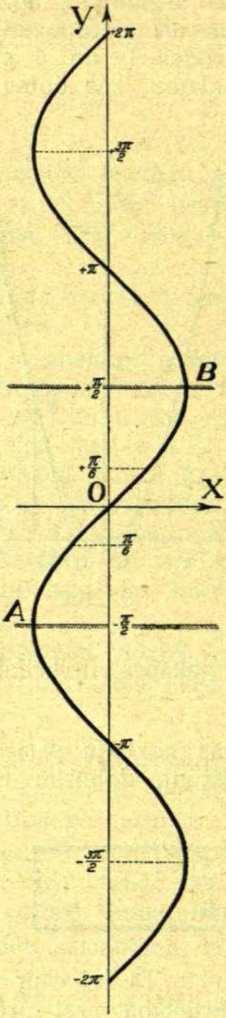
$$y = x^2$$

Sastādīsim x un y nozīmju tabulu un tās nozīmju pāriem atradīsim atbilstošos punktus, kuŗus savienojot, dabūsim funkcijas grafiku.

x	0	+1	+2	+3	−1	−2	−3	—	—	—
y	0	+1	+4	+9	+1	+4	+9	—	—	—

Šo līniju (6. zīm.) sauc par parabolu. Tā iet caur koordinātu sākuma punktu; ir simmetriskā attiecībā pret ordinātu asi; līdz ar argumenta neaprobežotu augšanu, neaprobežoti aug arī funkcija un ir aizvien pozitīva. Arī šo grafiku, tāpat kā katru grafiku, varam izlietot interpolēšanai. Piemēram, zīmējumā atrodam, ka $2{,}5^2 = 6{,}25$, u. t. t. Mēchanikā šāda veida piemērs sastopams brīvā kritienā: $s = \frac{g}{2} t^2$, kur s ir ceļš, t — laiks un $g = 981{,}5 \frac{cm}{sec^2}$ (paātrinājums).

3. piemērs.



7. zīm.

$$y = \text{Arcsin}\, x \ldots (1).$$

No (1) formulas varam secināt, ka $x = \sin y$ un tāpēc

$$-1 \leqslant x \leqslant +1 \ldots (2).$$

Redzam, ka arkussinus arguments var mainīties tikai (2) intervallā. Funkcijas grafikas atrašanai sastādīsim x un y nozīmju tabulu:

ja $x = 0$, tad $y = 0;\ \pm\pi;\ \pm 2\pi;$

„ $x = \pm\frac{1}{2}$ „ $y = \pm\frac{\pi}{6};\ \pm\frac{5\pi}{6};$

„ $x = \pm 1$ „ $y = \pm\frac{\pi}{2};\ \mp\frac{3\pi}{2}.$

Atrodot atrasto nozīmju attēlus un savienojot dabūtos punktus ar nepārtrauktu līniju, dabūjam arkussinus grafiku, no kuŗas redzams, ka arkussinus ir bezgalīgi daudzvērtīga funkcija, jo vienai abscisai atbilst bezgalīgi daudz ordinātas. Lai pārvērstu Arcsin x vienvērtīgā funkcijā, tad ņem tikai tās funkcijas nozīmes, kas atrodas intervallā

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant +\frac{\pi}{2} \ldots (3).$$

un funkciju apzīmē simboliski

$$y = \arcsin x \ldots (4).$$

Funkcijas nozīmes, kas padotas (3) nosacījumam, sauc par arkussinus galvenām nozīmēm un tās attēlotas grafiski starp A un B (7. zīm.).

Arī pārējās ciklometriskās funkcijas ir daudzvērtīgas. Galvenās nozīmes ciklometriskai funkcijai Arctg x, tāpat kā Arcsin x, ņem tajā pašā intervallā:

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant \operatorname{arc\,tg} x\leqslant +\frac{\pi}{2}.$$

Arccos x un Arcctg x galvenās nozīmes ņem starp o un $+\pi$;

$$o\leqslant \operatorname{arc\,cos} x\leqslant +\pi$$
$$o\leqslant \operatorname{arc\,ctg} x\leqslant +\pi.$$

Šie nosacījumi daudzvērtīgās ciklometriskās funkcijas pārvērš vienvērtīgās. Arcsin x grafika ir tā pati līkne kā funkcijas sin x grafika, tikai tā ir citādi novietota pret koordinātu asīm nekā sin x grafika: šīs līnijas ir simmetriskas attiecībā pret 1. un 3. koordinātu leņķa bisektrisi.

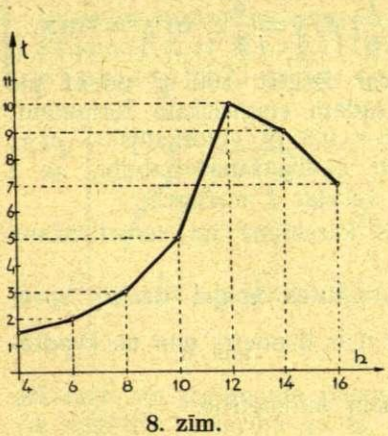
Uzdevumi:

1. Atrast Arccos x grafiku.
2. Atrast Arctg x grafiku.
3. Atrast Arcctg x grafiku.

Līdz šim apskatījām matēmatisko funkciju grafikas. Apskatīsim tagad empīrisko funkciju grafikas atrašanu.

Empīriskām funkcijām nozīmju tabula jāsastāda novērojumos iegūtiem datiem. Piemēram, pieņemsim, ka esam novērojuši temperātūras maiņu kādas dienas noteiktās stundās un ieguvuši šādu tabulu, kur h ir laiks un t temperātūra:

h	4	6	8	10	12	14	16
t	+1,5	+ 2	+ 3	+ 5	+10	+ 9	+ 7



8. zīm.

Novērojumus sākām plkst. 4, tāpēc 4 pieņemam par koordinātu sākumu. Attēlojot tabulas nozīmes, iegūsim punktus, atbilstošus attiecīgā momenta temperātūrai un savienojot šos punktus ar taisnes gabaliem, dabūsim lauztu līniju, ko var uzskatīt pirmajā tuvinājumā par temperātūras grafiku (8. zīm.). Ja gribam to pareizāku, tad novērojumi jāizdara biežāk un iegūtie punkti jāsavieno ar līkni.

Viens no galveniem jautājumiem mācībā par funkcijām ir zināt kāda nozīme ir funkcijai pie attiecīgās argumenta nozīmes un kā mainās funkcija, mainoties argumentam zināmā intervallā. Tai nolūkā argumentu nozīmju sistēmai atrod aprēķinu (matēmatiskām funkcijām) vai pieredzes ceļā (empīriskām funkcijām) atbilstošo funkcijas nozīmju sistēmu un sastāda tabulu, kurā atrodamas vajadzīgās funkciju nozīmes un kura tad arī dod funkcijas maiņas pārskatu atkarībā no argumenta maiņas.

Šim paņēmienam ir arī savas nepilnības, jo tabulā nevaram dabūt funkcijas nozīmi kaut kurai argumenta nozīmei zināmā intervallā, bet tikai tabulā dotām. Nav labi pārskatāma arī funkcijas maiņa atkarībā no argumenta maiņas. Tomēr dažās tabulās, kā, piemēram, logaritmu, ar interpolēšanas palīdzību var atrast arī starpnozīmes.

Matēmatiskām funkcijām var aprēķināt no formulām kaut kurai argumenta nozīmei atbilstošo funkcijas nozīmi. Bet arī empīriskām funkcijām dažreiz var izlīdzēties ar empīriskām formulām. Tās ir formulas, kas atrastas uz pieredzes datu pamata un kas dod tuvinātus rezultātus. Empīriskās formulas bieži vien lieto fizikā, technikā u. c. Analitiskam funkcijas nozīmju atrašanas paņēmienam ir tā priekšrocība, ka var atrast funkcijas nozīmi kaut kurai argumenta nozīmei un ar vēlamo tuvinājumu, bet te ir vēl mazāk pārskatāma funkcijas maiņa nekā iepriekšējā tabulārā paņēmienā. Šā trūkuma novēršanai lieto grafisko paņēmienu. Pilnīgākai funkcijas izpētīšanai lieto visus trīs paņēmienus.

Uzdevumi:

1. Ar 8. zīm. palīdzību atrast temperātūru plkst. 9 un 11.
2. Atrast funkciju grafikas:

a) $y=2x^2$; b) $y=0{,}5x^2$; c) $y=\frac{1}{x}$; d) $y=\frac{4}{x}$; e) $y=\sin x$.

3. Vielas daudzums u, kas var izšķīst 100 g ūdenī pie temperātūras t, aprēķināms pēc šādām empīriskām formulām: slāpekļskābais natrijs — $u=67{,}5+0{,}87t$; chlōrkalijs — $u=29{,}1+0{,}28t$. Sastādīt šo vielu šķīdināšanas tabulu, ja t mainās no $0°$—$10°$ (apskatīt tikai veselas t nozīmes).

4. Kalēju darba normas dzelzs karsēšanā un sametināšanā aprēķinā pēc formulām:

a) dzelzs karsēšanas laiku t minūtēs apaļai dzelzij aprēķina no formulas $t=\frac{\pi d^2}{1000}+1$, kur d ir diametrs mm un kvadrātiskai — $t=\frac{a^2}{250}+1$, kur a ir mala milimetros.

b) sametināšanas laiku pirmā gadījumā aprēķina no formulas $t = \frac{d^2}{50} + 5$ un otrā $t = \frac{a^2}{50} + 5$.

Aprēķināt t, ja a un d mainās no 10—100 mm un pieņem nozīmes, kas sastāv tikai no desmitiem.

18. §. Funkcijas robeža.

Domāsim argumentu x, kā robeža ir a, tāpēc

$$x = a + \alpha,$$

kur α ir bezgalīgi mazs skaitlis un pieņemsim, ka tai pašā laikā tā funkcija y tiecas uz robežu b, t. i.

$$y = b + \beta,$$

kur β ir bezgalīgi mazs skaitlis. Tādā gadījumā saka, ka b ir y robeža, ja x tiecas uz a, ko raksta šā:

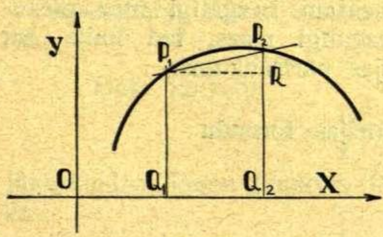
$$\lim_{x \to a} y = b \text{ jeb } \lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Funkcijas jēdzienu saistījām ar matēmatiskas izteiksmes jēdzienu, kā robežas atrašanas jautājumu jau apskatījām sīkāki (11. §).

19. §. Funkcijas nepārtrauktība.

Iepriekš apskatīsim neatkarīgā mainīgā lieluma nepārtrauktu maiņu. Pieņemsim, ka x mainās no a līdz b tā, ka x visu laiku vai nu augdams vai dildams pieņem visas intervalla ab starpnozīmes. Šadā gadījumā x blakus nozīmju starpība ir bezgalīgi dilstoša.

Ja lielums mainīdamies no a līdz b dabū pēc kārtas visas nozīmes tā, ka divu blakus nozīmju starpība ir bezgalīgi maza, tad lielums mainās nepārtraukti intervallā ab.



9. zīm.

Pieņemsim, ka

$$y = f(x), \text{ (9. zīm.)}.$$

Argumenta x atsevišķā nozīme lai ir a. Dosim argumentam pieaugumu

$$\triangle x = Q_1 Q_2,$$

tad funkcija dabūs pieaugumu $\triangle y = RP_2$. Varam rakstīt, ka

$$\triangle y = f(a + \triangle x) - f(a) \ldots (1).$$

Funkcijas pieaugums $\triangle y$ ir atkarīgs no argumenta pieauguma $\triangle x$ un tas var būt pozitīvs vai negātīvs, atkarībā no tā, kāds ir funkcijas raksturs. Var būt, ka argumentam bezgalīgi maz izmainoties, arī funkcija bezgalīgi maz izmainās, citiem vārdiem sakot, dodami argumentam bezgalīgi mazu pieaugumu $\triangle x$, arī funkcija dabū bezgalīgi mazu pieaugumu $\triangle y$. Bet (1) vienlīdzība rāda, ka funkcijas pieaugums nav nekas cits kā divu blakus nozīmju starpība, kuŗa tad ir bezgalīgi maza. Tāpēc šai gadījumā sakām, ka funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta, pie $x = a$.

Definīcija,

funkciju $f(x)$ sauc par nepārtrauktu, pie $x = a$, ja argumenta bezgalīgi mazam pieaugumam atbilst funkcijas bezgalīgi mazs pieaugums.

Matēmatiski to varam uzrakstīt

$$\lim_{\Delta x \to 0} \triangle y = 0 \ldots (2).$$

Funkciju, kas nepārtraukta visos dotā intervalla punktos, sauc par nepārtrauktu šai intervallā.

Lai labāk izprastu funkcijas nepārtrauktību, domāsim uz abscisu ass (9. zīm.) kustošu punktu kustamies no Q_1 līdz Q_2 nepārtraukti, kā abscisa ir aizvien vienlīdzīga argumenta x nozīmei un caur šo punktu vilktu perpendikulāru taisni abscisu asij, uz kuŗas atrodas otrs kustošs punkts P, kas kustas tā, ka tā ordināta ir vienmēr vienlīdzīga attiecīgai funkcijas nozīmei. Tādos nosacījumos punkts P nepārtrauktā kustībā veidos loku $P_1 P_2$. Ja funkcija ir nepārtraukta, tad līdz ar $\triangle x \to 0$, arī $\triangle y \to 0$, taisnes gabals $P_1 P_2 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ arī tiecas uz nulli un robežgadījumā gabals $P_1 P_2$ saplūst ar loku $P_1 P_2$ un tāpēc arī $\smile P_1 P_2 \to 0$, t. i. loks ir bezgalīgi mazs. Tas nozīmē, ka funkcijas nepārtrauktības gadījumā punkts P veido nepārtrauktu līniju. Ja, turpretim, argumentam bezgalīgi maz pieaugot, funkcijas pieaugums nav bezgalīgi mazs, tad līnija šai punktā ir pārtraukta, tur ir funkcijas pārtraukums.

Funkcijas nepārtrauktības definīcijas formulu

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

varam pārveidot, ievērojot (1.) formulu:

$$\lim_{\Delta x \to 0} [f(a + \Delta x) - f(a)] = 0,$$

Pamatojoties uz robežlielumu teorēmām, rakstām

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(a+\Delta x) - \lim_{\Delta x \to 0} f(a) = 0,$$

bet tā kā pastāvīga lieluma robeža ir vienlīdzīga pašam lielumam, tad $\lim_{\Delta x \to 0} f(a) = f(a)$ un tālāk dabūjam, ka

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(a+\Delta x) - f(a) = 0 \quad \text{jeb}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(a+\Delta x) = f(a) \ldots (3).$$

a ir pastāvīgs skaitlis — atsevišķa x nozīme; $a + \triangle x$ ir mainīgs lielums x, ko apskatām a tuvumā, tāpēc varam rakstīt $a + \Delta x = x$ un ja $\Delta x \to 0$, tad $x \to a$ un $\lim_{\Delta x \to 0} f(a+\Delta x) = \lim_{x \to a} f(x)$.

Sakarā ar to, (3) formulu varam pārrakstīt šā:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \ldots (4.).$$

(4) formula ir funkcijas nepārtrauktības definīcijas formulas (2) secinājums. Izejot no (4), varam dabūt arī (2). Tāpēc (4) formulu arī varam uzskatīt kā funkcijas nepārtrauktības definīcijas formulu. Pirms formulējam iegūto rezultātu, atcerēsimies, ka f (x) ir mainīgs lielums, kā robeža ir f (a) un ka mainīgam lielumam var būt tikai viena robeža, pie tam galīga, jo bezgalību kā robežu pieņēmām tikai uz norunas pamata un ne citādi.

Definīcija:

funkciju f(x) sauc par nepārtrauktu, pie $x = a$, ja tās nozīme f (a) ir viens noteikts galīgs skaitlis un

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Apskatīsim dažus raksturīgus funkcijas pārtraukuma piemērus.

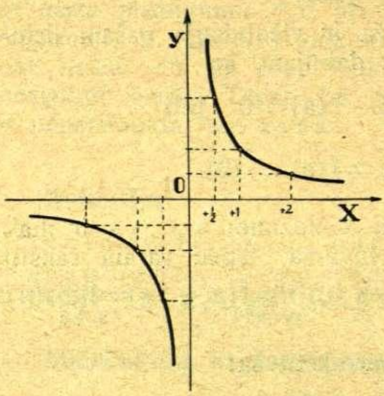
1. Dota funkcija

$$y = \frac{1}{x};$$

jānoskaidro, kuŗos punktos tās pārtraukums. Nav gŗūti redzēt, ka

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

un tāpēc funkcija nullpunktā ir pārtraukta. Vispāri funkcija ir nepārtraukta. Attēlosim to arī grafiski, šim nolūkam sastādīsim funkcijas nozīmju tabulu:



10. zīm.

1. ja $x > 0$, tad ja

$x = 0$; $y = +\infty$

$x = +\frac{1}{2}$; $y = +2$

$x = +1$; $y = +1$

$x = +2$; $y = +\frac{1}{2}$

. . . .

$x \to +\infty$; $y \to 0$.

2. ja $x < 0$, tad ja

$x = 0$; $y = -\infty$

$x \to -\infty$; $y \to 0$.

(Pārējās nozīmes ir ņemamas ar pretējām zīmēm, kā 1. tab.).

Redzam (10. zīm.), ka nullpunktā funkcija mainās no $+\infty$ uz $-\infty$

Lielums x, tiekdamies uz savu robežu a, var tuvoties tai vai nu no labās vai kreisās puses. Lai to atšķirtu, tad raksta pirmajā gadījumā $x \to a + 0$ un otrā $x \to a - 0$. Ja a ir 0, tad $x \to +0$ un $x \to -0$. Pirmajā gadījumā funkcijas robežu sauc par l a b o, otrā par k r e i s o r o b e ž u.

Nu dotās funkcijas $\frac{1}{x}$ pārtraukumu nullpunktā varam izteikt izteiksmēs rakstiski:

$$\lim_{x \to +0} \frac{1}{x} = +\infty \text{ un } \lim_{x \to -0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Tas nozīmē, ka funkcijas pārtraukuma gadījumā, ja $x = 0$, l a b ā r o b e ž a n a v v i e n l ī d z ī g a k r e i s a j a i.

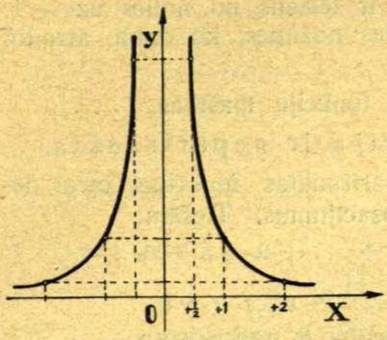
2. Dota funkcija

$$y = \frac{1}{x^2}.$$

Jānoskaidro, kuŗos punktos tā pārtraukta. Nullpunktā še vairs tāds lēciens nav kā pirmajā piemērā, jo

$$\lim_{x \to +0} \frac{1}{x^2} = +\infty \text{ un } \lim_{x \to -0} \frac{1}{x^2} = +\infty,$$

bet tā kā funkcijas nozīme, ja $x = 0$, ir bezgalīgi liela, tad funkcijai ir pārtraukums šai punktā.



11. zīm.

Atradīsim arī funkcijas grafiku.

ja $x = \pm 1$, tad $y = +1$,
„ $x = \pm 2$, „ $y = +\frac{1}{4}$,
„ $x \to \pm 0$, „ $y \to \infty$,
„ $x \to \pm \infty$, „ $y \to 0$,
„ $x = \pm \frac{1}{2}$, „ $y = +4$.

Abos piemēros funkcijai ir pārtraukums tad, ja viņu nozīmes ir bezgalīgi lielas. Šāda veida funkciju pārtraukumi ir parastākie. Var būt arī funkcija pārtraukta tādā gadījumā, ja tās nozīme nav bezgalīgi liela, kā tas, piemēram, redzams nākošajā piemērā.

3. Dota funkcija $y = \frac{1}{1 + a^{\frac{1}{x}}}$, kur $a > 1$. Jāatrod tās pārtraukumi. Šai nolūkā atradīsim labo un kreiso robežu nullpunktā:

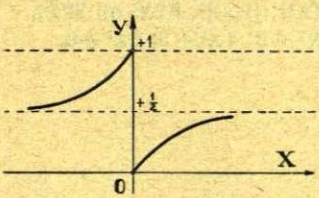
$$\lim_{x \to +0} \frac{1}{1 + a^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1 + a^{+\infty}} = \frac{1}{1 + \infty} = \frac{1}{\infty} = 0;$$

$$\lim_{x \to -0} \frac{1}{1 + a^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1 + a^{-\infty}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{a^{+\infty}}} = \frac{1}{1 + 0} = +1.$$

Tas nozīmē, ka argumentam x, tuvojoties nullei no labās puses, funkcijas nozīme ir 0, bet no kreisās $+1$, citiem vārdiem sakot, f (x) ir divi nozīmes nullpunktā un funkcija ir pārtraukta. Lai to labāk izprastu, atradīsim funkcijas grafiku, atrodot attiecīgo tabulu:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + a^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1 + a^0} = \frac{1}{1 + 1} = +\frac{1}{2};$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{1 + a^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1 + a^0} = \frac{1}{1 + 1} = +\frac{1}{2}.$$



12. zīm.

Ievērojot arī iepriekš atrastās divi nozīmes, dabūjam grafiku 12. zīm. No šā zīmējuma redzam, ka tiešām nullpunktā funkcijai ir pārtraukums. Virzoties no labās uz kreiso caur nullpunktu, līnijai ir lēciens no nulles uz $+1$. Funkcijai nullpunktā ir divi dažādas nozīmes, ko dabū, atrodot labo un kreiso robežu.

Apskatīsim dažas nepārtraukto funkciju īpašības.

Vesela racionāla funkcija ir nepārtraukta.

Tas saprotams, ievērojot nepārtrauktas funkcijas otru definīciju un robežas atrašanas nosacījumus. Tiešām,

$$\lim_{x \to a} (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n) =$$
$$= a_0 a^n + a_1 a^{n-1} + a_2 a^{n-2} + \ldots + a_{n-1} a + a_n .$$

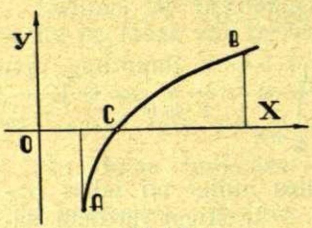
Šī nozīme ir arī galīga. Ar to īpašība ir noskaidrota.

2. Daļu racionālā funkcija

$$\frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots + b_m}$$

ir nepārtraukta. Izņēmumi ir punkti, kuŗos saucējs ir nulle.

3. Nepārtraukta funkcija $f(x)$, mainīdama zīmi, iziet caur nulli.



13. zīm.

Runājot ģeometriski, nepārtraukta līnija (13. zīm.), savienojot abscisu asij abās pusēs atrodošos divi punktus A un B, krusto abscisu asi punktā C.

Uzdevumi.

1. **Dota $f(x) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30$, atrast $f(0)$, $f(2)$, $f(-1)$, $f(az)$, $f(x+h)$.**
   Atb. $-30; 0; -6; a^3z^3 - 10a^2z^2 + 31az - 10$.
2. **Dotas $f(x) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30$ un $\varphi(x) = x^4 - 55x^2 - 210x - 216$. pierādīt, ka $f(3) = \varphi(-3)$ un $f(5) = \varphi(-4)$.**
3. **Dota $f(x) = 2x^6 - x^4 + 7x^2 - 3$, pierādīt, ka $f(m) = f(-m)$.**
4. **$f(x) = x^2 + 3$, atrast $f(x+1)$; $f(x) + 1$; $f(x^2)$; $[f(x)]^2$; $f(2x)$ un $2f(x)$.**
   atb. $x^2 + 2x + 4$; $x^2 + 4$; $x^4 + 3$; $x^4 + 6x^2 + 9$; $4x^2 + 3$; $2x^2 + 6$.

II DAĻA

DIFERENCIĀLRĒĶINI

IV. nodaļa.

Funkcijas atvasinājums un diferencēšanas likumi.

Jautājumi, saistīti ar tangentes un ātruma jēdzieniem, noveda pie pamatuzdevuma — atrast divi bezgalīgi mazu lielumu attiecības robežu. Šā pamatuzdevuma atrisināšanas metodes meklējumi atklāja svarīgu matēmatikas daļu — diferenciālrēķinus. Diferenciālrēķinu nodibinātāji ir Leibnics un Ņūtons.

20. §. Funkcijas atvasinājums.

Pieņemsim, ka

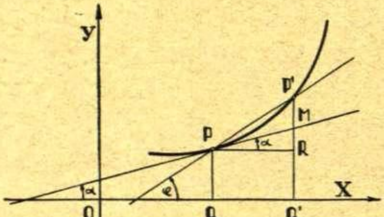
$$y = f(x)$$

icteic kādā intervallā nepārtrauktu un vienvērtīgu funkciju. Argumenta sākuma nozīmi apzīmēsim vienkārši ar x un atbilstošo funkcijas nozīmi ar y. Dosim argumentam pieaugumu $\triangle x$, tad līdz ar to arī funkcija dabūs pieaugumu $\triangle y$. Tādā kārtā argumenta jaunā nozīme ir $x + \triangle x$ un atbilstošā funkcijas nozīme $y + \triangle y$. Tāpēc varam rakstīt, ka

$$y + \triangle y = f(x + \triangle x).$$

No abām vienlīdzībām dabūjam, ka

$$\triangle y = f(x + \triangle x) - f(x).$$



14. zīm.

Domāsim 14. zīm. attēlotu doto funkciju. Argumenta sākuma nozīmē $x = OQ$; atbilstošā funkcijas nozīme $y = QP$; jaunā argumenta nozīme $x + \triangle x = OQ'$ un funkcijas — $y + \triangle y = Q'P'$. Argumenta pieaugums $\triangle x = QQ'$ un funkcijas pieaugums $\triangle y = RP'$. Vispārīgi, ja funkcija attēlota grafiski, tad argumenta pieaugums attēlojas kā abscisas pieaugums un funkcijas pieaugums kā ordinātas pieaugums.

Sastādīsim $\triangle y$ un $\triangle x$ attiecību, izdalīdami funkcijas pieauguma $\triangle y$ izteiksmi ar $\triangle x$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Pieņemsim, ka $\triangle x \to 0$, tad arī $\triangle y \to 0$, jo f(x) pēc pieņēmuma ir nepārtraukta funkcija. Šādā gadījumā $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ir divu bezgalīgi mazu lielumu attiecība. Ja šai attiecībai ir robeža, tad šo robežu sauc par dotās funkcijas **atvasināto funkciju** jeb **atvasinājumu**. Pieņemsim definīciju:

funkcijas atvasinājums ir funkcijas un argumenta pieaugumu attiecības robeža, ja argumenta pieaugums tiecas uz nulli.

To izsakām formulā:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Atvasinājumu apzīmē dažādi. Vairāk lietojamais apzīmējums ir Lagranža (Lagrange):

$$y' \text{ vai } f'(x),$$

ja funkciju apzīmē y vai f(x).

Vēlāk iepazīsimies arī ar Leibnica atvasinājuma apzīmējumu.

No atvasinājuma definīcijas secināms atvasinājuma atrašanas paņēmiens, kas sastāv no četriem soļiem:

1) funkcijas arguments x jāapmaina ar $x+\triangle x$, dabūjam $f(x+\triangle x)$;

2) no $f(x+\triangle x)$ jāatņem f(x), dabūjam $\triangle y$;

3) jādala $\triangle y$ ar $\triangle x$ — dabūjam $\frac{\Delta y}{\Delta x}$;

4) jāatrod attiecības $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ robeža, ja $\triangle x \to 0$. Šī robeža ir meklētais atvasinājums.

1. piemērs. $y=x^2$.

1. $y+\Delta y=(x+\Delta x)^2=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2$

2.
$$\begin{array}{r} -\; y+\Delta y=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2 \\ y=x^2 \\ \hline \Delta y=2x\Delta x+(\Delta x)^2 \end{array}$$

3. $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

4. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x}{\Delta x}+$

$$+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x \text{ un}$$

$$y'=2x.$$

2. piemērs. $y=x^3-2x+7.$

1. $y+\Delta y=(x+\Delta x)^3-2(x+\Delta x)+7=$
$=x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-2x-2\Delta x+7.$

2. $$\begin{array}{r}
-\ y+\Delta y=x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-2x-2\Delta x+7\\
y=x^3\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -2x\qquad\quad +7\\
\hline
\Delta y=3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-2\Delta x\qquad\qquad
\end{array}$$

3. $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-2\Delta x}{\Delta x}$$

4. $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2\Delta x-2\Delta x}{\Delta x}=3x^2-2 \quad \text{un}$$

$$y'=3x^2-2.$$

No piemēriem redzam, ka attiecība $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ietveŗ sevī x un $\triangle x$. Tāpēc to var uzskatīt kā x un $\triangle x$ funkciju. Ņemdami šās attiecības robežu, ja $\triangle x\to 0$, x uzskatām kā pastāvīgu lielumu. Robežgadījumā $\triangle x\to 0$ un locekļi ar $\triangle x$ izzūd un attiecības robeža $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nav vairs atkarīga no $\triangle x$, bet tikai no x. Vispārīgi runājot, atvasinājums ir x funkcija. Tāpēc arī šā argumenta jaunā funkcija, kas atvedināta zināmos procesos no dotās funkcijas f(x), dabūjusi nosaukumu atvasinātā funkcija jeb atvasinājums un apzīmējumu y' jeb f'(x).

Dažreiz atvasinājumā var arī nebūt x. Piemēram, lineāras funkcijas $y=kx+b$ atvasinājums ir bez x. Tiešām, ja

$$y=kx+b,$$

tad $$y+\Delta y=k(x+\Delta x)+b;\ \Delta y=k\Delta x,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=k \quad \text{un} \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}k=k \quad \text{un}$$

$$y'=k.$$

Apskatīsim šā piemēra divus atsevišķus gadījumus:

1) $k=0$.

Ja $k=0$, tad $y=b$ un $y'=0$. Dabūjam teōrēmu:

15. teōr. pastāvīga lieluma atvasinājums ir vienlīdzīgs nullei.

2) $k=1$ un $b=0$.

Ja $k=1$ un $b=0$, tad $y=x$ un $y'=1$. Tāpēc dabūjam teōrēmu:

16. teōr. argumenta atvasinājums ir vienlīdzīgs vienam.

No atvasinājuma definīcijas secināms, ka atvasinājums var būt tikai nepārtrauktām funkcijām, bet tā vēl nav pietiekoša pazīme, lai funkcijai būtu atvasinājums. Ne katrai nepārtrauktai funkcijai ir atvasinājums. Parastākām nepārtrauktām funkcijām ir atvasinājums. Pārtrauktām funkcijām atvasinājuma nav.

21. §. Atvasinājuma ģeometriskais iztulkojums.

Pieņemsim, ka $y=f(x)$ apzīmē nepārtrauktu funkciju, kā grafika ir 14. zīmējumā un ka tai eksistē atvasinājums. No $\triangle PP'R$ dabūjam, ka

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\operatorname{tg}\varphi,$$

kur $\operatorname{tg}\varphi$ ir leņķa koeficients sekantei PP'. Domāsim, ka $\triangle x \to 0$, tad arī (.) $Q' \to Q$, $\triangle y \to 0$ un (.) $P' \to P$. Tā kā (.) P ir nekustīgs punkts, tad sekante PP' griezīsies ap (.) P un robežgadījumā pāries līnijas $y=f(x)$ tangentē, kas vilkta punktā P. Līdz ar to $\varphi \to \alpha$ un $\operatorname{tg}\varphi \to \operatorname{tg}\alpha$, kur α ir leņķis starp pozitīvo abscisu ass virzienu un tangenti. Pēc pieņēmuma funkcijai $y=f(x)$ ir atvasinājums. Tāpēc $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}=y'$ un varam rakstīt, ka

$$y'=\operatorname{tg}\alpha$$

atvasinājums, pie dotās argumenta nozīmes x, ir vienlīdzīgs funkcijas attēlotājas līknes tangentes leņķa koeficientam, kas vilkta punktā kā abscisa x.

22. §. Līnijas tangentes konstruēšana.

Tas, ka dotai līnijai dotajā punktā vilktās tangentes leņķa koeficients ir vienlīdzīgs atvasinājuma nozīmei, ļauj konstruēt līnijai tās dotajā punktā tangenti, ja zināms līnijas nolīdzinājums Dekarta koordinātu sistēmā. Šai nolūkā jārīkojās šā:

1) jāatrod atvasinājums;

2) jāatrod atvasinājuma nozīme dotajai argumenta nozīmei, kas ir vienlīdzīga dotā punkta abscisai;

3) atrastā atvasinājuma nozīme ir tangentes leņķa koeficients tgα, no kā var konstruēt pašu α;

4) dotajā punktā velk taisni, kas veido ar pozitīvo abscisu ass virzienu leņķi α — vilktā taisne ir meklējamā tangente.

Praksē, parasti var iet vēl īsāku ceļu tangentes konstruēšanā. Lai to noskaidrotu, ņemsim piemēru: konstruēt parabolai

$$y = x^2$$

tangenti kādā tās punktā $P(x, y)$. Parabolas punktā P vilktā tangente (6. zīm. 47. lpp.), ordināta un abscisu ass veido $\triangle PMT$, kur

$$\frac{MP}{MT} = \operatorname{tg}\alpha \text{ jeb}$$

$$\frac{MP}{MT} = y' \text{ jeb}$$

$$\frac{x^2}{MT} = 2x,$$

jo $MP = y$ un $y = x^2$, bet $y' = 2x$. No tā izrēķinām MT, un dabūjam, ka

$$MT = \frac{x}{2}.$$

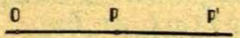
Redzam, ka tangentes projekcija uz abscisu ass ir vienlīdzīga abscisas pusei. Tā tad parabolas tangentes konstruēšanai

jādala abscisa uz pusēm un dabūtais punkts jāsavieno ar doto punktu.

Uzdevumi. Konstruēt sekojošām līknēm dotajos punktos tangenti. 1. $y = x^2$ — punktos, kā abscisa ir a) $x = 2$; b) $x = \frac{1}{2}$ un c) $x = 0$. 2. $y = x^3$ (kubiskā parabola) — punktos, kā abscisa ir a) $x = +1$; b) $x = -1$ un c) $x = 3$ (abscisa jādala trīs vienlīdzīgās daļās, jo tangentes projekcija uz abscisu ass ir vienlīdzīga $\frac{x}{3}$).

23. §. Atvasinājuma mēchaniskais iztulkojums.

Domāsim par punktu, kas atrodas nevienmērīgā kustībā pa taisni (15. zīm.). Sāksim novērot punkta kustību mirklī t, kad tas atrodas trajektōrijas punktā P.



15. zīm.

Kādā citā mirklī t' tas atrodas citā trajektōrijas punktā P'. Laika sprīdī t'—t punkts nogājis ceļa gabalu PP'. Laikam mainoties, mainās punkta noietais ceļš. Kustībā noietais ceļš tā tad ir laika funkcija, ko izsakām formulā $s = f(t)$.

Aprēķināsim kustības ātrumu. Tā kā laika sprīdī t'—t, ko apzīmēsim ar $\triangle t$, noietais ceļš ir PP', ko apzīmēsim ar $\triangle s$, tad vienā laika vienībā noietais ceļš, kas raksturo kustības vidējo ātrumu, ir $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Vidējais ātrums, vispārīgi runājot, atšķiras no īstā ātruma jeb momentānā ātruma, kāds ir kustīgam punktam dotā acumirklī t jeb ceļa punktā P. Bet tas aizvien mazāk atšķirsies no momentānā ātruma, ja domāsim aizvien mazākus un mazākus laika sprīžus. Beidzot robežgadījumā tas būs vienlīdzīgs momentānam ātrumam. Tāpēc, apzīmējot momentāno ātrumu ar v, varam rakstīt, ka

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

bet $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\triangle s}{\triangle t}$ ir ceļa atvasinājums pēc laika. Tā tad

t a i s n v i r z i e n a   k u s t ī b a s   ā t r u m s   i r   v i e n l ī d z ī g s   c e ļ a   a t v a s i n ā j u m a m   p ē c   l a i k a.

Piemērs. Ķermeņa brīva kritiena formula ir $s = \frac{gt^2}{2}$. Lai varētu atrast ātrumu, jāatrod atvasinājums:

$$s + \Delta s = \frac{g(t + \Delta t)^2}{2}$$

$$- \quad s = \frac{gt^2}{2}$$

$$\Delta s = gt\Delta t + \frac{g}{2}(\Delta t)^2$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{gt\Delta t + \frac{g}{2}(\Delta t)^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{gt\Delta t}{\Delta t} = gt \text{ un}$$

$$v = gt.$$

24. §. Funkcijas diferenciāls un tā ģeometriskais iztulkojums.

Apskatījuši funkcijas atvasinājumu, iepazīsimies ar funkcijas diferenciālu, kas stāv ciešā sakarībā ar atvasinājumu.

Bezgalīgi mazu argumenta pieaugumu $\triangle x$ sauc par argumenta diferenciālu, ko apzīmē ar dx.

Argumenta pieaugumu vispārīgi apzīmē ar $\triangle x$. Ja $\triangle x$ ir bezgalīgi mazs, tad $\triangle x$ top par dx. Argumenta diferenciāls dx kā argumenta pieaugums nav no x atkarīgs.

Par funkcijas diferenciālu sauc atvasinājuma un argumenta diferenciāla reizinājumu.

Funckijas y diferenciālu apzīmē ar dy. Tāpēc

$$dy = f'(x)\,dx.$$

No šīs formulas dabū, ka

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Redzam, ka izteiksme $\frac{dy}{dx}$ ir arī atvasinājuma simbols. Šo apzīmējumu sācis lietot Leibnics, un to lasa dy pēc dx. Ja funkcija nav apzīmēta ar y, bet ar f(x), tad raksta $\frac{df(x)}{dx}$, ko lasa df no x pēc dx jeb dfx pēc dx jeb vienkārši df pēc dx. Piemēram, $\frac{d \sin x}{dx}$ lasa: d sin x pēc dx.

No vārda diferenciāls, kam tāda pat sakne kā vārdam diference, atvasināts diferenciālrēķinu nosaukums. Diferenciāla atrašana ir līdzvērtīga atvasinājuma atrašanai, jo atvasinājumu reizinot ar dx, dabū dy. Tāpēc funkcijas atvasinājuma atrašanu sauc arī par funkcijas diferencēšanu un funkcijas, kuŗām ir atvasinājums — par diferencējamām funkcijām.

No $\triangle$PRM 14. zīmējumā dabūjam, ka

$$RM = PR \operatorname{tg} \alpha.$$

Ja $P' \rightarrow P$, tad arī $R \rightarrow P$ un $PR \rightarrow 0$. Bet PR ir $\triangle x$ un $\operatorname{tg} \alpha$ ir y'. Tāpēc $\triangle x$ ir dx un

$$RM = y'\,dx \quad \text{jeb}$$
$$RM = dy.$$

Funkcijas diferenciāls attēlojas kā tangentes ordinātas pieaugums.

Funkcijas pieaugums (20. §) attēlojas kā līknes ordinātas pieaugums. Tāpēc jāievēro, ka bezgalgli mazs funkcijas pieaugums nav vienlīdzīgs funkcijas diferenciālam.

25. §. Algebriskas summas atvasinājums un diferenciāls.

Pieņemsim, ka u, v, z,... w ir diferencējamas argumenta x funkcijas galīgā skaitā un ka

$$y = u \pm v \pm z \pm \ldots \pm w.$$

Atradīsim y atvasinājumu un diferenciālu ar pazīstamo paņēmienu:

1. $y + \Delta y = (u + \Delta u) \pm (v + \Delta v) \pm (z + \Delta z) \pm \ldots$
$\ldots \pm (w + \Delta w)$,

2. $\Delta y = \Delta u \pm \Delta v \pm \Delta z \pm \ldots \pm \Delta w$,

3. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x} \pm \frac{\Delta z}{\Delta x} \pm \ldots \pm \frac{\Delta w}{\Delta x}$,

pārejot uz robežu, ja $\Delta x \to 0$, dabūjam

4. $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dz}{dx} \pm \ldots \pm \frac{dw}{dx}$. Tā tad

$$\boxed{\frac{d}{dx}(u \pm v \pm z \pm \ldots \pm w) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dz}{dx} \pm \ldots \pm \frac{dw}{dx} \ldots (1).}$$

Reizinot (1) formulu ar dx, dabūjam summas diferenciālu:

$$d(u \pm v \pm z \pm \ldots \pm w) = du \pm dv \pm dz \pm \ldots \pm dw \ldots (1')$$

Paturēdami prātā, ka runājam par galīga skaita funkciju algebrisko summu, dabūjam vienkāršu summas diferencēšanas teōrēmu.

17. teōr. summas atvasinājums (diferenciāls) ir vienlīdzīgs saskaitāmo atvasinājumu (diferenciālu) summai.

No šīs teōrēmas dabūjam secinājumu:

17. teōr.,$_1$. funkciju atvasinājumi (diferenciāli), kuŗas atšķiŗas ar patstāvīgu lielumu, ir vienlīdzīgi.

Tiešām, ja

$$y_1=u+c_1 \text{ un } y_2=u+c_2, \text{ tad } y_1'=u'+c_1' \text{ un } y_2'=u'+c_2'$$

(17. teōr.), bet $c'_1=0$ un $c'_2=0$ (15. teōr.). Tā tad

$$y_1'=y_2', \text{ k. b. j.}$$

26. §. Reizinājuma atvasinājums un diferenciāls.

Pieņemsim, ka u un v ir diferencējamas x funkcijas un ka

$$y=uv.$$

Atradīsim y atvasinājumu un diferenciālu:

1. $y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)=uv+v\Delta u+u\Delta v+\Delta u\,.\,\Delta v,$

2. $\Delta y=v\Delta u+u\Delta u+\Delta u\,.\,\Delta u,$

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{v\Delta u+u\Delta v+\Delta u\,.\,\Delta v}{\Delta x},$

4. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{v\Delta u+u\Delta v+\Delta u\,.\,\Delta v}{\Delta x}=$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0} v\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0} u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\,.\,\Delta v=v\dfrac{du}{dx}+u\dfrac{dv}{dx}.$ Tā tad

$$\boxed{\frac{d(uv)}{dx}=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}\;.\;.\;.\;(2).}$$

Reizinot (2) formulu ar dx, dabūjam reizinājuma diferenciālu:

$$d(uv)=vdu+udv\;...(2').$$

No šejienes divi funkciju reizinājuma diferencēšanas teōrēma:

18. teōr. divu funkciju reizinājuma atvasinājums (diferenciāls) ir vienlīdzīgs vienas funkcijas atvasinājuma (diferenciāla) un otras funkcijas reizinājumu summai.

Ņemsim triju funkciju reizinājumu $y=u_1 . u_2 . u_3$ un atradīsim tā atvasinājumu. Šai nolūkā uzskatīsim y kā divi reizinātāju reizinājumu, kuŗu jau protam diferencēt. Tad varam rakstīt:

$$\frac{d(u_1 . u_2 . u_3)}{dx}=\frac{d[u_1 . (u_2 . u_3)]}{dx}=u_2 u_3 \frac{du_1}{dx}+u_1 \frac{d(u_2 . u_3)}{dx}=$$

$$=u_2 u_3 \frac{du_1}{dx}+u_1\left[u_3 \frac{du_2}{dx}+u_2 \frac{du_3}{dx}\right]=u_2 u_3 \frac{du_1}{dx}+u_1 u_3 \frac{du_2}{dx}+$$

$$+u_1 u_2 \frac{du_3}{dx}.$$

Lai pierādītu šo reizinājuma diferencēšanas likumu vispārīgi, izlietosim matēmatisko indukciju.

Pieņemsim, ka šis likums ir spēkā arī n reizinātāju reizinājuma diferencēšanā un pierādīsim, ka tādā gadījumā tas ir spēkā arī $(n+1)$. gadījumā:

$$\frac{d(u_1 u_2 u_3 \ldots u_n)}{dx}=u_2 u_3 \ldots u_n \frac{du_1}{dx}+u_1 u_3 \ldots u_n \frac{du_2}{dx}+$$

$$+\ldots+u_1 u_2 \ldots u_{n-1} \frac{du_n}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2_1)$$

$$\frac{d(u_1 u_2 u_3 \ldots u_n u_{n+1})}{dx}=\frac{d[(u_1 u_2 u_3 \ldots u_n) u_{n+1}]}{dx}=$$

$$=u_{n+1} \frac{d(u_1 u_2 u_3 \ldots u_n)}{dx}+u_1 u_2 u_3 \ldots u_n \frac{du_{n+1}}{dx}.$$

Ieliekot $\frac{d(u_1 u_2 u_3 \ldots u_n)}{dx}$ vietā (2_1) vienlīdzības labās puses izteiksmi, izdarot attiecīgo reizināšanu un ņemot vērā arī pēdējo locekli $u_1\ u_2\ u_3 \ldots u_n \frac{du_{n+1}}{dx}$, dabūjam, ka likums ir spēkā arī $(n+1)$. gadījumā.

Esam pierādījuši, ka ja likums ir pareizs n-tā gadījumā, tad tas ir pareizs arī $(n+1)$. gadījumā. Bet ka likums ir pareizs divi un trīs reizinātāju gadījumā, to tieši pierādījām. Tāpēc nu varam secināt, ka tas ir pareizs arī četru reizinātāju gadījumā u. t. t. u. t. t. Tā tad likums ir vispārīgi pierādīts un (2_1) formula ir vispārīgi pareiza.

No (2_2) dabūjam, ka

$$d(u_1 u_2 u_3 \ldots u_n) = (u_2 u_3 \ldots u_n)\,du_1 + (u_1 u_3 \ldots u_n)\,du_2 + \\ + \ldots + (u_1 u_2 \ldots u_{n-1})\,du_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2'_1)$$

Nu varam secināt:

19. teōr. funkciju reizinājuma atvasinājums (diferenciāls) ir vienlīdzīgs vienas funkcijas atvasinājuma (diferenciāla) un pārējo funkciju reizinājumu summai.

Tālāk varam secināt:

19. teōr.,$_1$. Pastāvīgo reizinātāju var iznest no atvasinājuma (diferenciāla) zīmes. Tiešām,

$$\frac{d}{dx}(cu) = u\frac{dc}{dx} + c\frac{du}{dx} = c\frac{du}{dx} \quad \ldots\ldots (2_2).$$

No (2_2) formulas dabūjam arī, ka

$$d(cu) = c \,.\, du \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2'_2).$$

Ja visi reizinātāji vienlīdzīgi x, tad $u_1 . u_2 . u_3 . u_n = x^n$ un (2_1) formula ir:

$$\frac{dx^n}{dx} = x^{n-1}\frac{dx}{dx} + x^{n-1}\frac{dx}{dx} + \ldots + x^{n-1}\frac{dx}{dx} = nx^{n-1} \ldots (2_3).$$

Reizinot (2_3) formula ar dx, dabūjam veselas pozitīvas pakāpes diferenciāla formulu:

$$dx^n = nx^{n-1} . dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2_3')$$

(2_3) formulu izteiksim vārdos:

19. teōr.,$_2$ argumenta veselas pozitīvas pakāpes atvasinājums ir vienlīdzīgs kāpinātāja reizinājumam ar pakāpi, kuŗas kāpinātājs par vienu mazāks nekā dotajai pakāpei.

Uzdevumi. Diferencēt:

1. $y = c$; atb. $y' = 0$.
2. $y = c + x$; atb. $y' = 1$.
3. $y = x^5$; „ $y' = 5x^4$.
4. $y = x^{5n}$; atb. $y' = 5nx^{5n-1}$.
5. $y = x^3 - x^2 + 2x$; atb. $y' = 3x^2 - 2x + 2$.
6. $y = 2x^3 - 5x^4 + 5x - 8$; „ $y' = 6x^2 - 20x^3 + 5$.
7. $y = \frac{5x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + 5x$; „ $y' = 5x^2 + x^4 + 5$.

8. $y=\frac{2x^5}{15}-\frac{4x^3}{9}$; atb. $y'=\frac{2x^4}{3}-\frac{4x^2}{3}$.

9. $y=ax^4-bx^2$; „ $y'=4ax^3-2bx$.

10. $y=3cx^2-8dx+5e$; „ $y'=6cx-8d$.

11. $y=x^{a+b}$; „ $y'=(a+b)x^{a+b-1}$.

12. $y=x^n+nx+n$; „ $y'=nx^{n-1}+n$.

13. $y=5x^m-3x+6$; „ $y'=5mx^{m-1}-3$.

14. $y=x^3(4x+5)$; „ $y'=x^2(16x+15)$.

15. $y=4x(x^7+5)$; „ $y'=32x^7+20$.

16. $y=(1+4x^3)(1+2x^2)$; „ $y'=4x(10x^3+3x+1)$.

17. $y=x(2x-3)(4x+5)$; „ $y'=24x^2-4x-15$.

27. §. Dalījuma atvasinājums un diferenciāls.

Pieņemsim, ka u un v ir diferencējamas x funkcijas. Atradīsim dalījuma

$$y=\frac{u}{v}$$

diferencēšanas likumu:

1. $y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}$,

2. $\Delta y=\frac{u+\Delta v}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{uv+v\Delta u-uv-u\Delta v}{v^2+v\Delta v}=$

$$=\frac{v\Delta u-u\Delta v}{v^2+vuv}=\frac{v\Delta u-u\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

3. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}$

4. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$ (9. teōr.). Tā tad

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}\quad .\ .\ .\ .\ .\ (3)}$$

Reizinot (3) formulu ar dx, dabūjam dalījuma diferenciālu:

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (3')$$

No (3) un (3') formulām dabūjam dalījuma diferencēšanas teōrēmu:

20. teōr. dalījuma atvasinājums (diferenciāls) ir vienlīdzīgs dalītāja reizinājumam ar dalāmā atvasinājumu (diferenciālu), pamazinātam par dalāmā reizinājumu ar dalītāja atvasinājumu (diferenciālu) un dalītam ar dalītāja kvadrātu.

Pieņemsim, ka

$$u=1 \text{ un } v=x^n,$$

tad dabūsim no (3) formulas, ka

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right)=\frac{x^n\frac{d1}{dx}-1\frac{dx^n}{dx}}{(x^n)^2}=\frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}}=-nx^{n-1-2n}=-nx^{-n-1}.$$

Tā tad

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right)=-nx^{-n-1} \text{ jeb } \frac{dx^{-n}}{dx}=-nx^{-n-1} \quad \ldots\ldots (3_1).$$

Salīdzinot (3_1) formulu ar (2_3) formulu, redzam, ka tās abas ir uzrakstītas pēc viena un tā paša likuma. Tāpēc varam teikt, ka formula $\frac{dx^n}{dx}=nx^{n-1}$ ir pareiza pie vesela pozitīva un negatīva n.

Pieņemot $n=-1$, dabūjam $\frac{dx^{-1}}{dx}=-1.x^{-2}$ jeb

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2} \quad \ldots\ldots\ldots (3_2).}$$

Uzdevumi. Diferencēt:

1. $y=\frac{a}{x}$; atb. $y'=-\frac{a}{x^2}$.
2. $y=\frac{4}{5x^5}$; atb. $y'=-\frac{4}{x^6}$.
3. $y=\frac{1}{x^n}$; „ $y'=-\frac{n}{x^{n+1}}$.
4. $y=2x^{-2}+3x^{-3}$; atb. $y'=-4x^{-3}-9x^{-4}$.
5. $y=\frac{1}{x^2+1}$; „ $y'=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$.
6. $y=\frac{3x-4}{2x+3}$; atb. $y'=\frac{17}{(2x+3)^2}$.
7. $y=\frac{2x^4}{b^2-x^2}$; „ $y'=\frac{8b^2x^5-4x^5}{(b^2-x^2)^2}$.
8. $y=\frac{a-x}{a+x}$; „ $y'=\frac{-2a}{(a+x)^2}$.

9. $s=\frac{t^3}{(1+t)^2}$; atb. $s'=\frac{3t^2+t^3}{(1+t)^3}$.

10. $f(s)=\frac{(s+4)^2}{s+3}$; atb. $f'(s)=\frac{(s+4)(s+2)}{(s+3)^2}$.

28. §. Funkciju funkcijas diferencēšana.

Līdz šim funkcijas argumentu uzskatījām kā neatkarīgu lielumu. Var būt arī tā, ka funkcijas arguments nav neatkarīgs lielums, bet ir savukārt kāda cita neatkarīga lieluma funkcija. Ja funkcijas arguments ir kāda cita neatkarīga lieluma funkcija, tad arī argumenta funkcija ir neatkarīgā lieluma funkcija, ko sauc par funkcijas funkciju jeb saliktu funkciju. Piemēram, riņķa laukums ir radija funkcija. Ja riņķis ir metalla un to karsēsim, tad tā radijs palielināsies. Radijs ir temperatūras funkcija. Līdz ar radija palielināšanos, palielinās arī riņķa laukums. Šai gadījumā riņķa laukums ir arī temperatūras funkcija.

Vispārīgi, ja

$$y=f(u) \text{ un } u=\varphi(x),$$

tad y ir argumenta x funkcijas funkcija, ko simboliski varam uzrakstīt:

$$y=f[\varphi(x)].$$

Izteikto domu var turpināt vēl tālāk un dabūt funkciju funkciju. Piemēram, ja

$$y=F(u);\; u=f(v);\; v=\varphi(x),$$
$$\text{tad } y=F\{f[\varphi(x)]\}.$$

Pieņemsim, ka

$$y=f(u) \text{ un } u=\varphi(x),$$

kur y un u ir diferencējamas funkcijas un noskaidrosim, kā atrast

$$\frac{dy}{dx}.$$

Šai nolūkā jāatrod $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Dosim x pieaugumu $\triangle x$, tad līdz ar to arī u un y dabūs pieaugumu $\triangle u$ un $\triangle y$. Pēc pieņēmuma y un u ir diferencējamas funkcijas. Tāpēc, ja

$$\Delta x\to 0, \text{ arī } \Delta u\to 0 \text{ un } \Delta y\to 0;\; \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=\frac{dy}{du},$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{du}{dx} \text{ un } \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}.$$

Uzrakstot identitāti:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

un pārejot uz robežu, dabūjam, ka

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\quad \text{jeb}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\ \ldots\ (4).}$$

No šejienes teōrēma:

21. teōr. ja y ir u funkcija un u ir x funkcija, tad y atvasinājums pēc argumenta x ir vienlīdzīgs y atvasinājumam pēc argumenta u, reizinātam ar u atvasinājumu pēc argumenta x.

Arī funkciju funkcijai viegli atrast atvasinājumu. Pieņemsim, ka

$$y=F(u),\ u=f(v),\ v=\varphi(w)\ \text{un}\ w=\psi(x)$$

un atradīsim $\frac{dy}{dx}$. Šai nolūkā iziesim no identitātes:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta v}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta w}\cdot\frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

Ņemsim šīs identitātes robežu, ja $\triangle x\to 0$. Protams, ka šādā gadījumā arī $\triangle u$, $\triangle v$ un $\triangle w$ arī tiecas uz nulli. Tāpēc dabūjam, ka

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\lim_{\Delta v\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta v}\lim_{\Delta w\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta w}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta x}\quad \text{jeb}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dw}\cdot\frac{dw}{dx}\ \ldots\ (4').}$$

Tā tad arī funkciju funkcijai pēc tā paša likuma atrodams atvasinājums kā funkcijas funkcijai.

Piemēri.

1. $y=(x^3-1)^4$. Pieņemsim, ka $x^3-1=u$, tad $y=u^4$ un $\frac{dy}{dx}=\frac{du^4}{du}\cdot\frac{du}{dx}=4u^3.3x^2=12x^2(x^3-1)^3$.

Piezīme. Piemēros jāvingrinās, kamēr var diferencēt bez u un citu starpfunkciju apzīmējumiem. Nākošos piemērus diferencēsim bez palīga apzīmējumiem.

2. $y=(x^2+3)^{100}; \frac{dy}{dx}=100\ (x^2+3)^{99}\cdot 2x=200x\ (x^2+3)^{99}$.

3. $y=(a+bx)^n$; $y'=n\ (a+bx)^{n-1}\cdot b=bn\ (a+bx)^{n-1}$.

Uzdevumi. Diferencēt:

1. $y=(a^2-x^2)^4$; atb. $y'=-8x(a^2-x^2)^3$.
2. $y=\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}$; „ $y'=\frac{4ax}{(a^2-x^2)^2}$.
3. $y=(x+2)^3(x-2)^2$; „ $y'=(x+2)^2(x-2)(5x-2)$.
4. $y=\frac{1+x}{1-x}$; „ $y'=\frac{2}{(1-x)^2}$.
5. $y=\frac{x^2-2x+4}{x^2-1}$; „ $y'=\frac{2x^2-10x+2}{(x^2-1)^2}$.
6. $y=\frac{(a^2+x^2)^3}{(a^3+x^3)^2}$; „ $y'=\frac{6a^2x(a^2+x^2)^2(a-x)}{(a^3+x^3)^3}$.
7. $y=x^5(a+3x)^3(a-2x)^2$; $y'=5x^4(a+3x)^2(a-2x)(a^2+2ax-12x^2)$.

29. §. Apvērstās funkcijas atvasinājums.

Ņemsim funkciju

$$y=f(x),$$

kā apvērstā funkcija ir

$$x=\varphi(y)$$

un atradīsim šo funkciju atvasinājumu sakarību. Šai nolūkā iziesim no identitātes

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$$

un pāriesim uz tās robežu, atcerēdamies, ka

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx} \text{ un } \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{dx}{dy}.$$

Tad dabūjam, ka

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} \quad \text{jeb}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}} \quad \ldots\ldots (5).}$$

(5.) formulu izteikdami vārdos, dabujam teōrēmu:

22. teōr. tiešās un apvērstās funkcijas atvasinājumi ir apgriezti lielumi.

30. §. Logaritmiskās funkcijas diferencēšana.

Ņemsim funkciju

$$y = \lg_a x$$

un atradīsim tās atvasinājumu un diferenciālu ar vispārīgo paņēmienu:

1. $y + \Delta y = \lg_a (x + \Delta x)$,

2. $\Delta y = \lg_a (x + \Delta x) - \lg_a x = \lg_a \frac{x + \Delta x}{x} = \lg_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$,

3. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \lg_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \lg_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} =$

$$= \frac{1}{x} \lg_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}},$$

4. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \lg_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \lg_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} =$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \lg_a \lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \cdot \lg_a e.$$

Piezīme. Ja $\frac{x}{\Delta x} = n$, tad $\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{n}$ un ja $\Delta x \to 0$, tad arī

$\frac{1}{n} \to 0$ un $n \to \infty$, tāpēc $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = e$.

Tā tad

$$\boxed{\frac{d}{dx} (\lg_a x) = \frac{1}{x} \lg_a e \quad . \; . \; (6)}$$

$\lg_a e = \frac{1}{\ln a}$, tāpēc no (6) formulas dabujam

$$\boxed{\frac{d}{dx} \left(\lg_a x\right) = \frac{1}{x \ln a} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7).}$$

Izteikdami (6.) un (7.) formulu vārdos, dabujam teōrēmu:

23. teōr. logaritmiskās funkcijas atvasinājums ir vienlīdzīgs naturāllogaritmu bazes e logaritmam pie dotās sistēmas bazes a, izdalītam ar argumentu x jeb
logaritmiskās funkcijas atvasinājums ir argumenta un bazes naturāllogaritma reizinājuma apgriezts lielums.

Reizinot (6.) un (7.) formulu ar dx, dabūjam logaritmiskās funkcijas diferenciālu:

$$d\lg_a x = \frac{\lg_a e \,.\, dx}{x} \; \ldots\ldots\ldots \; (6') \text{ jeb}$$

$$d\lg_a x = \frac{dx}{x \ln a} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (7')$$

Atsevišķā gadījumā, ja $a = e$, tad no (6) un (6′) formulas dabujam:

$$\boxed{\frac{d\ln x}{dx} = \frac{1}{x} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (6_1)} \text{ un}$$

$$d\ln x = \frac{dx}{x} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (6'_1)$$

31. §. Eksponentfunkcijas diferencēšana.

Atradīsim funkcijas

$$y = a^x$$

atvasinājumu un diferenciālu. Šai nolūkā ņemsim šai funkcijai naturāllogaritmu:

$$\ln y = x \ln a.$$

Šo izteiksmi diferencēsim pēc **x**:

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \ln a \text{ jeb } \frac{dy}{dx} = y \ln a. \quad \text{Tā tad}$$

$$\boxed{\frac{da^x}{dx} = a^x \ln a \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (8).}$$

Izteikdami (8.) formulu vārdos, dabūjam teōrēmu:

24. teōr. eksponentfunkcijas atvasinājums ir vienlīdzīgs funkcijas reizinājumam ar bazes naturāllogaritmu.

Reizinot (8) formulu ar dx, dabūjam eksponentfunkcijas diferenciāla formulu:

$$da^x = a^x \ln a . dx \quad . . . . (8').$$

Atsevišķā gadījumā, ja $a = e$, tad $y = e^x$ un

$$\boxed{\frac{de^x}{dx} = e^x \quad . . . . (8_1),}$$

kas dod teorēmas secinājumu:

24. teōr.,$_1$. funkcijas e^x atvasinājums pēc **x** ir vienlīdzīgs pašai funkcijai e^x.

Uzdevumi. Diferencēt:

1. $y = \ln(x + a)$; atb. $y' = \frac{1}{x+a}$.
2. $y = \ln(ax + b)$; „ $y' = \frac{a}{ax+b}$.
3. $y = \ln\frac{1+x}{1-x}$; „ $y' = \frac{2}{1-x^2}$.
4. $y = \ln\frac{1+x^2}{1-x^2}$; „ $y' = \frac{4x}{1-x^4}$.
5. $y = \ln(x^2 + x)$; „ $y' = \frac{2x+1}{x^2+x}$.
6. $y = \ln(x^3 - 2x + 5)$; „ $y' = \frac{3x^2-2}{x^3-2x+5}$.
7. $y = \lg_a(2x + x^3)$; „ $y' = \frac{2+3x^2}{(2x+x^3)\ln a}$.
8. $y = x\ln x$; „ $y' = \ln x + 1$.
9. $y = \ln(x^3)$; „ $y' = \frac{3}{x}$.
10. $y = \ln^3 x$; „ $y' = \frac{3\ln^2 x}{x}$.
11. $y = \ln\frac{a+x}{a-x}$; „ $y' = \frac{2a}{a^2-x^2}$.
12. $y = 3\ln(x-5) - 2\ln(x+1)$; „ $y' = \frac{x+13}{x^2-4x-5}$.
13. $y = e^{ax+b}$; „ $y' = a\,e^{ax+b}$.
14. $y = (e^x)^5$; „ $y' = 5e^{5x}$.
15. $y = \frac{x^p}{e^x}$; „ $y' = \frac{x^{p-1}}{e^x}(p-x)$

16. $y=\frac{1}{e^x}(x^3+3x^2+6x+6)$; „ $y'=-\frac{x^3}{e^x}$.

17. $y=a(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$, „ $y'=e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}$.

18. $y=2x+\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}$; „ $y'=(e^x+e^{-x})^2$;

19. $y=\frac{e^x+1}{e^x-1}$; „ $y'=-\frac{2e^x}{(e^x-1)^2}$.

20. $y=a^{mx}$; „ $y'=ma^{mx}\ln a$.

21. $y=\frac{a^x}{x^a}$; „ $y'=\frac{a^x}{x^{a+1}}(x\ln a-a)$.

22. $y=a^{e^x}$; „ $y'=a^{e^x}.\ln a.e^x$.

23. $y=b^{x^2}$; „ $y'=2xb^{x^2}\ln b$.

24. $y=7^{x^2+2x}$; „ $y'=2\ln 7.(x+1)7^{x^2+2x}$.

25. $y=a^{a^2-x^2}$; „ $y'=-2xa^{a^2-x^2}.\ln a$.

26. $y=a^t$; „ $y'=a^t\ln a$.

27. $r=a^{\ln t}$; „ $r'=\frac{a^{\ln t}.\ln a}{t}$.

28. $s=e^{b^2+t^2}$; „ $s'=2te^{b^2+t^2}$.

29. $p=e^{q\ln q}$; „ $p'=e^{q\ln q}(1+\ln q)$.

30. $y=e^x(1-x^2)$; „ $y'=e^x(1-2x-x^2)$.

31. $y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$; „ $y'=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$.

32. $y=x^2e^{ax}$; „ $y'=x(2+ax)e^{ax}$.

33. $y=x^n a^x$; „ $y'=a^x x^{n-1}(n+x\ln a)$.

34. $f(s)=\frac{\ln s}{e^s}$; „ $f'(s)=\frac{1-s\ln s}{se^s}$.

35. $f(x)=\ln(\ln x)$; „ $f'(x)=\frac{1}{x\ln x}$.

36. $f(x)=\ln^4(\ln x)$; „ $f'(x)=\frac{4\ln^3(\ln x)}{x\ln x}$.

37. $f(x)=\ln(\ln^4 x)$; „ $f'(x)=\frac{4}{x\ln x}$.

38. $y=\ln^3(2x)$; „ $y'=\frac{3}{x}\ln^2(2x)$.

39. $y=x^3\ln x$; „ $y'=x^2(1+3\ln x)$.

40. $y=\frac{1}{2ai}\ln\frac{x-ai}{x+ai}$; „ $y'=\frac{1}{a^2+x^2}$.

32. §. Funkcijas u^v diferencēšana.

Pieņemsim, ka dota funkcija

$$y = u^v,$$

kur u un v ir argumenta x funkcijas. Noskaidrosim, kā diferencēt šādu funkciju. Šai nolūkā ņemsim vienlīdzībai $y = u^v$ naturāllogaritmus un dabūto vienlīdzību diferencēsim pēc argumenta x:

$$\ln y = v \ln u,$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = v \cdot \frac{1}{u} \frac{du}{dx} + \ln u \frac{dv}{dx} \quad \text{jeb}$$

$$\frac{dy}{dx} = vy \frac{1}{u} \frac{du}{dx} + y \ln u \frac{dv}{dx} \quad \text{jeb}$$

$$\boxed{\frac{du^v}{dx} = vu^{v-1} \frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx} \quad \ldots : (9).}$$

Izsakot (9) formulu vārdos, dabūjam teorēmu:

25. teōr. ja u un v ir argumenta x funkcijas, tad u^v atvasinājums pēc x ir vienlīdzīgs divu saskaitāmo summai, kur viens saskaitāmais ir u^v atvasinājums pie kāpinātāja v kā pastāvīga lieluma un otrs saskaitāmais ir u^v atvasinājums pie bazes u kā pastāvīga lieluma.

Šī formula ietveŗ sevī kā speciālus gadījumus formulu (3_1) un (8).

Pieņemot, ka $u = x$ un $v = n$, kur n ir pastāvīgs skaitlis, dabūjam, ka

$$y = x^n.$$

Šādā gadījumā (9) formula pārveidojas šā:

$$\boxed{\frac{dx^n}{dx} = n x^{n-1} \quad \ldots (9_1).}$$

Tā kā n var būt kaut kuŗš pastāvīgs skaitlis, tad (9_1) formula ir vispārīga argumenta pakāpes atvasinājuma formula.

Pēc (9_1) formulas var diferencēt arī saknes, iepriekš tās pārveidojot par pakāpēm. Piemēram, ja

$$y = \sqrt[4]{x^5}, \text{ tad } y = x^{\frac{5}{4}} \text{ un } y' = \tfrac{5}{4} x^{\frac{5}{4}-1} = \tfrac{5}{4}\sqrt[4]{x}. \text{ Tāpat, ja}$$

$$y = x^2 \sqrt{x \sqrt{x^3}}, \text{ tad } y = x^{2+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}} = y^{\frac{13}{4}} \quad \text{un } y' = \tfrac{13}{4} x^{\frac{9}{4}} = \frac{13x^2\sqrt[4]{x}}{4}.$$

Piemēri.

1. $y=x^x$; $\dfrac{dy}{dx}=xx^{x-1}+x^x \ln x=x^x(1+\ln x)$.

2. $y=x^{\frac{1}{x}}$; $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}x^{\frac{1}{x}-1}+x^{\frac{1}{x}}\ln x.(-\dfrac{1}{x^2})=\dfrac{x^{\frac{1}{x}}(1-\ln x)}{x^2}$.

3. $y=x^{\ln x}$; $y'=\ln x . x^{\ln x-1}+x^{\ln x}.\ln x.\dfrac{1}{x}=\ln x . x^{\ln x-1}+$
$+\ln x . x^{\ln x-1}=2\ln x . x^{\ln x-1}=\ln x^2 . x^{\ln x-1}$.

Uzdevumi. Diferencēt:

1. $y=\sqrt{a-x}$; atb. $y'=-\dfrac{1}{2\sqrt{a-x}}$. 2. $y=\sqrt{a+bx}$; atb. $y'=\dfrac{b}{2\sqrt{a+bx}}$.

3. $y=\sqrt{2ax-x^2}$; „ $y'=\dfrac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}}$. 4. $y=x\sqrt{a+x}$; „ $y'=\dfrac{2a+3x}{2\sqrt{a+x}}$.

5. $y=\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$; „ $y'=\dfrac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$ 6. $y=\dfrac{a}{x}\sqrt{a^2-x^2}$; „ $y'=-\dfrac{a^3}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}$.

7. $y=\dfrac{a+\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}}$; „ $y'=\dfrac{a}{\sqrt{x}(a-\sqrt{x})^2}$.

8. $y=\sqrt{\dfrac{a+bx}{a-bx}}$; „ $y'=\dfrac{ab}{(a-bx)\sqrt{a^2-b^2x^2}}$.

9. $y=\sqrt{a+x}.\sqrt[3]{a^2-x^2}$; atb. $y'=\dfrac{(a+x)(3a-7x)}{6\sqrt{a+x}\sqrt[3]{(a^2-x^2)^2}}$.

10. $y=ax+\sqrt[3]{(a-x)^2}$; atb. $y'=a-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{a-x}}$.

11. $y=\sqrt{3x}+\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{x}$; „ $y'=\dfrac{3}{2\sqrt{3x}}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\dfrac{1}{x^2}$.

12. $y=\dfrac{(x-1)^3}{x^{\frac{1}{3}}}$; „ $y'=\frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}-5x^{\frac{2}{3}}+2x^{-\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$.

13. $y=\dfrac{x^{\frac{5}{2}}-x-x^{\frac{1}{2}}+a}{x^{\frac{3}{2}}}$; „ $y'=\dfrac{2x^{\frac{5}{2}}+x+2x^{\frac{1}{2}}-3a}{2x^{\frac{5}{2}}}$.

14. $y=x(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}$; „ $y'=\dfrac{a^4+a^2x^2-4x^4}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

15. $y=\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$; „ $y'=-\dfrac{a^2+a\sqrt{a^2-x^2}}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}$.

16. $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$; „ $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

17. $y = \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}$; " $y' = -\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}$.

18. $y = x^{\frac{1}{\ln x}}$; " $y' = 0$.

19. $y = e^{x^x}$; " $y' = e^{x^x} . (1+\ln x) x^x$.

20. $y = \frac{a^x}{x^x}$; " $y' = \left(\frac{a}{x}\right)^x \left(\ln\frac{a}{x} - 1\right)$.

21. $y = \frac{c a^x}{x^x} + b$. " $y' = c \left(\frac{a}{x}\right)^x \left(\ln\frac{a}{x} - 1\right)$.

22. $y = \left(\frac{x}{n}\right)^{nx}$; " $y' = n\left(\frac{x}{n}\right)^{nx}\left(1+\ln\frac{x}{n}\right)$.

23. $y = v^{e^v}$; " $y' = v^{e^v} . e^v \frac{1+v\ln v}{v}$.

24. $z = \left(\frac{a}{t}\right)^t$; " $z' = \left(\frac{a}{t}\right)^t \left(\ln\frac{a}{t} - 1\right)$.

25. $y = x^{x^n}$; " $y' = x^{x^n+n-1}(n\ln x+1)$.

26. $y = x^{x^x}$; " $y' = x^{x^x} . x^x (x^{-1} + \ln x + \ln^2 x)$.

33. §. Trigōnometrisko funkciju diferencēšana.

Ņemsim funkciju

$$y = \sin x$$

un diferencēsim to pēc vispārīgā paņēmiena:

1. $y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$.

2. $\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\cos\frac{2x+\Delta x}{2}\sin\frac{x+\Delta x - x}{2} =$

$$= 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

3. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$.

4. $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) . \lim_{\frac{\Delta x}{2} \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x$.

Tā tad

$$\boxed{\frac{d \sin x}{dx} = \cos x \quad \ldots\ldots\ldots\ (10)}$$

no šejienes teōrēma:

26. teōr. sinus atvasinājums ir vienlīdzīgs kosinum.

No (10) formulas secina:

$$d \sin x = \cos x\, dx \quad \ldots\ldots\ldots\ (10')$$

Ja

$$y = \cos x,$$

tad to pārveidojam šā: $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Tāpēc $\frac{d \cos x}{dx} = \frac{d \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{dx} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) . (-1) = -\sin x$

Tā tad

$$\boxed{\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x \quad \ldots\ldots\ (11)}$$

no šejienes teōrēma:

27. teōr. kosinus atvasinājums ir vienlīdzīgs minus sinum.

No (11) formulas secinām:

$$d \cos x = -\sin x\, dx \ldots\ (11').$$

Ja

$$y = \operatorname{tg} x,$$

tad

$$\frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x (\sin x)' - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x . \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Tā tad

$$\boxed{\frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \ldots\ldots\ldots\ (12)}$$

no šejienes teōrēma:

28. teōr. tangenta atvasinājums ir vienlīdzīgs vienam, dalītam ar kosinus kvadrātu.

No (12) formulas secinām:

$$dtg\,x = \frac{dx}{\cos^2 x} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (12')$$

Ja

$$y = c\,tg\,x,$$

tad

$$\frac{d\,ctg\,x}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{tg\,x}\right) = \frac{tg\,x\,.\,0 - \frac{1}{\cos^2 x}}{tg^2 x} = -\frac{1}{tg^2 x . \cos^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Tā tad

$$\boxed{\frac{d\,ctg\,x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (13)}$$

no šejienes teōrēma:

29. teōr. kotangenta atvasinājums ir vienlīdzīgs vienam, dalītam ar minus sinus kvadrātu.

No (13) formulas secinām:

$$dctgx = -\frac{dx}{\sin^2 x} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (13^1)$$

Uzdevumi. Diferencēt:

1. $y = \sin(\alpha x + \beta)$; atb. $y' = \alpha \cos(\alpha x + \beta)$.
2. $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x$; „ $y' = \cos^2 x$.
3. $y = e^{\cos x}$; „ $y' = -\sin x\, e^{\cos x}$.
4. $y = a^{\sin x}$; „ $y' = \cos x . a^{\sin x} \ln a$.
5. $y = tg(\alpha x + \beta)$; „ $y' = \frac{\alpha}{\cos^2(\alpha x + \beta)}$.
6. $y = \frac{a \sin x}{1 + \cos x}$; „ $y' = \frac{a}{1 + \cos x}$.
7. $y = \sin x \cdot \sin(x - \alpha)$; „ $y' = \sin(2x - \alpha)$.
8. $y = \ln \sin(px + q)$; „ $y' = p\,ctg(px + q)$.
9. $y = \ln tg\,x$; „ $y' = \frac{2}{\sin 2x}$.
10. $y = \frac{1}{4} tg^4 x - \frac{1}{2} tg^2 x - \ln \cos x$; atb. $y' = tg^5 x$.
11. $y = \ln \sin x + \frac{1}{2}\cos^2 x$; „ $y' = \frac{\cos^3 x}{\sin x}$.
12. $y = \ln \sin x + \frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{1}{4}\cos^4 x$; „ $y' = \frac{\cos^5 x}{\sin x}$.
13. $y = \ln \sin^2 x$ atb. $y' = 2\,ctg\,x$.

14. $y=\ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$; „ $y'=\frac{1}{\cos x}$.

15. $y=\sin(x+a)\cos(x-a)$; „ $y'=\cos 2x$.

16. $y=\sin(\ln x)$; „ $y'=\frac{\cos(\ln x)}{x}$.

17. $y=\cos\frac{a}{x}$; „ $y'=\frac{a\sin\frac{a}{x}}{x^2}$.

18. $p=\sin(\cos q)$; „ $p'=-\sin q\cdot\cos(\cos q)$.

19. $y=x^n e^{\sin x}$; „ $y'=x^{n-1}e^{\sin x}(n+x\cos x)$.

20. $y=e^{ax}\cos mx$; „ $y'=e^{ax}(a\cos mx-m\sin mx)$.

21. $f(x)=\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$; „ $f'(x)=-\frac{2\sin x}{(1-\cos x)^2}$.

22. $y=x^{\sin x}$; „ $y'=x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x}+\ln x\cos x\right)$.

23. $y=(\sin x)^x$; „ $y'=(\sin x)^x(\ln\sin x+x\operatorname{ctg}x)$.

24. $y=(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$; „ $y'=(\sin x)^{\operatorname{tg}x}\left(1+\frac{\ln\sin x}{\cos^2 x}\right)$.

25. $y=x+\ln\cos\left(x-\frac{\pi}{4};\right)$ „ $y'=\frac{2}{1+\operatorname{tg}x}$.

34. §. Ciklometrisko funkciju diferencēšana.

Daudzvērtīgas funkcijas nav diferencējamas. Ciklometriskās funkcijas ir daudzvērtīgas. Lai ciklometriskās funkcijas varētu diferencēt, tad ar papildnosacījumu tās jāpārvērš vienvērtīgās funkcijās. Šādi papildnosacījumi apskatīti jau agrāk (17. §) un tos paturēsim arī tagad ciklometrisko funkciju diferencēšanā.

Diferencēsim

$$y=\arcsin x.$$

Šai nolūkā ņemsim tās apvērsto funkciju $x=\sin y$ un diferencēsim to pēc y:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{d\sin y}{dy}=\cos y,$$ no kurienes

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$ Tā tad

$$\boxed{\frac{d\arcsin x}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad .\ .\ .\ .\ .\ (14)}$$ un

$$d\arcsin x=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (14')$$

Izsakot (14) formulu vārdos, dabūjam teorēmu:

30. teōr. arkussinus atvasinājums ir vienlīdzīgs vienam, dalītam ar kvadrātsakni no viena un argumenta kvadrāta starpības.

Lai diferencētu

$$y = \arccos x,$$

tad iziesim no tās apvērstās funkcijas $x = \cos y$. Diferencēsim to pēc y:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d\cos y}{dy} = -\sin y, \text{ no kurienes}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Tā tad

$$\boxed{\frac{d\arccos x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \ldots (15)} \quad \text{un}$$

$$d\arccos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \ldots \ldots (15')$$

Izsakot (15) formulu vārdos, dabūjam teorēmu:

31. teōr. arkuskosinus atvasinājums ir vienlīdzīgs minus vienam, dalītam ar kvadrātsakni no viena un argumenta kvadrāta starpības.

Jātatzīmē, ka (14) un (15) formulā kvadrātsakne ņemama ar plūs zīmi, jo pirmajā gadījumā $\sqrt{1-\sin^2 y} = \cos y$ un otrā gadījumā $\sqrt{1-\cos^2 y} = \sin y$, bet $\cos y \geq 0$ un tāpat arī $\sin y \geqslant 0$ kas secināms no tā, ka y var mainīties tikai zināmās robežās (17. §).

Lai diferencētu

$$y = \operatorname{arc\,tg} x,$$

ņemsim $x = \operatorname{tg} y$ un diferencēsim to pēc y:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d\operatorname{tg} y}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y}, \text{ no tā secināms, ka}$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Tā tad

$$\boxed{\frac{d\,\mathrm{arc\,tg}\,x}{dx}=\frac{1}{1+x^2}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(16)}$$ un

$$d\,\mathrm{arc\,tg}\,x=\frac{dx}{1+x^2}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(16').$$

Izteicot (16) formulu vārdos, dabūjam teorēmu:

32. teōr. arkustangenta atvasinājums ir vienlīdzīgs vienam, dalītam ar viena un argumenta kvadrāta summu.

Lai diferencētu

$$y=\mathrm{arc\,ctg}\,x,$$

ņemsim $x=\mathrm{ctg}\,y$ un diferencēsim to pēc y:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{d\,\mathrm{ctg}\,y}{dy}=-\frac{1}{\sin^2 y}\quad \text{jeb}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\sin^2 y=-\frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2 y}=-\frac{1}{1+x^2}.\quad \text{Tā tad}$$

$$\boxed{\frac{d\,\mathrm{arc\,ctg}\,x}{dx}=-\frac{1}{1+x^2}\;.\;.\;.\;.\;(17)}$$ un

$$d\,\mathrm{arc\,ctg}\,x=-\frac{dx}{1+x^2}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(17').$$

Izsakot (17) formulu vārdos, dabūjam teorēmu:

33. teōr. arkuskotangenta atvasinājums ir vienlīdzīgs minus vienam, dalītam ar viena un argumenta kvadrāta summu.

Piemēri.

1. $y=\arcsin(3x-4x^3)$; $y'=\frac{1}{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}}.(3-12x^2)=$

$$=\frac{3-12x^2}{\sqrt{1-9x^2+24x^4-16x^6}}=\frac{3(1-4x^2)}{\sqrt{1-x^2-8x^2+16x^4+8x^4-16x^6}}=$$

$$=\frac{3(1-4x^2)}{\sqrt{(1-8x^2+16x^4)-x^2(1-8x^2+16x^4)}}=\frac{3(1-4x^2)}{\sqrt{(1-4x^2)^2(1-x^2)}}=$$

$$=\frac{3(1-4x^2)}{(1-4x^2)\sqrt{1-x^2}}=\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. $y=\mathrm{arc\,tg}\,ax^2.\,y'=\frac{1}{1+a^2x^4}\,2ax=\frac{2ax}{1+a^2x^4}.$

Uzdevumi. Diferencēt:

1. $y = \arcsin ax$; atb. $y' = \frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$.
2. $y = \arcsin \frac{x}{a}$; „ $y' = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$.
3. $y = \arccos \frac{a}{x}$; „ $y' = \frac{a}{x\sqrt{x^2-a^2}}$.
4. $y = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a}$; „ $y' = \frac{a}{a^2+x^2}$.
5. $y = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a}$. „ $y' = \frac{1}{a^2+x^2}$.
6. $y = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$; „ $y' = -\frac{1}{1+x^2}$.
7. $y = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$; „ $y' = \frac{a}{a^2+x^2}$.
8. $y = \operatorname{arc\,ctg} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$. „ $y' = -\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$.
9. $y = a \arcsin \frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2}$; „ $y' = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$.
10. $y = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}$; „ $y' = 2\sqrt{a^2-x^2}$.
11. $y = \sqrt{a^2-x^2} + a \arcsin \frac{x}{a}$; „ $y' = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$.
12. $s = \arcsin(3r-1)$; „ $s' = \frac{3}{\sqrt{6r-9r^2}}$.
13. $s = \operatorname{arc\,tg} \frac{r+a}{1-ar}$; „ $s' = \frac{1}{1+r^2}$.
14. $f(y) = \arccos \ln y$; „ $f'(y) = -\frac{1}{y\sqrt{1-\ln^2 y}}$.
15. $f(\varphi) = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}}$; „ $f'(\varphi) = \frac{1}{2}$.
16. $p = e^{\operatorname{arc\,tg} q}$; „ $p' = \frac{e^{\operatorname{arc\,tg} q}}{1+q^2}$.
17. $u = \operatorname{arc\,tg} \frac{e^v - e^{-v}}{2}$; „ $u' = \frac{2}{e^v + e^{-v}}$.
18. $y = x^{\arcsin x}$; atb. $y' = x^{\arcsin x}\left(\frac{\arcsin x}{x} + \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.
19. $y = e^{x^x} \operatorname{arctg} x$; „ $y' = e^{x^x}\left(\frac{1}{1+x^2} + x^x \operatorname{arctg} x (1+\ln x)\right)$.
20. $y = \arcsin(\sin x)$; „ $y' = 1$.

35. §. Augstākas kārtas atvasinājumi un diferenciāli.

Funkcijas atvasinājums, vispārīgi runājot, ir atkal argumenta funkcija. Kā izņēmumu varam, piemēram, minēt veselas racionālas pirmās pakāpes funkcijas atvasinājumu, kas ir pastāvīgs lielums. Ja tas tā, tad var būt, ka atvasinājums ir diferencējama funkcija un tāpēc varam runāt par tā atvasinājumu, sauktu otrās kārtas atvasinājumu jeb vienkārši otru atvasinājumu. Līdzīgi spriezdami nonākam pie trešās, ceturtās u. t t. n-tās kārtas atvasinājumiem.

Atvasinājumus apzīmē pēc Lagranža šā:

$y', y'', y''', y^{IV}, y^{V}, \ldots y^{(n)}$, ko lasa y prim, y otrais, ... y n-tais, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{IV}(x)$, $f^{V}(x)$, ... $f^{(n)}(x)$, ko lasa f prim x, f otrais x ...

Funkcijas diferenciāls, vispārīgi runājot, ir arī argumenta funkcija. Tāpēc tam var atkal atrast diferenciālu. Tad dabūjam diferenciāla diferenciālu, sauktu otras kārtas diferenciālu jeb vienkārši otru diferenciālu. Līdzīgi spriezdami nonākam pie trešās, ceturtās u. t. t. n-tās kārtas diferenciāliem. Diferenciālus apzīmē ar dy, d^2y, d^3y, ... $d^n y$ un lasa dy, d otrais y, d trešais y, ... d n-tais y.

Noskaidrosim augstākas kārtas atvasinājumu un diferenciālu sakarību.

Ja

$$y = f(x),$$

tad $dy = f'(x)\,dx$ un ņemdami šā diferenciāla diferenciālu, dabūjam otru diferenciālu d^2y:

$$d^2y = d\,(dy) = d\,[f'(x)dx].$$

Zinām, ka dx nav no x atkarīgs un tāpēc to varam ņemt ārpus diferenciāla zīmes (19. teōr.,$_1$) un rakstīt, ka

$$d\,[f'(x)dx] = d\,[f'(x)]\,dx.$$

Funkcijas diferenciāls $d\,[f'(x)]$ ir vienlīdzīgs funkcijas $f'(x)$ un argumenta x diferenciāla reizinājumam. Tāpēc varam rakstīt:

$$d\,[f'(x)] = f''(x)\,dx.$$

Tā tad $d^2y = f''(x)\,dx\,.\,dx$ jeb $d^2y = f''(x)\,(dx)^2$.

Tāpat $d^3y = f'''(x)\,(dx)^3$ un vispārīgi

$$d^n y = f^{(n)}(x)\,(dx)^n.$$

Pieņemts apzīmēt argumenta diferenciāla pakāpes $(dx)^2, (dx)^3, (dx)^4, \ldots (dx)^n$ vienkārši ar dx^2, dx^3, $dx^4 \ldots dx^n$. Lai nesajauktu argumenta diferenciāla pakāpes ar pakāpju diferenciāliem, piemēram, x diferenciāla ceturto pakāpi $(dx)^4$ ar x^4 diferenciālu, tad pēdējo raksta: $d(x^4)$.

Ievērojot šos apzīmējumus, dabūjam, ka

$$dy = f'(x)\,dx$$
$$d^2y = f''(x)\,dx^2$$
$$d^3y = f'''(x)\,dx^3$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$d^n y = f^{(n)}(x)\,dx^n.$$

To izsakām vārdiem: augstākās kārtas diferenciāls ir vienlīdzīgs tās pašas kārtas atvasinājumam, reizinātam ar argumenta diferenciāla attiecīgo pakāpi.

No uzrakstītām vienlīdzībām varam rakstīt, ka

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},$$
$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2},$$
$$f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3},$$
$$\cdots\cdots$$
$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$ un teikt, ka

augstākās kārtas atvasinājums ir vienlīdzīgs tās pašas kārtas diferenciālam, dalītam ar argumenta diferenciāla attiecīgo pakāpi.

Simbolu $\frac{d^n y}{dx^n}$ sācis lietot Leibnics un tas apzīmē n-tās kārtas atvasinājumu. Piemēram, 9. kārtas atvasinājumu no $\frac{1+x}{1-x}$ apzīmē ar $\frac{d^9}{dx^9}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Zinām, ka dx nav atkarīgs no x, tāpēc tā diferenciāls d^2x ir vienlīdzīgs nullei. Ja $d^2x = 0$, tad arī $d^3x = 0$, $\ldots d^n x = 0$. Tāpēc teorēma:

34. teōr. argumenta augstāko kārtu diferenciāli vienlīdzīgi nullei.

Uzskatot taisnvirziena kustībā laiku kā neatkarīgo lielumu un ceļu kā tā funkciju, ceļa atvasinājums pēc laika izsaka kustības momentāno ātrumu. Domājot taisnvirziena kustību un spriežot līdzīgi kā 23. §, dabū atzinumu, ka ātruma pirmais atvasinājums ir kustības paātrinājums. Bet ātruma pirmais atvasinājums ir ceļa otrais atvasinājums. Tā tad t a i s n v i r z i e n a k u s t ī b ā c e ļ a o t r a i s a t v a s i n ā j u m s i z s a k a k u s t ī b a s p a ā t r i n ā j u m u.

Parasti n-tās kārtas atvasinājumu atrod n reizes funkciju diferencējot. Dažām funkcijām tomēr var arī atrast vispārīgu n-tās kārtas atvasinājuma formulu kā n funkciju, kuŗu atrod dažas reizes doto funkciju diferencējot un atklājot šīs formulas uzbūves likumu, pēc kā uz indukcijas pamata uzraksta n-to atvasinājumu.

Piemēri.

1. $y = e^x$; $y' = e^x$; $y'' = e^x$, redzam, ka

$$\frac{d^n e^x}{dx^n} = e^x.$$

Šis piemērs ir tik vienkāršs, ka pie tā ar indukcijas metodi neuzkavēsimies. Sīkāk uzkavēsimies 2. piemērā.

2. $y = \sin x$; $y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,

$$y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''' = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right).$$

Atsevišķos gadījumos novērojam likumu, ka diferencējot $\sin x$, funkcijas nosaukums nemainās, bet arguments palielinās par $\frac{\pi}{2}$. Pieņemsim, ka šis likums ir spēkā arī n-tā gadījumā:

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

un pierādīsim, ka tas ir spēkā tad arī $(n+1)$-gadījumā.

Tiešām, $y^{(n+1)} = (y^{(n)})' = \left(\sin(x + n\cdot\frac{\pi}{2})\right)' = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right) =$

$$= \sin\left[(x + n\cdot\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}\right] = \sin\left[x + (n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right].$$

Redzam, ka arī $(n+1)$-ais atvasinājums dabūjams pēc šī paša likuma, ja tikai n-tais atvasinājums dabūjams pēc šī likuma. Bet jau tieši pārliecinājamies, ka 2. un 3. atvasinājumi dabūjami pēc šī likuma, tā tad arī ceturtais, un ja ceturtais, tad pēc pierādītās īpašības arī 5. u. t. t. Tā tad likums ir pierādīts vispārīgi.

3. Ja $y=\cos x$, tad, līdzīgi spriežot, dabūjam, ka

$$y^{(n)}=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

4. $y=x^m$; $y'=mx^{m-1}$

$$y''=m(m-1)x^{m-2}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(k)}=m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)x^{m-k}$$

Ja m ir vesels pozitīvs skaitlis, tad pie $k=m$, $x^{m-k}=x^0$ un $y^{(k)}=\text{const}$.

Uzdevumi.

Atrast norādītos atvasinājumus:

1. $(2x^3-9x^2+12x)''$; atb. $12x-18$.
2. $\left(3x+\frac{1}{x^3}\right)''$; „ $\frac{12}{x^5}$.
3. $\left(x^4+\frac{8}{3}ax^3-2a^2x^2-8a^3x\right)''$; „ $12x^2+16ax-4a^2$.
4. $[(x+a)\sqrt{a^2-x^2}]''$; „ $\frac{2x^3-3a^2x-a^3}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$.
5. $\left(\frac{x^3}{1-x}\right)^{IV}$; „ $\frac{4!}{(1-x)^5}$.
6. $(y^6)^{VI}$; „ $6!$
7. $(x^7)'''$; „ $7.6.5x^4$.
8. $(x^3\ln x)^{IV}$; „ $\frac{6}{x}$.
9. $\left(\frac{c}{x^n}\right)''$; „ $\frac{n(n+1)c}{x^{n+2}}$.
10. $(xe^x)''$; „ xe^x+2e^x.
11. $[(x-3)e^{2x}+4xe^x+x]''$; „ $4e^x[2+x+(x-2)e^x]$.
12. $(ax^2+bx+c)'''$. „ 0.
13. $[\ln(x+1)]^{IV}$; „ $-\frac{6}{(x+1)^4}$.
14. $(e^{-t}\cos t)^{IV}$ „ $-4f(t)$.
15. $(a^x)^{(n)}$; „ $(\ln a)^n a^x$.

16. $(\ln x)^{(n)}$; " $(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$.

17. $(e^x \cdot x)^{(n)}$; " $e^x(x+n)$.

18. $(\arcsin x)''$; " $\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

19. $\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{x}\right)''$; " $\frac{2ax}{(a^2+x^2)^2}$.

20. $(x\arcsin x+\sqrt{1-x^2})''$; " $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

36. §. Apslēptās funkcijas diferencēšana.

Apslēptu funkciju var diferencēt, iepriekš to pārvēršot atklātā funkcijā. Šis ceļš praksē nav ērts un dažreiz pat neiespējams. Tāpēc apskatīsim citu apslēptās funkcijas diferencēšanas paņēmienu, kuŗā nav jāpārvērš apslēptā funkcija atklātā. Šai nolūkā noskaidrosim diferencēšanas paņēmienu, izejot no konkrēta piemēra:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

Diferencēsim šo formulu pēc x ar funkciju funkcijas diferencēšanas likumu (28. §), jo y^2 ir y funkcija, bet y ir x funkcija un tāpēc y^2 ir x funkcijas funkcija:

$$2b^2x+2a^2yy'=0.$$

No pēdējās formulas, kuŗā y' ir aizvien pirmajā pakāpē, varam viegli izrēķināt y':

$$y'=-\frac{b^2x}{a^2y}.$$

Parasti šādā kārtā atrastie atvasinājumi, kā tas ir arī piemērā, ir netikai kā x funkcijas, bet arī y. Ja no diferencējamās formulas varam izrēķināt y, tad ir iespējams izslēgt y no atvasinājuma formulas un dabūt y' tikai kā x funkciju. Bet arī tajos gadījumos, ja y nevar izrēķināt, y' tomēr var uzskatīt kā x funkciju vien, jo y ir x funkcija.

Piemērs. $x^3+y^3=3axy$.

$3x^2+3y^2y'=3ay+3axy'$, no šejienes izrēķinot y', dabūjam

$$y'=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}.$$

Uzdevumi. Atrast y'.

1. $x^2+y^2-x^3=0;$ atb. $y'=\frac{3x^2-2x}{2y}=\frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}.$

2. $(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0;$ „ $y'=-\frac{x(2x^2+2y^2-a^2)}{y(2x^2+2y^2+a^2)}.$

3. $x^2-a^y=0;$ „ $y'=\frac{2}{x\ln a}.$

4. $(x+y)^3-axy=0;$ „ $y'=-\frac{3(x+y)^2-ay}{3(x+y)^2-ax}.$

5. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}};$ „ $y'=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}.$

6. $a^2y^2-(a-x)(a+x)^3=0;$ „ $y'=\frac{(a-2x)\sqrt{a^2-x^2}}{a(a-x)}.$

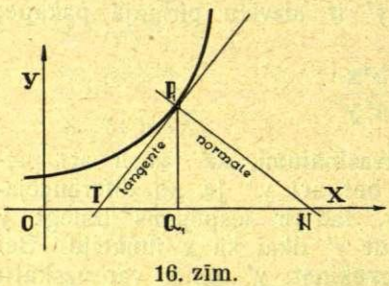
7. $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2;$ „ $y'=-\frac{a-x}{b-y}.$

8. $(x^2+x^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0;$ „ $y'=-\frac{x}{y}\cdot\frac{2(x^2+y^2)-a^2}{2(x^2+y^2)+a^2}.$

9. $e^y-e^x+xy=0;$ „ $y'=\frac{e^x-y}{e^y+x}.$

10. $\sin(xy)-e^{xy}-x^2y=0;$ „ $y'=\frac{y(\cos(xy)-e^{xy}-2x)}{x[x+e^{xy}-\cos(xy)]}.$

37. §. Tangentes un normāles nolīdzinājumi.



16. zīm.

Ņemsim līkni (16. zīm), kā nolīdzinājums ortogonālā koordinātu sistēmā ir

$$y=f(x)$$

un atradīsim līknes punktā $P_1(x_1;y_1)$ vilktās tangentes nolīdzinājumu. Punktā P_1 ejošās taisnes nolīdzinājums ar leņķa koeficientu k ir $y-y_1=k(x-x_1)$. Taisne ir tangente. Tās leņķa koeficients $k=y_1'$. Tāpēc meklējamais tangentes nolīdzinājums ir

$$\boxed{y-y_1=y_1'(x-x_1)}$$

Par līknes normāli punktā P sauc šai punktā vilktai tangentei perpendikulāru taisni.

Ievērojot tangentes nolīdzinājumu un normāles definīciju, dabūjam normāles nolīdzinājumu:

$$\boxed{y-y_1=-\frac{1}{y_1'}(x-x_1)}$$

Atradīsim, piemēram, ellīpsei

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

punktā P_1 $(x_1;\ y_1)$ vilktās tangentes un normāles nolīdzinājumu.

Zinām, ka $y'=-\frac{b^2x}{a^2y}$; tāpēc $y_1'=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$ un meklējamās tangentes nolīdzinājums ir

$$b^2x_1x+a^2y_1y=a^2b^2 \quad \text{jeb} \quad \frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1,$$

un normāles nolīdzinājums ir

$$y-y_1=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1).$$

38. §. Tangentes un normāles garums. Subtangente un subnormāle.

T a n g e n t e s g a b a l u s t a r p p i e s k a r š a n ā s p u n k t u u n t ā s k r u s t o j u m a p u n k t u a r a b s c i s u a s i s a u c p a r t a n g e n t e s g a ŗ u m u.

T a n g e n t e s g a ŗ u m a p r o j e k c i j u u z a b s c i s u a s s s a u c p a r s u b t a n g e n t i.

N o r m ā l e s g a b a l u s t a r p p i e s k a r š a n ā s p u n k t u u n t ā s k r u s t o j u m a p u n k t u a r a b s c i s u a s i s a u c p a r n o r m ā l e s g a ŗ u m u.

N o r m ā l e s g a ŗ u m a p r o j e k c i j u u z a b s c i s u a s s s a u c p a r s u b n o r m ā l i.

Tangentes gaŗumu apzīmēsim ar t, subtangenti ar t_s, normāles gaŗumu ar n un subnormāles ar n_s. 16. zīmējumā $t=P_1T$, $n=P_1N$, $t_s=TQ$ un $n_s=QN$.

Aprēķināsim minēto gabalu gaŗumus.

No $\triangle TP_1Q$ (16. zīm.) dabūjam, ka $\frac{y_1}{t_s}=\operatorname{tg}\alpha$ jeb

$$\frac{y_1}{t_s}=y_1', \text{ tāpēc}$$

$$\boxed{t_s=\frac{y_1}{y_1'}.}$$

No tā paša trīsstūŗa dabūjam, ka

$$t=\sqrt{y_1^2+t_s^2}=\sqrt{y_1^2+\frac{y_1^2}{y_1'^2}}=\frac{y_1}{y_1'}\sqrt{1+y_1'^2}.$$

Tangentes gaŗumu skaita aizvien pozitīvu, tāpēc jāņem

$$\left|\frac{y_1}{y_1'}\sqrt{1+y_1'^2}\right|.$$ Tā tad

$$\boxed{t=\left|\frac{y_1}{y_1'}\sqrt{1+y_1'^2}\right|}$$

No $\triangle P_1QN$ dabūjam, ka $n_s=y_1 \operatorname{tg}\alpha$. Tāpēc

$$n_s=y_1y_1'.$$

No tā paša trīsstūŗa dabūjam, ka

$$n=\sqrt{y_1^2+n_s^2}=\sqrt{y_1^2+y_1^2y_1'^2}=y_1\sqrt{1+y_1'^2}.$$

Normāles gaŗumu skaita aizvien pozitīvu, tāpēc jāņem

$$|y_1\sqrt{1+y_1'^2}|.$$ Tā tad

$$\boxed{n=|y_1\sqrt{1+y_1'^2}|.}$$

Ja subtangente atrodas pa labi no punkta T, tad tā ir pozitīva, ja pa kreisi, tad negātīva;

ja subnormāle atrodas pa labi no punkta Q, tad tā ir pozitīva, ja pa kreisi, tad negātīva.

Uzdevumi.

1. Sastādīt riņķim $x^2+y^2=r^2$ punktā P_1 $(x_1;\ y_1)$ vilktās tangentes un normāles nolīdzinājumus un atrast arī subtangenti un subnormāli.

(Atb. $x_1x+y_1y=r^2$; $y=\frac{y_1}{x_1}x$; $-\frac{y_1^2}{x_1}$; $-x_1$).

2. Sastādīt parabolai $y^2=2px$ punktā P_1 $(x_1;\ y_1)$ vilktās tangentes un normāles nolīdzinājumus un atrast arī subtangenti un subnormāli.

(Atb. $y_1y=p(x_1+x)$; $(x_1-x)y_1+(y_1-y)p=0$.

3. Parabolai $y^2=9x$ punktā P, kā abscisa $x_1=4$ vilkta tangente un normāle. Aprēķināt t, t_s, n un n_s. (Atb. $t=10$; $t_s=8$; $n=\frac{15}{2}$; $n_s=\frac{9}{2}$.)

4. Riņķim $x^2+y^2=25$ punktā P, kā abscisa $x_1=-3$ vilkta tangente un normāle. Aprēķināt t, t_s, n un n_s.

(Atb. $t=\frac{20}{3}$; $t_s=\frac{16}{3}$; $n=5$; $n_s=3$).

39. §. Uzdevumi atkārtojumam.

1. Atrast $(\arcsin\sqrt{1-4x^2})'$; atb. $\frac{-2}{\sqrt{1-4x^2}}$.

2. Atrast $(\arcsin\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos x})'$; " $\frac{1}{2}$.

3 Atrast $\left(\frac{x^3\arcsin x}{3}+\frac{(x^2+2)\sqrt{1-x^2}}{9}\right)'$; " $x^2\arcsin x$.

4. Atrast $(x^2e^x\cos x)'$; atb. $x^2e^x(\cos x-\sin x)+2xe^x\cos x$.

5. Atrast $\left(\frac{e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)}{a^2+b^2}\right)'$; atb. $e^{ax}\cos bx$.

6. Dota likne $y=\frac{x^3}{3}-x^2+2$. Atrast: 1) α, ja $x=1$; 2) α, ja $x=3$; 3) punktus, kuŗos tangente ir paralēla x asij; 4) punktus, kur $\alpha=45^0$ un 5) punktus, kur tangente ir paralēla taisnei $2x-3y=6$. [atb. 1) $\alpha=135^0$; 2) $\alpha=\operatorname{arctg}3$; 3) $x=\begin{cases}0;\\2,\end{cases}$ 4) $x=1\pm\sqrt{2}$; 5) $x=1\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$].

7. Atrast leņķi, ko veido krustojuma punktā divi riņķi $x^2+y^2-4x=1$ un $x^2+y^2-2y=9$. Par leņķi, ko veido divi līknes krustojoties, skaita leņķi, ko veido šo līkņu krustojuma punktā līknēm vilktās tangentes. (Atb. 45.)

8. Kādu leņķi veido līknes $x^2\ y^2=a^3\ (x+y)$ tangente koordinātu sākuma punktā. (Atb. $\alpha=135^0$.)

9. Kādas ir līkņu 1) $y=x^3-3x^2-9x+5$ un 2) $y(x-1)(x-2)=x-3$ abscisas punktiem, kur tangentes ir paralēlas x asij.

(Atb. 1) $x=\begin{cases}3\\-1\end{cases}$ 2) $x=3\pm\sqrt{2}$).

10. Pierādīt, ka sinusoida $y=\sin x$ krusto x asi 45^0 vai 135^0 lielā leņķī.

11. Kur tangente parabolai $y=x^2-7x+3$ ir paralēla taisnei $y=5x+2$. (Atb. 6; — 3.)

12. Brīvā kritienā ķermeņa ceļš izsakāms formulā $s=4{,}9\,t^2$, kur s ir augstums metros un t laiks sekundēs. Atrast ātrumu un paātrinājumu: a) kautkādā momentā, b) pirmās sekundes beigās, c) piektās sekundes beigās. (Atb. a) $v=9{,}8t$; $a=9{,}8$; b) $v=9{,}8$ m/sec; $a=9{,}8$ m/sec^2; c) $v=49$m/sec; $g=9{,}8$m/sec^2.

13. Slīpa sviediena līnijas nolīdzinājums ir: $x=(v_1\cos\varphi)t$; $y=(v_1\sin\varphi)t-4{,}9t^2$, kur v_1 ir sākuma ātrums; φ — sviediena leņķis; t — laiks sekundēs. Atrast v_x, v_y, un v: a) kaut kādā momentā; b) pirmās sekundes beigās, ja $v_1=30$ m/sec, $\varphi=30^0$; c) kustības virzienu pirmās sekundes beigās. Atb. a) $v_x=v_1\cos\varphi$; $v_y=v_1\sin\varphi-9{,}8t$; $v=\sqrt{v_1^2-19{,}6t\,v_1\sin\varphi+96t^2}$; b) $v_x=26$m/sec; $v_y=5{,}2$m/sec; $v=26{,}4$m/sec; c) $\operatorname{tg}\varphi=\frac{v_y}{v_x}=\frac{5{,}2}{26}$; $\varphi=11^0 19'$.

14. Augšup vertikāla sviediena līnijas nolīdzinājums ir: $s=v_1t-4{,}9\,t^2$. Atrast: a) ātrumu un paātrinājumu; b) ja $v_1=100$ m/sec, atrast ātrumu un paātrinājumu otras sec. beigās.

Atb. a). $v=v_1-9{,}8t$; $a=-9{,}8$; b) $v=80{,}4$m/sec; $a=-9{,}8$m/sec^2.

15. Granātu izšauj no lielgabala vertikāli uz augšu ar sākuma ātrumu 196 m/sec. Atrast: a) ātrumu 10. sekundes beigās; b) pēc cik sekundēm tā sasniegs maksimālo augstumu un kāds tas ir. Atb. a) 98 m/sec.; b) 20 sec.; 1960 m.

16. Punkts kustas pa taisni tā, ka $s = \sqrt{t}$. Jāpierāda, ka paātrinājums ir negatīvs un proporcionāls ātruma kubam.

17. Kona augstums ir y, pamata radijs x. Pierādīt: a) ja pamats nemainās, tad tilpums izmainās $\frac{1}{3}\pi x^2$ reizes ātrāk nekā augstums; b) ja augstums nemainās, bet radijs mainās, tad tilpums izmainās $\frac{2}{3}\pi xy$ reizes ātrāk nekā radijs.

18. Atrast parabolas $y^2 = 20x$ tangentes nolīdzinājumu, ja $\alpha = 45^0$. (Atb. $y = x + 5$.)

19. Atrast riņķa $x^2 + y^2 = 52$ tangentes nolīdzinājumu, kas parallēla taisnei $2x + 3y = 6$. (Atb. $2x + 3y \pm 26 = 0$.)

20. Atrast hiperbolas $4x^2 - 9y + 36 = 0$ tangentes nolīdzinājumu, kas perpendikulāra taisnei $2y + 5x = 10$. (Atb. $2x - 5y \pm 8 = 0$.)

21. Atrast t, t_s, n un n_s:

1) $y^2 = 2ax$ (atb. $t = \frac{y}{a}\sqrt{a^2 + y^2}$; $t_s = 2x$; $n = \sqrt{a^2 + y^2}$; $n_s = a$.)

2) $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ (atb. $n_s = -\frac{b^2x}{a^2}$; $t_s = -\frac{a^2 - x^2}{x}$; $n = \frac{b\sqrt{a^4 - e^2x^2}}{a^2}$; $t = -\frac{1}{ax}\sqrt{(a^2 - x^2)(a^4 - e^2x^2)}$.

V. nodaļa.

Bezgalīgas rindas.

Šai nodaļā apskatīsim bezgalīgo rindu teōriju. Bezgalīgajām rindām ir ļoti liela nozīme matēmatikā, jo tās dod iespēju izteikt transcendento funkciju un argumentu sakarību ar algebriskām darbībām. Tas ir transcendento lielumu tuvināto nozīmju aprēķināšanas līdzeklis.

40. §. Rindas, to konverģence un diverģence.

Par rindu sauc skaitļu sakopojumu, kuŗā skaitļi seko viens otram pēc viena un tā paša likuma.

Rindā sakopotos skaitļus sauc par tās locekļiem. Rindas locekļus vispārīgā veidā apzīmē ar kādu burtu, kam pievieno indeku, kas norāda locekļa vietas numuru rindā. Tā, piemēram, rindā $u_1, u_2, u_3, \ldots u_{k-1}, u_k, u_{k+1}, \ldots u_n, \ldots$ k-tais loceklis no sākuma ir u_k. Rinda ir dota, ja ir zināms likums, pēc kā, zinot locekļa indeku, var uzrakstīt katru rindas locekli. Šo likumu noskārš, ja doti daži atsevišķi rindas locekļi. Pēc atrastā likuma sastāda rindas vispārīgā locekļa izteiksmi kā indeka funkciju. Dodot argumentam naturālas nozīmes, dabūjam rindas atsevišķos locekļus un līdz ar to ir rinda sastādīta. Piemēram, ja dots, ka $u_2 = 2^2$, $u_3 = 3^2$, tad redzam, ka $u_n = n^2$. Dodot n nozīmes, sākot no $+1$, dabūjam rindu:

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots k^2, \ldots n^2, \ldots$$

Viens no svarīgākajiem jautājumiem rindu teōrijā ir rindas locekļu summas atrašana. Tāpēc arī rindas locekļu summas izteiksmi sauc par rindu. Piemēram,

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \ldots + \frac{n}{2^n} + \ldots$$

arī sauc vienkārši par rindu. Algebrā, apskatīdami rindas, galvenokārt, runājām par galīgām rindām. Še apskatīsim bezgalīgas rindas.

Dalot 1 ar $1-x$, dabūjam dalījumu bezgalīgas rindas veidā:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n + \ldots \text{ (1).}$$

Atradīsim izteiksmei $\frac{1}{1-x}$ skaitlisko nozīmi, ja $x = \frac{1}{5}$:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4} = 1{,}25.$$

Ieliekot šo pašu x nozīmi (1) vienlīdzības labajā pusē, dabūjam atsevišķo locekļu skaitliskās nozīmes, kuŗas, skaitot no sākuma līdz 9. loceklim, uzrakstām:

$$\begin{array}{rl}
1 = & 1 \\
x = & 0{,}2 \\
x^2 = & 0{,}04 \\
x^3 = & 0{,}008 \\
+\ x^4 = & 0{,}0016 \\
x^5 = & 0{,}00032 \\
x^6 = & 0{,}000064 \\
x^7 = & 0{,}000013 \quad \text{(ņemam tikai pirmās 6 decimālzīmes)} \\
x^8 = & 0{,}000002 \quad \text{„ \quad „ \quad „ \quad „ \quad „} \\
\hline
& 1{,}249999
\end{array}$$

Uzrakstītās vienlīdzības saskaitot, dabūjam skaitli 1,249999, kas ir izteiksmes $\frac{1}{1-x}$ tuvināta nozīme. Pareizāka rezultāta iegūšanai jāņem vairāk rindas locekļu.

Ņemsim tagad $x=2$, tad no (1) vienlīdzības dabūjam, ka

$$-1=1+2+4+8+\dots \text{ jeb } -1=+\infty$$

Ja ņemsim $x=-1$, tad (1) vienlīdzība ir:

$$\tfrac{1}{2}=1-1+1-1+1-1+\dots$$

Pēdējās vienlīdzības labajā pusē ir vai nu 0, vai $+1$; skatoties pēc tā, vai locekļu skaits ir pāru skaitlis vai nepāru skaitlis. Tā tad

$$\frac{1}{2}=\begin{cases}0\\+1\end{cases}.$$

Pirmajā gadījumā nekādu pretrunu nav un bezgalīgu rindu var izlietot funkcijas tuvinātu nozīmju aprēķināšanai. Pēdējos divi gadījumos ir pretrunas un bezgalīgo rindu nevaram izlietot aprēķiniem. Lai noskaidrotu, kad bezgalīgai rindai ir jēga un kad nav, jāatrod bezgalīgo rindu savirzamības jeb konverģences un nesavirzamības jeb diverģences jēdziens.

Apzīmēsim n locekļu summu ar S_n.

$$S_n=u_1+u_2+u_3+\dots+u_n.$$

Redzam, ka arī S_n ir n funkcija. Locekļu skaitam n bezgalīgi augot, iespējami trīs gadījumi:

1) S_n tuvojas noteiktai galīgai robežai S: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$,

2) S_n arī bezgalīgi aug: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\infty$ un

3) S_n netuvojas robežai, bet svārstās — tam robežas nav.

Pirmajā gadījumā rindu sauc par savirzāmu jeb konverģentu, otrā — nesavirzāmu jeb diverģentu un trešajā gadījumā par svārstīgu rindu.

Tagad pieņemsim rindas konverģences un diverģences definīciju:

bezgalīgu rindu sauc par savirzāmu jeb konverģentu, ja n locekļu summai, locekļu skaitam bezgalīgi augot, ir noteikta galīga robeža; bezgalīgu rindu sauc par nesavirzāmu jeb diverģentu, ja n locekļu summai, locekļu skaitam bezgalīgi augot, nav noteiktas galīgas robežas.

Bezgalīgas rindas n locekļu summas robežu

$$\lim_{n\to\infty} S_n=S,$$

sauc par bezgalīgas rindas summu.

Diverģentām rindām summas nav. Svārstīgām rindām arī summas nav un tās pieskaita diverģentām rindām.

Tagad atgriezīsimies pie piemēra:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\dots+x^n+\dots$$

Šai piemērā $S_n=1+x+x^2+\dots+x^{n-1}$. Pēdējās vienlīdzības labajā pusē ir ģeometriska progresija, tāpēc $S_n=\frac{1-x^n}{1-x}$. Noskaidrosim, kad (1) rinda ir konverģenta un kad ne.

1. $|x|<1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^n}{1-x}=\frac{1}{1-x}$ — rinda ir konverģenta;

2. $|x|>1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^n}{1-x}=\infty$ — rinda ir diverģenta;

3. $x=-1$, tad $S_n=1-1+1-1+\dots\pm1=\begin{cases}0\\1\end{cases}$

— rinda ir svārstīga un tā tad diverģenta.

Redzam, ka atkarībā no x nozīmēm, (1) rinda ir konverģenta vai diverģenta, un ka konverģences gadījumā dabūjam pareizu rezultātu, bet diverģences gadījumā ne. Tāpēc aprēķinos var lietot tikai konverģentas rindas, bet diverģentas ne. Ja tas tā, tad jāprot noteikt, vai dotā bezgalīgā rinda ir konverģenta vai ne. Šai nolūkā var rīkoties kā dotajā piemērā: atrod S_n un izpēta $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Šis ceļš nav ērts, jo dažreiz S_n atrašana ir saistīta ar lielām grūtībām, vai pat neiespējama. Tāpēc jāmeklē rindu **konverģences pazīmes**.

Apzīmēsim bezgalīgas rindas n locekļu summu ar S_n un atlikušo locekļu summu ar R_n. Tad rindas summa

$$S=S_n+R_n.$$

R_n sauc par **atlikušo locekli jeb atlikumu:**

$$R_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\dots$$

Ja rinda ir konverģenta, tad n-am bezgalīgi augot, S_n robeža ir S un tāpēc R_n ir jābūt bezgalīgi mazam (rob. l. def.), t. i.

$$\lim_{n\to\infty} R_n=0.$$

Pastāv arī apgrieztais atzinums:

ja $\lim R_n=0$, **tad rinda ir konverģenta.**

Bezgalīgās rindas atlikums $R_n=S-S_n$. Pēc dotā nosacījuma starpība starp pastāvīgo lielumu S un mainīgo S_n ir bezgalīgi maza. Tāpēc varam secināt (rob. l. def.), ka S ir S_n robeža un rinda ir konverģenta (konv. r. def.).

Tā tad nepieciešamā un pietiekošā bezgalīgas rindas konverģences pazīme ir šāda:

rindas atlikums ir bezgalīgi mazs.

Atrastā konverģences pazīme arī nav praksē ērti lietojama, jo par R_n atrašanu sakāms tas pats, kas par S_n atrašanu. Tāpēc meklēsim ērtāk lietojamas konverģences pazīmes.

Redzējām, ka

$$S_n = S - R_n$$

Tāpat arī

$$S_{n-1} = S - R_{n-1}.$$

Atņemot šīs vienlīdzības, dabūjam, ka

$$S_n - S_{n-1} = (S - R_n) - (S - R_{n-1}) \text{ jeb}$$
$$u_n = R_{n-1} - R_n.$$

Konverģentām rindām R_n un tāpat R_{n-1} ir bezgalīgi mazi. Tāpēc arī to starpība ir bezgalīgi maza (1. teōr.,$_1$). Tā tad otra rindas nepieciešamā konverģences pazīme ir,

lai n-am bezgalīgi augot, u_n bezgalīgi diltu:

$$\lim u_n = 0.$$

Šī nav pietiekoša rindas konverģences pazīme. Tiešām, R_n kā bezgalīgi daudzu bezgalīgi mazu saskaitāmo summa $u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$ var arī nebūt bezgalīgi maza (9. § piezīme). Ja šādā gadījumā R_n, n bezgalīgi augot, nav katru reizi bezgalīgi mazs, bet var būt arī cits lielums, tad rinda nav katru reizi konverģenta, bet var būt arī diverģenta, un tā tad

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0$$

nav pietiekoša rindas konverģences pazīme.

Nu esam atraduši gan ērtu rindas nepieciešamu konverģences pazīmi, bet pietiekošu vēl ne.

41. §. Pozitīvu locekļu rindas.

Šai paragrafā runāsim tikai par pozitīvu locekļu rindām un atradīsim to savirzamības pazīmes. Negātīvo locekļu rindām var piemērot tās pašas savirzamības pazīmes, ko pozitīvo locekļu rindām, jo to summu var uzskatīt kā pozitīvu locekļu rindas summas reizinājumu ar -1, kas summas absolūto vērtību neiespaido. Tāpēc par tām nav atsevišķi jārunā.

35. teōr. Ja kādas rindas locekļi no sākuma vai sākot no kādas noteiktas vietas ir mazāki vai vienlīdzīgi otras rindas attiecīgajiem locekļiem, tad otrai rindai savirzoties, savirzās arī pirmā rinda un pirmai rindai nesavirzoties, nesavirzās arī otra rinda.

Dotas divi rindas:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \text{ (1)}.$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots \text{ (2)}.$$

Par šīm rindām zināms, ka sākot no noteikta n $u_n \leqslant v_n$.

No teorēmas noteikumiem varam rakstīt:

$$u_{n+1} \leqslant v_{n+1}$$

$$u_{n+2} \leqslant v_{n+2}$$

$$u_{n+3} \leqslant v_{n+3}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Saskaitot nevienlīdzības, dabūjam, ka $R_n \leqslant R'_n$, kur R_n ir (1) rindas atlikums un R'_n (2) rindas atlikums. Pēc teorēmas nosacījumiem (2) rinda ir konverģenta. Tāpēc $\lim\limits_{n\to\infty} R'_n = 0$ un līdz ar to arī $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$, kas nosaka (1) rindas konverģenci.

Teorēmas otras daļas pierādīšanai iziesim no pretējā pieņēmuma. Pieņemsim, ka (1) rindai nesavirzoties, (2) savirzās. Ja tas tā, tad pēc nupat pierādītā ir jāsavirzās arī (1) rindai, kas ir pretrunā ar teorēmas nosacījumu, ka (1) rinda nesavirzās. Tāpēc mūsu pieņēmums atmetams un paliek spēkā vienīgā iespēja, ka (1) rindai nesavirzoties, nesavirzās arī (2) rinda, k. b. j.

Piemērs. Rinda $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} + \ldots + \frac{1}{n^n} + \ldots$ konverģē, jo salīdzinot to ar bezgalīgi dilstošu ģeometrisku progresiju, kas pēc konverģento rindu definīcijas konverģē katru reizi:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots,$$

redzam, ka sākot ar otru locekli ir izpildīts 35. teorēmas nosacījums: $u_n \leqq v_n$.

42. §. Dalambēra (d'Alembert) savirzāmības pazīme.

Rinda savirzās, ja sākot no kādas noteiktas vietas, katra locekļa attiecība pret iepriekšējo locekli nepārsniedz kādu lielumu, kas mazāks par 1; rinda diverģē, ja šī attiecība ir lielāka vai vienlīdzīga 1.

Pieņemsim, ka pozitīvu locekļu rindai

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \text{ (1)},$$

sākot no noteiktas vietas, pastāv nevienlīdzība:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq k < 1 \ldots \text{ (2)}.$$

No (2) nevienlīdzības secināms, ka

$$u_{n+1} \leqq k u_n.$$

Ja n ir pietiekoši liels, tad varam rakstīt nevienlīdzību tabulu:

$$\left.\begin{array}{l} u_{n+2} \leqslant k u_{n+1} \leqslant k^2 u_n \\ u_{n+3} \leqslant k u_{n+2} \leqslant k^3 u_n \\ u_{n+4} \leqslant k u_{n+3} \leqslant k^4 u_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots \text{ (3)}$$

Salīdzināsim (1) rindu ar sekojošu rindu:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + k u_n + k^2 u_n + k^3 u_n + \ldots\ldots \text{ (4)}.$$

(4) rinda sastāv no divi daļām, no viena galīga skaitļa

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$

un no bezgalīgi dilstošas ģeometriskas progresijas

$$k u_n + k^2 u_n + k^3 u_n + \ldots,$$

kas konverģē. Tāpēc arī (4) rinda konverģē. No (3) tabulas redzams, ka (1) un (4) rindas izpilda 35. teorēmas nosacījumus, tāpēc arī (1) rinda konverģē, k. b. j.

Tālāk pieņemsim, ka sākot ar kādu noteiktu vietu pastāv nevienlīdzība

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 \ldots \text{ (5)}.$$

Ja tas tā, tad (1) rindai nav izpildīta nepieciešamā rindu konverģences pazīme, jo $u_{n+1} \geqslant u_n$ un tā diverģē, k. b. j.

Dalambēra savirzāmības pazīme ērtāk lietojama, ja ņem a t t i e c ī b a s r o b e ž u. Pieņemsim, ka $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha$. Ja tas tā, tad $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ bezgalīgi maz atšķirsies no α. Pie $\alpha < 1$ ir izpildīts (2) nosacījums un rinda savirzās; pie $\alpha > 1$ ir izpildīts (5) nosacījums un rinda nesavirzās; pie $\alpha=1$ rindas konverģences jautājums paliek atklāts. Tā tad,

j a $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\alpha$, t a d p i e $\alpha<1$, r i n d a k o n v e r ģ ē,
p i e $\alpha>1$, r i n d a d i v e r ģ ē
u n p i e $\alpha=1$, j a u t ā j u m s p a l i e k a t k l ā t s.

Piemēri.

1) $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots;$

$$u_n=\frac{1}{n!};\quad u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!};\quad \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1},$$

redzam, ka pie šīs rindas ir izpildīts (2) nosacījums, jo

$$\frac{1}{n+1}\leqslant\frac{1}{2}<1 \text{ ja } n\geqslant 1$$

un rinda konverģē. To pašu vēl vienkāršāk dabūjam ar robežlielumiem: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$, bet $0<1$ un tāpēc rinda ir konverģenta.

2) Ņemsim harmonisko rindu

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

un piemērosim Dalambēra konverģences pazīmi:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}=\frac{1}{1}=1.$$

Redzam, ka $\alpha=1$ un tāpēc k o n v e r ģ e n c e s j a u t ā j u m s p a l i e k a t k l ā t s. Jautājuma izšķiršanai uzrakstīsim harmonisko rindu tabulas veidā, kuŗas rindas ir lielākas par ½:

$$1>\tfrac{1}{2},$$
$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}>\tfrac{1}{2},$$
$$\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}>\tfrac{1}{2},$$
$$\tfrac{1}{8}+\ldots+\tfrac{1}{15}>\tfrac{1}{2}.$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Saskaitot šīs nevienlīdzības, dabūjam jaunu nevienlīdzību, kuŗas labajā pusē ½ ir ņemts par saskaitāmo bezgalīgi daudz reizes un tā tad summa ir bezgalīgi liela, bet līdz ar to arī kreisā puse ir bezgalīgi liela un rinda diverģē. — Redzējām, ka

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n}{n+1}<1,$$

bet rinda diverģē. Tas tāpēc, ka pastāvot nevienlīdzībai

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<1,$$

vēl nevar teikt, ka pastāv arī (2) nosacījums un līdz ar to arī

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\alpha,$$

kur $\alpha<1$, jo α var būt arī 1.

43. §. Relātīvu locekļu rindas.

Var būt rinda ar pozitīviem un negātīviem locekļiem. Apskatīsim rindu, kā locekļiem zīmes mainās pēc kārtas:

$$u_1-u_2+u_3-\ldots (1).$$

36. teōr. J a r i n d a s l o c e k ļ i e m a b s o l ū t ā s n o z ī m e s p a s t ā v ī g i p a m a z i n ā d a m ā s, b e z g a l ī g i d i l s t u n z ī m e s m a i n ā s p ē c k ā r t a s, t a d t ā s a v i r z ā s.

Ņemsim (1) rindas $2n$ locekļu summu S_{2n} un uzrakstīsim to šādos divi veidos:

$$S_{2n}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\ldots+(u_{2n-1}-u_{2n})\ \ldots\ldots (2)$$

$$S_{2n}=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\ldots-(u_{2n-2}-u_{2n-1})-u_{2n}\ .\ (3)$$

Pēc teōrēmas nosacījuma starpības iekavās ir pozitīvas. Tāpēc (2) vienlīdzība rāda, ka $S_{2n}>0$ un ka ar n augšanu aug arī S_{2n}. Bet (3) vienldzība rāda, ka $S_{2n}<u_1$. Ja tas tā, tad ar n neaprobežotu augšanu, S_{2n}, būdams pozitīvs, arī aug, bet paliek mazāks par galīgu skaitli u_1. Tāpēc S_{2n} tiecas uz noteiktu galīgu robežu S un rinda savirzās, kur $S<u_1$.

Ja n nav pāŗu skaitlis 2n, bet ir nepāŗu skaitlis $2n+1$, tad

$$S_{2n+1}=S_{2n}+u_{2n+1} \text{ jeb } \lim S_{2n+1}=\lim S_{2n}+\lim u_{2n+1}=S+0=S.$$

Līdz ar to teōrēma pierādīta visiem n-iem, kā pāŗu tā nepāŗu indekiem.

Redzējām, ka r i n d a s l o c e k ļ u s u m m a i r m a z ā k a p a r u_1.

No tā secināms, ka kļūdas absolūtā nozīme, kāda rodas, ņemot S vietā Sn, ir mazāka par u_{n+1};

Tiešām, $S=S_n+R_n$ un ja ņemam $S=S_n$, tad pielaistā kļūda ir $R_n=\pm(u_{n+1}-u_{n+2}+u_{n+3}-\ldots)$.
Iekavās ir atkal tāda paša tipa rinda un tās locekļu summa ir mazāka par u_{n+1}.

Piemērs.

Ņemsim rindu $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$, kas atbilst teōrēmas nosacījumiem. Tāpēc varam teikt, ka rinda savirzās, jo

$$1>\tfrac{1}{2}>\tfrac{1}{3}>\tfrac{1}{4}>\ldots \text{ un } \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Ja par tās summu pieņemam

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n},$$

tad pielaistās kļūdas absolūtā nozīme ir mazāka nekā $\frac{1}{n+1}$.

44. §. Absolūti un relātīvi savirzāmas rindas.

Ņemsim divi rindas: vienu relātīviem locekļiem un otru — šo locekļu absolūtām nozīmēm.

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots\ldots \quad (1)$$

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots+|u_n|+\ldots \quad (2)$$

37. teōr. Relātīvo locekļu rinda savirzās, ja savirzās rinda, kā locekļi ir relātīvās rindas locekļu absolūtās nozīmes.

Ja (2) rinda savirzās, tad tās atlikums R'_n ir bezgalīgi mazs un tāpēc pastāv nevienlīdzība: $R'_n<\varepsilon$. Apzīmēsim (1) rindas atlikumu ar R_n. Pēc šiem apzīmējumiem $R'_n=|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+|u_{n+3}|+\ldots$ un $R_n=u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+\ldots\ldots$ No algebras zinām, ka $|u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+\ldots|\leqslant|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+|u_{n+3}|+\ldots$ Tāpēc varam rakstīt, ka $|R_n|\leqslant R'_n$ un R'_n ir bezgalīgi mazs, kāpēc (1) rinda ir konverģenta.

Šādā gadījumā relātīvo locekļu rindu sauc par *absolūti savirzāmu rindu*.

Piemēram,

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}-\ldots$$

ir absolūti savirzāma rinda, jo savirzās rinda

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots$$

kā bezgalīgi dilstoša ģeometriska progresija ar $q=\frac{1}{2}$.

Ja rinda ar relātīviem locekļiem savirzās, tad vēl nevar teikt, ka savirzās rinda, kā locekļi ir relātīvās rindas locekļu absolūtās nozīmes. Piemēram, rinda $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ savirzās uz 36. teōrēmas pamata, bet $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ diverģē, kā harmoniskā rinda. Šādas rindas sauc par relātīvi savirzāmām rindām. Pierādītā teōrēma ļauj vispārināt Dalambēra savirzāmības pazīmi arī uz relātīvo locekļu rindām, jo Dalambēra pazīmi var piemērot absolūto locekļu rindām. Ja tā savirzās, tad

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leqslant k < 1 \text{ jeb } \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant k < 1; \text{ ja tā diverģē, tad } \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geqslant 1.$$

No pirmās nevienlīdzības un 36. teōrēmas secināms, ka savirzās arī relātīvo locekļu rinda un pie tam absolūti; no pēdējās nevienlīdzības secināms, ka u_n nevar tiekties uz nulli un rinda diverģē.

Ar robežlielumiem kritērijs uzrakstāms šādi:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \alpha, \text{ pie } \alpha<1 \text{ rinda savirzās absolūti}$$

„ $\alpha>1$ rinda nesavirzās

„ $\alpha=1$ jautājums paliek atklāts.

45. §. Funkciju attīstīšana rindā.

Ņemsim polinomu

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Ievietosim (1) polinomā x vietā $x+h$:

$$f(x+h) = a_0 + a_1(x+h) + a_2(x+h)^2 + \ldots + a_n(x+h)^n.$$

Iedomāsimies pēdējā vienlīdzībā labajā pusē izdarītas visas reizināšanas un tā dabūto polinomu sakārtotu pēc h augošām pakāpēm. Tad, lai būtu kāds būdams h, dabūjam, ka

$$f(x+h) = A_0 + A_1 h + A_2 h^2 + A_3 h^3 + \ldots + A_n h^n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

kur koeficienti $A_0, A_1, A_2, \ldots A_n$ ir x funkcijas un nav no h atkarīgi. Kā aprēķināt šos koefiecentus? Pirmo koeficientu A_0 viegli atrodam, ņemot $h=0$, dabūjam no (2) formulas $f(x)=A_0$. To varam darīt, jo (2) formula ir pareiza pie katra x un h. Pārējo koeficientu aprēķināšanai diferencēsim (2) formulu n reizes pēc h:

$$f'(x+h) = A_1 + 2A_2 h + 3A_3 h^2 + \ldots + nA_n h^{n-1},$$

$$f''(x+h) = 2A_2 + 3.2.A_3 h + \ldots + n(n-1)A_n h^{n-2},$$

$$f'''(x+h) = 3.2.A_3 + 4.3.2A_4 h + \ldots + n(n-1)(n-2)A_n h^{n-3},$$

. . . .

. . . .

$$f^{(k)}(x+h)=k(k-1)(k-2)\dots 3.2.1A_k+\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f^{(n)}(x+h)=n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1A_n.$$

Dabūtos atvasinājumos pieņemsim $h=0$. Ar tādu h izvēli koeficienti nav speciāli sameklēti, jo tie nav no h atkarīgi, bet no x. Tādā kārtā dabūjam:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=A_1 \\ f''(x)=2A_2 \\ f'''(x)=3.2.A_3 \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ f^{(k)}(x)=k(k-1)(k-2)\dots 3.2.1A_k \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ f^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1A_n. \end{array}\right\} \text{ jeb } \left\{\begin{array}{l} A_1=f'(x) \\ A_2=\dfrac{f''(x)}{2!} \\ A_3=\dfrac{f'''(x)}{3!} \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ A_k=\dfrac{f^{(k)}(x)}{k!} \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ A_n=\dfrac{f^{(n)}(x)}{n!}=a_n \end{array}\right\}$$

Ieliekot šo koeficientu nozīmes (2) formulā, dabūjam:

$$f(x+h)=f(x)+f'(x).h+\frac{f''(x)}{2!}h^2+\frac{f'''(x)}{3!}h^3+\dots+$$
$$+\frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k+\dots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n \quad \dots\dots \quad (3)$$

Šo izteiksmi sauc par Teilora (Taylor) rindu un tā ir polinoma $f(x+h)$ attīstījums rindā. Attīstījums sakārtots pēc h augošām pakāpēm, no kurām zemākā ir nullē, bet augstākā n. Pirmais loceklis ir $f(x)$; pēdējais a_n, jo

$$\frac{f^{(n)}}{n!}=\frac{n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1.a_n}{n!}=a_n.$$

Koeficients pie h attiecīgas pakāpes ir $f(x)$ attiecīgais atvasinājums, izdalīts ar attiecīgu faktoriālu. Vispārīgais loceklis

$$T_{k+1}=\frac{f^{(k)}}{k!}h^k.$$

Tā kā (2) izteiksme ir pareiza pie kaut kuŗa x un h, tad arī (3) izteiksme ir pareiza pie kaut kuŗa x un h.

Piemēri.

1. Dots polinoms $f(x) = 3x - x^3$. Atradīsim $f(2+h)$.

$$f(2+h) = f(2) + f'(2)h + \frac{f''(2)}{2!}h^2 + \frac{f'''(2)}{3!}h^3.$$

Atradīsim norādītos lielumus:

$f'(x) = 3 - 3x^2$; $f''(x) = -6x$; $f'''(x) = -6$ un tāpēc $f(2) = -2$; $f'(2) = -9$; $f''(2) = -12$; $f'''(2) = -6$. Tā tad

$$f(2+h) = -2 - 9h - 6h^2 - h^3.$$

2. (3) rinda ir piemērojama katram polinomam, tāpēc arī tā speciālam gadījumam:
$f(x) = x^m$, kur m ir vesels pozitīvs skaitlis.

Atradīsim

$f(x+h) = (x+h)^m$. Tā kā $f'(x) = mx^{m-1}$, $f''(x) = m(m-1)x^{m-2}$, $f'''(x) = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$, un vispārīgi $f^{(k)}(x) =$
$= m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)x^{m-k}$,
tad pēc (3) formulas dabūjam

$$(x+h)^m = x^m + mx^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{2!}x^{m-2}.h^2 + \dots + h^m.$$

Tā ir Ņūtona binoma formula.

Teilora rindu izvedām polinomam jeb veselai racionālai funkcijai. Arī kaut kuŗai citai funkcijai $f(x)$ var formāli uzrakstīt Teilora rindu, ja tikai tai ir augstākie atvasinājumi neaprobežotā skaitā. Tādā kārtā Teilora rinda ir bezgalīga rinda, un saka, ka funkcija $f(x)$ ir attīstīta Teilora rindā. Funkcijas attīstījumam bezgalīgā rindā ir praktiska nozīme, ja rinda ir savirzāma.

Uzrakstīsim Teilora rindu:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \dots +$$
$$+ \frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + \dots \quad (4).$$

Ieliksim (4) formulā x vietā 0 un h vietā x, to varam darīt, jo formulas izvedamā x-am un h nav ierobežojuma:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (5).$$

Šī ir Meklorena (Maclaurin) rinda. Ar šo rindu var vienkārši attīstīt transcendentās funkcijas rindā.

46. §. Eksponenfunkcijas attīstījums rindā un e aprēķināšana.

Piemērosim Meklorena rindu fankcijai e^x.

$$f(x)=e^x; \quad f(0)=1$$
$$f'(x)=e^x; \quad f'(0)=1$$
$$\dots\dots \quad \dots\dots$$
$$f^{(n)}(x)=e^x; \quad f^{(n)}(0)=1.$$

Ieliekot šīs nozīmes Meklorena rindā, dabūjam:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots \quad (1)$$

Vēl jānosaka pie kādām x nozīmēm (1) rinda savirzās. To izdarīsim ar Dalambēra kritēriju:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}.n!}{(n+1)!x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right|=0.$$

Rinda konverģē pie katra galīga x.

Ja $x=1$, tad no (1) dabūjam:

$$e=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}+\dots \quad (2)$$

No (2) attīstījuma varam aprēķināt e ar vēlamo tuvinājumu:

$$2=2{,}00000$$
$$\frac{1}{2!}=0{,}50000$$
$$\frac{1}{3!}=0{,}16667 \text{ (dalot iepriekšējo locekli ar 3)}$$
$$+\frac{1}{4!}=0{,}04167 \text{ („ „ „ „ 4)}$$
$$\frac{1}{5!}=0{,}00833 \text{ („ „ „ „ 5)}$$
$$\frac{1}{6!}=0{,}00139 \text{ („ „ „ „ 6)}$$
$$\frac{1}{7!}=0{,}00019 \text{ („ „ „ „ 7)}$$
$$e\approx 2{,}71825.$$

Rezultātā pareizas pirmās četras decimālzīmes.

Ja $f(x)=a^x$, tad tā attīstīšanai iepriekš logaritmēsim:

$$\ln f(x)=x\ln a \text{ un tāpēc}$$
$$f(x)=e^{x\ln a}.$$

Attīstījumu dabūjam (1) rindā x vietā liekot $x \ln a$:

$$a^x = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{x^2 \ln^2 a}{2!} + \frac{x^3 \ln^3 a}{3!} + \ldots \quad (3)$$

47. §. Trigōnometrisko funkciju attīstījums rindā.

Ņemsim $\sin x$ un sagatavosim vajadzīgos lielumus Meklorena rindai.

$$f(x) = \sin x; \quad f'(x) = \cos x; \quad f''(x) = -\sin x; \quad f'''(x) = -\cos x;$$

$$f^{IV}(x) = \sin x \ldots$$

$f(0) = 0$; $f'(0) = 1$; $f''(0) = 0$; $f'''(0) = -1$; $f^{IV}(0) = 0$. Tā tad

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \quad (1)$$

Rindas savirzāmības noskaidrošanai ņemsim Dalambēra kritēriju:

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{\mp \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}}{\pm \frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{x^2}{(n+1)(n+2)} \right| = 0.$$

Rinda savirzās pie katra galīga x.

Līdzīgā kārtā atradīsim $\cos x$ attīstījumu rindā:

$$f(x) = \cos x; \quad f'(x) = -\sin x; \quad f''(x) = -\cos x; \quad f'''(x) = \sin x;$$

$$f^{IV}(x) = \cos x; \ldots$$

$$f(0) = 1; \quad f'(0) = 0; \quad f''(0) = -1; \quad f'''(0) = 0; \quad f^{IV}(0) = 1; \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \quad (2)$$

Arī (2) rinda savirzās katrai galīgai x nozīmei. Abās rindās locekļiem zīmes mainās pēc kārtas. Tāpēc, ņemot sinus un kosinus aprēķināšanai pirmos n locekļus, pielaižam kļūdu mazāku nekā $(n+1)$. loceklis (2) rinda satur x tikai pāŗu pakāpēs, tāpēc argumenta nozīmēm, kas atšķiŗas tikai ar zīmēm, kosinus nozīmes ir vienlīdzīgas un kosinus ir pāŗu funkcija.

48. §. Logaritmiskās funkcijas attīstījums rindā.

Lai $\ln(1+x)$ attīstītu rindā, ņemsim $f(x) = \ln x$ un atradīsim atvasinājumu nozīmes, ja $x = 1$ un Teilora rindā h apmainīsim ar x:

$$f(x)=\ln x;\ f'(x)=\frac{1}{x};\ f''(x)=-\frac{1}{x^2};\ f'''(x)=\frac{2!}{x^3};\ f^{IV}(x)=$$
$$=-\frac{3!}{x^4};\ldots f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$
$$f(1)=0;\ f'(1)=1;\ f''(1)=-1;\ f'''(1)=2!;\ f^{IV}(1)=$$
$$=-3!;\ldots f^{(n)}(1)=(-1)^{n-1}(n-1)!$$
$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\ldots (1).$$

Noteiksim (1) rindas konverģenci, atrodot divi blakus locekļu attiecības robežu:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{nx}{n+1}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{1+\frac{1}{n}}\right|=|x|.$$

Rinda savirzās, ja $|x|<1$. Tāpēc ar (1) rindu var aprēķināt logaritmus skaitļiem, kas mazāki par 2. Lai varētu aprēķināt logaritmus skaitļiem, kas lielāki par 2, tad (1) rindā ņem $-x$ un iegūst rindu:

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}-\ldots (2).$$

Atņemot no (1) rindas (2), dabūjam, ka

$$\ln(1+x)-\ln(1-x)=2x+\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}+\ldots$$

Pēdējās vienlīdzības kreisajā pusē ir dalījuma logaritms un labajā 2 ir kopīgais reizinātājs. Tāpēc varam rakstīt:

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots\right)\ \ldots (3).$$

Arī (3) rinda savirzās, ja $-1<x<+1$. Ar x augšanu no -1 līdz $+1$ daļa $\frac{1+x}{1-x}$ aug no 0 līdz $+\infty$ un tāpēc (3) rinda dod iespēju aprēķināt logaritmus visiem pozitīviem skaitļiem. Piemērosim, lai aprēķinātu ln 3, tad $\frac{1+x}{1-x}=3$ un $x=1/2$. Ja (3) rindā x vietā ņemsim $1/2$, tad aprobežojoties ar rindas pirmajiem deviņiem locekļiem, dabūsim, ka $\ln 3=1{,}0986122$. Ar šo paņēmienu jāatrod naturāllogaritmi tikai pirmskaitļiem. Pārējiem skaitļiem logaritmus atrod uz logaritmu īpašību pamata. Piemēram, $\ln 8=\ln 2^3=3\ln 2$; $\ln 6=\ln 2.3=\ln 2+\ln 3$.

Reizinot naturāllogaritmus ar moduli

$$\lg_{10} e,$$

dabūjam decimāllogaritmus.

49. §. Ņūtona binoma vispārinājums.

45. paragrafā dabūjam Ņūtona binoma formulu, attīstot $(x+h)^m$ rindā ar Teilora rindu. Piemērojot funkcijai $(x+h)^m$ Teilora rindu, ja m nav vesels pozitīvs skaitlis, bet ir negatīvs vai daļa, dabūjam formāli tādu pašu binoma attīstījumu, tikai bezgalīgu:

$$(x+h)^m = x^m + m x^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{2!} x^{m-2}h^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!} x^{m-n}h^n + \ldots \quad (1).$$

Atradīsim rindas konverģenci:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(m-n)}{(n+1)!} x^{m-n-1}h^{n+1}}{\dfrac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}h^n}{n!}} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{m-n}{n+1} \cdot \frac{h}{x} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{m}{n}-1}{1+\frac{1}{n}} \cdot \frac{h}{x} \right| = \left| \frac{h}{x} \right|.$$

Rinda ir savirzāma, ja $\left|\frac{h}{x}\right| < 1$ jeb $|h| < |x|$.

Ieliekot (1) formulā x vietā 1 un h vietā x, dabūjam:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n + \ldots \quad (2).$$

(2) formula lietojama, ja $|x| < 1$.

Piemērs.

$$(1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + \frac{-1.-2}{2!}x^4 + \frac{-1.-2.-3}{3!}x^6 +$$
$$+ \frac{-1.-2.-3.-4.}{4!}x^8 + \ldots \text{ jeb}$$
$$(1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots \quad (3)$$

(2) formulu var lietot sakņu vilkšanai ar ļoti lielu tuvinājumu.

Piemēram, atradīsim $\sqrt[3]{130}$.

$$\sqrt[3]{130} = 130^{\frac{1}{3}} = (125+5)^{\frac{1}{3}} = 125^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{5}{125}\right)^{\frac{1}{3}} = 5(1+0{,}04)^{\frac{1}{3}}.$$

Pēc (2) formulas:

$$(1+0{,}04)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}\,.\,0{,}04+\frac{\frac{1}{3}\,.\,-\frac{2}{3}}{2!}0{,}04^2+\frac{\frac{1}{3}\,.\,-\frac{2}{3}\,.\,-\frac{5}{3}}{3!}.0{,}04^3+\ldots=$$

$$=1+\tfrac{1}{3}\,.\,0{,}04-\tfrac{1}{9}\,.\,0{,}04^2+\tfrac{5}{81}\,.\,0{,}04^3+\ldots=1+0{,}0133333-$$

$$-0{,}0001778+0{,}0000040=1{,}0131595.$$

Tā tad $\sqrt[3]{130}=5\,.\,1{,}0131595=5{,}0657975.$

50. §. Uzdevumi.

Uzrakstīt uzdevumos rindu vispārīgos locekļus:

1. $1+3+9+\ldots$ atb. 3^{n-1} 2. $-a+a^2-a^3+a^4-\ldots$ atb. $(-a)^n$

3. $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots$ „ $\frac{x^n}{n}$; 4. $\frac{3x}{2}+\frac{5x^2}{5}+\frac{7x^3}{10}+\ldots$ „ $\frac{2n+1}{n^2+1}x^n$

5. $u_n=n^2x^n$, atrast rindu; atb. $x+4x^2+9x^3+\ldots$

6. $u_n=\frac{x^n}{1+\sqrt{n}}$, „ „ „ $\frac{x}{2}+\frac{x^2}{1+\sqrt{2}}+\frac{x^3}{1+\sqrt{3}}+\ldots$

7. $u_n=\frac{n+2}{n^3+1}$ „ „ „ $\frac{3}{2}+\frac{4}{9}+\frac{5}{28}+\ldots$

8. $u_n=\frac{n}{2^n}$ „ „ „ $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\ldots$

9. Vai rinda $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$ konverģe, vai diverģē — (diverģē).

10. Pierādīt, ka rinda $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$ konverģē.

11. Pierādīt, ka rinda $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$ diverģē (aizrādīj. saucēj. apmainīt ar pāŗu cipar. un ņem $\frac{1}{2}$ aiz iek.).

12. Noskaidrot rindas konverģenci: $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$ (konvrģ).

13. „ „ „ : $\frac{1}{10}+\frac{2!}{10^2}+\frac{3!}{10^3}+\ldots+\frac{n!}{10^n}+\ldots$ (diverģ).

14. „ „ „ : $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+\ldots+$

$$+\frac{1}{(2n-1)2n}+\ldots$$

Aizrādījums: jāsalīdzina ar $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots$, kas konverģē.

15. $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\ldots$

16. $\frac{2}{1}+\frac{2.5}{1.5}+\frac{2.5.8}{1.5.9}+\frac{2.5.8.11}{1.5.9.13}+\ldots$

17. $\frac{1}{3}+\frac{1.3}{3.6}+\frac{1.3.5}{3.6.9}+\ldots$ 18. $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\frac{9}{27}+\ldots$

19. $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4.5}+\frac{1}{1.2\ldots7}+\ldots$

20. $-1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\ldots$

Noteikt sekojošo rindu konverģences intervallu.

21. $1+x+x^2+x^3+\ldots$ atb. $-1<x<1$;

22. $x-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}-\frac{x^4}{4^2}+\ldots$ atb. $-1\leqq x\leqq 1$.

23. $x+\frac{x^2}{\sqrt{2}}+\frac{x^3}{\sqrt{3}}+\ldots$ „ $-1\leqq x<1$;

24. $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$ „ katrs x.

25. Attīstīt $\sin 2x\ldots$; atb. $\sin 2x=2\frac{x}{1}-2^3\frac{x^3}{3!}+2^5\frac{x^5}{5!}-2^7\frac{x^7}{7!}+\ldots$

26. „ $\cos 2x$; „ $\cos 2x=1-2^2\frac{x^2}{2!}+2^4\frac{x^4}{4!}+2^6\frac{x^6}{6!}+\ldots$

27. „ e^x pēc $(x-2)$ pakāpēm; atb. $e^x=e^2+e^2(x-2)+$
$+\frac{e^2}{2!}(x-2)+\ldots$

28. „ x^3-2x^2+5x-7 pēc $(x-1)$ pakāpēm; atb. $-3+4(x-1)+$
$+(x-1)^2+(x-1)^3$.

29. „ $\cos(a+x)$ pēc x pakāpēm; atb. $\cos a-x\sin a-$
$-\frac{x^2}{2!}\cos a+\frac{x^3}{3!}\sin a\,x\ldots$

30. „ $\ln(x+h)$ pēc x pakāpēm; atb. $\ln h+\frac{x}{h}-\frac{x^2}{2h^2}+\frac{x^3}{3h^3}\ldots$

31. „ $\sin^2 x$ „ „ „ atb. $\sin^2 x=\frac{2x^2}{2!}-\frac{2^3x^4}{4!}+$
$+\frac{2^5x^6}{6!}-\frac{2^7x^8}{8!}+\ldots$

32. „ $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ „ „ „ atb. $1+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1}-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{x^2}{2!}+$
$+\frac{1.3}{2^3}\cdot\frac{x^3}{3!}-\frac{1.3.5}{2^4}\cdot\frac{x^4}{4!}+\ldots$

33. „ $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ „ „ „ atb. $1-\frac{1}{2}\frac{x}{1!}+\frac{1.3}{2^2}\cdot\frac{x^2}{2!}-$
$-\frac{1.3.5}{2^3}\cdot\frac{x^3}{3!}+\frac{1.3.5.7}{24}\frac{x^4}{4!}\cdots$

VI. nodaļa.

Funkcijas augšana un dilšana. Maksims un minims.

Ir svarīgi zināt, kā mainās funkcija argumentam augot vai dilstot: vai tā aug vai dilst, kur funkcija sasniedz savu maksimālo un kur savu minimālo nozīmi u. t. t. Šādus un tamlīdzīgus jautājumus rada technika un pati dzīve. Bieži vien jāzina kāda ķermeņa lielākais vai mazākais tilpums, materiāls, enerģija, darbs u. t. t. Šai nodaļā apskatīsim funkcijas augšanu, dilšanu un ekstrēmu.

51. §. Augošas un dilstošas funkcijas.

Dota nepārtraukta funkcija $y = f(x)$. Apzīmēsim kādu argumenta nozīmi vienkārši ar x. Dosim argumentam pieaugumu $+h$. Tad dabūtās argumenta nozīmes ir $x+h$ un tām atbilstošās funkcijas nozīmes ir $f(x+h)$. Salīdzinot savā starpā argumenta nozīmes un attiecīgās funkcijas nozīmes, apskatīsim šādus divi gadījumus: pastāvot nevienlīdzībai $x-h<x<x+h$, pastāv:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ f(x-h) < f(x) < f(x+h) \text{ vai} \\ 2)\ f(x-h) > f(x) > f(x+h). \end{array}\right. \quad (h>0)$$

P i r m a j ā g a d ī j u m ā a r g u m e n t a m a u g o t, a u g a r ī f u n k c i j a u n t o s a u c p a r a u g o š u f u n k c i j u, j a a r g u m e n t a n o z ī m e i r x, j e b p a r a u g o š u f u n k c i j u d o t a j ā p u n k t ā x;

O t r ā g a d ī j u m ā a r g u m e n t a m a u g o t, f u n k c i j a d i l s t u n t o s a u c p a r d i l s t o š u f u n k c i j u, j a a r g u m e n t a n o z ī m e i r x, j e b p a r d i l s t o š u f u n k c i j u d o t a j ā p u n k t ā x.

No tā secināms, ka a u g o š a s f u n k c i j a s p i e a u g u m a m u n a r g u m e n t a p i e a u g u m a m i r v i e n ā d a s z ī m e s, b e t d i l s t o š a s — d a ž ā d a s. Tāpēc varam rakstīt pirmajā gadījumā, ka

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} > 0 \text{ (divi vienādzīmju skaitļu dalījums)} \ldots \quad (1)$$

un otrā, ka $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} < 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Argumenta pieaugums h var būt bezgalīgi mazs kā pozitīvs, tā arī negatīvs.

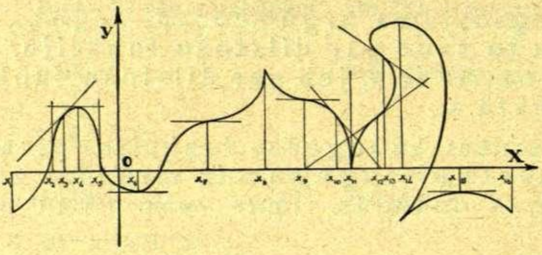
No (1) nevienlīdzības uz atvasinājuma un robežlielumu definīciju pamata varam rakstīt: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$ un $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)+\varepsilon$, kur ε ir bezgalīgi mazs lielums un tā tad $|\varepsilon| < |f'(x)|$. Tāpēc pēdējās vienlīdzības labajai pusei ir tāda pati zīme kā $f'(x)$. Vienlīdzības kreisā puse augošas funkcijas gadījumā ir vienmēr pozitīva. Līdz ar to labajai pusei ir jābūt pazitīvai un arī $f'(x) > o$. Atsevišķā gadījumā $f'(x)$ var būt vienlīdzīgs arī nullei, jo 12. paragrafā redzējām, ka pastāvot nevienlīdzībai $f(x) \gtrless a$, robežgadījumā var būt arī vienlīdzība iespējama: $\lim f(x) \gtrless a$. Tā tad *augošas funkcijas atvasinājums ir pozitīvs, vai atsevišķos gadījumos vienlīdzīgs nullei.*

Spriežot tā kā augošas funkcijas gadījumā, no (2) nevienlīdzības dabūjam atzinumu:

dilstošas funkcijas atvasinājums ir negātīvs vai atsevišķos gadījumos vienlīdzīgs nullei.

Ja funkcija aug visos intervalla punktos, tad šai intervallā to sauc par augošu; ja tā dilst visos intervalla punktos, tad šai intervallā to sauc par dilstošu funkciju.

Argumentam augot, attiecīgais līknes punkts kustas pa labi un augošas funkcijas ordināta aug, bet dilstošas dilst. Tāpēc augošas funkcijas attēlotāja līkne ceļas (zīm. x_6—x_8), bet dilstošas krītas (zīm. x_8—x_{11}) attiecībā pret abscisu asi. Atzīmēsim, ka runājot par funkcijas augšanu un dilšanu, tāpat līknes celšanos un krišanos, aizvien argumentu pieņem par augošu.



17. zīm.

Ja kādā intervallā funkcija tikai aug, vai tikai dilst, tad funkciju sauc par *monotonu*, pretējā gadjīumā par *svārstīgu*. Kādā intervallā, piemēram: $x_6\ x_{12}$, svārstīgu funkciju var uzskatīt kā monotonu funkciju, ja šo intervallu uzskata kā sastāvošu no vairākiem maziem intervalliem: $x_6\ x_8$; $x_8\ x_{11}$; $x_{11}\ x_{12}$, kuŗos tā tikai aug vai dilst. Tāpēc no funkcijas augšanas un dilšanas viedokļa var runāt un runāsim tikai par monotonām funkcijām.

Apskatīsim augošas un dilstošas funkcijas atvasinājuma īpašības ģeometriski. Atvasinājuma nozīme ir vienlīdzīga tangentes leņķa koeficientam. Tāpēc augošas funkcijas attēlotājas līknes tangente un pozitīvā x ass veido šaurleņķi kā zīmējumā punktā x_3, vai atsevišķos gadījumos ir parallēla abscisu asij kā, piemēram, punktā x_7. Dilstošas funkcijas attēlotājas līknes tangente un pozitīvā x ass veido platleņķi kā punktā x_{10}, vai atsevišķos gadījumos ir parallēla abscisu asij kā, piemēram, punktā x_9.

Iepriekšējie atzinumi rāda augošu un dilstošu funkciju atvasinājumu īpašības .Rodas jautājums, vai nevar arī pēc funkcijas atvasinājuma zīmes spriest par tās raksturu dotajā punktā.

Pieņemsim, ka dotās funkcijas atvasinājums $f'(x) > 0$. Zinām, ka $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$ jeb $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + \varepsilon$, kur ε ir bezgalīgi mazs lielums. Tāpēc $|\varepsilon| < |f'(x)|$. Ja tas tā, tad pēdējās vienlīdzības labās puses zīmi nosaka $f'(x)$. Tā kā $f'(x) > 0$, tad arī kreisājai pusei ir jābūt lielākai par nulli: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} > 0$, kas norāda, ka funkcijas pieaugumam un argumenta pieaugumam ir vienādas zīmes. Tas norāda, ka argumentam augot, aug arī funkcija. Tā tad, ja $f'(x) > 0$, tad pie dotās argumenta nozīmes funkcija ir augoša. Līdzīgā kārtā spriezdami, dabūjam, ka funkcija dilst pie dotās argumenta nozīmes, ja $f'(x) < 0$. Tas ģeometriski nozīmē, ka punktos, kur tangente un pozitīvā x ass veido šaurleņķi, funkcija aug, bet kur platleņķi — dilst. Vēl apskatāms gadījums, kur $f'(x) = 0$. Šai gadījumā tangente ir parallēla x asij un pastāv 4 iespējas. Līkne var tuvoties pieskaršanās punktam no kreisās puses vai nu ceļoties vai krītoties. Tas pats var būt arī pa labi no pieskaršanās punkta. Kombinējot šās iespējas, dabūjam 4 gadījumus, kādi ir punktos x_7, x_3, x_4 un x_6. Pirmajā gadījumā funkcija aug, otrā — dilst, trešajā un ceturtajā gadījumā funkcija ne aug, ne dilst, bet pāriet no augošas dilstošā un otrādi — no dilstošas augošā.

52. §. Funkcijas maksims un minims.

Ja funkcijas atvasinājums kādai argumenta nozīmei ir vienlīdzīgs nullei, tad kā iepriekšējā paragrafā redzējām, funkcija pie šīs nozīmes var augt, dilt, pāriet no augošas dilstošā un otrādi, no dilstošās augošā. Apskatīsim tuvāk divi pēdējos gadījumus. Funkcijai pārejot no augošas dilstošā, tās attēlotāja līkne tuvojas pieskaršanās punktam no labās un kreisās puses paceldamās kā, piemēram (17. zīm.), punktā x_4. Tā tad šai punktā ordināta ir lielāka par pārējām pēc patikas tuvām kaimiņa ordinātām. Analitiski tas nozīmē, ka apskatāmā funkcijas nozīme ir lielāka par tām funkcijas nozīmēm, kuŗu argumenti pēc patikas maz atšķiŗas no apskatāmās argumenta nozīmes. Šo funkcijas nozīmi sauc par funkcijas maksimu pie dotās argumenta nozīmes jeb par maksimu dotajā punktā x. Tā tad

funkcijas maksims ir funkcijas nozīme, kas ir lielāka par kaut kuŗu pēc patikas tuvu kaimiņa nozīmi.

Funkcijai pārejot no dilstošas augošā, tās attēlotājas līkne tuvojas pieskaršanās punktam no labās un kreisās puses krizdamās kā, piemēram (17. zīm.), punktā x_6. Tā tad šai punktā ordināta ir mazāka par pārējām, tuvumā esošām, ordinātām. Analitiski tas nozīmē, ka apskatāmā funkcijas nozīme ir mazāka par tām nozīmēm, kuŗu argumenti pēc patikas maz atšķiŗas no apskatāmās argumenta nozīmes. Šo funkcijas nozīmi sauc par funkcijas minimu pie dotās argumenta nozīmes jeb dotajā punktā x. Tā tad

funkcijas minims ir funkcijas nozīme, kas ir mazāka par kaut kuŗu pēc patikas tuvu kaimiņa nozīmi.

Maksimu un minimu apzīmē ar vienu vārdu — funkcijas ekstrēms.

Noskaidrosim, kā atrast funkcijas maksimu un minimu. Redzējām, ka funkcijas ekstrēms var būt tais punktos, kur atvasinājums ir vienlīdzīgs nullei. Bet ne visos punktos, kur atvasinājums nulle, funkcijai ir ekstrēms. Tā var arī dotajā punktā augt vai dilt. Funkcijai ir maksims, ja tā pāriet apskatāmā punktā no augošas dilstošā un minims, ja tā pāriet no dilstošas augošā. Kamēr funkcija aug, tās atvasinājums ir pozitīvs, — kamēr dilst — negātīvs. Tā tad funkcijai ir ekstrēms tais punktos, kur atvasinājums, mainot zīmi no plūs uz minus, vai arī no minus uz plūs, pieņem nozīmi nulli. Ja, turpretim, kādā punktā atvasinājuma nozīme ir vienlīdzīga nullei, bet tas nemaina zīmi, tad funkcijai šai punktā ekstrēma nav, bet tā aug, vai arī dilst.

No šā atzinuma dabūjam funkcijas maksima un minima atrašanas paņēmienu:

funkcijai ir maksims, kur $f'(x) = o$ un $f'(x)$ maina zīmi no $+$ uz $-$; funkcijai $f(x)$ ir minims, kur $f'(x) = o$ un $f'(x)$ maina zīmi no $-$ uz $+$

Piemērs.

$f(x)=(x-1)^2(x+1)^3$, jāatrod ekstrēmi.

$f'(x)=2(x-1)(x+1)^3+3(x-1)^2(x+1)^2=(x-1)^2(x+1)^2(5x-1)$;

$(x-1)(x+1)^2(5x-1)=0$; $x_1=1$; $x_2=-1$; $x_3=\frac{1}{5}$;

1) ņemam pirmo kritisko nozīmi $x_1=1$ un to apmaināmm ar $x \gtreqless 1$:

$x<1$, $f'(x)=(-)(+)^2(+)=-$,

$x>1$, $f'(x)=(+)(+)^2(+)=+$, tā tad pie $x=1$ ir minims:

$f(1)=0$.

2) $x_2=-1$,

$x<-1$, $f'(x)=(-)(-1)^2(-)=+$

$x>-1$, $f'(x)=(-)(+)^2(-)=+$, tā tad pie $x=-1$ ekstrēma nav.

3) $x_3=\frac{1}{5}$

$x<\frac{1}{5}$ $f'(x)=(-)(+)^2(-)=+$

$x>\frac{1}{5}$ $f'(x)=(-)(+)^2(+)=-$, tā tad pie $x=\frac{1}{5}$ ir maksims:

$f(\frac{1}{5})=1{,}10592$.

Apskatītais funkcijas ekstrēma noteikšanas paņēmiens dod vēl otru, praksē vairāk lietojamu paņēmienu. Tiešām, funkcijai ir maksims, kur tās atvasinājums, iedams caur nulli, maina zīmi no plūs uz minus. Tas nozīmē, ka atvasinājums dilst. Bet ja tas dilst, tad tā atvasinājums jeb dotās funkcijas otrs atvasinājums ir negatīvs. Tā tad

f (x) ir maksims, kur $f'(x)=0$ un $f''(x)<0$.

Analogā ceļā spriezdami, dabūjam, ka

f (x) ir minims, kur $f'(x)=0$ un $f''(x)>0$.

Piemērs. Noteikt funkcijas x^3-3x^2-9x+5 ekstrēmus.

1. $f'(x)=3x^2-6x-9$; 2. $3x^2-6x-9=0$; $x_1=-1$ un $x_2=3$.
3. $f''(x)=6x-6$; 4. $f''(-1)=-12$ un $f(-1)=10$ — maksims.
$f''(3)=+12$ un $f(3)=-22$ — minims.

Redzējām, ka funkcijas ekstrēms ir tais punktos, kur atvasinājums maina zīmi no plūs uz minus, vai arī otrādi. Pie nepārtraukta atvasinājuma tas var būt tikai tad, ja tas pieņem nozīmi nulli. Tā tas arī parasti ir. Tomēr atzīmējams gadījums, kur atvasinājums ir pārtraukts apskatāmā punktā un maina zīmi, izejot caur bezgalību, t. i. $f'(x)=\infty$. Tas nozīmē, ka tā apgrieztais lielums $\frac{1}{f'(x)}=0$ un ka šai punktā tangente ir perpendikulāra x asij. Tāds gadījums ir zīmējumā, piemēram punktos x_8 un x_{11}. Pirmajā gadījumā atvasinājums maina zīmi no $+$ uz $-$ un ir maksims; otrā no $-$ uz $+$ un ir minims. Var būt arī tāds gadījums kā punktā x_2, kur atvasinājums ir ∞, bet zīmi nemaina un tāpēc tur ekstrēma nav. Lai atrastu punktus, kur $f'(x) = \infty$ un kur funkcijai ir ekstrēms, jāatrisina nolīdzinājums $\frac{1}{f'(x)} = 0$ un jā- izpēta, vai $f'(x)$ maina zīmi un ja maina, tad kā.

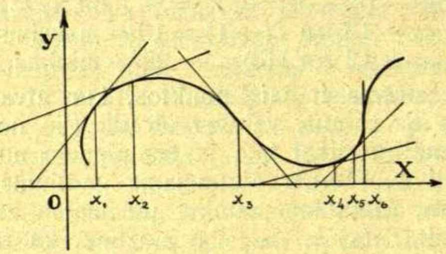
Piemērs. $f(x) = a - b(x-c)^{\frac{2}{3}}$; jāatrod ekstrēms.

$f'(x) = -\frac{2b}{3(x-c)^{\frac{1}{3}}}$ Kritiskā nozīme ir $x = c$, jo tur $f'(x) = \infty$, bet $f(x)$ nav bezgalība un tāpēc jāizpēta $f'(x)$ pie $x = c$.

Ja $x < c$, tad $f'(x) = +$; ja $x > c$, tad $f'(x) = -$. Tā tad $f(c)$ ir maksims.

Nav jādomā, ka funkcijas maksims ir kādā intervallā vislielākā funkcijas nozīme un minims vismazākā. Kādā intervallā, piemēram, x_1 x_{16} var būt pat vairāki maksimi un minimi un daži maksimi, kā x_{15}, ir pat mazāki par dažiem minimiem. Atzīmējams, ka līdz šim, runājot par funkcijas ekstrēmu, apskatījām kāda intervalla iekšējos punktus, bet intervalla galus ne. Funkcijas nozīmes, kas atbilst argumenta nozīmēm intervalla galos, sauksim par funkcijas robežnozīmēm. Funkcijas robežnozīmes arī var būt maksimi un minimi kā, piemēram: intervallā x_1 x_8, lai gan šais punktos nemaz tangentes nav parallēlas x asij un tā tad atvasinājuma nozīmes nav vienlīdzīgas nullei. Lai atrastu kādā intervallā vislielāko jeb maksimālo un vismazāko jeb minimālo funkcijas nozīmi, jāatrod visi ekstrēmi un robežnozīmes un savā starpā jāsalīdzina.

53. Līknes konkavitāte un konveksitāte. Pārliekuma punkts.



18. zīm.

Ņemsim funkciju $y = f(x)$, kā grafika ir zīmējumā attēlotā līkne. Līknes punktus apzīmēsim vienkārši tāpat kā to abscisas. Punktā x_1, kur tā kaimiņa punkti ir zem tangentes, līkne ir izliekta uz augšu jeb uz augšu konveksa un, piemēram, punktā x_4, kā kaimiņa punkti ir virs tangentes, līkne ir ieliekta uz augšu jeb konkava uz augšu. Lai noteiktu, vai punktā līkne ir uz augšu ieliekta vai izliekta, tad iziesim no atzinumiem:

1) leņķim augot, aug tā tangents, un 2) augošas funkcijas atvasinājums $f'(x) \geq 0$, bet dilstošas $f'(x) \leq 0$.

Pieņemsim, ka punkts kustas pa līkni tā, ka tā abscisa x aug. Ja līkne ir uz augšu ieliekta, tad ar x augšanu aug leņķis α, ko veido tangente un pozitīvā x ass. Bet ja α aug, tad arī $\operatorname{tg}\alpha$ aug, un aug arī $f'(x)$. Ja $f'(x)$ ir augoša funkcija, tad tās atvasinājums $f''(x)>0$. Tā tad, ja līkne ir uz augšu ieliekta, tad $f''(x)>0$.

Ja līkne ir izliekta uz augšu kā, piemēram, punktā x_1, tad ar x augšanu, α un $\operatorname{tg}\alpha$ dilst. Tāpēc $f'(x)$ šai punktā ir dilstoša funkcija un tās atvasinājums $f''(x)<0$. Tā tad, ja līkne ir izliekta uz augšu, tad $f''(x)<0$.

Var būt arī punkti, kuŗos līkne pāriet no izliektās ieliektajā, piemēram, punktā x_3, un otrādi, no ieliektas izliektajā kā, piemēram, punktā x_6. Šādus punktus sauc par pārliekuma jeb infleksijas punktiem. Ja līkne ir ieliekta un pēc tam izliekta uz augšu, tad $f''(x)$ maina zīmi no $+$ uz $-$ un ja otrādi, tad no $-$ uz $+$. Pie nepārtraukta otra atvasinājuma tas var būt tikai tad, ja $f''(x)=0$. Tā tad

infleksijas punkti meklējami nolīdzinājuma $f''(x)=0$ saknēs un tikai pie tām, pie kuŗām tas maina zīmi.

Piemērs. Dots parabolas nolīdzinājums $y^2=2px$, un jāatrod, kur parabola ir izliekta un kur ieliekta.

$$y'=\frac{p}{y};\; y''=-\frac{p^2}{y^3};\text{ ja } y>0,\text{ tad } y''<0$$

un parabola ir izliekta; ja $y<0$, tad $y''>0$ un parabola ir ieliekta.

Ja pēc dotā nolīdzinājuma jāatrod līknes forma, tad atrod, kur tā krusto koordinātu asis, kur tai ekstrēmi un infleksijas punkti un nosaka konkavitāti un konkveksitāti.

54. §. Uzdevumi.

Atrast sekojošo funkciju maksimus un minimus:

1. $f(x)=2x^3-9x^2+12x$, atb. maks. pie $x=1$ un minim. pie $x=2$.
2. $f(x)=3x^3-9x^2-27+30$, atb. maks. pie $x=-1$, $f(-1)=45$; min. pie $x=3$, $f(3)=-51$.
3. $f(x)=2x^3-21x^2+36x-2$, atb. maks. pie $x=+1$, $f(1)=-3$; min. pie $x=6$, $f(6)=-128$.
4. $f(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$, atb. maks. pie $x=1$, $f(1)=\frac{7}{3}$; min. pie $x=3$; $f(3)=1$.
5. $f(x)=2x^3-15x^2+36x+10$ atb. maks. pie $x=2$, $f(2)=38$; min. pie $x=3$; $f(3)=37$.
6. $f(x)=x^3-9x^2+15x-3$, atb. maks. pie $x=1$, $f(1)=4$; min. pie $x=5$; $f(5)=-28$.

7. $f(x)=x^5-5x^4+5x^3+1$, atb. maks. pie $x=1$, $f(1)=2$; min. pie $x=3$; $f(3)=-26$.

8. $f(x)=3x^5-125x^3+2160x$, atb. maks. pie $x=-4$ un 3; min. pie $x=-3$ un $+4$.

9. $f(x)=(x-3)^2(x-2)$, atb. maks. pie $x=\frac{7}{3}$, $f\left(\frac{7}{3}\right)=\frac{4}{27}$; min. pie $x=3$, $f(3)=0$.

10. $f(x)=(x-1)^3(x-2)^3$, atb. maks. pie $x=\frac{8}{5}$; $x=2$ min.

11. $f(x)=(x-2)^5(2x+1)^4$ atb. maks. pie $x=-\frac{1}{2}$; min. pie $x=\frac{11}{18}$.

12. $f(x)=(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-5)^2$, atb. maks. pie $x=\frac{1}{2}$; min. pie $x=-1$ un 5.

13. $f(x)=x(x-1)^2(x+1)^3$, atb. maks. pie $x=\frac{1}{2}$ min. pie $x=1$ un $-\frac{1}{3}$.

14. $f(x)=x(a+x)^2(a-x)^3$, $a>0$, atb. maks. pie $x=-\frac{a}{2}$; min. pie $x=-a$ un $\frac{a}{3}$.

15. $f(x)=2x+\frac{2}{x}$, atb. maks. pie $x=-1$; min. pie $x=+1$.

16. $f(x)=\frac{x^2-7x+6}{x-10}$, atb. maks. pie $x=4$; min. pie $x=16$.

17. $f(x)=\frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$ atb. maks. pie $x=\frac{1}{2}$.

18. $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$; atb. maks. pie $x=-\sqrt{2}$; min. pie $x=+\sqrt{2}$.

19. $f(x)=\frac{10}{4x^3-9x^2+6x}$, atb. maks. pie $x=1$, $f(1)=10$ min. pie $x=\frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=8$.

20. $f(x)=\sqrt[3]{2x^3+3x^2-36x+17}$, atb. maks. pie $x=-3$, $f(-3)=\sqrt[3]{98}$ min. pie $x=2$, $f(2)=-3$.

21. $f(x)=\frac{x}{\ln x}$, atb. min. pie $x=e$.

22. $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, atb. maks. pie $x=e$.

23. $f(x)=ae^{kx}+be^{-kx}$, $(a>0, b>0, k>0)$, min. pie $x=\frac{\ln b-\ln a}{2k}$, $f\left(\frac{\ln b-\ln a}{2k}\right)=2\sqrt{ab}$.

24. $f(x)=\frac{x^4}{e^x}$, atb. maks. pie $x=4$; min. pie $x=0$.

25. $f(x)=xe^x$, atb. min. pie $x=-1$.

26. $f(x)=\frac{x^2}{a^x}$, atb. maks. pie $x=\frac{2}{\ln a}$; min. pie $x=0$.

27. $f(x)=bc\sin x$, atb. maks. pie $x=\frac{\pi}{2}$ $(x<\pi)$

28. $f(x)=x^2-2ax+b^2$, atb. min. pie $x=a$, $f(a)=b^2-a^2$.

29. $f(x)=a+(x-c)^4$, atb. min. pie $x=c$, $f(c)=a$.

30. $f(x)=x^2(a-x)^3$, $a>o$, maks. pie $x=\frac{2a}{5}$; min. pie $x=0$.

31. $f(x)=\sin x$, maks. pie $x=\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi$; min. pie $x=\left(2n+\frac{3}{2}\right)\pi$.

32. $f(x)=\cos x+\sin x$, $(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$, maks. pie $x=\frac{\pi}{4}$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$;
min. pie $x=\frac{5\pi}{4}$, $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$.

33. $f(x)=\sin 2x-x$, $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$, maks. pie $x=\frac{\pi}{6}$, min. pie $x=-\frac{\pi}{6}$

34. $f(x)=2\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^2x$ $\left(0\leqslant x<\frac{\pi}{2}\right)$, maks. pie $x=\frac{\pi}{2}$.

35. $f(x)=x\arcsin x+\sqrt{1-2^2}$, min pie $x=0$.

36. $f(x)=(x-1)\operatorname{arctg}(x-1)-\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+2)$, min. pie $x=1$.

37. Slīpa sviediena tālums aprēķināms no formulas: $R=\frac{v_1^2\sin 2\varphi}{g}$, kur v_1 ir sākuma ātrums un φ sviediena leņķis. Atrast sviediena leņķi, kas pie dotā sākuma ātruma dotu maksimālo sviediena tālumu (atb. $\varphi=45^0$).

38. Slīpa sviediena ilgums aprēķināms no formulas: $T=\frac{2\,v_1\sin\varphi}{g}$. Atrast sviediena leņķi, lai būtu maksimālais sviediena ilgums (atb. $\varphi=90^0$).

39. Lodes kustības ilgums pa slīpumu aprēķināms no formulas: $T=2\sqrt{\frac{a}{g\sin 2\varphi}}$. Atrast φ lai būtu minimālais T. (Atb. $\varphi=45^0$.)

40. Elektriskā elementa enerģija aprēķināma no formulas: $P=\frac{E^2R}{(r+R)^2}$, kur E ir pastāvīgais elektrodzinējspēks, r ir pastāvīgā iekšējā pretestība un R — ārējā pretestība. Pierādīt, ka P ir maksims, ja $R=r$.

41. Elektriskā strāva, tecēdama pa riņķi ar radiju a, darbojas uz mazu magnētu, kā ass sakrīt ar riņķa asi, ar spēku, proporcionālu $\frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{5}{2}}}$, kur x ir magnēta attālums no riņķa. Pierādīt, ka spēkam ir maksims, ja $x=\frac{a}{2}$.

42. Sadalīt skaitli a divi daļās, lai to reizinājums būtu maksimālais. (Atb. katra daļa ir $\frac{a}{2}$).

43. Sadalīt 10 divi daļās, lai to kvadrātu summa būtu maksimālā. (Atb. katra daļa ir 5.)

44. Sadalīt 10 divi daļās, lai vienas daļas dubultojums un otras daļas kvadrāts dotu minimālo summu. (Atb. 9 un 1.)

45. Atrast skaitli, kas maksimāli pārsniegtu savu kvadrātu. (Atb. $\frac{1}{2}$.)

46. Kāds skaitlis, saskaitīts ar tā apgriezto skaitli, dod minimālo summu. (Atb. 1.)

47. Pierādīt, ka no visiem taisnstūŗiem, ar doto perimetru, vislielākais laukums ir kvadrātam.

48. Taisnstūŗa veida zemes gabals, kā platība ir 216 m^2, jāiežogo un jāpārdala ar sētu uz pusēm, kas iet paralleli vienai malai. Kā izvēleties malu gaŗumus, lai žogam patērētu minimālo materiālu. (Atb. 12; 18.)

49. Taisnstūŗa veida zemes gabals ar laukumu L ir jāiežogo. Kā izvēlēties gabala izmērījumus, lai žoga materiāls būtu minimālais, ja vienā malā būtu grāvis un žogs tur nebūtu jātaisa. (Atb. grāvim parallelā mala ir divreiz gaŗāka nekā otra mala.)

50. Rezervuārs, kā dibins ir kvadrāts, ir jāapcinko no iekšpuses. Kādiem ir jābūt tā izmērījumiem, lai izlietotu vismazāko materiālu, ja rezervuārs ir bez vāka un tilpums ir 32 m^3. (Atb. augstums ir 2 m un kvadr. mala 4 m.)

51. Rezervuāra tilpums ir T. Tā veids ir tāds pats kā iepriekšējā uzdevumā. Kādiem ir jābūt tā izmērījumiem, lai pie dotā tilpuma būtu vismazākā virsa. (Atb. dibina mala ir divi reizes gaŗāka par augstumu.)

52. Ja tāda paša veida rezervuāra iekšējā virsa ir 48 m^2, tad kāds ir tā maksimālais tilpums. (Atb. 32 m^3.)

53. Jāpagatavo cilindriska kastīte bez vāka. Atrast kastītes izmērījumus, lai tās pagatavošanai izlietotu vismazāko materiāla daudzumu, ja tās tilpums ir T. (Atb. pamata radijs ir $\sqrt[3]{\frac{T}{\pi}}$.

54. Pagatavot no skārda 30×14 cm^2 kastīti bez vāka ar vislielāko tilpumu, izgriežot no skārda stūŗiem vienlīdzīgus kvadrātus un uzlocot skārdu par sāniem. (Atb. izgriez. 3×3 cm.)

55. No skārda kvadrāta, kā mala ir a cm, jāpagatavo bezvāka kastīte, ar vislielāko tilpumu, izgriežot no skārda stūŗiem vienlīdzīgus kvadrātus un uzlocot skārdu kā sānus. (Atb. izgriez. ir $\frac{a}{6} \times \frac{a}{6}$).

56. Baļķa izturība, kā šķērsgriezums ir taisnstūris, ir tieši proporcionāla platumam un augstuma kvadrātam. Kādi ir baļķa šķērsgriezuma izmērījumi, lai baļķis būtu visizturīgākais, kādu vien var pagatavot no apaļa koka, kā diametrs ir d. (Atb. augstums ir $\sqrt{\frac{2}{3}}$. d un platums ir $\sqrt{\frac{1}{3}}$ d.)

57. Loga forma ir taisnstūris ar pusriņķi augšā. Dots ir loga perimetrs. Kādi loga izmērījumi, lai logs izlaistu visvairāk gaismas. (Atb. riņķa radijs ir vienlīdzīgs taisnstūŗa augstumam.)

58. Pieņemot, ka stieņa izturība, kā šķērsgriezums ir taisnstūris, ir tieši proporcionāla platumam un augstuma kubam. Atrast stieņa platumu, lai stienis būtu visizturīgākais, kādu vien var pagatavot no apaļa koka, kā diametrs ir 16 cm. (Atb. plat. ir 8 cm.)

59. Pierādīt, ka no visiem taisnstūŗiem, kādus var ievilkt dotajā riņķī, vislielākais perimetrs ir kvadrātam.

60. Atrast taisnstūri ar vislielāko laukumu, kā hipotenūza ir c. (Atb. katras katetes garums ir $\frac{c\sqrt{2}}{2}$).

61. Pierādīt, ka no visiem taisnstūŗiem, kādus var ievilkt dotajā riņķī ar radiju a, vislielākais laukums ir kvadrātam. (Atb. mala ir $a\sqrt{2}$).

62. Ellīpsē $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ierakstīt taisnstūri ar vislielāko laukumu. (Atb. $L = 4xy$; $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ un $y = \frac{b\sqrt{2}}{2}$).

63. Ellīpsē $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ierakstīt taisnstūri ar vislielāko perimetru. (Atb. $p = 4x + 4y$; $x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$).

64. Taisnleņķa trīsstūŗa pamats ir b un augstums a. Atrast ievilktā taisnstūŗa augstumu, kā laukums ir maksimālais. (Atb. $h = \frac{a}{2}$)

65. Trīsstūrī ABC, kā pamats $AB = c$ un augstums h_c, jāievelk taisnstūris ar maksimālo laukumu. Taisnstūŗa viena mala atrodas uz AB. (Atb. taisn. augstums $h = \frac{h_c}{2}$ un $L = \frac{ch_c}{4}$).

66. Atrast lodē ievilkta taisna riņķa cilindra augstumu, lai cilindrim būtu maksimālais tilpums. Lodes radijs ir r. (Atb. $h = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$).

67. Atrast lodē ievilkta taisna riņķa cilindra augstumu, lai cilindrim būtu maksimālā sānu virsa, ja lodes radijs ir r. (Atb. $h = r\sqrt{2}$)

68. Pierādīt, ka no visiem taisna riņķa cilindriem ar doto tilpumu T, vislielākā virsa ir tam, kā aksiālšķēlums ir kvadrāts.

69. Atrast ap doto lodi apvilkta taisna riņķa kōna augstumu, lai tā tilpums būtu minimālais. (Atb. $h = 4r$; tilpums ir divi lodes tilp. vienlīdz.)

70. Jāuzceļ telts regulāras četrstūŗa piramidas veidā. Aprēķināt telts augstuma attiecību pret pamata malu, lai pie dotās telts sānu virsas, tai būtu maksimālais tilpums. (Atb. $\frac{\sqrt{2}}{2}$).

71. Zvejlaiva atrodas 9 km no krasta tuvākā punkta. No šī punkta pa krastu 15 km attālumā atrodas zvejnieku nometne. Vienu zvejnieku izsūtīja no zvejlaivas mazā laiviņā uz nometni ar noteikumu, ka tas var piestāt ar laiviņu krastā un sasniegt nometni arī kājām ejot, bet lai nometni sasniegtu visīsākā laikā. Aprēķinot, kur zejniekam izkāpt krastā, lai uzdevumu izpildītu, ja kājām ejot tā ātrums ir 5 km stundā, bet laiviņā 4 km. (Atb. 3 km no nometnes.)

72. Glezna ir 1,4 m augsta un pakārta pie sienas tā, ka tās apakšējā mala ir 1,8 m virs novērotāja acs. Kādā attālumā no sienas ir jāstāv gleznu aplūkojot, lai būtu vislabākie redzēšanas apstākļi, t. i., lai redzes leņķis būtu maksimālais. (Atb. 2,4 m.)

73. Uz riņķa $x^2 + y^2 = a^2$ atrast punktu, kā attālumu kvadrātu summa līdz punktiem (2a; o) un (o; 2a) būtu minimālā. (Atb. $\frac{b}{6}$; $\frac{b}{6}$)

74. Uz parabolas $y^2=2px$ ass dots punkts kā attālums no virsotnes ir a. Atrast dotajam punktam tuvākā parabolas punkta abscisu. (Atb. $x = a - p$.)

75. Ortogonālā koordinātu sistēmā dots punkts $(x_0; y_0)$ pirmā kvadrantā. Vilkt caur šo punktu taisni tā, lai tā un koordinātu asu gabali ierobežotu trīsstūri ar minimālo laukumu. (Atb. asu gabali ir $2x_0$ un $2y_0$).

76. No 64 sērkociņiem izveidot taisnstūri ar maksimālo laukumu. (Atb. $L = x(32-x)$; $x=16$.)

77. Atrast parabolas $y=x^2$ konkavitāti un konveksitāti.

78. Atrast līknes $y=x^3$ konkavitāti un konveksitāti. (Atb. pa labi no (0; 0) punkta līkne ir ieliekta uz augšu, bet pa kreisi uz leju.)

79. Atrast līknes $y = \sin x$ pārliekuma punktus. (Atb. pie $x=n\pi$).

80. Atrast līknes $y = \operatorname{tg} x$ pārliekuma punktus. (Atb. pie $x=n\pi$).

VII. nodaļa.

Nenoteiktas izteiksmes.

Dažas nenoteiktas izteiksmes kā, piemēram, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$ un $\infty \pm \infty$ jau pazīstam. Zinām arī, ka par nenoteiktās izteiksmes f(x) īsto vērtību pie argumenta x nozīmes a pieņem šīs izteiksmes robežu:

$$[f(x)]_{x=a} = \lim_{x \to a} f(x).$$

Apskatījām arī pieminēto nenoteikto izteiksmju īsto vērtību aprēķināšanu ar robežlielumu palīdzību. Šai nodaļā iepazīsimies ar citu nenoteikto izteiksmju īsto vērtību aprēķināšanas paņēmienu, uz diferenciālrēķiniem pamatotu. Atzīmējams, ka nenoteiktas izteiksmes nekad neparādās patstāvīgi, bet parādās kā speciāli gadījumi mainīgo lielumu izteiksmēs pie atsevišķām argumentu nozīmēm. Šai nodaļā apskatīsim nenoteiktas izteiksmes, kas pie kādas atsevišķas argumenta nozīmes pieņem kādu sekojošu formu: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0 un 1^∞.

55. §. Nenoteikta izteiksme $\frac{0}{0}$.

Ņemsim funkciju f(x) divi funkciju $\varphi(x)$ un $\psi(x)$ dalījuma veidā:

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

Ja pie kādas argumenta nozīmes $x=a$ reizē $\varphi(a)=0$ un $\psi(a)=0$, tad dabūjam nenoteiktu izteiksmi $f(a) = \frac{0}{0}$. Funkcijas īstā vērtība ir $\lim\limits_{x \to a} f(x)$. Tās atrašanai dosim argumenta nozīmei a pieaugumu h, tad $f(a+h) = \frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)}$. Tā kā $\varphi(a) = 0$ un $\psi(a) = 0$, tad šos lielumus varam atņemt no skaitītāja un saucēja:

$$f(a+h) = \frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{\psi(a+h) - \psi(a)}.$$

Dalīsim daļas skaitītāju un saucēju ar h:

$$f(a+h) = \frac{\dfrac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{h}}{\dfrac{\psi(a+h) - \psi(a)}{h}}.$$

Pārejot uz robežu, ja $h \to 0$, dabūjam šādu vienlīdzību:

$$\lim_{h \to 0} f(a+h) = \frac{\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{h}}{\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\psi(a+h) - \psi(a)}{h}} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}.$$

Bet $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ (skat. 19. §.).

Tā tad

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)} \text{ jeb } f(a) = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}.$$

Izsakot pēdējo formulu vārdos, dabūjam Lopitāla (l'Hospital) likumu:

ja divu funkciju dalījums $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ pie $x = a$ pārvēršas nenoteiktā izteiksmē $\frac{0}{0}$ tad tās īsto vērtību, ja $x = a$, atrod, diferencējot atsevišķi skaitītāju un saucēju un dabūtā dalījumā $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ x vietā ieliekot a.

Var būt gadījumi, kur arī $\frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)} = \frac{0}{0}$. Tad f(x) īstās nozīmes atrašanai jāpiemēro Lopitāla likums vēl reiz daļai $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$.

Var būt arī gadījumi, kur Lopitāla likums jāpiemēro nenoteiktās izteiksmes f(x) īstās vērtības aprēķināšanai vairākas reizes, līdz nonākam pie $\frac{\varphi^{(n)}(a)}{\psi^{(n)}(a)} \neq \frac{0}{0}$. Lopitāla likums izlietojams nenoteiktas izteiksmes $\frac{0}{0}$ īstās vērtības atrašanai tikai tādā gadījumā, ja $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ pie $x \rightarrow a$ eksistē robeža.

Piemēri.

1) $$\left[\frac{x^n - a^n}{x - a}\right]_{x=a} = \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \left[\frac{n\, x^{n-1}}{1}\right]_{x=a} = n\, a^{n-1}.$$

2) $$\left[\frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}\right]_{x=1} = \left[\frac{3x^2 - 3}{3x^2 - 2x - 1}\right]_{x=1} = \frac{3-3}{3-2-1} = \frac{0}{0}$$

Redzam, ka jāpiemēro vēl reiz Lopitāla likums: $\left[\frac{6x}{6x-2}\right]_{x=1} = \frac{3}{2}$.

Tā tad īstā vērtība, ja $x = a$, ir $\frac{3}{2}$.

56. §. Nenoteikta izteiksme $\frac{\infty}{\infty}$.

Ja $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ un $\varphi(a) = \psi(a) = \infty$ tad dabūjam nenoteiktu izteiksmi $f(a) = \frac{\infty}{\infty}$. Tās īstās vērtības aprēķķināšanai pārveidosim to šādi: $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\frac{1}{\psi(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}}$. Tagad $f(a) = \frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$ un tāpēc še varam piemērot Lopitāla likumu:

$$f(a) = \left[\frac{\left(\frac{1}{\psi(x)}\right)'}{\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)'}\right]_{x=a} = \left[\frac{-\frac{1}{\psi^2(x)} \cdot \psi'(x)}{-\frac{1}{\varphi^2(x)}\varphi'(x)}\right]_{x=a} = \left[\left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^2 \frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x=a} =$$

$$= [f(a)]^2 \cdot \left[\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x=a}.$$ Tā tad $f(a) = [f(a)]^2 \cdot \left[\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x=a}$.

Saīsinot ar f(a), dabūjam

$$1 = f(a) \cdot \left[\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x=a} \text{ jeb } f(a) = \left[\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}\right]_{x=a} \text{ jeb } f(a) = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}.$$

Redzam, ka nenoteiktās izteiksmes $\frac{\infty}{\infty}$ īsto vērtību atrod pēc Lopitāla likuma.

Piemēri.

1) $\left[\frac{x}{e^x}\right]_{x=\infty}=\left[\frac{1}{e^x}\right]_{x=\infty}=\frac{1}{\infty}=0.$

2) $\left[\frac{\ln x}{x}\right]_{x=\infty}=\left[\frac{\frac{1}{x}}{1}\right]_{x=\infty}=\frac{\frac{1}{\infty}}{1}=\frac{0}{1}=0.$

3) $\left[\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}\right]_{x=0}=\left[\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}\right]_{x=0}=-\left[\frac{\sin^2 x}{x}\right]_{x=0}=$

$$=-\left[\frac{2\sin x\cdot\cos x}{1}\right]_{x=0}=0.$$

57. §. Nenoteiktas izteiksmes $0.\infty$ un $\infty-\infty$.

1) Ja $f(x)=\varphi(x).\psi(x)$ un $\varphi(a)=0$, bet $\psi(a)=\infty$, tad dabūjam nenoteiktu izteiksmi $f(a)=0.\infty$. Atradīsim tās īsto vērtību, ja $x=a$. Tai nolūkā to pārveidosim: $f(x)=\varphi(x).\psi(x)=$ $=\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}}$. Tagad $f(a)=\frac{0}{0}$ un varam piemērot Lopitāla likumu. Varētu atrast nenoteiktas izteiksmes $0.\infty$ īsto vērtību, iepriekš to pievedot pie formas $\frac{\infty}{\infty}$ un tad piemērot Lopitāla likumu.

Piemēri.

1) $(x\operatorname{ctg} x)_{x=0}=\left(\frac{x}{\operatorname{tg} x}\right)_{x=0}=\left(\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}}\right)_{x=0}=1.$

2) $[(x-a)\ln^2(x-a)]_{x=a}=0\cdot\infty$; $[(x-a)\ln^2(x-a)]_{x=a}=$

$$=\left[\frac{\ln^2(x-a)}{(x-a)^{-1}}\right]_{x=a}=\frac{\infty}{\infty};\ \left[\frac{\ln^2(x-a)}{(x-a)^{-1}}\right]_{x=a}=\left[\frac{2\ln(x-a)\frac{1}{x-a}}{-(x-a)^{-2}}\right]_{x=a}=$$

$$=\left[-\frac{2\ln(x-a)}{(x-a)^{-1}}\right]_{x=a}=\frac{\infty}{\infty};\ \left[-\frac{2\ln(x-a)}{(x-a)^{-1}}\right]_{x=a}=$$

$$=\left[\frac{-2(x-a)^{-1}}{-1(x-a)^{-2}}\right]_{x=a}=[2(x-a)]_{x=a}=0.$$

2) Ja $f(x)=\varphi(x)-\psi(x)$ un $\varphi(a)=\psi(a)=\infty$, tad dabūjam nenoteiktu izteiksmi $\infty-\infty$. Atradīsim tās īsto vērtību, to pārveidojot:

$$f(x)=\frac{1}{\frac{1}{\varphi(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{\psi(x)}}=\frac{\frac{1}{\psi(x)}-\frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}\cdot\frac{1}{\psi(x)}}.$$

Tagad, ja $x=a$, skaitītājs un saucējs ir 0 un tāpēc varam piemērot Lopitāla likumu.

Piemēri.

$$1)\quad\left[\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right]_{x=1}=\infty-\infty;\quad\left[\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right]_{x=1}=$$

$$=\left[\frac{-x+1}{x^2-1}\right]_{x=1}=\frac{0}{0};\quad\left[\frac{1-x}{x^2-1}\right]_{x=1}=\left(\frac{-1}{2x}\right)_{x=1}=-\frac{1}{2};$$

$$2)\quad\left[\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right]_{x=0}=\left[\frac{x-\sin x}{x\sin x}\right]_{x=0}=\left[\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}\right]_{x=0}=$$

$$=\left[\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}\right]_{x=0}=\frac{0}{2}=0.$$

58. §. Nenoteiktas izteiksmes 0, ∞^0 un 1^∞.

Ja $f(x)=[\varphi(x)]^{\psi(x)}$ un 1) $\varphi(a)=\psi(a)=0$, 2) $\varphi(x)=\infty$, $\psi(x)=0$, 3) $\varphi(x)=1$, $\psi(x)=\infty$, tad pirmajā gadījumā dabūjam nenoteiktu izteiksmi 0^0, otrā ∞^0 un trešajā 1^∞.

Šo nenoteikto izteiksmju īsto vērtību atrašanai logaritmēsim $f(x)$ izteiksmi: $\ln f(x)=\psi(x)\ln\varphi(x)$. Uz logaritma definīcijas pamata varam rakstīt: $f(x)=e^{\psi(x)\ln\varphi(x)}$.

Apskatīsim, kādu formu pieņem šī izteiksme iepriekš minētos gadījumos:

1) ja $\varphi(a)=\psi(a)=0$, tad $\psi(a)\ln\varphi(a)=0.(-\infty)$;
2) ja $\varphi=\infty$ un $\psi(a)=0$, tad $\psi(a)\ln\varphi(a)=0.\infty$ un ja
3) $\varphi(a)=1$ un $\psi(a)=\infty$, tad $\psi(a)\ln\varphi(a)=\infty.0$.

Redzam, ka šais trijos gadījumos izteiksmes $e^{\psi(x)\ln\varphi(x)}$ kāpinātājs $\psi(x)\ln\varphi(x)$ pieņem nenoteiktu formu $0.\infty$, kā īstās vērtības atrašanai varam piemērot Lopitāla likumu. Tā tad, lai atrastu nenoteiktas izteiksmes $[\varphi(x)]^{\psi(x)}$ īsto vērtību, jāņem tās logaritms $\psi(x)\ln\varphi(x)$, kas pieņem nenoteiktu formu $0.\infty$, jāpiemēro tam Lopitāla likums un pēc atrastās logaritma nozīmes jāatrod funkcija.

Piemēri.

1) $[x^x]_{x=0}=0^0$; $x^x=e^{x\ln x}$; $[x\ln x]_{x=0}=\left[\frac{\ln x}{x^{-1}}\right]_{x=0}=$

$$=\left[\frac{x^{-1}}{-1x^{-2}}\right]_{x=0}=[-x]_{x=0}=0$$

Tā tad $[x^x]_{x=0}=e^0=1.$

2) $[x^{\sin x}]_{x=0}=0^0$; $\ln x^{\sin x}=\sin x\ln x$; $[x^{\sin x}]_{x=0}=$

$=[e^{\sin x\ln x}]_{x=0}=e^{0(-\infty)}$; $[\sin x.\ln x]_{x=0}=\left[\frac{\ln x}{(\sin x)^{-1}}\right]_{x=0}=$

$$=\left[\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}\right]_{x=0}=\left[-\frac{\sin^2 x}{x\cos x}\right]_{x=0}=\left[\frac{-2\sin x.\cos x}{\cos x-x\sin x}\right]_{x=0}=\frac{0}{1}=$$

Tā tad $[x^{\sin x}]_{x=0}=e^0=1.$

3) $\left[x^{\frac{1}{x}}\right]_{x=\infty}=\infty^0$; $\left[\ln x^{\frac{1}{x}}\right]_{x=\infty}=\left[\frac{1}{x}\ln x\right]_{x=\infty}=\frac{\infty}{\infty}$;

$\left[\frac{1}{x}\ln x\right]_{x=\infty}=\left[\frac{\frac{1}{x}}{1}\right]_{x=\infty}=0.$ Tā tad $\left[x^{\frac{1}{x}}\right]_{x=\infty}=e^0=$

4) $\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]_{x=0}=1^\infty$; $\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]_{x=0}=\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)\right]_{x=0}=$

$$=\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]_{x=0}=\left[\frac{\frac{1}{1+x}}{1}\right]_{x=0}=1.$$

Tā tad $\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]_{x=0}=e^1=e.$

Tā ir mums pazīstamā formula $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$

59. §. Uzdevumi.

Atrast nenoteikto izteiksmju īstās vērtības.

1. $\left[\frac{x^8-1}{x^7-1}\right]_{x=1}$ atb. $\frac{8}{7}$.

2. $\left[\frac{x^2-3x+2}{x^2+2x-8}\right]_{x=2}$ atb. $\frac{1}{6}$.

3. $\left[\frac{x^2-16}{x^2+x-20}\right]_{x=4}$ atb. $\frac{8}{9}$.

4. $\left[\frac{x^3+2x^2-8x+5}{4x^4-3x^3-x^2-2x+2}\right]_{x=1}$ atb. $-\frac{1}{3}$.

5. $\left[\frac{x-1}{x^n-1}\right]_{x=1}$ atb. $\frac{1}{n}$.

6. $\left[\frac{\sqrt{x^2+9}-5}{x^2-x-12}\right]_{x=4}$ atb. $\frac{4}{35}$.

7. $\left[\frac{x-\sin x}{x^3}\right]_{x=0}$ atb. $\frac{1}{6}$.

8. $\left[\frac{x-\sin x}{1-\cos x}\right]_{x=0}$ atb. 0.

9. $\left[\frac{e^x-e^{-x}}{x}\right]_{x=0}$ atb. 2,

10. $\left[\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}\right]_{x=0}$ atb. 2.

11. $\left[\frac{ax^2+b}{cx^2+d}\right]_{x=\infty}$ atb. $\frac{a}{c}$.

12. $\left[\frac{x^2}{e^x}\right]_{x=\infty}$ atb. 0.

13. $\left[\frac{e^x}{x^n}\right]_{x=\infty}$ atb. ∞.

14. $\left[\frac{\operatorname{ctg} x}{\ln x}\right]_{x=0}$ atb. $-\infty$.

15. $\left[\frac{\ln x}{x^n}\right]_{x=\infty}$ atb. 0.

16. $[x \ln \sin x]_{x=0}$ atb. 0.

17. $\left[(x+a)\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)\right]_{x=\infty}$ atb. a.

18. $\left[x \sin \frac{a}{x}\right]_{x=\infty}$ atb. a.

19. $\left[\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right]_{x=1}$ atb. -1.

20. $\left[\frac{y}{y-1}-\frac{1}{\ln y}\right]_{y=1}$ atb. $\frac{1}{2}$.

21. $\left[(x-a)^{x-a}\right]_{x=a}$ atb. 1.

22. $\left[(1-\cos x)^x\right]_{x=0}$ atb. 1.

23. $\left[(\sin x)^x\right]_{x=0}$ atb. 1.

24. $\left[(\sin x)^{\frac{1}{\cos x}}\right]_{x=\frac{\pi}{2}}$ atb. 1.

25. $\left[x^{\frac{1}{1-x}}\right]_{x=1}$ atb. $\frac{1}{e}$.

26. $\left[\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}\right]_{x=0}$ atb. 1.

27. $\left[(\sin x)^{\operatorname{tg} x}\right]_{x=\frac{\pi}{2}}$ atb. 1.

28. $\left[\left(1+\frac{a}{y}\right)^y\right]_{y=\infty}$ atb. e^a.

29. $\left[\left(1+\frac{a}{y}\right)^{a+y}\right]_{y=\infty}$ atb. e^a.

30. $\left[\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}\right]_{x=0}$ atb. $\frac{1}{e}$.

31. $\left[\left(1+nz\right)^{\frac{1}{z}}\right]_{z=0}$ atb. e^n

32. $\left[\left(1+\sin x\right)^{\operatorname{ctg} x}\right]_{x=0}$ atb. e.

33. $\left[\left(\frac{2}{x}+1\right)^x\right]_{x=\infty}$ atb. e^2.

34. $\left[\left(\operatorname{ctg} x\right)^x\right]_{x=0}$ atb. 1.

III DAĻA

INTEGRĀLRĒĶINI

VIII nodaļa.

Nenoteiktais un noteiktais integrāls.

Šai nodaļā iepazīsimies ar integrālrēķiniem. Integrēšana ir apgriezta darbība diferencēšanai un ar integrālrēķiniem atrisina daudzus sarežģītus jautājumus ģeometrijā, mēchanikā, fizikā un vispār dabas zinātnēs un technikā.

60. §. Nenoteiktais integrāls un integrācijas konstante.

Apzīmēsim funkcijas $F(x)$ atvasinājumu ar $f(x)$. Diferenciālrēķinos ar diferencēšanu atrod dotajai funkcijai $F(x)$ tās atvasinājumu $f(x)$ vai diferenciālu $f(x)\,dx$. Protams, ka pastāv arī apgriezts uzdevums: dotajam diferenciālam $f(x)\,dx$ atrast pirmatnējo funkciju $F(x)$, kā diferenciāls ir $f(x)\,dx$:

$$dF(x) = f(x)\,dx \ldots (1).$$

Dotā diferenciāla pirmatnējo funkciju sauc par integrālu.

Integrālu atrod ar integrēšanas darbību. Funkciju integrēšana ir integrālrēķinu pamatuzdevums, tāpat kā diferencēšana — diferenciālrēķinu. Integrēšanas zīme ir $\int$. Tāpēc to, ka $f(x)\,dx$ jāintegrē, raksta $\int f(x)\,dx$ un lasa integrāls no $f(x)\,dx$. Pēc mūsu apzīmējuma

$$\int f(x)\,dx = F(x) \ldots (2).$$

Piemēram, $\int \cos x\,dx = \sin x$, tāpēc ka $d \sin x = \cos x\,dx$.

Izteiksmi $f(x)\,dx$ sauc par zemintegrālo izteiksmi un $f(x)$ par zemintegrālo funkciju.

Var sagaidīt, ka diferencēšana un integrēšana viena otru iznīcina. Tiešām, ieliekot (1) formulā no (2) formulas $F(x)$ nozīmi, dabūjam, ka

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx \ldots (3).$$

Ieliekot (2) formulā no (1) formulas $f(x)\,dx$ nozīmi, dabūjam, ka

$$\int dF(x) = F(x) \ldots (4).$$

No (3) un (4) formulas var secināt, ka integrēšana un diferencēšana ir apgrieztas darbības. Integrēšana ir apgrieztā darbība, diferencēšana tiešā. Apgriezto darbību rezultāti ir daudzvērtīgi un tā tad zināmā mērā nenoteikti. Piemēram, $\sqrt{625} = \pm 25$.

Ka integrēšanas rezultāts ir daudzvērtīgs, redzams no šā: ja $\int f(x)\,dx = F(x)$, tad $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, kur C ir pastāvīgs lielums, jo $d[F(x) + C] = dF(x)$. No tā secināms, ka simbolam $\int f(x)\,dx$ ir bezgalīgi daudz vērtību, kas atšķiras ar pastāvīgu lielumu, sauktu integrācijas konstanti. Tāpēc $\int f(x)\,dx$ sauc par nenoteikto integrālu. Tomēr daudzi jautājumi, ar integrēšanu atrisināmie, prasa atrast vienu noteiktu pirmatnējo funkciju. Tas ir iespējams, ja ir uzdevuma papildnosacījums, kas ļauj atrast integrāla nozīmi dotajai argumenta nozīmei. Piemēram, atrast funkciju, kā pirmais atvasinājums ir $3x^2-2x+5$ un kā nozīme, ja $x=1$, ir 12. Uzdevums atrisinams ar integrēšanu.

$\int (3x^2 - 2x + 5)\,dx = x^3 - x^2 + 5x + C$, jo $d(x^3 - x^2 - 5x + c) = 3x^2 - 2x + 5$. Pēc uzdevuma nosacījuma, ja $x = 1$, funkcijas nozīme ir 12, tāpēc varam rakstīt, ka $12 = 1 - 1 + 5 + C$ jeb $C = 7$. Tā tad meklējamā funkcija ir $x^3 - x^2 + 5x + 7$.

61. §. Nenoteiktā integrāla vispārīgās īpašības.

I. Pastāvīgo reizinātāju var ņemt aiz integāla zīmes.

Jāpierāda, ka

$$\int af(x)\,dx = a \int f(x)\,dx.$$

Šai nolūkā pieņemsim, ka $a \int f(x)\,dx = u$. Tad dabūsim u diferenciālu $du = ad \int f(x)\,dx$ jeb $du = af(x)\,dx$. Ja tas tā, tad $u = \int af(x)\,dx$. Tā tad

$$\int af(x)\,dx = a \int f(x)\,dx, \text{ k. b. j.}$$

II. Algebriskas summas integrāls ir vienlīdzīgs saskaitāmo integrālu algebriskai summai.

Pieņemsim, ka $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ ir x funkcijas galīgā skaitā un pierādīsim vienlīdzību:

$$\int(u_1 + u_2 - u_3 - u_4 + u_5 + \ldots + u_n)\,dx = \int u_1\,dx + \int u_2\,dx - \int u_3\,dx - \int u_4\,dx + \int u_5\,dx + \ldots + \int u_n\,dx.$$

Apzīmējot pierādāmās vienlīdzības labo pusi ar $F(x)$, dabūjam:

$$F(x) = \int u_1\,dx + \int u_2\,dx - \int u_3\,dx - \ldots + \int u_n\,dx \text{ jeb}$$
$$dF(x) = d\int u_1\,dx + d\int u_2\,dx - d\int u_3\,dx - \ldots + d\int u_n\,dx \text{ jeb}$$
$$dF(x) = u_1\,dx + u_2\,dx - u_3\,dx - \ldots + u_n\,dx \text{ jeb}$$
$$dF(x) = (u_1 + u_2 - u_3 - \ldots + u_n)\,dx. \text{ Ja tas tā, tad}$$
$$F(x) = \int (u_1 + u_2 - u_3 - \ldots + u_n)\,dx, \text{ k. b. j.}$$

62. §. Integrēšanas pamatformulas.

No katras diferencēšanas formulas dabūjam vienu integrēšanas formulu.

1. $d\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right)=x^m dx$, tāpēc	$\int x^m dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}+C \ldots (1)$, ja $m\neq -1$.
2. $d\ln x=\frac{dx}{x}$ „	$\int \frac{dx}{x}=\ln x + C \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$
3. $da^x=a^x \ln a dx$	$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$
4. $de^x=e^x dx$, „	$\int e^x dx=e^x+C \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$
5. $d\cos x=-\sin x dx$, „	$\int \sin x dx=-\cos x+C \ldots\ldots (5)$
6. $d\sin x=\cos x dx$, „	$\int \cos x dx=\sin x+C \ldots\ldots\ldots (6)$
7. $d\,\mathrm{tg}\,x=\frac{dx}{\cos^2 x}$, „	$\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\mathrm{tg}\,x+C \ldots\ldots\ldots (7)$
8. $d\,\mathrm{ctg}\,x=-\frac{dx}{\sin^2 x}$, „	$\int \frac{dx}{\sin^2 x}=-\mathrm{ctg}\,x+C \ldots\ldots (8)$
9. $d\,\mathrm{arctg}\,x=\frac{dx}{1+x^2}$, „	$\int \frac{dx}{1+x^2}=\mathrm{arctg}\,x+C \ldots\ldots (9)$
9[a]. $d\,\mathrm{arcctg}\,x=-\frac{dx}{1+x^2}$,	$\int \frac{dx}{1+x^2}=-\mathrm{arcctg}\,x+C' \ldots (9^a)$
10. $d\arcsin x=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, „	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C \ldots\ldots (10)$
10[a]. $d\arccos x=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, „	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\arccos x+C' \ldots (10^a)$

Piemēri.

1. $\int x^3 dx=\frac{x^4}{4}+C$. 2. $\int \sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}} dx=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$.

3. $\int \frac{dx}{x^2}=\int x^{-2} dx=\frac{x^{-1}}{-1}+C=-\frac{1}{x}+C$.

Uzdevumi.

1. $\int x^6 dx$ atb. $\frac{x^7}{7}+C$. 2. $\int 6x^7 dx$ atb. $\frac{3}{4}x^8+c$.

3. $\int \frac{dx}{x^3}$ „ $-\frac{1}{2x^2}+C$. 4. $\int ax^5 dx$ „ $\frac{ax^6}{6}+C$.

5. $\int x^{\frac{2}{3}} dx$ „ $\frac{3x\sqrt[3]{x^2}}{5}+C$. 6. $\int ax^{\frac{5}{2}} dx$ atb. $\frac{2ax^3\sqrt{x}}{7}+C$.

7. $\int \frac{dx}{3x^2}$ „ $-\frac{1}{3x}+C.$ 8. $\int \frac{2dx}{ax^{\frac{1}{5}}}$ „ $\frac{5\sqrt[5]{x4}}{2a}+C.$

9. $\int 5y\,dy$ „ $\frac{5y^2}{2}+C.$ 10. $\int 6\sqrt{x}dx$ „ $4\sqrt{x^3}.$

11. $\int \sqrt{2px}\,dx$ „ $\frac{2x\sqrt{2px}}{3}$ 12. $\int \sqrt[3]{x}\,dx$ „ $\frac{3x\sqrt[3]{x}}{4}+C.$

13. $\int 3a\varphi^2 d\varphi$ „ $a\varphi^3+c.$ 14. $\int (m^2-9)x^{m-4}dx$

atb. $(m+3)x^{m-3}+C.$

15. $\int (a^4+x^4)dx$ „ $a^4x+\frac{x5}{5}+c.$ 16. $\int (2x^3-5x^2-3x+4)dx.$

atb. $\frac{x^4}{2}-\frac{5x^3}{4}-\frac{3x^2}{2}+4x+C.$

17. $\int (1+\sqrt[3]{x^2})\,dx$ „ $x+\frac{3}{5}\sqrt{x^5}+C.$

18. $\int \left(a+\frac{b}{x}+\frac{C}{x^2}\right)dx$ „ $ax+b\ln x-\frac{C}{x}+C.$

19. $\int \left(\sqrt{x}-\frac{2}{3}\sqrt[3]{x^2}\right)^3 dx$ „ $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{3}{4}x^{\frac{8}{3}}+\frac{8}{17}x^{\frac{17}{6}}-\frac{8}{81}x^3+C.$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$ „ $2\sqrt{x}+C.$

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+x}}$ „ $2\sqrt{a+x}+C.$

22. $\int \left(\frac{2a}{\sqrt{x}}-\frac{b}{x^2}+\frac{3c}{d}\sqrt[3]{x^2}\right)dx$ atb. $4a\sqrt{x}+\frac{b}{x}+\frac{9c}{5d}x\sqrt[3]{x^2}+C.$

23. $\int (2x^9-3x^6+12x^3-3)dx$ „ $\frac{x^{10}}{5}-\frac{3x^7}{7}+3x^4-3x+C.$

24. $\int \left(\sqrt[3]{x^2}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{2}{x^5}\right)dx$ „ $\frac{3x\sqrt[3]{x^2}}{5}-3\sqrt[3]{x}+\frac{1}{2x^4}+C.$

25. $\int \frac{f'(x)dx}{f(x)}$ „ $\ln f(x)+C.$

26. $\int \frac{e^x\,dx}{e^x-a}$ atb. $\ln(e^x-a)+C.$

27. $\int \frac{\cos x\,dx}{b\sin x}$ „ $\frac{1}{b}\ln\sin x+C.$

28. $\int \frac{e^x\,dx}{e^x-a}$ „ $\ln(e^x-a)+C.$

29. $\int \frac{dx}{(+x^2)\,\mathrm{arctg}\,x}$ „ $\ln(\mathrm{arctg}\,x).$

30. $\int (a^x \ln a - e^x)\,dx$ „ $a^x - e^x + C.$

31. $\int \frac{a\,dx}{1+x^2}$ „ $a \operatorname{arctg} x + C.$

32. $\int (\sin x - \cos x)\,dx$ „ $-(\cos x + \sin x) + C.$

33. $\int \frac{b a^x\,dx}{\ln a}$ „ $\frac{b a^x}{\ln^2 a} + C.$

34. $\int (m \sin x + n \cos x)$ „ $n \sin x - m \cos x + C.$

35. $\int \left(\frac{a}{\cos^2 x} - \frac{b}{\sin^2 x}\right) dx$ „ $a \operatorname{tg} x + b \operatorname{ctg} x + C.$

36. $\int \left(\frac{ad}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{be}{1+x^2}\right) dx$ „ $ad \arcsin x + be \operatorname{arcctg} x + C.$

37. $\int [(x-1)^2 + (x+2)^3]\,dx$ „ $\frac{x^4}{4} + \frac{7}{3} x^3 + 5x^2 + 9x + C.$

38. $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^3}} - \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right) dx$ atb. $\frac{2}{3} x\sqrt{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{15}{14} \sqrt[15]{x^{14}} -$
$-2\sqrt{x} - \ln x + C\cdot$

63. §. Vienkāršākie integrēšanas paņēmieni.

Bieži vien zemintegrālā funkcija f (x) ir tāda, ka tās intergrālu nevar tieši atrast intergrēšanas tabulā. Tādos gadījumos jāintegrē ar kādu citu apņēmienu. Vispirms apskatīsim integrēšanu ar substitūcijas paņēmienu.

Pieņemsim, ka zemintegrālā funkcija f (x) ir tāda, kā tās integrālu tieši neatrodam integrēšanas tabulā. Tādā gadījumā ievedīsim jaunu mainīgo $x = \varphi\,(z)$ jeb $z = \psi\,(x)$ ar nosacījumu, lai $\varphi'\,(z) \neq 0$. Izteicot f (x) d x ar z, dabūjam, ka

$$f(x)\,dx = f[\varphi(z)]\,d\varphi(z) = f[\varphi(z)]\,\varphi'(z)\,dz = \Phi(z)\,dz \quad \text{un}$$
$$\int f(x)\,dx = \int \Phi(z)\,dz.$$

Ja nu izrādās, ka $\int \Phi(z)\,dz$ varam tieši atrast tabulā, tad atrastajā integrālā izsakot z ar x, esam aprēķinājuši meklējamo integrālu.

Piemēri.

1. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Ievedīsim jaunu argumentu $z = 1 - x^2$, tad $dz = -2x\,dx$ un $dx = \frac{dz}{-2x}$. Tāpēc $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} =$

$$= -2 \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = -2 \int z^{-\frac{1}{2}}\,dz = -z^{\frac{1}{2}} + c = -\sqrt{1-x^2} + c.$$

2. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$. Pieņemsim $x=az$, tad $dx=adz$ un $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=$

$$=\int\frac{adz}{\sqrt{a^2-a^2z^2}}=\int\frac{adz}{a\sqrt{1-z^2}}=\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\arcsin z+c=$$

$$=\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

3. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ Pieņemsim $x=\frac{1}{z}$, tad $dx=-\frac{dz}{z^2}$ un $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=$

$$=\int\frac{-\frac{dz}{z^2}}{\frac{1}{z}\sqrt{\frac{1-z^2}{z^2}}}=\int\frac{-dz}{\sqrt{1-z^2}}=\arccos z+C=\arccos\frac{1}{x}+C.$$

4. $\int e^{x^3}x^2dx$. Pieņemsim $x^3=z$, tad $3x^2dx=dz$ un $x^2dx=\frac{dz}{3}$.

Tāpēc $\int e^{x^3}x^2dx=\int\frac{e^z\,dz}{3}=\frac{1}{3}e^z+C=\frac{1}{3}e^{x^3}+C.$

5. $\int(a+bx)^n\,dx$. Pieņemsim $a+bx=z$, tad $dx=\frac{1}{b}dz$ un

$$\int(a+bx)^n\,dx=\frac{1}{b}\int z^n\,dz=\frac{z^{n+1}}{b(n+1)}+C=\frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)}+C.$$

Uzdevumi.

1. $\int\frac{dx}{x+a}$ atb. $\ln(x+a)+C$. 2. $\int\frac{dx}{x-a}$ atb. $\ln(x-a)+C$.

3. $\int\frac{dx}{a-x}$ atb. $-\ln(a-x)+C$. 4. $\int(ax-b)^n\,dx$ atb. $\frac{(ax-b)^{n+1}}{a(n+1)}+C$.

5. $\int\sin(kx)\,dx$ atb. $-\frac{1}{k}\cos(kx)+C$. 6. $\int\cos3x\,dx$ atb. $\frac{1}{3}\sin3x+C$.

7. $\int e^{ax+b}dx$ atb. $\frac{1}{a}e^{ax+b}+C$. 8. $\int a^{m-nx}dx$ atb. $-\frac{a^{m-nx}}{n\ln a}+C$.

9. $\int b^{1-ax}dx$ atb. $-\frac{b^{1-ax}}{a\ln b}+C$. 10. $\int\frac{dx}{e^{kx}}$ atb. $\frac{1}{ke^{kx}}+C$.

11. $\int\frac{e^x\,dx}{(e^x+a)^n}$ atb. $-\frac{1}{(n-1)(e^x+a)^{n-1}}+C$.

12. $\int\frac{dx}{1+a^2x^2}$. „ $\frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,ax+C$.

13. $\int\frac{m\,dx}{\cos^2(nx+a)}$ „ $\frac{m}{n}\,\mathrm{tg}(nx+a)+C$.

14. $\int \frac{a\,dx}{\sin^2(ax-b)}$ „ $-\operatorname{ctg}(ax-b)$. 15. $\int (x^2+a)^n x\,dx$ „ $\frac{(x^2+a)^{n+1}}{2(n+1)}+C$.

16. $\int \sqrt[3]{1+x^2}\,x\,dx$. „ $\frac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{4}{3}}+C$. 17. $\int \frac{x\,dx}{x^2-1}$ „ $\frac{1}{2}\ln(x^2-1)+C$.

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ „ $-2\sqrt{1-x}+C$. 19. $\int \operatorname{ctg} x\,dx$ atb. $\ln\sin x+C$.

20. $\int \operatorname{tg} x\,dx$ „ $-\ln\cos x+C$. 21. $\int \sin(ax)\,dx$ „ $-\frac{1}{a}\cos(ax)+C$.

22. $\int \cos(nx)\,dx$ „ $\frac{1}{n}\sin(nx)+C$. 23. $\int \cos^n x\sin x\,dx$ $-\frac{1}{n+1}\cos^{n+1}x+C$.

24. $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^n x}$ „ $\frac{1}{(n-1)\cos^{n-1}x}+C$.

25. $\int \sin^3 x\cos^3 x\,dx$ atb. $\frac{\sin^4 x}{4}-\frac{\sin^6 x}{6}+C$.

26. $\int \frac{5\,dx}{x^2+9}$ „ $\frac{5}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$.

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ „ $\arcsin\frac{x}{3}+C$.

28. $\int \frac{a\,x\,dx}{x^4+e^4}$ „ $\frac{a}{2e^2}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{e^2}+C$.

29. $\int \frac{e^t\,dt}{\sqrt{1-e^{2t}}}$ „ $\arcsin e^t+C$.

30. $\int (a^{nx}-b^{mx})\,dx$ „ $\frac{a^{nx}}{n\ln a}-\frac{b^{mx}}{m\ln b}+C$.

Apskatīsim dažus raksturīgus, vairāk sastopamus, integrālus. Zinām, ka

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c; \int \cos x\,dx = \sin x + c.$$

Noskaidrosim, kam vienlīdzīgs

$$\int \frac{dx}{\sin x} = ? \text{ un } \int \frac{dx}{\cos x} = ?.$$

Tāpat zinām, ka

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc}\sin x + c; \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc}\operatorname{tg} x + C.$$

Atradīsim

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = ? \text{ un } \int \frac{dx}{1-x^2} = ?$$

1. $$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}=\int\frac{dx}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}}=\int\frac{d\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)}{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}=$$
$$=\ln\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+C.$$

2. $$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\ln\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+C.$$

3. $\int\frac{dx}{1-x^2}$. Sadalīsim zemintegrālo funkciju šādi:

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right].$$ Tāpēc

$$\int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx=\frac{1}{2}[-\ln(1-x)+$$
$$+\ln(1+x)]+C=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+C.$$

4. $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ Vispirms atradīsim diferenciālu:

$$d[\ln(x+\sqrt{x^2+1})]=\frac{\left(1+\frac{2}{2\sqrt{x^2+1}}\right)dx}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)\,dx}{(x+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}}=$$
$$=\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$ Tāpēc

$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$. Līdzīgā kārtā atrodam $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a}}=$
$$=\ln(x+\sqrt{x^2\pm a})+C.$$

Atrastās formulas pievienosim integrēšanas tabulai:

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\ln\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$
$$\int\frac{dx}{\cos x}=\ln\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+C \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$
$$\int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$
$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a}}=\ln(x+\sqrt{x^2\pm a})+C \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Uzdevumi.

1. $\int \frac{dx}{\sin\frac{x}{a}}$ atb. $a \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2a} + C.$ 2. $\int \frac{dx}{\cos ax}$ atb. $\frac{1}{a} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C.$

3. $\int \operatorname{ctg}\frac{x}{2}dx$ atb. $2 \ln \sin\frac{x}{2} + C.$ 4. $\int \operatorname{tg} bx\,dx$ „ $-\frac{1}{b}\ln\cos bx + C.$

5. $\int \frac{dx}{4-9x^2}$ „ $\frac{1}{12}\ln\frac{2+3x}{2-3x} + C.$ 6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}$ „ $\ln(x+\sqrt{x^2-9}) + C.$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2+e^2x^2}}$ atb. $\frac{1}{e}\ln(ex+\sqrt{b^2+e^2x^2}) + C.$

8. $\int \frac{e\,dt}{a^2-b^2t^2}$ atb. $\frac{e}{2ab}\ln\frac{bt+a}{bt-a} + C.$

9. $\int \frac{dy}{\sqrt{b^2y^2-a^2}}$ atb. $\frac{1}{b}\ln(by+\sqrt{b^2y^2-a^2}) + C.$

10. $\int \frac{dt}{\sqrt{m^2t^2-n^2}}$ atb. $\frac{1}{m}\ln(mt+\sqrt{m^2t^2-n^2} + C.$

Bieži vien, ja zemintegrālā funkcija ir daļa, kā skaitītājs ir polinoms, tad to var sadalīt vairāku citu daļu algebriskā summā un atrast saskaitāmo integrālus vienkāršāk nekā doto integrālu. Piemēram,

$$\int\frac{b+ex}{a^2+x^2}dx = \int\frac{b\,dx}{a^2+x^2} + \int\frac{ex\,dx}{a^2+x^2} = \frac{b}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + \frac{e}{2}\ln(a^2+x^2) + C.$$

Uzdevumi.

1. $\int\frac{2x-5}{3x^2-2}dx$ atb. $\frac{1}{3}\ln(3x^2-2) - \frac{5}{2\sqrt{6}}\ln\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}} + C.$

2. $\int\frac{(3t-2)\,dt}{\sqrt{9-t^2}}$ atb. $-3\sqrt{9-t^2} - 2\arcsin\frac{t}{3} + C.$

3. $\int\frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{x^2+4}}$ atb. $\sqrt{x^2+4} + 3\ln(x+\sqrt{x^2+4}) + C.$

4. $\int\frac{(a^x\ln a - e^x)\,dx}{5}$ atb. $\frac{1}{5}a^x - \frac{1}{5}e^x + C.$

5. $\int\frac{(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2}-5)\,dx}{x^2}$ atb. $-\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{5}{2\sqrt[5]{x^2}} + \frac{5}{x} + C.$

6. $\int\frac{(2x^3-6)^2\,dx}{x^2}$ atb. $\frac{8}{10}x^5 - 12x^2 - \frac{36}{x} + C.$

Apskatīsim vēl integrēšanu pa daļām jeb **parciālo integrēšanu.**

Ja u un v ir x funkcijas, tad $d(uv) = u\,dv + v\,du$ jeb $uv = \int u\,dv + \int v\,du$. Tāpēc

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du.}$$

Ar šo formulu varam aprēķināt $\int u\,dv$, ja protam aprēķināt $\int v\,du$ un uv.

Piemēri.

1. $\int x\sin x\,dx$. Pieņemsim $u = x$ un $dv = \sin x\,dx$, tad $du = dx$ un $v = \int \sin x\,dx = -\cos x$. Tāpēc $\int x\sin x\,dx = -x\cos x - \int -\cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C$.
2. $\int \operatorname{arctg} x\,dx$. Pieņemsim $u = \operatorname{arctg} x$ un $dv = dx$, tad $du = \frac{dx}{1+x^2}$ un $v = \int dx = x$. Tāpēc $\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$.
3. $\int \arcsin x\,dx$. Pieņemsim $u = \arcsin x$ un $dv = dx$, tad $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ un $v = \int dx = x$. Tāpēc $\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.
4. $\int \ln x\,dx$. Pieņemsim $u = \ln x$ un $dv = dx$, tad $du = \frac{dx}{x}$ un $v = \int dx = x$. Tāpēc $\int \ln x\,dx = x\ln x - \int \frac{x\,dx}{x} = x\ln x - x + C$.

Gadās, ka parciālā integrēšana, kādā uzdevumā ir jāatkārto vairākas reizes. Piemēram, $\int x^2 e^{ax}dx$. Pieņemsim $u = x^2$ un $dv = e^{ax}dx$, tad $du = 2x\,dx$ un $v = \int e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}$. Tāpēc

$$\int x^2e^{ax}dx = x^2\frac{e^{ax}}{a} - \int \frac{e^{ax}}{a}\cdot 2x\,dx = \frac{x^2e^{ax}}{a} - \frac{2}{a}\int xe^{ax}dx.$$

Ar šo pašu paņēmienu atradīsim $\int xe^{ax}dx$, pieņemot $u = x$ un $dv = e^{ax}dx$. Tad $du = dx$ un $v = \int e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}$. Tāpēc

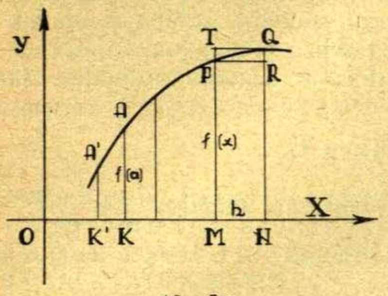
$$\int xe^{ax}dx = x\frac{e^{ax}}{a} - \int \frac{e^{ax}}{a}dx = \frac{xe^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2} = \frac{e^{ax}}{a}\left(x - \frac{1}{a}\right).$$ Tā tad

$$\int x^2e^{ax}dx = \frac{x^2e^{ax}}{a} - \frac{2e^{ax}}{a^2}\left(x - \frac{1}{a}\right) + C = \frac{e^{ax}}{a}\left(x^2 - \frac{2x}{a} + \frac{2}{a^2}\right) + C.$$

Uzdevumi.

1. $\int x^2 \ln x\, dx$ atb. $\frac{x^3}{3}\left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + C.$
2. $\int ay \sin y\, dy$ „ $-ay \cos y + \sin y + C.$
3. $\int x^n \ln x\, dx$ „ $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + C.$
4. $\int x \operatorname{arctg} x\, dx$ „ $\frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C.$
5. $\int \operatorname{arcctg} y\, dy$ „ $y \operatorname{arcctg} y + \frac{1}{2}\ln(1+y^2) + C.$
6. $\int x a^x\, dx$ „ $a^x\left(\frac{x}{\ln a} - \frac{1}{\ln^2 a}\right) + C.$
7. $\int x^2 a^x\, dx$ „ $a^x\left(\frac{x^2}{\ln a} - \frac{2x}{\ln^2 a} + \frac{2}{\ln^3 a}\right) + C.$
8. $\int x^2 e^x\, dx$ „ $e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$
9. $\int x^2 e^{-x} dx$ „ $e^{-x}(2 - 2x - x^2) + C.$
10. $\int x \cos x\, dx$ „ $x \sin x + \cos x + C.$
11. $\int x^2 \sin x\, dx$ „ $-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$
12. $\int \sin^2 x\, dx$ „ $\frac{1}{2}(x - \sin x \cos x).$
13. $\int \cos^2 x\, dx$ „ $\frac{1}{2}(x + \sin x \cos x).$
14. $\int \sin^3 x\, dx$ atb. $-\frac{1}{3}\cos x(\sin^2 x + 2) + C.$
15. $\int x \sin x \cos x\, dx$ „ $\frac{1}{8}\sin 2x - \frac{1}{4}x \cos 2x + C.$
16. $\int x \operatorname{tg}^2 x\, dx$ „ $x \operatorname{tg} x - \frac{x^2}{2} + \ln \cos x + C.$
17. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ „ $\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$ (aizrād. $u = \sqrt{a^2 - x^2}$).
18. $\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx$ „ $\frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C.$
19. $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ „ $-\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$
20. $\int e^x \sin x\, dx$ „ $\frac{a^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$
21. $\int e^x \cos x\, dx$ „ $e^x(\sin x + \cos x) + C.$
22. $\int \frac{\sin x\, dx}{e^x}$ „ $-\frac{\sin x + \cos x}{2e^x} + C.$
23. $\int e^x \sin^2 x\, dx$ „ $\frac{e^x}{2}\left(1 - \frac{2\sin 2x + \cos 2x}{5}\right) + C.$
24. $\int e^x \cos^2 x\, dx$ „ $\frac{e^2}{2}\left(1 + \frac{2\sin 2x + \cos 2x}{5}\right) + C.$

64. §. Nenoteiktā integrāla ģeometriskais iztulkojums.



19. zīm.

Pieņemsim, ka dota augoša funkcija $y = f(x)$, kā grafika ir 19. zīmējumā attēlotā līkne. Apzīmēsim kādu līknes nekustīgu punktu ar A, kā abscisa ir a un ordināta $f(a)$; kādu līknes kustīgu punktu ar P, kā abscisa ir x un ordināta $f(x)$. Tādā gadījumā a un $f(a)$ ir pastāvīgi, bet x un $f(x)$ mainīgi lielumi. Apskatīsim no līknes loka AP, abscisu ass gabala $x-a$, ordinātas $f(a)$ un $f(x)$ ierobežoto laukumu AKMP. Punktam P kustoties laukums mainās. Bet punkts kustas, ja arguments x mainās. Tā tad argumentam mainoties, mainās laukums. Tāpēc laukums ir x funkcija, ko apzīmēsim ar $F(x)$. Dosim argumentam x pieaugumu h. Tad arī laukums $F(x)$ dabūs pieaugumu:

$$F(x+h) - F(x),$$

ko ierobežo līknes loks PQ, h, $f(x)$ un $f(x+h)$. Vilksim no P un Q paralēles abscisu asij PR un QT. Tad, acīmredzot,

$$L_{PMNR} < L_{PMNQ} < L_{TMNQ} \text{ jeb}$$

$$h \, . \, f(x) < F(x+h) - F(x) < h \, . \, f(x+h) \text{ jeb}$$

$$f(x) < \frac{F(x+h) - F(x)}{h} < f(x+h) \quad \ldots . \ (1).$$

Ja punkts Q tuvojas punktam P, tad $x+h \to x$, $f(x+h) \to f(x)$ un $h \to 0$. Bet ja $h \to 0$, tad $\lim\limits_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x)$.

Tā kā $f(x+h) \to f(x)$, tad tas nozīmē, ka starpība starp $f(x+h)$ un $f(x)$ ir bezgalīgi maza. No (1) izteiksmes secināms, ka starpība starp $\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$ ir arī bezgalīgi maza, kas nozīmē, ka $f(x)$ ir $\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$ robeža, ja $h \to 0$. Tā tad

$$F'(x) = f(x) \text{ jeb} \frac{dF(x)}{dx} = f(x) \text{ jeb } dF(x) = f(x)dx \text{ jeb}$$

$$F(x) = \int f(x)dx.$$

Pieņemot par sākuma ordinātu A'K' un spriežot līdzīgi kā iepriekšējā gadījumā, dabūjam, ka arī laukums A'K'MP ir x funkcija, ko izteic $\int f(x)\,dx$. Abi laukumi viens no otra atšķiras ar laukumu A'K'AK, kas nav no x atkarīgs, bet ir pastāvīgs lielums, ko apzīmēsim ar C. Katram sākuma ordinātas stāvoklim atbilst noteikta C nozīme, integrācijas konstante. Tāpēc bezgalīgi daudzos laukumus, kas atšķiras ar sākuma ordinātas stāvokli, izteic izteiksme

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Tā tad nenoteiktais integrāls izteic laukumu, ierobežotu no patvaļīgi izvēlētas sākuma ordinātas, mainīgās gala ordinātas, abscisu ass un līknes loka.

Analogā kārtā šo pašu atzinumu var dabūt arī dilstošai funkcijai. Ja funkcijai dotajā intervallā ir ekstrēms, tad šo intervallu var sadalīt divi intervallos, kuŗos teiktais ir pareizs.

65. §. Jēdziens par noteikto integrālu.

Aprēķināsim laukumu AkNQ (19. zīm.), ierobežotu no pastāvīgas sākuma ordinātas f(a) un pastāvīgas gala ordinātas f(b) = NQ. Zīmējumā redzams, ka

$$L_{AKNQ} = L_{A'K'NQ} - L_{A'K'KA} \quad . \ . \ . \ . \ (1)$$

$$\text{Bet } L_{A'K'NQ} = [\int f(x)\,dx]_{x=b} = F(b) + C \quad \text{un}$$

$$L_{A'K'KA} = [\int f(x)\,dx]_{x=a} = F(a) + C.$$

Tā kā abiem laukumiem ir kopīga sākuma ordināta A'K', tad arī C nozīme ir viena un tā pati. Tāpēc no (1) vienlīdzības dabūjam, ka

$$L_{AKNQ} = F(b) - F(a) \ . \ . \ . \ (2)$$

Tā tad minētais laukums ir vienlīdzīgs integrāla nozīmju starpībai, ņemtām pie argumenta gala nozīmes x = b un sākuma nozīmes x = a. Šo divu nenoteiktā integrāla nozīmju starpība ir pilnīgi noteikts lielums un to sauc par funkcijas f(x) noteikto integrālu no a līdz b.

Argumenta nozīmi a sauc par integrācijas apakšējo robežu un b par integrācijas augšējo robežu. Noteikto integrālu apzīmē simbols $\int_a^b f(x)\,dx$. Tā tad

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Redzam, ka noteiktā integrāla aprēķināšanai jāatrod nenoteiktais integrāls F(x) un jāsastāda starpība F(b) — F(a).

Piemērs. $\int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$. Izteiksmes nozīmju starpība dotājām argumenta nozīmēm a un b apzīmē šā: $[\diagup]_a^b$.

66. §. Noteiktā integrāla vispārīgās īpašības.

I. Mainot integrācijas robežas vietām, integrāls maina zīmi.

Tiešām, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ un

$$\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b) \text{ jeb}$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx, \text{ k. b. j.}$$

II. Ja integrācijas robežas ir vienlīdzīgas, tad noteiktais integrāls ir vienlīdzīgs nullei:

$$\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0.$$

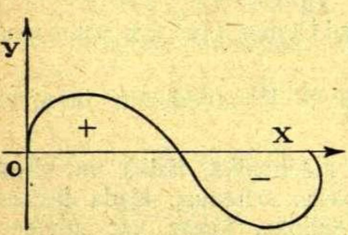
III. Noteikto integrālu var sadalīt vairāku noteikto integrālu summā pēc formulas:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^b f(x)dx.$$

Tiešām,

$$\begin{array}{rl} & \int_a^{c_1} f(x)dx = F(c_1) - F(a) \\ + & \int_{c_1}^b f(x)dx = F(b) - F(c_1) \\ \hline & \int_a^{c_1} + \int_{c_1}^b = F(b) - F(a) = \int_a^b, \text{ k. b. j.} \end{array}$$

IV. Ja zemintegrālā funkcija ir pozitīva un integrācijas augšējā robeža ir lielāka par apakšējo, tad integrāls ir pozitīvs; ja zemintegrālā funkcija ir negātīva un integrācijas augšējā robeža lielāka par apakšējo, tad intēgrāls ir negātīvs.



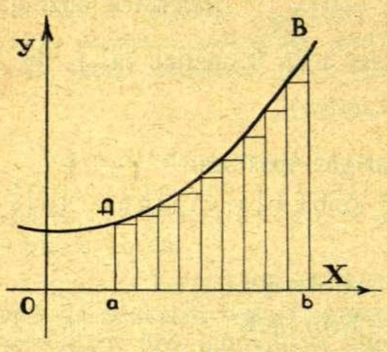
20. zīm.

Tiešām, $f(x) = F'(x)$ un ja $f(x) > 0$, tad arī $F'(x) > 0$. Bet ja $F'(x) > 0$, tad F(x) ir augoša funkcija un tāpēc, ja $b > a$, tad $F(b) - F(a) > 0$, k. b. j. Analogi pierādāma arī šīs īpašības otrā puse.

IV. īpašība ģeometriski nozīmē, ka laukumi virs abscisu ass ir pozitīvi, bet zem — negātīvi.

67. §. Noteiktais integrāls kā summas robeža.

Ņemsim funkciju $y = f(x)$ un aprēķināsim laukumu AabB (21. zīm.). Šai nolūkā sadalīsim gabalu b—a n vienlīdzīgās daļās,



21. zīm.

$\frac{b-a}{n}$ apzīmēsim ar $\triangle x$, dalījuma punktos $a+\triangle x$, $a+2\triangle x$, $a+3\triangle x, \ldots a+(n-1)\triangle x$ vilksim ordinātas un to galos vilksim paralēles abscisu asij, kā tas zīmējumā redzams. Tad laukums AabB sadalīsies divi summās S un R, kur S ir taisnstūŗu laukumu summa, kuŗus ierobežo ordinātas un x pieaugums $\triangle x$ un R ir mazo laukumiņu summa, kuŗus ierobežo līknes lociņš starp divi kaimiņu ordinātām, abscisu asij parallēlais gabals $\triangle x$ un ordinātas pieaugums.

Tāpēc varam rakstīt, ka

$$L_{AabB} = S + R \text{ un}$$

$$S = f(a) \cdot \Delta x + f(a+\Delta x) \cdot \Delta x + f(a+2\Delta x)\Delta x + f(a+3\Delta x) \cdot \Delta x + \\ + \ldots + f[a+(n-1)\Delta x] \cdot \Delta x.$$

S ir summa, kā saskaitāmo veids ir $f(x) \cdot \triangle x$ un kuŗus dabū, ja funkcijas $f(x)$ arguments x mainās lēcieniem, vienlīdzīgiem ar $\triangle x$, no a līdz $a+(n-1)\triangle x$. Ja sadalījumu skaits n paliek arvien lielāks, tad R paliek arvien mazāks un ar n neaprobežotu augšanu R neaprobežoti dilst un S tuvojas laukumam AabB kā savai robežai. Ja $n \to \infty$ tad $\triangle x \to 0$ un tā kā $f(x)$ ir galīgs, tad $f(x) \cdot \triangle x$ ir bezgalīgi mazs (2. teōr.) un varam teikt, ka L_{AabB} ir bezgalīgi daudz bezgalīgi mazu saskaitāmo $f(x)\triangle x$ summas robeža. Bet L_{AabB} ir noteiktais integrāls $\int_a^b f(x)\,dx$. Tāpēc varam secināt, ka **n o t e i k t a i s i n t e g r ā l s** $\int_a^b f(x)\,dx$ **i r b e z g a l ī g i d a u d z b e z g a l ī g i m a z u s a s k a i t ā m o** $f(x)\triangle x$ **s u m m a s r o b e ž a.**

No vārda summas pirmā burta S ir atvedināta integrāla zīme $\int$.

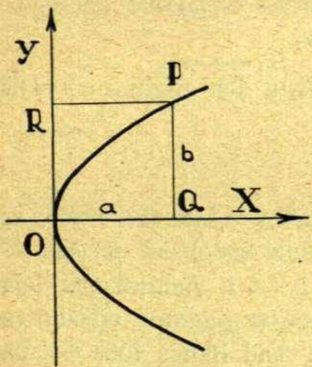
Integrālrēķinus lieto ģeometrijā, mēchanikā, fizikā un vispār dabas zinātnēs pēc vienas un tās pašas schēmas. Kāda lieluma V aprēķināšanai to sadala mazās daliņās, kuŗas var apvienot divi summās. Vienas summas saskaitāmo forma lai būtu $f(x)\triangle x$

un otra summa R, kā robeža, ja $\triangle x \to 0$, lai būtu nulle. Tādā gadījumā $V = \int_a^b f(x)\,dx$. Saskaitāmo $f(x)\,\Delta x$ sauc par lieluma V elementu. Tā tad V aprēķināšanai jāsastāda tā elements un jāatrod $\int_a^b f(x)\,dx$.

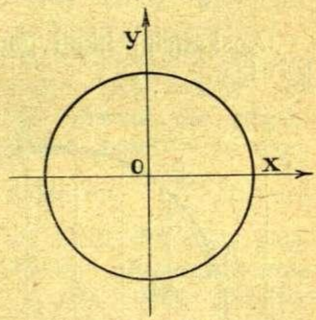
68. §. Laukumu aprēķināšana.

Tā kā noteiktais integrāls ir vienlīdzīgs laukumam, ierobežotam no divi ordinātām, līknes loka un abscisu ass gabala, tad to var izlietot laukumu aprēķināšanai jeb līniju kvadrātūrai.

1) Aprēķināt parabolas $y^2 = 2px$ segmenta laukumu L_{OQP}.



22. zīm.



23. zīm.

$$L_{OQP} = \int_0^a y\,dx = \int_0^a \sqrt{2px}\,dx = \left[\frac{2x}{3}\sqrt{2px}\right]_0^a = \frac{2}{3}a\sqrt{2pa} = \frac{2}{3}ab.$$

Tagad viegli aprēķināt arī laukumu OPR:

$$L_{OPR} = L_{OQPR} - L_{OQP} = ab - \tfrac{2}{3}ab = \tfrac{1}{3}ab.$$

2) Aprēķināt riņķa $x^2 + y^2 = r^2$ laukumu.

$L = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$. Tā tad jāaprēķina $\int \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$.

Šo integrālu atradīsim ar parciālo integrēšanu.

$$u = \sqrt{r^2 - x^2};\ dv = dx. \qquad du = -\frac{x\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}};\ v = x.$$

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = x\sqrt{r^2 - x^2} - \int -\frac{x^2\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = x\sqrt{r^2 - x^2} -$$

$$\int \frac{(r^2 - x^2 - r^2)\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = x\sqrt{r^2 - x^2} - \int \frac{(r^2 - x^2)\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} + r^2 \int \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} =$$

$$= x\sqrt{r^2-x^2} - \int\sqrt{r^2-x^2}\,dx + r^2\int\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}} = x\sqrt{r^2-x^2} -$$

$$- \int\sqrt{r^2-x^2}\,dx + r^2 \arcsin\frac{x}{r}.$$ Tāpēc

$$2\int\sqrt{r^2-x^2}\,dx = x\sqrt{r^2-x^2} + r^2\arcsin\frac{x}{r}$$ jeb

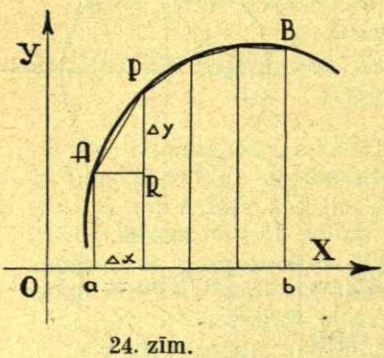
$$\int\sqrt{r^2-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{r^2-x^2}}{2} + \frac{r^2}{2}\arcsin\frac{x}{r}$$ un

$$\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,dx = \left[\frac{x\sqrt{r^2-x^2}}{2} + \frac{r^2}{2}\arcsin\frac{x}{r^2}\right]_0^r = \frac{r^2}{2}\arcsin 1 = \frac{r^2\pi}{4}.$$

Tā tad $L = \pi r^2$.

69. §. Līkņu garumu aprēķināšana.

Apskatīsim līkņu garumu aprēķināšanu jeb līkņu rektifikāciju.



24. zīm.

Līknes $y = f(x)$ loka AB aprēķināšanai sadalīsim abscisu ass gabalu $b-a$ n vienlīdzīgās daļās un dalīšanas punktos vilksim ordinātas. Tad līknes loks arī sadalīsies n daļās. Šos līknes loka daļu garumus apzīmēsim ar $\triangle s$ un pašu loka garumu ar s. Tad $\triangle s$ ir lieluma s elements. Apzīmēsim $\frac{b-a}{n}$ ar $\triangle x$. No $\triangle ARP$ dabūjam, ka $AP = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,.\,\Delta x.$

Ja $\triangle x \to 0$, tad AP vietā varam ņemt Δs un $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ vietā y'. Tāpēc par s elementu varam uzskatīt $\sqrt{1+y'^2}\,.\,\Delta x$ un

$$\boxed{s = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx.}$$

Piemērs. Atrast riņķa līnijas garumu. Diferencējot riņķa nolīdzinājumu

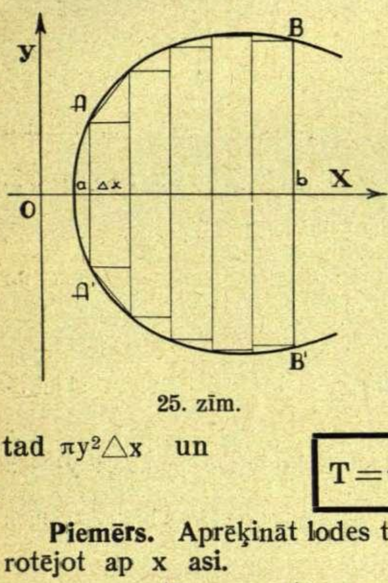
$x^2+y^2=r^2$, atrodam, ka $y'=-\frac{x}{y}$. Tāpēc

$$s=4\int_0^r\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}dx=4\int_0^r\sqrt{\frac{y^2+x^2}{y^2}}dx=4\int_0^r\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}dx=$$

$$=4\int_0^r\frac{rdx}{\sqrt{r^2-x^2}}.\quad\int\frac{rdx}{\sqrt{r^2-x^2}}=r\arcsin\frac{x}{r}.\text{ Tāpēc}$$

$$s=4\left[r\arcsin\frac{x}{r}\right]_0^r=4r\arcsin 1=4r.\frac{\pi}{2}=2\pi r.$$

70. §. Rotācijas ķermeņu tilpuma aprēķināšana.



25. zīm.

Apskatīsim rotācijas ķermeņu tilpuma aprēķināšanu jeb rotācijas ķermeņu k u b a t ū r u. Šai nolūkā domājam AB rotējam ap abscisu asi. Abscisu ass gabalu b—a domāsim sadalītu n vienlīdzīgās daļās un $\frac{b-a}{n}$ apzīmēsim ar $\triangle x$. Caur dalīšanas punktiem vilksim perpendikulārās plāksnes x asij. Par rotācijas ķermeņa elementu pieņemsim cilindri, kā augstums ir $\triangle x$ un radijs y un kā tilpums ir tā

tad $\pi y^2\triangle x$ un

$$\boxed{T=\pi\int_a^b y^2\,dx.}$$

Piemērs. Aprēķināt lodes tilpumu, ko veido riņķis $x^2+y^2=r^2$ rotējot ap x asi.

$$T=\pi\int_{-r}^{+r}y^2dx=\pi\int_{-r}^{+r}(r^2-x^2)\,dx=\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{+r}=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

71. §. Rotācijas ķermeņa virsas aprēķināšana.

Apskatīsim vēl rotācijas ķermeņu virsas aprēķināšanu jeb r o t ā c i j a s v i r s a s k o m p l a n ā c i j u. Izlietosim iepriekšējā paragrafa zīmējumu. Savienosim tai kaimiņu ordinātu galus. Tad dabūsim nošķeltus konus, kā sānu virsu pieņemsim par rotācijas virsas elementu. Nošķeltā kona sānu virsas formula ir $\pi(r+R)l$; $r=y$, $R=y+\Delta x$ un $l=\Delta s$. Tāpēc elements ir $\pi(2y+\Delta y).\Delta s=2\pi y.\Delta s+\pi\Delta y.\Delta s$. Bet $2\pi y\Delta s+\pi\Delta y\Delta s\sim$ $\sim 2\pi y\Delta s$. Tāpēc V elements ir $2\pi y\Delta s$ jeb $2\pi y\sqrt{1+y'^2}.\Delta x$. un

$$\boxed{V=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx}$$

Piemērs. Aprēķināt lodes virsu.

Riņķa nolīdzinājums ir $x^2+y^2=r^2$ un $y=\sqrt{r^2-x^2}$; $y'=$ $=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$, $1+(y')^2=\frac{r^2}{r^2-x^2}$. Tāpēc $V=2\pi\int_{-r}^{+r}\sqrt{r^2-x^2}\,.$ $\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}.\,dx=2\pi\int_{-r}^{+r}r\,dx=2\pi[rx]_{-r}^{+r}=2\pi(r^2+r^2)=4\pi r^2$.

Uzdevumi. 1. Aprēķināt laukumu, ierobežotu no taisnes $y=5x$, abscisu ass un taisnes $x=2$. (Atb. 10.)

2. Aprēķināt laukumu, ierobežotu no parabolas $y^2=4x$, abscisu ass, taisnes $x=4$ un $x=9$. (Atb. $25^1/_3$.)

3. Aprēķināt laukumu, ierobežotu no līnijām $y^2=9x$ un $y=3x$. (Atb. $1/_2$.)

4. Aprēķināt laukumu, ierobežotu no vienādsānu hiperbolas $xy=a^2$, abscisu ass, taisnes $x=a$ un $x=2a$. (Atb. $a^2\ln 2$.)

5. Aprēķināt laukumu, ierobežotu no parabolām $y^2=2px$ un $x^2=2py$. (Atb. $\frac{4}{3}p^2$.)

6. Aprēķināt ellīpses $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ laukumu (Atb. πab).

7. Aprēķināt rotācijas ķermeņa tilpumu, ko veido viens sinusoidas $y=\sin x$ loks, rotējot ap x asi. (Atb. $\frac{\pi^2}{2}$)

8. Aprēķināt rotācijas ķermeņa tilpumu, ko veido parabola $y^2=4x$ un taisne $x=4$, rotējot ap x asi. (Atb. 32π.)

9. Aprēķināt līknes $ay^2=x^3$ loka garumu no koordinātu sākuma punkta līdz ordinātai $x=5a$. (Atb. $\frac{335}{27}a$.)

10. Aprēķināt līknes $9ay^2=x(x-3a)^2$ loka garumu no $x=o$ $x=3a$. (Atb. $2a\sqrt{3}$.)

11. Aprēķināt lodes virsu, ko veido riņķis $x^2+y^2=2^2$, griežoties ap diametru. (Atb. 16π.)

12. Aprēķināt virsu, ko veido parabola $y^2=4ax$, griežoties ap abscisu asi. Loka gala punktu abscisas ir 0 un 3a. (Atb. $\frac{56}{\pi}\pi a^2$)