1563
1938

Seminararbeiten der Semester $\frac{71}{72}$, 72, $\frac{72}{73}$.

a) Semester $\frac{71}{72}$. Theorie der Curven 4ten Ord. im Anschluss an das Lehrbuch von Durège: Theorie der Curven 3ten Ordnung

b) Semester 72. Theorie des Gauss. arithmetisch-geometr. Mittel im Anschluss an dessen nachgelassenen Schriften über denselben Gegenstand.

c) Semest. $\frac{72}{73}$. Zur Theorie der Modulargl. ?

Martin Krause.

8

LVU ZINĀTNISKĀ
BIBLIOTĒKA
A 167-2-87.

Ueber Curven vierter Ordnung.

Wintersemester $\frac{71}{72}$

Es bedeutet u entweder eine ganze rationale Function vierter Ordnung von zwei Parallelcoordinaten oder eine solche Function von zwei homogenen Co- [illegible] homogener Punktcoordinaten, so ist $u = 0$ die die Gleichung einer Curve <u>vierter Ordnung</u>. — §1

Ist die Function $u = 0$ in keine rationale Factoren zerlegbar, so heisst die Curve eine <u>einfache</u> Curve 4^{ter} Ordnung. Ist die Function dagegen in rationale Factoren zerlegbar, so können vier Fälle eintreten. §2.

1) sie besteht aus einer Curve dritter Ordnung und einer Geraden

2) sie besteht aus einer Curve zweit. Ordn. u. 2 Gerad.

3) " " " vier Geraden

4) " " " aus zwei Curven zweiter Ordn. —

Eine Gerade, welche nicht einen Theil einer Curve vierter Ordnung bildet, schneidet diese in 4 Punkten §3

Der Beweis ist klar; verbindet man mit der Gleichung $u = 0$ die Gleichung einer Geraden

$A = 0$

so liefert die Elimination der einen Coordinate aus $A = 0$ eine Gleichung des vierten Grades für die andere Coordinate. Setzt man diese Werthe in $A = 0$ ein, so erhält man die 4 entsprechenden Werthe der andern Coordinate d.h. es giebt vier Schnittpunkte. Es können nun mehrere derselben zusammenfallen.

1) es sollen 2 zusammen.

Dann kann die Linie eine Tangente an die Curve sein oder durch einen Doppelpunkt gehen.

2) es sollen drei zusammen.

Dann kann die Gerade eine Tangente in einem Doppelpunkte sein oder eine Wendetangente und der Durchschnittspunkt ist ein Wendepunkt oder drittens kann sie durch einen dreifachen Punkt gehen.

3) es sollen vier zusammen; dann muß sie eine Tangente in einem dreifachen Punkte sein.

Von den vier Schnittpunkten können entweder zwei oder alle vier imaginär sein, da für die Coordinaten sich ergebende imaginäre Ausdrücke ergeben können.

Wenn eine Gerade mit einer Curve vierter Ordnung mehr als vier Punkte gemein hat, so bildet sie einen Theil derselben, da alsdann die Curve vierter Ordnung aus einer Linie und einer Curve dritter Ordnung bestehen muß. §4.

Eine Gerade, welche eine Curve vierter Ordnung in einem Punkte a berührt, schneidet dieselbe in zwei Punkten a_1 u. a_2, da sie vier Punkte mit jener gemein hat. Diese Punkte heißen Tangentialpunkte zugehörig zu dem Berührungspunkt. Zieht man in a_1 u. a_2 wieder Tangenten, so gehören zu diesen wieder je zwei Tangentialpunkte. Diese 4 nennt ~~man~~ zweite Tangentialpunkte zu a. Ebenso giebt es 8 dritte, 16 vierte etc. Tangentialpunkte zu a. §5.

§6.

Eine Curve $m$ter Ordnung $u=0$ und eine Curve $n$ter Ordnung $v=0$, sofern die Functionen u und v keinen gemeinsamen Factor gemein haben, in $m \cdot n$ Punkten.

Die Elimination jeder der beiden Coordinaten aus den Gleichungen $u=0$ u. $v=0$ liefert für die andere eine Gleichung vom $m \cdot n$ten Grade. Es giebt daher für jede der beiden Coordinaten $m \cdot n$ Werthe, welche den gegebenen Gleichungen zugleich genügen. Indem man die Werthe der Coordinaten zusammen combinirt, erhält man die Coordinaten von $n \cdot m$ Punkten, welche beiden Curven gemeinsam sind.

Zwei Curven vierten Grades haben also 16 Punkte gemeinsam.

Wenn die Gl. $u=0$ u. $v=0$ gemeinsame Factoren haben, so können folgende Fälle eintreten:

1) die Curven vierter Ord. coincidiren. Zwei d. Curven 4ter Ord.
2) beide haben eine Curve dritter Ord. gemein
3) " " " " zweiter Ord. "
4) " " " " erster Ord. "

wenn man hinzunimmt, daß eine Curve 3 Ord. auch aus 3 Linien etc bestehen kann.

Sollen wir es von diesen Berührungspunkten in einem einzigen zusammen, der nicht für eine Curve ein Doppel oder mehrfacher Punkt ist, so zeigt man, daß die beiden Curven eine 6 punktige Berührung haben.

§ 7.

Eine einfache Curve vierter Ordnung kann nicht mehr als drei Doppelpunkte haben.

Hätte sie solcher mehr z. B. 4, so könnte man durch diese vier Punkte eine Curve zweiter Ordnung legen. Dabei bleibt ein Punkt noch beliebig. Legen wir diesen auch auf die Curve vierter Ordnung, so hätte dieselbe also mit der Curve 2ter Ord. 9 Punkte gemein, da die Doppelpunkte wie 2 Punkte zählen. Dies ist aber nicht möglich, da eine Curve 4 u. 2 Ord. nur 8 Schnittpunkte haben können.

Besteht eine Curve 4. Or. aus 4 Lin. so hat sie 6 Doppel.

besteht " " " " aus 2 Lin. u. ein. C. 2. O.

so hat sie 5 Doppelpunkte, besteht sie aus zwei Cu. 2. Ord-
nung hat sie 4 und besteht sie aus einer Curve 3 u. einer

? Gerad so hat sie auch vier Doppelpunkte.

§8 Eine Curve 4. O. kann einen dreifachen Punkt haben, wenn sie besteht:

? 1) aus einer Curve dritt. O. mit ein. Doppel. und aus einer Geraden, die durch denselben geht.

2) ~~wenn~~ sie aus ein. Curve 2 ter Ord. u. zwei Geraden besteht, die sich auf derselben schneiden.

3) aus drei sich schneidenden u. einer beliebigen Linie

Eine Curve 4 ter Ord. kann endlich einen vierfachen Punkt haben, wenn sie aus vier sich schneidenden (in einem Punkte) geraden Linien besteht. Hat umgekehrt eine C. 4. O. einen 4 fach. Punkt x, so besteht sie aus vier sich schneidenden Linien, denn nimmt man auf der Curve irgend wo einen Punkt a an, so hat die Gerade xa fünf Punkte mit der Curve gemein und bildet daher einen Theil derselben.

Zur Bestimmung einer Curve vierter Ordnung sind 14 Punkte erforderlich und in der Regel auch hinreichend. Sind aber 14 Punkte die Durchschnitts-punkte zweier Curven 4. O. so gehen unendlich viele C. 4. O. durch dieselben, welche einen Curvenbüschel vierter Ordnung bilden.

Bezeichnet man die homogenen Coordinaten mit $x_1 x_2 x_3$ u. ordnet nach Potenzen von x_3 so wird die Form der Gleichung werden, wenn man mit u_n eine homog. Fkt. n ten Grad. von x_1 u. x_2 bezeichnet:

$$u_0 x_3^4 + u_1 x_3^3 + u_2 x_3^2 + u_3 x_3^1 + u_4 = 0$$ wobei

$$u_0 = c. \quad (1)$$
$$u_1 = x_1 + x_2 \quad (2)$$
$$u_2 = 2x_1x_2 + x_1^2 + x_2^2 \quad (3)$$?
$$u_3 = x_1^3 + x_2^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3 \quad (4)$$
$$u_4 = x_1^4 + \dots \quad (5)$$

Im Ganzen ist die Anzahl der Glieder also gleich

$$1+2+3+4+5 = 15$$

Die Gleichung hat also 15 Coefficienten, oder die wir der Lastig. [illegible] gerade [illegible]

zu bestimmen kommen 17. Diese 17 Lastgrössen

müssten bekannt sein, damit die Summe bekannt

ist. Das ist aber nur dann möglich, wenn die

Coordinaten von 17 Punkten bekannt sind.

Setzen wir dieselben ein, so erhalten wir 17 Gleich.

in der Lastig. aus denen dieselben zu bestimmen

sind. Die Formen derselben würden sein

$$c = \frac{A}{D}$$

$$c_1 = \frac{B}{D}$$

d. h. der Nenner wird stets derselbe sein und

zwar ist es die Determinante aus den Faktoren

von c_1 c_2 etc...

Ist D fest bestimmt, so sind alle auch die Lastgrössen

fest bestimmt u. mit ihr die Summe.

Dieselbe wird Null, wenn D Null, die Zähler A B etc.

aber nicht alle Null sind.

Sind dagegen die Zähler sämmtlich Null und zugleich der auch 0, dann werden sämmtliche Koeffizienten unbestimmt. Im letzten Falle sind aber die 4 neuen Gleichungen nicht von einander unabhängig und es giebt unendlich viele Systeme von Werthen, welche den Gleichungen genügen. In diesem Falle gehen also unendlich viele Curven 4. O. durch die 12 Punkte. Hiermit wäre der erste Theil der Aufgabe bewiesen, bevor wir aber zu dem zweiten übergehen, wollen wir folgendes bemerken: Durch 13 beliebige Punkte gehen unendlich viele Curven 4ter Ordnung zu legen, alle Curven 4ter Ord. aber, die durch diese 13 Punkte gehen, haben außerdem noch 3 Punkte, im Ganzen also 16 Schnittpunkte mit einander gemein.

Bemerk.

Man kann mit Hülfe der gegebenen Punkte nur 13 Koeffizienten bestimmen, mithin bleibt einer unbestimmt und es giebt also unendlich viele Curven 4ter Ordnung, welche durch die gegebenen Punkte gehen.

Wenn $u = 0$ und $v = 0$ zwei solche Curven sind, so stellt die Gleichung $u + \lambda v$ für jeden Werth von λ eine C. 4. O. dar, welche durch die 16 Durchschnitte der beiden Curven und mithin auch durch die 13 gegebenen geht. Alle Curven also die durch die Gl. $u + \lambda v$ darstellbar sind, so schneiden die u und v noch in weiteren 3 Punkten. Nun lässt sich aber in der That jede Curve 4. O., die durch 13 Punkte geht, durch $u + \lambda v$ ausdrücken. Denn selbst wenn irgend eine dieser Curven bekannt, so kann man auf ihr einen Punkt p so annehmen, dass dieser zusammen mit den 13 die Curve fest bestimmt. Dann kann $u + \lambda v$ so bestimmt werden, oder vielmehr λ, dass $u + \lambda v$ auch diesen Punkt geht. Denn bezeichnen u' und v' die Werthe, die u und v in p annehmen, so geht $u + \lambda v = 0$ durch p, wenn

$$u' + \lambda v' = 0 \text{ od. } \lambda = -\frac{v'}{u'} \text{ ist.}$$

Es folgt weiter, dass jede durch 13 Punkte gehende C. 4. O. durch die Annahme eines 14 P. p. bestimmt wird, falls $\lambda = -\frac{v'}{v}$ bestimmt ist, d. h. wenn p nicht ein Durchschnitt von u u. v ist.

Hieraus folgt der zweite Theil unseres vorigen Lehrsatzes un-
mittelbar. Denn liegen 14 Punkte so, daß 2 C. 4. O. durch
sie gelegt werden können, so ist sie unbestimmt, weil sich
Curven unendlich viele durchgelegt werden.
Diese bilden ein Curvenbüschel 4ter Ordnung mit
16 Schnittpunkten.

§ 10.

Wenn von 16 Durchschnittspunkten zweier C. 4ter Ord-
nung 4 auf einer Geraden liegen, so liegen die übrigen
12 auf einer Curve dritter Ordnung.

wobei unter einer C. 3 Ord. auch 3 Ger. od. eine Lin. u. eine C. 2 O. zu verstehen sind.

<u>Beweis.</u>
Greifen wir aus den 12 P. 9 heraus, so sind durch
sie eine C. 3 O. bestimmt. Dann bilden diese mit
der Geraden eine Curve vierter Ordnung, die 13
Schnittpunkte mit den andern gemein hat. Das ist
aber nur möglich, wenn sie alle gemein hat, folglich
geht die Curve dritter Ordnung durch alle 12 Punkte.
q. e. d.
Mit Hülfe des selben Beweises findet sich:
Wenn von den 16 Durchsch. P. 2 C. 4. O. 8 auf einer

C. 2. O. liegen, so liegen die übrigen auch auf einer C. 2 O.

§ 11. Hierhin gehört der Satz:

Verlängert man die in einer ebenen Curve 3ter Ordnung eingeschriebenen 8 ecks, dessen Ecken 1 2 3 ‥ 8 und dessen Seiten mit I II … VIII bezeichnet werden mögen, nach einander die Seiten

I. IV. | II. V | III VI | IV VII | V VIII | VI I | VII II | VIII III |

so liegen die Durchschnitte derselben auf einem Kegelschnitte.

In der That betrachten wir die Curv. 12. 34. 56. 78 und 23. 45. 67. 81 als 2 C. 4 O. so mögen d. Durchschn. sein:

(12, 23) = g
(12, 45) = h.
(12, 67) = k
(12, 81) = 1

(34, 23) = 3
(34, 45) = 4
(34, 67) = l
(34, 81) = m

(56, 23) = n
(56, 45) = 5
(56, 67) = 6
(56, 81) = p

(78. 23) = q
(78, 45) = r
(78, 67) = 7
(78, 18) = 8

Also haben die beiden Curven 4 ord. 8 Schnittp. gemein, die auf einer C. 2 O. liegen, folglich werden die andern h, k, l, m, n, p, q, r, auch auf einem Kegelschnitte liegen müssen. Dieses sind aber gerade die Durchschnitts-punkte der oben aufgestellten Linien, und so der Beweis geführt.

?

§12.

Wenn von den 16 Punkten einer C. 4. O. 4 auf einer Ger. u. 12 auf einer C. 3 O. oder je acht auf einer C. 2 O. liegen, so kann man ∞ viele C. 4. O. durch diese 16 Punkte legen. Der Beweis ist klar, denn eine C. 3 O. u. eine Gerade, ferner 2 C. 2. O. bilden eine C. 4. O.

?

§13.

Liegen von 16 Punkten vier in der Ebene in einer Geraden, die andern 12 aber nicht in einem Kegel-schnitte oder [illegible], ferner liegen 8 in einer C. 2. O. die übrigen acht aber nicht, so geht nur eine Curve 4. O. durch diese 16 P. zu legen. Der Beweis ist nach §10 klar.

?

F

§14. Zieht man aus den Durchschnitten $a\,a'\,a''\,a'''$ einer Geraden mit einer L. 4. O. Tangenten $a\,b\,c\,d$ $a'\,b'\,c'\,d'$ $a''\,c''\,b''\,d''$ $a'''\,c'''\,b'''\,d'''$, so liegen die 12 Durchschnitte $b'\,b''\,b'''\,b$, $c\,c'\,c''\,c$, $d'\,d''\,d'''\,d$ auf einer Curve 3. O. Der Beweis ist klar, die Tangenten bilden eine L. 4. O. und deren Schnittpunkte aller mit der L. 4 auf einer geraden Linie liegen, die andern müssen daher auf einer L. 3 O. liegen.

F

§15 Gehen die Tangenten in Asymptoten über, so folgt: Zieht man aus vier in gerader Linie liegenden Curvenpunkten $a\,a_1\,a_2\,a_3$ Parallelasymptoten an die Curve, so liegen die bezüglichen

? Zwölf Schnittpunkte auf einer Curve dritter Ordnung.

§16. Ebenso folgt umgekehrt: liegen 12 Punkte einer L. 4. O. auf einer L. 3. O. so zwar, daß sich je drei durch eine gerade Linie verbinden lassen, dann liegen die noch übrigen vier Schnittpunkte der zwei Linien auf einer geraden Linie.

§17. Fallen von den viermal je drei Punkten, je zwei zusammen, so folgt: Wenn eine Curve 3. O. eine L. 4. O.

in einer Punkte convergent und man sie schneidet und man verbindet je zwei derselben, so liegen die 4 Schnittpunkte d. 4 Linien auf einer geraden Linie. ?

Verbindet man nun die acht Durchschnittspunkte einer Linie 2.0. mit einer L: 4.0. je zwei miteinander, oder liegen 8 Punkte einer L: 4.0. auf einer L: 2.0. so schneiden die 4 Verbindungslinien die L: 4.0. wieder in 8 Punkten, die in einer L: 2.0. liegen. § 18

Bei der letzten kann unter einer L: 3.0. auch eine L: 2.0 statt einer Linie, zweier 3 Linien und unter einer L: 2.0. auch 2 Linien gedacht werden. Unter dieser Voraussetzung würde der letzte Satz lauten: Sind a a, a, a,, u. b b, b, b,, je vier in geraden Linien liegenden Punkte einer L: 4.0 und man verbindet je zwei derselben durch eine gerade Linie, so liegen die Schnittpunkte der vier Verbindungslinien mit L: 4.0. auf einer L: 2.0. die auch schließlich in zwei gerade Linien übergehen kann. § 19

§20 Liegen vier Punkte einer Curve vierter Ordnung auf einer Geraden G, so liegen die ihnen zugehörigen 8 Tangentialpunkte auf einer Curve 2ter Ordnung, die auch ausnahmsweise in zwei Gerade übergehen kann. Diese Curve G, nämlich wenn die Begleiterin der Geraden G und die beiden Schnittpunkte, die die Gerade G begleitenden Punkte.

F

Der Beweis geht aus dem vorhergehenden §19 unmittelbar hervor, wenn man die beiden Geraden in einer zusammenfallen läßt.

§21. Die acht Punkte, in welchen die vier Asymptoten einer C. 4. O. diese schneiden liegen in einer C. 2. O. Die Berührungspunkte der Asymptoten liegen nämlich auf einer unendlich entfernten Geraden und die Asymptotenschnittpunkte sind die Tangentialpunkte dieser unendlich fernen Berührungspunkte.

§22. Sind a a' a'' a''' die Schnitte einer Geraden mit einer C. 4. O. u. man zieht von einem Punkte O die Linien

$d\,a\,b\,c$, $d\,a_{,}\,b_{,}\,c_{,}$ $d\,a''\,b''\,c''$ $d\,'''\,b'''\,c'''$, so hat die Curve 3 O. welche durch $b\,b'\,b''\,b'''$ $c\,c'\,c''\,c'''$ geht und die Tangente d. C. in c berührt, in diesen Punkten eine vierpunktige Berührung mit der C. 4.O.

Hält man nämlich die vier Punkte $a\,a'\,a''\,a'''$ fest bestimmt aber an Stelle des einen Curvenpunktes d $d_{,}\,d_{,,}\,d_{,,,}$ herum, so liegen nach §17 die Theilpunkte $d\,d_{,}\,d_{,,}\,d_{,,,}$ $b\,b_{,}\,b_{,,}\,b_{,,,}$ $c_{,}\,c\,c_{,,}\,c_{,,,}$ auf einer Curve dritter Ordnung. Läßt man nun die Punkte $d\,d_{1}\,d_{2}\,d_{3}$ in einen d zusammenfallen, so fallen in d vier Punkte der Curve 3.O. mit 4 Curvenpunkten zusammen q. e. d.

Geht eine C. 4.O. u durch die Ecken 1, 2, 3 ... 8 eines Achtecks und außerdem durch 5 der Durchschnittspunkte h z.... (siehe §11), so geht sie auch durch die anderen drei. §23

Setzen wir die Geraden 12, 34, 56, 78 und 23, 45, 67, 81 wieder als 2 C. 4.O. an, so schneiden sich diese in den

LVU ZINĀTNISKĀ BIBLIOTEKA
A 167-2-87

16 Punkten 12 ... 1 h k l m ... r. durch 13 derselben geht n. Or.
die Curve U, dann folgt aber nach § 4, daß sie auch durch
die anderen drei geht.

Anmerkung

Besteht die Curve U aus zwei Kegelschnitten, so folgt
derselbe Satz, der in §11 bewiesen worden ist.

§24 Zieht man in den acht Punkten, in denen ein Kegelschnitt eine
C. 4. O. schneidet, Tangenten an die Curve, so liegen die 16 zugehörigen Tangentialpunkte auf einer C. 4. O.

Betrachtet man nämlich die Tangenten zu je vier als
eine neue C. 4. O. so liegen 8 Schnittpunkte mit der
C. 4. O. [nämlich die 4 Tang. p.] auf einer C. 2. O. die
übrigen acht also auch. Dasselbe gilt von den anderen
vier Tangenten, folglich liegen alle 16 P. auf einer
C. 4. O.

?

§25. Wenn ein Kegelschnitt mit einer C. 4. O. in einem Punkte a
eine siebenpunktige Berührung hat und die Curve in b
schneidet, so schneidet diejenige C. 4. O. welche die C. in den zu

a gehörenden Tangentialpunkten a' und a'' siebenpunktig berührt, die Curve in den zu b gehörigen 2 Tangentialpunkten b' u. b''.
Fallen nämlich in §24, 7 Schnittpunkte des ersten Kegelschnittes in a zusammen, so fallen auch sieben Tangenten zusammen und daher auch die 14 zugehörigen Tangentialpunkte u. zwar in a' u. a''. Demnach hat auch der zweite K. 7. O. in a' u. a'' eine siebenpunktige Berührung mit der Curve. Der 8 Punkt des Kegelschnittes ist aber b und die beiden andern b' u. b'' d. K. 7. O. die zu b gehörigen Tangentialpunkte.

Ergänzung der Curven zweiter Ordnung.

§26. <u>Definition</u>

Durège 236 Ein System von Curven 2ter Ordnung, die sich alle in denselben 4 Punkten schneiden, soll ein Curvenbüschel genannt und zwar zweiter Ordnung. Die 4 gemeinsamen Punkte heißen die Grundpunkte des Büschels. Bedeuten $u=0$ und $v=0$ irgend zwei Curven des Büschels und bezeichnet man mit λ einen veränderlichen Parameter, so ist

$$u + \lambda v = 0$$

die Gleichung des Kegelschnittbüschels. In der That, die Gleichung stellt 1) eine Curve zweiter Ordnung vor

2) eine, die durch den Durchschnitt oder vielmehr die Durchschnitte der C. $u=0$ $v=0$ geht

3) ist sie allgemein, da λ ganz beliebig ist und für jeden fünften beliebigen Punkt <u>einen</u> festen Werth annimmt.

Denken wir uns nun ein zweites Kegelschnittbüschel

$$w + \lambda' z = 0$$

so sagt man, dieses Büschel ist projectivisch zu dem Büschel

$u + \lambda v$ in Beziehung derjenigen entsprechenden Kegel-
schnitten, welche gleichen Werthen von λ angehören.
Je zwei projectivisch zugeordnete Kegelschnitte werden
sich dann im Allgemeinen in vier von den Basis-
punkten verschiedenen Punkten schneiden, von denen
mehrere zusammenfallen oder in einen oder
mehrere der weggenommenen 4 Basispunkte fallen
können.

Wenn nun zwei Kegelschnittbüschel zu einander
projectivisch sind, so ist der geometrische Ort der
4 Durchschnitte zweier entsprechender Kegelschnitte
eine Curve 4ter Ordnung, welche durch die beiden je
vier Basispunkte der Büschel hindurchgeht.

Beweis

Die beiden Kegelschnittbüschel seien

$$u + \lambda v = 0$$
$$w + \lambda z = 0$$

von diesen sind zwei einander projectivisch ent-
sprechend, wenn ihnen der gleiche Werth von λ zugehört.
Man erhält daher den geometrischen Ort der Durch-
schnitte entsprechender Kegelschnitte, wenn man

Punkte von Gleichungen eliminirt. Dann erhält man die Gleichung:

$$uz - vw = 0.$$

welche eine Curve vierter Ordnung darstellt. Diese wird erfüllt, wenn gleichzeitig $u = 0$ $v = 0$ ist d. h. die Curve geht durch die vier Schnittpunkte des ersten Büschels. Ferner wird sie aber auch erfüllt, wenn gleichzeitig $w = 0$ $z = 0$ d. h. die Curve geht auch durch die 4 Schnittpunkte des zweiten Büschels q. e. d. –

§ 27. Wenn eine C. 4. O. durch ein Büschel 2. O. mit den

Reye 237. Schnittpunkten $a\,b\,c\,d$ u. eins mit den Schnittpunkten $a'b'c'd'$ erzeugt ist, so entspricht der Kegelschnitt mit den Schnittpunkten $a'b'c'd'$, welcher durch einen der Punkte a, b, c, d geht, demjenigen Kegelschnitte mit den Schnittpunkten $a\,b\,c\,d$, welcher die C. 4. O. in dem entsprechenden Punkte $a\,b\,c\,d$ berührt.

Beweis

Der Kegelschnitt, welcher die Schnittpunkte $a'b'c'd'$ hat und durch d z. B. geht, hat außer diesem Punkte noch drei andere mit der C. 4. O. gemein

der ersten entsprechende Kegelschnitt mit den Grund-
punkten a b c d, hat also außer diesen Punkten noch
die Schnittpunkte der ersten Kegelschnitte mit d. C. 7. O.
das heißt a und die drei anderen gemein.
Also hat er in a zwei Punkte mit der Curve gemein
d. h. er berührt sie in a.
Was nun für a gilt, gilt auch für b c d.
Der Satz kann natürlich ebenso gut in Betreff
des Verhältnisses der beiden Kegelschnitte umgekehrt
werden, doch ist es nicht nöthig, ihn daran noch
auszusprechen.
Wenn eine Curve 7. O. durch dieselben beiden
Büschel erzeugt ist, so entspricht dem Kegelschnitt
mit den G. a'b'c'd' welcher durch zwei oder
drei oder auch alle vier der Punkte a b c d
geht, derjenige Kegelschnitt mit den G. a b c d
welcher die C. 7. O. in den zwei oder drei oder
vier entsprechenden Punkten a b c d berührt.
Der Beweis ist derselbe wie vorher.
Auch dieser Satz läßt sich umkehren.

Übrigens ist der Beweis so:

Alle Schnittpunkte eines mit anzunehmenden Kegelschnitts mit der Curve 4. O. müssen, mit Ausnahme der vier Basispunkte, auf dem gegenüberliegend zugeordneten liegen. Denn für die Durchschnitte des Kegelschnitts

$u + \lambda v = 0$ mit der C. 4. O.

$uz - vw = 0$ muss gleichzeitig sein:

$$\left.\begin{array}{l} u + \lambda v = 0 \\ uz - vw = 0. \end{array}\right\} \text{ also auch } v(w + \lambda z) = 0. \quad u(w + \lambda z) = 0$$

Nun sollen die 4 Basispunkte ausgenommen sein d.h. v u. u nicht gleich Null, also:

$w + \lambda z = 0.$

$w + \lambda z$ ist aber der entsprechende Kegelschnitt, der also für dieselben Punkte Null wird d.h. durch sie hindurchgeht. – Dasselbe lässt sich für die Durchschnitte von $w + \lambda z$ mit der C. 4. O. zeigen.

Wenden wir dieses auf unseren Fall an und nehmen an, dass die entsprechende C. 2. O. von den Basispunkten a b c d der C. 4. O. nicht in a berühren, so wird sie also die Curve 4. O. noch in einem vierten

Punkte e treffen müssen, wenn wir als andere drei die Schnittpunkte mit dem Kegelschnitt a'b'c'd' nehmen. Nach dem oben bewiesenen Satze müßte dieser Punkt dann auch auf dem Kegelschnitt a'b'c'd' liegen. Wenn dieses der Fall, so würden die beiden Kegelschnitte abcd und a'b'c'd' sich in fünf Punkten treffen d.h. zusammenfallen. Das geht aber nicht, weil sonst der Kegelschnitt a'b'c'd' auch durch bcd gehen müßte, was wider die Annahme. Damit ist bewiesen, daß e in a fallen muß.

Legt man durch vier beliebige feste Punkte 1,2,3,4, § 28.
einen d.h. einen beliebigen Kegelschnitt, der die Durège 239.
Curve in 1',2',3',4' trifft, durch diese vier Punkte einen zweiten beliebigen Kegelschnitt, der die Curve in 9, 10, 11, 12, trifft, nimmt man 9 als festen Punkt an und legt durch 1, 2, 3, 4, einen variablen Kegelschnitt, der die Curve in 5,6,7,8, trifft, so geht der variable Kegelschnitt 5,6,7,8,9, durch die drei andern Punkte 10,11,12, welche zusammen

mit q die vier Doppelpunkte eines zweiten Kegelschnitts bilden. Diese vier Punkte heissen die den vier Punkten 1 2 3 4 gegenüberliegenden Punkte.–

Beweis I

Ehe wir zu demselben übergehen, müssen wir einen anderen Satz beweisen:

Lehrsatz

Die projektivische Zuordnung zweier Kegelschnittbüschel ist durch drei Paare beliebig zugeordneter Kegelschnitte bestimmt.

Zieht man nämlich in den vier Doppelpunkten eines Kegelschnittbüschels die Tangenten an sämtliche Kegelschnitte, so bilden diese Tangenten unter sich und mit dem Kegelschnittbüschel projectivische Strahlbüschel, indem diejenigen Tangenten, welche demselben K angehören oder welche den nämlichen Kegelschnitt berühren, einander entsprechende Strahlen sind und ebenso ein Kegelschnitt dem Strahl entspricht, den er berührt (Beweis siehe Durège pag 70).

Sind also zwei Kegelschnittbüschel einander projectivisch zugeordnet, so wird auch die Tangentenbüschel erzeugenden Projectivität zugeordnet. Für diese, da sie Strahlenbüschel sind, gilt der Satz, somit, da jeder Tangente nur ein ganz bestimmter Kegelschnitt entspricht, auch beim Kegelschnittbüschel.

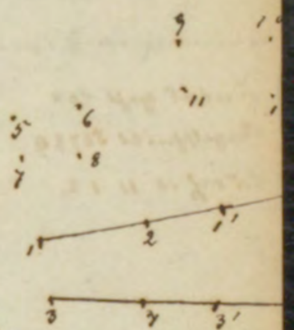
Jetzt können wir zu dem bemerkten Ausnahmefall übergehen.

Hier werden wir folgendes zu beweisen haben:
Legt man durch 1,2,3,4, einen beliebigen Kegelschnitt, schneidet damit die Curve in 5,6,7,8, und legt durch 5,6,7,8, und durch den auf die angegebene Weise gefundenen Punkt 9 einen Kegelschnitt, der die Curve 4. O. noch in 10',11',12' trifft, so müssen, wenn anders es möglich sein soll, die gegebene Curve durch das Kegelschnittbüschel 1,2,3,4, und ein projectivisch zugeordnetes zu erzeugen, 9,10',11',12', die Basispunkte des letzteren sein. Denn wäre dies, so müßte ja auch der Kegelschnitt 9,1',2',3',4' durch sie hindurchgehen, d.h. es fiele 10 in 10' 11 in 11' 12 in 12'.

Nun seien die beiden Kegelschnitte 1,2,3,4,5,6,7,8, und 5,6,7,8,9,10,11,12, gelegt, so kann man zur Feststellung der Projektivität noch je zwei Kegelschnitte beliebig annehmen. Diese seien aber bestimmt, wenn man noch zwei feste Punkte 13 und 14 auf der Curve annimmt und durch sie und die Schnittpunkte 1,2,3,4, u. 9,10,11,12, je zwei Kegelschnitte legt. Denn es ist jedem weiteren Kegelschnitt des Büschels 1,2,3,4, der des Büschels 9,10,12,11, bestimmt und umgekehrt. Zugleich ist aber durch die vierzehn Punkte 1,2 ... 14 die C. 4.O eindeutig bestimmt, denn selbst durch die Punkte 13 und 14 wirklich noch zwei Strahlen gehen, so dürften 13 u. 14 nicht mit 9,10,11,12, oder 1,2,3,4, in einem Kegelschnitt liegen und da nun 1,2,3,4,5,6,7,8, sich auf einem Kegelschnitt befinden, so ist durch obige 14 Punkte nach §12 nur eine Curve 4.O. möglich.

Demnach sind in der That 9,10,11,12, die Schnittpunkte des Kegelschnittbüschels, welches mit dem Kegelschnittbüschel 1 2 3 4 Gerade die gegebene C. 4. O. und deren andere erzeugt.

Lemma II



Man schneide oder ziehe die Geraden 1 2 und 3 4 die die Curve in 1' 2' und 3' 4' treffen. Durch 1' 2' 3' 4' möge ein beliebiger Kegelschnitt gelegt werden, der die C. 4. O. in 9, 10, 11, 12, trifft. Dann muß also noch einer dieser Punkte z. B. 9 [illegible] sein, denn die Curven 1, 2, 1', 2' und 3, 4, 3', 4' kann man als einen Kegelschnitt des Büschels 1, 2, 3, 4, auffassen. Lege man nun durch 1, 2, 3, 4, einen beliebigen Kegelschnitt, bezeichne mit 5 einen der weiteren Durchschnitte desselben mit der Curve und schneidet endlich die Curve mit dem Kegelschnitt 5, 9, 10, 11, 12, in 6 7 8, so hat man eine Curve vierter Ordnung 1, 2, 1', 2', 3, 4, 3', 4', und 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, die die ursprüngliche Curve in 8 Punkten 1', 2', 3', 4', 9, 10, 11, 12, schneidet, die auf einem Kegelschnitt liegen. Folglich müssen die anderen auch Durchschnittspunkte 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, auch auf einem Kegelschnitt liegen. Dennoch wenn 6 7 8 die drei noch übrigen Durchschnitte des Kegelschnitts 1,2,3,4,5, mit der Curve sind und mit dem Kegelschnitt 5',9,10,11,12 sind. Da aber 1,2,3,4, somit auch 1'2' 3'4' und ferner 9 fest bleiben, so verändern auch 10,11,12, sich nicht, wenn man den durch 1 2 3 4 gehenden Kegelschnitt variirt, d.h. wenn der Kegelschnitt 5,6,7,8,9, ein anderer wird.

und es geht der Kegelschnitt 56789 durch 10 11 12.

Beweis III Lit. § 33

.. .. § 29

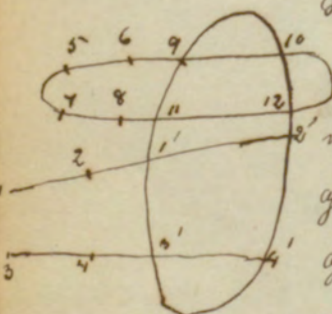
Seite 240

Aufgabe

Zu einer gegebenen Punkten einer C. 4. O. 1.2.3.4. die mit gegenüberliegenden 9 10 11 12 zu construiren, wenn einer derselben z.B. 9 fest ist.

Auflösung.

Man lege durch 1,2, und 3,4, die Linien 1',2',1,2, und 3',4',3,4, lege durch 9, 1',2',3',4', einen Kegelschnitt, der die Curve in 10,11,12, treffe, so sind 10,11,12, die gesuchten Punkte, die mit 9 die den Punkten 1,2,3,4, gegenüberliegenden Punkte ausmachen.



Der Beweis ist nach Beweis II § 28 unmittelbar klar.

I Sollen von den vier Punkten 1,2,3,4, die Punkte 1,3, und 2,4, zusammenfallen, so liegen die gegenüberliegenden Punkte 9, 10, 11, 12 auf einem Kegelschnitte, der die C. 4 O. in den Punkten 1' und 2' berührt, in welchen die Linie 12 die Curve 4 O. schneidet. — § 30 (jetzt § 36) Durège 241 — wenn 9 gegeben ist

Sollte nämlich 1 und 3, 2 und 4 zusammenfallen, so fallen auch 3' und 1', 2' und 4' zusammen d.h. die Curve 2 O. 9, 10, 11, 12, 1', 2', 3', 4' berührt die C. 4. O. in 1' und 2'.

II Sollen von den vier Punkten 1,2,3,4, die Punkte 1,2, und 3,4, zusammenfallen, so liegen die gegenüberliegenden Punkte 9,10,11,12 auf einem Kegelschnitte, der die C. 4. O. in den 4 Tangentialpunkten 1', 2', 3', 4', der in den Punkten 1 und 3 gezogenen Tangenten oder vielmehr in den vier Tangentialpunkten von 1 und 3 schneidet. — wenn 9 gegeben ist

Denn sollen 1 und 2 zusammenfallen, so ist 1, 1', 2', die in 1 gezogene Tangente d.h. 1' und 2' sind die Tangentialpunkte von 1 und ebenso 3' und 4' die von 3. Durch diese Punkte geht aber eine der durch 9, 10, 11, 12 gezogenen C. 2 O. und berührt den

Polyhemieder.

§31. Wenn ein Kegelschnitt eine L. 4. O. in einem Punkte 1 vierpunktig berührt, so liegen die gegenüberliegenden Punkte 9, 10, 11, 12, auf einem Kegelschnitte, der die L. 4. O. in den beiden Tangentialpunkten von 1 berührt.

Durège 242

wenn 9 fest ist

Sollen nämlich 1 u. 2 zusammen, so werden 1' und 2' die Tangentialpunkte von 1, sollen 3 und 4 zusammen, so werden 3' und 4' die Tangentialpunkte von 3. Fällt nun 1 und 3 noch zusammen, so fällt 3' in 1' und 4' in 2', überdies wird 1 und 3 die Tangente in 1 u. 3. d. h. 1' und 2' die Tangentialpunkte von 1. In dieser muss demnach einer der durch 9 10 11 12 gezogenen Kegelschnitte die Curve berühren.

§32 Hat ein Kegelschnitt mit einer L. 4. O. in einem Punkte 1 eine fünfpunktige Berührung, so erfüllen erstens die gegenüberliegenden Punkte 9, 10, 11, 12, die in § 31 ausgesprochenen Bedingungen und zweitens liegen die drei noch übrigen Schnittpunkte 6 7 8 auf dem durch 1 9 10 11 12 gelegten Kegelschnitte.

Durège 243

wenn 9 fest ist

der Beweis des ersten Theiles ist klar, aber auch der des zweiten Theiles. Im allgemeinen Falle liegen nämlich die Punkte 5,6,7,8,9,10,11,12 auf einem Kegelschnittbüschel 1,2,3,4,5,6,7,8, fällt nun 5 in 1, so muss 1,2,3,4,6,7,8, und 1,6,7,8, 9,10,11,12, auf einem Kegelschnitte liegen. 6,7,8, sind die Durchschnitte von dem Kegelschnitte 1,2,3,4, mit d. L. 4. O. liegen also auch auf dem Kegelschnitte 1,9,10,11,12. Derselbe Satz gilt, wenn ein Punkt in 1 eine 6 oder 7 punktige Berührung hat.

Nimmt man auf einer L. 4. O. drei Punkte 9,10,11, willkürlich und zwei andere 1,2, willkürlich, so lassen sich immer 3 andere Punkte 12, 3,4, so bestimmen, dass 1,2,3,4, einerseits und 9,10,11,12 andererseits die vier Basispunkte zweier Kegelschnittbüschel bilden, aus denen die L. 4. O. entstanden ist. § 33. Lösung 274

Construction

Man verbinde 2,1, und verlängere die Linie, bis sie die Curve 4. O. in 2',1', trifft und lege durch 2',1', 9,10,11 eine L. 2. O. die die L. 4. O. noch in 12 u. 3',4', schneidet. Dann verbinde man 3' und 4' bis sie den C. 4. O. in 3 und 4 schneiden, so sind 1, 2, 3, 4, und 9, 10, 11, 12 die verlangten zu einem Berührpunkte.

Beweis I

Jedenfalls erfüllen zwei durch die Berührpunkte 1, 2, 3, 4, und 9, 10, 11, 12 gehenden Kegelschnitte, nämlich die Kegelschnitte 9, 10, 11, 12, 1', 2', 3', 4' und 1, 2, 3, 4, 1', 2', 3', 4' die Bedingung, dass sich ihre wirklichen Schnittpunkte mit Ausnahme der Berührpunkte auf der Curve vierter Ordnung befinden. Diese beiden ordnet man einander zu. Verfährt man ebenso wie in § 29 Beweis I, so wird durch die beweglichen zweiten weiteren Curvenpunkte 13 und 14, gleichzeitig die Projectivität der beiden Büschel und die Curve 4. O. eindeutig bestimmt, so dass durch den Kegelschnittbüschel 1 2 3 4 und den 9, 10, 11, 12 gerade die gegebene C. 4. O. erzeugt wird. Damit ist 12 wirklich der vierte Berührpunkt zu 9, 10, 11 und 3 und 4 die beiden andern Berührpunkte zu 1 und 2.

Beweis II

Nach Annahme liegen die Punkte 9, 10, 11, 12, 1', 2', 3', 4' und 1', 2', 3', 4', 1, 2, 3, 4 auf zwei Kegelschnitten, von denen der letztere allerdings auch zerfallen kann. Verfährt man nun wie im § 28 Bem. II, legt durch 1, 2, 3, 4, einen beliebigen Kegelschnitt, bezeichnet mit 5 einen der weiteren Durchschnitte desselben mit der Curve 4. O. und schneidet endlich die Curve mit dem Kegelschnitt 5, 9, 10, 11, 12 in 6, 7, 8, so hat man eine Curve vierter O. 1, 2, 1', 2', 3, 4, 3', 4' und 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, die die ursprüngliche Curve in 8 Punkten 1', 2', 3', 4', 9, 10, 11, 12 schneidet, die nach Annahme auf einem Kegelschnitt liegen. Folglich müssen die andern acht Durchschnittspunkte 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, auch auf einem Kegelschnitt liegen. Demnach sind 6, 7, 8 die drei noch übrigen Durchschnitte des Kegelschnitts 1, 2, 3, 4, 5 mit der Curve 4. O. und mit dem Kegelschnitte.

Dasselbe gilt für jeden durch 1, 2, 3, 4 gelegten Kegelschnitt.

Somit haben wir bewiesen: legt man durch 1, 2, 3, 4 einen beliebigen Kegelschnitt, so liegen die Durchschnitte desselben mit der L. 7. O. auf einem durch 9, 10, 11, 12 gehenden Kegelschnitte, den man leicht finden kann.*

ebenso gilt dann auch das Umgekehrte.

Das heißt aber nichts anderes, als: die Curve 7. O. ist durch die gezeigte Erzeugung zweier Kegelschnittbüschel mit den Basispunkten 1, 2, 3, 4 und 9, 10, 11, 12 entstanden und somit der Satz bewiesen.

Zusatz

Die vier Curvenpunkten 1,2,3,4 unendlich nahe gegenüberliegenden Punkte 9,10,11,12 haben demnach die Eigenschaft, daß jeder durch 1,2,3,4 gehende Kegelschnitt die Curve in vier Punkten 5,6,7,8 trifft, welche mit 9,10,11,12 auf einem Kegelschnitt liegen und umgekehrt.

Beweis III für § 28

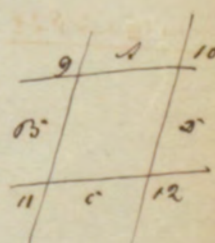
Wir erhalten hieraus einen dritten Beweis für den Satz in § 28 und für den eben bewiesenen.

Dazu wollen wir den Satz in § 28 etwas anders aussprechen, indem wir den Punkt 9 von vorne herein als fest annehmen. Dann lautet derselbe:

Legt man durch vier beliebige feste Punkte 1, 2, 3, 4, und C. 4. O. einen variabelen Kegelschnitt, der die C. in 5, 6, 7, 8 schneidet, so geht der variabele Kegelschnitt durch diese vier Punkte und ausserdem durch einen andern festen 9, durch drei andere Punkte 10, 11, 12, welche zusammen mit 9 die vier Basispunkte eines zweiten Kegelschnittbüschels bilden.

Bedeuten nämlich V und W zwei Kegelschnitte, A B C D vier lineäre Ausdrücke und k eine Constante, so kann die Gleichung einer jeden C. 4. O. auf unendlich viele Arten in die Form gebracht werden

$A C V = k B D W$, weil diese Gleichung 19 willkürliche Constanten enthält, während die Gleichung einer C. 4. O. schon durch 14 Constanten bestimmt ist. Wählt man nun V und W so, dass ihre vier Durchschnitte 1, 2, 3, 4 sind, überdies A und B so, dass ihr Durchschnitt 9 ist und wenn der Durchschnitt von A und D 10, von D u. C 12, von B u. C 11 so geht die durch die vorige Gleichung bestimmte Curve durch diese 8 Punkte hindurch.



Anmerkung

Dies ist immer möglich, denn nachdem bisher 5 Punkte und gleichzeitig 10 Constanten bestimmt sind, kann man die übrigen 9 Constanten so bestimmen, dass die Curve noch durch weitere 9 Punkte geht.

Nun werde aber ein durch 1, 2, 3, 4 gehendes Kegelschnittbüschel durch $U = \lambda \mathfrak{U}$ dargestellt, wenn λ einen unveränderlichen Parameter bedeutet. Die Punkte, welche irgend einer dieser Kegelschnitte mit der Curve außer 1, 2, 3, 4 noch gemein hat, müssen daher der Gleichung

$$AC = \frac{k}{\lambda} BD$$ genügen.

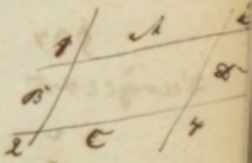
Diese stellt aber ein zweites Kegelschnittbüschel mit den Basispunkten 9, 10, 11, 12 dar, folglich müssen die Durchschnitte stets auf einem durch 9, 10, 11, 12 gehenden Kegelschnitt liegen q. e. d.

Beweis III für § 33

Stellt man die Curve wiederum durch die Gleichung

$$ACU = kBD\mathfrak{U}$$ dar

indem man 9, 10, 11 zu drei Schnittpunkten von V und W macht, den vierten 12 nennt, ferner A u. D sich in 1, B und C sich in 2 treffen läßt und die Schnittpunkte von $(A D')$: 3 von $(C' D')$: 4 nennt, so werden nur noch 9 Constanten willkürlich bleiben. Da nun aber eine L. d. O. erst durch 14 Punkte bestimmt ist, und $A C V = k B D W$ erst durch 5 geht, so werden die noch übrigen Constanten so bestimmt werden müssen, daß die L. noch durch weitere neun Punkte geht. Mithin sind alle Constanten bestimmt und die Durchschnittspunkte 12, 3, 4 feste unveränderliche Punkte. Dieselben erfüllen aber auch unsere Bedingungen, denn jeder durch 9, 10, 11, 12 gehende Kegelschnitt hat die Gleichung



$$V = \lambda W.$$

Die Durchschnitte desselben mit der L. d. O. müssen dann noch der Gleichung:

$$A C = \frac{k}{\lambda} B D \text{ genügen}$$

und daher auch einem Kegelschnitt liegen, der nicht bloß durch die Punkte 1 u. 2 sondern auch durch die festen Punkte 3 und 4 geht. Ebenso läßt sich dort umgekehrt bewiesen und damit ist die Richtigkeit des Satzes, wenn auch nicht der Construction nachgewiesen.—

§37 Läßt man in dem Zusatze §33 die Punkte 1 und 3, 2 und 4 zusammenfallen, so fallen auch die Punkte 1' und 3' 2' und 4' zusammen und es folgt unmittelbar folgender Satz:

Durch 2 × 5

Sind 1, 2, 1', 2', vier in gerader Linie liegende Punkte einer C. 4. O. und zieht man einen Kegelschnitt, der die C. 4. O. in 1' und 2' berührt und durch einen festen Punkt 9 geht, nimmt die übrigen 3 Schnittpunkte 10, 11, 12 und legt durch 9, 10, 11, 12 einen beliebigen Kegelschnitt, so liegen die vier Schnittpunkte desselben

5, 6, 7, 8. mit d. C. 4. O auf einem Kegelschnitt, der die C. 4. O. in 1 und 2 berührt.—

Lemma II

Bedeuten U, V, W drei Kegelschnitte, W einen bestimmten Ausdruck, k eine Constante, so kann die Gleichung einer C. 4. O. auf unendlich viele Arten in die Form gebracht werden:

$U . V = \kappa D'^2 W$, weil dieser Ausdruck 18 Konstanten enthält. Dann trifft jeder der Kegelschnitte U und V die Curve da, wo diese von zweimal D' zusammenfallenden Geraden getroffen wird und außerdem da, wo der Kegelschnitt W die Curve trifft. Also berühren die beiden Kegelschnitte U und V in den Punkten $(U D') = 1$ und 2, $(V D') = 1'$ und $2'$ und außerdem liegen die 8 anderen Schnittpunkte auf dem Kegelschnitt W. Legt man nun durch die acht Durchschnittspunkte der Kegelschnitte V und W einen beliebigen Kegelschnitt $V = \lambda W$, so erhält man für die Durchschnitte desselben mit $C.4.0$ die Gleichung:

$$U = \frac{\kappa}{\lambda} D'^2$$

Diese liegen daher auf einem Kegelschnitte, welcher die Curve in den Punkten $(U D') = 1$ und 2 berührt q. e. d. –

Anmerkung

Nimmt man den Punkt q nicht als gegeben an, so kann man nach § 28 die vier Tangentialpunkte von 1' und 2' als die zweiten Basispunkte auffassen.

Dann erhält der Satz die Fassung:

Liegen 4 P. 1, 2, 1', 2' auf einer geraden Linie, so liegen die 4 Tangentialpunkte von 1' u. 2' auf einem Kegelschnitt, der die C. 4. O. in 1 und 2 berührt.

§ 35 II Läßt man in dem Zusatze § 33, die Punkte 1 und 2, 3 und 4 zusammenfallen, so folgt unmittelbar folgender Satz.

Zieht man durch die vier Tangentialpunkte 1', 2', 3', 4' zweier Punkte 1 und 3 der C. 4. O. und durch einen festen Punkt 9 eine C. 2. O. die die C. 4. O. noch in 10, 11, 12 trifft, und legt nun durch 9, 10, 11, 12 einen beliebigen Kegelschnitt, so liegen die vier Schnittpunkte desselben mit der C. 4. O. auf einem Kegelschnitte, der die C. 4. O. in 1 und 3 tangirt.

Anmerkung.

Nimmt man 9 wiederum nicht als fest an, so lautet der Satz:

Legt man durch die vier Tangentialpunkte 1', 2', 3', 4' zweier Punkte 1 und 3 einer L. d. O. einen beliebigen Kegelschnitt, so liegen die noch übrigen 4 Durchschnittspunkte desselben mit der L. d. O. auf einem Kegelschnitte, der die L. d. O in 1 und 3 tangirt.

§ 36.

Nimmt man 4 nicht als fest an, so erhalten die Sätze in § 30 die Form:

I) Liegen 4 P. 1, 2, 1', 2' der L. d. O. auf einer geraden Linie, so liegen die Tangentialpunkte von 1' und 2' auf einem Kegelschnitt, der die L. d. O. in 1' und 2' berührt.

II Man kann die Tangentialpunkte 1' 2' 3' 4' zweier Punkte 1 u. 3 der L. d. O als die vier Basispunkte eines Büschels auffassen, welches zusammen mit dem Büschel (1, 1, 3, 3) die L. d. O. erzeugt.

Eine ähnliche Form erhalten die Sätze in § 31 und § 32, doch ist dieselbe nach dem Vorhergehenden wohl schon an sich klar.

Zu Frage 257.

Eine Curve 4. O. zu construiren, wenn 14 Punkte derselben gegeben sind.

Auflösung

Seien 1, 2 .... 14 die gegebenen Punkte, so ist es möglich immer zu 6 derselben die drei zu finden, die miteinander mit einem der 5 die gegenüberliegenden Punkte der anderen vier bilden, oder von denen zwei verbunden mit zwei der 5 Punkte den andern 4 gegenüberliegenden. Sind aber die Mittelpunkte der erzeugenden Curven und überdies 9 Punkte der zu erzeugenden Curve gegeben, so kann man beliebig viele Punkte der Curve vierter Ordnung finden, indem man mit Hülfe von Tangentenbüscheln die entsprechenden Kegelschnitte construirt.

Aufgabe. Wenn eine Curve 4. O. durch 14 Punkte gegeben, eine Tangente zu bilden an einen derselben z. B. 1 zu ziehen. – Man construirt wieder die 1 2 3 4 gegenüberliegenden Punkte 5 6 7 8 und sucht den Kegelschnitt (1234) der (5,6,7,8,1) entspricht. Die Tangente an diesen ist die gesuchte.

Aufgabe

Wenn eine Curve vierter Ordnung durch Hülfspunkte gegeben ist, so sollen die Durchschnitte derselben mit einer gegebenen Geraden bestimmt werden. Durège 259.

Auflösung.

Man bestimmt ein Kegelschnittbüschel (a b c d) und den ihm zugeordneten Kegelschnittbüschel (a'b'c'd'), welche durch die Durchschnitte ihrer entsprechenden Elemente die gegebene Curve erzeugen. Alsdann bilden auf der Geraden G die Durchschnittspaare μμ' der Kegelschnitte des Büschels (a b c d) (siehe Durège 116) eine Involution, desgleichen die Durchschnittspaare νν' der Kegelschnitte des Büschels (a'b'c'd') und zwar werden dieselben einander projectivisch zugeordnet sein müssen.

Es kommt nun darauf an, diejenigen Punkte der Geraden G zu finden, in denen einer der Punkte μ mit dem ihm entsprechenden ν zusammenfällt, durch einen solchen Punkt geht ja offenbar gleichzeitig ein Kegelschnitt des Büschels (a b c d) u. (a'b'c'd') und daher gehört ein solcher Punkt auch der Curve 4. O. an.

Zieht man nun von einem der Grundpunkte $a'b'c'd'$ z. B. a' Strahlen nach den Punkten $\mu\mu'$ etc und $\nu\nu'$ etc so erhält man in a' zwei Strahleninvolutionen, deren Paare $a'(\mu\mu')$ den Paaren $a'(\nu\nu')$ projectivisch entsprechen. Ueberdies ist die Strahleninvolution $a'(\mu\mu')$ der Doppeln $(abcd)$ und die Strahleninvolution $a'(\nu\nu')$ der Doppeln $(a'b'c'd')$ projectivisch zugeordnet. Man hat also jetzt nur noch die Geraden zu finden, in denen einer der Strahlen $a'\mu$ mit dem ihm entsprechenden $a'\nu$ zusammenfällt. Zu diesem Ende legt man durch a' einen beliebigen Kegelschnitt S (am besten einen Kreis) und schneidet mit demselben die Strahlenpaare $a'(\mu\mu')$ in den Punktepaaren $m\,m'$, die Strahlenpaare $a'(\nu\nu')$ in den Punktepaaren $n\,n'$, dann schneiden sich die Verbindungslinien $m\,m'$ zu zweien in Punkten desselben Kreises nach [illegible] 126 in einem Punkte p und bilden einen Strahlenbüschel, dessen Strahlen $(p\,m\,m')$ den Paaren $a'(\mu\mu')$ der Involution nach ([illegible]) projectivisch entsprechen. Ebenso schneiden sich die Verbindungslinien $n\,n'$ zu zweien in Punkten desselben Kreises in einem Punkte p' und bilden einen Strahlenbüschel, dessen Strahlen $p'(rr')$ den Kurven $\alpha'(rr')$ der Involution umkehrbar entsprechen. Da aber $\alpha'(rr') \barwedge \alpha'(pp') \barwedge (p\,mm')$ ist, so ist auch

$$p'(rr') \barwedge p(mm').$$

Diese beiden Strahlenbüschel erzeugen daher durch die Durchschnitte ihrer entsprechenden Strahlen einen Kegelschnitt K, welcher durch p und p' geht und den Kegelschnitt S in vier Punkten $s_1 s_2 s_3 s_4$ trifft. Betrachtet man einen dieser Punkte z. B. s_1, so entsprechen einander, da s_1 auf K liegt, die Strahlen

$$p\,s_1 \text{ und } p_1 s_1$$

Da aber s_1 auch auf S liegt, so entspricht dem Strahl

$p s_1 s_1'$ (wo s_1' den zweiten Durchschnitt von ps_1 mit S bedeuten möge) auch dem Involutionspaare $\alpha'(s_1 s_1')$ d. h. $\alpha' s_1$ tritt als spezielle Kurve von $\alpha'\underline{\mu}$ auf. Andererseits entspricht aber dem Strahl

$p_1 s_1 s_1''$ (wo s_1'' den zweiten Durchschnitt von $p_1 s_1$ mit S bedeuten möge) auch dem Involutionspaare $\alpha'(s_1 s_1'')$ d. h. $\alpha' s_1$ tritt als spezielle Kurve von $\alpha'\underline{\nu}$ auf

Welchen sowohl auch a,8, sowohl im Kreise a'u, als auch den ihm entsprechenden a'r. Da nun das nämliche auch von 8283 84 gilt, so hat man nur die Kreisen a,(8,8283 84) zu ziehen und mit diesen die Gerade G in p,p2p3 p4 zu schneiden, so sind dieses die gesuchten Durchschnitte von G mit d. Linien 4.O.

Lehrsatz.

Beilage 260. Sind 1.2.3.4......16 die 16 Durchschnittspunkte zweier Linien 4.O. und ist ausserdem von jeder noch ein Punkt 17 und 21 gegeben, so geht die Linie 4 O. welche durch 17,21 und 12 der Punkte z. B. 5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16 bestimmt ist, durch die Punkte 18,19,20 und 22,23,24 welche zusammen mit 17 und 21 den vier übrigen 1234 resp. von den beiden Linien 4.O. gegenüberliegen.

Bemerk.

Die eine L. 4 O. ist der geometrische Ort der Durchschnitte des Kegelschnittbüschel (1234) mit dem Kegelschnittbüschel (17,18,19,20), die zweite L. 4. O. der geometrische Ort der Durchschnitte derselben Kegelschnittbüschel (1,2,3,4) mit dem Büschel (21,22,23,24.)

Da nun die beiden Kegelschnittbüschel (17,18,19,20) und (21,22,23,24) demselben Kegelschnittbüschel zugeordnet sind, so sind sie untereinander zugeordnet und daher erzeugen ihre Durchschnitte eine C. 4. O. R die durch 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24 hindurchgeht. Dieselbe C. 4. O. geht aber auch durch die 12 Punkte 5 6 ... 16. Denn betrachtet man z. B. den durch 5 gehenden Kegelschnitt des Büschels (1,2,3,4) so entspricht diesem sowohl der Kegelschnitt 17, 18, 19, 20, 5 wie auch 21, 22, 23, 24, 5 weil 5 auf jeder der beiden C. 4. O. liegt. Daher sind 17,18,19,20,5 und 21,22,23,24,5 auch zwei entsprechende Kegelschnitte der Büschel 17,18,19,20 u. 21,22,23,24. Mithin liegt ihr Durchschnitt 5 auch auf der C. 4. O. Dasselbe gilt von allen 12 Punkten und somit ist der Satz bewiesen.

Aufgabe.

Von zwei Curven 4. O. seien vier gemeinsame Punkte 1 2 3 4 und außerdem von jeder noch 11 Punkte gegeben, doch so, dass sich durch diese 15 Punkte wirklich eine Curve 4. O. legen lässt; man soll die Curven 4. O. construiren, welche durch die übrigen 12 Schnittpunkte der beiden C. 4. O. und durch zu einen der andern als Punkte z. B. 17 und 21 ges.

Auflösung.

Man construire die Punkte 18, 19, 20 und 22, 23, 24 die mit 17 einerseits u. 21 andererseits gerade den Punkten 1 2 3 4 in den beiden C. 4. O. resp. gegenüberliegen. Diese Construction liefert dann nach dem vorigen Paragraphen zugleich die beiden erwähnten vierpunktigen Kegelschnittbüschel 17, 18, 19, 20 u. 21, 22, 23, 24, deren Durchschnitte die (Kegelschnitt) Curve 4. O. die gesucht ist, bestimmen.

Anmerkung.

Eine Vereinfachung der vorigen Auflösung tritt auf, wenn 8 von den gegebenen elf Punkten zu je einem außerdem durch 1 2 3 4 gehenden Kegelschnitt liegen z. B. die Punkte 5, 6, 7, 8, und 9, 10, 11, 12 der einen C. 4. O und andererseits die Punkte 5', 6', 7', 8' und 9', 10', 11', 12' der andern.

Um die gegenüberliegenden Punkte zu construiren, hat man nur durch 17, 5, 6, 7, 8, und 17, 9, 10, 11, 12 zu einer Kegelschnitt zu legen. Die drei übrigen Durchschnittspunkte der beiden L. 2. O. 18, 19, 20, bilden daher mit 17 die den Punkten 1, 2, 3, 4 gegenüberliegenden. Dasselbe gilt von den zu 1, 2, 3, 4, 21, gegenüberliegenden Punkte, 22, 23, 24.

Die beiden oder die zwei Kegelschnitte, durch (1, 2, 3, 4,), auf denen jene Punkte liegen, können auch in Linien übergehen.

Liegen nun aber auch noch die Punkte 5' 6' 7' 8' mit 5 6 7 8 und 1 2 3 4 auf demselben Kegelschnitt und ebenso 9' 10' 11' 12' 9, 10, 11, 12, 1, 2, 3 4, so hat man in den Schnittpunkten der Kegelschnitte:

17, 5, 6, 7, 8 und 21, 5', 6', 7', 8'

17, 9, 10, 11, 12 " 21, 9', 10' 11' 12'

8 weitere Punkte der gesuchten L. 4. O. die sich je beiden Kegelschnitte in der projectivischen Beziehung einander entsprechend sein können.

Auch diese beiden Kegelschnitte durch die Basispunkte 1, 2, 3, 4 können in gerade Linien übergehen.

Unter der Annahme, dass die Punkte 17 und 21 nicht gegeben seien geht der Satz in § 260 über in:

Sind 1 2 3 ..... 16 die 16 Durchschnitte zweier Flächen 4. O. so geht die variable Fläche 4. O., welche durch 12 derselben hindurchgeht, als Durchschnitte mit den beiden Flächen 4. O. die der übrigen vier Punkte resp. entsprechenden Basispunkte.

Zusatz 261 Hieraus folgt unmittelbar folgender Satz:

Sind 1, 2, ---- 13, dreizehn Schnittpunkte zweier Flächen 4. O. u und v und 17, 18, 19, 20 beliebige in u den Punkten 1, 2, 3, 4 oder überhaupt 4 von den dreizehn Punkten gegenüberliegende Punkte, so geht die variable F. 4. O., welche durch diese vier Punkte 17, 18, 19, 20 und die von den 13 übrig gebliebenen 9 Punkte geht, durch die andern drei Schnittpunkte 14, 15, 16 der beiden Flächen u und v.

Dasselbe gilt, wenn sich beliebig viele Flächen 4. O. in 13 Punkten schneiden und auf einer derselben die vier gegenüberliegenden Punkte

Gegeben sind.

Haben zwei Curven vierter Ordnung (u und v) in a, b und c einen vierpunktigen Berührung und überdies noch einen vierten Punkt d gemeinsam, so liegen die andern drei Schnittpunkte auf einer variabelen Curve 4 Ordnung, die durch die 4 zweiten Tangentialpunkte von d gehen und die beiden andern Curven vierter Ordnung in b und c vierpunktig berührt und sie in d schneidet. Durége 265.

Der Beweis ist klar, da die gegenüberliegenden Punkte von d die vier Tangentialpunkte sein können.

Haben zwei Curven 4. O. u und v in a einen achtpunktige Berührung und schneiden sich überdies in b c d, so liegen ihre andern drei Durchschnittspunkte auf einer variabelen Curve vierter Ordnung, die die beiden andern in a achtpunktig berührt und durch b, c, d geht, da man annehmen kann, dass in a die je vier gegenüberliegenden Punkte zusammenfallen.

haben endlich zwei Curven 4. O. in a eine dreizehnpunktige Berührung, so liegen die andern drei Schnittpunkte auf einer normalen C. 4. O. die durch diese 13 Punkte geht.

Die beiden letzten Sätze liefern nichts Neues, nur sind sie unter einem andern Gesichtspunkte betrachtet entstanden.

Ueber die Erzeugung einer Curve 4. O. von der 14 Punkte gegeben sind.

Ehe man zu derselben übergeht, müssen erst einige Hülfssätze durchgenommen werden. Cremona § 21. § 37.

I

Bedeutet x den Abstand eines veränderlichen Punktes einer Geraden von einem beliebigen festen Punkte derselben und besteht die Gleichung:

$$a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 + \lambda(b_0 x^4 + \dots b_4) = 0$$

wobei a und b gegebene Coefficienten, λ ein veränderlicher Zahlencoefficient bedeutet, so entsprechen jedem Werth von x 3 Werthe für andere Punkte der Geraden, denn hat man mit Hülfe von x, λ bestimmt, so ergiebt sich eine Gleichung vierten Grades, deren eine Wurzel x ist. Für jeden Werth von λ stellt die Gleichung eine Gruppe von 4 Punkten vor, die so von einander abhängen, daß durch Bestimmung eines von ihnen alle bestimmt sind. Das System der unendlich vielen Gruppen von 4 Punkten entsprechend den unendlich vielen Werthen von λ nennt man eine Involution des 4ten Grades

§38. II Fallen in einem Punkte zwei Punkte zusammen, so heißt ein solcher Punkt ein Doppelpunkt. —

Es giebt nun bei der Curven vierter Ordnung im Allgemeinen 6 Doppelpunkte. —

Ein Doppelpunkt entsteht nämlich dann und nur dann, wenn Ω einen solchen Werth hat, daß dessen Gleichung 2 gleiche Wurzeln besitzt.

Haben wir nun allgemein eine Gleichung 4 Grades

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ so wird wenn wir

$x = \frac{x}{y}$ setzen

$$ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4 = 0 = u.$$

diese Gleichung nach ihren Ableitungen Null sein müssen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4ax^3 + 3bx^2y + 2cxy^2 + dy^3 = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = bx^3 + 2cx^2y + 3dxy^2 + 4ey^3 = 0.$$

Eliminirt man hieraus die Unbekannten, so ergiebt sich für die Coefficienten der Gleich. 4 Grades eine Gleichung 6 Grades. —

Wenden wir dieses auf unsern Fall an, so wird die Gleichung in Bezug auf Ω vom 6ten Grade.

Die 6 Wurzeln derselben sind die Werthe von Ω, deren zugehörige Punktgruppen Doppelpunkte besitzen.

III

Schneidet eine beliebige Transversale die Flächen eines Flächenbüschels 4ter Ordnung, so bilden die Durchschnitte derselben mit jeder Fläche der 4ten Ordnung eine Gruppe von 4 Punkten. Die Gesammtheit aller dieser so gebildeten Gruppen von 4 Punkten stellt eine Involution 4ten Grades vor. Durch jeden Punkt der Transversale geht eine einzige Fläche des Büschels, welche diese Transversale in den übrigen 3 Punkten der Gruppe, zu der der Punkt gehört, schneidet. Jede Gruppe ist also durch einen einzigen Punkt bestimmt und dieses ist gerade das Kennzeichen der Involution. — Cremona 49. §39

Im Allgemeinen wird es sechs Doppelpunkte in dieser Involution geben. Es sind dieses die sechs Punkte, in welchen die Linie von Flächen des Büschels berührt werden kann. Denken wir uns aber die Linie durch einen der Basispunkte hindurchgehen, so entsteht eine Involution 4 Grades, deren [illegible] gemeinschaftl. §40

Gemeinsam haben. Ziehen wir daher von diesen beiden Punkten ab, so geht die Involution in eine quadratische über, welche wie bekannt, nur zwei Doppelpunkte hat. Mithin kann die Ebene nur noch in zwei Punkten von dem Curvenbüschel tangirt werden können, die auch neue 2 Punkte sind bewiesen.
Diese zwei Berührungspunkte sind dann gleichzeitig die Doppelpunkte der quadratischen Involution.
Wenn von einer solchen aber zwei Punktepaare gegeben sind, so sind die Doppelpunkte nicht nur, sondern die ganze Involution bestimmt.

§41. IV Aufgabe.

Es sind 13 Punkte gegeben, es sollen einige Curven 4. Grades gezeichnet werden, die durch dieselben gehen.

Lösung

Die dreizehn Punkte seien 1, 2, 3 --- 13.
Nehmen wir die Punkte 1, 2, 3 ... 8 als Basispunkte eines Curvenbüschels dritter Ordnung an, so werden wir durch dieselben 5 C. 3. O. legen können, welche überdies durch die vier Punkte 9, 10, 11, 12, 13 gehen.

construiren wir dann in einem der 8 Grundpunkte die 6 Tangenten an die Curven, so wird nach Dreiecke

§13 a der Punkt x dadurch bestimmt werden können, daß alle durch ihn und die fünf Punkte 9, 10, 11, 12, 13 gehenden Strahlen den durch dieselben Punkte gehenden Curven 3. O. projectivisch entsprechen. — Ein Strahlenbüschel und ein Curvenbüschel 3. O. erzeugt aber eine Curve 4 O. und zwar muss die Letztere durch die Punkte 1, 2, 3 . . . 13, x gehen. —

Nehmen wir nun andere 8 von den dreizehn Punkten als Grundpunkte eines Büschels 3. O. an, so muss sich der andere Punkt y dadurch construiren lassen, daß alle von ihm nach den andern fünf Punkten gehenden Strahlen den entspr. C. 3. O. entsprechen. So erhalten wir eine zweite Curve 4 der Ordnung die durch die dieselben 13 Grundpunkte und durch den Punkt y geht. — So können wir noch mehrere Curven des Büschels construiren und erhalten dadurch gleichzeitig die andern 8 Grundpunkte. —

§ 42. V Aufgabe.

Es sind 14 Punkte 1, 2, … 14 einer Curve 4. O. gegeben, es soll die beiden noch übrigen Schnittpunkte einer Linie, die durch zwei derselben 1, 2 geht, mit der Curve 4. O. bestimmt werden.

Auflösung.

Fassen wir zunächst die Punkte 1, 2, … 13 ins Auge, so werden wir, wie gezeigt durch diese zwei Curven 4. O. legen können, die auf der Linie je zwei entsprechende Punkte der Involution 2 Gr. ausschneiden. Dadurch sind aber die beiden Doppelpunkte und mit ihnen die ganze Involution bestimmt. Legen wir nun andererseits durch die Punkte 1, … 12, 14 zwei Curven 4. O. so werden dieselben wiederum auf der Linie eine ganz fest bestimmte Involution 2. Gr. ausschneiden. – Diese beiden Involutionen werden aber ein Punktepaar x y gemeinsam haben müssen, nämlich dasjenige, welches die durch alle vierzehn Punkte gehende Curve 4. O. auf der Linie ausschneidet. Dieses sind dann aber die gesuchten

Punkte.

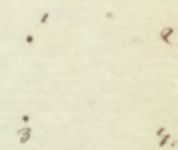
Jetzt sind aber alle Daten gegeben, um die Hauptaufgabe vollständig lösen zu können.

Aufgabe.

Es seien 14 Punkte 1, 2, 3 … 14 einer Curve 4. O. gegeben, es sollen die drei Punkte 15, 16, 17 gefunden werden, die mit O. z. L. zusammen, die gegenüberliegenden Punkte von 1, 2, 3, 4 der C. 4. O. werden. §§ 43.

Lösung.

Betrachten wir das vollständige Vierseit 1, 2, 3, 4, so werden die Linien 12 und 34 einen Kegelschnitt des Büschels 1, 2, 3, 4 abgeben. Die vier Durchschnitte derselben mit der Curve 4. O. müssen dann aber auch auf einem durch 9, 15, 16, 17 legenden Kegelschnitte liegen. Diese Durchschnitte $x\,y\,x_1\,y_1$ sind nach dem oben bewiesenen Satze zu construiren, ebenso ist der Punkt 9 bekannt. Somit können wir einen Kegelschnitt $x\,y\,x_1\,y_1$ 9 construiren, auf welchem die Punkte 15, 16, 17 liegen müssen.



Suchen wir nun die Seiten 13, 24 des vollständigen Vierseits auf, so wird man, da auch Durchschnitte mit d. C. 4. O. zu bestimmen wissen werden

Kegelspitz erhalten, der durch 9 geht und auf welchem die Punkte 15, 16, 17 liegen müssen. Folglich sind dieselben die 3 noch übrigen Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte.

§ 44. Wenn nun die 5 Punkte so verschoben sind, daß 1, 2, 3 einerseits zu einem Kegel und 9 u. 10 zu einem andern gehören, so wird man durch 12, 23, 31, 3 Linien ziehen und deren Durchschnitte mit der Linie 9.10 nach dem früheren bestimmen können. Legt man dann durch diese zu je zweien und durch 9 u. 10, je ein Kegelschnittbüschel d.h. ein Gewinde, so müssen sich aus jedem Büschel ein Kegelschnitt in den beiden bekannten Doppelpunkten treffen. Ganz ebenso kann der vierte Doppelpunkt zu 1, 2, 3 gefunden werden.

Erzeugung einer L. 4. O. vermittelst eines Linienbüschels 3ter Ordnung.

Durège 236. §45.

Wenn ein Linienbüschel 3ter Ord. zu einander projectivisch sind, so ist der geometrische Ort der Durchschnitte jeder Geraden mit dem ihr entsprechenden der Linien 3. O. eine Linie 4. O. welche durch den Mittelpunkt des Strahlbüschels und die 9 Basispunkte des Kegelschnittbüschels geht.

Der Beweis hierfür ist genau so, wie bei der Erzeugung durch 2 Kegelschnittbüschel.

Alle Schnittpunkte einer miterzeugenden L. 3 O. mit der L. 4. O. müssen mit Ausnahme der neun Basispunkte auf dem projectivisch zugeordneten Strahl liegen und umgekehrt.

Denn für den Durchschnitt der Linien 3. O.

$$u + \lambda v = 0 \text{ mit der L. 4. O}$$

$$uz - vw = 0 \text{ muss gleichzeitig sein:}$$

$$\left.\begin{array}{l} u+\lambda v=0 \\ uz-vw=0 \end{array}\right\} \text{ d.h. } v(w+\lambda z)=0 \text{ und } u(w+\lambda z)=0.$$

Für alle außer den neun Basispunkte angenommenen sind d.h. u und v nicht gleich Null, also

$$w+\lambda z=0.$$

Wendet ist aber der entsprechende Kreis, der alle sind dieselben Punkte gleich Null werden d.h. durch die Grundpunkte geht.

Durège 237.
§ 46.

Wenn einen L. 4. O. durch einen Büschel 3 O. mit den Grundpunkten 1, 2 .... 9 und einem Kreisbüschel mit dem Mittelpunkte 10 erzeugt ist, so entspricht die Curven 3. O. welche durch 10 geht, denjenigen Kreise, der die Curven 4. O. in 10 berührt.

Die durch 10 gehende L. 3. O hat außer den Grundpunkten den Punkt 10 und noch zwei andere 11, 12 mit der Curve gemein, der entsprechende um 10 beschriebene Kreis geht also nach dem oben bewiesenen Satze durch 10, 11, 12 hat also in 10 zwei Punkte mit der Curve gemein. — Oder so: berührte der entsprechende Kreis die Curve 4. O. nicht in 10, so müßte er die Curve 4. O. außer in 10, 11, 12 noch in einem vierten Punkte 10' schneiden durch diesen müßte dann aber auch die L. 3. O. gehen, was nicht möglich ist.

Auf eben dieselbe Weise wird der Satz bewiesen:
Der Kreis, welcher durch einen Basispunkt 1 des L. büschels 3. O. geht, entspricht derjenigen L. 3. O. welche die L. 4. O. in 1 berührt. —

Geht ein Kreis durch zwei oder drei Grundpunkte

des Büschels 3. O. so berührt die entsprechende C. 3. O.
die C. 4. O. in diesen Punkten.

Durch mehr als drei Punkte kann dies nicht geschehen, ohne daß die Curve 4. O. in eine Linie und zwar in diese Gerade und eine C. 3. O. zerfällt.

Wenn außer einer Curve 4. O. neun Punkte 1, 2, ... 9 so bestimmt werden können, daß durch sie zwei C. 3. O. U und V gehen, so können wir diese Punkte als die Basispunkte eines Büschels 3. O. auffassen, welches zusammen mit einem Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt 10 beliebig angenommen ist, die C. 4. O. erzeugt. § 47.

Beweis

Bedeuten A B lineare Ausdrücke, U und V zwei Curven 3. O. und k eine Constante, so kann man die Gleichung jeder C. 4. O. auf unendlich viele Arten in die Form bringen:

$$A\,U = k\,B \cdot V$$

weil diese Gleichung 23 Constanten enthält, während die Gleichung einer C. 4. O. schon durch 14 Const. bestimmt. Wählt man die C. 3. O. U und V, daß ihre neun Durchschnitte die Punkte 1, 2 ... 9 sind, weil nach der Annahme, daß durch diese

Punkte zwei Linien 3. O. gelegt werden können, ist es möglich, so werden dadurch 18 Constanten bestimmt und es bleiben nur noch 5 willkürliche. Diese kann man aber so bestimmen, daß d. L. 4. O. durch weitere fünf Punkte geht. Dann ist dieselbe als durch 17 Punkte fest bestimmt und es bleibt nichts willkürliches. Nennt man mit der Durchschnitt von $(A B)$ 10 so geht diese durch 4. O. durch 12 ... 10 hindurch. Nun wenn aber die durch 1 2 ... 9 gehender Büschel 3. O. durch

$$\Omega = \lambda V$$

dargestellt, wenn λ einen veränderlichen Parameter bedeutet. Die Punkte, welche irgend einen dieser [Kegelschnitte] L. 3. O. mit der L. 4. O. außer 1, 2 .... 9 gemein hat, erfüllen daher der Gleichung

$$A = \frac{\lambda}{n} B$$

Diejenigen und liegen daher stets auf einer durch $(A B) = 10$ gehenden Geraden.

Um also den irgend beliebigen Punkt 10 zu finden, hat man nur durch 1, 2 ... 9 zwei L. 3. O. zu legen. Die Verbindungslinie der Durchschnitte dieser beiden L. 3. O. mit der Linie 4. O.

treffen sich dann im Punkte 10. Durch eine L. 3. O. wird schon genügen. –

Nun können auf einer L. 4. O. keineswegs neun beliebige Punkte als Doppelpunkte eines Büschels 3. O. angesehen werden, sondern es sind nur sieben beliebig zwei aber fest. Zur Bestimmung eines Büschels 3. O. gehören nämlich 16 Bedingungen, da dasselbe durch 8 Punkte und diese werden durch je zwei Bedingungen bestimmt sind. Nun sollen diese neun Doppelpunkte auf einer L. 4. O liegen, müssen also der Gleichung der Curve 4. O. genügen d. h. es bleiben nur 16 - 9 = 7 willkürliche Bedingungen. Cremona 55. § 48.

Sind aber 7 von den 10 Doppelpunkten gegeben, so sind die andern bestimmt.

Zum Beweise unterscheiden wir zwei Fälle:

I Auf einer L. 4. O. sind 6 Punkte 1, 2....6 unverändert und der siebente 10 unverändert gegeben. Legt man nun durch 10 einen willkürlichen Strahl, der die L. 4. O. noch in 11, 12, 13 trifft, so schneiden sich die L. 3. O. die durch 1, 2, ... 6 und 11, 12, 13 gehen in drei Punkten 7, 8, 9 die zusammen mit 1, 2 ... 6 § 49

die dem Punkte 10 gegenüberliegenden Doppelpunkte einer Büschel 3. O. bilden.
Legt man durch 10 eine beliebige Gerade, so wird damit die Curve in 11, 12, 13 und mit den L. 3. O. 1, 2 ... 6, 10, 12 13 in 7, 8, 9, so müssen, wenn es möglich sein soll, die gegebene Curve durch den Büschel 1, 2 ... 9 und einen Geradenbüschel 10 zu erzeugen, 7, 8, 9 die noch fehlenden Punkte des Büschels 3. O. sein. Nun kann man zur Festlegung der Projectivität noch zwei Geraden und 2 L. 3. O. beliebig wählen. Diese aber sind bestimmt wenn man noch 2 Punkte 14 und 15 auf der Curve annimmt und durch jeden eine Gerade und die entsprechende L. 3. O. gehen läßt. Dann ist die projectivische Beziehung fest. Zugleich aber ist durch die 14 Punkte 1, 2 ... 8, 10, 11 .. 15 [den Punkt 9 können wir fortlassen, da die dieser einer Büschel 3. O. durch 8 Punkte bestimmt ist] die L. 4. O. eindeutig bestimmt, denn sollen durch 14 und 15 noch zwei L. 3. O. gelegt werden können, so dürfen dieselben nicht mit 1, 2 .... 8 auf einer L. 3. O. liegen, und da nur 10, 11, 12, 13 in gerader Linie liegen, so ist

durch obige 17 Punkte nur eine C. 4. O. möglich.
Demnach sind die Punkte 7, 8, 9 an der Stelle die gesuchten Punkte.

<u>Bemerkung</u>

Wie wir schon gezeigt, kann man die Gleich. jed. C. 4. O. auf unendlich viele Arten in die Form bringen:

$$A\mathfrak{A} - \lambda B.\mathfrak{D}.$$

Wählt man nun A und B so, daß sie sich in 10 schneiden und $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{D}$ so, daß sie sich in 1, 2 — 7 6 schneiden, so bleiben von den 23 Constanten nur noch 7 Constanten willkürlich, weil anstatt durch die 7 Punkte 17 Const. bestimmt sind und zwar bleiben von den neun Doppelpunkten nur 8 willkürlich d. h. noch zwei nicht willkürliche Constanten hinzuzukommen. Sieben Punkte fallen aber noch genau zur Bestimmung der C. 4. O., so daß dieselbe eindeutig festgesetzt ist. — Die anderen drei Schnittpunkte von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{D}$ seien 7, 8, 9. Nun wird aber ein durch 10 gehender Strahlenbüschel durch

$$\lambda = \frac{A}{B}$$

vorgestellt. Die Punkte, welche irgend einem dieser Strahlen mit der Curve außer 10 gemeinsam hat, welcher daher der Gleichung

$$U = \frac{a}{b} V$$

genügen, und liegen daher immer auf einer durch 1, 2 … 9 gehenden C. 4. O. –

§50. II Sind auf einer C. 4. O. 7 Punkte 1, 2 … 7 als Basispunkte eines Büschels dritter O. gegeben und man legt durch diese 7 Punkte und 2 andere beliebige 11 und 12 ein Büschel 3. O., so giebt es in jedem derselben stets eine und nur eine C. 3. O. die sich mit der anderen in 2 Punkten 8, 9 schneiden, die auf der C. 4. O. liegen und zusammen mit 1, 2 … 7 die Basispunkte eines Büschels 3. O. bilden, welches mit einem fest bestimmten Strahlenbüschel die C. 4. O. erzeugt.

Beweis

Zunächst läßt sich genau auf dieselbe Weise, wie im Satz I, Beweis II zeigen, daß es zu den 7 Punkten stets 3 andere fest bestimmte Punkte 8, 9, 10 giebt, so zwar daß 1, 2 … 9 einerseits und 10 andererseits die Basispunkte eines Büschels 3 und 1 O. bilden, die die C. 4. O. bilden. Wir unterlassen daher den Beweis. Giebt es aber drei solche Punkte, so wird

man statt durch 1.2 … 7 und 11 und 12 zwei Curven 3. O. legen könnte. Eine jede derselben gehört aber zu einem der vorher bestimmten Büschel 3. O. folglich muß es unter den C. 3. O. der beiden Büschel statt zwei Büschel nurmehr und nur ~~nur~~ zwei geben, die sich in den Punkten 8 und 9 auf der C. 4. O. schneiden. Ferner kann es aber auch keine andere geben, die sich in zwei anderen Punkten 8' und 9' der Curve 4. O. schneiden, denn alsdann müßten diese nach § mit 1.2 … 7 wiederum die Basispunkte eines Büschels 3. O. bilden, welches die Curve erzeugt, was nicht möglich ist.
Damit ist der Satz bewiesen. —

An Stelle der 2 Punkte 11 und 12 können beliebig viele der Curve 4. O. genommen werden. Immer wird es in jedem der entstehenden Büschel eine C. 3. O. geben, die sich mit je einer aus einem andern Büschel in denselben zwei Punkten 8 und 9 schneidet. Wenn also die Curve 4 O. nicht gegeben wäre, sondern außer den 7 Punkten nur drei noch, so könnten doch die neun Basispunkte der Curven Büschels 3. O. gefunden werden, wie sich dieses auch unmittelbar aus den Gleichungen ergiebt.

Es seien die Gleichungen der Curvenbüschel, welche durch die beiden Punkte und zu zweien der drei anderen gehen:

$$\left.\begin{array}{l} u + \lambda v = 0 \\ u_1 + \lambda_1 v_1 = 0 \\ u_2 + \lambda_2 v_2 = 0 \end{array}\right\}$$

Soll es nun unter den drei Curvenb. 3. O. 3 C. 3. O. geben die sich in zwei Punkten gleichzeitig schneiden, so muss gleichzeitig sein:

$$\left.\begin{array}{l} u + \lambda v = 0 \\ u_1 + \lambda v_1 = 0 \\ u_2 + \lambda v_2 = 0 \end{array}\right\} \text{s. f.}$$

$$\frac{u}{v} = \frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2}$$

$$\left.\begin{array}{l} u v_1 = u_1 v \\ u_1 v_2 = v_1 u_2 \end{array}\right\}$$

Es sind dieses zwei Gl. 9 Grades. Da aber die Büschel 7 Punkte gemeinsam haben, so werden die Gleichungen auf zwei vom zweiten Grade reducirt, und stellen daher Kegelschnitte dar, die da u_1 u. v_1 in beiden vorkommt, sich schon in 2 Punkten schneiden. Die andern zwei Schnittpunkte können berechnet werden und geben die gesuchten Punkte. 5

Geht ein Strahl des Strahlenbüschels in eine Tangente über, so muß auch die zugehörige L. 3. O. die L. 4. O. in diesem Punkte tangiren und es folgt der Satz: § 50.

Der neunte Basispunkt eines Büschels 3. O. gegenüberliegende Punkt ist einer der beiden Tangentialpunkte desjenigen Punktes der L. 4. O., in welchem eine Curve des Büschels 3. O. diese tangirt und die Verbindungslinie der beiden Tangentialpunkte ist der dieser Curve entsprechende Strahl.

Nehmen wir an, daß die L. 4. O. keinen Doppel und keine Rückkehrpunkte besitze, so beträgt nach Durège 188 die Anzahl der Tangenten, die von einem Punkte auf der L. 4. O. an dieselbe gezogen werden können $n.(n-1) - 2 = 10$ und wir kommen zu dem Satze:

Geht man durch die 9 Basispunkte eines Büschels 3. O., falls die erzeugte L. 4. O. keine Doppel und Rückkehrpunkte besitzt, diejenigen 10 L. 3. O. die die L. 4. O. tangiren, so schneiden sich die Tangenten in den Tangirungspunkten in <u>einem</u> Punkte, dem zu den 9 Punkten gegenüber liegenden Punkte.

Besitzt die C. 4. O. Doppel oder Rückkehrpunkte, so ist die Anzahl der möglichen Tangenten nach D weniger als 18 können. Andererseits könnte es nur eintreten, daß von dem Mittelpunkte des Asymptotenbüschels gerade an solch einem Punkt eine Tangente gezogen werden könnte. Dann müßte auch die entsprechende C. 3. O. durch diesen Punkt gehen. Im Allgemeinen wird dieses aber nicht der Fall sein, nehmen wir dagegen nun sechs Doppelpunkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 als gegeben an, so können wir folgenden Satz aussprechen.

Paczowski diss. inaug. § 8.

Legen wir durch einen Doppel oder Rückkehrpunkt oder Berührungspunkt einer C. 4. O. eine C. 3. O., die die C. 4. O. in diesem Punkte tangirt und überdies durch 6 gegebene Punkte der C. 4. O. 1, 2, 3, 4, 5, 6 geht, so bilden die drei andern Schnittpunkte 7, 8, 9 zusammen mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 die neun Basispunkte eines Büschels dritter Ord. deren gegenüberliegenden Punkt der neunte Schnittpunkt der in dem Doppel resp. Rückkehrpunkt od. Berührungspunkt gezogenen Tangente mit der C. 4. O. ist.

Ersetzen wir nun die sechs Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 so daß je drei in einen andern Doppel resp. Rückkehr-

punkt fallen, so folgt folgender Satz:
Legt man durch drei Doppel resp. Rückkehrpunkte oder Wendepunkte einer C. 4. O. einen C. 3. O., die die C. 4. O. in diesen Punkten berührt, so bilden die drei andern Schnittpunkte zusammen mit je zweien der drei in den Doppelpunkten zusammenfallenden Punkte, 9 Basispunkte eines Büschel 3. O. dessen gegenüberliegenden der dritte Schnittpunkt der in dem dritten Doppelpunkt gezogenen Tangente mit der C. 4. O. ist.

Wenn von den gegebenen 7 Basispunkten eines Bü- § 51
schelbüschels 3. O. sechs auf einer Curve zweiter Ordnung liegen, die auch in zwei Linien übergehen kann, so liegen die andern beiden in einer geraden Linie mit dem siebenten Basispunkt und umgekehrt.

Der Beweis ist klar. Liegen nämlich von den Durchschnitten zweier C. 3. O. 6 auf einer C. 2. O. oder 3 auf einer geraden Linie, so liegen die andern auf einer geraden Linie oder einem Kegelschnitt.

Ferner folgt der Satz:
Liegen von den 12 Durchschnitten einer C. 3 u. 4 O.

9 so, dass durch sie eine L. 2 und 1 Ord. oder 3 gerade Linien gezogen werden können, so liegen die drei andern Schnittpunkte auch in gerader Linie und zwar trifft diese gerade Linie die L. 3. O. in einem dritten Punkte, der der gegenüberliegende zu den 9 ersten Schnittpunkten ist.

oder eine andere beliebige L. 3. O.

Der Beweis ist unmittelbar klar. Man kann die L. 2 und 1 oder die 3 geraden Linien als spezielle Curven 3. O. auffassen, die durch die neun ersten Schnittpunkte geht. Folglich bilden dieselben die Basis eines Büschels dritter Ordnung.

§ 52.

Wenn man mehrere Berührungspunkte zusammenfallen lässt, ergeben sich mehrere Sätze, von denen wir einige herausheben wollen.

I Hat eine L. 3. O. eine 6 fache Berührung mit der Curve 3. O. so zwar, dass sich in diesem Punkte der berührende Kegelschnitt zusammenzieht, der eine sechsfache Berührung hat, und liegen drei von den übrigen 6 Schnittpunkten auf einer geraden Linie, so liegen die andern auch auf einer Geraden, deren dritter Schnittpunkt mit d. L. 3. O. der gegenüberliegende Punkt von den ersten 9 Schnittpunkten ist.

II

Haben zwei L. 3. O. in ein und demselben Punkte eine Achtfache Berührung mit einer L. 4. O. und liegt ihr neunter Durchschnittspunkt auch auf der L. 4. O. so schneiden sie die L. 4. O. in je 3 anderen Punkten, die in einer geraden Linie liegen und zwar schneiden sich die Geraden in einem Punkte der L. 4. O., dem gegenüberliegenden Punkte zu den 9 Durchschnitten der beiden L. 3. O.

III

Ein ebenso lautender Satz ergiebt sich, wenn zwei L. 3. O. in demselben Punkte eine neunfache Berührung haben.

IV

Hat eine L. 3. O. mit einer L. 4. O. in einem Punkte eine 10fache Berührung und läßt sich eine zweite L. 3. O. ziehen, die in diesem Punkte eine neunfache Berührung hat, so liegen die beiden anderen Schnittpunkte mit der L. 4. O. mit dem zehnfachen Punkte in einer geraden Linie, die überdies die L. 4. O. in dem gegenüberliegenden Punkte trifft.

V

Hat eine L. 3. O. mit einer L. 4. O. in einem Punkte

eine elliptische Berührung, so ist der zwölfte Schnittpunkt
fällt sich noch einer zweite L. 3. O. ziehen lässt, die in diesen
Punkten eine unendliche Berührung, dann einen Kon-
Gentralpunkt des elliptischen Punktes, welcher der
Tangente der gegenüberliegende ist.—

Alle diese Sätze lassen eine Umkehrung zu. Eine wollen wir anführen.

Liegen von den 12 Schnittpunkten einer L. 3. u. 4. O. drei auf einer geraden Linie, so kann man die anderen neun als die Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung auffassen, das zusammen, mit dem neunten Durchschnitte der geraden Linie als Mittelpunkt einer Kegelschnitt-büschels die L. 4. O. erzeugt.—

Alle angeführten Sätze lassen sich in ähnlicher Weise umkehren.—

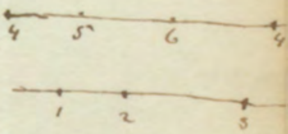
VI

Durège 275.
§ 53.

Sind 1, 2, 3, 1', 4 Punkte einer L. 4. O. in geraden Linie und zieht man durch den einen Tangentialpunkt 10 des einen derselben z. B. 1' eine Gerade 10, 11, 12, 13, so schneidet diese die L. 4. O. in drei Punkten 11, 12, 13, die auch einer L. 3. O. liegen, welche die L. 4. O. in den drei anderen Punkten 1, 2, 3, berührt und durch drei solche, in gerader Linie liegende Punkte 7, 8, 9 geht.

Lemma 6.I

Wir gehen davon aus, dass nur 6 zu je drei in gerader Linie liegende Punkte 1, 2, 3, ... 6 gegeben seien. Dann müssten die anderen drei Punkte, die mit den ersten 6 zusammen die Basis des Büschels 3. O. bilden, jedenfalls auch in einer geraden Linie liegen. Nämlich finden wir den gegenüberliegenden Punkt, indem wir die Verbindungslinie der zweiten Schnittpunkte der beiden Linien mit der C. 3. O. 1'4' in 10 und 14 verlängern bis sie die Curve trifft. Der eine der 10 beiden Schnittpunkte ist dann der gegenüberliegende Punkt. Ebenso lassen finden sich die drei noch fehlenden Basispunkte des Büschels dritter Ordnung.



Lassen wir nun die Punkte 1 u. 4, 2 u. 5, 3 u. 6 zusammenfallen, so geht die Linie 1'4' in die Tangente an 1' über, und 10 in den einen Tangentialpunkt von 1'. Die 6 gegebenen Basispunkte sind in drei Doppelpunkte übergegangen oder vielmehr in drei Paare unendlich nahe liegender Punkte. Die gesuchten drei Basispunkte müssen aber wieder

in geraden Linie liegen und somit liegen die Schnitt-
punkte einer jeden durch 10 gegebenen Linie mit
der L. 4. O. in der That noch einer L. 3. O. welche
die L. 4. O. in den drei Punkten 1, 2, 3 berührt
und drei andern in geraden Linie liegenden
schneidet.

Lemma 4

Bedeuten A B C D E F G lineare Ausdrücke, so
kann die Gleichung einer L. 4. O. auf unendlich
viele Arten in die Form gebracht werden:

$$A B C D = k E^2 F G$$

weil diese Gleichung 15 Constanten enthält.
Dann trifft jede der Geraden A B C D die Curve
da, wo diese von zwei mit E zusammenfallenden
Geraden getroffen wird und außerdem, wo
die Geraden F und G die Curve schneiden.
Also sind A B C D vier Tangenten der Curve,
deren Berührungspunkte (AE) = 1, (BE) = 2, (CE) = 3
(DE) = 1' auf der Geraden E liegen. Die Tangen-
tialpunkte (AF) (BF) (CF) (DF) dieser Berührungspunkte aber liegen
auf der Geraden F, die Tangentialpunkte

$(A\,G)\,(B\,G)\,(C\,G)\,(D\,G)$ auf der Geraden G
bei $10 = (D\,F)$ der einen Conjugationspunkt von 1. Legt man durch diesen eine beliebige Gerade $D = \alpha F$ so erhält man für die Durchschnitte derselben mit der Curven die Gleichung

$$ABC = \frac{\alpha}{\beta}\,\xi^2 G$$

Diese liegen also auf einer C. 3. O., welche die Geraden A, B, C in den Punkten $(A\,\xi) = 1$, $(B\,\xi) = 2$, $(C\,\xi) = 3$ berührt, und in den Punkten $(A\,G) = 7$, $(B\,G) = 8$ $(C\,G) = 9$ schneidet. q. e. d.

Aufgabe

Wenn eine C. 3. O. durch 9 Punkten 1, 2, 3 ... 9 gegeben ist, zu 7 derselben 1, 2, 3 .. 7 die beiden zugehörigen Berührungspunkte ξ η und den dritten mit gegenüberliegenden Punkt ζ zu construiren. Durège 255. § 54.

Auflösung.

Man lege durch 1, 2, 3 ... 7 und zwei anderen Punkten wie den gegebenen z. B. 8, 9, 10 ein Curvenbüschel 3. O., so wird sich in jedem eine Curve dritter Ord. befinden, die sich mit den andern beiden aus den anderen Büscheln in denselben zwei Punkten x und y treffen. Dieselben dann nach

§ die zu 1, 2, 3, 4 … 7 gehörigen Linien fehlende Berührungspunkte. Wir haben somit 16 Punkte der Curve 4. O. Geht sie durch 14, so geht sie auch durch die andern beiden. Nehmen wir folgende 14 Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, x, y, so ist die Aufgabe determinirt: es sind 14 Punkte einer Curve 4. O derart gegeben, dass sich durch sie ein Curvenbüschel 3. O. legen lässt, wir sollen den gegenüberliegenden Punkt z bestimmen. Diese Aufgabe ist aber unmittelbar gelöst. Man construire nach Durège 90, die Tangenten, welche die sämmtlichen durch 10, 11, 12, 13, 14 gehenden Curven 3. O. in einem der Basispunkte z. B. in 1 berühren, construirt man dann nach Durège 130 den Punkt z so, dass die Strahlen des Büschels z (10, 12, 11, 13, 14) den eben construirten Tangenten an die Curv. 3. O. des Büschels nach Chasles entsprechen, so ist z der verlangte gegenüberliegende Punkt zu 1, 2 … x y

Denn alsdann ist auch Durège 113 der Kegelschnitt (z)

Zusammenhang mit dem ~~Büschel~~ 30. (1,2 ... 13) verbunden zu-
stimmen erzeugen stehen die gegebenen L. 7. O.
Wesentlich vereinfacht wird die Aufgabe, wenn 6 der
Punkte auf einem Kegelschnitte liegen und wir
wollen diesen Fall einmal näher betrachten.
Es mögen 1, 2, 3, 4, 5, 6, die Punkte sein, durch
welche ein Kegelschnitt gelegt werden kann. Nehmen wir dieselben als
Denken wir uns dann durch die Punkte 1, 2, 3, 4 .... 13 Grundpunkte des erzeugenden Büschel 30. an
nach § 41 [illegible] Curven 4ter Ordnung,
so müssen dieselben auf dem festen Kegelschnitt
1, 2, 3, 4, 5, 6 eine Involution 8ten Grades ausschneiden.
Da das Eliminationsresultat einer Gleichung
mit 2 Unbek.
2ten u. 4ten Gr. einer Gl. 8 Grades mit einem Un-
bekannten ist, die zugleich die Form einer Gleich.
der Involut. achten Grades ist. Alle diese Curven
4. O. haben aber mit dem festen Kegelschnitt 6
Punkte gemein und zwar dieselben 6 Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Sehen wir also von diesen ab, so geht die Involution
in eine quadratische über. Wird aber auf
einem Kegelschnitte eine quadratische Involution
ausgeschnitten und man geht auf einem beliebigen

Punkte o dieses Kegelschnitts Strahlenpaare nach den einzelnen Schnittpunkten, so bilden diese Strahlenpaare zugeordnete Paare einer Involution 2ten Grades (Figur 126). Nimmt man also eine beliebige feste Linie an, so schneiden die zugeordneten Paare dieses involutorischen Büschels auf der Linie eine quadratische Involution aus.

Hiernach ist es nun leicht, die 2 fehlenden Durchschnittspunkte des Kegelschnitts 1, 2, 3, 4, 5, 6 mit der zu verwendenden der L. 4. O. zu bestimmen.

Man lege durch 1, 2, 3 … 13 zwei L. 4. O. die auf dem Kegelschnitte die Punkte $\alpha \alpha'$ und $\beta \beta'$ ausschneiden, nehme einen beliebigen Punkt o auf dem Kegelschnitte an und verbinde ihn mit diesen 4 Punkten, verlängere die Linien, bis sie eine feste Gerade in den Punkten $a\, a'\, b\, b'$ treffen. Dann sind dieses zugeordnete Paare einer quadrat. Involution auf der Geraden. Durch zwei derselben sind aber die Doppelpunkte und mit ihnen die ganze quadr. Involution bekannt.

Nun lege man durch die Punkte 1, 2, 3 — 12, 17 wieder 2 L. 7.0 und mache genau dieselben Constructionen wie vorher. Dann wird auch der Linie eine zweite quadratische vollkommen bestimmte Involution ausgeschnitten. Die Curve 7.0. die bedingt alle 14 Punkte 1, 2 … 14 geht d. h. unserem Gesichtspunkt beider Büschel gemeinsam, welchen müssen ihre 2 Durchschnitte mit der L. 2.0. derart sein, daß die entsprechenden Punkte beiden Involutionen angehören. Diese Punkte sind aber leicht zu construiren und zwar nur mit Hülfe des Lineals. Hat man sie gefunden, so verbindet man 0 mit denselben. Die beiden Durchschnitte der Verbindungslinien mit dem Kegelschnitt sind dann die gesuchten Punkte. Sie mögen 15 und 16 heißen.

Nun können wir aber die L. 2.0. von vornherein mit einer geraden Linie, die die beiden andern Doppelpunkte verbindet, die wir aber schon nicht weiter brauchen, d. h. als eine L. 3.0. das Product ($u_1 - b x_3$) und die auch nicht bekannt sind ansehen. Die Verbindungslinien ihrer Durchschnitte 15 u. 16 mit d. L. 7.0. muß also durch den gegenüberliegenden

Punkt gehen. Im § 42 haben wir die Aufgabe gelöst, die Durchschnittspunkte einer Linie, der durch 2 Basispunkten oder zwei Punkte einer durch 14 Punkte gegebenen L. 7. O. geht, zu bestimmen welches ist der gegenüberliegende Punkt, zu construiren. Ist aber der gegenüberliegende Punkt gegeben, so brauchen wir nur durch ihn und zwei der anderen gegebenen Punkten z. B. 9 und 10 eine Linie zu ziehen und wiederum deren zwei übrige Durchschnitte mit d. L. 7. O. zu bestimmen. Die entsprechenden Curven 3. O. gehen dann durch die fest gegebenen Basispunkte und durch die drei bekannten Schnittpunkte der beiden Linien mit d. L. 7. O; ~~und~~ sind also fest bestimmt. Ihre drei übrigen Schnittpunkte mit einander sind die fehlenden 3 Basispunkte.

Anmerkung

Wie wir sehen, werden diesem Falle nur 6 Basispunkte beliebig und die anderen zu construiren. Noch einfacher gestaltet sich die Sache, wenn 6 der gegebenen 14 Punkte zu je drei auf einer gerader Linie liegen. Lassen wir dieselben nämlich als die 6 beliebigen Doppelpunkte auf, so können wir, ähnlich wie vorher, die vierten Durchschnitte 15 und 16 der beiden durch die 6 Punkte gelegten Linien nach der L. 4. O. bestimmen. Die Linie 15, 16 geht dann wieder durch den gegenüber liegenden Punkt, der wiederum also construirt werden kann. Das Übrige bleibt die Construction dieselbe.

Die ferneren sich anschließenden Aufgaben haben wir eigentlich schon gelöst.

Durège 256. §55.

Aufgabe.

Wenn eine L. 4. O. durch 14 Punkte gegeben ist, und man nicht einen unter ihnen z. B. 7, als Mittelpunkt eines Strahlenbüschels und sechs andere z. B. 1, 2, 3, 4, 5, 6 als Doppelpunkte eines Büschels 3. O. so soll man die drei noch fehlenden Doppelpunkte des Büschels 3. O. finden, so dass dieses mit dem Strahlenbüschel zusammen die gegebene Curve erzeuge.

Auflösung.

Man lege durch 7 und zwei der Punkte 8 ... 14 zwei gerade Linien 78 und 79 und bestimme die beiden noch fehlenden Schnittpunkte derselben mit der Curve 4. O. die durch die 14 Punkte gegeben

gegeben ist. Dieselben seien 15, 16 u. 17, 18. Dann lege man durch 1, 2, 3, 4, 5, 6, und 8, 15, 16 und 9, 17, 18 je eine Curve 3. O. Dieselben mögen sich noch in den Punkten x y z schneiden, so sind dieses die gesuchten. Der Beweis ist klar.

Durège 257.
§ 56.

Aufgabe

Eine C. 4. O. zu construiren, wenn 14 Punkte derselben gegeben sind.

Auflösung I

Seien 1, 2 ... 14 die gegebenen Punkte. Man construire zuerst nach § 54 die zu irgend 7 derselben zugehörigen 2 Punkte x y und den zu diesen gegenüberliegenden Punkt z. Dann ist zugleich der dem Büschel 3. O. (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, x y) zugeordnete Kegelschnittbüschel z bestimmt. Man erhält daher beliebig viele Curvenpunkte, wenn man die Durchschnittspunkte beliebiger Kegelschnitte mit den ihnen entsprechenden C. 3. O. aufsucht.

Auflösung II

Man nehme einen der gegebenen Punkte z. B. 7 als Mittelpunkt des Kegelschnittbüschels an und 6 andere 1, 2 ... 6 als 6 Basispunkte des Büschels 3. O., construire sodann die drei noch übrigen Basispunkte x y z, die mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 gebildeten dem Punkte 7 gegenüberliegen. Das Uebrigen bleibt dann selbst darstellen, wie vorher.

Wenn eines K. S. durch 17 Punkte gegeben ist, um einen derselben z. B. 1 die Tangente an den Kurven zu construiren. Dreieck 258 § 57.

Auflösung.

Man construirt zu A und 6 anderen beliebigen der 17 Punkte die drei fehlenden nach den beiden Methoden. Dadurch erhält man zugleich ein Tangentenbüschel in 1 und den ihm projectivischen Strahlbüschel M. Bestimmt man nun in A denjenigen Strahl AT, welcher dem Strahle MA in M entspricht, so ist AT die gesuchte Tangente. Der Beweis ist klar.

Aufgabe.

Wenn man von einer K. S. 17 Punkte gegeben sind und es liegen 6 derselben auf einem Kegelschnitt, und man construirt den gegenüberliegenden Punkt von diesen 6, so sollen die 5 übrigen Durchschnitte eines durch diese 7 Punkte gelegten beliebigen, aber festen K. S. mit der K. S. bestimmt werden. § 58.

Ehe wir die Aufgabe lösen können, müssen wir einige Sätze voranschicken.

cf Durège 122

Lehrsatz

Sind 1, 2, 3, 4 ... 9 die Basispunkte eines Büschels 3. O. und von denen 6 z. B. 1, 2, 3, 4, 5, 6 auf einem Kegelschnitt liegen d. h. die anderen drei 7, 8, 9 auf einer geraden Linie und man legt durch die sechs Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 derselben einen Kegelschnitt C. 3. O. S, so schneidet diese die C. 3. O. des Büschels in Punktepaaren $\alpha\alpha'\alpha''$, $\beta\beta'\beta''$, etc. die zu je drei in geraden Linien liegen. Die Verbindungslinien dieser Paare also die Linien $\alpha\alpha'\alpha''$, $\beta\beta'\beta''$ etc. gehen dann durch einen festen Punkt, der Geraden 7, 8, 9.

Beweis

Bezeichnet man den Kegelschnitt 1, 2, 3, 4, 5, 6 mit K_{16} und die Gerade 7 8 9 mit A_{78} und mit D irgend eine Curve des Büschels, so kann jede Curve desselben $\chi = 0$ durch die Gleichung

$$\chi = \mathfrak{D} + \lambda K_{16} \cdot A_{78}$$

dargestellt werden, wenn λ einen veränderlichen Parameter bedeutet. Bezeichnet man aber die drei Durchschnitte von D u. S (außer 1, 2, ... 6) mit 10, 11, 12

so muß 10, 11, 12 zunächst auf einer geraden Linie liegen, die wir mit $A_{10,12}$ bezeichnen wollen.
Dann kann die L. 3. O. S durch die Gleichung:

$$S = \Sigma + \kappa R_{16} A_{10,12}$$ dargestellt werden,

da die Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11, 12 auch als Basispunkte eines Büschels 3. O. angesehen werden können.
Die Durchschnitte 1, 2, 3, 4, 5, 6, $\xi\ \xi'\ \xi''$ von X und S müssen daher der Gleichung:

$$X - S = R_{16}(\lambda A_{7,8} - \kappa A_{10,12}) = 0$$

genügen d. h. auf dem Kegelschnitte $R_{16} = 0$ und der Geraden $\lambda A_{7,8} - \kappa A_{10,12} = 0$ liegen. Der erstere verbindet die Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6, also die letzte die Punkte $\xi\ \xi'\ \xi''$; aber diese geht für jeden Werth von λ durch den Punkt, in welchem sich die Linien 7, 8, 9 und 10, 11, 12 schneiden q. e. d.

<u>Lehrsatz</u>

Seien 1, 2, 3, 4, 5, 6 ... 9 die Basispunkte eines Linienbüschels 3. O. und mögen wir annehmen die Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 auf einem Kegelschnitt liegen. Legt man durch dieselben eine feste L. 3. O. S, so schneidet diese jede L. 3. O. des Büschels in den zugehörigen

Nach Durège 125.

Linie liegenden Punkten $\alpha\,\alpha'\,\alpha''$ $\beta\,\beta'\,\beta''$ etc. Zieht man nun aus einem beliebigen Punkte O der C. 3. O. S, Strahlen nach diesen zusammengehörigen Punkten, so bilden diese Strahlen eine Strahleninvolution dritten Grades.

Beweis

Eine Strahleninvolution dritten Grades hat nach Seite 76 die Form:

$$\varphi(\alpha\beta) + \lambda\,\psi(\alpha\beta) = 0$$

wenn φ und ψ ganze homogene Functionen dritten Grades und α und β die laufenden Coordinaten. Sehen wir zu, ob die Gleichung unseres Strahlenbüschels O auch in eine solche Form gebracht werden kann, denn dann ist der Satz bewiesen.

Verlegen wir das Coordinatensystem zunächst in den Punkt O als Anfangspunkt, so möge die Gleichung der festen Curve S sein

$$U(x\,y) = 0 \text{ (deren Constante gleich Null ist.)}$$

Die Punkte $\alpha\,\alpha'\,\alpha''$, $\beta\,\beta'\,\beta''$, etc sind die Schnittpunkte der festen C. 3. O. S mit dem Curvenbüschel welches durch die Punkte 1, 2 … 9 geht.

Nennen wir dasselbe $A + \lambda B$.

Eliminiren wir hieraus aus f und $A + \lambda B$ die Veränderliche y, so werden wir, da beide 6 Punkte gemein haben, eine Gleichung 3 Grades von der Form erhalten:

so genau, dass zuerst zwischen A und f, dann zwischen B und f eliminirt, und die Eliminationsresultate mit λ zusammengestellt werden.

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 + \lambda(b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3) = 0.$$

Dieser Gleichung müssen die Punkte $\alpha\alpha'\alpha''$, $\beta\beta'\beta''$ genügen.

Wir können uns dieselbe aber noch auf andere Weise entstanden denken:

Die Punkte $\alpha\alpha'\alpha''$, $\beta\beta'\beta''$ liegen wir beziehungsweise zu je drei auf einer Geraden. Wir nun ihre Verbindungslinien schneiden sich in einem festen Punkte m, dessen Coordinaten ξ' und η' sein mögen. Es entsteht also in m ein Strahlenbüschel, dessen Gleichung sein möge:

$$\eta - \eta' - a'(\xi - \xi') + \lambda[\eta - \eta' - a''(\xi - \xi')] = 0.$$

Eliminiren wir aus dieser Gleichung und der Gleichung der festen C. 3. O. $f(x,y)=0$ eine Veränderliche, so erhalten wir wiederum eine Gleichung 3. Grades, der unsere Punkte genügen müssen. Die Form derselben ist aber:

d.h. aus $\eta - \eta' - a'(\xi - \xi')$ u. aus $\eta - \eta' - a''(\xi - \xi')$ und folgen die Eliminationsresultate derselben mit λ zusammen.

$$v(x, \eta' + a'(x - \xi')) + \lambda v(x, \eta' + a''(x - \xi')) = 0.$$

Gehen wir jetzt zu dem Punkte O. Da derselbe der Anfangspunkt des Systems ist, so ist die Gleichung

$$\beta = n\,\alpha \text{ (irgend eines durch O gehenden Strahles) } x.$$

Schneidet dieser die C. 3. O. $V(x\,y) = 0$ in einem Punkte xy, so wird er seiner Gleichung durch die Werthe $\alpha = x$ $\beta = y$ genügt, wodurch er die Gleichung

$$\beta = \frac{y.\alpha}{x} \text{ erhält, woraus}$$

$$y = \frac{x.\beta}{\alpha}.$$

Substituirt man diesen Werth in

$V(x\,y) = 0$, so erhält man für die Durchschnitte die Gleichung:

$$V\left(x,\ \frac{x\beta}{\alpha}\right) = 0. \text{ (eine Wurzel derselben ist } x = 0)$$

Nun wollen wir diesen Strahl aber gerade durch einen der 3 Punkte gehen lassen, in welchen eine Gerade das Büschel m trifft und zwar wollen wir die Gerade

$\eta - \eta' = \alpha'(\xi - \xi')$ wählen, geht. (die Richtung ist der Strahl fest bestimmt.) Folglich muss sein:

$$\frac{x\beta}{\alpha} = \eta' + \alpha'(x - \xi')$$

$$x\beta = \alpha\eta' + \alpha'\alpha(x - \xi').$$

$$x = \frac{\alpha\eta' + \alpha'\alpha.\xi'}{(\beta - \alpha'\alpha)}.$$

(Lassen wir die Gerade durch einen der beiden andern Punkte gehen, so erhalten wir dasselbe Resultat, folglich müssen von der Strahl aus nur ... 3. Ge. welche Strahlen zusammengehören, die noch den drei Schnittpunkten einer Curve das Büschel m gehen.)

Eine andere Gerade der Büschel 0 wollen wir durch einen anderen Punkt x gehen lassen, in welchem die Gerade

$$\eta - \eta' = \alpha''(\xi - \xi') \text{ die C. 3. O. } U(x\,y) = 0 \text{ schneidet.}$$

Also muß für diesen Schnittpunkt sein:

$$x' = \frac{\alpha\,\eta' + \alpha''.\,\alpha\,\xi'}{(\beta - \alpha\,\alpha)}$$

Setzen wir aber diese beiden Werthe von x in die Gleichung:

$$U(x,\ \eta' + \alpha'(x - \xi')) + \lambda\, U(x,\ \eta' + \alpha''(x - \xi')) = 0$$

ein oder auch in die Gleichung

$$a_0 x^3 + \ldots \quad + \lambda(b_0 x^3 + \ldots \qquad) = 0.$$

so wird dieselbe in der That in Bezug auf λ [illegible] ganz [illegible] q. e. d.

Lehrsatz

Der im vorigen Lehrsatz entstandene aus den Geraden $\alpha\alpha'\alpha''$, $\beta\beta'\beta''$ … bestehende Strahlbüschel ist in Bezug auf die Strahleninvolution 0 projectivisch, in der Art, daß z. B. dem Strahle $\alpha\alpha\alpha''$ der Strahl $\sigma(\alpha\,\alpha''\alpha')$ entspricht.

Beweis

Es ist zu beweisen, daß für ein und denselben Strahl m $\xi\xi'\xi''$ der Strahl $\sigma(\xi'\xi''\xi)$ entspricht.

In der Strahleninvolution von allgemeiner oder gewisser Art werden sich drei Strahlen für ein Ω gefunden, deren Schnitt-punkte mit der Curve 3. O. in einer geraden Linie liegen, die durch den Punkt m geht. Entspricht also in dem Strahlenbüschel m für denselben Ω ein Strahl, der durch einen der Schnittpunkte geht, so geht er auch durch die anderen und entspricht somit nicht nur dem einen Strahl, sondern auch den beiden zugehörigen. Wenn wir es nun für zwei Ω bemerken können, dass die Schnittpunkte eines Strahles der Involution und des sich ergebenden Strahles des Strahlenbüschels auch der C. 3. O. liegen, so ist es für alle nachgewiesen. Für Ω = 0 und Ω = ∞ ist es aber der Fall, folglich immer. Besser ist es so: Wenn man den Strahl $\beta = \frac{\gamma \cdot \alpha}{x}$ an stellt durch einen der Schnittpunkte der Linien

$$\eta - \eta' = a'(\xi - \xi') \text{ und}$$
$$\eta - \eta' = a''(\xi - \xi') \text{ mit der C. 3. O.}$$

ganz allgemein durch den Schnittpunkt einer Linie:

$$\eta - \eta' - a'(\xi - \xi') + \Omega\left[\eta - \eta' - a''(\xi - \xi')\right]$$

Diese lassen würden, so würden wir für jedes Ω immer dasselbe Resultat erhalten haben und hieraus folgt dann, dass einem und demselben d immer zwei solche Werthe der Variabeln c und m entsprechen, die durch denselben Punkt der L. 3. O. gehen. q. e. d.

Jetzt können wir aber unsere Aufgabe unmittelbar lösen.–

Es seien die 17 Punkte 1, 2, 3 ... 17 der L. 4. O. gegeben. 6 derselben 1, 2, 3, 4, 5, 6 liegen auf einem Kegelschnitte. Bezeichnen wir zu ihnen die Punkte 15, 16, 17 als zugehörige Basispunkte und den Punkt 18 als gegenüberliegenden Punkt und construiren in der ersten Weise ein Curvenbüschel 3. O. in 18 ein projectivisches Strahlenbüschel.

Nun mögen ~~auf~~ durch die Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 18 verschiedene L. 3. O. gelegt werden, ebenso, deren Durchschnitte mit der L. 4. O. bestimmt werden.

Alsdann werden auf der Curve 3. O. einzelne Punkte p p' p'' ... Punktgebilde, die zu je drei in einer Geraden liegen, andererseits aber von den Strahlen des Strahlbüschels 18 diesen projectivische Punkte. v.

Verbindet man $p\,p'\,p''\ldots$ mit 18, und verlängert überdies die Linien $p\,p'\,p''\ldots$ bis sie sich in m schneiden, so haben wir erstens in 18 einen Strahleninvolution 3 Grades und einen dieser projectivischen Strahleninvolution 1 Grades, zweitens aber in m ein Strahlenbüschel das der Strahleninvolution 3 Gr. und welches auch dem Strahlenbüschel 18 projectivisch ist. –

Es kommt nun darauf an, diejenigen Punkte der L. 3. O. S zu finden, in denen einer der Punkte p mit dem ihm entsprechenden r zusammenfällt, denn diese müssen der L. 7. O. angehören.

Oder man muß in der Strahleninvolution 3 Gr. und dem Büschel 18, die Geraden finden, an denen einer der Strahlen 18p mit dem ihm entsprechenden zusammenfällt.

Wir bemerken, daß die Strahlbüschel m und 18 projectivisch und zwar entspricht $m(p\,p'\,p'')$ dem Strahle 18 r, wenn 18 r den Strahlen $m(p\,p'\,p'')$ entspricht.

Diese beiden Strahlbüschel erzeugen daher eine L. 2. O. die durch 18 und m geht und da 18 auf der L. 3. O. S liegt, diese muß die 5 merkwürdigen Punkten $\mathfrak{L}^{13}\,\mathfrak{L}^{(1)(2)}\,\mathfrak{L}^{(3)}_{(4)}$

geh.

Betrachtet man einen dieser Punkte z. B. $L^{(1)}$, so ent-
sprechen einander, da L auch dem Kegelschnitt liegt

$18 L^{(1)}$ (als Scheitel Lage von $18 r$) und $L^{(1)}$?

Aber da L' auch auf der C. 3. O. S liegt, so entspricht
dem Strahl

$m(L''a, a_1)$ (wo a, a_1 die beiden andern Durch-
schnitte von $m L'$ mit S bedeuten mögen) auch dem

Durchmesser gemeinsam

$18(L'a, a_1)$ d. h. ~~18~~ L'' tritt auch als Scheitel
Lage von 18μ auf, mithin fällt auch $18 L'$ sowohl
ein Strahl 18μ, wie 18ν u. zwar der entsprechenden.
Da man dasselbe ähnliche auch von $L^{(2)} L^{(3)} L^{(4)} L^{(5)}$ gilt,
so sind diese die gesuchten Durchschnitte von S
mit der C. 4. O.

Aufgabe.

Wenn eine C. 4. O. durch 14 Punkte gegeben ist, so sollen
die Durchschnitte derselben derselben mit einer
Geraden G bestimmt werden, die durch einen
der gegebenen 14 Punkte z. B. 1 geht.

Auflösung.

Man betrachte 1 nebst den Punkten 2, 3, 4, 5, 6, 7
als Basispunkte einer Schaar 3. O. ...

dazu gehörigen Punkte 15 und 16 mit den gegenüber-
liegenden Punkt 17.
Legt man dann durch 1, 2, … 6, 7, 15, 16 einen [illegible]
[illegible] 3.0. so würde dieser auch den Bereich zu einem
Doppelringe 2 Grades umschmelzen, wenn man
von dem Punkte 1 absieht. Weiter gestaltet die
Sache sich genau so, wie Durège 259.

Dritter Abschnitt

Die gerade, konische und cubische Polaren eines Punktes

Definition

Legt man durch einen festen Punkt x als Pol eine Transversale A, welche eine Curve z. B. $u = 0$, in den Punkten $z^{(1)}\, z^{(2)}\, z^{(3)}\, z^{(4)}$ schneidet, so soll unter dem Zeichen, wenn y irgend einen anderen Punkt auf der Transversale A ist: Durège 168

$$\sum_{h=1.2.3.4} \quad \sum_{r=1.2.3.} \left(\frac{y\,z^{(h)}}{x\,z^{(h)}}\right)_r$$

in welchem das Summenzeichen sich auf den oberen Index h bezieht, die Summe der Combinationen r^{ter} Classe, die aus den 4 Abschnittsverhältnissen

$\frac{y\,z^{(h)}}{x\,z^{(h)}}$ gebildet werden können, verstanden werden. Setzt man nun

$$y\,z^{(h)} = x\,z^{(h)} - xy \text{ und stellt die Gleichung}$$

$$\sum_{h=1.2.3.4}\left(\frac{y\cdot z^{h}}{x\cdot z^{h}}\right)_r = \sum_{h=1.2.3.4}\left(\frac{x\,z^{(h)} - xy}{x\,z^{(h)}}\right)_r = 0$$

auf, so ist diese in Beziehung auf den Abschnitt xy vom r^{ten} Grade $(r = 1, 2, 3)$, daher giebt es auf

Durège 169.

der Transversale r Punkte y, welche dieser Gleichung genügen. Jeder dieser Punkte heisst ein harmonischer Mittelpunkt $r$ten Grades für den Pol x und in Bezug auf die 4 Durchschnitte der Transversale u mit der Curve $u = 0$.

Lässt man ferner die Transversale A sich um den Pol x drehen und denkt sich bei jeder Lage derselben die harmonischen Mittelpunkte r^{ten} Grades bestimmt, so heisst der geometrische Ort derselben die $(4-r)^{te}$ Polare des Pols x in Bezug auf die Curve $u = 0$.

Lehrsatz

Die $(4-r)^{te}$ Polare eines Punktes x bezüglich einer C. 4. O $u = 0$, ist eine Curve von der $(4-r)^{ten}$ Ordnung und ihre Gleichung lässt sich bei veränderlichem y in die Form bringen

$$\Delta_y^r(u_x) = 0 \quad \text{oder}$$
$$\Delta_x^{4-r}(u_y) = 0.$$

Der Beweis steht vollständig im Durège § 169 und kann daher wohl nicht geliefert werden.

Specialisirt man diesen, so kommen wir also zu dem Resultate:

Durège 267.

Jeder Punkt der Ebene hat bezüglich einer L. 4. O. seine erste Polare, welche eine Curve 3. O. ist und daher kubische Polare heißt, eine zweite Polare, welche ein Kegelschnitt ist und daher conische Polare heißt, und eine dritte Polare, welche eine Gerade ist und daher gerade Polare heißt.

Bezüglich der Curve $u=0$ ist bei unseren Bezeichnungen

die Gleichung der kubischen Polare eines Punktes x

$$0 = \Delta_x(u_y) = x_1 \frac{\partial u}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial y_2} + x_3 \frac{\partial u}{\partial y_3} \quad \text{oder}$$

$$0 = \Delta^3_y(u_x) = \sum_{1,2,3}\sum\sum y_i y_{i'} y_{i''} \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \, \partial x_{i'} \, \partial x_{i''}}$$

die Gleichung der conischen Polare:

$$\Delta^2_x(u_y) = 0 \text{ od. } \Delta^2_y(u_x) = 0$$

die Gleichung der geraden Polare:

$$\Delta^3_x(u_y) = 0 \text{ od. } \Delta_y(u_x) = 0.$$

Daher ist sowohl die conische, wie kubische und gerade Polare jedes Punktes eindeutig bestimmt.

Nur wenn dieser ein Doppelpunkt der L. 4. O. ist, ist seine gerade Polare ganz unbestimmt, während seine conische Polare aus dem Tangentenpaare in dem Doppelpunkte besteht, und die kubische

Polaren der C. 4. O. in diesem Punkte Inflexionspunkt berührt. In einem einfachen Punkte ferner ist die gerade und konische Polare ganz unbestimmt, während die kubische aus den zwei Tangenten in dem Doppelpunkte besteht. In einem dreifachen Punkte ist selbst die kubische Polare unbestimmt.

Beweis

Jede Curve, die durch einen Doppelpunkt einer C. 4. O. geht, hat die Gleichung

$$\Delta_y(u_x)=0$$

Diese ist aber auch die Gl. der ~~kubischen~~ geraden Polare und diese somit unbestimmt. Ferner haben die beiden Tangenten in einem Doppelpunkte die Gleichung:

$$\Delta^2_y(u_x)=0$$ und diese ist auch gerade die Gleichung der konischen Polare.

Der Beweis der dritten Behauptung ist folgender:

Die kubische Polare von x hat bei veränderlichem y die Gleichung

$$\Delta_x(u_y)=0.$$

Ersetzt man in dem linken Theile x statt y, so wird nach dem Euler'schen Satz von den homogenen Fct.

$$\Delta_x(u_x) = n \cdot u_x.$$

n ist deshalb wesentlich, weil x auf der Curve liegt.

Daher geht die erste Polare durch x hindurch.

Wenn man die Tangente an der Polare an x zu bestimmen, muss man die laufenden Coordinaten mit z_i bezeichnen.

Da nun $\Delta_x(u_y)$ als Fct. von y aufgefasst ist, so wird die Tangente in einem beliebigen Punkte:

$$z_1 \Delta_x \frac{\partial u}{\partial y_1} + z_2 \Delta_x \frac{\partial u}{\partial y_2} + z_3 \Delta_x \frac{\partial u}{\partial y_3} = 0,$$ also die Tangente im Punkte $x_1 x_2 x_3$.

$$z_1 \Delta_x \frac{\partial u}{\partial x_1} + z_2 \Delta_x \frac{\partial u}{\partial x_2} + z_3 \Delta_x \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$$

Da aber die Fct. $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ homogen vom 3ten Grade ist, so folgt:

$$\Delta_x\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = 3 \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i}$$
$i = 1, 2, 3.$

Nun soll der Punkt aber ein Doppelpunkt sein, daher wird $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ immer gleich Null d.h. es giebt in diesem Punkte unendlich viele Tangenten an die erste Polare

[Tangente in dem Sinne aufgefasst, dass eine Gerade eine Curve zweipunktig berührt d.h. den Punkt als Doppelpunkt.

Gehen wir nun weiter und suchen die Tangente in diesem Doppelpunkte d.h. die Gerade, die die Polare drei-punktes berührt, so kann sich dieselbe ganz ähnlich wie vorher ergeben.

$$\Delta_z^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$$

Dieses ist aber zugleich die Gleichung der Tangente in x an die C. 4.O. $u=0$, und daher hat die kubische Polare in diesem Punkte eine dreipunktige Berührung mit der C. $u=0$.

Daß in einem [illegible] Punkte der C. 4.O. ferner die Gerade und ~~kubische~~ Polare [illegible] ist, ist klar, denn jede durch diesen gelegte Linie erfüllt die Gleichung

$$\Delta_y(u_x) = 0 \text{ und } \Delta_y^2(u_x) = 0$$ und dieses ist gerade die Gleichung der kubischen Polare.

Die Tangenten im ersten [illegible] Punkte haben aber die Gl. $\Delta_y^3(u_x) = 0$ d.h. die kubische Polare geht in [illegible] über.

Durège 268. ×

Die kubische Polare eines Rückkehrpunktes x einer C. 4.O. in Bezug auf deren Hesse'sche C. geht in drei Tangenten an die Hesse'sche Curve über, so zwar daß zwei derselben mit der Rückkehrtangente der C. $u=0$ zusammenfallen.

Nach Durège § 165 hat die Hesse'sche C. in dem Rückkehrpunkte ihrer ursprünglichen L. einen dreifachen Punkt, und zwar nur dem Orte, daß nur der drei Tangenten desselben zwei und der Rückkehrtangente der ursprünglichen L. zusammenfallen. Hieraus folgt dann unmittelbar der Lehrsatz:

Die conische Polare jedes auf der Hesse'schen L. liegenden Punktes und nur eines solchen, besteht aus einem Geradenpaar, welches das polare Geradenpaar des Punktes genannt werden soll.

In veränderlichen Coordinaten ist die Gleichung der conischen Polare eines Punktes $\Delta^2_y(ux)$. Dieser Kegelschnitt, als dessen Veränderliche man y ansehen muss, zerfällt nun dann und stets dann in zwei Gerade, wenn die x. der Gleichung

$$H(u)=0$$

genügen d.h. wenn x auf der Hesse'schen L. liegt. —

Die gerade Polare eines auf der Fundamentalcurve liegenden Punktes x ist die Tangente in diesem Punkte. Die conische und kubische Polare von x geht durch diesen Punkt, und berühren in ihm die Fundamentalcurve. 269.

Der erste Theil des Satzes ist klar; die Gleichung einer Tangente in einem Punkte x an die L. u = 0 ist.

$\Delta_y(u_x) = 0$ und dieses ist auch gerade die Gleichung der geraden Polare von x.

Der zweite Theil immer eben so beweisen, wie der Satz in §§ 267. Setzt man nämlich in

$$\Delta^2_x(u_y) = 0 \text{ und}$$

$$\Delta^3_y(u_x) = 0 \text{ od. } \Delta_x(u_y) = 0$$

$y = x$, so wird die Gleichung befriedigt und ferner ist die Tangente in diesem Punkte an die die Form

$$z_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + z_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + z_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0.$$

Dieses ist aber zugleich die Gleichung der Tangente in x an die C. $u = 0$ und daher haben diese und die Polaren in x eine gemeinsame Tangente.

Durège 270. Aus jedem Punkte der Ebene gehen 12 Tangenten an eine Curve 4. O. ohne Doppel oder Rückkehrpunkte oder diese ist von der 12ten Classe.

Bemerk.

Wir brauchen zu demselben einige Sätze.

I Geht die cubische Polare eines Pols x in Bezug auf eine C. 4. O. $u = 0$ durch einen Punkt y, so geht die gerade Polare von y durch den Punkt x, bezogen auf die selbe C. 4. O. $u = 0$. Und umgekehrt.

Bedeuten nämlich die veränderlichen Coordinaten, so ist: $\Delta_\xi(u_y) = 0$ die gerade Polare von y und

$\Delta_\xi^3(u_x) = 0$ die kubische Polare von x.

Geht die letztere durch den Punkt y, so ist

$\Delta_y^3(u_x) = 0$. Nun ist aber identisch:

$$\frac{\Delta_y^3(u_x)}{3!} = \frac{\Delta_x(u_y)}{1!}$$

wenn also $\Delta_y^3(u_x)$ verschwindet, so verschwindet auch $\Delta_x(u_y)$ d.h. die Gleich. der geraden Polare von y wird genügt, wenn man für x_i statt der ξ_i setzt, oder diese Polare geht durch x hindurch und umgekehrt. —

II. Wenn eine C. 4 O. keine Doppel- und Rückkehrpunkte besitzt, so sind die Durchschnitte der kubischen Polare eines Punktes y mit der C. $u = 0$ zugleich die Berührungspunkte aller aus y an die C. $u = 0$ gezogenen Tangenten. Der Beweis dieses Satzes wird in zwei Theile zerfallen:

1) Legt man aus einem Punkte y Tangenten an eine C. 4. O. $u = 0$ und zwar alle, so geht die kubische Polare des Punktes y durch die Berührungspunkte. Der Satz folgt unmittelbar aus I, wenn man berücksichtigt, daß die Tangente die Polare ihres Berührungspunktes ist.

2) Ist x ein Durchschnittspunkt d. C. $u = 0$ mit der

kubischen Polare eines Punktes y, und nicht zugleich ein Doppel oder Rückkehrpunkt der $C.\ u=0$, so geht die Tangente an C an der betreffenden Stelle durch y. Der erste Theil folgt auch unmittelbar aus I, ist dagegen der Punkt ein Doppel od. Rückkehrpunkt, so ist die betreffende Polare ganz unbestimmt.

Erinnert man sich aber des Satzes II bemerken wir noch aus unserem Grundgesetz, daß wenn da die kubische Polare jedes Punktes y eine $C.\ 3.O$ ist, so schneidet sie die $C.\ u=0$, in 12 Punkten.

Die kubische Polare eines jeden Punktes geht durch die Doppel und Rückkehrpunkte, hat also hier Doppelpunkte und berührt die Tangente im einen Rückkehrpunkte.

Die Gleichung der kubischen Polare bei Punktcoordinaten x_i ist nämlich

$$\Delta_y(u_x) = 0 \text{ oder}$$

$$y_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0.$$

Betrachtet man einen Doppelpunkt der $C.\ 4.\ O.\ u=0$ x, so werden für diesen:

$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0$; $\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$; $\frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$ und daher die vorige Gleichung für diesen Punkt erfüllt, wie auch y liegen mag.

Hat die L. 4. O. einen Rückkehrpunkt, so gehen die ersten d. h. die kubischen Polaren aller Punkte der Ebene durch ihn hindurch und berühren in ihm die Rückkehrtangente. Beweis siehe Durège 180.

Aus diesen beiden Sätzen folgt nun:

Hat die L. 4. O. einen Doppelpunkt, so ist sie von der zehnten Klasse, hat sie zwei von der achten und hat sie drei von der sechsten Klasse. Hat sie einen Rückkehrpunkt, so ist sie von der 9., hat sie zwei von der 6 und hat sie drei von der 3ten Klasse. Oder allgemeiner hat sie δ Doppelpunkte und κ Rückkehrpunkte, so ist ihre Klasse gleich

$$n(n-1) - 2\delta - 3\kappa.$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus den beiden vorangehenden Sätzen, siehe Durège 188.

Die kubischen Polaren eines dreifachen Punktes einer L. 4. O. gehen in drei Tangenten über. In § 167 haben wir bewiesen, dass die kubischen Polaren eines jeden dreifachen Punktes in die drei Tangenten in diesem Punkte übergehen, es bleibt jetzt noch zu bemerken, dass wenn die kubische Polare eines Durège 276.

×

Punktes x, der Curve $u=0$ in drei Linien übergeht, derselbe ein dreifacher Punkt ist.
Wo die erste Polare durch den Punkt $x_1 x_2 x_3$ der C. $u=0$ gehen soll, so können wir die Gl. schreiben:

$$\text{(III)}\ x_1^3 + (222)x_2^3 + (333)x_3^3 + 3(112)x_1^2x_2 + 3(113)x_1^2x_3$$
$$+ 6(123)x_1x_2x_3 + 3(122)x_1x_2^2 + 3(133)x_1x_3^2 + 3(233)x_2x_3^2$$
$$+ 3(322)x_3x_2^2 = 0. = u_p$$

Soll diese nun in drei Linien übergehen, so seien die Gleichungen derselben:

$$P = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3.\quad Q = q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3$$
$$R = r_1x_1 + r_2x_2 + r_3x_3 = u_p.\ \text{also:}$$
$$u_p = P.Q.R.$$

Dann hat man:

$$\frac{\partial u_p}{\partial x_i} = P.R\,q_i + R\,Q\,p_i + P.Q.\,r_i \ \text{und}$$
$$\frac{\partial^2 u_p}{\partial x_i\,\partial x_k} = R\,q_i\,p_k + P\,q_i\,r_k + R\,q_k\,p_i + \ldots\ldots$$

Für den Punkt m, in welchem die drei Geraden sich schneiden d.h. für den Punkt x, wird gleichzeitig P, Q, R gleich Null sein. also auch:

$$\frac{\partial^2 u_p}{\partial x_i\,\partial x_k} = 0.$$

Andererseits ist die Gleichung der ersten Polare bei unveränderlichen y:

$u_p = \Delta_y^3(u_x) = 0$, was u die G. d. C. 4. O. bedeutet. Für den Punkt x der C. $u = 0$ nimmt sie also:

$$u_p = \Delta_{x'}^3(u_x) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot u_{x'} \text{ (Durège §6).}$$

Wenn also:

$$\frac{\partial^2 u_p}{\partial x_i \cdot \partial x_k} = 0 \text{ ist, so ist auch}$$

$$\frac{\partial^2 u_{x'}}{\partial x_i \cdot \partial x_k} = 0$$ und das heißt eben, dieser Punkt ist ein mehrfacher Punkt.

Die conische Polare besteht bei einem Wendepunkte aus zwei Geraden, von denen die eine die Wendetangente ist. Denn der Wendepunkt liegt auf der Hesse'schen Curve, muss für x also $\Delta_y^2(u_x)$ sich in zwei linearen Factoren zerlegen lassen, und es gilt dieses stets unter der Bedingung $H(u) = 0$ zugleich resp. Ebenso berührt also nach §§ die conische Polare die C. nach § 269 in dem Wendepunkte.

Aus einem Punkte der Curve gehen außer der Tangente in diesem Punkte selbst noch 10 Tangenten an die Curve zu ziehen [wenn ein Doppelpunkt vorhanden, 8, wenn 2: 6, wenn 3: 4, wenn ein Rückkehrpunkt vorhanden 7, wenn 2: 4, wenn 3: 1.]. Ist der Punkt aber ein Wende- Durège 272 x Punkte, so gehen nur sechs Tangenten an die Curve zu legen, weil die cubische Polare durch die Curve in dem Wendepunkt dreifach berührt.

Übung 273. Geht die conische Polare eines Punktes x' durch einen Punkt y, so geht die conische Polare von y durch x' und umgekehrt. Der Beweis dieses Satzes ergiebt sich daraus, wenn man den entsprechenden .. §

Übung 274. Die gerade Polare eines Punktes x in Bezug auf eine C.4.O ist zugleich die gerade Polare von x in Bezug auf den Kegelschnitt und die C.3.O, welche die conische und cubische Polare von x bezüglich der C.4.O. bildet.

Bemerkung

Bei ... Curven ist

$\Delta_{x'}^2(u_\eta)=0$ die Gl. d. conischen Polare u.

$\Delta_{x'}(u_\eta)=0$ die Gl. d. cubischen Polare von x' in Bezug auf die C.4.O. Daher werden die geraden Polaren von x

1) in Bezug auf $\Delta_{x'}^2(u_\eta)=0$ sein:

$$\Delta_{x'}\,\Delta_{x'}^2(u_\eta)=0=\Delta_{x'}^3(u_\eta)$$

2) in Bezug auf $\Delta_{x'}(u_\eta)=0$:

$$\Delta_{x'}^2\,\Delta_{x'}(u_\eta)=0=\Delta_{x'}^3(u_\eta).$$

Zunächst sind aber beide die Gl. der gemischten Polare von x in Bezug auf u. Ebenso gilt natürlich das umgekehrte d.h. wiesen sich.

Eben läßt sich das Folg. bemerken:

Die konische Polare eines Punktes x in Bezug auf einen C. 4. O. ist zugleich die konische Polare desjenigen C. 3. O. welche die kubische Polare von x in Bezug auf die C. 4. O. ist.

Sind A und B die kubischen und konischen Polaren zweier Punkte a und b bezüglich einer C. 4. O. so ist die gemischte Polare von a in Bezug auf die Summe 2. O. B identisch mit der gemischten Polare von b in Bezug auf die C. 3. O. A. Durège 273.

Beweis

Die kubische Polare von a in Bezug auf die C. 4. O. hat die Gl. bei unveränderlichen Gl:

$$\Delta_a(u_y) = 0 = A.$$ welches die gemischte

Polare von b in Bezug auf A:

$$\Delta_b^2(u_y)\,\Delta_a u_y = 0 = \Delta_b^2 a(u_y) = 0$$

Die konische Polare von b in Bezug auf die C. 4. O. hat die Gl.:

$$\Delta_b^2(u_y)$$ welches ihre gemischte Polare:

$$\Delta_a\Delta_b^2(u_y) = 0 = \Delta_{ba}^2(u_y) = 0.$$

Wie man sieht sind diese beiden aber identisch.

Ebenso folgt das umgekehrte auch.

Da die Polare eines Punktes in Bezug auf einen Kegelschnitt die Gerade ist, welche die Berührungspunkte der aus jenem Punkte an den Kegelschnitt gelegten Tangenten verbindet, so läßt sich dieser Satz auch so aussprechen: –

Zieht man von einem Punkte a, dessen harm. Polare in Bezug auf einen L. 4. O. die L. 3. O. A = 0 ist, an einen Kegelschnitt B, der die harmonische Polare eines Punktes b in Bezug auf dieselbe L. 4. O ist, die beiden Tangenten, so ist die Verbindungslinie der Berührungspunkte derselben, identisch mit der geraden Polare des Punktes b in Bezug auf die L. 3. O. A = 0.

Ähnlich folgt der Satz:

Sind A und B die harmonischen Polaren zweier Punkte a u. b bezüglich einer L. 4. O, so ist die konische Polare des Punktes a in Bezug auf die ~~Kegelschnitt~~ L. 3. O. B identisch mit der konischen Polare des Punktes b in Bezug auf die L. 3. O. A. –

Da nun die konische Polare von a in Bezug auf B durch die Berührungspunkte der von a an B gezogenen Tangenten geht, und ebenso die konische Polare von b in Bezug auf A durch die Berührungspunkte der von b an A gezogenen Tangenten geht, so folgt den Satz:

Zieht man von einem Punkte a an die cubische Polare von a' Tangenten und von a' an die cubische Polare von a, so bestimmen die Berührungspunkte derselben mit den resp. cubischen Polaren eine C. 2. O welche die gemischte conische Polare der Punkte a und a' heißt.

Durège 276

Sei B die cubische Polare eines Punktes b, C die cubische Polare eines Punktes c und a ein dritter Punkt, wenn man die ~~conische~~ gemischte Polare von a bezüglich der C. 3. O. B durch c geht, so geht die ~~conische~~ gemischte Polare von a bezüglich d. C. 3. O. C durch b.

Beweis

Bei unserer Bezeichnung ist die Gl. der cubischen Polare B von b

$$B_y = \Delta_b(u_y) = 0$$

und die der cubischen Polare C von c

$$C_y = \Delta_c(u_y) = 0.$$

Dann ist die der ~~conischen~~ gemischten Polare von a bezüglich B in unserer Bezeichnung:

$$\Delta_a(B_a) = \Delta_a(\Delta_b(u_a)) = 0$$

und die Polare von a bezüglich C:

$$\Delta_2(c_1) = \Delta_2(\Delta_c(u_1)) = 0$$

Geht nun die erstere durch c, so gilt:

$$\Delta_c(\Delta_c(u_1)) = 0$$

Hieraus folgt aber:

$$\Delta_b(\Delta_c(u_1)) = 0$$

d. h. die gerade Polare von a bezüglich C' geht durch b.

Hieraus folgt:

Sei B' die kubische Polare eines Punktes b, C' die konische eines Punktes c und a ein dritter Punkt. Geht dann die konische Polare von a bezüglich der C. 3. O. B' durch c, so geht die gerade Polare von a bezüglich des Kegelschnittes C' durch b.

Man bekommt dann nur:

$$\Delta_c^2 \Delta_b(u_1) = \Delta_b \Delta_c^2(u_1).$$

Ebenso folgt das Umgekehrte.

Lurie gl 277.

Zieht man durch einen Doppel- oder Rückkehrpunkt x einer C. 3. O. $u=0$ Geraden, welche die C. in 2' und 2'' schneiden, und bestimmt auf jeder den bezüglich 2' und 2'' zu x zugeordneten harmonischen Punkt, so ist der harmonische Ort des Punktes y, wenn die Gerade sich um x dreht, die kubische Polare von x.

Beweis

Sind x, y, z drei in gerader Linie liegende Punkte, so besteht zwischen ihren Coordinaten die Relation:

$$z_i = y_i + \lambda x_i$$

wo λ einen unbestimmten Constante bedeutet. Trägt z auch die Summe, so erhält man, wenn man diesen Werth in die Gleichung $u=0$ einsetzt:

$$0 = u_y + \lambda \Delta_x(u_y) + \frac{\lambda^2}{2!}\Delta_x^2(u_y) + \frac{\lambda^3}{3!}\Delta_x^3(u_y) + \frac{\lambda^4}{4!}\Delta_x^4(u_y).$$

Nun ist: $\Delta_x^4(u_y) = 4!\, u_x$ und

$$\Delta_x^3(u_y) = 3!\,\Delta_y(u_x)$$

Ist aber x ein Doppelpunkt von C, so verschwinden diese beiden Ausdrücke und es bleibt nur:

$$0 = u_y + \lambda \Delta_x(u_y) + \frac{\lambda^2}{2!}\Delta_x^2(u_y)$$

welche die Wurzeln λ der beiden Punkte z' und z'' angiebt, in welchen die Gerade xy die Curve ausser in dem Doppelpunkte x noch schneidet. Sollen nun aber $z'z''$ harmonisch zugeordnet sein in Bezug auf x, so müssen die beiden Wurzeln λ gleich und entgegengesetzt sein. Dazu ist erforderlich und hinreichend, dass

$$\Delta_x(u_y) = 0$$ ist.

Denn wie wir anderweitig zeigen, stellt diese Gl. die kubische Polare des Punktes x dar q. e. d.

Ferner:

Zieht man durch irgend einen Punkt x auf einer L. d. O. $u=0$ Geraden, welche die Curven in z' und z'' u. z''' schneiden, und bestimmt zu diesen 4 Punkten einen Punkten y der der Gleichung genügt:

$$1)\quad \frac{yz'}{xz'} + \frac{yz''}{xz''} + \frac{yz'''}{xz'''} = 0$$

so ist der geometrische Ort des Punktes y, wenn die Geraden sich um x drehen, die konische Polare des Punktes x.

<u>Beweis</u>

Bezeichnen x_i und y_i die Coordinaten von x und y, z_i' z_i'' z_i''' die der drei z, welche alle drei auf der Geraden $a\,b$ liegen, so ist:

$$z_i' = x_i + \lambda' y_i \quad \text{od.} = y_i + \lambda' x_i$$
$$z_i'' = x_i + \lambda'' y_i \quad \text{od} = y_i + \lambda'' x_i$$
$$z_i''' = x_i + \lambda''' y_i \quad \text{od} = y_i + \lambda''' x_i$$

Nach Dünige § 19 ist dann:

$$\lambda' = \kappa \frac{xz'}{yz'} \quad \text{od} = \kappa \frac{yz'}{xz'}$$
$$\lambda'' = \kappa \frac{xz''}{yz''} \quad \text{od} = \kappa \frac{yz''}{xz''}$$
$$\lambda''' = \kappa \frac{xz'''}{yz'''} \quad \text{u.s.w. od} = \kappa \frac{yz'''}{xz'''} \quad \text{u.s.}$$

$$\lambda' : \lambda'' : \lambda''' = \frac{xz'}{yz'} : \frac{yz''}{xz''} : \frac{yz'''}{xz'''} \quad \text{od.}\quad \lambda' : \lambda'' : \lambda''' = \frac{yz'}{xz'} : \frac{xz''}{yz''} : \frac{xz'''}{yz'''}$$

Setzen wir diese Werthe von λ oben in 1) ein, so ergiebt sich:

$$\underline{\lambda_{\prime} + \lambda_{\prime\prime} + \lambda_{\prime\prime\prime} = 0}$$

Liegt nun der z, welcher der Gleichung genügt:

$$z_i = y_i + \lambda x_i$$

auf den Würfeln, so erhält man, wenn man diese Werthe in die Gl. $u=0$ substituirt nach Potenzen geordnet:

$$0 = u_y + \lambda\,\Delta_x(u_y) + \frac{\lambda^2}{2!}\Delta_x^2(u_y) + \frac{\lambda^3}{3!}\Delta_x^3(u_y) + \frac{\lambda^4}{4!}\Delta_x^4(u_y).$$

Liegen nun x auch auf den Würfeln, so verschwindet:

$$\Delta_x^4(u_y) = 1.2.3.4.\,u_x \quad \text{weil } u_x = 0 \text{ ist.}$$

Dadurch reducirt sich die vorige Gleichung auf:

$$0 = u_y + \lambda\,\Delta_x(u_y) + \frac{\lambda^2}{2!}\Delta_x^2(u_y) + \frac{\lambda^3}{3!}\Delta_x^3(u_y)$$

und die Wurzeln λ derselben gehören zu den drei Punkten $z'\,z''\,z'''$ etc., in welchen die Geraden xy die Würfel außer in x noch schneidet. Soll nun aber $x\,z'\,z''\,z'''\,y$ der Bedingung genügen:

$$\frac{yz'}{xz'} + \frac{yz''}{xz''} + \frac{yz'''}{xz'''} = 0 \quad \text{so müsste:}$$

$$\lambda' + \lambda'' + \lambda''' = 0 \quad \text{sein d. h. da}$$

$\lambda' + \lambda'' + \lambda''' =$ dem Coeff. von λ^2 ist:

$$\underline{\Delta_x^2(u_y) = 0}$$

Die merkwürdige Gl. stellt diese Gl. aber die conische Polare von x dar z. B.

Ebenso folgt der Satz:

Zieht man durch einen Punkt x außerhalb d. K. d. $u=0$ Geraden, welche die K. in $z'z''z'''$ schneiden und bestimmt zu diesen 4 Punkten die beiden Punkte y' und y'' welche der Gleichung genügen

$$\frac{yz'}{xz'}\cdot\frac{yz''}{xz''} + \frac{yz'\cdot yz'''}{xz'\cdot xz'''} + \frac{yz''}{xz''}\cdot\frac{yz'''}{xz'''} = 0$$

so ist dem geometrischen Ort der Punkte y, wenn die Ebene sich um x dreht, der kubische Kegel um x.

Der Beweis ist ebenso wie vorher. Die Ω müssen [illegible] die Gl. genügen

$$\Omega'\Omega'' + \Omega'\Omega''' + \Omega''\Omega''' = 0$$

und das heißt eben:

$$\Delta_x(uy) = 0$$

[illegible] stellt diese Gl. den kubischen Kegel des Punktes x dar.

wege 278.

Hieraus folgen die nachstehenden Sätze:

I. Schneidet man durch einen Doppelpunkt x gelegte Gerade die Ebenen in z' z'' und die kubischen Kegel von x in y, so sind $x\,y\,z'\,z''$ harmonische Punkte.

II. Schneidet eine durch einen ~~[illegible]~~ Punkt x' gelegte Gerade die Ebenen in z' z'' z''' und den [illegible] Kegel in y, so erfüllen die Punkte $x'\,z'\,z''\,z'''\,y$ die Gleichung:

$$\frac{yz'}{x'z'} + \frac{yz''}{x'z''} + \frac{yz'''}{x'z'''} = 0.$$

III. Schneidet eine durch einen Punkt x' gelegte Gerade die Ebenen noch in z' z'' z''' und den kubischen Kegel in y' und, so erfüllen die 6 Punkte die in bezug auf $x\,y$ genannte Gl.

$$\frac{yz'}{xz'}\cdot\frac{yz''}{xz''} + \frac{yz'}{x'z'}\cdot\frac{yz'''}{xz'''} + \frac{yz''}{x'z''}\cdot\frac{yz'''}{x'z'''}.$$

Durège 279.

Ist x ein Wendepunkt, so ist der geometrische Ort der Punkte y, welche in Beziehung auf die Punkte z' z'' z''' in denen eine durch x gehende Gerade die Curve schneidet, die Bedingung erfüllen

$$\frac{yz'}{xz'} + \frac{yz''}{xz''} + \frac{yz'''}{xz'''} = 0$$

eine gerade Linie. Denn [illegible] besteht die conische Polare von x aus der Wendetangente und einer geraden Linie.

I. Ist C die conische Polare eines Punktes c, so schneiden sich die geraden Polaren der auf C liegenden Punkte y in einem Punkte, nämlich c, und umgekehrt: Der geometrische Ort aller Punkte y, deren gerade Polaren sich in einem Punkte c schneiden, ist eine C. 2. O. nämlich die conische Polare von c. Denn geht die conische Polare von c durch y, so geht die gerade Polare von y durch c und umgekehrt. Durège 280.

II. Ist C' die conische Polare eines Punktes c, so schneiden sich die conischen Polaren aller auf C' liegenden Punkte y in dem Punkte c und umgekehrt: Der geometrische Ort aller Punkte y, deren conische Polaren sich in einem Punkte c schneiden, ist ein Kegelschnitt, nämlich die conische Polare von c;

Durège 282.

Zu einer kubischen Polare ~~[illegible]~~ c bezüglich einer L^n v. O. gehört nur ein einziger Pol c.

<u>Bemerk.</u>

Sind g und g' zwei beliebige durch c' laufende Punkte, so gehen ihre geraden Polaren G und G' beide durch c. Diese beiden Geraden sind durch g und g' vollkommen bestimmt. Wäre nun c gleichzeitig die cubische Polare eines anderen Punktes c', so müßten die Geraden G und G' auch durch c' gehen, was im Allgemeinen nicht der Fall ist.

× Zu einer cubischen Polare c bezüglich einer L^n 3 O. gehören höchstens vier Pole c c' c'' c''', doch ist es nicht richtig daß so viele gehören.

Der Beweis ist klar.

Durège 283. Nicht jede L^n 3. O. ist eine cubische Polare in Bezug auf jeden gegebenen L^n v. O; denn damit eine durch neun Punkte bestimmte L. 3. O. eine kubische Polare sei, ist hinreichend und notwendig, daß die geraden Polaren dieser neun Punkte sich in einem Punkte schneiden, welcher dann der Pol der kubischen Polare ist.

Beweis folgt:

Nicht jeder Kegelschnitt ist eine reciproke Polare in bezug auf einen K. 2. O. sondern damit der durch fünf Punkte bestimmte Kegelschnitt eine reciproke Polare sei, ist hinreichend und nothwendig, dass die reciproken Polaren dieser fünf Punkte sich in einem Punkte schneiden, welcher dann der Pol der reciproken Polare ist. Der Beweis ist klar.

Die reciproken Polaren aller Punkte, die auf derselben Geraden liegen, schneiden sich in dem nämlichen einem Punkte, bilden daher ein Strahlenbüschel 3. O. Durège 287.
Der Beweis dieses Satzes folgt unmittelbar aus dem folgenden:

Jede Gerade G hat eine gerade Polare bezüglich eines gegebenen K. 2. O. $u=0$ und hat als solche unendlich viele d. h. ∞ grade viele Punkte, welche die Gerade G gleichartig bezüglich u zur geraden Polare haben. Durège 285

Beweis

Seien x und x' zwei Punkte der Geraden G, P und P' ihre ersten Polaren bezüglich u. Diese beiden Linien schneiden sich in einem Punkte y.
Da nun jeder Punkt y sowohl auf P als auch auf

P' liegt, so geht die gerade Kolonne jedes y sowohl durch x' als auch durch x' und fällt daher mit der Geraden G zusammen. q. e. d.
Diese neun Punkte sind nun aber die Doppelpunkte des Grundvierseits 3.O. der von den kubischen Kolonnen der auf G liegenden Punkte gebildet wird. –

Auszüge 286.

Hat die L. 4.O einen [zwei, drei] Doppelpunkte, so hat jede Gerade diesen Punkt und außerdem noch acht [sieben, sechs] Pole, da sämmtliche kubische Kolonnen durch den Doppelpunkt gehen und die gerade Kolonne des Doppelpunkts unbestimmt ist. –
Hat die L. einen [zwei, drei] Rückkehrpunkte, so fallen für jede Gerade G je zwei Pole in einen derselben und die Gerade hat außerdem noch sieben [fünf, drei] Pole. Denn sämmtliche kubische Kolonnen berühren die Rückkehrtangente in dem Rückkehrpunkte und daher haben die kubischen Kolonnen der auf G liegenden Punkte außerdem nur sieben [fünf, drei] Punkte gemein.
Besitzt die L. 4.O auch zwei Doppeltangenten, so hat

jede Gerade G, ausser den drei Durchschnitten der ersteren nur fünf Pole. Denn die unmittelbaren cubischen Polaren gehen durch die von den Durchschnitten der drei Geraden gebildeten Doppelpunkte, und daher haben die cubischen Polaren der auf G liegenden Punkte außerdem nur noch fünf Punkte gemein.

Ebenso folgt:
Besteht die C. 4. O. aus einem Kegelschnitte und zwei Geraden, so hat jede andere Gerade G ausser den fünf Durchschnitten der ersteren nur 7 Pole. —

Ferner: Besteht die C. 4. O. aus vier Geraden, so hat jede andere Gerade G ausser den 6 Durchschnitten der ersteren nur 3 Pole. —

Die cubischen Polaren aller Punkte der Ebene bezüglich derselben C. 4. O. bilden ein ~~Kegelschnitt~~netz. Durège 287

Lemma

Die cubische Polare eines Punktes y hat bei unveränderlichen x_i die Gl.

$$y_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0.$$

Läßt man den Punkt y alle Lagen in der Ebene annehmen, so werden $y_1\ y_2\ y_3$ willkürliche Größen.

während die Gl. $\frac{du}{dx_1}=0$ $\frac{du}{dx_2}=0$ $\frac{du}{dx_3}=0$ drei L. 3. O. vorstellen. Die [illegible] Gl. hat daher die Gl. eines Linienzuges 3. O. z. c. d

Durège 288.

Alle die [illegible] Kolonnen [illegible] auch dieselbe L. 3. O. welche durch denselben Punkt g hindurchgehen, bilden einen Linienbüschel 3. O.

Jedenfalls müssen dieselben der Gl. genügen

$$u + \lambda v + \mu w = 0.$$

Wenn die drei Determinanten einen Punkt mit einander gemein haben, so muss die Gl. für diesen Punkt erfüllt sein daher gehen alle Linien des Netzes durch diesen Punkt hindurch. Ist aber g irgend ein anderer Punkt, und sind $u' v' w'$ die Werthe, welche die Fkt. u v w in g annehmen, so gilt für die Linien welche durch g gehen die Gl.

$$u' + \lambda v' + \mu w' = 0$$

Eliminirt man aus dieser und aus der ersten Gl. eine der beiden Konstanten z. B. λ so erhält man für alle durch g gehenden L. des Netzes die Gl.

$$v'u - u'v + \mu(v'w - w'v) = 0$$

Alle diese Linien gehen also durch die neun [illegible].

schnitt der beiden $v'u - u'v = 0$ und $v'w - w'v = 0$ findet sich z. B.
die neuen Berührungspunkte der Büschel zum dritten die Pole
neuen mit derselben Geraden. Dann ruft sich die Polaren gerade
von G, so liegen die Pole aller durch G gehenden cubischen
Polaren auf G und daher bilden dieselben Büschel, deren
Berührungspunkte die Pole von G sind. –

Durch zwei beliebig gewählte Punkte g und g' geht im Allgemeinen nur eine cubische Polare, nämlich diejenige, deren Pol der Durchschnitt der beiden geraden Polaren von g und g' ist. Sind aber g und g' zwei Pole derselben Geraden G, so gehen unendlich viele cubische Polaren durch diese Punkte und bilden einen Büschel 3. O. nämlich alle diejenigen, deren Pole auf G liegen. Durège 289

Durch zwei beliebig gewählte Punkte g u. g' gehen im Allgemeinen nur eine conische Polare, nämlich diejenige, deren Pole die Durchschnitte der beiden conischen Polaren von g und g' sind.
Sind aber g und g' zwei Pole derselben Kegelschnitts R, so gehen unendlich viele Polaren zweiter Ordnung durch sie hindurch. –

Ferner:

Schneiden sich die drei conischen Polaren dreier

Punkte $g\, g'\, g''$ zu drei Punkten, so läßt sich durch diese drei Punkte im allgemeinen nur eine, aber stets eine einzige Curve ziehen. Sind aber $g\, g' g''$ Punkte desselben Kegelschnitts, so lassen sich unendlich viele ziehen.
Dasselbe gilt, wenn sich die von Curven von 4 Punkten zu 4 Punkten schneiden.

In Beziehung auf eine L. 3. O. hat jeder Punkt x unendlich viele zusammengehörige conjugirte Pole, nämlich die Schnittpunkte der conischen Polaren von x' und den conischen Polaren irgend eines beliebigen andern Punktes in Bezug auf diese Curve. Durège 229.

Von diesen 4 Punkten sind aber nur zwei beliebig, oder vielmehr von den vier conjugirten nur einer, da durch diesen eine feste Gerade Polare durch x bestimmt, ist und welcher die 4 Pole derselben.

Nimmt man jeden 4 Punkte, durch die sich zwei Kegelschnitte legen lassen, die die conischen Polaren zweier Punkte x' und x'' in Bezug auf die L. 3. O. sind, unendlich viele conjugirte Pole, nämlich alle auf der Verbindungslinie von x' und x'' liegenden Punkte. Diese 4 Punkte sind aber nicht beliebig, sondern nur einer von ihnen, da durch ihn eine feste Gerade Polare und mit ihr die andern 3 Polpunkte bestimmt. [Zu diesen 4 Polpunkten gehört auch der gegebene Punkt.]

In Bezug auf ein Curvenbüschel dritter Ordnung hat ein jeder Punkt x im Allgemeinen nur einen conjugirten Pol, der aus 4 Punkten besteht.

Bemerk.

Stellt man irgend eine C. des Büschels 3. O. durch die Gleichung $u + \lambda v = 0$ dar, so erhält man für die conische Polare eines Punktes x in Bezug auf diese C. 3. O. bei unveränderlichem y die Gleichung:

$$\Delta_y^2(u_x) + \lambda\, \Delta_y^2(v_x) = 0.$$

Für unveränderliches λ aber schneiden sich alle diese Kegelschnitte in 4 Punkten.

Ist das Büschel ein syzygetisches d. h. ein Büschel, dessen Basispunkte die neun zu je drei in geraden Linien liegenden Wendepunkte sind, so besteht der zu einem Punkte x conjugirte Pol, aus den vier Punkten $p_1\, p_2\, p_3\, p_4$ [Punktquadrupel] in welchen die von x an die durch x gehende Curve des Büschels gezogenen 4 Tangenten dieselbe berühren. Bemerk siehe Durège 628.–

Ist der Punkt x endlich einer der neun Basispunkte des syzygetischen Büschels, so haben die conischen Polaren in Bezug auf alle C. 3. O. eine gerade Linie, nämlich die harmonische Polare des Wendepunktes gemeinsam.

Bemerk Durège 356.

Ebenso folgt:
Zu jedem Punkte y gehören bezüglich unserer Curvenbüschel 3. O. mit einem vorgegebenen Pol x einen gleichzeitig verschwindenden festen Punkte $y_1\, y_2\, y_3$ die mit y zusammen zu x gehören sind. Ist das Büschel von y so gegeben, so ist dieser Punkt x der Tangentialpunkt, von y aus Berührungen können, welche durch y gehen.

In Beziehung auf sämmtliche Curven 3. O. oder in Beziehung auf drei C. 3. O. die sich nicht in denselben neun Punkten schneiden, giebt es, wenn diese Curven nicht bestimmt gewählt sind, zu einem Punkte x nicht mehr zu ihm gehörige Punkte $p_1\, p_2\, p_3\, p_4$, die zu x gehören, sein können.

Betrachte C. 3. O.

$$u=0 \quad v=0 \quad w=0.$$

Die Curvenschaar [illegible] einen [illegible] Punkt x, aber dessen Beziehungen [illegible] wir finden wollen, in bezug auf diese Curven sind dann bei [illegible] y:

$$\Delta^2_y (ux)=0$$

$$\Delta^2_y (vx)=0$$

$$\Delta^2_y (wx)=0.$$

In diesen Gleichungen sind die Coefficienten [illegible] [illegible] $x_1\, x_2\, x_3$ vollständig bestimmt. Sollen

die drei Kegelschnitte schneiden sich in einem Punkte,
so müssen noch zwei zu bestimmende Constanten so gewählt werden daß, wenn auch die ursprünglichen Curven $u=0$ $v=0$ $w=0$ ihren gemeinsamen Bedingungen genügen, sich nicht in 7 Punkten schneiden können.

Durège 730

Der Ort der Punkte x, deren gerade Polaren in Bezug auf drei Curven 3. O. $u=0$, $v=0$, $w=0$ sich in einem Punkte schneiden, ist die Hessesche Curve dieser drei C. 3. O. und eine C. 6. O., der Ort der Punkte y, deren konische Polaren in Bezug auf die drei C. 3. O. sich in einem Punkte schneiden d. h. der Ort der zu x conjugirten Punkte ist die Steinersche Curve und eine C. 12. O.

Beweis

Seien x, x_1, x_2 die Punktcoordinaten der Pkt. u, v, w und man bezeichne die partiellen Differentialquot. $\frac{du}{dx_i}$ etc. durch u_i etc. Dann haben die geraden Polaren von x in Bezug auf die C. 3. O. $u=0$, $v=0$, $w=0$ bei veränderlichem y_i die Gleichungen:

$$y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3 = 0$$
$$y_1 v_1 + y_2 v_2 + y_3 v_3 = 0$$
$$y_1 w_1 + y_2 w_2 + y_3 w_3 = 0.$$

Sollen diese drei Geraden sich in einem Punkte schneiden, so ist erforderlich und hinreichend, daß:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ wird.}$$

Da die Coeff. der x_i wieder die Elemente dieser Determinante bilden, wenn gemeinsame Punkte sind, so ist der geometrische Ort der Punkte x eine C. 6. O.

Schwieriger ist das Analogon des zweiten Theiles.

Da die Coe. u, v, w vom zweiten Grade sind, so lassen sich dieselben Gleichungen auch darstellen durch:

$$\Delta^2_{x}(u_y)=0 \quad \Delta^2_x(v_y)=0; \quad \Delta^2_x(w_y)=0$$

d. h. wenn die Coeff. u, v, w während der Abl. nach y be betrachtet werden und die partiellen Ableit. $\frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_k}$ durch u_{ik} bezeichnet werden, durch:

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 u_{11} + x_2^2 u_{22} + x_3^2 u_{33} + 2x_1x_2 u_{12} + 2x_1x_3 u_{13} + 2x_2x_3 u_{23} &= 0 \\ x_1^2 v_{11} + x_2^2 v_{22} + x_3^2 v_{33} + 2x_1x_2 v_{12} + 2x_1x_3 v_{13} + 2x_2x_3 v_{23} &= 0 \\ x_1^2 w_{11} + x_2^2 w_{22} + x_3^2 w_{33} + 2x_1x_2 w_{12} + 2x_1x_3 w_{13} + 2x_2x_3 w_{23} &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &= \Delta^2_x(u_y) = A \\ &= \Delta^2_x(v_y) = B \\ &= \Delta^2_x(u_y) = C \end{aligned}$$

Sollen diese drei Kegelschnitte sich in einem Punkte schneiden, so sollen diese drei quadratischen Gleich. eine gleiche Wurzel, so ist nach Salmon Algebra d. lin. Transf. §151, hinreichend nun notwendig, daß die Functionaldeterminante D und die differ. derselben $\frac{\partial D}{\partial x_i}$ gleich Null werd:

Nun ist

$$D = \begin{vmatrix} \Delta_y\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) & \Delta_y\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) & \Delta_y\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right) \\ \Delta_y\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right) & \Delta_y\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right) & \Delta_y\left(\frac{\partial v}{\partial x_3}\right) \\ \Delta_y\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right) & \Delta_y\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right) & \Delta_y\left(\frac{\partial w}{\partial x_3}\right) \end{vmatrix}$$

wenn wir die u als Abl. der x_i auffassen. oder

$$D = \begin{vmatrix} y_1(u_{11}+u_{12}+u_{13}) + y_2(u_{12}) + y_3(u_{13}), & y_1(u_{21}) + y_2(u_{22}) + y_3(u_{23}) \cdots \\ y_1(v_{11}) + y_2(v_{12}) + y_3(v_{13}), & y_1(v_{21}) + y_2(v_{22}) + y_3(v_{23}), \; y_1(v_{31}) + \cdots \\ y_1(w_{11}) + y_2(w_{12}) + y_3(w_{13}) & \cdots \end{vmatrix}$$

Nun ist D in bezug auf die x wie auch die y vom dritten Grade und die partiellen Ableit.

$\frac{\partial D}{\partial x_1}$, $\frac{\partial D}{\partial x_2}$, $\frac{\partial D}{\partial x_3}$ in bezug auf x vom zweiten in bezug auf y vom dritten Grade.

Man erhält also 6 Gl. 2ten Grades in bezug auf x:

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{\partial D}{\partial x_1} = 0 & \frac{\partial D}{\partial x_2} = 0 & \frac{\partial D}{\partial x_3} = 0 \\ v = 0, & w = 0, & u = 0 \end{array}\right\}$$

Hierbei sind die Ausdr. in v, w, u, lineare Fkt. von y

" " " " in $\frac{\partial D}{\partial x_1}$, $\frac{\partial D}{\partial x_2}$ $\frac{\partial D}{\partial x_3}$ kubische Fkt. von y

Aus diesen 6 Gleichungen kann man die sechs Größen

$x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3$ können eliminiert werden, es folgt als Resultat sogleich eine symmetrische Determinante, von der drei Horizontalreihen 1ten ersten Grades, die drei anderen 1ten dritten Grades in $y_1 y_2 y_3$ sind. Mithin ergiebt die Determinante für die y eine Gleichung 12 Grades. q. e. d.

Der geometrische Ort der Punkte x, deren gerade Polaren sich in demselben C. 3. O. $u=0$, $v=0$, $w=0$, in einem Punkte schneiden, und der geometrische Ort der ihnen entsprechenden Punkte y, ist zugleich der geometrische Ort derselben Punkte x und y in bezug auf alle C. 3. O. des Netzes, welche die Gegebenen als Doppelpunkte annehmen. Cremona nach Durège 731. — Durège 731.

Man nennt, wie die C. 6. O. welche der geometrische Ort der Punkte x ist, die in bezug auf ein Curvenbüschel 3. O. gerade Polaren haben, die sich in einem Punkte schneiden, die Jacobische Curve des Netzes und die C. 12. O. welche der geometrische Ort der Punkte y ist, deren conische Polaren in bezug auf drei Curvenbüschel 3. O. sich in einem Punkte schneiden, die Hessesche Curve des Netzes. — Durège 732

Die sämmtlichen kubischen Polaren aller Punkte der Ebene in bezug auf eine C. 4. O. $u=0$, bilden ein — Durège 737.

Summenmatz drittes 0. die Zahl der L. dieses Ordnung ist zugleich die Zahl der L. H(α) der L. u = 0.

Demnach siehe Durège §34.

Definiren wir als Reihenwerthe einer L. z. O. den Ort der Durchschnittspunkte je zweier Geraden, die eine Kolonne bilden, so kommen wir zu dem analogen Satze: Die sämmtlichen Kolonnen aller Punkte der Ebene in bezug auf eine L. z. O. u = 0 bilden ein Netz 3. O. Die Reihenwerthe L. dieses Netzes ist zugleich die Reihenwerthe L. der L. u = 0.

Beweis

Der ... ist die Gleichung der Kolonne eines Punktes x in bezug auf eine L. z. O. u = 0

$$y_1^2 u_{11} + y_2^2 u_{22} + y_3^2 u_{33} + 2y_2y_3u_{23} + 2y_3y_1u_{31} + 2y_1y_2u_{12} = 0$$

Besteht dieselbe aus zwei Geraden, so gelten nach Durège §7 gleichzeitig die drei Gleichungen:

$$y_1u_{11} + y_2u_{12} + y_3u_{13} = 0$$
$$y_1u_{21} + y_2u_{22} + y_3u_{23} = 0$$
$$y_1u_{31} + y_2u_{32} + y_3u_{33} = 0.$$

Und der Punkt, y dessen Coordinaten diesen Gleichungen genügen, ist der Durchschnitt der beiden Geraden.

Wir erhalten die Gleichungen:

$u_1 = 0$, $u_2 = 0$ $u_3 = 0$

drei conische Polaren dar, nämlich diejenigen, welche den Ecken des Fundamentaldreiecks angehören. Nehmen wir diese als Gleichungen der Fundamentalpunkte ?, so werden die Punkte y der Hesse'schen C. derselben, den Bedingungen genügen: Kubisch

$$\left.\begin{array}{l} y_1 u_{11} + y_2 u_{12} + y_3 u_{13} = 0 \\ y_1 u_{21} + y_2 u_{22} + y_3 u_{23} = 0 \\ y_1 u_{31} + y_2 u_{32} + y_3 u_{33} = 0 \end{array}\right\}$$

Wie man sieht, sind die Bedingungen dieselben, welche die Steiner'sche C. für beide Fälle auch.

Die Hesse'sche Curve $H(u) = 0$ einer C. 3. O. $u = 0$ hat eine doppelte Eigenschaft: Durège 136

1) Sie ist der geometrische Ort der Punkte, deren conische Polaren aus 2 Geradenpaaren bestehen.

2) Sie ist der geometrische Ort der Punkte, die für die ersten Polaren bezüglich der C. $u = 0$, Doppelpunkte sind. Beweis siehe Durège 131.

Die Steiner'sche Curve $(S) = 0$ einer C. 3. O. $u = 0$ hat auch eine doppelte Eigenschaft:

1) Sie ist der geometrische Ort der Doppelpunkte von Geradenpaaren, die eine conische Polare bilden.

2) Sie ist der Ort der Punkte, deren cubische Polaren

einen Doppelpunkt besitzen.
Der Beweis des letzteren Satzes folgt direkt aus dem Vorigen.
(Siehe auch Durège 190).

Durège № 37

Sind x und y zwei conjugirte Pole in Bezug auf das von den kubischen Polaren gebildete Curvennetz 3. O, oder zugleich x ein Punkt der Hesse'schen u. y ein Punkt der Steiner'schen Curve, so ist die conische Polare von x ein Geradenpaar, welches sich in y schneidet, und die kubische Polare von y hat in x einen Doppelpunkt. Und umgekehrt: Ist die conische Polare von x ein Geradenpaar, das sich in y schneidet, so hat die kubische Polare von y in x einen Doppelpunkt und x und y sind conjugirte Pole in Bezug auf das von kubischen Polaren gebildete Curvennetz 3. O.

Beweis

Besteht die con. Pol. von x aus einem Geradenpaar, so besteht wenn

$$y_1 u_{11} + y_2 u_{12} + \dots = 0$$
$$y_1 u_{21} + \dots = 0$$
$$\dots$$

und der Punkt y ist der Schnittpunkt der Geraden.
Dieselben Gleichungen drücken y als conjugirten Pol von x aus, folglich fallen die Punkte zusammen. Ebenso ist der zweite Theil zu beweisen. Auch die Umkehrung folgt

unmittelbar.

Nach diesem Verfahren gehören alle Punkte der Hesseschen und Steinerschen K. paarweise zusammen, derart, dass bei jedem Paare die aus einem Geradenpaar bestehende konische Polare des einen Punktes in dem anderen ihren Doppelpunkt hat und dass die kubische Polare des zweiten in dem ersten ihren Doppelpunkt hat. Figur 138

Hat die Kurve n. O. [illegible] einen Doppelpunkt A, so fallen in diesem Punkt zwei entsprechende Pole der Hesseschen und Steinerschen Kurven zusammen. Figur 139

Beweis

Der Doppelpunkt A liegt auch der Hesseschen Kurve und die konische Polare von A ist das Tangentenpaar in diesem Punkte, also fällt der Schnittpunkt desselben nach A und dieser Schnittpunkt ist der zu A entsprechende Pol.

Dasselbe gilt von einem dreifachen Punkte, da dieser als drei zweifache Punkte aufzufassen ist.

Wie wir sehen, gehen also die Steinerschen Kurven durch die Doppel- und dreifachen Punkte und auch durch die Rückkehrpunkte der ursprünglichen Kurve.

Durège 370.

—

Wenn die Hessesche Curve $H(x)=0$ einer C.3.O. $u=0$ keinen Doppelpunkt hat, in welchem Falle die Curve $u=0$ nach Durège 164 ebenfalls keinen Doppelpunkt besitzt, so fallen in der Hesseschen und Cayleyschen Curve keine zwei conjugirten Pole entsprechender Curven.

Zum Beweise brauchen wir mehrere Sätze:

Durège 375.

Legt man durch einen Wendepunkt w einer Wendetangente T, die die Curve noch in A trifft, legt durch w drei beliebige Secanten $w\,a\,b\,c$, $w\,a'b'c'$, $w\,a''b''c''$ und durch A eine vierte Secante: $A\,a'''b'''c'''$, so liegen die 12 Punkte abc; $a''b''c''$; $a'b'c'$ $a'''b'''c'''$ auf einer C.3.O.

Der Beweis folgt unmittelbar, wenn man die 4 Secanten als 2 C.2.O. auffasst und berücksichtigt, dass in einem Wendepunkte drei zusammenfallende Curvenpunkte vereinigt sind. —

Daraus folgt der nachfolgende Satz, doch ist derselbe für uns von keinem Interesse.

Durège 376

Sind $a'\,a''\,a'''\,a^{(n)}$ vier in gerader Linie liegende Curvenpunkte, ferner w ein Wendepunkt und trifft die an ihn gezogene Tangente die Curve in A, zieht man ferner durch w und $a'\,a''\,a'''$ die Secanten in $a'b'c'$, in $a''b''c''$, in $a'''b'''c'''$ und endlich d. die dreimale d $a^{(n)}b^{(n)}c^{(n)}$, so liegen die acht Punkte $b'c'$ $b''c''$ $b'''c'''$ $b^{(n)}c^{(n)}$ auf einem Kegelschnitt.

Der Beweis folgt aus dem vorigen Satze, denn liegen von den 12 Punkten einer C. 3. O. 7 in einer geraden Linie, so liegen die acht andern auf einem Kegelschnitt.

Die Gerade, welche 2 Wendepunkte einer C. 3. O. verbindet, trifft die Curve allemal in einem dritten Wendepunkte. Durège 352

Bemerk.

Bedeuten A B C D lineare Ausdrücke, und die Gleichung eines Kegelschnitts und dann die Gleichung einer C. 3. O. auf die Form:

$$AB \cdot D = K \cdot D^3 C$$

gebracht werden, weil man dabei über die nöthigen Constanten zu verfügen hat. Alsdann trifft die Gerade $A = 0$ die Curve in drei zusammenfallenden Punkten da, wo sie von der Geraden $D = 0$ getroffen wird. Dasselbe gilt von der Geraden $B = 0$. Folglich sind diese beiden Geraden Wendetangenten und ihre Durchschnitte mit der Curve d.h. die Wendepunkte liegen auf der Geraden $D = 0$.

Nennen aber die C. 2. O. $D = 0$ die C. 3. O. dreimal in zwei der drei zusammenfallenden Punkten an, wo sie von der Geraden $D=0$ getroffen war. Da nun keiner dieser Punkte ein Doppelpunkt sein darf, weil sonst die Gerade $D=0$ fünf Punkte mit der Curve gemein hat, so folgt hieraus mit Nothwendigkeit, dass diese zwei Punkte auch Wendepunkte sein müssen und zwar liegen sie auch auf der Verbindungsgeraden der ersten beiden Wendepunkte $D=0$ q.e.d.

Anmerkung II

Lässt man in dem vorhergehenden Satze zwei von den auf der Geraden liegenden Punkten a_1, a_2, a_3, a_4 zusammenfallen, so entsteht ein Wendepunkt. Desgleichen fallen auch die Punkte b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 zusammen, um so einen Wendepunkt zu bekommen.

nzüge 371

Die zweite Polare eines Wendepunktes besteht nach § 279 aus der Wendetangente und einer anderen Geraden, die wir die harmonische Polare 2ten Grades dieses Punktes nennen wollen. Dieselbe ist der geometrische Ort der Punkte y, die die Bedingung erfüllen:

$$\frac{\partial z'}{\partial z'} + \frac{\partial z''}{\partial z''} + \frac{\partial z'''}{\partial z'''} = 0$$

wenn $t' t'' t'''$ die drei andern Schnittpunkte einer beliebigen durch x gelegten Geraden mit der C. 4. O. bedeuten.

[Auch der Wendetangente T_1 eines Wendepunktes w_1 erfüllen die Durchschnitte $\overline{IV}$ $\overline{III}$ $\overline{II}$ der Wendetangenten T_2 T_3 T_4 dreier mit w_1 auf einer Geraden liegenden Wendepunkte w_2 w_3 w_4 die Bedingung: Durège 363

$$\frac{\alpha w_2}{w_1 w_2} + \frac{\alpha w_3}{w_1 w_3} + \frac{\alpha w_4}{w_1 w_4} = 0$$

wenn α den Durchschnitt der harmonischen Polare 2ter Ordnung $\overline{I}\,\alpha$ von w mit T bedeutet.

Bemerkt Prof. Durège.

Wahrscheinlich nur der Satz nicht. —]

Der Beweis kann selbst unmittelbar geliefert werden.

Wenn ein Punkt x mit seinem entsprechenden zusammenfiele, so müßte die cubische Polare von x durch diesen Punkt hindurch gehen und daher x auf der Curve K liegen. Demnach müßte x einer der Durchschnitte der Curve K mit der Hesse'schen Curve $H(x)$ sein, oder da K keinen Doppelpunkt hat, ein Wendepunkt der C. 4. Aber die cubische Polare eines Wendepunktes besteht aus der Wendetangente und der harmonischen Polare zweiter Ordnung.

Sollten diese sich aber in dem Wendepunkte treffen, so müssten an denselben unpaaren Wendepunkten zusammenfallen, weil sie wenn man die durch 7 Wendepunkte gelegten Gerade als Tangente betrachtet, eine Bedingung zwischen den Coefficienten aufstellt. Das ist aber nicht möglich, weil die C. keinen Doppel oder Rückkehrpunkt besitzt.

Durège 765 Jede Gerade G hat bezüglich einer C. 4. O. als Curv. Curven neun Pole a b c d e f g h i in welchen sich die kubischen Polaren aller ihrer Punkte schneiden.

x

Sind nun 1, 2 ... 12 die Punkte, in welchen die Gerade G die Steiner'sche Curve trifft, so sind die cubischen Polaren dieser Punkte, diejenigen 12 Curven des Büschels a b c ... i, welche Doppelpunkte besitzen und zwar liegen diese Doppelpunkte auf der Hesse'schen Curve. Mehr Doppelpunkte kann es überhaupt aber in dem Büschel a, b ... i nicht geben, da sie die Hesse'sche Curve der allgemeine Ort der Punkte ist, deren kubische Polaren Doppelpunkte besitzen. Vergleiche auch Durège 593.

Wir kommen hierdurch zu dem Satze:

Nimmt man eine Gerade G nach und nach alle Lagen in der Ebene an, so beschreiben die Doppelpunkte der an den vier Polen bezüglich der Curven $u=0$ gebildeten Curvenbüschel d.h. die Hesse'sche Curve.

Sollen nun der Durchschnitte der Geraden G mit der Cayley'schen Curve zwei zusammenfallen $x\,x.\,x'$, so fallen auch die beiden zugehörigen Pole $y\,y.\,y'$ auf der Hesse'schen Curve zusammen, und die betreffende Polare des Punktes x hat einen Doppelpunkt. In diesem Doppelpunkt fallen aber auch gleichzeitig zwei der vier Polen der Geraden G zusammen, da ja durch ihn eben zwei, nämlich zusammenfallende Curven des Büschels gehen. Durège 466

Also folgt:

Die Cayley'sche Curve hat die Eigenschaft, dass ihre Tangenten zwei zusammenfallende Pole haben. Diese zusammenfallenden Pole liegen auf der Hesse'schen Curve und sind die zugehörigen Pole der Berührungspunkte.

Ebenso folgt das Umgekehrte:

Sollen auf der Hesse'schen Curve zwei Pole einer Linie G zusammen, so fallen auch die beiden zugehörigen Pole auf der Cayley'schen Curve zusammen und da die Linie G die Verbindungslinie der zugehörigen

Pol ist, so ist sie eine Tangente an die Riemann'sche Curve.
Da nun die Gerade G einen Pol hat und die Polaren einer jeden derselben ist, so folgt:
die gerade Polare eines jeden auf der Cayley'schen Curve liegenden Punktes ist die Tangente in dem conjugirten Pole an die Riemann'sche Curve.
Hieraus erhalten wir eine neue Definition der Riemann'schen Curve:
Die Riemann'sche Curve ist die Enveloppe der Linien die geraden Polaren der Punkte der Cayley'schen Curve in Bezug auf die Fundamentalcurve sind oder der Linien die zusammenfallende Pole haben.

Durège 461.

Die cubische Polare bezüglich eines Punktes der Fundamentalcurve, irgend eines Punktes c, schneidet die Cayley'sche Curve in 18 Punkten h. Die geraden Polaren bezüglich der Fundamentalcurve dieser 18 Punkte, sind die von c an die conjugirten Pole der Riemann'schen Curve gezogenen Tangenten.
Durch h geht nämlich die cubische Polare von c, folglich die gerade Polare von h durch c. Diese berührt aber die Riemann'sche Curve im conjugirten Pole.

Die conische Polare bezüglich der Fundamentalcurve derjenigen ... gelegenen Punkte C schneidet die Hesse'sche Curve in 12 Punkten. Die conischen Polaren dieser bestehen aus je zwei Geraden, die sich zu je zwei auf der Cayley'schen Curve schneiden und von denen mit jedem Paare eine durch den Punkt C geht. Durège 461

Der Wendepunkt w der Fundamentalcurve ist zugleich ein Punkt der Hesse'schen Curve. Der ihm als solchem zugehörige Pol w' der Cayley'schen Curve ist der Durchschnitt der Wendetangente von w und der harmonischen Polare gerader Geraden von w. Der Beweis ist klar, denn diese Geraden bilden die conische Polare von w und schneiden sich daher auf der Cayley'schen Curve. Durège 462

Die Wendetangente von der Fundamentalcurve im ersten Wendepunkte w berührt die Cayley'sche Curve in dem zu w (als Punkt der Hesse'schen Curve betrachtet) zugehörigen Pol w'. Durège 463

Der Beweis ist unmittelbar ersichtlich.

Eine Curve 3.O. und ihre Cayley'sche Curve haben 192 gemeinsame Tangenten, von denen Durège 464

24 die Wendetangenten der Fundamentalcurven sind.

Aus 461 folgt, daß die Hesse'sche Curve in Bezug auf die Fund. C. von der 12 Classe ist, denn es können von einem beliebigen Punkte aus 12 Tangenten an sie gezogen werden, wie leicht zu bemerken ist. Folglich haben beide Curven 12.18 = 216 gemeinschaftliche Tangenten. Unter diesen befinden sich auch die Wendetangenten. Da aber jede von diesen und ihre Anzahl beträgt 24 als aus 2 zusammenfallenden Tangenten zu betrachten ist, so bleiben nur 192 gemeinsame Tangenten.

Durège 475

Da nun jede Wendetangente an die Hesse'sche Curve fallen 3 Pole auch der Hesse'schen Curve zusammen. Eine Wendetangente hat drei in gerader Linie liegende Punkte mit der Curve. Diese angezeigten Punkte fallen in einen zusammen und da durch diesen also drei L. 3. C. gehen, so fallen in ihm 3 der Berühr.-Punkte zusammen.

Alle kubischen Polaren (bezüglich der Fundamentalcurven) welche durch den vierfach gezählten Pol h' der Hesse'schen Curve, deren Doppelpunkte h der Steiner'schen Curve gehen, haben in h' miteinander eine dreipunktige Berührung. Durège 476

Denn diese kubischen Polaren bilden ein Büschel 3. O. dessen Grundpunkte die Wurzeln der gemeinsamen Polaren von h' sind. Die letztere aber ist die Doppeltangente in h an der Steiner'schen Curve und daher fallen drei Grundpunkte des Büschels in h' zusammen.

Einem jeden einfachen Punkte der Steiner'schen Curve entspricht eine kubische Polare mit einem Doppelpunkte, einem Doppelpunkte der Steiner'schen C. würde daher eine kubische Polare mit zwei Doppelpunkten entsprechen müssen. Dies ist aber nur möglich, wenn die Curve 3. O. in eine Gerade und einen Kegelschnitt zerfällt. Also:

Die kubischen Polaren aller Doppelpunkte der Steiner'schen Curve bezüglich der Fundam. curve zerfallen in eine Gerade und einen Kegelschnitt, die sich in zwei Punkten der Hesse'schen Curve.

Ebenso:

die kubischen Polaren aller drei fachen Punkte der

Riemann'schen F. bezüglich der F. z.B. n=0 zerfallen in zwei Linien, die sich viermal auf der Zetafläche F. schneiden. Einer jeden eigentlichen Tangente an der Riemann'schen Fläche entsprechen 2 zusammenfallende Pole auf der Zetafläche Fläche, einer Doppeltangente entsprechen dagegen zweimal je zwei zusammenfallende Pole auf der Zetafläche F. —

Zu bemerken ist noch der Fall, wenn der Doppelpunkt der Riemann'schen Fläche in einen Wendepunkt übergeht. Dann müssen die beiden entsprechenden Doppelpole, weil deren jeder auf einen der beiden Tangenten bezogen, zusammenfallen. Wenn aber zwei Doppelpunkte zusammenfallen, so entsteht dadurch ein Rückkehrpunkt, weil derselbe gleich zwei zusammenfallenden Doppelpunkten zu zählen ist. —

Rückkehrpunkt

Curvenbüschel vierter Ordnung.

Eine Schaar von Curven vierter Ordnung, die sich alle in den nämlichen 16 Punkten – den sogenannten Basispunkten – schneiden, heisst ein Curvenbüschel 4. O. Sind u=0 und v=0 zwei Curven desselben, so lassen sich alle in die Form bringen Durège 587

$$u+\lambda v=0$$

wo λ einen unveränderlichen Parameter ist.

Durch einen beliebigen Punkt mit Ausnahme der 16 Basispunkte geht nur eine Curve des Büschels und eine beliebige durch einen Basispunkt gezogene Gerade wird in demselben nur von einer einzigen Curve des Büschels berührt, denn diese ist dann durch einen außer der gegebenen Geraden und ... bei dem gegebenen Punkte liegenden Punkte vollständig bestimmt.

Alle C. 4. O. welche durch 13 gegebene Punkte gehen, bilden einen Büschel. Durège 588.

Alle C. 4. O. welche durch 12 gegebene Punkte hindurchgehen, bilden ein Curvennetz 4. O. Durège 589

Lemma nach Durège

Bei einem Netze von C. 4. O. welche 12 Punkte Durège 590

Gemeinen haben, liegen die auf, ihnen vorkommenden Doppelpunkte auch einer C. 9. O. und jeder Punkt dieser C. ist ein Doppelpunkt für irgend eine Curve des Netzes.

Lemma nach Durège.

Durège § 91. Die 12 gegebenen Punkte befinden sich selbst unter den Doppelpunkten, welche auf der durch die fraglichen Curven vorkommen, sodaß die C. 9. O. welche die Doppelpunkte enthält, auch durch die gegebenen 12 Punkte geht.

Lemma nach Durège.

Durège § 92. Die C. 9. O. welche die Doppelpunkte der durch 12 Punkte hindurchgehenden C. 4. O. enthält, geht nicht blos durch die sieben Punkte hindurch, sondern hat diese Punkte ebenfalls zu Doppelpunkten und entspricht dem in jenem der Vorigen mit denjenigen Curven 4. O. gemeinen, welche in diesen Punkten ihre Doppelpunkte besitzen.

Beweis

Wählt man einen der gewählten Punkte, welcher a heißen möge, zum Eck $x_1 = 0$ $x_2 = 0$ des Fundamentaldreiecks, so kann man die Gl. $u = 0$, $v = 0$ $w = 0$ so schreiben:

$$\left.\begin{aligned} u &= u_1 x_3^3 + u_2 x_3^2 + u_3 x_3 + u_4 \\ v &= v_1 x_3^3 + v_2 x_3^2 + v_3 x_3 + v_4 \\ w &= w_1 x_3^3 + w_2 x_3^2 + w_3 x_3 + w_4 \end{aligned}\right\}$$

wobei:

$u_1 = a_1x_1 + a_2x_2$, $v_1 = b_1x_1 + b_2x_2$, $w_1 = c_1x_1 + c_2x_2$ und

die anderen Grössen $u_2\, v_2 \ldots$ homogene Fkt. des 2, 3, 4 Grades

Grössen x_1 und x_2 sind.

Die Gl. d. L. G. O. kann dann geschrieben werden:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}x_3^3 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}x_3^2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}x_3 + \frac{\partial u_4}{\partial x_1}, & \frac{\partial u_1}{\partial x_2}x_3^3 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}x_3^2 + \ldots, & 3u_1x_3^2 + 2u_2x_3 + u_3 \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_1}x_3^3 + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}x_3^2 + \ldots\ldots, & \frac{\partial v_1}{\partial x_2}x_3^3 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}x_3^2 + \ldots, & 3v_1x_3^2 + 2v_2x_3 + v_3 \\ \frac{\partial w_1}{\partial x_1}x_3^3 + \frac{\partial w_2}{\partial x_1}x_3^2 + \ldots\ldots, & \frac{\partial w_1}{\partial x_2}x_3^3 + \frac{\partial w_2}{\partial x_2}x_3^2 + \ldots, & 3w_1x_3^2 + 2w_2x_3 + w_3 \end{vmatrix} =$$

Sie hat demnach die Form:

$$v_1 x_3^8 + v_2 x_3^7 + \ldots\ldots = 0.$$

Bildet man v_1 so erhält man:

$$v_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & 3\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}x_2\right) \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & 3\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}x_2\right) \\ \frac{\partial w_1}{\partial x_1} & \frac{\partial w_1}{\partial x_2} & 3\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial w_1}{\partial x_2}x_2\right) \end{vmatrix}$$

Diese Determinante verschwindet offenbar identisch. Daher ist die Gl. der L. G. O.

$$v_2 x_3^7 + v_3 x_3^6 + \ldots = 0$$

und diese zeigt nach Satz 162 auch, dass die Kurve einen Doppelpunkt hat.

Bilden wir jetzt v_2!

$v_2 =$

$$3\frac{\partial w_1}{\partial x_1}\left[w_1\frac{\partial v_2}{\partial x_2} - v_1\frac{\partial w_2}{\partial x_2}\right] + 3\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\left[w_1\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - v_1\frac{\partial w_1}{\partial x_2}\right]$$
$$+3\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\left[u_1\frac{\partial w_2}{\partial x_2} - w_1\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right] + 3\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\left[u_1\frac{\partial w_1}{\partial x_2} - w_1\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right]$$
$$+3\frac{\partial w_1}{\partial x_1}\left[v_1\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - u_1\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right] + 3\frac{\partial w_2}{\partial x_1}\left[v_1\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - u_1\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right]$$
$$+ 2\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & u_2 \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & v_2 \\ \frac{\partial w_1}{\partial x_1} & \frac{\partial w_1}{\partial x_2} & w_2 \end{vmatrix} \quad \text{Odxn}$$

$$v_2 = 3\frac{\partial w_2}{\partial x_1}\left[w_1\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - v_1\frac{\partial w_1}{\partial x_2}\right] + 3\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\left[v_1\frac{\partial w_1}{\partial x_1} - w_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right]$$
$$+3\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\left[u_1\frac{\partial w_1}{\partial x_2} - w_1\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right] + 3\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\left[w_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - u_1\frac{\partial w_1}{\partial x_1}\right]$$
$$+3\frac{\partial w_2}{\partial x_1}\left[v_1\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - u_1\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right] + 3\frac{\partial w_2}{\partial x_2}\left[u_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - v_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right] + \Sigma$$

Aber je zwei der in Horizontalreihe stehenden Klammern haben einen gemeinsamen Factor, denn

$$w_1\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - v_1\frac{\partial w_1}{\partial x_2} = \left[x_1\frac{\partial w_1}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial w_1}{\partial x_2}\right]\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \left[x_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right]\frac{\partial w_1}{\partial x_2}$$
$$= x_1\left[\frac{\partial w_1}{\partial x_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial w_1}{\partial x_2}\right] \text{ und:}$$
$$\left[v_1\frac{\partial w_1}{\partial x_1} - w_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right] = x_2\left[\frac{\partial w_1}{\partial x_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial w_1}{\partial x_2}\right].$$

Setzen wir also:

$$\frac{\partial w_1}{\partial x_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial w_1}{\partial x_2} = A_1$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial w_1}{\partial x_2} - \frac{\partial w_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = A_2$$
$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_2} = A_3$$

so wird

$v_2 = 3\alpha_1\left(x_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + 3\alpha_2\left[x_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right] + 3\alpha_3\left(x_1 \frac{\partial w_2}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial w_2}{\partial x_2}\right) - \left[\alpha_1 u_2 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 \ldots\right.$

und folglich, da die Größen $u_2\ v_2\ w_2$ homogene Fct. 2ten Gr. sind:

$$v_2 = 4\left(\alpha_1 u_2 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 w_2\right).$$

Gleichzeitig stellt dieses die Gl. der Tangenten an die Curven 3. O. dar.

Durch geometrische Operationen, wie sie bei Durège S. 92 durchgeführt ist, zeigt es sich, daß $\frac{v_2}{4}$ der Factor von x_3^2 einer bestimmten Curve des Netzes ist. Damit haben diese beiden Curven, wie daraus die letzte auch in $x_1\ x_2$ einen Doppelpunkt hat, die Tangente in $x_1\ x_2$ gemeinsam. Dass dies nur an einem der Punkte bewiesen ist, gilt ebenso von den übrigen.

Auf den Curven eines Büschels 3. O. giebt es im Allgemeinen 12 Doppelpunkte. Durège S. 93.

Bemerk. 1) ist wiederum zu gewinnen, wie Durège S. 93.

Bemerk. 2) bedarf einer Modification. Damit derselbe richtig bleibt, muß angenommen werden, daß es in einem Curvennetz 3. O. stets 2 Curven giebt, die in jedem der 12 Basispunkte einen dreifachen Punkt haben. Nur dann nämlich kommt die Zahl 5 7 der von den 81 Schnittpunkten der beiden d. h. d. abzuziehenden Schnittpunkten heraus. —

Durège 594. Die 27 Doppelpunkte, welche in einem Flächenbüschel 4. O. vorkommen, haben die Eigenschaft, daß ihre geraden Polaren in bezug auf alle Flächen des Büschels die nämlichen geraden Linien sind; und zwar sind diese 27 Punkte die einzigen, die diese Eigenschaft haben.

Der Beweis ist wörtlich genau so wie Durège 594.

Durège 595. Eine besondere Beachtung verdient ein Büschel von Flächen 4. O. bei welchem alle Flächen folgendes mit einander gemein haben: nämlich vier in gerader Linie liegende Punkte $a\,b\,c\,d$, sodann die Tangenten $A\,B\,C\,D$ in diesen und endlich die Tangentialpunkte $\alpha\alpha, \beta\beta, \gamma\gamma, \delta\delta$, von $a\,b\,c\,d$ welche dann auf einem Kegelschnitt liegen. Bezeichnet man die Gerade $a\,b\,c\,d$ mit S und den Kegelschnitt $\alpha\alpha, \beta\beta, \delta\delta$, mit F, so kann man den Flächenbüschel durch die Gl.

$$ABCD - \lambda^2 S^2 F = 0$$

darstellen, worin λ^2 den veränderlichen Parameter bedeutet. Bei einem solchen Büschel kann man die Anzahl 27 der vorkommenden Doppelpunkte unmittelbar erhalten so dass die Curve dritter Klasse $\Delta^2 \nabla$ unendlich viele Doppelpunkte besitzt. Es bleibt aber doch für diese Punkte die Eigenschaft 597 bestehen.

Nimmt man die Geraden A u. B zu den Seiten $x_2 = 0$ $x_3 = 0$ des Fundamentaldreiecks, so dass die dritte Seite $x_1 = 0$ die eine Diagonale des Vierecks ABCD ist, nennt ferner die Coordinaten des Schnittpunktes von (CD) $a_1\, a_2\, a_3$ so hat das Curvenbüschel die Gl.

$$u = x_2 x_3 (a_2 x_1 - a_1 x_2)(a_1 x_3 - a_3 x_1) - \lambda^2 D^2 F, \text{ wobei}$$

$$D = d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3$$

$$F = b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{33} x_3^2 + 2 b_{12} x_1 x_2 + 2 b_{13} x_1 x_3 + 2 b_{23} x_2 x_3$$

Also:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = x_2 x_3 (a_1 x_3 - a_3 x_1) a_2 - x_2 x_3 (a_2 x_1 - a_1 x_2) a_3 - 2\lambda^2 D \left[(b_{11} x_1 + b_{12} x_2 + b_{13} x_3) D + d_1 F \right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = -x_2 x_3 (a_1 x_3 - a_3 x_1) a_1 + x_3 (a_2 x_1 - a_1 x_2)(a_1 x_3 - a_3 x_1) - 2\lambda^2 D \left[(b_{21} x_1 + b_{22} x_2 + b_{23} x_3) D + d_2 F \right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3} = x_2 x_3 (a_2 x_1 - a_1 x_2) a_1 + x_2 (a_2 x_1 - a_1 x_2)(a_1 x_3 - a_3 x_1) - 2\lambda^2 D \left[(b_{31} x_1 + b_{32} x_2 + b_{33} x_3) D + d_3 F \right]$$

Da nun Ausdruck für die gerade Polare eines Punktes x der auf D liegt, d.h. für den $D = 0$ ist, werden also die Ausdrücke, in denen F vorkommt, verschwinden, mithin λ und daher die gerade Polare von dem Werthe der einzelnen Curven, die durch λ bedingt sind, unabhängig sein.

Um die Anzahl der Doppelpunkte zu finden, müssen wir erst die allgemeine Form der Gl. der die Doppelpunkte [?] symmetrischen Gestalt [?] [illegible]. Es sei

$$A = 0 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$$
$$B = 0 = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3$$
$$C = 0 = c_1 x_1 + \text{——}$$
$$D = 0 = d_1 x_1 + \ldots$$ dann ist also:

$$1)\ \frac{\partial A}{\partial x_1} = [a_1 BCD + b_1 ACD + c_1 ABD + d_1 ABC] + 2\Omega^2\Phi[(f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + f_{13}x_3)\Phi + d_1 \Phi]$$
$$2)\ \frac{\partial A}{\partial x_2} = [a_2 BCD + b_2 ACD + c_2 ABD + d_2 ABC] + 2\Omega^2\Phi[(f_{21}x_1 + f_{22}x_2 + f_{23}x_3)\Phi + d_2 \Phi]$$
$$3)\ \frac{\partial A}{\partial x_3} = [a_3 BCD + b_3 \ldots\ldots\ldots] + 2\Omega^2\Phi[(f_{31}x_1 + f_{32}x_2 + f_{33}x_3)\Phi + d_3 \Phi]$$

Um die Doppelpunkte zu finden, sind diejenigen Punkte zu suchen, für welche diese Ausdrücke gleichzeitig verschwinden und daher die Größe Ω^2 etc. aus je zweien der Gl. zu eliminieren. Dann ergeben [?] die Gleichungen:

$$[(a_1 BCD + b_1 ACD + c_1 ABD + d_1 ABC)][(f_{21}x_1 + f_{22}x_2 + f_{23}x_3)\Phi + d_2 \Phi] - [a_2 BCD + b_2 ACD \ldots][(f_{11}x_1 + f_{12}\ldots)\Phi + \ldots]$$
$$[(a_2 BCD + b_2 ACD + c_2 ABD + d_2 ABC)][(f_{31}x_1 + f_{32}x_2 + f_{33}x_3)\Phi + d_3 \Phi] - [a_3 BCD + \ldots][(f_{21}x_1 + \ldots)\Phi + d_2 \Phi]$$
$$[(a_3 BCD + b_3 ACD + \ldots][(f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + f_{13}x_3)\Phi + d_1 \Phi] - [a_1 BCD \ldots][(f_{31}x_1 + \ldots)\Phi + d_3 \Phi]$$

Alle diese drei Formen [?] haben die Curve Φ gemein, woraus sich herleitet, daß alle Punkte derselben Doppelpunkte sind. Es bleiben demnach nur die drei Formen 5^{ter} Ordnung zu betrachten übrig. Wir können für dieselben [illegible] dieselbe Betrachtung anstellen wie ~~[illegible]~~. Bewiesen [?] § 93. Die Formen I und II schneiden sich in 25 Punkten, vorausgehen oder die neuen dem Büschel 2) $\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0$ zugehörigen Berührungspunkte ab. Es bleiben somit nur 16 Schnittpunkte übrig. Aber auch diese sind noch zu zählen. Wir können Gl. I u. II in die Form bringen.

$$\text{I} \quad D' f_1(x) + F(f_2(x)) = 0$$
$$D' f_3(x) + F f_4(x) = 0.$$

Wie aus der Form ersichtlich, befinden sich unter den Schnittpunkten auch die beiden Schnittpunkte von F und D' und diese liegen auf der Geraden D, sind also nicht mitzurechnen. Es bleiben also nur 14 Schnittpunkte übrig, die Doppelpunkte darstellen. Somit ist die Anzahl der vorkommenden ~~Schnittpunkte~~ Doppelpunkte bei einem Büschel der oben beschriebenen Art vierzehn.

Die Polarcurve der Geraden D in Bezug auf alle Curven des Büschels ist derselbe Kegelschnitt. Seite 600.

[illegible]

Werden die C. eines Büschels 4. O. von einer Curve ... geschnitten, so bilden auf derselben die Schnittpunkte, deren ... der nämlichen Curve angehören, eine Involution des 4. Grades. Seite 607.

Zusatz 608. Unter den Linien einer Fläche 2. O. giebt es 6, welche eine beliebig gegebene Gerade G berühren. Geht die letztere zufällig durch einen Doppelpunkt, so zählt dieser für einen Berührungspunkt.

Zusatz 609. Geht die Gerade G durch einen Knotenpunkt der Fläche, so hat eine die Gerade berührende Linie ihren Berührungspunkt in dem Knotenpunkte und im allgemeinen giebt es nur noch 4 Linien, welche diese Gerade berühren.

Zusatz 611. Wenn von den Knotenpunkten einer Linienfläche 4. O. zwei in einem k zusammenfallen, so giebt es unter den Linien der Fläche eine, welche in k einen Doppelpunkt, und eine, welche in k einen Rückkehrpunkt hat. Alle mit Ausnahme der ersten haben in k einen gemeinschaftlichen Berührpunkt h.—

Ueber das arithmetisch-geometrische Mittel nach Gauss

§ 1.

Es seien zwei von einander abhängige Reihen gegeben:

$$a \quad a' \quad a^{(2)} \ldots \quad a^{(n)}$$
$$b \quad b^{(1)} \quad b^{(2)} \ldots \quad b^{n}$$

deren allgemeinen Glieder gleich sind:

$$a^{(n)} = \frac{1}{2}\left[a^{(n-1)} + b^{(n-1)}\right]$$
$$b^{n} = \sqrt{a^{(n-1)}b^{(n-1)}}$$

wo für n: $1 \; 2 \ldots \; n$ zu setzen ist. Es sollen zunächst die Eigenschaften dieser beiden Reihen untersucht werden.

Nehmen wir dazu an, dass a und b reelle positive Grössen seien und dass für die Quadratwurzel stets das positive Zeichen zu nehmen ist, dann folgt unmittelbar

1) ist $a = b$, so bestehen die a und b Gliedern alle aus a

2) ist a und b verschieden, so folgt zunächst:

$$\left(a^{n} - b^{n}\right)\left(a^{(n)} + b^{(n)}\right) = \frac{1}{4}\left(a^{(n-1)} - b^{(n-1)}\right)^2 \text{ u.s.f.}$$

$$\left.\begin{matrix} a^{n} > b^{n} \\ \vdots \\ a' > b' \end{matrix}\right\}$$

Wir wollen hierzu noch die Annahme machen, dass auch

$$a > b \text{ sei}$$

Also:

Jedes Glied der unteren Reihe ist kleiner, als das entsprechende der oberen Reihe.

Dann folgt aber unmittelbar aus den Definitionen.

$$a^{(n)} = \frac{1}{2}\left[a^{(n-1)} + b^{(n-1)}\right]$$
$$b^{n} = \sqrt{a^{(n-1)}b^{(n-1)}}$$
$$a^{(n)} < a^{(n-1)}$$
$$b^{(n)} > b^{(n-1)}$$

Also:

die Glieder der oberen Reihe fallen beständig, die der unteren steigen. Da aber die ersteren immer grösser als die letzteren sein müssen, so folgt daraus dass sich die Glieder beider Reihen einer bestimmten Grenze nähern müssen. Dieselben mögen mit a^{∞} und b^{∞} bezeichnet werden. Es ist dieselbe aber in beiden Fällen die gleiche.

In der That ist:

$$\frac{a_n - b_n}{a_{n-1} - b_{n-1}} = \frac{a^{(n-1)} - b^{(n-1)}}{4(a^n + b^n)} = \frac{a^{(n-1)} - b^{n-1}}{2(a^{n-1} + b^{n-1}) + 4\sqrt{a^{n-1} b^{n-1}}}$$

Der Bruch ist aber kleiner als $\frac{1}{2}$ also:

$$\frac{a_n - b_n}{a^{n-1} - b^{n-1}} < \frac{1}{2} \text{ d.h.}$$

$$\frac{a^n - b^n}{a^{n-1} - b^{n-1}} < \frac{1}{2} \text{ od. } a^n - b^n < \frac{1}{2}(a^{n-1} - b^{n-1})$$

Mithin nehmen die Differenzen $a^n - b^n$ ab und müssen sich schliesslich der Null nähern.

Also schliesslich

Die Glieder der oberen, wie der unteren Reihe nähern sich unendlich einer Grenze. Diese Grenze nennt man das arithmetisch geometrische Mittel der Zahlen a und b und bezeichnet es mit $M(a\,b)$. Zugleich ist durch die Definition ein Mittel gegeben dasselbe zu finden.

§2. Wenn also die Grössen a und b gegeben sind, so ist es richtig leicht, die nach einander folgenden Glieder zu berechnen. Aber eben so leicht ist es, die beiden Anfangsgrössen zu berechnen. In der That haben wir die Gleichung

$$x^2 - 2ax + b^2 = 0 \quad \text{wo} \quad a \geq b > 0 \text{ ist, so ist}$$

wenn wir die beiden existierenden Werte als reellen Wurzeln mit $'a$ und $'b$ bezeichnen und zwar die grössere mit $'a$ die kleinere mit $'b$

$$\frac{1}{2}('a + 'b) = a$$

$$\sqrt{'a\,'b} = b \text{ und darum heisst eben } 'a \text{ und } 'b$$

Es ist nun dieser Grösse an Stelle aber das arith. geom. Mittel dar und daher folgt unmittelbar:

$$M(na, nb) = n\,M(a\,b).$$

Wir können diesen Satz auch so aussprechen:

$$M(a\,b) = a\,M\left(1, \frac{b}{a}\right) = b\,M\left(\frac{a}{b}, 1\right).$$

Aufgabe §5

Es soll das arithmetisch geometrische Mittel von 1 und $1+x$ durch eine Reihe ausgedrückt werden, die nach Potenzen von x fortschreitet.

Auflösung

Da $M(1,1)$ ist, so setzen wir:

$$M(1+x,1) = 1 + h'x + h^{(2)}x^2 + h^{(3)}x^3 + \dots$$

wo die h noch näher zu bestimmende Grössen sind.

Setzt $x = 2t + t^2$, so haben wir

$$M(1+2t+t^2, 1) = 1 + h'(2t+t^2) + h^{(2)}(2t+t^2)^2 + h^{(3)}(2t+t^2)^3 + \dots$$

Da nun aber, wie früher gezeigt:

$$M(a\,b) = M(a^{(n)}\,b^{(n)})$$ ist, so ist auch

$$M(1+2t+t^2, 1) = M\left(1 + \tfrac{1}{2}t^2 + t, 1+t\right)$$ da die in Reihe folgenden Glieder sein würden:

$$1 + \tfrac{1}{2}t^2 + t \text{ und } 1+t.$$

Nach dem eben bewiesenen Satze ist nun aber:

$$M\left(1+\tfrac{1}{2}t^2+t, 1+t\right) = (1+t)\,M\left(1 + \tfrac{1}{2}\frac{t^2}{1+t}, 1\right).$$

Es hat dieser Ausdruck dieselbe Form wie vorher, nur dass für x: $\dfrac{t^2}{2(1+t)}$ gesetzt worden ist.

Also können wir die Reihe entwickeln:

$$M(1+x,1) = 1+\delta + h'(\tfrac{1}{2}\delta^2) + h''\frac{(\frac{1}{2}\delta^2)^2}{1+\delta} + h'''\frac{(\frac{1}{2}\delta^2)^3}{(1+\delta)^2} + \dots\dots$$

$$= 1+\delta+h'(\tfrac{1}{2}\delta^2) + h''\tfrac{1}{4}(\delta^4-\delta^5+\delta^6-\delta^7\dots) + h'''\tfrac{1}{8}\Big(\delta^6+\delta^8+\delta^{10}+\dots+2\sum\delta^{n-1}\delta^{n+1} - 2\sum_{n=3\dots\dots\infty}\delta^{n-1}\delta^n - 2\sum\delta^n\delta^{n+2}\Big) + \dots\dots$$

Andererseits fanden wir:

$$M(1+x,1) = 1 + h'(2\delta+\delta\delta) + h''(2\delta+\delta^2)^2 + h'''(2\delta+\delta^2)^3 + h^{(4)}(2\delta+\delta^2)^4 \dots$$

Also ergeben sich durch Gleichsetzung der Coefficienten:

$$2h' = 1$$

$$4h''+h' = \tfrac{1}{2}h'$$

$$8h'''+4h'' = 0$$

$$16h^{(4)}+12h'''+h'' = \tfrac{1}{4}h''$$

$$32h^{(5)}+32h^{(4)}+6h''' = -\tfrac{1}{4}h''$$

$$64h^{6}+80h^{5}+24h^{(4)}+h^{(3)} = \tfrac{1}{4}h''+\tfrac{1}{8}h'''$$

$$128h^{(7)}+192h^{(6)}+80h^{(5)}+8h^{(4)} = -\tfrac{1}{4}h''+\tfrac{2}{8}h'''$$

$$256h^{(8)}+448h^{(7)}+240h^{(6)}+40h^{(5)}+h^{(4)} = \tfrac{1}{4}h''+\tfrac{3}{8}h'''+\tfrac{1}{16}h''''$$

$$512h^{(9)}+8\cdot2^7h^{(8)}+\frac{7\cdot6}{1\cdot2}2^5h^{(7)}+\frac{6\cdot5\cdot4}{3!}2^3h^{(6)}+\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{4!}2h^{5} = \tfrac{1}{4}h''-\tfrac{4}{8}h'''-\tfrac{3}{16}h^{(4)}$$

$$2^nh^n+(n-1)2^{n-2}h^{n-1}+\frac{n-1\cdot n-2}{1\cdot2}2^{n-4}h^{n-2}+\dots = (-1)^n\tfrac{1}{4}h''+(-1)^n\frac{n-5}{8}h'''-\dots$$

Hieraus folgt:

$$h'=\tfrac{1}{2};\quad h''=-\tfrac{1}{16}\quad h^{(3)}=\tfrac{1}{32}\quad h^{(4)}=-\tfrac{21}{1024}\quad h^{(5)}=\tfrac{21}{2048}\dots$$

Also:

$$M(1+x,1) = 1+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{16}x^2+\tfrac{1}{32}x^3-\tfrac{21}{1024}x^4+\dots\dots$$

Um entsprechenden Ausdruck $M(1-x,1)$ zu finden, wollen wir hier einen speziellen Fall lösen.

Es sei $x > 0 < 1$.

Setze $x = 2l - l^2$ so ist diese Gleichung nur lösbar für Werthe von $l > 1 < 2$.

Setze wiederum:

$M(1-x,1) = 1 + k'x + k''x^2 + k'''x^3 + \dots$ ...

1) $$M(1-x,1) = 1 + k'(2l-l^2) + k''(2l-l^2)^2 + k^{(3)}(2l-l^2)^3 + k^{(4)}(2l-l^2)^4 + \dots$$

Aber:

$$M(1-2l+l^2, 1) = M(1-l+\frac{l^2}{2}, 1-l) = (1-l)M(1+\frac{l^2}{2(1-l)}, 1)$$

$1-l$ ist negativ, folglich $-1+l$ positiv, also:

$$M(1-x,1) = -(l-1)M(1-\frac{l^2}{2(l-1)}, 1).$$

Also:

2) $$M(1-x,1) = -l+1 + \frac{k'l^2}{2} + k''\frac{(\frac{1}{2}l^2)^2}{(l-1)} - k^{(3)}\frac{(\frac{1}{2}l^2)^3}{(l-1)^2} + \dots$$

$$M(1-x,1) = -l+1 - \frac{k'l^2}{2} - k''\frac{1}{4}(-l^4+l^5-l^6+\dots) - \frac{k^{(3)}}{8}(l^6+l^8+l^{10}+\dots - 2\{l^{n}l^{n+1}-2\{l^{n}\dots - 2\{l^{?}l^{n+2}\} - \dots$$

Dann ergiebt sich wiederum durch Gleichsetzung:

$k' = -\frac{1}{2}$.

$4k'' + k' = -\frac{k'}{2}$

$8k''' - 4k'' = 0$.

$16k^{(4)} - 12k^{(3)} + k^{(2)} = \frac{1}{4}k''$

$32k^{(5)} - 32k^{(4)} + 6k^{(3)} = -\frac{1}{4}k''$

$64k^{6} - 80k^{5} + 24k^{4} - k^{3} = \frac{1}{4}k'' - \frac{1}{8}k^{(3)}$

Also:

$k' = -\frac{1}{2}$; $k'' = -\frac{1}{16}$. $k^{(3)} = -\frac{1}{32}$ $k^{(4)} = -\frac{21}{1024}$ etc.

Also:

$$M(1-x,1) = -1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{32}x^3 - \dots$$

Anmerkung

Alle bisher aufgestellten Ungleichungen bleiben richtig, wenn die beiden Argumente a und b negativ sind und zwar unter der Voraussetzung, dass für das Wurzelzeichen $\sqrt{a'b'}$ stets das negative Zeichen gewählt werde.

Bei dem bekannten Gauss'schen Algorithmus, wie man weiss, ergibt sich dann:

1) die a Reihe fällt ihrem absoluten Werthe nach, dabei sind die Grade oder Moduln der Glieder stets grösser, als die Moduln der entsprechenden b Glieder.

2) die b Reihe steigt ihrem absoluten Werthe nach.

Ebenso leicht ist zu zeigen, dass das Mittel der beiden Zahlen a u. b gleich dem negativen Mittel der beiden Moduln der Zahlen ist d.h.

$$M(-a,-b) = -M(a\,b)$$

Für beide Fälle zusammen folgt:

$$M(a\,b) = M(b\,a)$$

$$M(-a-b) = M(-b-a)$$

d.h. alles symmetrisch ist.

Wesentlich anders jedoch gestaltet sich die Sache, wenn eines der Glieder a oder b negativ, das andere positiv ist

dann kommen wir auf Reihen mit complexen Gliedern.

Aber auch für diese behalten die obigen Sätze in gewissem Sinne ihre Geltung.

In der That sind:

$$a' \; a^{(2)} \; a^{(3)} \ldots$$

$$b^{(1)} \; b^{(2)} \; b^{3}$$

lauter complexe Grössen, die auch die früher definirten.

Reihe entstanden sind. Dann muss es convergent werden. Wollen zeigen, dass die Moduln der Glieder zu einer festen Grenze hin convergieren.

Dies ist aber nachzuweisen der Fall. In der That, ist:

$$\left(\operatorname{mod} a' + \operatorname{mod} b'\right)\left(\operatorname{mod} a' - \operatorname{mod} b'\right) = \left[\operatorname{mod}\left(\tfrac{1}{2}(a+b)\right) + \operatorname{mod}\sqrt{ab}\right]\left[\operatorname{mod}\left(\tfrac{1}{2}(a+b)\right) - \operatorname{mod}\sqrt{ab}\right]$$

$$= \left[\operatorname{mod}\left(\tfrac{1}{2}a+b\right)\right]^2 - \operatorname{mod} ab.$$

Hieraus folgt aber nur:

$$\left(\operatorname{mod} a' + \operatorname{mod} b'\right)\left(\operatorname{mod} a' - \operatorname{mod} b'\right) < \tfrac{1}{4}\left(\operatorname{mod} a + \operatorname{mod} b\right)^2 \text{ wenn}$$

wenn $a > b$.

$$\left(\operatorname{mod} a' + \operatorname{mod} b'\right)\left(\operatorname{mod} a' - \operatorname{mod} b'\right) > \text{ als eine gegebene Zahl.}$$

Wie man sieht, kann hieraus kein Schluss gezogen werden.

Es soll das arith. geom. Mittel von $1+x$ und $1-x$ durch eine Reihe nach Potenzen von x entwickelt werden. §6.

Lösung I

$$M(1+x, 1-x) = (1-x)\, M\left(1 + \frac{2x}{1-x}, 1\right) \quad \text{Aber}$$

$$M(1+x, 1) = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{16}x^2 + \tfrac{1}{32}x^3 - \tfrac{21}{1024}x^4 + \cdots \quad \text{Also:}$$

$$M(1+x, 1-x) = 1 - x + \tfrac{1}{2}\,2x - \frac{1}{16}\frac{(2x)^2}{1+x} + \frac{1}{32}\frac{(2x)^3}{(1-x)^2} - \frac{21\,(2x)^4}{1024\,(1-x)^3}$$

$$= 1 - \cancel{x} + \cancel{x} - \frac{1}{4}\frac{x^2}{1+x} + \frac{1}{4}\frac{x^3}{(1-x)^2} - \frac{21}{64}\frac{x^4}{(1-x)^3}.$$

$$M(1+x, 1-x) = 1 - \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{5}{64}x^4 - \tfrac{11}{256}x^6 + \cdots$$

Lösung II

Wir sollen zu demselben Resultate auch auf directem Wege kommen können.

Setzt $x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, so kommt wiederum einerseits, indem man die zugehörigen Relationen zu Grunde legt:

$$\text{I. } M(1+x, 1-x) = 1 + a\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 + b\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^4 + c\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^6 \cdots$$

und andererseits, da

$$M(1+x, 1-x) = M(1, \sqrt{1-x^2}) = M\left(1, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) =$$

$$\frac{1}{1+t^2} M(1+t^2, 1-t^2) \text{ also:}$$

$$\text{II. } M(1+x, 1-x) = \frac{1}{1+t^2}\left[1 + a t^2 + b t^4 + c t^6 \cdots\right]$$

Also:

$$(1+t^2)\left[1 + a\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 + b\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^4 + \cdots\right] = \left[1 + a t^2 + b t^4 + \cdots\right].$$

Durch Gleichsetzung der Coefficienten ergiebt sich dann, wie nach geringer Rechnung sofort erhellt:

$$M(1+x, 1-x) = 1 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{64}x^4 - \frac{11}{256}x^6 - \cdots$$

Das Gesetz, nach welchem die Coefficienten fortschreiten, ist hieraus nicht ersichtlich.

Dividiren wir aber die Einheit durch diese Größe, so ergiebt sich:

$$\frac{1}{M(1+x, 1-x)} = 1 + \frac{1^2}{2^2}x^2 + \frac{3^2 x^4}{2^6} + \frac{5^2}{2^8}x^6 + \cdots$$

oder vielmehr.

$$= 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2 x^4 + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right)^2 x^6 + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\right)^2 x^8 + \cdots$$

§7. Auch dieses Resultat kann auf directem Wege gefunden werden. Setzt:

$$\frac{1}{M(1+x, 1-x)} = 1 + Ax^2 + Bx^4 + Cx^6 + \cdots$$

$$x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

$$\text{I. } \frac{1}{M(1+x, 1-x)} = 1 + A\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 + B\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^4 + C\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^6 + \cdots$$

II da $\frac{1}{M(1+x,1-x)} = \frac{(1+t^2)}{M(1+t^2, 1-t^2)}$.

$$\frac{1}{M(1+x,1-x)} = 1+t^2+At^4+At^6+Bt^8+Bt^{10}+Ct^{12}+Ct^{14}+Dt^{16}+Dt^{18}+Et^{20}+\cdots$$

I $\frac{1}{M(1+x,1-x)} = 1 + A[2t-2t^3+2t^5-2t^7 \ldots]^2 + B[2t-2t^3+2t^5-2t^7+\ldots]^4 + \ldots$

Also:

$$4A = 1.$$
$$-8A+16B = A.$$
$$+12A-64B+64C = A$$
$$\cdots\cdots$$

was hieraus ergiebt folgen:

$$A = \tfrac{1}{4}; \quad B = \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{9}{16}. \quad C = \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{9}{16}\cdot\tfrac{25}{36}. \quad D = \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{9}{16}\cdot\tfrac{25}{36}\cdot\tfrac{49}{64} \cdots$$

Noch eleganter gestaltet ist die Ableitung, wenn man:

$$1+t^2(1+At^4+Bt^8+\cdots) = 1 + A\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 + B\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^4 + C\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^6 + \cdots$$

durch $1+t^2$ dividiert und mit $2t$ multipliziert.

$$2t[1+At^4+Bt^8+\cdots] = \frac{2t}{1+t^2} + A\left[\frac{2t}{1+t^2}\right]^3 + B\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^5 + \cdots$$

$$= 2t-2t^3+2t^5-2t^7 + A[2t-2t^3+2t^5-2t^7+\ldots]^3 + B(2t-2t^3+2t^5-2t^7 \ldots)^5 + \cdots$$

1) $1 = 1$

2) $0 = 1 - 4A.$

3) $A = 1 - 4\cdot\frac{3.2}{1.2}A + 16.B.$

4) $0 = 1 - 4\cdot\frac{4.3}{1.2}\cdot A + 16\cdot\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}B - 64C.$

5) $B = 1 - 4\cdot\frac{5.4}{1.2}A + 16\cdot\frac{6.5.4.3}{4!}B - 64\cdot\frac{7\ldots\ldots2}{6!}C + 256D.$

6) $0 = 1 - 4\cdot\frac{6.5}{1.2}A + 16\cdot\frac{7.6.5.4}{4!}B - 64\cdot\frac{8\ldots\ldots3}{6!} + 256\cdot\frac{9\ldots\ldots2}{8!}D - 1024E.$

n) $M = 1 - 4\cdot\frac{n.n-1}{1.2}A + 4^2\frac{n+1.\ldots\, n-2}{4!}B - 4^3\frac{n+2\ldots\, n-3}{6!} + 4^4\frac{n+3.\ldots\, n-4}{8!}D$

$$(-1)^{k+1}\,4^{k-1}\,\frac{n+k-2\ldots\; n-(k-1)}{2(k-1)!}\,K. \quad (\text{allgemein gültig}).$$

wobei $M = 0$ wenn n gerade, $M = 1$, wenn n ungerade.

Schreiben wir einige unserer nachfolgenden Glieder wiederum an.

$$\mathfrak{M} = 1 - 4\mathfrak{A}.\frac{n.n-1}{1.2} + 4^2\mathfrak{B}.\frac{n+1.n.n-1.n-2}{4!} - 4^3\mathfrak{C}\frac{n+2.n+1.\cdots n-3}{6!} + \cdots (-1)^{k-1}4^{k-1}\mathfrak{H}\frac{n+k-2.n+k-3\ldots n.\ldots n-k+1}{2(k-1)!}$$

$$\mathfrak{N} = 1 - 4\mathfrak{A}.\frac{n+1.n}{2!} + 4^2\mathfrak{B}.\frac{n+2.n+1.\ldots n-1}{4!} - 4^3\mathfrak{C}\frac{n+3.\cdots n-2}{6!} + \cdots (-1)^{k-1}4^{k-1}\mathfrak{H}\frac{n+k-1.n+k-2\ldots n\ldots n-k+2}{2(k-1)!}$$

$$\mathfrak{O} = 1 - 4\mathfrak{A}.\frac{n+2.n+1}{2!} + 4^2\mathfrak{B}.\frac{n+3.n+2.\ldots n}{4!} - 4^3\mathfrak{C}.\frac{n+4.\ldots n-1}{6!} \ldots (-1)^{k-1}4^{k-1}\mathfrak{H}\frac{n+k.n+k-1.\ldots n.n-k+3}{2(k-1)!}$$

$$\mathfrak{L} = 1 - 4\mathfrak{A}.\frac{n-1.n-2}{2!} + 4^2\mathfrak{B}.\frac{n.\cdots n-3}{4!} - 4^3\mathfrak{C}\frac{n+1.\cdots n-4}{6!} \cdots (-1)^{k-1}4^{k-1}\mathfrak{H}\frac{n+k-3.n+k-3\ldots n-k}{2(k-1)!}$$

Multipliciren wir dann $\mathfrak{L}$ mit $(n-1)^2$ u. $\mathfrak{N}$ mit n^2 und subtrahiren, so ergibt sich.

$$n^2\mathfrak{N} - (n-1)^2\mathfrak{L} = (2n-1)\Big[1 - 4\mathfrak{A}\frac{3n^2-3n+2}{2!} + 16\mathfrak{B}\frac{n.n-1.5n^2-5n+6}{4!} - 16\mathfrak{C}\frac{n+1.n.n-1.n-2.7n^2-7n}{6!}$$
$$(-1)^{k-1}\mathfrak{H}\frac{n+k-3.n+k-4.\ldots n-k+2\left[(2k-1)n^2-(2k-1)n+\frac{1}{4}\left[(2k-1)^2-1\right]\right]}{2(k-1)!}$$

In der That ist:

$$n^2.n+k-1.n+k-2 - (n-1)^2(n-k)(n-k+1) = 2n-1\left[(2k-1)n^2-(2k-1)n + k^2-k\right]$$

wie sich unmittelbar zeigt, wenn man die Multiplicationen ausführt, diese Rechnung können wir aber uns ersparen.

Es ist:

$$n^2\mathfrak{A} - (n-1)^2\mathfrak{L} = 2n-1\Big[1 - 3.4\mathfrak{A}\frac{n.n-1}{1.2} + 5.16.\mathfrak{B}\frac{n+1.n.n-1.n-2}{4!} - 7.64.\mathfrak{C}\frac{n+2.n+1\cdots n-3}{6!}$$
$$- 4\mathfrak{A}.\frac{2}{1.2} + 16\mathfrak{B}\frac{n.n-1.16}{1.2.3.4} - 64\mathfrak{C}\frac{n+1.n.n-1.n-2.54}{6!}$$
$$+ 9.4^4\mathfrak{D}.\frac{n+3.n+2.\ldots n-4}{8!} \quad \mathfrak{H}(-1)^{k-1}(2k-1)4^{k-1}.\frac{n+k-2.n+k-3.n+k-4\ldots n-k+2.n-k+1}{2(k-1)!}$$
$$+ 4^4\mathfrak{D}.\frac{n+2.\ldots n-3}{8!}.128(-1)^{k-1}\mathfrak{H}4^{k-1}\frac{n+k-3.n+k-4.\ldots\ldots n-k+2.2(k-1)}{2(k-1)!}$$

In der That, es ist:

$$(2k-1)(n+k-2)(n-k-1) + 2(k-1)^3 = (2k-1)n^2 - (2k-1)n + \frac{1}{4}\left[(2k-1)^2-1\right]$$

wie sich unmittelbar durch Ausrechnen ergiebt.

Schreiben wir nochmal 2 aufeinanderfolgende Glieder auf!

$$\left.\begin{aligned}
&(-1)^{k-2}(2k-3)\,4^{k-2}\cdot\frac{n+k-3\,.\,n+k-4\ldots\ldots n-k+3\,.\,n-k+2}{2(k-2)!}\,(\mathcal{H}-1)\\
&(-1)^{k-2}\cdot 4^{k-2}\,\frac{n+k-4\ldots\ldots n-k+3\,.\,2(k-2)^3}{2(k-2)!}\,(\mathcal{H}-1)\\
&(-1)^{k-1}(2k-1)\,4^{k-1}\cdot\frac{n+k-2\,.\,n+k-3\ldots\ldots n-k+1}{2(k-1)!}\,\mathcal{H}\\
&(-1)^{k-1}\,4^{k-1}\,\frac{n+k-3\,.\,n+k-4\ldots\ldots n-k+2\,.\,2(k-1)^3}{2(k-1)!}\,\mathcal{H}
\end{aligned}\right\}$$

Wie wir sehen können, können wir zwei Glieder zusammenfassen.

Das gibt:

$$(-1)^{k-2}\,4^{k-2}\,\frac{4\,n+k-3\,.\,n+k-4\ldots n-k+3\,.\,n-k+2}{2k-3!}\Big[(2k-3)^2(\mathcal{H}-1)-(2k-2)^2\mathcal{H}\Big].$$

Das kann bei je zwei Gliedern so gemacht werden und wir erhalten.

$$n^2N-(n-1)^2L=(2n-1)(1-4A)-4\,\frac{2n-1\,.\,n\,.\,n-1}{3!}(9A-16B)+16\,\frac{2n-1\,.\,n+1\,.\,n\,.\,n-1\,.\,n-2}{5!}(25B-3\ldots$$

$$+\ldots(-1)^{k-2}\cdot 4^{k-2}\cdot\frac{4\,n+k-3\,.\,n+k-4\ldots n-k+3\,.\,n-k+2}{(2k-3)!}\Big[(2k-3)^2(\mathcal{H}-1)-(2k-2)\ldots$$

Daraus folgen aber unmittelbar die Gleichungen:

$$0=1-4A,\quad 0=9A-16B,\quad 0=25B-36C\ \ldots\ldots\quad 0=(2k-3)^2(\mathcal{H}-1)-(2k-2)^2\mathcal{H}.$$

In der That denken, wenn für n nun der Reihe nach die Werthe $2\ 3\ldots n$ gesetzt und für N und L dann natürlich die entsprechenden, die dann entweder gleich Null oder einem der beiden Ausdrücke

$(2k-3)^2(\mathcal{H}-1)-(2k-2)^2\mathcal{H}$ sind, berücksichtigt die Gl:

$$\theta = 1 - 4A.$$

$$4A - 1 = 3(1-4A) - 4(9A - 16B)$$

$$\theta = 5(1-4A) - 20(9A - 16B) + 16(25B - 36C)$$

$$\vdots$$

Hieraus folgt aber unmittelbar, dass man

$$(n-1)^2 P - n^2 Q = 0 \text{ resp. auch}$$

$$n^2 Q - (n+1)^2 R = 0 \text{ sein muss.}$$

Rechnen wir die Gleich. aus, so ergiebt sich:

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}, \quad C = \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{25}{36}$$

$$H = \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{25}{36}\cdots\frac{(2k-3)^2}{(2k-2)^2} \quad \text{q. e. d.}$$

Wir sehen daraus sehr deutlich, dass die Coefficienten der einzelnen Potenzen in A, B, C... die Werthe haben, die sie wirklich haben.
Es geht dies wie folgt hervor.
Es ist:

$$(t - t^3 + t^5 - t^7 + \dots)^2 = t^2 - 2t^4 + 3t^6 - 4t^8 + 5t^{10} + \dots (-1)^{n-1} n\, t^{2n}$$

$$(t - t^3 + t^5 - t^7 + \dots)^3 = (t^2 - 2t^4 + 3t^6 - 4t^8 - 5t^{10} \dots (-1)^{n-1} n\, t^{2n})(t - t^3 + \dots)$$

$$= t^3 - (1+2)t^5 + (1+2+3)t^7 - (1+2+3+4)t^9 + \dots (1+2+3 \dots n)t^{2n+1} + \dots$$

$$= t^3 - \frac{3.2}{1.2}t^5 + \frac{4.3}{1.2}t^7 - \frac{5.4}{1.2}t^9 \dots (-1)^{n-1}\frac{n+1.n}{1.2}t^{2n+1} + \dots$$

Ähnlich:

$$(t - t^3 + t^5 - t^7 + \dots)^4 = \left(t^3 - \frac{3.2}{1.2}t^5 + \frac{4.3}{1.2}t^7 - \frac{5.4}{1.2}t^9 \dots (-1)^{n-1}\frac{n+1.n}{1.2}t^{2n+1}\right)(t - t^3 + t^5 - t^7 + \dots)$$

$$= t^4 - \left[\frac{3.2}{1.2} + 1\right]t^6 + \left(\frac{4.3}{1.2} + \frac{3.2}{1.2} + \frac{2.1}{1.2}\right)t^8 + \dots (-1)^{n-1}\left(\frac{n+1.n}{1.2} + \dots \frac{2.1}{1.2}\right)t^{\dots}$$

$$= \lambda^4 - \frac{4.3.2}{1.2.3}\lambda^6 + \frac{5.4.3}{1.2.3}\lambda^8 + \dots (-1)^{n-1}\frac{n+2.\,n+1.\,n}{3!}\lambda^{2n+2}$$

Fahren wir so fort, so ist unmittelbar klar, daß:

$$\left(1-\lambda^3+\lambda^5-\lambda^7+\dots\right)^k = \lambda^k - \frac{k.\,k-1\dots 2}{(k-1)!}\lambda^{k+2} + \frac{(k+1)\dots 3}{(k-1)!}\dots (-1)^{n-1}\frac{n+k-2.\dots n}{(k-1)!}\lambda^{2n-2+k}$$ q.e.d.

§8.

Setzen wir:

$$1+\frac14 x^2+\frac14\,\frac{9}{16}x^4+\dots\frac14\,\frac{9}{16}\dots\frac{(2n-1)^2}{(2n)^2}x^{2n}+\dots = y.$$

so wird:

$$x\frac{\partial y}{\partial x} = \frac12 x^2+\frac14\cdot\frac94 x^4+\frac14\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{25}{6}x^6+\dots\frac{1.9\dots(2n-1)^2}{4.16\dots 2n}x^{2n}.$$

$$3x\frac{\partial y}{\partial x} = 3\,\frac12 x^2+3\cdot\frac14\cdot\frac94 x^4+3\cdot\frac14\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{25}{6}x^6+\dots\frac{3.\,1.9\dots(2n-1)^2}{4.16\dots 2n}x^{2n}+\dots$$

$$x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac12 x^2+3\cdot\frac14\cdot\frac94 x^4+5\,\frac14\cdot\frac{9}{16}\,\frac{25}{6}x^6+\dots\frac{2n-1.\,1.9\dots(2n-1)^2}{4.16\dots 2n}x^{2n}$$

Also:

$$x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+3x\frac{\partial y}{\partial x}+y = 1+\frac14 9x^2+\frac14\,\frac{9}{16}x^4+\dots\frac{1.9\dots(2n-1)^2}{2.4\dots(2n)^2}(2n+1)^2x^{2n}+\dots$$

Bilden wir nun

$x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+x\frac{\partial y}{\partial x}$, so ergiebt sich:

$$x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+x\frac{\partial y}{\partial x} = x^2+\frac14 9x^4+\frac14\,\frac{9}{16}\cdot 25x^6+\dots\frac{1.9\dots(2n-1)^2}{2.4\dots(2n)^2}(2n+1)^2x^{2n+2}$$ u.s.f.

$$x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+3x\frac{\partial y}{\partial x}+y = \frac{1}{x^2}\left(x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+x\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$ woraus:

$$\left(x^3-x\right)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\left(3x^2-1\right)\frac{\partial y}{\partial x}+xy=0$$

Wir haben also gefunden, daß

$$y = \frac{1}{M((1+x),(1-x))}$$

einer Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt.

Es handelt sich zunächst darum, das zweite particuläre Integral verstellen oder herstellen.

Setzen wir dieselbe gleich

$$\underline{\text{I} \quad y' = yz}$$ wo y ein erstes particuläres Integral bedeutet,

dann ist:

$$\frac{\partial y'}{\partial x} = z\frac{\partial y}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2 y'}{\partial x^2} = z\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

Setzen wir diese in unsere Differentialgleichung ein, so können wir dieselbe schreiben:

$$(x^3-x)\left[y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}\right] + (3x^2-1)\,y\frac{\partial z}{\partial x} + \underbrace{(x^3-x)\,z\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} + \underbrace{(3x^2-1)\,z\frac{\partial y}{\partial x}} + zy = 0$$

Der zweite Theil verschwindet aber, da z eine Constante ist und eine Lösung einer gewöhnlichen Diffgl. noch immer richtig bleibt, wenn wir sie mit einer Constanten multipliciren.

Es bleibt so nur noch:

$$(x^3-x)\left[y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}\right] + (3x^2-1)\,y\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Setze $\overline{\text{II}}$ $\frac{\partial z}{\partial x} = w$, so wird

$$(x^3-x)\left[y\frac{\partial w}{\partial x} + 2\frac{\partial y}{\partial x}w\right] + (3x^2-1)\,y\,w = 0.$$

$$y(x^3-x)\frac{\partial w}{\partial x} + \left[2(x^3-x)\frac{\partial y}{\partial x} + (3x^2-1)\,y\right]w = 0.$$

$$\frac{\partial w}{w} + \frac{\left[2(x^3-x)\frac{\partial y}{\partial x} + (3x^2-1)\,y\right]}{y(x^3-x)}\,\partial x = 0.$$

Den zweiten Theil können wir aber schreiben:

$$\left[\frac{(x^3-x)\frac{\partial y}{\partial x} + (3x^2-1)\,y}{y(x^3-x)} + \frac{(x^3-x)\frac{\partial y}{\partial x}}{y(x^3-x)}\right]\partial x =$$

$$\left[\frac{d.\log(y(x^3-x))}{\partial x} + \frac{d\log y}{\partial x}\right]\partial x.$$

Also:

$$d.\log w = -\,d.\log y^2(x^3-x)$$

$$\underline{w = +\frac{1}{y^2(x^3-x)}}$$

Es ist nun

$$y = 1 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}x^4 + \frac{1.9.25}{4.16.36}x^6 + \ldots$$

Also:

$$y^2 = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{32}x^4 + \frac{17}{64}x^6 + \frac{1787}{2^{11}}x^8 + \ldots$$

Das allgemeine Glied herzuschreiben ist nicht nöthig, da sich die merkwürdigen Relationen ergeben werden.

Also

$$y^2(x^3-x) = -x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{32}x^5 + \frac{5}{64}x^7 + \frac{389}{2^{13}}x^9 + \ldots$$

Also $$n = \frac{1}{x\left[-1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{32}x^4 + \frac{5}{64}x^6 + \ldots\right]}$$

$$n = \frac{1}{x}\left[-1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{32}x^4 + \frac{33}{64}x^6 + \ldots\right]$$

$$dz = -\int\frac{dx}{x} + \int\left[\frac{1}{2}x + \frac{13}{32}x^3 + \frac{33}{64}x^5 + \ldots\right]dx$$

$$z = -\log x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{13}{32.4}x^4 + \frac{33}{64.6}x^6 + \ldots$$

Damit haben wir beide particulären Integrale gefunden. Daraus ist das allgemeine

$$Ay + Bz!$$

Es lässt sich nun

$$y = 1 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}\frac{9}{16}x^4 + \ldots = \frac{1}{M(1+x,\ 1-x)}$$

mit Hülfe eines allgemeinen Integrals ausdrücken. In der That bezeichnen wir allgemein das Integral

$$\int_0 \cos^{2n}\varphi\, d\varphi,$$ so kann dieses vermöge der Formel

$$\cos^{2n}\varphi = \frac{1}{2^{2n}}\left[2\cos 2nx + 2.2n\cos(2n-2)x + \ldots \quad \frac{2n.(2n-1)\ldots\ldots(n+1)}{1.2\ldots\ldots n}\right.$$

einer Summe von Integralen zerlegt werden. Beim Integriren erhält man dann:

$$\int_0^\pi \cos^{2n}\varphi\, d\varphi = \frac{1.3\ldots 2n-1}{2.4\ldots 2n}\,\pi.$$

In der That ist:

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = -\frac{\sin^{m-1}x \cos^{n+1}x}{m+n} - \frac{m-1}{n+m}\int \sin^{m-2}x \cos^n x\, dx$$

Wir beweisen die Formel bei Schluss von n auf $n+1$, indem wir bemerken, dass sie dann auch für den Exponenten $2n+2$ richtig sei.

In der That ist

$$\int_0^\pi \cos^{2n+2}\varphi\, d\varphi = \int_0^\pi \cos^{2n}\varphi\, d\varphi - \int \cos^{2n}\varphi \sin^2\varphi\, d\varphi =$$

$$\frac{1.3\ldots 2n-1}{2.4\ldots 2n}\left[1-\frac{1}{2n+2}\right] = \frac{1.3\ldots 2n-1.\,2n+1}{2.4\ldots 2n\;2n+2} \quad \text{q.e.d.}$$

Nimmt man hinzu, dass

$$\int_0^\pi d\varphi = \pi \quad \text{so wird}$$

$$\int_0^\pi d\varphi\left(1+\frac{1}{2}x^2\cos^2\varphi + \frac{1.3}{2.4}x^4\cos^4\varphi \ldots\right) = \pi\eta,$$ wenn wir x in dem Integral als Constante ansehen.

Nun ist aber

$$(1-x^2\cos^2\varphi)^{-\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}x^2\cos^2\varphi + \frac{1.3}{2.4}x^4\cos^4\varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6\cos^6\varphi$$

Also auch

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-x^2\cos^2\varphi}} = \pi\eta.$$

Andererseits können wir aber

$$(1-x^2\cos^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}$$

entwickeln nach Vielfachen des Cosinus von φ d.h.

$$(1-x^2\cos^2\varphi)^{-\frac{1}{2}} = P + 2B\cos 2\varphi + 2C\cos 4\varphi \ldots$$

Daß dabei nur gerade Multipla von φ vorkommen, ist klar, da wir in der ersten Entwickelung nur gerade Potenzen von φ haben.

Dann wird also:

$$\int \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-x^2\cos^2\varphi}} = P\varphi + Q\sin 2\varphi + \tfrac{1}{2} R\sin 4\varphi \ldots$$

Daher:

$$\int_0^\pi \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-x^2\cos^2\varphi}} = \pi y = P\pi \text{ d. h.}$$

$$y = P.$$

Erster Lehrsatz

Das reciproke arithmetisch-geometrische Mittel von $1+x$ und $1-x$ wird erhalten, wenn man $(1-x^2\cos^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}$ nach Multiplen von φ entwickelt. Es ist dann gleich dem constanten Glied der Entwickelung.

Da nun

$M(1+x, 1-x) = M(1, \sqrt{1-x^2})$ ist, so können wir den Lehrsatz auch so ausdrücken:

Wenn ein Ausdruck:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2\cos^2\varphi}}$$

entwickelt wird nach Multiplen des Bogens von 2φ, wobei das constante Glied P genannt werden mag, dann ist dieses das reciproke arithmetisch-geometrische Mittel zwischen dem reciproken Maximum und Minimum dieses Ausdrucks.

In der That, das Maximum ist $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, das Minimum 1 oder das reciproke derselben $\sqrt{1-x^2}$ und 1.

Zu einem allgemeineren Resultate kommt man nun, wenn wir setzen $x = \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\gamma}}$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2\cos^2\varphi}} = \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma-\beta\cos^2\varphi}}.$$

Dann lautet der Satz:

Entwickelt man $\frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma-\beta\cos^2\varphi}}$ nach aufsteigenden Vielfachen des Cosinus von 2φ, so nenne das constante Glied P, so ist $\frac{1}{P}$ das arithmetisch-geometrische Mittel zwischen dem radizirten Maximum und Minimum des Ausdrucks.

In der That das radizirte Maximum ist $\frac{\sqrt{\gamma-\beta}}{\sqrt{\gamma}}$

" " " Minimum ist 1.

Nun ist aber:

$$M\left(1, \frac{\sqrt{\gamma-\beta}}{\sqrt{\gamma}}\right) = \frac{a}{\sqrt{\gamma}} M\left[\frac{\sqrt{\gamma}}{a}, \frac{\sqrt{\gamma-\beta}}{a}\right].$$

Also kommen wir zu dem allgemeinen Satze:

Entwickelt man:

$$\frac{a}{\sqrt{\gamma-\beta\cos^2\varphi}}$$ nach aufsteigenden Vielfachen von cosinus von 2φ und nennt das constante Glied P, so ist $\frac{1}{P}$ das arithmetisch-geometrische Mittel zwischen dem radizirten Maximum und Minimum des Ausdrucks.

In der That das radizirte Maximum ist: $\frac{\sqrt{\gamma-\beta}}{a}$

" " " " Minimum " $\frac{\sqrt{\gamma}}{a}$.

Man kann dieses auch so einsehen:

Es ist

$M\left(\frac{\sqrt{\gamma-\beta}}{\sqrt{\gamma}}, 1\right) = \frac{1}{P}$ also:

$M\left(\sqrt{\gamma-\beta}, \frac{\sqrt{\gamma}}{a}\right) = \frac{\sqrt{\gamma}}{a P}$. und dieses ist das constante Glied der Entwicklung

$$\frac{a}{\sqrt{\gamma-\beta\cos^2\varphi}} = \frac{a}{\sqrt{\gamma}} P + \ldots \qquad \text{q. e. d.}$$

$\ldots\cos^2\varphi) = \frac{a}{\sqrt{\gamma}}\left[\frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma-\beta\cos^2\varphi}}\right]$

$\frac{\sqrt{\gamma}}{\ldots\beta\cos^2\varphi)} = \frac{\sqrt{\gamma}}{a}\left[\frac{a}{\sqrt{\gamma-\beta\cos^2\varphi}}\right]$

Die Reciprocalentwickelung von $\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2\cos^2\varphi}}\right)$ oder in unserem Falle von:

$\frac{a}{\sqrt{\gamma-\beta\sin^2\varphi}}$ gilt freilich nur für den Fall, daß β eine positive Größe sei. Ist es aber eine negative, so nimmt die [illegible] man

$$\psi = 90-\varphi$$

der Ausdruck gleich $\frac{a}{\sqrt{\gamma-\beta+\beta\cos^2\psi}}$ d. h. wir haben wieder den früheren Fall nur ist d. h. es ist $\frac{1}{\beta}$ das arithm. geom. Mittel zwischen: $\frac{\sqrt{\gamma}}{a}$ und $\frac{\sqrt{\gamma-\beta}}{a}$ d. h. es bleibt der Satz auch für diesen Fall bestehen.

Ebenso verhalten gilt, wenn γ negativ ist. —

Ferner nennt auch das reciproke Glied nachgewiesen werden, wo $\frac{a}{\sqrt{\gamma-\beta\cos\varphi}}$ gleich dem arithmetisch geometrischen Mittel zwischen Größen sein.

Da der [illegible] $\varphi = 2\psi$ so wird der Ausdruck

$\frac{a}{\sqrt{\gamma-\beta+2\beta\cos^2\psi}}$ wie dieser Form nach dem früheren behandelt werden. Dagegen wir also das reciproke Glied der Entwickelung gleich β, so ist $\frac{1}{\beta}$ das arithm. geom. Mittel von $\sqrt{\frac{\gamma-\beta}{a}}$ und $\sqrt{\frac{\gamma+\beta}{a}}$ oder zwischen dem [illegible] Maximum und Minimum des Ausdrucks. —

Daraus folgt dann:

Wenn unsere Ausdrücke der Form:

$\frac{a}{\sqrt{\gamma+\beta\cos\varphi}}$ derselben Maximum und Minimalwerth haben, daß dann das reciproke Glied in allen Entwickelungen dasselbe ist. Wir [illegible] annehmen

Nachschrift des Kummer.

§ 2 **Aufgabe.**

Es soll das Zuwachs $dM(xy)$ zweier Größen x und y berechnet werden, wenn x um dx, y um dy wächst.

Lösung.

Denn die Reihen

$$x \; x' \; x'' \; x''' \; \cdots \; x^{\infty}$$
$$y \; y' \; y'' \; \cdots \; y^{\infty}$$

so gebildet, wie wir früher angegeben haben. Dann ist

$$M(xy) = x^{\infty} = y^{\infty}.$$

Offenbar werden diese Größen nur dann sich ändern, wenn sich auch die früheren Reihen entsprechend ändern, also wenn x und y sich ändern, und es wird sich das arith.-geom. Mittel ändern, wenn x und y sich ändern. Wir wollen jetzt eine nur unendlich kleine Änderung annehmen und unter dieser Voraussetzung $dM(xy)$ bilden.

Es ist $x' = \frac{1}{2}(x+y)$ $y' = \sqrt{xy}$ also:

$$dx' = \frac{1}{2}[dx] + \frac{1}{2}[dy] \qquad dy' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}\,dx + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}\,dy = \frac{1}{2}\frac{y'}{x}dx + \frac{1}{2}$$

Allgemein:

$$dx^{(n)} = \frac{1}{2}dx^{(n-1)} + \frac{1}{2}dy^{(n-1)}, \quad dy^{(n)} = \frac{1}{2}\frac{y^{n}}{x^{(n-1)}}dx + \frac{1}{2}\frac{y^{n}}{y^{(n-1)}}dy$$

Bilden wir nun:

$$f = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} \qquad g = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}$$
$$f' = \frac{dx'}{x'} + \frac{dy'}{y'} \qquad g' = \frac{dx'}{x'} - \frac{dy'}{y'}$$
$$f'' = \frac{dx''}{x''} + \frac{dy''}{y''} \qquad g'' = \frac{dx''}{x''} - \frac{dy''}{y''}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Setzen wir für dx' und dy' in f' den Werth mit den oben erhaltenen Relationen ein und so bei jedem der f, so ergiebt sich:

$$f' = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial x}{x'} + \frac{\partial y}{x'} + \frac{\partial x}{x} + \frac{\partial y}{y}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial x}{x'} + \underbrace{\frac{\partial x}{x} + \frac{\partial y}{x'}} + \frac{\partial y}{y}\right] = f + \frac{1}{2}\frac{\partial x}{xx'}[x-x'] + \frac{1}{2}\frac{\partial y}{yx'}[y-$$

Oder $x' = \frac{1}{2}[x+y]$. $y = 2x'-x$ also:

$$f' = f + \frac{1}{2}\frac{\partial x}{xx'}[x-x'] - \frac{1}{2}\frac{\partial y}{yx'}[x-x'] = f + \frac{x-x'}{x'}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial x}{x} - \frac{\partial y}{y}\right] \text{ also:}$$

$$\left.\begin{aligned} f' &= f + \frac{1}{2}\frac{x-x'}{x'}g. \quad \text{~~ebenso wird~~} \\ f'' &= f' + \frac{1}{2}\frac{x'-x''}{x''}g' \\ &\ \vdots \\ f^{(n)} &= f^{(n-1)} + \frac{1}{2}\frac{x^{(n-1)}-x^{(n)}}{x^{(n)}}g^{(n-1)} \end{aligned}\right\} (1)$$

Bilden wir andererseits:

$$g' = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial x}{x'} - \frac{\partial x}{x} + \frac{\partial y}{y'} - \frac{\partial y}{y}\right] = \frac{1}{2}\frac{\partial x}{xx'}(x-x') + \frac{1}{2}\frac{\partial y}{yx'}(y-x') =$$

$$g' = \frac{1}{2}\frac{\partial x}{xx'}(x-x') - \frac{1}{2}\frac{\partial y}{yx'}(x-x') = \frac{1}{2}\frac{x-x'}{x'}g \text{ also:}$$

$$\left.\begin{aligned} g' &= \frac{1}{2}\frac{x-x'}{x'}g. \\ g'' &= \frac{1}{2}\frac{x'-x''}{x''}g' \\ &\ \vdots \\ g^{n} &= \frac{1}{2}\frac{x^{(n-1)}-x^{(n)}}{x^{(n)}}g^{(n-1)} \end{aligned}\right\} (2)$$

Setzen wir diese Ausdrücke in die Gl. 1) ein, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} f' &= f + g' \\ f'' &= f + g' + g'' \\ &\ \vdots \\ f^{(n)} &= f + g' + g'' + \dots g^{n} \end{aligned}\right\} (3)$$

Da aber:

$$\frac{g^n}{g} = \left(\frac{1}{2^n}\right)\frac{(x-x')(x'-x'')\dots x^{(n-1)}-x^{n}}{x'\,x''\dots\ x^{(n)}}$$

und $\lim[x^n]_{n=\infty} = \lim[x^{n-1}]_{n=\infty}$ wobei $x^{n-1} > x^n$, so folgt:

$$\lim\left[\frac{g^n}{g}\right]_{n=\infty} = 0$$ und wir erhalten also

$$\left[g^n\right]_{n=\infty} = 0$$

Nun ist aber: $g^{\infty} = \frac{\partial x^{\infty}}{x^{\infty}} - \frac{\partial y^{\infty}}{y^{\infty}}$ oder:

$$\frac{\partial x^{\infty}}{x^{\infty}} = \frac{\partial y^{\infty}}{y^{\infty}} = \frac{\partial(M(xy))}{M(xy)}.$$

Setzen wir dieses in $f^{(\infty)}$ ein, so wird

$$f^{\infty} = 2\left[\frac{\partial M(xy)}{M(xy)}\right] \text{ oder}$$

$$2\,\frac{\partial M(xy)}{M(xy)} = f + g' + g'' + g''' + \dots\; g^{\infty}$$ oder indem man für f den Werth einsetzen und alle g^n durch g [illegible] und [illegible] die $\frac{g^n}{g}$ den oben aufgestellten Werth einsetzen:

$$2\,\frac{\partial(M(xy))}{M(xy)} = \frac{\partial x}{x} + \frac{\partial y}{y} + \left[\frac{\partial x}{x} - \frac{\partial y}{y}\right]\left[\frac{1}{2}\,\frac{x-x'}{x'} + \frac{1}{4}\,\frac{x-x'.\,x'-x''}{x'.\,x''} + \dots\right]$$

oder:

$$\partial M(xy) = M(xy)\left\{\frac{\partial x}{x}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\,\frac{x-x'}{x'} + \frac{1}{8}\,\frac{x-x'.\,x'-x''}{x'x''} + \dots\right] + \frac{\partial y}{y}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\,\frac{x-x'}{x'} - \frac{1}{8}\,\frac{x-x'.\,x'-x''}{x'x''} - \dots\right]\right\}.$$

Nun ist aber:

$$\frac{x-x'}{x'} = \frac{x-y}{x+y} = \frac{(x-y)^2}{x^2-y^2} = \frac{(x+y)^2 + 4xy}{x^2-y^2} = \frac{4(x'^2+y'^2)}{x^2-y^2}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{x-x'}{x'} &= 4\,\frac{x'^2+y'^2}{x^2-y^2}\\
\frac{x'-x''}{x''} &= 4\,\frac{x''^2+y''^2}{x'^2-y'^2}\\
\frac{x^{(n-1)}-x^{(n)}}{x^{(n)}} &= 4\,\frac{x^{(n)2}+y^{(n)2}}{x^{(n-1)2}-y^{(n-1)2}}
\end{aligned}\right\}$$

Setzen wir diese Werthe, so heben sich im Nenner alle Glieder bis auf x^2-y^2 fort, ebenso die Zähler sind [illegible], wie [illegible] unmittelbar einzusehen ist:

$$\partial M(xy) = \frac{M(xy)}{2(x^2-y^2)}\left[\frac{\partial x}{x}\left\{(x^2-y^2)+2(x'^2-y'^2)+4(x''^2-y''^2)+8(x'''^2-y'''^2)+\cdots\right\}\right.$$
$$\left.+\frac{\partial y}{y}\left\{(x^2-y^2)-2(x'^2-y'^2)-4(x''^2-y''^2)-8(x'''^2-y'''^2)\cdots\right\}\right]$$

Zur Rechnung ... gestaltet sich die Form, wenn man folgen

$$x^{n2}-y^{n2} = \frac{1}{4}\left(x^{n-1}-y^{n-1}\right)^2$$

Beispiel

$x=\sqrt{2},\ y=1.\qquad x^2-y^2=1.$

$2(x'^2-y'^2) = \frac{1}{2}(x-y)^2 = 0,\ 0\ 8578643762\ 690$

$4(x''^2-y''^2) = (x'-y')^2 = 0,\ --\ \ 3\ 2039804924$

$8(x'''^2-y'''^2) = 2(x''-y'')^2 = 0,\ ....\ \ 223462$

$16(x^{v2}-y^{v2}) = 4(x'''-y''')^2 = 0 \ldots$

Summe $= 0,8610683791 0.$

Also:

$$\partial M(xy) = M(xy)\left[\frac{\partial x}{2\sqrt{2}} \cdot 1{,}0861068379 + \frac{\partial y}{2} \cdot 0{,}9138931621 \ldots\right]$$

$$= \partial x \cdot 0{,}760082\ldots + \partial y \cdot 0{,}547786839$$

§ 12. Rechnen wir entsprechend a und b Reihe nach dem Vorigen, und c Reihe aus, derart, dass

$$ {}^{(n)}a^2 = {}^{(n)}b^2 + {}^{(n)}c^2 $$
$$ \vdots $$
$$ a^{(n)2} = b^{(n)2} + c^{(n)2} $$

Dann werden folgende Relationen gelten, die unmittelbar daraus folgen, dass

$$ a^{(n)} = \tfrac{1}{2}\left(a^{(n-1)} + b^{(n-1)}\right) \qquad b^{(n)} = \sqrt{a^{(n-1)} b^{(n-1)}} $$

$$ {}^{(n)}a = {}^{(n-1)}a + \sqrt{{}^{(n-1)}a^2 - {}^{(n-1)}c^2} \qquad {}^{(n)}c = {}^{(n-1)}a - \sqrt{{}^{(n-1)}a^2 - {}^{(n-1)}c^2} $$

$$ {}^{(n)}a = {}^{(n-1)}a + {}^{(n-1)}c \ldots \qquad {}^{(1)}a = a + c, \quad a, \quad 2a' = a + b \ldots\ldots \quad 2a^{(n)} = a^{(n-1)} + b^{(n-1)} $$

$$ {}^{(n)}b = {}^{(n-1)}a - {}^{(n-1)}c \ldots \qquad {}^{(1)}b = a - c, \quad b, \quad b'^2 = ab \ldots \quad b^{(n)2} = a^{(n-1)} b^{(n-1)} $$

$$ {}^{(n)}c^2 = 4\,{}^{n-1}a \cdot {}^{n-1}c \ldots \qquad {}^{(1)}c^2 = 4ac, \quad c, \quad 2c' = a - b \ldots \quad 2c^{(n)} = a^{(n-1)} - b^{(n-1)} \qquad (1) $$

Also:

$$ \text{I} \quad M(a\,b) = M(a^{n} b^{n}) = M({}^{n}a\ {}^{n}b) = \lim a^{m} = \lim b^{m} \text{ für } m = \infty. $$

Ferner

$$ M(ac) = M\left(\frac{a+c}{2}, \sqrt{ac}\right) = \frac{1}{2} M({}^{(1)}a\ {}^{(1)}c) = \frac{1}{4} M({}^{(2)}a\ {}^{(2)}c) \ldots $$

$$ \text{II} \quad \underline{M(ac) = \frac{1}{2^n} M\left({}^{(n)}a, {}^{(n)}c\right)} = \left[\lim \frac{{}^{m}a}{2^m}\right]_{m=\infty} = \lim \left[\frac{{}^{m}c}{2^m}\right]_{m=\infty} $$

Ferner:

$$ M(ac) = M(a + b, a - b) = 2M(a_1', c_1') = 4M(a'', c'') $$

$$ \text{III} \quad \underline{M(ac) = 2^n M(a^n c^n)} $$

Aus I folgt:

$$ \lim {}^{m}a = \lim {}^{m}c \quad \text{d.h.} $$

$$ {}^{(m+1)}a = 2\,{}^{m}a \quad \text{d.h.} $$

Die a [illegible] Reihen [illegible] mit der [illegible] einer geometrischen Reihe mit dem Quotienten 2 fort.

Aus den Relationen (1) ergeben sich nun folgende Reihenentwicklungen.

IV $M(ab) = a^n - c^{n+1} - c^{n+2} \dots - c^{n+m}$

In der That ist:

$$a^n - c^{n+1} = a^n - \frac{a^n - b^n}{2} = \frac{a^n + b^n}{2} = a^{n+1}$$

also $a^n - c^{n+1} - c^{n+2} = a^{n+2}$ etc.

IV $M(ab) = a^n - c^{n+1} - c^{n+2} \dots - c^{n+m} = a^{n+m}_{m=\infty}$ q.e.d.

Setzen wir $a^n = 2c^{n+1} + b^n$ so wird:

V $M(ab) = b^n + c^{n+1} - c^{n+2} + \dots - c^{n+m}$.

Ferner:

VI $M(ac) = \frac{1}{2^n}\,{}^{n}a - \frac{1}{2^{n+1}}\,{}^{n+1}b - \frac{1}{2^{n+2}}\,{}^{n+2}b \dots - \frac{1}{2^{n+m}}\,{}^{n+m}b$.

In der That, es ist

$${}^{n}a = \frac{1}{2}\left[{}^{n+1}a + {}^{n+1}b\right) \text{ also:}$$

$$\frac{1}{2^n}\,{}^{n}a - \frac{1}{2^{n+1}}\,{}^{n+1}b = \frac{1}{2^{n+1}}\,{}^{n+1}a$$

Gehen wir also weiter, so erhalten wir:

VI $M(ac) = \frac{1}{2^n}\,{}^{n}a - \frac{1}{2^{n+1}}\,{}^{n+1}b - \frac{1}{2^{n+2}}\,{}^{n+2}b \dots - \frac{1}{2^{n+m}}\,{}^{n+m}b = \frac{1}{2^{n+m}}\,{}^{n+m}a$ was

welches nun gerade der obige Ausdruck für $M(ac)$.

Setzen wir:

$${}^{n+1}a = {}^{n}a + {}^{n}c \text{ so wird}$$

VII $M(ac) = \frac{1}{2^n}\,{}^{n}a + \frac{1}{2^{n+1}}\,{}^{n+1}b - \frac{1}{2^{n+2}}\,{}^{n+2}b \dots - \frac{1}{2^{n+m}}\,{}^{n+m}b$

Ähnlich wird

$M(ab)^2 = a^{(n)2} - \frac{1}{2}c^{(n)2} - \frac{2}{2}c^{(n+1)2} \dots \frac{2}{2}c^{(n+m)2}$.

In der That ist

$$a^{(n)2} - \frac{1}{2}c^{(n)2} - c^{(n+1)2} = a^{(n)2} - \frac{1}{2}c^{(n)2} - \frac{a^{(n)2}}{4} - \frac{b^{(n)2}}{4} + \frac{2a^n b^n}{4} =$$

$$\frac{3}{4}a^{(n)2} - \frac{b^{(n)2}}{4} - \frac{1}{4}c^{(n)2} + \frac{2a^n b^n}{4} = a^{(n+1)2}.$$

so geht es dann weiter u. s. f.

VIII. $M(ab)^2 = a^{(n)2} - \frac{1}{2} c^{(n)2} - \frac{3}{2} c^{(n+1)2} \dots - c^{(n+m)2} = a^{(n+m)2}_{m=\infty}$

Folgt ferner: $a^{n2} = b^{n2} + c^{n2}$ so wird

IX. $M(ab)^2 = b^{n2} + \frac{1}{2} c^{(n)2} - \frac{3}{2} c^{(n+1)2} \dots - c^{(n+m)2} = b^{(n+m)2}_{m=\infty}$.

Ebenso:

$$M(ac)^2 = \frac{1}{2^{2n}}\,{}^{n}c^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2^{2n}}\,{}^{n}b^2 - \frac{3}{2}\frac{1}{2^{2n+2}}\,{}^{n+1}b^2 \dots - \frac{3}{2}\frac{1}{2^{2n+2m}}\,{}^{n+m}b^2.$$

In der That ist nur:

$$\frac{1}{2^{2n}}\,{}^{n}c^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2^{2n}}\,{}^{n}b^2 - \frac{4}{2}\frac{1}{2^{2n+2}}\,{}^{n+1}b^2 = \frac{1}{2^{2n}}\left[{}^{n}c^2 + \frac{1}{2}\,{}^{n}b^2 - \frac{1}{2}\,{}^{n+1}b^2\right].$$

$$= \frac{1}{2^n}\,{}^{n}a\,{}^{n}c = \frac{1}{2^{n+2}}\,{}^{(n+1)}c^2$$

so geht es wieder weiter und wir erhalten in der That die Reihe.

X. $M(ac)^2 = \frac{1}{2^{2n}}\,{}^{n}c^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2^{2n}}\,{}^{n}b^2 - \frac{3}{2}\frac{1}{2^{2n+2}}\,{}^{n+1}b^2 \dots - \frac{3}{2}\frac{1}{2^{2n+2m}}\,{}^{n+m}b^2 = \frac{{}^{n+m}c^2}{2^{2n+2m}}$ z. B.

Setzen wir:

$${}^{n}c^2 = {}^{n}a^2 - {}^{n}b^2, \text{ so wird:}$$

XI. $M(ac)^2 = \frac{1}{2^{2n}}\,{}^{n}a^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{2^{2n}}\,{}^{n}b^2 - \frac{3}{2}\frac{1}{2^{2n+2}}\,{}^{n+1}b^2 \dots - \frac{3}{2}\frac{1}{2^{2n+2m}}\,{}^{n+m}b^2 \dots$

Ferner:

$$\sqrt{M(ab)} = \sqrt{a^n} - \sqrt{c^{n+2}} - \sqrt{c^{n+4}} \dots - \sqrt{c^{n+2m}}$$

denn:

$\sqrt{a^n} - \sqrt{c^{n+2}} = \sqrt{a^{n+2}}$ wie sich noch aus einer leichten Rechnung unmittelbar zeigen läßt, indem man quadrirt.

Also:

XII. $\sqrt{M(ab)} = \sqrt{a^n} - \sqrt{c^{n+2}} - \sqrt{c^{n+4}} \dots - \sqrt{c^{n+2m}} = \sqrt{a^{n+2m}} =$

$\sqrt{a^\infty}$ q. e. d.

Ebenso:

$$\text{XIV}\quad \gamma_{M(ac)} = \gamma_{b^n} + \gamma_{c^{n+2}}\ \gamma_{c^{n+4}} \dots - \gamma_{c^{n+2m}}\ \gamma_{b^\infty} \text{ denn}$$

$$\gamma_{b^n} + \gamma_{c^{n+2}}\ \gamma_{b^{n+2}}$$

Ferner

$$\text{XIV}\quad \gamma M(ac) = \gamma\, 2^{-n}\, {}^{n}a - \gamma\, 2^{-n-2}\, {}^{n+2}b) - \gamma\, 2^{-n-4}\, {}^{n+4}b \dots - \gamma\, 2^{-n-2m}\, {}^{n+2m}b$$

In der That ist nicht:

$$\gamma\sqrt{\frac{{}^{n}a}{2^n}} - \gamma\sqrt{\frac{{}^{n+2}b}{2^{n+2}}} = \gamma\sqrt{\frac{{}^{n+2}a}{2^{n+2}}}$$ wie sich auch unmittelbar

ergiebt, wenn man zusammen zusammen....

Hieraus folgt dann weiterhin

$$\text{XV}\quad \gamma M(ac) = \gamma\, 2^{-n}\, {}^{n}c + \gamma\, 2^{-n-2}\, {}^{n+2}b - \gamma\, 2^{-n-4}\, {}^{n+4}b \dots - \gamma\, 2^{-n-2m}\, {}^{n+2m}b) \dots$$

Schließlich noch andere Gleichungen ....

Es ergibt:

$$\frac{M(ac)}{M(ac)}\left(\frac{Ma^m c^m}{M(a^m b^m)}\right)\log 4\frac{b^{m+1}}{c^m} = \frac{1}{2^m}\log 4\frac{b^{m+1}}{c^m} \text{ aber:}$$

$$\frac{1}{2^m}\log 4\frac{b^{m+1}}{c^m} = \frac{1}{2^n}\log 4\frac{b^{n+1}}{c^n} + \frac{3}{2^{n+1}}\log\frac{b^{n+2}}{b^{n+1}} + \dots + \frac{3}{2^{n+m}}\log\frac{b^{n+m+1}}{b^{n+m}}$$

In der That ist:

$$\frac{1}{2^n}\left[\log 4\frac{b^{n+1}}{c^n} + \frac{3}{2}\log\frac{b^{n+2}}{b^{n+1}}\right] = \frac{1}{2^{n+1}}\log 4\frac{b^{n+2}}{c^{n+1}} \text{ denn:}$$

$$\log 4\frac{b^{n+2}}{c^{n+1}} = \log\frac{4\cdot b^{n+2}\cdot a^{n+1}}{c^{n+1}\cdot a^{n+1}} = \log\frac{16\cdot b^{(n+1)^2}}{c^{(n+1)^2}}\cdot\frac{a^{n+1}}{b^{n+2}} =$$

$$\log\left(\frac{4\cdot b^{n+2}}{c^{n+1}}\right)^2 + \log\frac{a^{n+1}}{b^{n+2}} = 2\log\frac{4\cdot b^{n+1}}{c^{n+1}} + \log\frac{b^{n+2}}{b^{n+1}} \text{ denn}$$

$$\frac{a^{n+1}}{b^{n+2}} = \frac{b^{n+2}}{b^{n+1}} \text{ also:}$$

$$\frac{1}{2^n}\left[\log 4\frac{b^{n+1}}{c^n} + \frac{3}{2}\log\frac{b^{n+2}}{b^{n+1}}\right] = \frac{1}{2^{n+1}}\log 4\frac{b^{n+2}}{c^{n+1}}$$

Reduziren wir so weiter, so bleibt schließlich nur:

$$\frac{1}{2^{n+m}} \log r \frac{b^{m+n+1}}{b^{m+n}}.$$

Also ist in der That

$$\log r\frac{b^{m+1}}{c^m}\,\frac{M(a^m c^m)}{M(a^m b^m)}\,\frac{M(ab)}{M(ac)} = \frac{1}{2^n}\log r\frac{b^{n+1}}{c^n} + \frac{3}{2^{n+1}}\log\frac{b^{n+2}}{b^{n+1}} \dots + \frac{3}{2^{n+m}}\log\frac{b^{n+m+1}}{b^{n+m}}$$

Aber es ist:

$$\frac{M(a^m c^m)}{M(a^m b^m)} = \frac{M\left(1,\frac{c^m}{a^m}\right)}{M\left(1,\frac{b^m}{a^m}\right)}$$

Aber $[c^m]_{m=\infty} = 0$ $[b^m]_{m=\infty} = a^m{}_{m=\infty}$ also:

$$\frac{M(a^m c^m)}{M(a^m b^m)} = \frac{M(1,\varepsilon)}{M(1,1)} = M(1,\varepsilon)$$ wenn ε eine sehr kleine gegebene Größe bedeutet.

Ferner $\log r\frac{b^{m+1}}{c^m} = \log\frac{r}{\frac{c^m}{b^{m+1}}} = \log\frac{r}{\frac{c^m}{a^m}} = \log\frac{r}{\varepsilon}.$

Also:

XVI $$\log r\frac{b^{m+1}}{c^m}\,\frac{M(a^m c^m)}{M(a^m b^m)}\,\frac{M(ab)}{M(ac)} = M(1\,\varepsilon_1)\log\frac{r}{\varepsilon}\,\frac{M(ab)}{M(ac)} =$$

$$\frac{1}{2^n}\log r\frac{b^{n+1}}{c^n} + \frac{3}{2^{n+1}}\log\frac{b^{n+2}}{b^{n+1}} + \dots \frac{3}{2^{n+m}}\log\frac{b^{n+m+1}}{b^{n+m}}.$$

Ebenso ergiebt sich:

$$\frac{M(a^m c^m)}{M(a^m b^m)}\,\frac{M(ab)}{M(ac)}\log r\frac{a^m}{c^m} = \frac{1}{2^m}\log r\frac{a^m}{c^m} =$$

$$\frac{1}{2^n}\log r\frac{a^n}{c^n} - \frac{1}{2^n}\log r\frac{a^n}{a^{n+1}} \dots - \frac{1}{2^{n+m}}\log r\frac{a^{n+m}}{a^{n+m+1}}.$$

In der That ist:

$$\frac{1}{2^n}\log r\frac{a^n}{c^n} - \frac{1}{2^n}\log r\frac{a^n}{a^{n+1}} = \frac{1}{2^n}\log\frac{a^{n+1}}{c^n} = \frac{1}{2^{n+1}}\log r\frac{a^{n+1}}{c^{n+1}}$$

denn $\log r\frac{a^{n+1}}{c^{n+1}} = \log r\frac{a^n+b^n}{a^n-b^n} = \log r\frac{(a^n+b^n)^2}{a^{n2}-b^{n2}} =$

$$\log\left(\frac{a^{n+1}}{c^n}\right)^2 = 2\log\frac{a^{n+1}}{c^n} \text{ u.s.f.}$$

$$\frac{1}{2^n}\log\frac{a^{n+1}}{c^n} = \frac{1}{2^{n+1}}\log 4\,\frac{a^{n+1}}{c^{n+1}}.$$

[illegible]

$$\frac{M(a^n c^n)}{M(a^n b^n)}\log 4\,\frac{a^n}{c^n} = M(1,4)\log\frac{4}{2} \text{ also:}$$

XVII $$M(1,4)\log\frac{4}{2}\,\frac{M(ab)}{M(ac)} = \frac{1}{2^n}\log 4\,\frac{a^n}{c^n} - \frac{1}{2^n}\log 4\,\frac{a^n}{a^{n+1}} \dots - \frac{1}{2^{n+m}}\log 4\,\frac{a^{n+m}}{a^{n+m+1}}$$

Es ist darum mehr nöthig, die [illegible] der Formel [illegible]

XVIII $$M(1,4)\log\frac{4}{2}\,\frac{M(ac)}{M(ab)} = \frac{1}{2^n}\log 2\,\frac{{}^na}{{}^nb} - \frac{1}{2^n}\log 2\,\frac{{}^na}{{}^{n+1}a} \dots - \frac{1}{2^{n+n}}\log 2\,\frac{{}^{n+n}a}{{}^{n+n+1}a} - \dots$$

denn: $$\frac{1}{2^n}\log 2\,\frac{{}^na}{{}^nb} - \frac{1}{2^n}\log 2\,\frac{{}^na}{{}^{n+1}a} = \frac{1}{2^{n+1}}\log 2\,\frac{{}^{n+1}a}{{}^{n+1}b} \text{ also wird}$$

$$\frac{M({}^ma,{}^mb)}{M({}^ma,{}^mc)}\log 4\,\frac{{}^ma}{{}^mb} = M(1,4)\log\frac{4}{2}.$$

Ebenso:

XIX $$\frac{M(ac)}{M(ab)}M(1,4)\log\frac{4}{2} = \frac{1}{2^n}\log 2\,\frac{{}^{n+1}c}{{}^nb} + \frac{3}{2^{n+1}}\log\frac{1}{2}\,\frac{{}^{n+2}c}{{}^{n+1}c} + \dots + \frac{3}{2^{n+m}}\log\frac{1}{2}\,\frac{{}^{n+m+1}c}{{}^{n+m}c}$$

denn: $$\frac{1}{2^n}\log 2\,\frac{{}^{n+1}c}{{}^nb} + \frac{3}{2^{n+1}}\log\frac{1}{2}\,\frac{{}^{n+2}c}{{}^{n+1}c} = \frac{1}{2^{n+1}}\log 2\,\frac{{}^{n+2}c}{{}^{n+1}b} \text{ also wird}$$

$$\frac{M({}^na,{}^mb)}{M({}^na,{}^mc)}\log 2\,\frac{{}^{m+1}c}{{}^mb} = M(1,2)\log\frac{4}{1}.$$

Es folgt hieraus, daß

$M(1,\varepsilon)\log\left(\frac{4}{\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$ sich einer festen Grenze nähert, denn die log nähern sich immer mehr der Null, da

$$\frac{a'}{a} = 1 - \frac{c'}{a}, \quad \left(\frac{b'}{b}\right)^2 = 1 + \frac{c^2}{b^2}, \quad \frac{1}{a} = 2 - \frac{b}{a}, \quad \left(\frac{1}{2}\frac{c}{c'}\right) = 1 + \frac{bb}{cc}$$

d. h. da sich die Größen wieder den Logarithmengrenzgesetzen immer mehr der Eins nähern.

Es bleibt uns nur zu zeigen, daß dieser limes gleich $\frac{\pi}{2}$ ist; nun dann wollen wir es auf folgende Weise thun.

Wenn $M(1,\varepsilon)\log\frac{4}{\varepsilon}$ sich für unendlich kleine gebrochene ε der festen Grenze $\frac{\pi}{2}$ unendlich nähert, so wird es dies thun, welche Werthe wir den Größen $a\ b\ c$ geben, wenn es nur so eingerichtet wird, daß wir von der gebrochenen Seite her zum Nullpunkte gelangen.

Wir wollen nun setzen.

$$a = b\sqrt{2} = c\sqrt{2} \text{ d. h. } b = c.$$

Dann ist noch der letzten Relation:

$$\frac{M({}^m a\ {}^m b)\,M(a\,c)}{M({}^a m\ {}^m c)\,M(a\,b)} \log 2^{2m+1}\frac{{}^m c}{{}^m b} = \frac{1}{2^n}\log\frac{{}^{n+1}c}{{}^n b} + \frac{1}{2^{n+1}}\log\frac{1}{2}\frac{{}^{n+2}c}{{}^{n+1}c} + \dots \frac{1}{2^{n+m}}\log\frac{1}{2}\frac{{}^{n+m+1}c}{{}^{n+m}c}$$

Es kann bewiesen werden, daß diese Formel auch für gebrochene Werthe, wobei b imaginär wird, ihre Gültigkeit beibehält.

Dieser Werth dazu erlaubt Vermuth!

Haben wir allgemein

$M(x\,y)$ wo x und y beliebige complexe Größen bedeuten, so werden auch für diesen Fall, falls überhaupt ein arithmetisch-geometr. Mittel angehört. Die beiden Fundamentaleigenschaften gelten:

1) $M(xy) = M({}^1x\;{}^1y) = M(x^1\,y^1)$

2) $M(ax, ay) = a\,M(xy)$ wo a eine beliebige reelle oder imaginäre Zahl bedeutet.

Berücksichtigt, wenn mit Hülfe dieser überaus Sätze sich zerlegen lässt:

$$M(xy) = (a+bi)\,M(c,d)$$ wo a b c d reelle Zahlen bedeuten, dann hat man bewiesen, wie arith. geom. Mittel von a und y auszurechnen in dessen Sätze anzuwenden.

Hieraus ist es leicht zu zeigen, dass wenn man setzt

$$\alpha = c \quad \beta = bi \quad \gamma = a = b\sqrt{2} = c\sqrt{2}$$

die Reihe bestehen bleibt:

$$\frac{M(\alpha\gamma)\,M({}^m\alpha\;{}^m\beta)}{M(\alpha\beta)\,M({}^m\alpha\;{}^m\gamma)} \log 2\frac{{}^{m+1}\gamma}{{}^m\beta} = \frac{1}{2^n}\log 2\frac{{}^{n+1}\gamma}{{}^n\beta} + \frac{3}{2^{n+1}}\log\frac{1}{2}\frac{{}^{n+2}\gamma}{{}^{n+1}\gamma} + \dots \frac{2}{2^{n+m}}\log\frac{1}{2}\frac{{}^{n+m}\gamma}{{}^{n+m}\gamma}.$$

Daher geht daraus hervor, dass

$$M(\alpha\beta) = M(c, bi) = \frac{1+i}{2}M(c\sqrt{2}, b)$$ denn

$$M(c,bi) = c\,M(1,i) = \frac{1+i}{2}\,c\,M(\sqrt{2}, 1)$$

$$M(1,i) = \frac{1+i}{2}M(\sqrt{2}, 1).$$

$$2M\left(\frac{1}{1+i}, \frac{i}{1+i}\right) = M(\sqrt{2}+1, \sqrt{2}-1)$$

$$M(1-i, 1+i) = M(\sqrt{2}+1, \sqrt{2}-1)$$

$$M(1, \sqrt{2}) = M(\sqrt{2}+1, \sqrt{2}-1)$$

$$M(\sqrt{2}+1, \sqrt{2}-1) = M(\sqrt{2}+1, \sqrt{2}-1)$$

d. h. mit dem in der That bewiesen, zu zeigen:

$$M(\alpha\beta) = M\left(\frac{1+i}{2}a, \frac{1+i}{2}b\right) = \frac{1+i}{2}M(ab).$$

Daraus folgt nachdem aber gezeigt, daß man auch

$M(\alpha\beta)$ die arithmetisch-geometrischen Mittel ... Reihen d. h. daß ist:

$$M(\alpha\beta) = M({}^m\alpha\ {}^m\beta)$$

Also vereinfacht sich die Formel auf:

$$\frac{M(\alpha\gamma)}{M({}^m\alpha\ {}^m\gamma)}\log 2\frac{{}^{m+1}\gamma}{{}^m\beta} = \frac{1}{2^n}\log 2\frac{{}^{n+1}\gamma}{{}^n\beta}+\dots$$

Nun kann aber die Größen $\alpha\ \beta\ \gamma$ so gewählt, daß sie genau dieselben Relationen befolgen, wie $a\ b\ c$ d. h. es wird:

$${}^{(n)}\alpha = {}^{(n-1)}\alpha + {}^{(n-1)}\gamma \qquad {}^{(n)}\beta = {}^{(n-1)}\alpha - {}^{n-1}\gamma \qquad {}^n c\ {}^n c = {}^{n-1}a\ {}^{n-1}c$$

$$\lim \frac{{}^m\alpha}{2^m} = \lim\frac{{}^m\gamma}{2^m}$$ also auch

$$M(\alpha\gamma) = \frac{1}{2^m} M({}^m\alpha\ {}^m\gamma)$$ also geht die Formel über in:

$$\frac{1}{2^m}\log 2\frac{{}^{m+1}\gamma}{{}^m\beta} = \frac{1}{2^n}\log 2\frac{{}^{n+1}\gamma}{{}^n\beta} + \frac{3}{2^{n+1}}\log\frac{{}^{n+2}\gamma}{{}^{n+1}\gamma}+\dots$$

Daß aber diese Formel richtig sei, ist ja unmittelbar klar, denn da aber $\alpha\ \beta\ \gamma$ dieselben Relationen, wie $a\ b\ c$ befolgen, so fassen sich je zwei Glieder von der Form:

$$\frac{1}{2^n}\log 2\frac{{}^{n+1}\gamma}{{}^n\beta} + \frac{3}{2^{n+1}}\log\frac{{}^{n+2}\gamma}{{}^{n+1}\gamma}$$ zusammen zu:

$$\frac{1}{2^{n+1}}\log 2\frac{{}^{n+2}\gamma}{{}^{n+1}\beta}$$ etc. d. h. es findet an der ... Werth, wenn man ... unendlichen ...

Wir haben also nachzuweisen, daß ist:

$$\frac{M(\alpha\gamma)\,M({}^m\alpha\ {}^m\beta)}{M({}^m\alpha\ {}^m\gamma)\,M(\alpha\beta)}\log 2\frac{{}^{m+1}\gamma}{{}^m\beta} = \frac{1}{2^n}\log 2\frac{{}^{n+1}\gamma}{{}^n\beta}+\frac{3}{2^{n+1}}\log 2\frac{{}^{n+2}\gamma}{{}^{n+1}\gamma}+\dots$$

Nun ist aber

$$\frac{M({}^m\alpha\ {}^m\beta)}{M({}^m\alpha\ {}^m\gamma)}\log 2\frac{{}^{m+1}\gamma}{{}^m\beta} = M(1,\varepsilon)\log\frac{\eta}{\varepsilon}$$

wird zwar genau gleich denen Größen, die ${}^m\alpha\ {}^m\beta\ {}^m\gamma$ getrennt reellen Größen sind, die dieselben Werth annehmen, wie die entsprechenden ${}^n a\ {}^n b\ {}^m c$, denn obgleich

$$\underline{\alpha = c} \quad \beta = bi\,,\ \underline{\gamma = a} \text{ ist, so hat doch}$$

auch die Gleichung $'\alpha\ \ '\gamma$ etc keinen Einfluß, da

$$\left.\begin{aligned} '\alpha &= \alpha+\gamma \\ '\gamma &= 2\sqrt{\alpha\gamma} \end{aligned}\right\} \text{ d.h. da die } 'a \text{ und } 'c \text{ symmetrisch.}$$

Aber von α und γ sind nun bereits

$$'\alpha = {}'a$$

$$'\gamma = {}'c \quad \text{etc. allgemein:}$$

$${}^n\alpha = {}^n a;\ {}^n\gamma = {}^n c,\ {}^n\beta = {}^n b.$$

Hieraus folgt dann auch unmittelbar, daß wir die Werthe schreiben können

$$\frac{M({}^n\alpha\,{}^n\beta)}{M({}^n\alpha\,{}^n\gamma)}\,\frac{M(\alpha\gamma)}{M(\alpha\beta)}\log 2\frac{{}^{m+1}\gamma}{{}^m\beta} = M(1,\varepsilon)\log\frac{4}{\lambda}\,\frac{M(\alpha\gamma)}{M(\alpha\beta)} = \frac{1}{2^n}\log 2\frac{{}^{n+1}c}{{}^n\beta} + \frac{2}{2^{n+1}}\log\frac{1}{2}\frac{{}^{n+2}c}{{}^{n+1}c} + \cdots$$

Setzen wir $n=1$ so wird

$$\text{I}\quad M(1,\varepsilon)\log\frac{4}{\lambda}\,\frac{M(\alpha\gamma)}{M(\alpha\beta)} = \log 2\frac{'c}{\beta} + \frac{2}{2}\log\frac{1}{2}\frac{{}^2c}{{}'c} + \cdots$$

Für reelle c a b lautet aber die Formel bei $n=1$.

$$\text{II}\quad M(1,\varepsilon)\log\frac{4}{\lambda}\,\frac{M(ac)}{M(ab)} = \log 2\frac{'c}{b} + \frac{2}{2}\log\frac{1}{2}\frac{{}^2c}{{}'c} + \cdots$$

Nun kennen wir aber:

$$M(\alpha\beta) = \frac{1+c}{2}M(ab) \text{ und ferner wird sein:}$$

$$\underline{M(\alpha\gamma) = M(ac) = M(ab)} \text{ da}$$

α und γ reell und $c = b$

Damit gehen die beiden Formeln über in:

$$\text{II}\quad M(1,\varepsilon)\log\frac{4}{\lambda} = \log 2\frac{'c}{b} + \frac{2}{2}\log\frac{1}{2}\frac{{}^2c}{{}'c} + \cdots$$

$$\text{I}\quad \frac{2M(1,\varepsilon)\log\frac{4}{\lambda}}{1+c} = \log 2\frac{'c}{cb} + \frac{2}{2}\log\frac{1}{2}\frac{{}^2c}{{}'c} + \cdots$$

Wenn wir daher dieselben bis auf den ersten Gang überein, in welchem in Formel I statt b: bi gesetzt ist;

Denken wir uns daher geschrieben

$\log 2\frac{'c}{bi} = \log 2\frac{'c}{b} - \log i$ und substituiren die Formeln I u. II wie angegeben, so wird:

$$2M(1,\varepsilon)\log\frac{4}{\varepsilon}\left(1-\frac{2}{1+i}\right) = \log i.$$

$$2M(1,\varepsilon)\log\frac{4}{\varepsilon}\left(\frac{i-1}{i+1}\right) = 2iM(1,\varepsilon)\log\frac{4}{\varepsilon}. = \log i. \text{ d.h.}$$

$$2M(1,\varepsilon)\log\frac{4}{\varepsilon} = \frac{\log i}{i} = \frac{\pi}{2}. \text{ denn:}$$

$$i = e^{\frac{i\pi}{2}} \text{ d.h.}$$

$$\underline{M(1,\varepsilon)\log\frac{4}{\varepsilon} = \frac{\pi}{3}} \text{ q.e.d.}$$

Mit Hülfe ähnlicher Betrachtungen ist es möglich

$M(a,-b)$ auszudrücken durch $M(ab)$ und $M(ac)$.

Oder anders ausgedrückt: es gestatten die Arithm. geometr. Mittel sich anders, wenn man für $b'b''b'''$ etc. den negativen Werth wählt, doch ist es möglich das Resultat durch $M(ab)$ und $M(ac)$ auszudrücken.

Bei $b^{(k)}$ desjenigen b welches negativ genommen wird, kann oder wollen wir es mit b bezeichnen und man ihm dies noch weiter und lauter die Glieder gebildet denken.

Die Möglichkeit eines Erfolges beruht darin wieder ähnlich wie vorher voraus, daß alle Glieder noch links genau denselben Werth erhalten, als wenn der zweiten welches von b gewählt werden muss etc. Erst wenn da ab ändern sich die Glieder noch mehr.

Immer bemüht sie aber vermuthlich, dass die Formel

$$\frac{\pi}{2}\frac{M(ac)}{M(ab)} = \log 2\frac{{}'c}{(-b)} + \frac{3}{2}\log\frac{1}{2}\frac{{}''c}{{}'c} + \ldots$$

unverändert bleibt. Es hängt dieses von der Art der Zusammensetzung der Glieder.

Denn $\log{}^{2}\left(\frac{{}'c}{-b}\right) + \frac{3}{2}\log\frac{1}{2}\frac{{}^{x+2}c}{{}'c} = \frac{1}{2}\left[\log\left(\frac{{}^{2\prime}c}{-b}\right)^2 + \log\frac{1}{2}\frac{{}^{x+2}c}{{}'c}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\log\left(\frac{{}^{2}c}{+b}\right)^2 + \log\frac{1}{2}\frac{{}''c}{{}'c}\right]$ d.h. es ergiebt sich dasselbe Resultat, als wenn man $+b$ gewählt hätte, da

$$(+b)^2 = (-b)^2.$$

Es durch die Irrthum nicht weiter verfolgt werden.

Mithin haben wir:

$$\frac{\pi}{2}\frac{M(ac)}{M(ab)} = \log 2\frac{{}'c}{b} + \frac{3}{2}\log\frac{1}{2}\frac{{}''c}{{}'c} + \ldots\ldots$$

$$\frac{\pi}{2}\frac{M(ac)}{M(a-b)} = \log 2\frac{{}'c}{(-b)} + \frac{3}{2}\log\frac{1}{2}\frac{{}''c}{{}'c} + \ldots\ldots$$

Also:

$$\frac{\pi}{2}\frac{M(ac)}{M(a-b)} - \frac{\pi}{2}\frac{M(ac)}{M(ab)} = -\log(-1).$$

Aber $\log(-1) = \pm(2k+1)\pi i = \pm(4k+2)\frac{\pi i}{2}$ Also:

$$\frac{M(ac)}{M(a,-b)} = \frac{M(ac)}{M(ab)} \mp (4k+2)i \quad \text{oder}$$

$$\frac{1}{M(a-b)} = \frac{1}{M(ab)} \mp \frac{(4k+2)i}{M(ac)}$$

Wir haben somit gefunden, daß $M(a-b)$ welches aus complexen Zahlen besteht, hierdurch das arithm. geom. Mittel aus reellen Zahlen ausdrücken läßt. Hierin liegt also, wie schon früher angedeutet, die Bemerkung daß auf $M(a-b)$ die beiden Fundamental Rechnungen anzuwenden Betrachtung wollen wir es in Form annehmen, indem wir in $M(a-b)$ für b: bi setzen. Wenn wir dann durch Anwendung der beiden Fundamentalsätze auf einen reellen kommen, so sind wir zur Anwendung der frühern Bemerkung.

Vorerst:

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{M(ac)}{M(a-b)} = \frac{1}{2^n}\log 2\,\frac{\overset{n+1}{c}}{\overset{n}{(-b)}} + \frac{3}{2^{n+1}}\log\frac{1}{2}\,\frac{\overset{n+2}{c}}{\overset{n+1}{c}} + \cdots \frac{3}{2^{n+n}}\log\frac{1}{2}\,\frac{\overset{n+n+1}{c}}{\overset{n+n}{c}}$$

Setzen wir $b = \beta i$, so wird:

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{M(ac)}{M(a-\beta i)} = \frac{1}{2^n}\log 2\,\frac{\overset{n+1}{c}}{\overset{n}{(-\beta i)}} + \frac{3}{2^{n+1}}\log\frac{1}{2}\,\frac{\overset{n+2}{c}}{\overset{n+1}{c}} + \cdots$$

Wenn dann das arithm. geom. Mittel von $M(a, -\beta i)$ angefangen, und wir ebenso annehmen, so läßt sich die Identität dieser Formel ermitteln. Wir nachweisen, daß zwischen den einzelnen Größen dieselben Relationen stattfinden, wie zwischen den entsprechenden reellen.

Nun ist aber

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{M(ac)}{M(a-\beta i)} = \frac{\pi}{2}\,\frac{M(ia, ic)}{M(ia, \beta)}$$ und auch für diese Größe

wird – nach ebenderselben Annahme wie vorher-gehend gelten:

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{M(ia, ic)}{M(ia, \beta)} = \frac{1}{2^n}\log 2\,\frac{\overset{n+1}{(ic)}}{\overset{n}{b}} + \frac{3}{2^{n+1}}\log\frac{1}{2}\,\frac{\overset{n+2}{(ic)}}{\overset{n+1}{(ic)}} + \cdots$$

wie klar.

Bilden wir die einzelnen Größen!

Es ist $$\left.\begin{array}{l} '(ia) = ia + ic = i\,'[a] \\ ^{n}(ia) = i\,^{n-1}a + i\,^{n-1}a = i\,^{n}[a] \end{array}\right\}$$

Ebenso: $({}^{\prime}ic)^2 = 4ia.cc = -4ac = i^2({}^{\prime}c)^2$

$${}^{\prime}(ic)^2 = (i\,{}^{\prime}c)^2$$

$$\underline{{}^{\prime}(ic) = i\,{}^{\prime}c} \text{ ebenso allgemein}$$

$${}^{n}(ic) = i\,{}^{n}c.$$

Also:

$$\frac{\pi}{2}\frac{M(ia, ic)}{M(ia, b)} = \frac{1}{2^n}\log 2.\, i\, \frac{{}^{n+1}c}{{}^{n}b} + \frac{3}{2^{n+1}}\log\frac{1}{2}\frac{{}^{n+2}c}{{}^{n+1}c} + \dots\dots \qquad = \frac{\pi}{2}\frac{M(a\,c)}{M(a-bi)}$$

Oben:

$$\frac{\pi}{2}\frac{M({}^{\prime}a, {}^{\prime}c)}{M(a\,b)} = \frac{1}{2^n}\log 2 \cdot \frac{{}^{n+1}c}{{}^{n}b} + \frac{3}{2^{n+1}}\log\frac{1}{2}\frac{{}^{n+2}c}{{}^{n+1}c} + \dots\dots$$

Also:

$$\frac{\pi}{2}\frac{M(a\,c)}{M(a-bi)} = i\frac{\pi}{2}\frac{M(ac)}{M(ab)} + \log i \text{ wenn wir } n = 0 \text{ setzen.}$$

$$\log i = \frac{\pi}{2}(1 \pm 4k)i. \quad \text{Also:}$$

$$\frac{1}{M(a, -bi)} = \frac{1}{M(a, b)} + \frac{(1 \pm 4k)i}{M(a\,c)}$$

$$M(a-bi) = \frac{1}{i}(M(ia, b) = \frac{1}{i}M(b, ai)$$

$c^2 + (ib)^2 = a^2$

$\underline{c^2 = a^2 + b^2}$

Also:

$$\frac{i}{M(b, ai)} = \frac{1}{M(b, a)} + \frac{(1 \pm 4k)i}{M(ca)}$$

$$\frac{1}{M(b, ai)} = \frac{1}{iM(b, a)} + \frac{1 \pm 4k}{M(c, a)}$$

$$\frac{1}{M(b, ia)} = \frac{1 \pm 4k}{M(ca)} - \frac{i}{M(b, a)}.$$

Definiren wir also ${}^{\prime}c^2$ durch:

$\underline{b^2 = (ia)^2 + c_1^{\prime 2}}$ so können wir die Formel auch schreiben:

$$\underline{\frac{1}{M(a, bi)} = \frac{1 \pm 4k}{M(b\,c^{\prime})} - \frac{i}{M(ab)}} \text{ oder da } c^{\prime} = c.$$

$$\frac{1}{M(a,bi)} = \frac{1 \pm 4K}{M(bc)} - \frac{c}{M(ab)}$$

Fassen wir die gefundenen Resultate zusammen, so kommen wir zu dem Satze:

Auch für negative und rein imaginäre Argumente existirt ein arithmet. Mittel.

Immer aber folgt daraus:

Es ist $\frac{\pi}{2} = M(1,k)\log\frac{4}{k}$ nicht mehr, wenn man von der positiven Seite zu dem Nullpunkte kommt, sondern auch von der negativen und der rein imaginären.

---

§ 13 Bezeichnen wir:

1) $\Delta = \frac{1}{c^2}\,\partial.\log\frac{a}{b}$

so lassen sich für diesen Ausdruck mehrere andere substituiren. In der That ergiebt sich auch:

2) $\Delta = \frac{1}{2^n}\,\frac{1}{c^{n2}}\,\partial.\log\frac{a^n}{b^n}$

Wir wollen dieses so beweisen, dass wir zeigen, dass, falls der Ausdruck für $n-1$ richtig ist, er auch für n richtig bleiben muß. d. h. dass es:

$$\frac{1}{c^{(n-1)2}}\,\partial.\log\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} = \frac{1}{2\,c^{n2}}\,\partial.\log\frac{a^n}{b^n}.$$

$$\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}c^{(n-1)2}b^{(n-1)2}}\left(b^{n-1}\partial.a^{n-1} - a^{n-1}\partial.b^{n-1}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{b^n}{a^n c^{n2} b^{n2}}\left(b^n\partial a^n - a^n\partial b^n\right)$$

$$\frac{b^{n-1}\partial a^{n-1} - a^{n-1}\partial b^{n-1}}{c^{(n-1)2}\,b^n} = \frac{1}{2}\,\frac{b^n\partial a^n - a^n\partial b^n}{a^n c^{n2} b^n} =$$

$$\frac{b^n\left(\partial a^{n-1} + \partial b^{n-1}\right)}{4c^{n2}a^{n2}} - b^n\left(\frac{\partial a}{4c^{n2}a^{n-1}} + \frac{\partial b}{4c^{n2}b^{n-1}}\right).$$

Aeq.: $\frac{b^{n-1}\partial a^{n-1} - a^{n-1}\partial b^{n-1}}{c^2} = \frac{a^{n-1}b^{n-1}.(\partial a^{n-1}+\partial b^{n-1})}{4c^{n2}a^n} - \frac{b^{n-1}\partial a^{n-1}}{4c^{n2}} - \frac{a^{n-1}\partial b^{n-1}}{4c^{n2}}$

Entwickelt man diese Gleichung weiter, so erhält man schließlich:

$$\frac{\partial a}{a+b}\left[b(a-b) - 2ab + b(a+b)\right] - \frac{\partial b}{a+b}\left[a(a-b) + 2ab - a(a+b)\right] = 0$$

und diese ist eine identische Gleichung q.e.d.

Hieraus ergiebt sich dann unmittelbar:

$$3)\ \Delta = \frac{1}{2^n}\ \frac{1}{b^{n2}}\,\partial.\log\frac{c^n}{b^n}$$

Um dieses zu beweisen, muß gezeigt werden, daß ist:

$$\frac{1}{b^{n2}}\,\partial.\log\frac{c^n}{b^n} = \frac{1}{c^{n2}}\,\partial.\log\frac{a^n}{b^n}$$

Führt man die Differentiationen aus, so erhält man die Gl.

$$\frac{b^n\partial a^n - a^n\partial b^n}{c^n} = \frac{a^n\partial c^n - c^n\partial a^n}{b^n}$$

$$b^{n2}\partial a^n - a^n b^n\partial b^n = a^n c^n\partial c^n - c^{n2}\partial a^n$$

oder $\underline{a^n\partial a^n = b^n\partial b^n + c^n\partial c^n}$ d.h. wieder eine identische Gl.

Ferner $4)\ \Delta = \frac{1}{2^n}\ \frac{1}{a^{n2}}\,\partial.\log\frac{c^n}{b^n}$

In der That, ist es wieder:

$$\frac{1}{a^{n2}}\,\partial.\log\frac{c^n}{b^n} = \frac{1}{b^{n2}}\,\partial.\log\frac{c^n}{b^n}.$$

Man kommt nämlich beim Differentiiren auf die Gl.

$$b^{n2}\partial c^n - b^n c^n\partial b^n = a^{n2}\partial c^n - a^n c^n\partial a^n$$

$$+ c^n\partial c^n + b^n\partial b^n = + a^n\partial a^n$$ d.h. wieder eine identische Gl.

Lesen wir die Gl. von rechts nach links, so können die Gl. geschrieben werden

$$\Delta = \frac{2^m}{c^m}\,\partial.\log r\,\frac{{}^m a}{{}^m b} = \frac{2^m}{b^m}\,\partial\log r\,\frac{{}^m c}{{}^m a} = \frac{2^m}{a^m}\,\partial\log r\,\frac{{}^m c}{{}^m b}$$

und letzterer ist dabei von keinem Einfluss, da das Differential desselben gleich Null ist.

Mit Hülfe dieser Formel lässt sich die Richtigkeit der folgenden verificiren:

$$6)\ \Delta = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{M(ab)\,M(ac)}\,\partial.\log\frac{M(ac)}{M(ab)}$$

Denn es ist:

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{M(ab)\,M(ac)}\,\partial.\log\frac{M(ac)}{M(ab)} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{[M(ac)]^2}\,d.\frac{M(ac)}{M(ab)}$$

Aber aus den Vorhergehenden Entwicklungen ergiebt sich

$$\frac{\pi}{2}\,d.\frac{M(ac)}{M(ab)} = \frac{1}{2^m}\log r\,\frac{{}^m a}{{}^m b} \quad \text{Also:}$$

$$\Delta = \frac{1}{[M(ac)]^2}\,\frac{1}{2^m}\log r\,\frac{{}^m a}{{}^m b}$$

$$M(ac) = \frac{{}^m c}{2^m} \quad \text{Also}$$

$$\Delta = \frac{2^m}{{}^m c}\log r\,\frac{{}^m a}{{}^m b} \quad \text{q.e.d.}$$

So haben wir also für das Differential des Logarithmus des Quotienten zweier beliebigen einander entsprechenden Glieder $a^2\ c^2\ b^2\ {}^2a\ {}^2c\ {}^2b$ einen festen Ausdruck gefunden oder vielmehr darstellen können durch die absoluten Differentiale von den ursprünglich gegebenen Argumenten $a\ b\ c$.

Hierin liegt auch die Bedeutung der Formeln.

Ebenso lässt ergeben sich dann die Formeln für das Differential des Logarithmus des Produktes zweier entsprechenden Glieder:

6) $\partial . \log(a^m b^m) = \partial \log(a^{m+1} b^{m+1}) - \Delta\, 2^{m+1} c^{(m+1)2}$

In der That ist auch:

$$\Delta = \frac{1}{2^{m+1}(c^{m+1})^2}\, \partial . \log \frac{a^{m+1}}{b^{m+1}}$$

Also: $\underline{\partial . \log(a^m b^m)} = \partial \log(a^{m+1} b^{m+1}) - \partial . \log \frac{a^{m+1}}{b^{m+1}} = \underline{\partial . \log\left[b^{(m+1)2}\right]}$ q. e. d.

da $a^m b^m = b^{(m+1)2}$

Ebenso:

7) $\partial . \log\left[{}^m a\, {}^m c\right] = \partial . \log\left({}^{m+1} a\, {}^{m+1} c\right) + \Delta \frac{1}{2^{m+1}}\, {}^{m+1} b^2$

In der That ist auch:

$$\Delta = \frac{2^{m+1}}{{}^{m+1} b^2}\, \partial . \log\left[4 \frac{{}^{m+1} c}{{}^{m+1} a}\right].$$

Also: $\partial . \log\left[{}^m a\, {}^m c\right] = \partial \log\left[{}^{m+1} a\, {}^{m+1} c\right] + \partial . \log 4 \frac{{}^{m+1} c}{{}^{m+1} a} = \partial \log \frac{1}{4} \frac{{}^{m+1} c}{{}^{m+1} a}.$

$$= \partial . \log \frac{{}^{m+1} c^2}{4} \text{ q. e. d., da } {}^{m+1} c^2 = 4\, {}^m a\, {}^m c.$$

Läßt man m bis ins Unendliche wachsen, so erhält man folgende Formeln aus 6 u. 7.

8) $2\, \partial . \log M(ab) = \partial . \log(a^n b^n) + \Delta\left[2^{n+1} c^{n+1\,2} + \ldots\ 2^{n+m} c^{n+m\,2} + \ldots\right].$

In der That ist auch bei $m = \infty$.

$$\partial . \log(a^m b^m) = \partial \log M(ab)^2 = 2\, \partial . \log M(ab).$$

Ferner lassen sich auf der rechten Seite je zwei Umformungen folgende Glieder in ein einander zusammenziehen, so wie folgt:

$$\partial . \log(a^n b^n) + \Delta\, 2^{n+1} c^{n+1\,2} = \partial . \log(a^n b^n) + \partial . \log a^{n+1} b^{n+1} - \partial . \log a^n b^n =$$

$$\partial \log a^{n+1} b^{n+1}$$

Gehen wir so weiter fort, so ergiebt sich rechts schließlich

$\partial \log a^\infty b^\infty$ und das ist gerade die linke Seite.

Ebenso wird:

9) $2.\vartheta.\log(M(ac)) = \vartheta.\log({}^{n}a\,{}^{n}c) - \Delta(2^{-n-1}\,{}^{n+1}b^2 + \dots + 2^{-n-m}\,{}^{n+m}b^2 + \dots)$.

Wächst nun stetig letztere unter zwei Glieder zusammen, so sind wir berechtigt schließlich zu der Gl.

$$\underline{2\vartheta.\log M(ac) = \vartheta.\log({}^{m}a\,{}^{m}c)_{m=\infty}} \quad \text{Gl. 10}$$

Subtrahiren wir Gl. 8 von Gl. 9!

$$2\vartheta.\log\frac{M(ac)}{M(ab)} = \vartheta.\log({}^{n}a\,{}^{n}c) - \vartheta.\log({}^{n}a\,{}^{n}b) - \Delta\left[\frac{{}^{n+1}b^2}{2^{n+1}} + \dots \frac{{}^{n+m}b^2}{2^{n+m}}\right]$$
$$- \Delta\left[2^{n+1}\,{}^{n+1}c^2 + \dots \; 2^{n+m}\,{}^{n+m}c^{n+m}\right].$$

Aber $2\vartheta.\log\frac{M(ac)}{M(ab)} = \frac{4}{\pi}\Delta\,(M(ab)\,M(ac))$.

Die linke Seite wollen wir so berechnen, daß wir $n=0$ setzen

Dann wird:

$$\frac{4}{\pi}\Delta(M(ab)M(ac)) = \vartheta\log(ac) - \vartheta.\log(ab) - \Delta\left[\frac{{}^{1}b^2}{2} + \dots \frac{{}^{n+m}b^2}{2^{n+m}}\right] - \Delta\left[2\,{}^{1}c^2 + \dots 2^{n+m}\,{}^{n+m}c^{n+m}\right].$$

Aber

$$\vartheta.\log(ac) - \vartheta\log(ab) = \vartheta.\log\frac{c}{b} = \alpha^2\Delta$$

Also können wir Δ fortheben:

$$\frac{4}{\pi}M(ab)M(ac) = \alpha^2 - \frac{{}^{1}b^2}{2} \dots - \frac{{}^{n+m}b^2}{2^{n+m}} - 2\,{}^{1}c^2 \dots - 2^{n+m}\,{}^{n+m}c^{n+m}$$

So haben wir auch einen Ausdruck für das Produkt zweier arithmetisch-geometrischer Mittel gefunden.

§ 14.

Wir wollen jetzt kurz die vollständigen Elemente der zweiten Ordnung einiger Gl. aufstellen

Erst:

1) $\frac{1}{\Delta}\,\partial.\log\frac{c}{b^n}^{n}\,\partial.\log a^n = \frac{2}{2}\,\partial\left(\frac{1}{\Delta}\,\partial.\log\frac{c}{b^n}^{n}\right)_1 - 2\,\partial\left(\frac{1}{\Delta}\,\partial.\log\frac{{}^n c}{{}^n b}\right) = \frac{1}{\Delta}\,\partial.\log\frac{{}^n c}{{}^n b}\,\partial\log{}^a n$

In der That, es ist

$$\frac{1}{\Delta}\,\partial\log\frac{c^n}{b^n} = 2^n a^{n^2}$$

Also $a^{n^2}\,\partial.\log a^n = \frac{1}{2}\,\partial a^{n^2}$

$$a^n\,\partial a^n = a^n\,\partial a^n \quad q.e.d.$$

Daß der andere Theil auch richtig sei, ist klar, wir brauchen die Gl. nur von rechts nach links zu lesen, um sie zu erhalten.

Ebenso findet man:

2) $\frac{1}{\Delta}\,\partial.\log\frac{c^n}{a^n}\,\partial.\log b^n = \frac{1}{2}\,\partial.\left[\frac{1}{\Delta}\,\partial.\log\frac{c}{a^n}^{n}\right]_1 - 2\,\partial.\left[\frac{1}{\Delta}\,\partial.\log\frac{{}^n c}{{}^n a}\right] = \frac{1}{\Delta}\,\partial.\log\frac{{}^n c}{{}^n a}\,\partial\log{}^a b.$

Man kann diese auf die identische Gl.

$$b^n\,\partial b^n = b^n\,\partial b^n.$$

Ebenso

3) $\frac{1}{\Delta}\,\partial.\log\frac{a^n}{b^n}\,\partial\log c^n = \frac{1}{2}\,\partial\left[\frac{1}{\Delta}\,\partial.\log\frac{a^n}{b^n}\right]_1 - 2\,\partial\left[\frac{1}{\Delta}\,\partial.\log\frac{{}^n a}{{}^n b}\right] = \frac{1}{\Delta}\,\partial.\log\frac{{}^n a}{{}^n b}\,\partial.\log{}^n c;$

Man kann dies auf die identische Gl.

$$c^n\,\partial c^n = c^n\,\partial c^n$$

Multipliziert man in Gl. 1 auf der ersten Seite das Argument des Logarithmus mit a^n und dividirt es dadurch, so wird

$$\frac{1}{\Delta}\,\partial\log\frac{c}{b^n}^{n}\,\partial.\log a^n = \frac{1}{2}\,\partial.\left[\frac{1}{\Delta}\,\partial.\log\frac{c^n a^n}{b^n a^n}\right].$$

$$\frac{1}{\Delta}\,\partial\left[\log c^n - \log b^n\right]\partial\log a^n = \frac{1}{2}\,\partial\left[\frac{1}{\Delta}\,\partial.\left[\log c^n a^n - \log a^n b^n\right]\right].$$

Also:

$$\frac{1}{\Delta}\,\partial.\log a^n\,\partial.\log b^n - \frac{1}{2}\partial\left[\frac{1}{D}\,\partial\log a^n b^n\right] = \frac{1}{\Delta}\,\partial.\log a^n\,\partial.\log c^n - \frac{1}{2}\partial\left[\frac{1}{D}\,\partial\log a^n c^n\right].$$

Multiplicirt man die Gl. mit b^n und dividirt durch b^n die entsprechenden Größen, so erhält man ferner:

$$\frac{1}{\Delta}\,\partial.\log a^n\,\partial.\log c^n - \frac{1}{2}\partial\left[\frac{1}{D}\,\partial\log a^n c^n\right] = \frac{1}{D}\,\partial.\log b^n\,\partial.\log c^n - \frac{1}{2}\partial\left[\frac{1}{D}\,\partial\log b^n c^n\right].$$

Man hat hier also drei Paare von drei verschiedenen entsprechenden Ausdr. die denselben Werth repräsentiren. Nennen wir denselben D', so wird also:

$$4)\ D' = \frac{1}{\Delta}\,\partial.\log b^n\,\partial.\log c^n - \frac{1}{2}\partial\left[\frac{1}{\Delta}\,\partial.\log(b^n c^n)\right].$$

$$5)\ D' = \frac{1}{\Delta}\,\partial.\log c^n\,\partial\log a^n - \frac{1}{2}\partial\left[\frac{1}{D}\,\partial.\log(c^n a^n)\right]$$

$$6)\ D' = \frac{1}{D}\,\partial.\log a^n\,\partial.\log b^n - \frac{1}{2}\partial\left[\frac{1}{D}\,\partial.\log(a^n b^n)\right].$$

Es ist aber der Werth von D derselbe, welches n immer auch nehmen möge.

In der Gl. nehmen wir nun 4 und 5 das arithmetische Mittel, so wird

$$\frac{2D'}{2} = \frac{1}{2\Delta}\,\partial.\log c^n\,\partial.\log a^n b^n - \frac{1}{2\cdot 2}\partial\left[\frac{1}{D}\,\partial.\log c^{n^2} a^n b^n\right]$$

Aber $a^n b^n = b^{n+n^2}$ $\quad \partial\log a^n b^n = 2\,\partial\log b^{n+1}$

Also

$$D' = \frac{1}{\Delta}\,\partial.\log c^n\,\partial.\log b^{n+1} - \frac{1}{2}\partial\left[\frac{1}{D}\,\partial.\log(c^n b^{n+1})\right].$$

Ferner $\partial\log c^n = \frac{1}{2}\,\partial.\log a^{n+1} + \frac{1}{2}\,\partial\log c^{n+1}$ also

$$D' = \frac{1}{D}\frac{\partial.\log c^{n+1}\,\partial\log b^{n+1}}{2} + \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\log a^{n+1}\,\partial\log c^{n+1}}{2} - \frac{1}{4}\partial\left[\frac{1}{D}\,\partial\log(c^{n+1} b^{n+1})\right]$$

$$- \frac{1}{4}\partial\left[\frac{1}{D}\,\partial\log(a^{n+1} b^{n+1})\right]$$

Nun ist aber hiernach:

$$\frac{1}{\Delta}\,\partial.\log c^{n+1}\,\partial\log b^{n+1} - \frac{1}{2}\partial\left[\frac{1}{D}\,\partial\log(c^{n+1} b^{n+1})\right].$$

$\frac{1}{\Delta}\partial\log a^{n+1}\partial.\log b^{n+1} - \frac{1}{2}\partial\left[\frac{1}{\Delta}\partial.\log(a^{n+1}b^{n+1})\right)$ also:

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{\Delta}\partial.\log b^{n+1}\partial.\log c^{n+1} - \frac{1}{2}\partial\left[\frac{1}{\Delta}\partial.\log(b^{n+1}c^{n+1})\right)$$

$$= \frac{1}{\Delta}\partial.\log c^{n+1}\partial.\log a^{n+1} - \frac{1}{2}\partial\left[\frac{1}{\Delta}\partial.\log(c^{n+1}a^{n+1})\right)$$

$$= \frac{1}{\Delta}\partial.\log a^{n+1}\partial.\log b^{n+1} - \frac{1}{2}\partial\left[\frac{1}{\Delta}\partial.\log(a^{n}b^{n})\right]\Big].$$

So können wir weiter gehen und finden, daß $\mathfrak{D}$ in der Form

wenn n ganz unendlich groß sei.

Natürlich können wir auch die Werte gebrochener Indices nehmen.

Ferner können wir für $\mathfrak{D}$ folgende Gl. aufstellen:

$$\mathfrak{D} = M(ab)\,\partial\left[\frac{1}{\Delta}\partial\frac{1}{M(ab)}\right\}$$

Wir werden die Richtigkeit gezeigt haben, wenn wir nachweisen,

daß:

$$\left[\frac{1}{\Delta}\partial\log a^{n}\partial.\log b^{n} - \frac{1}{2}\partial\left[\frac{1}{\Delta}\partial\log a^{n}b^{n}\right]\right]_{n=\infty} = M(ab)\,\partial\left[\frac{1}{\Delta}\partial\frac{1}{M(ab)}\right]$$ wenn

$a^{n}_{n=\infty} = M(ab)$ $\quad b^{n}_{n=\infty} = M(ab)$ also wird die linke

Seite:

$$\frac{1}{\Delta}\partial\log M(ab)\,\partial\log M(ab) - \partial\left[\frac{1}{\Delta}\partial\log M(ab)\right] = M(ab)\,\partial\left[\frac{1}{\Delta}\partial\frac{1}{M(ab)}\right]$$

$$\frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial(M(ab)}{M(ab)}\right]^2 - \partial\left[\frac{1}{\Delta}\frac{\partial M(ab)}{M(ab)}\right] = M(ab)\,\partial\left[\frac{1}{\Delta}\partial\frac{1}{M(ab)}\right] =$$

$$- M(ab)\,\partial\left[\frac{1}{\Delta}\frac{\partial M(ab)}{M(ab)^2}\right] = - M(ab)\,\partial\frac{1}{\Delta}\cdot\frac{\partial M(ab)}{M(ab)^2} - M(ab)\frac{1}{\Delta}\partial\left[\frac{\partial M(ab)}{M(ab)^2}\right]$$

Die linke Seite wird:

$$\frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial M(ab)}{M(ab)}\right]^2 - \partial\frac{1}{\Delta}\cdot\frac{\partial M(ab)}{M(ab)} - \frac{1}{\Delta}\partial\left[\frac{\partial(M(ab)}{M(ab)}\right] =$$

Mithin habe ich auf beiden Seiten $\partial\frac{1}{\Delta}\frac{\partial(M(ab)}{M(ab)}$

Bekanntlich kann die ganze Gleichung durch $\frac{1}{D}$ dividirt werden. Dann bleibt nur:

$$\left[\frac{\partial M(ab)}{M(ab)}\right]^2 - \partial\left[\frac{\partial(M(ab))}{M(ab)}\right] = -M(ab)\, d\left[\frac{\partial M(ab)}{M(ab)^2}\right].$$

$$\left[\frac{\partial M(ab)}{M(ab)}\right]^2 - \frac{M(ab)\,\partial^2 M(ab) - [\partial M(ab)]^2}{M(ab)^2} = -\frac{M(ab)^3\,\partial^2 M(ab) - 2M(ab)^2\,\partial M(ab)}{M(ab)^4}$$

Oder besser geschrieben:

$$2\left[\frac{\partial(M(ab))}{M(ab)}\right]^2 - \frac{\partial^2 M(ab)}{M(ab)} = -\frac{\partial^2 M(ab)}{M(ab)} + 2\left[\frac{\partial(M(ab))}{M(ab)}\right]^2.$$

Wie wir sehen, daß dieses eine identische Gl. bildet:

$$7)\quad D' = M(ab)\, d\left[\frac{1}{D}\,\partial\left(\frac{1}{M(ab)}\right)\right]$$

Wir können Gl. 5') schreiben:

$$D' = \left[\frac{1}{D}\,\partial.\log {}^n c\;\; \partial.\log {}^n a - \frac{1}{2}\,\partial\left[\frac{1}{D}\,\partial.\log {}^n c\; {}^n a\right]\right]_{n=\infty} \text{ oder auch:}$$

$$D' = \left[\frac{1}{D}\,\partial.\log\frac{{}^n c}{2^n}\cdot\partial\log\frac{{}^n a}{2^n} - \frac{1}{2}\,\partial\left[\frac{1}{D}\,\partial.\log\frac{{}^n c}{2^n}\cdot\frac{{}^n a}{2^n}\right]\right]_{n=\infty}$$

da die Zahlenfactoren $\frac{1}{2^n}$ nur keinen Einfluß haben, denn

$$\partial \log \text{Const.}\, x = \partial \log x$$

Setzen wir aber $n=\infty$, so wird $\frac{{}^n c}{2^n} = M(ac) = \frac{{}^n a}{2^n}$.

Durchgehend dieselbe Rechnung kommen wir zu dem entsprechenden Resultate, und machen:

$$8)\quad D' = M(ab)\, d\left[\frac{1}{D}\,\partial\left(\frac{1}{M(ac)}\right)\right]$$

Weitere Ausdrücke für $\mathfrak{D}$ ergeben sich, wenn man in d. Gl. 4. 5. 6 $n=1$ setzt und a od. b als Constanten annimmt.

In der Gl. 4 nimmt man:

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{D}\partial.\log b \cdot \partial.\log c - \frac{1}{2}\partial\left[\frac{1}{D}\partial\log b \cdot c\right] = -\frac{1}{D}\partial.\log\frac{1}{b}\,\partial.\log c + \frac{1}{2}\partial\left[\frac{1}{D}\partial\log\frac{c}{b}\right]$$

Aber bei constantem a ist nach den früheren Bezeichnungen:

$$\partial\log\frac{1}{b} = c^2 D, \quad \partial\log c = b^2\Delta \quad \partial.\log\frac{c}{b} = a^2 D.$$

Also

$$\mathfrak{D} = -\Delta b^2c^2 + \frac{1}{2}\partial\frac{1}{D}\Delta a^2 = -\Delta b^2c^2 \text{ also:}$$

$$9)\ \mathfrak{D} = -\Delta b^2c^2$$

Nehmen wir die zweite Gl. so wird dieselbe bei constantem a:

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{D}\partial.\log c\,\partial.\log a - \frac{1}{2}\partial\left[\frac{1}{D}\partial.\log c.a\right] = \cancel{\frac{1}{D}\partial.\log c} - \frac{1}{2}\partial\left[\frac{1}{D}\partial\log c\right].$$

$$\mathfrak{D} = -\frac{1}{2}\partial\left[\frac{1}{D}\partial\log c\right] = -\frac{1}{2}\partial b^2 = -b\,\partial b = -b^2\partial.\log b.$$

Also:

$$10)\ \mathfrak{D} = -b^2\partial.\log b.$$

Nehmen wir endlich die folgende Gl. so wird dieselbe:

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{D}\partial.\log a.\partial.\log b - \frac{1}{2}\partial\left[\frac{1}{D}\partial.\log a.b\right] = -\frac{1}{2}\partial\left[\frac{1}{D}\partial.\log b\right].$$

$$= +\frac{1}{2}\partial\left[\frac{1}{D}\partial\log\frac{1}{b}\right] \text{ Also:}$$

$$11)\ \mathfrak{D} = c^2\partial.\log c.$$

Mit Hülfe dieser Relationen ist es möglich für $\frac{a}{M(ab)}$ u. $\frac{a}{M(ac)}$ eine Differentialgleichung aufzustellen.

In der That folgt aus folgender Gleichung von D ausgehend gleich, nämlich unter der Voraussetzung, daß a eine Constante sei:

$$M(ab)\, \partial\left[\frac{1}{\Delta}\,\partial \frac{1}{M(ab)}\right] = \Delta\, b^2 c^2.$$

Multipliciren wir die Gl. mit a u. dividiren sie durch $M(ab)$:

$$\partial\left[\frac{1}{\Delta}\,\partial\left[\frac{a}{M(ab)}\right]\right] = \Delta\, b^2c^2\left[\frac{a}{M(ab)}\right]$$

Setzen wir $\frac{b}{a} = x$!

$$\partial\left[\frac{1}{\Delta}\,\partial \frac{1}{M(1,x)}\right] = \Delta\, b^2c^2\left[\frac{1}{M(1,x)}\right]$$

ferner $\frac{1}{M(1,x)} = y$.

$$\partial\left[\frac{1}{\Delta}\,\partial y\right] = \Delta\, b^2c^2\, y.$$

$$\partial^2 y - \frac{\partial\Delta}{\Delta}\,\partial y = \Delta^2 b^2c^2 y.$$

Für $\frac{a}{M(ac)}$ sollten wir genau dieselbe Differentialgleichung erhalten. Es ist diese aber genau dieselbe, die für $\frac{1}{M(1+x,1-x)}$ in § 8 gefunden wurde.

Um dieses zu beweisen, muß Δ transformirt werden.

$$\Delta = \frac{1}{c^2}\,\partial.\log\frac{a}{b} = -\frac{1}{c^2}\,\partial.\log x$$

$$\Delta^2 = \left(\frac{1}{c^4}\right)(\partial.\log x)^2.$$

$$\Delta^2 b^2c^2 = \frac{1}{c^2}(\partial\log x)^2 b^2 = \frac{1}{a^2-b^2}(\partial.\log x)^2 b^2 = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2-1}(\partial.\log x)^2$$

$$= -\frac{x^2}{x^2-1}(\partial\log x)^2 = -\frac{(\partial x)^2}{x^2-1}$$

Ferner muß $\frac{\partial\Delta}{\Delta}$ gebildet werden

$$\frac{\partial\Delta}{\Delta} = \frac{\partial\,\frac{\Delta}{\partial x}}{\frac{\Delta}{\partial x}} = -\frac{\partial\left(\frac{x}{1-x^2}\right)(1-x^2)}{x} = \frac{(1-3x^2)\,\partial x}{x(1-x^2)}.$$

Setzen wir dies ein, so wird:

$$\partial^2 y + \frac{1-3x^2}{x(1-x^2)}\,\partial x\,\partial y = -\frac{\partial x^2}{x^2-1}\,y. \text{ Oder:}$$

$$(x^3-x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (3x^2-1)\frac{\partial y}{\partial x} + xy = 0$$

Wir finden somit den Satz:

Das arithmetisch-geometrische Mittel von 1 und x ist das zweite particuläre Integral derjenigen Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren erstes, das arithm.-geom. Mittel von 1+x und 1−x resp.

Zu den weiteren Entwickelungen brauchen wir einiges von der hypergeometrischen Reihe.

Die Reihe

$$1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha.\alpha+1.\beta.\beta+1}{1.2.\gamma.\gamma+1}x^2 + \frac{\alpha.\alpha+1.\alpha+2.\beta.\beta+1.\beta+2}{1.2.3.\gamma.\gamma+1.\gamma+2}x^3 + \ldots$$

wird eine hypergeometrische genannt, und bezeichnet

$$F(\alpha\beta,\gamma x)$$

Für dieselbe läßt sich eine Differentialgleichung aufstellen.

Wie unmittelbar zu sehen, ist:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\alpha.\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,x)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\alpha.\beta.(\alpha+1)(\beta+1)}{\gamma.\gamma+1}F(\alpha+2,\beta+2,\gamma+2,x).$$

Nach den Untersuchungen von Gauß circa seriem infinitam §10, Gl. IX ergibt sich nun die Differentialgleichung

$$0 = \alpha.\beta.F - (\gamma-(\alpha+\beta+1)x)\frac{\partial F}{\partial x} - (x-x^2)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.$$

Es lässt sich zeigen, dass wenn wir setzen:

$$\alpha = \tfrac{1}{2},\ \beta = \tfrac{1}{2},\ \gamma = 1,\ x = 1 - x^2 = u$$

diese Differentialgleichung in die oben gefundene übergeht.

$$\text{d.i. } (x^3 - x)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + (3x^2 - 1)\frac{\partial F}{\partial x} + Fx = 0$$

d.h. dass ist $\underline{\dfrac{1}{M(1,x)} = F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, 1 - x^2)}$

Diesen Beweis wollen wir jetzt liefern.

Für $F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1-x^2)$ wird die Differentialgleichung, wenn wir $1 - x^2 = u$ setzen:

$$0 = \tfrac{1}{4}F - (1 - 2u)\frac{\partial F}{\partial u} - (u - u^2)\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}.$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}.$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}.$$

$$1 - x^2 = u. \qquad x = \sqrt{1-u}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{1}{2\sqrt{1-u}} = -\frac{1}{2x}$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\partial\sqrt{1-u}}{2(1-u)\partial u} = -\frac{1}{4(1-u)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{4x^3}.$$

Also wird die Differentialgleichung:

$$0 = \tfrac{1}{4}F + (1 - 2u)\frac{\partial F}{\partial x}\frac{1}{2x} + (u - u^2)\frac{\partial F}{\partial x}\frac{1}{4x^3} - (u - u^2)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{1}{4x^2}$$

$$0 = Fx + 2(1 - 2u)\frac{\partial F}{\partial x} + (u - u^2)\frac{\partial F}{\partial x}\frac{1}{x^2} - (u - u^2)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{1}{x}$$

Aber $\quad 1 - 2u = 1 - 2(1 - x^2) = -1 + 2x^2.$

$$u - u^2 = 1 - x^2 - (1 - x^2)^2 = 1 - x^2 - 1 - x^4 + 2x^2 = x^2 - x^4.$$

Also:

$$0 = (Fx) - 2(1 - 2x^2)\frac{\partial F}{\partial x} + (x^2 - 1)\frac{\partial F}{\partial x} + (x^3 - x)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.$$

Lässt man die [illegible] weg, so findet man aus der Theorie, dass die Differentialgl. übergeht in

$$(x^3-x)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+(3x^2-1)\frac{\partial F}{\partial x}+Fx=0$$

Also dass ist: $\frac{1}{M(1,x)} = F(\frac12,\frac12,1,1-x^2)$.

Setzen wir $x=\frac{c}{a}$, so wird:

$$\frac{a}{M(a,c)} = F\left(\tfrac12,\tfrac12,1,\tfrac{c^2}{a^2}\right) = F\left(\tfrac12,\tfrac12,1,1-x^2\right).$$

Setzen wir $x=\frac{b}{a}$, so wird:

$$\underline{\frac{a}{M(a,c)} = F\left(\tfrac12,\tfrac12,1,\tfrac{b^2}{a^2}\right)} = F\left(\tfrac12,\tfrac12,1,x^2\right).$$

Es ergiebt sich übrigens sofort aus der strengen Theorie, dass man $\frac{1}{M(1,x)}$ als particuläres Integral der Diffgl.

$$(x^3-x)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+(3x^2-1)\frac{\partial F}{\partial x}+Fx=0 \text{ ist}$$

nach Gauss [illegible]. Das zweite particuläre Integral derselben [illegible] ist:

$$F(\tfrac12,\tfrac12,1,x^2)$$

[illegible] aus der Theorie [illegible]

gleich $\frac{1}{M(1+x,1-x)}$ [illegible]

Also:

$$\underline{\frac{1}{M(1+x,1-x)} = F(\tfrac12,\tfrac12,1,x^2)}$$

Ferner ergiebt sich [illegible] nach Gauss [illegible] 76.

$$F(\tfrac12,\tfrac12,1,1-x^2)=\frac{1}{M(1,x)} = -\frac{1}{\pi}\log\tfrac{1}{16}x^2\,\frac{1}{M(1+x,1-x)} - \frac{1}{\pi}\Big\{\frac{2\cdot 1\cdot 1}{2\cdot 2}x^2 + (2+\tfrac23)\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4}x^4$$

$$+\left(2+\tfrac23+\tfrac{2}{15}\right)\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6}x^6+\left(2+\tfrac{2}{3\cdot 4}+\tfrac{2}{5\cdot 6}+\tfrac{2}{7\cdot 8}\right)\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8}x^8 - \Big\}.$$

Ebenso auch:

$$F\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1,1-x^2\right)=\frac{1}{M(1,x)}=-\frac{1}{\pi}\Big\{\log\tfrac{1}{16}x^2\,\frac{1}{M(1+x,1-x)}+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{21}{64}x^4$$
$$+\frac{185}{256}x^6+\frac{18655}{49304}x^8+\cdots\Big\}$$

Daraus ist es unmittelbar den Grenzwerth von

$M(1,\varepsilon)\log\frac{4}{\varepsilon}$ zu ersehen.

In der Form, setzen wir $x=\varepsilon$, so wird die Formel:

$$\frac{1}{M(1,x)}=-\frac{1}{\pi}\log\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^2\frac{1}{M(1+\varepsilon,1-\varepsilon)}+\frac{1}{2}\varepsilon^2+\frac{21}{64}\varepsilon^4+\cdots$$

Lassen wir nun ε bis zur Null abnehmen, so wird:

$\frac{1}{M(1+\varepsilon,1-\varepsilon)}=1$ und die Glieder ganz rechts verschwinden schließlich. Daher bleibt nur:

$$\frac{1}{M(1,\varepsilon)}=-\frac{1}{\pi}\log\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^2=\frac{2}{\pi}\log\frac{4}{\varepsilon}.$$

$$\underline{M(1,\varepsilon)\log\frac{4}{\varepsilon}=\frac{\pi}{2}}\quad \text{q.e.d.}$$

Und ferner:

$$\frac{a}{M(a,c)}=F\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1,x^2\right) \text{ wird}$$
$$\frac{a}{M(a-b,a+b)}=F\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1,x^2\right).$$

Daraus folgt:

$$\frac{a}{M(a,c)}=\frac{a}{M(a-b,a+b)}$$

Dieses ist in der Form richtig. $x=\frac{b}{a}$

$$\frac{a}{M(a,c)}=\frac{1}{M(1,\frac{c}{a})}=\frac{1}{M(1,\sqrt{1-x^2})}$$

$$\frac{a}{M(a-b, a+b)} = \frac{1}{M(1-x, 1-x)}$$

daß aber $M(1-x, 1+x) = M(1, \sqrt{1-x^2})$ ist klar.

Also auch hieraus folgt, daß wenn

$\frac{1}{M(1,x)}$ ein particuläres Integral jener Dffgl.

ist, es auch $\frac{1}{M(1+x, 1-x)}$ sein muß.

Dabei sind diese beiden gemeinsamen Integrale un-
verbunden durch die Differentialgleichung miteinander:

$$M(1,x)\, d\left[\frac{1}{D}\, d\frac{1}{M(1,x)}\right] = M(1+x, 1-x)\, d\left[\frac{1}{D}\, d\frac{1}{M(1+x, 1-x)}\right]$$

wie wir weiter nachgewiesen haben und gezeigt ist

$$D = \frac{1}{c^2}\, d.\log x = \frac{x^2}{1-x^2}\, d.\log x$$ Also da d

eine Konstante ist, besteht die Differentialgl.:

$$M(1,x)\, d\left[(1-x^2)\, d\frac{1}{M(1,x)}\right] = M(1+x, 1-x)\, d\left[\frac{1-x^2}{D}\, d\frac{1}{M(1+x, 1-x)}\right]$$

Es ergiebt sich diese Relation auch unmittelbar aus der Dffgl.
wie man dieselbe auch aus ihr entnehmen ist. —

---

§ 15. Wir wollen jetzt eine Differentialgleichung aufstellen, die von den drei Größen $\sqrt{\frac{a}{M(a,b)}}$ $\sqrt{\frac{b}{M(a,b)}}$ $\sqrt{\frac{c}{M(a,b)}}$ genügen als particulären Integralen.

Bilden wir dazu den Ausdruck

$$D' + \partial\left[\frac{1}{\Delta}\partial\log c\right] + \frac{1}{\Delta}(\partial\log c)^2$$ wo c eine beliebige Größe bedeutet.

Dann ist nach dem früheren Paragraphen klar, daß dieser Ausdruck unverändert bleibt wenn man ... für a^n, b^n: b^n, a^n oder c^n statt a^n setzen kann.

Es kann nun dieser Ausdruck in die Form gebracht werden:

$$-\sqrt{c^2 a^n b^n}\,\partial\left[\frac{1}{\Delta a^n b^n}\partial\sqrt{\frac{a^n b^n}{c^2}}\right] - \frac{1}{4\Delta}\left[\partial\log\frac{a^n}{b^n}\right]^2$$

Oder er wird angegeben, wenn wir für $a^n b^n$: $b^n a^n$ oder c^n statt a^n setzen.

Nehmen wir zunächst:

$$D' + \partial\left[\frac{1}{\Delta}\partial\log c\right] + \frac{1}{\Delta}(\partial\log c)^2 = \frac{1}{\Delta}\partial\log a^n\,\partial\log b^n - \frac{1}{2}\partial\left[\frac{1}{\Delta}\partial\log a^n b^n\right]$$
$$+ \partial\left[\frac{1}{\Delta}\partial\log c\right] + \frac{1}{\Delta}(\partial\log c)^2 =$$
$$\frac{1}{\Delta}\partial\log a^n\,\partial\log b^n - \partial\left[\frac{1}{\Delta}\partial\log b^{n+1}\right] + \partial\left[\frac{1}{\Delta}\partial\log c\right] + \frac{1}{\Delta}(\partial\log c)^2 =$$
$$\frac{1}{\Delta}\partial\log a^n\,\partial\log b^n - \partial\frac{1}{\Delta}\cdot\partial\log b^{n+1} - \frac{1}{\Delta}\partial^2\log b^{n+1} + \partial\frac{1}{\Delta}\partial\log c$$
$$+ \frac{1}{\Delta}\partial^2\log c - \frac{1}{\Delta}(\partial\log c)^2.$$

Gehen wir jetzt zu dem anderen Ausdrucke, so können wir dann schreiben, da $a^n b^n = b^{n+1}$

$$-c\,b^{n+1}\partial\left[\frac{1}{\Delta b^{2(n+1)}}\partial\frac{b^{n+1}}{c}\right] - \frac{1}{4\Delta}\left[\partial\log\frac{a^n}{b^n}\right]^2.$$

Mithin ist:

$$-e\,b^{n+1}\left[\partial\left[\frac{1}{\Delta b^{(n+1)^2}}\,\partial\,\frac{b^{n+1}}{e}\right]\right] = -e\,b^{n+1}\left[\frac{-2\Delta\,\partial b^{n+1} + b^{n+1}\,\partial\Delta}{\Delta^2 b^{(n+1)^3}}\,\frac{\partial b^{n+1}}{e}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\Delta b^{(n+1)^2}}\left[\partial^2\frac{b^{n+1}}{e}\right]\right] \text{ Aber.}$$

$$\partial\left[\frac{b^{n+1}}{e}\right] = \frac{e\,\partial b^{n+1} - b^{n+1}\partial e}{e^2}$$

$$\partial^2\left[\frac{b^{n+1}}{e}\right] = \frac{e\left[e\,\partial^2 b^{n+1} - b^{n+1}\partial^2 e\right] - 2\partial e\left[e\,\partial b^{n+1} - b^{n+1}\partial e\right]}{e^3}$$

Also wird die Summe:

$$-e\,b^{n+1}\left[\frac{\left(-2\Delta\,\partial b^{n+1} - \partial\Delta . b^{n+1}\right)\left(e\,\partial b^{n+1} - b^{n+1}\partial e\right)}{\Delta^2 e^2 b^{(n+1)^3}} + \frac{1}{\Delta b^{(n+1)^2} e^3}\left(e^2\partial^2 b^{n+1} - e\,b^{n+1}\partial^2 e - 2e\,\partial e\,\partial b^{n+1} + 2b^{n+1}(\partial e)^2\right)\right] =$$

$$-\frac{1}{\Delta b^{n+1} e}\left[\frac{\left(-2\Delta\,\partial b^{n+1} - b^{n+1}\partial\Delta\right)\left(e\,\partial b^{n+1} - b^{n+1}\partial e\right)}{\Delta b^{n+1}} + \frac{1}{e}\left(e^2\partial^2 b^{n+1} - e\,b^{n+1}\partial^2 e - 2e\,\partial e\,\partial b^{n+1} + 2b^{n+1}(\partial e)^2\right)\right] =$$

$$-\frac{1}{\Delta b^{n+1} e}\left[-\frac{2e\left(\partial b^{n+1}\right)^2}{b^{n+1}} - \frac{e\,\partial\Delta\,\partial b^{n+1}}{\Delta} + \frac{b^{n+1}\partial\Delta\,\partial e}{\Delta} + e\,\partial^2 b^{n+1} - b^{n+1}\partial^2 e + 2b^{n+1}\frac{(\partial e)^2}{e}\right] =$$

$$-\left[-\frac{2\left[\partial\left(\log b^{n+1}\right)\right]^2}{\Delta} + \partial\frac{1}{\Delta}.\partial\log b^{n+1} - \partial\frac{1}{\Delta}\,\partial\log e + \frac{\partial^2 b^{n+1}}{b^{n+1}\Delta} - \frac{\partial^2 e}{\Delta e} + \frac{2\left(\partial\log e\right)^2}{\Delta}\right].$$

Nun ist aber:

$$\frac{\partial^2 b^{n+1}}{b^{n+1}\Delta} - \frac{\left(\partial\left(\log b^{n+1}\right)\right)^2}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\,\partial^2\log b^{n+1} \text{ und ebenso:}$$

$$-\frac{\partial^2 e}{e\Delta} + \frac{\left(\partial\log e\right)^2}{\Delta} = -\frac{1}{\Delta}\,\partial^2\log e \text{ also}$$

$$-\left[\frac{1}{\Delta}\,\partial^2\log b^{n+1} - \frac{1}{\Delta}\,\partial^2\log e - \frac{\left(\partial\log b^{n+1}\right)^2}{\Delta} + \frac{\left(\partial\log e\right)^2}{\Delta} + \partial\frac{1}{\Delta}\,\partial\log b^{n+1} - \partial\frac{1}{\Delta}\,\partial\log e\right].$$

Es ist jetzt noch das Glied [illegible] gelassen:

$$-\frac{1}{4\Delta}\left[\partial\log\frac{a^n}{b^n}\right]^2. \text{ [illegible]}$$

$$\frac{\left(\partial\log b^{n+1}\right)^2}{\Delta}, \text{ so ergiebt sich:}$$

$$\frac{\left(\partial\log b^{n+1}\right)^2}{\Delta} - \frac{1}{4\Delta}\left(\partial\log\frac{a^n}{b^n}\right)^2 = \frac{1}{\Delta 4}\left(\left(\partial\log a^n + \partial\log b^n\right)^2 - \left[\partial\log a^n - \partial\log b^n\right]^2\right).$$

$$= \frac{1}{\Delta}\,\partial\log a^n.\partial\log b^n.$$

Setzen wir dies ein, so wird der ganze Ausdruck:

$$\frac{1}{\Delta}\partial\log a^n \cdot \partial\log b^n - \partial\frac{1}{\Delta}\partial\log^{n+1} - \frac{1}{\Delta}\partial^2\log b^{n+1} + \partial\frac{1}{\Delta}\partial\log c + \frac{1}{\Delta}\partial^2\log c - \frac{1}{\Delta}(\partial\log c)^2$$ und

genau derselbe steht auf der andern Seite. Mithin sind in der That die beiden Ausdrücke einander identisch gleich.

Wir erhalten also die drei Formeln:

1) $$-\sqrt{c^2a^nb^n}\,\partial\left[\frac{1}{\Delta a^nb^n}\,\partial\sqrt{\frac{a^nb^n}{c^2}}\right] - \frac{1}{4\Delta}\left(\partial\log\frac{a^n}{b^n}\right)^2$$

2) $$-\sqrt{c^2b^nc^n}\,\partial\left[\frac{1}{\Delta b^nc^n}\,\partial\sqrt{\frac{b^nc^n}{c^2}}\right] - \frac{1}{4\Delta}\left[\partial\log\frac{b^n}{c^n}\right]^2$$

3) $$-\sqrt{c^2c^na^n}\,\partial\left[\frac{1}{\Delta a^nc^n}\,\partial\sqrt{\frac{a^nc^n}{c^2}}\right] - \frac{1}{4\Delta}\left[\partial\log\frac{c^n}{a^n}\right]^2.$$

Gegenwärtig müssten noch die Richtigkeit der beiden letzten Formeln nachgewiesen werden. Doch ist klar, dass man sie genau auf dieselbe Weise — vielleicht etwas vereinfacht, da b^nc^n und a^nc^n — keine vollständigen Ausdrücke geben — verfahren kann.

Die dritte Formel kann ganz in die erste übergeführt werden, dass man setzt:

$$c^n a^n = \gamma\, c^{(n-1)2}$$

Ebenso kann man in der zweiten setzen:

$$\sqrt{b^nc^n} = g$$ und dann bleibt alles dasselbe.

Wenn n unendlich wächst, wird die erste Formel, wie unmittelbar klar:

4) $$-c\,M(ac)\,\partial\left[\frac{1}{\Delta M(ab)^2}\,\partial\frac{M(ab)}{c}\right]$$ da

$$a_\infty^n = b_\infty^n = M(ab)$$

Die zweite aber die dritte verlangt aber für $n = \infty$:

5) $-e\,M(ac)\,\partial\left[\frac{1}{\Delta M(ac)^2}\,\partial\,\frac{M(ac)}{e}\right]$

darin ist nun noch $\partial\frac{\eta_a}{\chi^n} = \frac{\eta_c}{\chi^n} = M(ac)$. Setzen wir dort ein, so folgt die Richtigkeit unmittelbar.

Die besonderen Werthe von e, nämlich

$1)\ e = a,\ 2)\ e = b\ \ 3)\ e = c$ gehen die Formeln über in:

$6)\ \Delta b^2c^2 \qquad 7)\ -\Delta c^2a^2 \qquad 8)\ \Delta a^2b^2$

Wir wollen die Richtigkeit direkt noch zu machen, indem wir zeigen, daß z. B. für $e = a$ wird:

$D' + \partial\left[\frac{1}{\Delta}\partial\log e\right] + \frac{1}{\Delta}(\partial\log e)^2 = +\Delta b^2c^2$ da $a = e$, können wir schreiben:

$$\frac{1}{\Delta}\partial\log e.\partial\log b - \frac{1}{2}\partial\frac{1}{\Delta}\partial\log b + \partial\frac{1}{\Delta}\partial\log e + \frac{1}{\Delta}(\partial\log e)^2 =$$

$$-\frac{1}{\Delta}\partial\log e.\partial\log\frac{e}{b} + \frac{1}{2}\partial\frac{1}{\Delta}\partial\frac{e}{b} \quad \text{da}$$

$$-\frac{1}{2}\partial\frac{1}{\Delta}\partial\log b + \partial\frac{1}{\Delta}\partial\log e = +\frac{1}{2}\partial\frac{1}{\Delta}\partial\frac{e}{b}.$$

Aber $\partial\frac{e}{b} = e^2\Delta$ also:

$-c^2\partial\log e + \frac{1}{2}\partial c^2$ und dies soll sein $= \Delta b^2c^2$

$$-c^2\partial\log e + \frac{1}{2}\partial(c^2-b^2) = -b^2\partial\log e - b\,\partial b$$

$$-(c^2-b^2)\frac{\partial e}{e} + e\,\partial e - b\,\partial b = b^2\frac{\partial e}{e} - b\,\partial b$$

$$0 = 0$$ d. h. die Formel ist an der Stelle richtig.

Auf genau dieselbe Weise ließe sich die Richtigkeit der beiden anderen Formeln nachweisen.

Setzt man nun:

$$\sqrt{\frac{a}{M(ac)}} = p;\quad \sqrt{\frac{b}{M(ac)}} = q;\quad \sqrt{\frac{c}{M(ab)}} = r;\quad -\pi\,\frac{M(ab)}{M(ac)} = \log y$$

so lassen sich mittelst nachstehender Formeln ableiten:

9) $\frac{\Delta}{2} M(ab)^2 = \frac{1}{4}\,\partial \log y.$

Denn man hat nemlich:

$$\Delta = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{M(ab)M(ac)}\,\partial.\log\frac{M(ac)}{M(ab)} = -\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{M(ab)M(ab)}\,\partial\log\frac{M(ab)}{M(ac)}$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{M(ab)^2}\,\partial\,\frac{M(ab)}{M(ac)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{M(ab)^2}\,\partial.\log y. \quad \text{Also:}$$

$$\frac{\Delta}{2} M(ab)^2 = \frac{1}{4}\,\partial \log y.\ \text{q. e. d.}$$

10) $\frac{\Delta}{2} M(ab)^2 = \frac{1}{p^4}\,\partial.\log\frac{r}{q}.$

Denn man hat nemlich:

$$\partial\log\frac{r}{q} = \frac{1}{2}\partial\log\frac{c}{b} = \frac{1}{2}a^2\Delta$$

$$p^4 = \frac{a^2}{M(ab)^2}\ \text{also:}$$

$$\frac{1}{p^4}\,\partial\log\frac{r}{q} = \frac{\Delta}{2} M(ab)^2\ \text{q. e. d.}$$

11) $\frac{\Delta}{2} M(ab)^2 = \frac{1}{q^4}\,\partial\log\frac{r}{p}$ denn:

$$\partial\log\frac{r}{p} = \frac{1}{2}\partial\log\frac{c}{a} = \frac{1}{2}b^2\Delta.$$

$$\frac{1}{q^4}\,\partial.\log\frac{r}{p} = \frac{\Delta}{2} M(ac)^2\ \text{q. e. d.}$$

12) $\frac{\Delta}{2} M(ab)^2 = \frac{1}{r^4}\,\partial\log\frac{p}{q}.$ denn:

$$\partial.\log\frac{p}{q} = \frac{1}{2}\partial.\log\frac{a}{b}$$

$$\frac{1}{r^4}\,\partial\log\frac{p}{q} = \frac{\Delta}{2} M(ab)^2\ \text{q. e. d.}$$

Setzen wir ausserdem:

$$\sqrt{\frac{a}{M(ac)}} = p';\quad \sqrt{\frac{b}{M(ac)}} = q';\quad \sqrt{\frac{c}{M(ac)}} = r';\ -\pi\sqrt{\frac{M(ac)^2}{M(ab)^2}} = \log y'\text{''}$$

so wird:

13) $-\frac{\Delta}{2} M(ac)^2 = \frac{1}{r}\, \partial \log q'$

14) $-\frac{\Delta}{2} M(ac)^2 = -\frac{1}{p'^4}\, \partial \log \frac{r}{q}$

15) $-\frac{\Delta}{2} M(ac)^2 = -\frac{1}{q'^4}\, \partial \log \frac{r}{p}$.

16) $-\frac{\Delta}{2} M(ac)^2 = -\frac{1}{r'^4}\, \partial \log \frac{p}{q}$.

Ferner finden aber folgende Formeln Statt:

17) $\frac{\Delta}{2} M(ab)^2 = -\frac{p^2}{q^4 r^4}\, \partial\left[\frac{1}{\partial \log q}\, \partial \frac{1}{p^2}\right]$

Denn man hat, es ist:

$$\partial\left[\frac{1}{\partial \log q}\, \partial \frac{1}{p^2}\right] = \frac{1}{2}\, \partial\left[\frac{1}{\Delta M(ab)^2}\, \partial \frac{M(ab)}{a}\right]$$

Vergleicht man aber diese Gl. mit Gl. 7. und denkt man sich in dieser $c = a$ gesetzt, so erhält man:

$$\frac{1}{2}\, \partial\left[\frac{1}{\Delta M(ab)^2}\, \partial \frac{M(ab)}{a}\right] = \frac{\Delta\, b^2 c^2}{2\, a M(ab)}$$

Also:

$$-\frac{p^2}{q^4 r^4}\, \partial\left[\frac{1}{\partial \log q}\, \partial \frac{1}{p^2}\right] = \frac{a\, \Delta . b^2 c^2 . M(ab)\, M(ab)^2}{2 b^2 c^2\, a M(ab)\, M(ab)} = \frac{\Delta}{2} M(ab)^2 \text{ q.e.d.}$$

Ebenso:

18) $\frac{\Delta}{2} M(ac)^2 = \frac{q^2}{r^4 p^4}\, \partial\left[\frac{1}{\partial \log q}\, \partial \frac{1}{q^2}\right]$

Auch diese Formel folgt aus Gl. 7. Denkt man sich in ihr $c = b$ gesetzt, so erhält man:

$$\partial\left[\frac{1}{\partial \log q}\, \partial \frac{1}{q^2}\right] = + \frac{1}{2}\, \frac{\Delta c^2 a^2}{b M(ac)} \text{ woraus:}$$

$$\frac{q^2}{r^4 p^4}\, \partial\left[\frac{1}{\partial \log q}\, \partial \frac{1}{q^2}\right] = \frac{\Delta}{2} M(ac)^2.$$

Ebenso folgt auch Gl. 5. indem man sich in ihr $e = c$

Gesetzt werde:

$$19)\ \frac{\Delta}{2} M(ab)^2 = \frac{r^2}{p^4 q^4}\, \partial\left[\frac{1}{\partial \log y}\, \partial \frac{1}{r^2}\right]$$

Ebenso ergibt sich für $-\frac{\Delta}{2} M(ac)^2$:

$$20)\ -\frac{\Delta}{2} M(ac)^2 = -\frac{p'^2}{q'^4 r'^4}\, \partial\left[\frac{1}{\partial \log y}\, \partial \frac{1}{p'^2}\right]$$

$$21)\ -\frac{\Delta}{2} M(ac)^2 = +\frac{q'^2}{p'^4 r'^4}\left[\partial\left[\frac{1}{\partial \log y}\, \partial \frac{1}{q'^2}\right]\right]$$

$$22)\ = -\frac{\Delta}{2} M(ac)^2 = +\frac{r'^2}{p'^4 q'^4}\left[\partial \frac{1}{\partial \log y}\, \partial \frac{1}{r'^2}\right]$$ mit Kreis.

Die Elimination von q zwischen den Größen p, q, r ergibt die Gl.

$$\left\{\frac{1}{p^4}\frac{1}{\partial \log y}\, \partial \log\left[\frac{16}{p^6}\frac{1}{\partial \log y}\, \partial\left[\frac{1}{\partial \log y}\, \partial \frac{1}{p^2}\right]\right]\right\}^2 - \frac{16}{p^6}\frac{1}{\partial \log y}\, \partial\left[\frac{1}{\partial \log y}\, \partial \frac{1}{p^2}\right] - 1 = 0$$

die jedenfalls für p allein q u. r gilt.

Denn werden ihre Richtigkeit, wenn sie für p nachgewiesen, es ist klar, daß sie dann auch für q u. r gelten werden.

Nach Gl. 17. ist:

$$\partial\left[\frac{1}{\partial \log y}\, \partial \frac{1}{p^2}\right] = -\frac{\Delta}{2}\, \frac{q^4 \cdot r^4}{p^2}\, M(ab)^2 = -\frac{1}{4}\, \partial \log y\, \frac{q^4 \cdot r^4}{p^2}.$$

Also:

$$\partial . \log\left[\frac{16}{p^6}\frac{1}{\partial \log y}\, \partial\left[\frac{1}{\partial \log y}\, \partial \frac{1}{p^2}\right]\right] = 4\, \partial . \log \frac{q . r}{p^2}.$$

Daraus werden die Gleichungen erhalten, welche erst leicht anzugeben ist:

$$\frac{4}{p^4}\, \frac{1}{\partial \log y}\, \partial \log \frac{q r}{p^2} \text{ ebenso}$$

$$\frac{q . r}{p^2} = \sqrt{\frac{b . c}{a}} \text{ oder:}$$

$$\partial \log \frac{q r}{p^2} = \frac{1}{2}\, \partial \log \frac{b c}{a}.$$

Aber:

$$\partial \log \frac{bc}{a} = \partial \log \frac{c}{a} - \partial \log \frac{a}{b} = b^2\Delta - c^2\Delta.$$

Oder:

$$\frac{8}{p^4}\cdot 2\,\frac{1}{\partial \log y}\,\partial \log \frac{qr}{p^2} = \frac{2}{p^4\,\partial \log y}\left[b^2\Delta - c^2\Delta\right] = \frac{2\,M(ab)^2}{a^2\cdot 2\Delta\, M(ab)^2}\left[b^2\Delta - c^2\Delta\right] =$$

$$\frac{b^2-c^2}{a^2}.$$

Das zweite Glied der Gl. war:

$$+\,4\,\frac{b^2c^2}{a^4}.$$ Setzen wir dieses ein, so wird die

Gleichung:

$$\left[\frac{b^2-c^2}{a^2}\right]^2 + \frac{4b^2c^2}{a^4} - 1 = 0 \text{ oder}$$

$$\left[b^2+c^2\right]^2 - a^4 = 0$$

$$a^4 = \left[b^2+c^2\right]^2 = a^4 \text{ q.e.d.}$$

Für q würde sich ergeben:

$$\left[\frac{a^2+c^2}{b^2}\right]^2 - \frac{4a^2c^2}{b^4} - 1 = 0 \text{ d.h.}$$

$$\left[a^2-c^2\right]^2 = b^4 \text{ und für } r:$$

$$\left[a^2-b^2\right]^2 = c^4.$$

Damit fanden wir, dass die Gleichung:

$$\left\{\frac{1}{p^4}\,\frac{1}{\partial \log y}\,\partial \log\left[\frac{16}{p^6}\,\frac{1}{\partial \log y}\,\partial\left[\frac{1}{\partial \log y}\,\partial \frac{1}{p^2}\right]\right]\right\}^2 - \frac{16}{p^6}\,\frac{1}{\partial \log y}\,\partial\left[\frac{1}{\partial \log y}\,\partial \frac{1}{p^2}\right] - 1 = 0$$

die zusammenkommenden Integrale hat:

$$\sqrt[4]{\frac{a}{M(ab)}}\quad \sqrt[4]{\frac{b}{M(ab)}}\quad \sqrt[4]{\frac{c}{M(ab)}}$$ oder wenn wir setzen $\frac{a}{b} = x$.

$$\sqrt[4]{\frac{1}{M(1,\frac{1}{x})}}\quad \sqrt[4]{\frac{1}{M(1,x)}}\quad \sqrt[4]{\frac{\sqrt{x^2-1}}{M(1x)}}.$$

Ferner ist klar, dass man nach eine der Gl. 19. 20. 21 zu zwei der Größen $p' q' r'$ eliminieren, gewiss dritten Grades Gl. erhalten, wie dass q' zu ihr gehört. Es genügt derselben unter dieser Voraussetzung also $\sqrt{\frac{a}{M(ac)}}$ $\sqrt{\frac{b}{M(ac)}}$ $\sqrt{\frac{c}{M(ac)}}$. —

§ 16.

Wir hatten gesehen:

$$-\pi \frac{M(ab)}{M(ac)} = \log y.$$

Daraus folgt, dass der Grenzwerth von

$$\frac{1}{2} y^{-2^{n-2}} \sqrt{\frac{c^n}{M(a^n b^n)}}$$ für ein immer wachsendes

n sich der Einheit nähert.

Wir haben nämlich einerseits

$$\pi \frac{M(ab)}{M(ac)} = \log \frac{1}{y} \text{ oder}$$

$$\frac{\pi}{2} \frac{M(ab)}{M(ac)} = \log\left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{2}}$$ Andrerseits kennen wir

aber:

$$\frac{\pi}{2} \frac{M(ab)}{M(ac)} = \frac{1}{2^m} \log 4 \frac{a^m}{c^m} = \log\left(4 \frac{a^m}{c^m}\right)^{\frac{1}{2^m}}_{m=\infty}$$ Also:

$$\left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(4 \frac{a^m}{c^m}\right)^{\frac{1}{2^m}}$$ Also:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{2}} = \text{---}$$ oder vielmehr

$$\frac{1}{2} y^{-2^{m-2}} = \left(\frac{a^m}{c^m}\right)^{\frac{1}{2}}$$ wird also in der Grenze

$$\lim \frac{1}{2} y^{-2^{m-2}} \sqrt{\frac{c^m}{M(a^m b^m)}} = \left(\frac{a^m}{c^m}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c^m}{a^m}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 \text{ q.e.d.}$$

Bezeichnet man nun mit $r(y)$ die Größe $\sqrt{\frac{c}{M(ab)}}$

" $r(y^4)$ " " $\sqrt{\frac{c^{(2)}}{M(ac)}}$

Allgemein wird:

$$r\left(y^{2^{2n}}\right) = \sqrt{\frac{c^{2n+2}}{M(ab)}}$$

so folgt:

1) $p(y) = 1 + r(y^4) + r(y^{16}) + r(y^{64}) + \dots\ r\left(y^{2^{2n}}\right)$

2) $q(y) = 1 - r(y^4) + r(y^{16}) + r(y^{64}) + \dots + r\left(y^{2^{2n}}\right)$

3) $r(y)^4 = p(y)^4 - q(y^4)$ wenn:

$$p(y) = \sqrt{\frac{a}{M(ab)}},\quad q(y) = \sqrt{\frac{b}{M(ab)}} \text{ gesetzt wird.}$$

In der That setzt man die Werthe für die r etc. ein, so wird

$$p(y) = \sqrt{\frac{a}{M(ab)}} = 1 + \sqrt{\frac{c^2}{M(ac)}} + \sqrt{\frac{c^4}{M(ab)}} + \sqrt{\frac{c^6}{M(ab)}} + \dots\ \sqrt{\frac{c^{2n}}{M(ab)}}$$

Oder:

$$\sqrt{M(ab)} = \sqrt{a} - \sqrt{c^{(2)}} - \sqrt{c^{(4)}} - \sqrt{c^{(6)}} - \dots$$

und das ist gerade die Reihenentwickelung, die wir in § 12 für $\sqrt{M(ab)}$ fanden.

Ebenso leicht ergiebt sich die zweite Summenformel. Wir kamen dabei auf das Resultat:

$$\sqrt{M(ab)} = \sqrt{b} + \sqrt{c^{(2)}} + \sqrt{c^{(4)}} + \dots$$

Daß endlich die dritte richtig sei, ist klar, denn es ist ja

$$\underline{a^2 = b^2 + c^2}$$

Diese p q und r sind aber nun nichts, als Thetafkt. mit einer Variabelen für den Nullwerth des Arguments.

In der That setzen wir die Reihen an:

$$p(q) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots \quad + 2q^{n^2} + \dots$$
$$q(q) = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 \dots \quad \pm 2q^{n^2}$$
$$r(q) = 2q^{\frac{1}{4}} + 2q^{\frac{9}{4}} + 2q^{\frac{25}{4}} + 2q^{\frac{49}{4}} + \dots$$

so werden dadurch alle Bedingungen erfüllt.

Bemerk.

Wie die Sache zeigt ist:

$$\left.\begin{aligned} p(q) &= \vartheta_3(0) \\ q(q) &= \vartheta_0(0) \\ r(q) &= \vartheta_2(0) \end{aligned}\right\} \text{ für den Modul } \frac{M(ab)}{M(ac)} \text{ i.}$$

Nun ist aber allgemein:

$$(\vartheta_2(0))^4 = (\vartheta_3(0))^4 - (\vartheta_0(0))^4 \text{ u.s.}$$

$$r(q)^4 = p(q)^4 - q(q)^4 \text{ u.s. voraus}$$

$$(\sqrt{c})^4 = (\sqrt{a})^4 - (\sqrt{b})^4 \text{ muss sein:}$$

$$\left.\begin{aligned} r(q) &= c.\ \sqrt{c}. \\ p(q) &= c.\ \sqrt{a}. \\ q(q) &= c\ \sqrt{b} \end{aligned}\right\}$$

Es bleibt zu zeigen übrig, dass diese Constante gleich $\frac{1}{\sqrt{M(ab)}}$ oder indem wir sie unter das Wurzelzeichen nehmen gleich $\frac{1}{M(ab)}$.

Dieses wollen wir dadurch thun, dass wir zeigen, dass die $p\ q\ r$ oder wie wir sie [illegible] $\vartheta_3\ \vartheta_0\ \vartheta_2$ der Diffgl. genügen:

$$\frac{1}{p^4}\,\partial \log \frac{r}{q} = \frac{1}{q^4}\,\partial \log \frac{r}{p} \dots [illegible]$$

Es war: $\vartheta_3 = \sqrt{\frac{\Omega}{2\pi}}$ wo

$$\Omega = 4\int_0^1 \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1-\kappa^2 z^2)}}$$

$$\sqrt{\kappa} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3} = \dots$$

$$\Omega = 4\int_0^1 \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)\left(1-\left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\right)^2 z^2\right)}}$$

$$z = \cos\varphi$$

$$\Omega = -4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-\kappa^2\cos^2\varphi}} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-\kappa^2\cos^2\varphi}} = 2\int_0^{\pi} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-\kappa^2\cos^2\varphi}}$$

Nun kennt man aber:

$$\int_0^{\pi} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-\kappa^2\cos^2\varphi}} = \frac{\pi}{M(1,\sqrt{1-\kappa^2})}$$ also:

$$2\int_0^{\pi} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-\kappa^2\cos^2\varphi}} = \frac{2\pi}{M(1,\sqrt{1-\kappa^2})}$$ also:

$$\vartheta_3 = \sqrt{\frac{1}{M(1,\sqrt{1-\kappa^2})}}$$ Ähnlich:

$$\vartheta_0 = \sqrt{\frac{\kappa_1}{M(1,\sqrt{1-\kappa^2})}}$$

$$\vartheta_2 = \sqrt{\frac{\kappa}{M(1,\sqrt{1-\kappa^2})}}$$

Nun können wir zunächst den Satz bew. d. Relation soll:

$$\frac{1}{\vartheta_3^4}\partial\log\frac{\vartheta_2}{\vartheta_0} = \frac{1}{\vartheta_0^4}\partial\log\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}$$ denn

$$\vartheta_3 = \sqrt{\frac{\Omega}{2\pi}} \quad \vartheta_2 = \sqrt{\frac{\Omega\kappa}{2\pi}} \quad \vartheta_0 = \sqrt{\frac{\Omega\kappa_1}{2\pi}}$$ also:

$$\kappa_1^2\,\partial\log\sqrt{\frac{\kappa}{\kappa_1}} = \partial\log\kappa$$

$$\kappa_1^2\,\partial\log\frac{\kappa^2}{\kappa_1^2} = \partial\log\kappa^2.$$

$$-2\kappa\partial\kappa + 2\kappa\partial\kappa = 0. \quad \text{q.e.d.}$$

Ebenso:

$$\frac{1}{\vartheta_3^4}\,\partial\log\frac{\vartheta_3}{\vartheta_0} = \frac{1}{\vartheta_2^4}\,\partial\log\frac{\vartheta_3}{\vartheta_0}$$

Ebenso, wenn man den Modul durch τ bezeichnet:

$$+\frac{i\pi}{4}\,\partial\tau = \frac{1}{\vartheta_3^4}\,\partial\log\frac{\vartheta_2}{\vartheta_0}$$

(siehe Brauns weiter unten). Die Richtigkeit dieser Formel nachzuweisen, ist mir nicht gelungen, doch muss sie wohl richtig sein.

Wenden wir die letzte Formel auf unseren Fall an, so ergiebt sich:

$$\frac{1}{4}\,\partial\log\eta = \cancel{\left[\frac{1}{p^4}\,\partial\log\frac{r}{q}\right]} = \frac{1}{\vartheta_3^4}\,\partial\log\frac{\vartheta_2}{\vartheta_0} = \frac{1}{\vartheta_2^4}\,\partial\log\frac{\vartheta_3}{\vartheta_0}$$

$$= \frac{1}{\vartheta_0^4}\,\partial\log\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}$$ ~~oder auch~~ Oder:

$$\frac{1}{4}\,\partial\log\eta = \frac{1}{p^4}\,\partial\log\frac{r}{q} = \frac{1}{q^4}\,\partial\log\frac{r}{p} = \frac{1}{r^4}\,\partial\log\frac{p}{q}$$

Hieraus folgt aber:

$\vartheta_3 = p,\ \vartheta_0 = q;\ \vartheta_2 = r$; wo die ϑ dann dieselben Bedeutungen wie die q zeigen.

Also $k = \frac{c^2}{a}$ ist also in der That:

$$\vartheta_3 = \sqrt{\frac{a}{M(ab)}};\quad \vartheta_0 = \sqrt{\frac{b}{M(ab)}};\quad \vartheta_2 = \sqrt{\frac{c}{M(ab)}};\ \text{q. e. d.}$$

Der Modul ist dabei $\frac{M(ab)}{M(ac)}\,i$.

Ähnlich ergiebt sich dann:

$$\vartheta_3 = \sqrt{\frac{a}{M(ac)}}\quad \vartheta_0 = \sqrt{\frac{b}{M(ac)}}\quad \vartheta_2 = \sqrt{\frac{c}{M(ac)}}$$

für den Modul $\frac{M(ac)}{M(ab)}\,i$.

Die Formel:

$$+\frac{i\pi}{4}\,\partial\tau = \frac{1}{\vartheta_3^4}\,\partial\log\frac{\vartheta_2}{\vartheta_0}$$ ist auch leicht als richtig zu zeigen.

Lemma

Es ist: $\tau = \frac{2\Omega'}{\Omega \cdot i}$

$$\Omega' = 2i\int_0^1 \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}} = \frac{\pi \cdot i}{M(1,\sqrt{1-k'^2})}$$

$$\Omega = \frac{2\pi}{M(1,\sqrt{1-k^2})} \qquad \text{also:} \qquad k'^2+k^2=1$$

$$\tau = \frac{i \cdot M(1,\sqrt{1-k^2})}{M(1,\sqrt{1-k'^2})}$$

Also würde die Formel:

$$-\frac{\pi}{4}\,\partial\,\frac{M(1,\sqrt{1-k^2})}{M(1,\sqrt{1-k'^2})} = \frac{1}{\vartheta_3^4}\,\partial\log\frac{\vartheta_2}{\vartheta_0}$$

Aber:

$$\vartheta_3 = \sqrt{\frac{1}{M(1,\sqrt{1-k^2})}}$$

$$\vartheta_2 = \sqrt{\frac{k}{M(1,\sqrt{1-k^2})}}$$

$$\vartheta_0 = \sqrt{\frac{k'}{M(1,\sqrt{1-k^2})}}$$

Setzt man $k = \frac{c'}{a'}$, so geht, wie nach leichter Rechnung zu sehen ist, die Formel über:

$$-\frac{\pi}{4}\,\partial\,\frac{M(a'b')}{M(a'c')} = \frac{M(a'b')^2}{a'^2}\,\partial\log\frac{c'}{b'}, \text{ wenn}$$

$a'^2 - c'^2 = b'^2$ gesetzt wird.

Daß diese aber richtig ist, haben wir bei früherer Gelegenheit gezeigt, nur standen da an Stelle von $a'\,b'\,c'$: $a\;b\;c$ das waren doch Größen, die dieselben Relationen befolgten wie diese.

Damit ist das Lemma strenge geführt.

Wir wollen einige weitere Resultate daraus herleiten.

Wir haben, daß:

$$p(q) = \vartheta_3(0) = \sqrt{\frac{\Omega}{2\pi}} \text{ war:}$$

Ferner ist:

$$\frac{1}{\operatorname{sn} u} = \frac{2\pi}{\Omega}\left[\frac{1}{\sin\frac{\pi u}{2K}} + \frac{4q}{1-q}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{4q^3}{1-q^3}\sin 3\frac{\pi u}{2K} \dots\right]$$

Setzen wir $u = K$, so wird:

$$1 = \frac{2\pi}{\Omega}\left[1 + \frac{4q}{1-q} - \frac{4q^3}{1-q^3} + \frac{4q^5}{1-q^5} \dots\right] \text{ oder}$$

$$\frac{\Omega}{2\pi} = 1 + 4\left[\frac{q}{1-q} - \frac{q^3}{1-q^3} + \frac{q^5}{1-q^5} \dots\right].$$

Also wird:

$$\frac{a}{M(ab)} = 1 + 4\left[\frac{q}{1-q} - \frac{q^3}{1-q^3} + \frac{q^5}{1-q^5} \dots\right]$$

Ähnlich ergiebt sich, indem wir nur für q $-q$ setzen:

$$\frac{b}{M(ab)} = 1 - 4\left[\frac{q}{1+q} - \frac{q^3}{1+q^3} + \frac{q^5}{1-q^5} \dots\right].$$

Ferner war:

$$r(q) = \vartheta_2(0) = \sqrt{\frac{\Omega k}{2\pi}}. \text{ Aber:}$$

$$\operatorname{cn} u = \frac{\pi}{2kK}\left[\frac{4\sqrt{q}}{1+q}\cos\frac{\pi u}{2K} + 4\frac{\sqrt{q^3}}{1+q^3}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \dots\right]$$

Also:

$$r(q)^2 = \frac{c}{M(ab)} = -4\sqrt{q}\left[\frac{1}{1+q} + \frac{q}{1+q^3} + \frac{q^2}{1+q^5} + \dots\right]$$

(Es könnten diese Reihen noch stärker nach q geordnet werden, doch würde sich dabei kein klares Gesetz ergeben.)

Differenziren wir die Gl. für

$\frac{1}{\operatorname{sn} u}$ nach u und setzen dann $u = 0$ so ergiebt sich nicht Werden, doch man nach Durège pag 236.

$$\frac{a^2}{M(ab)^2} = 1 + 8\left[\frac{q}{1-q} + \frac{2q^2}{1+q^2} + \frac{3q^3}{1-q^3} + \frac{4q^4}{1+q^4} + \dots\right].$$

$$\frac{b^2}{M(ab)^2} = 1 - 8\left[\frac{q}{1+q} + \frac{2q^2}{1+q^2} + \frac{3q^3}{1+q^3} + \dots\right].$$

$$\frac{c^2}{M(ab)^2} = 1 + 8\left[\frac{2q^2}{1-q^2} + \frac{6q^3}{1-q^6} + \frac{10q^5}{1-q^{10}} \dots\right].$$

Führen wir die Entwickelung aus, so wird:

$$\frac{a^2}{M(ab)^2} = 1 + 8\left[q + 3q^2 + 4q^3 + 3q^4 + 6q^5 + 12q^6 + \dots\right]$$

$$\frac{b^2}{M(ab)^2} = 1 - 8\left[q - 3q^2 + 4q^3 - 3q^4 + 6q^5 + 12q^6 + \dots\right].$$

$$\frac{c^2}{M(ab)^2} = 1 + 16\left[q + 4q^3 + 6q^5 + 8q^7 + 13q^9 + \dots\right].$$

Es lassen sich die Größen $p(q)$ $q(q)$ $r(q)$ nun auch in Kettenbrüche und mit ihnen zerlegen man:

$$p(q) = 1 + \cfrac{1}{\frac{1}{q} - \cfrac{\frac{1}{q}}{1 + \cfrac{1}{q^3 - \cfrac{1}{q^3 + \cfrac{1}{q^5 - \cfrac{1}{q^5 \dots}}}}}}$$

$$\varphi(q) = 1 - \cfrac{1}{\frac{1}{q} + \cfrac{\frac{1}{q}}{1 - \cfrac{1}{q^3 + \cfrac{1}{q^3 - \cfrac{1}{q^5 \dots}}}}}$$

Ähnlich ergiebt sich:

$$r(q) = \cfrac{2q^{\frac{1}{4}}}{1 + \cfrac{2q^{\frac{9}{4}}}{2q^{\frac{1}{4}} - 2q^{\frac{9}{4}} + \cfrac{4q^{\frac{26}{4}}}{2q^{\frac{9}{4}} - 2q^{\frac{25}{4}} + \cfrac{4q^{\frac{58}{4}}}{\cdots}}}} =$$

$$\cfrac{2q^{\frac{1}{4}}}{1 + \cfrac{2q^{\frac{9}{4}}}{2 - 2q^{8/4} + \cfrac{4^{\frac{25}{4}}}{2q^{\frac{9}{4}} - 2q^{\frac{25}{4}} + \cfrac{4q^{\frac{58}{4}}}{\cdots}}}}$$

Setzen wir so fort, so wird der Kettenbruch schließlich auch die Form gebrauchen:

$$\cfrac{2q^{\frac{1}{4}}}{1 + \cfrac{q^2}{1 - q^2 + \cfrac{q^4}{1 - q^4 + \cfrac{q^6}{1 - q^6 + \cfrac{q^8}{1 - q^8 + \cfrac{q^{10}}{1 \cdots}}}}}}$$

[illegible] zahlentheoretische Sätze, deren [illegible] mit [illegible] [illegible] soll [illegible] aber nicht [illegible] [illegible] in

Lehrsatz

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] 4 [illegible] [illegible].

Lemma

Es ist nur die [illegible] zu zeigen [illegible].

$$(a^2 + b^2 + a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + a_3^2 + b_3^2) =$$

$$(aa_2+bb_2+a_1a_3-b_1b_3)^2+(ab_2+ba_2+a_1b_3+a_3b_1)^2+(aa_3+bb_3-a_1a_2-b_1b_2)^2$$
$$+(a_2b_1-a_1b_2+a_2b_3-a_3b_1)^2 \text{ q.e.d.}$$

Es ist durch den Lemma nunmehr ganz unmöglich, da ich allgemein zeigen konnte, daß wenn jede Zahl die Summe von vier Quadratzahlen ist.

Zusatz

Ist das Vierfache einer Zahl durch vier ungerade Quadratzahlen darstellbar, wenn sie selbst von der Form $4k+1$, so ist sie durch eine ungerade und drei gerade Quadratzahlen halb so oft darstellbar und umgekehrt. Zu dem Beispiel ist z.B. $4 = 1+1+1+1 = 0+0+0+2^2$. Der Beweis ist aus dem Lemma klar.

Zusatz

Ist das Vierfache einer Zahl von der Form $4k+3$ durch vier ungerade ~~nicht drei gerade~~ Quadratzahlen darstellbar, so ist sie selbst halb so oft durch eine gerade und drei ungerade Quadratzahlen darstellbar und umgekehrt.

Auch hier ist der Lemma klar.

Aus dem früheren folgt unmittelbar, daß:

$$M(p^2q^2) - \frac{M(ab)}{M(ab)} = 1 \text{ ist u.s.w.}$$

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{M(p^2q^2)}{M(p^2r^2)} = -\tfrac{1}{2}\log q.$$

§17. Wenn a b c drei der Gl. $a^2 = b^2 + c^2$ entsprechende Größen sind, so folgt aus dem vorigen Paragraphen, daß gesetzt werden kann:

$$a = M(ab)\,p(y)^2 \quad b = M(ab)(q\,y)^2 \quad c = M(ab)(r\,y)^2$$

wo man p q r als bestimmte Werte der Function annehmen muß:

$$p(y) = \sqrt{\frac{a}{M(ab)}} \quad q(y) = \sqrt{\frac{b}{M(ab)}} \quad r(y) = \sqrt{\frac{c}{M(ab)}}$$

Ebenso folgt daraus, daß

$$\log y = -\pi \frac{M(ab)}{M(ac)}, \text{ wo ja } y \text{ der Gleichung genügt}$$

$$\frac{1}{\pi}\,\partial \log y = \frac{1}{p\,r}\,\partial \log \frac{r}{q} = \dots$$

Vertauscht man b und c, die offenbar ganz dieselbe Rolle spielen, so kann man ebenso gut setzen:

$$a = M(ac)(p\,z)^2 \quad c = M(ac)(q\,z)^2 \quad b = M(ac)(r\,z)^2$$ wobei dann umgekehrt auch folgt:

$$p(z) = \sqrt{\frac{a}{M(ac)}} \quad q(z) = \sqrt{\frac{c}{M(ac)}} \quad r(z) = \sqrt{\frac{b}{M(ac)}}$$ ferner

muß u. w.:

$$\log z = -\frac{M(ac)}{M(ab)}\,\pi \text{ oder:}$$

$$\frac{\log z}{\pi} = \frac{\pi}{\log y}.$$

Hieraus folgt, daß die Fkt.

$$P(t) = 1 + 2e^{-\pi t} + 2e^{-4\pi t} + 2e^{-9\pi t} + \dots \quad 2e^{-n^2\pi t} + \dots$$

$$Q(t) = 1 - 2e^{-\pi t} + 2e^{-4\pi t} - 2e^{-9\pi t} \dots \quad \pm 2e^{-n^2\pi t}$$

$$R(t) = 2e^{-\frac{1}{4}\pi t} + 2e^{-\frac{9}{4}\pi t} + 2e^{-\frac{25}{4}\pi t} \dots \quad + 2e^{-(n+\frac{1}{2})^2\pi t}$$

den Gleichungen genügen:

$$P(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\, P\left(\tfrac{1}{t}\right);\quad Q(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\, R\left(\tfrac{1}{t}\right).\quad R(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\, Q\left(\tfrac{1}{t}\right)$$

In der That, wenn wir voraussetzen können, daß der Modul t der Thetafkt. in die Form gebracht werden kann:

$$t = -\frac{M(ac)}{M(ab)}$$

so ist der Satz von vornherein klar, denn dann ist nach den obigen Gleichungen:

$$P(t) = \sqrt{\frac{a}{M(ab)}} \text{ u. } P\left(\tfrac{1}{t}\right) = \sqrt{\frac{a}{M(ac)}} \text{ also wirklich:}$$

$$P(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\, P\left(\tfrac{1}{t}\right) = \sqrt{\frac{M(ac)}{M(ab)}\,\frac{a}{M(ac)}} \text{ q. e. d.}$$

Ebenso:

$$Q(t) = \sqrt{\frac{b}{M(ab)}}$$

$$Q\left(\tfrac{1}{t}\right) = \sqrt{\frac{c}{M(ac)}} \text{ u. } R\left(\tfrac{1}{t}\right) = \sqrt{\frac{b}{M(ac)}} \text{ also}$$

$$Q(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\, R\left(\tfrac{1}{t}\right) \text{ und ebenso:}$$

$$R(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\, Q\left(\tfrac{1}{t}\right).$$

Daß nun aber t jene Bedeutung haben muß, folgt aus folgenden Betrachtungen ferner:

Setzen wir $\frac{b}{a} = x$, so wird

$$\frac{M(ab)}{M(ac)} = \frac{M(1, x)}{M(1, \sqrt{1-x^2})} = \frac{\frac{1}{M(1, \sqrt{1-x^2})}}{\frac{1}{M(1, x)}}.$$

Setzen wir

$$\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 = x'^2!$$

$$\frac{M(ab)}{M(ac)} = \frac{\frac{1}{M(1, x')}}{\frac{1}{M(1, \sqrt{1-x'^2})}}$$

Nun ist

$$\frac{1}{M(1, \sqrt{1-x'^2})} = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-x'^2 z^2)}}.$$

Setzen wir ferner:

$$z' = \sqrt{\frac{1-x'^2z^2}{x^2}}$$ so geht das Integral über in:

$$i2\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z)^2(1-x^2z^2)}} = \frac{2i}{\pi}\int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} =$$

$$- i\frac{\Omega'}{\pi}.$$

Die Ausdrücke $\frac{1}{M(1,x')}$ und $\frac{1}{M(1,\sqrt{1-x^2})}$ unterscheiden sich, dass für x' : x gesetzt wurde ... der beiden Integrale. Also wird:

$$\frac{1}{M(1,x')} = -\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-x^2z^2)}} = +\frac{\Omega_1}{2\pi}.$$

Hätten wir x' als Modul eingeführt, so würde sich analog ergeben haben:

$$\frac{1}{M(1,x')} = \frac{2i}{\pi}\int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}} = -\frac{i\Omega'}{\pi}$$

$$\frac{1}{M(1,x)} = -\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}} = +\frac{\Omega_1}{2\pi}$$ und

diese beiden Beziehungen wollen wir beibehalten. Dadurch ergiebt sich

$$-\frac{M(a\,b)}{M(a\,c)} = \frac{2i\Omega'}{\Omega} \quad \text{oder}$$

$$\frac{2\Omega'}{\Omega} = \tau$$ also nach der Theorie:

$$s = -i\tau.$$ wie es sein muss

Da können wir Theta fkt. ausdrücken, welche diese Werte ist:

$$\frac{1}{s} = -\frac{1}{i\tau} = \frac{i}{\tau}$$

$$\frac{\Omega_1}{2\pi} = \frac{1}{M(1\,x')} = \frac{2K}{\pi}.$$

$$\frac{2K}{\pi} = \frac{1}{M(1,x')} = F(\tfrac12,\tfrac12,1,x).$$

$$-\frac{i\Omega'}{\pi} = \frac{1}{M(1\,x)} = F(\tfrac12,\tfrac12,1,1-x).$$

$$2K = \pi F(\tfrac12,\tfrac12,1,x).$$

$$\Omega' = 2iK = i\pi F(\tfrac12,\tfrac12,1,1-x).$$

$$\Omega = \frac{2\pi}{M(1,x)} = 2\pi F(\tfrac12 \ldots x).$$

$$\vartheta_3(0,\tau) = \frac{1}{\sqrt{-i\tau}}\,\vartheta_3\left(0,-\frac{1}{\tau}\right)$$

$$\vartheta_0(0,\tau) = \frac{1}{\sqrt{-i\tau}}\,\vartheta_2\left(0,-\frac{1}{\tau}\right)$$

$$\vartheta_2(0,\tau) = \frac{1}{\sqrt{-i\tau}}\,\vartheta_0\left(0,-\frac{1}{\tau}\right).$$

Ferner folgt:

$$P(s) = Q(s+i) = P(s+2i) = Q(s+(2n+1)i) = P(s+2ni).$$

$$Q(s) = P(s+i) = \dots\ P(s+(2n+1)i) = Q(s+2ni)$$

$$R(s) = \sqrt{i}\,R(s+i) = i\,R(s+2i) = i\sqrt{i}\,R(s+3i) = -R(s+4i)$$

Es ist dieses klar, wenn man bedenkt, daß

$$e^{\frac{\pi i}{4}} = \cos 45 + i\sin 45 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}(1+i) = \sqrt{i}\ \text{ist.}$$

Darin sind $\alpha\beta\gamma\delta$ ganze Zahlen, die nur die Null oder die pos. neg. Eins

Zwischen denselben besteht eine Relation der Gleichung:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Setzt man $\dfrac{\alpha s - \beta i}{\gamma + \delta s i} = s'$ oder:

$\dfrac{\delta s' i + \beta i}{\alpha + \gamma s' i} = s$ und unterscheidet folgende Fälle:

1) $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0, \delta = 1$. dann wird:

$s = s'$ und gilt für diesen Fall:

$$P(s) = P(s').\ Q(s) = Q(s').\ R(s) = R(s')$$

2) $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 0, \delta = 1$:

$s = s' + i$:

Also:

$$P(s) = Q(s').\ Q(s) = P(s').\ R(s) = \sqrt{-i}\,R(s').$$

Setzt man ferner

3) $\alpha=1,\ \gamma=1.$
$\beta=0\ \delta=1.$

$$s=\frac{s'}{1-is'}$$

$$P(s)=P\left(\frac{s'}{1-is'}\right)=Q\left(\frac{-i}{1-is'}\right)=Q\left(\frac{1}{i+s'}\right)=\sqrt{i+s'}\ R(i+s')=$$

$$\sqrt{-i(1+is')}\,R(s')\ \text{also:}$$

$$\underline{P(s)=\sqrt{1-is'}\ R(s').}$$

$$Q(s)=Q\left(\frac{s'}{1-is'}\right)=P\left(\frac{1}{i+s'}\right)=\sqrt{i+s'}\ P(i+s')=\sqrt{i+s}\ Q(s')$$

$$\underline{Q(s)=\sqrt{i+s}\ Q(s')}$$

$$R(s)=Q\left(\frac{s'}{1-is'}\right)=\sqrt{-i}\ R\left(\frac{1}{s'+i}\right)=\sqrt{-i(s'+i}\ Q(i+s')=$$

$$\underline{R(s)=\sqrt{1-is}\ P(s').}$$

4) $\alpha=0.\ \beta=1.\ \gamma=-1.\ \delta=0.$

$$s=\frac{s'+i}{is'}$$

$$P(s)=P\left(\frac{s'+i}{is'}\right)=Q\left(\frac{i}{is'}\right)=Q\left(\frac{1}{s'}\right)=\sqrt{s'}\ R(s')$$

$$\underline{P(s)=\sqrt{s'}\ R(s')}$$

$$Q(s)=Q\left(\frac{s'+i}{is'}\right)=P\left(\frac{i}{is'}\right)=P\left(\frac{1}{s'}\right)=\sqrt{s'}\ P(s').$$

$$\underline{Q(s)=\sqrt{s'}\ P(s').}$$

$$R(s)=R\left(\frac{s'+i}{is'}\right)=\sqrt{i}\ R\left(\frac{i}{is'}\right)=\sqrt{i}\ R\left(\frac{1}{s'}\right)=\sqrt{is'}\ Q(s').$$

$$\underline{R(s)=\sqrt{is'}\ Q(s')}$$

5) $\alpha = 1.\ \beta = 1.\ \gamma = -1.\ \delta = 0.$

$$t = \frac{i}{1+it'}.$$

$$P(t) = P\left(\frac{i}{1+it'}\right) = P\left(\frac{1}{t'-i}\right) = \sqrt{t'-i}\,P(t'-i) = \sqrt{t'-i}\,R(t')$$

$$\underline{P(t) = \sqrt{t'-i}\,R(t')}$$

$$Q(t) = Q\left(\frac{i}{1+it'}\right) = Q\left(\frac{1}{t'-i}\right) = \sqrt{t'-i}\cdot R(t'-i) = \sqrt{i(t'-i)}\,R(t')$$

$$\underline{Q(t) = \sqrt{i(t'-i)}\,R(t')}$$

$$R(t) = R\left(\frac{i}{1+it'}\right) = R\left(\frac{1}{t'-i}\right) = \sqrt{t'-i}\cdot Q(t'-i) = \sqrt{t'-i}\,P(t')$$

$$\underline{R(t) = \sqrt{t'-i}\,P(t')}$$

6) $\alpha = 0.\ \beta = -1.$
$\gamma = 1.\ \delta = 0.$

$$t = -\frac{1}{t'}.$$

$$\underline{P(t) = \sqrt{t'}\,P(t')}$$

$$\underline{Q(t) = \sqrt{t'}\,R(t')}$$

$$R(t) = \sqrt{t'}\,Q(t').$$

Wie man sieht gehen die einzelnen Größen bei dieser Sub-
stitution [illegible]
[illegible]
Man kann [illegible] Schema [illegible] bringen:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

$$\frac{\alpha t - \beta i}{\delta + \gamma t i} = t'$$

$\alpha =$	1	1	1	0	1	0
$\beta =$	0	1	0	1	1	1
$\gamma =$	0	0	1	1	1	1
$\delta =$	1	1	1	1	0	0

$h\,\mathfrak{P}(t') = \mathfrak{P}(t)\ \ \mathfrak{Q}(t)\ \ \mathfrak{R}(t)\ \ \mathfrak{R}(t)\ \ \mathfrak{Q}(t)\ \ \mathfrak{P}(t)$

$h\,\mathfrak{Q}(t') = \mathfrak{Q}(t)\ \ \mathfrak{P}(t)\ \ \mathfrak{Q}(t)\ \ \mathfrak{P}(t)\ \ \mathfrak{R}(t)\ \ \mathfrak{R}(t)$

$h\,\mathfrak{R}(t') = \mathfrak{R}(t)\ \ \mathfrak{R}(t)\ \ \mathfrak{P}(t)\ \ \mathfrak{Q}(t)\ \ \mathfrak{P}(t)\ \ \mathfrak{Q}(t)$

[illegible]

[illegible]

$$h = \sqrt{i^{n}(\delta + \gamma t i)} \quad \Big| \quad n \text{ unbestimmt}$$

Mit diesem Ansatz [illegible] folgt [illegible] einige neue Größen [illegible]:

Es ist $4a'^2 = (a+b)^2$; $b'^2 = ab$. Man definiert ähnlich:

$$\underline{4a'\alpha' = (\alpha+\beta)^2;\ b\beta = \alpha\beta.}$$ Ferner

$$\underline{a\alpha + b\beta + c\gamma.}$$

Ferner

$$\underline{\delta abd = bc(b\gamma - c\beta)} = \underline{bcb\gamma - b\beta c}c = a^2c\gamma - c^2c\gamma - c^2b\beta =$$

$$\underline{\delta abc = ab^2(\alpha\gamma - c\alpha)} = a^2c\gamma - c^2\alpha a - a^2c\gamma + b^2c\gamma - c^2\alpha a \text{ oder auch}$$

$$\underline{\delta abc = ab(b\alpha - \beta a)}$$

Ebenso werden die entsprechenden Geraden $\alpha^n\beta^n\gamma^n\delta^n$ durch dieselben Gleichungen definiert, wenn man für abc $a^nb^nc^n$ setzt.

Dann folgen die Relationen:

1) $\dfrac{\alpha+\beta}{a+b} = \dfrac{\gamma-\delta}{c}$

In der That, es ist

$$(\alpha+\beta)c = (a+b)(\gamma-\delta) = \frac{1}{c}(a+b)[c\gamma - b\alpha + \alpha\beta] =$$

$$\frac{1}{c}(a+b)[a\alpha - b\beta - b\alpha + a\beta] = \frac{1}{c}[a+b][a(\alpha+\beta) - b(\alpha+\beta)]$$

Also:

$$(\alpha+\beta)c^2 = (a+b)(\alpha+\beta)(a-b)$$

$$\underline{c^2 = a^2 - b^2} \text{ q.e.d.}$$

2) $\dfrac{\alpha-\beta}{a-b} = \dfrac{\gamma+\delta}{c}$ Dieses ist klar, wir kommen bei der Umformung wieder auf die Identität

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

3) $\dfrac{\alpha+\gamma}{a+c} = \dfrac{\beta+\delta}{b}.$

$$(\alpha+\gamma)\, b^2 = [\beta b + (\alpha\gamma - c\alpha)](a+c)$$

$$(\alpha+\gamma)\, b^2 = (\alpha+\gamma)(a-c)(a+c)$$

$$b^2 = a^2 - c^2 \text{ q.e.d.}$$

4) $\dfrac{\alpha-\gamma}{a-c} = \dfrac{\beta-\delta}{b}$ wie klar

5) $\alpha' = \dfrac{1}{a'}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$ aus der ersten [illegible]gleichung.

6) $\alpha' = \dfrac{1}{c'}\left(\dfrac{\gamma-\delta}{2}\right)^2$

Indem Satz 5) kann geschrieben werden:

$$\alpha' = \frac{1}{a'}\left[\frac{(\gamma-\delta)(a+b)}{2c}\right]^2 = \frac{(a+b)^2}{a'c^2}\left[\frac{\gamma-\delta}{2}\right]^2 =$$

$$\frac{2(a+b)^2}{(a+b)(a^2-b^2)}\left[\frac{\gamma-\delta}{2}\right]^2 = \frac{2}{a-b}\left[\frac{\gamma-\delta}{2}\right]^2 = \frac{1}{c'}\left[\frac{\gamma-\delta}{2}\right]^2$$

Ferner

7) $\beta' = \dfrac{1}{c'}\,\alpha\beta.$ aus der [illegible] gl.

8) $\gamma' = \dfrac{1}{c'}\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)^2$

In dem Satz, wo sich γ' befindet, durch:

$$a'\alpha' = b'\beta' + c'\gamma'. \text{ Also:}$$

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 = b'\beta' + c'\gamma'.$$

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 = \alpha\beta + c'\gamma' \text{ d.h.}$$

$$\gamma' = \frac{1}{c'}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 \text{ q.e.d.}$$

9) $\gamma' = \dfrac{1}{a'}\left(\dfrac{\gamma+\delta}{2}\right)^2$ wie klar.

10) $\delta' = \frac{1}{c'}\gamma\delta.$

In der That ist ja:

$$c'\delta' = (a'\gamma' - c'\alpha') = \left(\gamma + \frac{\delta}{2}\right)^2 - \left(\gamma - \frac{\delta}{2}\right)^2 = \gamma\delta.$$

$$\delta' = \frac{1}{c}\gamma\delta.$$

11) $\alpha^2 + \delta^2 = \beta^2 + \gamma^2.$

Indem That, multiplicirt man 8.1 u. 2, kommt:

$$\frac{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}{(a+b)(a-b)} = \frac{(\gamma+\delta)(\gamma-\delta)}{c^2} \text{ u.s.f.}$$

$$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = (\gamma+\delta)(\gamma-\delta).\ q.e.d.$$

12) $\alpha^2 + \delta^2 = \frac{a}{b}(\alpha\beta + \gamma\delta). = \beta^2 + \gamma^2$

In der That:

$$\frac{a}{b}(\alpha\beta+\gamma\delta) = \frac{1}{b}[a\alpha\beta + a\gamma\delta] = \frac{1}{b}[a\alpha\beta + \gamma(b\gamma - c\beta)] = \frac{1}{b}[\beta[a\alpha - c\gamma] + b\gamma^2].$$

$$= \frac{1}{b}[b\beta^2 + b\gamma^2] = \beta^2 + \gamma^2\ q.e.d.$$

13) $\alpha^2 + \delta^2 = \frac{a}{c}[\alpha\gamma - \beta\delta] = \beta^2 + \gamma^2$? In der That ist ja:

$$\frac{a}{c}[\alpha\gamma - \beta\delta] = \frac{1}{c}[a\alpha\gamma - a\beta\delta] = \frac{1}{c}[a\alpha\gamma - \beta[b\gamma - c\beta]] = \frac{1}{c}[\gamma(b\beta + c\gamma] - \beta \ldots]$$

$$= \frac{1}{c}[\gamma[a\alpha - \beta b] + c\beta^2] = \beta^2 + \gamma^2\ q.e.d.$$

14) $\alpha^2 + \delta^2 = a(\alpha' + \gamma').$

In der That, setzt man die Werthe ein, so kommt:

$$a(\alpha'+\gamma') = \frac{a}{a'}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 + \frac{a}{c'}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 = \frac{ac'(\alpha+\beta)^2 + aa'(\alpha-\beta)^2}{2c^2} =$$

$$\frac{a(a-b)(\alpha+\beta)^2 + a(a+b)(\alpha-\beta)^2}{2c^2} = \frac{a^2(\alpha^2+\beta^2) - 2ab.\alpha\beta}{c^2} =$$

$$\frac{a^2(\alpha^2+\beta^2) - 2a\alpha(a\alpha - \gamma c)}{c^2} = \frac{2a\alpha\gamma c - a^2(\alpha^2-\beta^2)}{c^2}.$$

Aber:

$\alpha^2\beta^2 = b^2\alpha^2 + c^2\delta^2 - 2b\alpha c\delta$ also geht die Formel über in:

$\frac{1}{c^2}[b^2\alpha^2 + c^2\delta^2 - 2b\alpha c\delta - a^2\alpha^2 + 2a\alpha\gamma c] =$

$\frac{1}{c^2}[b^2\alpha^2 + c^2\delta^2 - 2b\alpha c\delta - a^2\alpha^2 + 2a\alpha(a\alpha + b\delta)] = \frac{b^2\alpha^2 + c^2\delta^2 - a^2\alpha^2 + 2\alpha^2}{c^2}$

$= \frac{c^2\delta^2 + \alpha^2 c^2}{c^2} = \alpha^2 + \delta^2$ q. e. d.

15) $\alpha^2 - \gamma^2 = \beta^2 - \delta^2 = \frac{b}{c}(\beta\gamma - \alpha\delta)$

In der That, es ist:

$\frac{b}{c}(\beta\gamma - \alpha\delta) = \frac{b\beta\gamma - b\alpha\delta}{c} = \frac{(a\alpha - c\gamma)\gamma - \alpha b\delta}{c} = \frac{\gamma(a\alpha - c\gamma) - \alpha(\alpha c - \gamma a)}{c} =$

$\frac{c(\alpha^2 - \gamma^2)}{c}$ q. e. d.

16) $\alpha^2 - \gamma^2 = \beta^2 - \delta^2 = \frac{b}{a}(\alpha\beta - \gamma\delta)$ denn

$\frac{b}{a}(\alpha\beta - \gamma\delta) = \frac{b\alpha\beta - b\gamma\delta}{a} = \frac{\alpha(a\alpha - c\gamma) - b\gamma\delta}{a} = \frac{\alpha(a\alpha - c\gamma) - \gamma(\alpha c - \gamma a)}{a}$

$= \frac{a(\alpha^2 - \gamma^2)}{a} = \alpha^2 - \delta^2$ q. e. d.

17) $\alpha^2 - \gamma^2 = b(\alpha' - \gamma')$.

$b^2(\alpha' - \gamma') = \frac{b(a - b)(\alpha + \beta)^2 - b(a + b)(\alpha - \beta)^2}{2c^2} = \frac{2a\alpha b\beta - b^2(\alpha^2 + \beta^2)}{c^2}$

$= \frac{-b^2(\alpha^2 - \beta^2) + 2b\beta\gamma c}{c^2} = \frac{-c^2\delta^2 + \beta^2 a^2 - 2c\delta\beta a + 2\beta c(a\delta + c\beta)}{c^2}$

$= \beta^2 - \delta^2$ q. e. d. Simon:

18) $\alpha^2 - \beta^2 = \gamma^2 - \delta^2 = \frac{c}{a}(\alpha\gamma + \beta\delta)$ denn:

$\frac{c}{a}[\alpha\gamma + \beta\delta] = \frac{\alpha c\gamma + \beta\delta c}{a} = \frac{\alpha[a\alpha - b\beta] + \beta\delta c}{a}$

$= \frac{\alpha[a\alpha - b\beta] + \beta[b\alpha - a\beta]}{a} = \alpha^2 - \beta^2$ q. e. d.

19) $\alpha^2-\beta^2=\frac{c}{d}(\beta\gamma+\alpha\delta)$ was genau auf dieselbe Weise zu bemerken ist.

20) $\alpha^2-\beta^2=2c\sqrt{\alpha'\gamma'}$. denn

$$2c\sqrt{\alpha'\gamma'}=\frac{2c(\alpha^2-\beta^2)}{\alpha, c, 2}=\alpha^2-\beta^2 \text{ q. e. d.}$$

Es bleibt sich nun noch ferner, auf die Grenzwerthe der wachsenden Größen schließen.

Bekanntlich war:

$\alpha'a'$ und $\beta'b'$, so waren diese Größen:

$$\alpha'a'=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 \quad \beta'b'=\alpha\beta. \text{ oder}$$

$$\left[\sqrt{\alpha'a'}+\sqrt{\beta'b'}\right]\left[\sqrt{\alpha'a'}-\sqrt{\beta'b'}\right]=\frac{1}{4}(\alpha^2-\beta^2) \text{ d. h.}$$

$$\sqrt{\alpha'a'}>\sqrt{\beta'b'} \text{ oder}$$

$$\alpha'a'>\beta'b'$$

So können wir weiter gehen und finden stets

$$\alpha^n a^n>\beta^n b^n$$

Ferner:

$$a''\alpha''=\left(\frac{\alpha'+\beta'}{2}\right)^2 \text{ aber:}$$

$$\beta'<\frac{a'\alpha'}{b'}$$

$$a''\alpha''<\left[\frac{a'\alpha'}{2b'}+\frac{\alpha'}{2}\right]^2<\frac{\alpha'^2a''^2}{b'^2}<\frac{\alpha'^2a'^2}{b'^2}<\alpha'^2. \text{ Also:}$$

$$a''\alpha''<\alpha'^2.$$

Ebenso ergiebt sich:

$$\beta^n = \frac{1}{b^n}\alpha^{n-1}\beta^{n-1}$$

$$\beta^n > \frac{1}{b^n}\frac{\beta^{n-1}b^{n-1}\beta^{n-1}}{a^{n-1}} > \frac{1}{b^n}(\beta^{n-1})^2 \text{ also:}$$

$$\beta^n b^n > (\beta^{n-1})^2.$$

Nun hatten wir: $\alpha^n a^n > \beta^n b^n > (\beta^{n-1})^2$ oder

$$\underline{\alpha^{n-1} > \beta^{n-1}}$$

Ferner:

~~Es ist $a''' < a''$ also:~~

$$\cancel{\alpha'' < \frac{1}{a'''}\left(\frac{\alpha'+\beta'}{2}\right)^2.}$$

$$\cancel{a'''\alpha'' < \left(\frac{\alpha'+\beta'}{2}\right)^2} \text{ ~~oder~~}$$

$$\cancel{a'''\alpha''' = \left(\frac{\alpha''+\beta''}{2}\right)^2.} \text{ ~~Ferner:~~}$$

$$\cancel{a'''\alpha'' < \frac{\alpha'^2}{4}} \text{ ~~und~~}$$

$$\cancel{\underline{a'''\alpha''' > \frac{\beta'^2}{4}}.} \text{ ~~Also:~~}$$

$$\cancel{\frac{\alpha''}{\alpha'''} < \frac{\alpha'^2}{\beta'^2} < \frac{\beta'^2}{\alpha'^2}} \text{ ~~etc.~~}$$

$$\cancel{\alpha'' < \alpha'''}$$

Am einfachsten wird der Grenzwerth von α^n und β^n gefunden, wenn man die Gl.

$$ab(b\alpha - a\beta) = abc\delta \text{ für } n=\infty \text{ betrachtet}$$

Für diesen Fall wird:

$$(b^n\alpha^n - a^n\beta^n) = c^n\delta^n.$$

Aber $c^n = 0$, $a^n = b^n$. d.h.

$$\underline{\alpha^n = \beta^n}$$

Damit folgt aus $\alpha^2 - \beta^2 = \gamma^2 - \delta^2$ daraus:

$$\gamma^n = \delta^n$$

Es könnte sich aber der Fall ereignen, daß δ^n und also γ^n unendlich würde.

Wir wollen dieses dasselbe Resultat auch anders herleiten.

Es ist

$$-a^n\alpha^n = b^n\beta^n + c^n\gamma^n \text{ und}$$

$$b^n\alpha^n = a^n\beta^n + c^n\delta^n \quad \text{also da } b^n = a^n$$

$$\delta^n = \gamma^n$$

Ferner wird:

$$\frac{\alpha^n - \gamma^n}{a^n - c^n} = \frac{\beta^n - \delta^n}{b^n} \qquad c^n = 0 \quad a^n = b^n \text{ also da auch } \gamma^n = \delta^n$$

$$\alpha^n = \beta^n$$

Wir fanden also:

Es müssen sich die α und β Größen vertauschen, die γ und δ Größen-Quadrate haben ja einen Zeichen.

Dabei ist, wie gezeigt, das entsprechende α gleich einer Größe als das entsprechende β gleich.

Dasselbe gilt von den γ u. δ Größen, wie leicht zu ersehen ist, wenn man sie in die Form bringt:

$$\left.\begin{aligned} 4a'\gamma' &= (\gamma+\delta)^2 \\ b'\delta' &= \gamma\delta. \end{aligned}\right\}$$

Es bleibt dieses Resultat nur richtig, wenn alle Größen gegeben sind, da sie nur negativ als Bedingungen sich die Relationen aufgenommen würden.

Wir wollen jetzt einige neue Größen einführen und setzen:

$k = M(ab) = \lim a^n = \lim b^n$ Nennen wir:

$$\sqrt[4]{q} = e^{-\frac{\pi}{2}\frac{M(ab)}{M(ac)}}$$

Aber $e^{-\frac{\pi}{4}\frac{M(ab)}{M(ac)}} = \lim \sqrt[2^n]{\frac{c^n}{4a^n}}$ also:

$$\sqrt[8]{q} = \lim \sqrt[2^n]{\frac{c^n}{4a^n}}.$$

Es kann dieser nun in ein unendliches Product verwandelt werden.

$$c^n = \frac{(c^{n-1})^2}{4a^n} = \frac{(c^{n-2})^{2^2}}{(4a^n)(4a^{n-1})^2} = \frac{(c^{n-3})^{2^3}}{(4a^n)(4a^{n-1})^2(4a^{n-2})^{2^2}} =$$

$$\frac{c^{2^n}}{4a_n\,(4a^{n-1})^2(4a^{n-2})^{2^2}\cdots(4a')^{2^{n-1}}}$$

Also:

$$\sqrt[2^n]{\frac{c^n}{4a^n}} = \frac{c^2}{4}\sqrt[2]{\frac{1}{(4a')}}\sqrt[2^2]{\frac{1}{(4a'')}}\cdots\sqrt[2^{n-1}]{\frac{1}{4a^{n-1}\,a^n}} =$$

$$\frac{c}{4\cdot a}\,\frac{4\cdot a}{4a'}\sqrt{\frac{4a'}{4a''}}\sqrt[2^2]{\frac{4a''}{4a'''}}\cdots\cdots\sqrt[2^{n-1}]{\frac{4a^{n-1}}{4a^n}}$$ Also:

$$\sqrt[8]{q} = \frac{c}{4a}\cdot\frac{a}{a'}\sqrt{\frac{a'}{a''}}\sqrt[2^2]{\frac{a''}{a'''}}\cdots\cdots\sqrt[2^{n-1}]{\frac{a^{n-1}}{a^n}}.$$

Nennen wir nun eine Größe k' noch die [illegible]:

$$\frac{k'}{k} = \lim \sqrt[2^n]{\frac{\alpha^n}{k}}$$ od. wie bemerken $= \sqrt[2^n]{\frac{\beta^n}{k}}$.

Auch diese Größe läßt sich in ein unendliches Product verwandeln, denn:

$$\frac{\beta^n}{b^n} = \frac{\alpha^{n-1}\cdot\beta^{n-1}}{(b^n)^2} = \frac{\alpha^{n-1}\beta^{n-1}}{a^{n-1}\cdot b^{n-1}}$$ also

$$\frac{\beta^n\cdot(b^{n-1})^2}{b^n} = \frac{\alpha^{n-1}\cdot b^{n-1}}{a^{n-1}\beta^{n-1}}(\beta^{n-1})^2.$$

Also erhalten wir so weiter fortfahren:

$$\frac{\beta^n (b^{n-1})^2 (b^{n-2})^{2^2}}{b^n (b^{n-1})^2} = \frac{\alpha^{n-1} \cdot b^{n-1}}{a^{n-1} \cdot \beta^{n-1}} \left(\frac{(\alpha^{n-2})^2 (b^{n-2})^2}{(a^{n-2})^2 (\beta^{n-2})^2} (\beta^{n-2}) \right)^2$$

$$\frac{\beta^n (b^{n-1})^{2^1} (b^{n-2})^{2^2} (b^{n-3})^{2^3}}{b^n (b^{n-1})^2 (b^{n-2})^{2^3}} = \frac{\alpha^{n-1} b^{n-1}}{a^{n-1}\beta^{n-1}} \frac{(\alpha^{n-2})^2 (b^{n-2})^2}{(a^{n-2})^2(\beta^{n-2})^2} \frac{(b^{n-3})^{2^2} (b^{n-3})^{2^2}}{(a^{n-3})^{2^2}(\beta^{n-3})^{2^2}} (\beta^{n-3})$$

etc.

$$\frac{\beta^n (b^{n-2})^2 \cdots (b)^{2^n}}{b^n (b^{n-1})^2 \cdots (b')^{2^{n-1}}} = \frac{a^{n-1} b^{n-1}}{a^{n-1}\beta^{n-1}} \frac{(\alpha^{n-2})^2 (b^{n-2})^2}{(a^{n-2})^2(\beta^{n-2})^2} \cdots \frac{\alpha^{2^{n-1}} b^{2^{n-1}}}{a^{2^{n-1}} \beta^{2^{n-1}}} \beta$$

Links heben sich je zwei Glieder im Zähler und Nenner fort, und es bleibt nur:

$$\frac{\beta^n b^{2^n}}{b^n} = \frac{\alpha^{n-1} \cdot b^{n-1}}{a^{n-1}\beta^{n-1}} \cdots \frac{\alpha^{2^{n-1}} b^{2^{n-1}}}{a^{2^{n-1}}\beta^{2^{n-1}}}$$

Statt b^n kann κ gesetzt werden. Ziehen wir die 2^nte Wurzel aus, so ergibt sich:

$$\lim \sqrt[2^n]{\frac{\beta^n}{\kappa}} = \frac{\beta}{b} \sqrt[2]{\frac{b \cdot \alpha}{a\beta}} \sqrt[2^2]{\frac{b'\alpha'}{a'\beta'}} \sqrt[2^3]{\frac{b''\alpha''}{a''\beta''}} \sqrt{\cdots} \cdots \sqrt[2^n]{\frac{b^{n-1}\alpha^{n-1}}{a^{n-1}\beta^{n-1}}} = \frac{\kappa'}{\kappa}$$

Nun determiniren wir eine Größe η durch:

$$\frac{\kappa'}{\kappa} \sqrt{\eta}\ \eta^{\pm 1} = \lim \left(\sqrt[2^{n+1}]{\frac{x^n}{\kappa}} \pm \sqrt[2^n]{\frac{\delta^n}{\kappa}} \right)$$

~~oder wenn~~ $\gamma^n = \delta^n$:

$$\frac{\kappa'}{\kappa} \eta^{\frac{1}{2}} \eta = \lim \sqrt[2^n]{\frac{\gamma^n}{\kappa}} = \lim \sqrt[2^n]{\frac{\delta^n}{\kappa}}$$

$\frac{\delta^n}{\kappa} = \frac{\delta^n}{b^n}$ kann werden ähnlich wie $\frac{\beta^n}{\kappa}$ in ein unendliches Produkt zerlegt werden.

$$(b^{n-1})^2 \frac{b^n}{b^2} = \frac{\gamma^{n-1} \cdot b^{n-1}}{a^{n-1}\delta^{n-1}} (\delta^{n-1})^2 \text{ etc.}$$

Es ergiebt sich schließlich:

$$\frac{k'}{r}\, g^{\frac{1}{2}}\eta = \frac{\delta}{b} \sqrt{\frac{b.\gamma}{a.\delta}} \cdot \sqrt[2^2]{\frac{b'\gamma'}{a'\delta'}}\; \sqrt[2^3]{\frac{b''\gamma''}{a''\delta''}} \cdots \sqrt[2^n]{\frac{b^{n-1}\gamma^{n-1}}{a^{n-1}\delta^{n-1}}}$$

Wenn aber alle Größen gegeben sind, so wird daraus die [illegible] der [illegible] gesuchten Größen zu berechnen.

Wenn δ negativ wäre, so kann man nicht auf [illegible] einen Ausdruck haben, aber auch für diesen Fall kann es berechnet werden.

Wenn δ negativ ist, so folgt aus:

$$\sqrt{\frac{-\delta}{\gamma}} = \operatorname{tg} 2u \sqrt{\frac{a}{b}} = \operatorname{tg} v \sqrt{\frac{b}{a}}, \text{ daraus folgt:}$$

$$\sqrt{\frac{-\delta}{\gamma}} = \sqrt{\operatorname{tg} 2u \cdot \operatorname{tg} v}$$ wie klar. Wir setzen diese Größe gleich

$$\sqrt{\frac{-\delta}{\gamma}} = \operatorname{tg} 2u'$$

Daraus folgt:

$$\sqrt{\frac{-\delta'}{\gamma'}} = \operatorname{tg} 2u' \sqrt{\frac{a'}{b'}}$$

In der That, es ist:

$$\operatorname{tg} 2u' = \frac{2\operatorname{tg} 2u'}{1-\operatorname{tg}^2 2u'} = \frac{2\sqrt{\operatorname{tg} 2u \cdot \operatorname{tg} v}}{1-\operatorname{tg} 2u \cdot \operatorname{tg} v} \text{ Also:}$$

$$\operatorname{tg} 2u' \sqrt{\frac{a'}{b'}} = \frac{2\sqrt{\left(\frac{-\delta}{\gamma}\right)}}{1-\left(\frac{-\delta}{\gamma}\right)} \sqrt{\frac{a'}{b'}} = \frac{2\sqrt{(-\delta)\gamma}}{\gamma+\delta} \sqrt{\frac{a'}{b'}}$$

Aber $\sqrt{-\delta\gamma} = \sqrt{(b')(-\delta')}$ also:

$$\operatorname{tg} 2u' \sqrt{\frac{a'}{b'}} = \frac{2\sqrt{b'}\sqrt{(-\delta')}\sqrt{a'}}{\gamma+\delta\ \sqrt{b'}} = 2\frac{\sqrt{(-\delta')}\sqrt{a'}}{\gamma+\delta} = \frac{\sqrt{(-\delta')}}{\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{a'}}}$$

Aber $\dfrac{\sqrt{(-\delta')}}{\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{a'}}} = \dfrac{\sqrt{(-\delta')}}{\sqrt{\gamma'}}$? Also in der That:

$$\sqrt{\frac{-\delta'}{\gamma'}} = \mathrm{tg}\,2\mathfrak{U}'\sqrt{\frac{a'}{b'}}$$

Setzen wir $\mathfrak{U}+v = 2v'$, so kommen wir dieses auf

Schreiben:

$$\sqrt{\frac{-\delta'}{\gamma'}} = \mathrm{tg}\,2\mathfrak{U}'\sqrt{\frac{b'}{a'}}$$

Da der Spiel, ab ist:

$$\mathrm{tg}(\mathfrak{U}+v) = \frac{\mathrm{tg}\,\mathfrak{U}+\mathrm{tg}\,v}{1-\mathrm{tg}\,\mathfrak{U}\cdot\mathrm{tg}\,v}$$

Also:

$$\mathrm{tg}\,2v'\sqrt{\frac{b'}{a'}} = \frac{\mathrm{tg}\,\mathfrak{U}+\mathrm{tg}\,v}{1-\mathrm{tg}\,\mathfrak{U}\cdot\mathrm{tg}\,v}\sqrt{\frac{b'}{a'}} = \frac{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{-\delta}{\gamma}}+\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{\frac{-\delta}{\gamma}}\right)}{1+\frac{\delta}{\gamma}}\sqrt{\frac{b'}{a'}} =$$

$$\frac{\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{b'(-\delta')}+\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{b'(-\delta')}}{\gamma+\delta}\sqrt{\frac{b'}{a'}} = \frac{\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{b'(-\delta')}+\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{b'(-\delta')}}{2\sqrt{\gamma' a'}}\sqrt{\frac{b'}{a}} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{-\delta'}{\gamma'}\right)}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{a}{b}}\right)\frac{\sqrt{ab}}{a+b} = \sqrt{\frac{-\delta'}{\gamma'}} \text{ q. e. d.}$$

Ebenso kommen wir dann folgen:

$$\sqrt{\frac{-\delta'}{\gamma'}} = \sqrt{\mathrm{tg}\,2\mathfrak{U}'\,\mathrm{tg}\,2v'}$$ dieses setzen wir $= \mathrm{tg}\,2\mathfrak{U}''$.

Auf ganz dieselbe Weise, wenn man wiederum [illegible] [illegible], ergeben sich dann die [illegible]:

$$\sqrt{\frac{-\delta''}{\gamma''}} = \mathrm{tg}\,4\mathfrak{U}''\sqrt{\frac{a''}{b''}}.$$

$$\mathfrak{U}'+v' = 2v''$$

$$\sqrt{\frac{-\delta''}{\gamma''}} = \mathrm{tg}\,4v''\sqrt{\frac{b''}{a''}} = \sqrt{\mathrm{tg}\,4\mathfrak{U}''\cdot\mathrm{tg}\,4v''} = \mathrm{tg}\,4\mathfrak{U}'''.$$

Ebenso [illegible] wir folgen:

$$\mathfrak{U}''+v'' = 2v'''$$

$$\sqrt{\frac{-\delta'''}{\gamma'''}} = \mathrm{tg}\,2^3\mathfrak{U}'''\sqrt{\frac{a'''}{b'''}} = \mathrm{tg}\,2^3\left(v'''\sqrt{\frac{b'''}{a'''}}\right) = \sqrt{\mathrm{tg}\,2^3\mathfrak{U}'''\cdot\mathrm{tg}\,2^3 v'''} = \mathrm{tg}\,2\,\mathfrak{U}''''$$

So geht es weiter fort:

$$\sqrt[n]{\frac{-c^n}{\delta^n}} = tg\,2^n\,\mathfrak{A}^n \sqrt[n]{\frac{a^n}{b^n}} = tg\,2^n\,\mathfrak{B}^n \sqrt[n]{\frac{b^n}{a^n}} = \sqrt[n]{tg\,2^n\,\mathfrak{A}^n\, tg\,2^n\,\mathfrak{V}^n} =$$

$$tg\,2^n\,\mathfrak{A}^{n+1}$$

etc.

Dann folgen ferner die Relationen:

$$\sin \mathfrak{A}^2 = \frac{b(-\delta)}{c\cdot\alpha}$$

Indem Ihr es ist:

$$\sin^2 \mathfrak{A} = \frac{tg^2\mathfrak{A}}{1+tg^2\mathfrak{A}} = \frac{\frac{b}{a}\,\frac{-\delta}{\gamma}}{1+\frac{b\cdot\delta}{a\,\gamma}} = \frac{b(-\delta)}{a\gamma+b(-\delta)}$$ Aber:

$$a\gamma - b\delta = c\alpha.$$ also:

$$\sin \mathfrak{A}^2 = \frac{b(-\delta)}{c\cdot a}$$ q.e.d. Ferner:

$$\cos \mathfrak{A}^2 = \frac{\alpha\cdot\gamma}{c\cdot\alpha}$$ denn:

$$\cos^2 \mathfrak{A}^2 = \frac{1}{1+tg^2\mathfrak{A}} = \frac{\alpha\cdot\gamma}{c\cdot\alpha}$$ q.e.d.

Ferner:

$$\sin^2 V = \frac{a(-\delta)}{c\cdot\beta}$$ denn:

$$\sin^2 V = \frac{tg^2 V}{1+tg^2 V} = \frac{\frac{a}{b}\,\frac{-\delta}{\gamma}}{1+\frac{a}{b}\left(\frac{-\delta}{\gamma}\right)} = \frac{a(-\delta)}{b\gamma-(a\delta)} =$$

$$\frac{a(-\delta)}{c\cdot\beta}$$ q.e.d.

Ebenso ist ferner:

$$\cos^2 V = \frac{\beta\cdot\gamma}{c\cdot\beta}$$

Ferner:

$a^2\sin^2\vartheta + b^2\cos^2\vartheta = ab.\frac{\beta}{\alpha}$. In der That, ist:

$$a^2\sin^2\vartheta + b^2\cos^2\vartheta = \frac{a^2 b.\delta}{c.\alpha} + \frac{b^2 a\gamma}{c\alpha} = \frac{ab}{c\alpha}\left[b\gamma - a\delta\right] = \frac{a\beta}{\alpha}.b$$

Ebenso:

$$a^2\cos^2 v + b^2\sin^2 v = ab.\frac{\alpha}{\beta}$$ wie klar.–

Genau dieselben Formeln können für die Argumente anderen Indices entwickelt werden. Man erhält folglich die für den Index n fortsetzend:

$$\sin 2^n\vartheta^{n\,2} = \frac{b^n(-\delta)^n}{c^n\alpha^n} \quad \cos 2^n\vartheta^{n\,2} = \frac{a^n\gamma^n}{c^n\alpha^n}$$

$$\sin 2^n v^{n\,2} = \frac{a^n(-\delta)^n}{c^n\beta^n} \quad \cos 2^n v^{n\,2} = \frac{b^n\gamma^n}{c^n\beta^n}$$ u.s.w.

$$a^{n2}\sin 2^n\vartheta^2 + b^{n2}\cos 2^n\vartheta^2 = a^n b^n\frac{\beta^n}{\alpha^n}$$

$$a^{n2}\cos 2^n v^2 + b^{n2}\sin 2^n v^2 = a^n b^n\frac{\alpha^n}{\beta^n}$$

Daraus folgt für η der Werth:

$$\eta^{\pm\frac{1}{2}} = \lim e^{\pm i v^n}$$

Beweis

Es war η definirt durch:

$$\frac{K'}{K}\sqrt{\eta}\,\eta^{\pm 1} = \lim \sqrt[2^{n-1}]{\sqrt{\frac{\gamma^n}{4K}} \pm i\sqrt{\frac{\delta^n}{4K}}}$$

Also:
$$\eta^{\pm 1} = \frac{K}{K'}\sqrt{\frac{1}{\eta}}\lim \sqrt[2^{n-1}]{\sqrt{\frac{\gamma^n}{4K}} \pm i\sqrt{\frac{\delta^n}{4K}}}$$ Aber

$$\frac{K}{K'} = \sqrt[2^n]{\frac{a^n}{\alpha^n}};\quad \sqrt{\frac{1}{\eta}} = \sqrt[2^n]{\frac{4a_n}{c^n}}$$ also:

$$\eta^{\pm 1} = \sqrt[2^n]{\frac{a^n}{\beta^n}\cdot\frac{4a^n}{c^n}}\;\sqrt[2^n]{\frac{\gamma^n}{4\alpha^n}}\;\sqrt[2^{n-1}]{\left(1 \pm \sqrt{\left(\frac{\delta^n}{\gamma^n}\right)}\right)} =$$

$$\eta\sqrt[2^n]{\left(\frac{a^n\gamma^n}{\alpha^n c^n}\right)}\;\sqrt[2^{n-1}]{\left(1 \pm i\sqrt{\left(\frac{-\delta^n}{\gamma^n}\right)}\right)}$$

Also da $\frac{\alpha^n \gamma^n}{a^n c^n} = \cos 2^n \mathfrak{A}^n$

$$\eta^{\pm\frac{1}{2}} = \sqrt[2^n]{\cos 2^n \mathfrak{A}^n}\,\sqrt[2^n]{1 \pm i\,tg\, 2^n \mathfrak{A}^n} \text{ für } a^n = b^n?$$

$$\eta^{\pm\frac{1}{2}} = \sqrt[2^n]{\cos 2^n \mathfrak{A}^n \pm i \sin 2^n \mathfrak{A}^n} = \cos \mathfrak{A}^n \pm i \sin \mathfrak{A}^n =$$

$$\eta^{\pm\frac{1}{2}} = e^{\pm i \mathfrak{A}^n}$$ oder da $\mathfrak{A}^n = \vartheta^n$

$$\eta^{\pm\frac{1}{2}} = e^{\pm i \vartheta^n} = e^{\pm i u}$$ wie wir es setzen wollen.

Entsprechende Werthe ergeben sich, wenn man $\delta = 0$ setzt. Denn verschwinden alle $\delta\, \delta' \ldots \delta^n$ und ist man verdeutlicht, durch die δ bestimmt wurden:

$$\frac{\alpha^n}{a^n} = \frac{\beta^n}{b^n} = \frac{\gamma^n}{c^n} \quad n = \ldots \infty$$

Betrachtet man unter dieser Vereinfachung die Reihenentwickelung für $\frac{k}{k'}$, so zeigt es sich ferner, daß:

$$\frac{\alpha^n}{a^n} = \frac{\beta^n}{b^n} = \frac{\gamma^n}{c^n} = \sqrt[2^n]{\frac{\alpha^n}{a^n}} = \sqrt[2^n]{\frac{\beta^n}{b^n}} = \sqrt[2^n]{\frac{\gamma^n}{c^n}}$$ für $n = \infty$ also:

$$\eta = \sqrt[2^n]{\frac{\gamma^n a^n}{\alpha^n c^n}} = 1 \text{ d. h. } \mathfrak{A}^n = \vartheta^n = 1 = 0$$

Vergleicht man die Grenzwerthe k, η, k', η, u, zu denen man gelangt, wenn man bei der Bildung des arithmetischen Mittels von den Größen $a\, b\, \alpha\, \beta$ ausgegangen ist, mit den Grenzwerthen $k_1, \eta_1, k_1', \eta_1, u_1$, zu denen man durch das Verfahren im Vorigen beschriebenen Größen $a'\, b'\, \alpha'\, \beta'$ als Anfangsglieder ausgeht, so ergiebt sich:

$k_1 = k$, denn es ist $M(a^n b^n) = M(a^{n+1} b^{n+1})$.

$\eta_1 = \eta^2$. In der That, gehen wir von a' aus bis zu

n^{2n} folgenden Glieder, so haben wir bloß c^{n+1} und b^{n+1} zu setzen

Also $\sqrt{\mathfrak{J}_1} = \lim \sqrt[2^n]{\frac{c^{n+1}}{4a^{n+1}}} = \sqrt[2^n]{\frac{c^{n2}}{16(a^{n+1})^2}} = \sqrt[2^n]{\left(\frac{c^n}{4a^n}\right)^2} = \mathfrak{J}^2.$

Ferner:

$$\frac{k_1'}{k_1} = \frac{k'^2}{k^2}.$$ In der That, es ist:

$$\frac{k_1'}{k_1} = \sqrt[2^n]{\frac{\beta^{n+1}}{k}} = \sqrt[2^n]{\frac{\alpha^n \cdot \beta^n}{b^{n+1} \cdot k}} = \sqrt[2^n]{\left(\frac{\beta^n}{k}\right)^2} = \frac{k'^2}{k^2}$$

Ebenso $\underline{u_1 = 2u,\ \text{da}\ \mathfrak{U}^{n+1} = 2\mathfrak{U}^n}_{n=\infty}$

So kommen wir weiter gehen, und finden, daß wenn man von $a_k\ b_k\ \alpha_k\ \beta_k$ ausgegangen wäre, die entsprechenden Größen sich ergeben hätten:

1) $k_k = k.$

2) $\mathfrak{J}_k = \mathfrak{J}^{2^k}$

3) $\frac{k_k'}{k_k} = \frac{k'^{2^k}}{k^{2^k}}$

4) $u_k = 2^k u.$

Aus $\frac{c'}{a'} = \frac{a-b}{a+b}$ als [illegible] folgt, daß

$\sqrt{\mathfrak{J}} = \lim \sqrt[2^n]{\frac{c^n}{4a^n}}$ (weil alle Glieder des [illegible]

[illegible], kleiner als 1 wird.

Aus

$$\frac{c'\gamma'}{a'\alpha'} = \left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2$$ folgt ebenso daß:

$\mathfrak{J}\eta$ kleiner als 1 sein muß.

In der That ist: $\sqrt{\mathfrak{J}\eta} = \frac{k}{k'}\sqrt[2^n]{\frac{\Delta^n}{k}} = \sqrt[2^n]{\frac{k\cdot\gamma^n}{\Delta^n \cdot k}}$ oder:

$$\mathfrak{J}\eta = \sqrt[2^n]{\frac{c^n\gamma^n}{a^n\alpha^n}} < 1.$$

Nun wird $\frac{c'a'}{a'\gamma'} = \left(\frac{\gamma-\delta}{\gamma+\delta}\right)^2$ dass

$\frac{1}{\eta} < 1$. In der That ist

$$\frac{\eta_1}{\eta} = \sqrt[2^n]{\frac{c^n a^n}{4a^n\gamma^n}} < 1.$$

Mit Hülfe dieser eingegebenen Formeln kann man die vorgelegten Größen mit n wirklich berechnen.
Für ein negatives δ convergieren die Reihen von η sehr schnell. Für positives nicht. Es ist daher von Vortheil den andern Ausdruck umzugestalten, welcher schneller convergirt.
Setzt man nämlich:

$$A' = \frac{A+B}{2} \quad B' = \frac{2AB\,a'}{c'(A+B)}$$

$$A^n = \frac{A^{n-1}+B^{n-1}}{2}\,; \quad B^n = \frac{2A^{n-1}B^{n-1}a^n}{c^n(A^{n-1}+B^{n-1})} \text{ und}$$

setzen das Produkt an:

$$\frac{H}{K} = \frac{B}{c}\sqrt{\frac{cA}{aB}}\;\sqrt[4]{\frac{c'A'}{a'B'}}\;\sqrt[8]{\frac{c''A''}{a''B''}}\cdots\cdots$$

so kann bestätigt werden, dass wenn $A = \alpha$ $B = \beta$ gesetzt wird, das Produkt genau diesen $\frac{K'}{\kappa}$ darstellt.
In der That würde dieser Voraussetzung gemäß gesetzt werden:

$$A^n = \frac{c^{n+1}}{c'}\sqrt{\frac{\alpha^n}{\beta^n}}\sqrt{\alpha\beta}. \quad B^n = \frac{c^{n+1}}{c'}\sqrt{\frac{\beta^n}{\alpha^n}}\sqrt{\alpha\beta}.$$

dass diese Formeln für $n = 0$ und $n = 1$ richtig sei, ist unmittelbar klar. Wir wollen den Beweis für den allgemeinen Fall so liefern, dass wir zeigen, daß wenn die Formel für n ... richtig ist, sie auch für $n+1$ richtig sein muss.

Es sei also:

$$A^n = \frac{b^{n+1}}{b'}\sqrt{\frac{\alpha^n}{\beta^n}}\sqrt{\alpha\beta}. \quad B'^n = \frac{b^{n+1}}{b'}\sqrt{\frac{\beta^n}{\alpha^n}}\sqrt{\alpha\beta}. \text{ dann ist:}$$

$$2A^{n+1} = A^n + B'^n = \frac{b^{n+1}}{b'}\sqrt{\alpha\beta}\left(\sqrt{\frac{\alpha^n}{\beta^n}} + \sqrt{\frac{\beta^n}{\alpha^n}}\right).$$

$$A^{n+1} = \frac{b^{n+1}}{b'}\sqrt{\alpha\beta}\left(\frac{\frac{1}{2}(\alpha^n+\beta^n)}{\sqrt{\alpha^n\beta^n}}\right) = \frac{b^{n+1}}{b'}\sqrt{\alpha\beta}\,\frac{\sqrt{a^{n+1}\alpha^{n+1}}}{\sqrt{\beta^{n+1}b^{n+1}}} = \frac{\sqrt{a^{n+1}b^{n+1}}\sqrt{\alpha\beta}}{b'}\sqrt{\frac{\alpha^n}{\beta^n}}$$

$$A^{n+1} = \frac{b^{n+2}}{b'}\sqrt{\frac{\alpha^{n+1}}{\beta^{n+1}}} \text{ q.e.d}$$

$$B'^{n+1} = \frac{2A^n B'^n a^{n+1}}{b^{n+1}(A'+B')} = \frac{2\left(\frac{b^{n+1}}{b'}\right)^2 \sqrt{(\alpha\beta)^2}\,a^{n+1}}{\cancel{b^{n+1}}\left(\frac{\cancel{b^{n+1}}}{\cancel{b'}}\sqrt{\frac{\alpha^n}{\beta^n}}\sqrt{\alpha\beta} + \frac{\cancel{b^{n+1}}}{\cancel{b'}}\sqrt{\frac{\beta^n}{\alpha^n}}\sqrt{\alpha\beta}\right)}$$

$$= \frac{2\sqrt{\alpha\beta}\,a^{n+1}}{b'\left(\sqrt{\frac{\alpha^n}{\beta^n}} + \sqrt{\frac{\beta^n}{\alpha^n}}\right)} = \frac{2\sqrt{\alpha\beta}\,a^{n+1}}{b'\,\frac{\alpha^n+\beta^n}{\sqrt{\alpha^n\beta^n}}} = \frac{\sqrt{\alpha\beta}\,\sqrt{a^{n+1}}\sqrt{b^{n+1}}}{b'}\sqrt{\frac{\beta^{n+1}}{\alpha^{n+1}}} =$$

$$B'^{n+1} = \frac{b^{n+2}}{b'}\sqrt{\frac{\beta^{n+1}}{\alpha^{n+1}}} \text{ q.e.d}$$

Wenn man diese Ausdrücke ... an diese Formeln bringen können, so ist klar, dass der letzte Ausdruck ... was dann für $\frac{\kappa'}{\kappa}$ ist. Setzen wir nämlich die Werthe für A^n u. B'^n ein, so heben sich die ... b^{n+1} und b' ... weg, ... Wurzelgrößen bei $\sqrt{\frac{\beta^n}{\alpha^n}}$ fort, so bleibt sich genau dieselbe Größe, wie früher angeben.

Ferner hatten wir ebenso:

$$C^n = \frac{C^{n-1}+D^{n-1}}{2}. \quad D^n = \frac{2.\, C^{n-1} D^{n-1} \gamma^n}{\delta^n (C^{n-1}+D^{n-1})} \Big)$$ oder

vielmehr:

$$C^{n+1} = \frac{C^n + D^n}{2} \quad \delta^{n+1} = \frac{2\, C^n D^n\, \alpha^{n+1}}{b^{n+1}(C^n+D^n)} \Big)$$

so ergiebt, da die γ und δ durch dieselben Relationen unter sich und unter den a und b verbunden sind, daß wenn man setzen $C = \gamma$ $D = \delta$ war:

$$C^n = \frac{b^{n+1}}{b'} \sqrt{\frac{\gamma^n}{\delta^n}} \sqrt{\gamma\delta}; \quad D^n = \frac{b^{n+1}}{b'} \sqrt{\frac{\delta^n}{\gamma^n}} \sqrt{\gamma\delta}$$

Ebenso ist dann klar, daß das Produkt:

$$\frac{H}{k}\, \eta^{\frac{1}{2}}\eta = \frac{D}{b} \sqrt{\frac{b.C}{aD}}\ \sqrt[4]{\frac{b'C'}{a'D'}} \cdots \sqrt[2^n]{\frac{b^{n-1}C^{n-1}}{a^{n-1}D^{n-1}}}$$ mit dem

früher gefundenen:

$$\frac{K'}{K}\, \eta^{\frac{1}{2}}\eta = \frac{\delta}{b} \sqrt{\frac{b.\gamma}{a.\delta}}\ \sqrt[4]{\frac{b'\gamma'}{a'\delta'}} - - \sqrt[2^n]{\frac{b^{n-1}\gamma^{n-1}}{a^{n-1}\delta^{n-1}}}.$$

---

§19 Nehmen wir a und b als constant an und betrachten den Ausdruck:

$$\frac{1}{2^n}\frac{1}{b^n}\sqrt{\frac{\beta^n\delta^n}{\alpha^n\gamma^n}}\ \partial \log \frac{\delta^n}{\beta^n}$$ so kann behauptet werden, daß

dieser gleich sei:

$$\frac{1}{2^n}\frac{1}{b^n}\sqrt{\frac{\alpha^n\gamma^n}{\delta^n\beta^n}}\ \partial.\log\frac{\gamma^n}{\alpha^n}.$$

Da der Theil, setzen wir die beiden Ausdrücke einander gleich, so ergiebt sich:

$$\alpha^n\gamma^n\, \partial.\log\frac{\gamma^n}{\alpha^n} = \beta^n\delta^n\ \partial\log.\frac{\delta^n}{\beta^n}.$$

$$\alpha^n\, \partial\gamma^n - \gamma^n\, \partial\alpha^n = \beta^n\, \partial\delta^n - \delta^n\, \partial\beta^n$$

Aber:

$$\left.\begin{array}{l} c.\partial\delta = b\partial\alpha - a\partial\beta. \\ c.\partial\gamma = a\partial\alpha - b\partial\beta \\ c\,\partial = b\alpha - a\beta. \end{array}\right\} \quad c\gamma = a\alpha - b\beta.$$

[illegible]:

$$\cancel{\frac{a^2\alpha^2\delta\alpha^2 - \alpha^2 b^2\gamma\delta\beta^2}{c^2}} - \cancel{\frac{a^2\alpha^2\delta\alpha^2 + b^2\beta^2\delta\alpha^2}{c^2}} = \cancel{\frac{\beta^2 b^2\delta\alpha^2 - a^2\beta^2\delta\beta^2}{c^2}}$$

$$- \cancel{\frac{b^2\alpha^2\delta\beta^2 - a^2\beta^2\delta\beta^2}{c^2}}$$

[illegible] Gl.

[illegible]

[illegible]:

$$\frac{1}{2^n}\frac{1}{b^n}\sqrt[n]{\frac{\beta^n\delta^n}{\alpha^n\gamma^n}}\,d.\log\frac{\delta^n}{\beta^n} = \frac{1}{2^{n+1}}\frac{1}{b^{n+1}}\sqrt{\frac{\beta^{n+1}\delta^{n+1}}{\alpha^{n+1}\gamma^{n+1}}}\,d.\log\frac{\delta^{n+1}}{\beta^{n+1}}$$ dann:

$$\frac{1}{2^{n+1}}\frac{1}{b^{n+1}}\sqrt{\frac{\beta^{n+1}\delta^{n+1}}{\alpha^{n+1}\gamma^{n+1}}}\,d.\log\frac{\delta^{n+1}}{\beta^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}\frac{1}{b^{n+1}}\sqrt{\frac{\beta^{n+1}\delta^{n+1}}{\alpha^{n+1}\gamma^{n+1}}}\,d\log\frac{\beta^n\delta^n}{\alpha^n\gamma^n}$$

und da: $d\log\frac{\delta^n}{\beta^n} = \frac{\beta^n\delta^n}{\alpha^n\gamma^n}\,d.\log\frac{\delta^n}{\beta^n}$ muss also die Gleichung

befriedigt werden:

$$\frac{1}{b^n}\sqrt{\frac{\beta^n\delta^n}{\alpha^n\gamma^n}}\,\cancel{d\log\frac{\delta^n}{\beta^n}} = \frac{1}{2}\frac{1}{b^{n+1}}\sqrt{\frac{\beta^{n+1}\delta^{n+1}}{\alpha^{n+1}\gamma^{n+1}}}\,\cancel{d\log\frac{\delta^n}{\beta^n}} + \frac{1}{2}\frac{1}{b^{n+1}}\sqrt{\frac{\beta^{n+1}\delta^{n+1}}{\alpha^{n+1}\gamma^{n+1}}}\,\frac{\beta^n\delta^n}{\alpha^n\gamma^n}\,\cancel{d\log\frac{\delta^n}{\beta^n}}$$

oder:

$$\sqrt{\frac{\beta^{n+1}\delta^{n+1}}{\alpha^{n+1}\gamma^{n+1}}\,\frac{\alpha^n\gamma^n}{\beta^n\delta^n}} + \sqrt{\frac{\beta^{n+1}\delta^{n+1}}{\alpha^{n+1}\gamma^{n+1}}\,\frac{\beta^n\delta^n}{\alpha^n\gamma^n}} = 2\frac{b^{n+1}}{b^n}.$$

$$\alpha^n\gamma^n\sqrt{\frac{\beta^{n+1}\delta^{n+1}}{\alpha^{n+1}\gamma^{n+1}}} + \beta^n\delta^n\sqrt{\frac{\beta^{n+1}\delta^{n+1}}{\alpha^{n+1}\gamma^{n+1}}} = 2\sqrt{\frac{a^n}{b^n}}\sqrt{\alpha^n\gamma^n\beta^n\delta^n} =$$

$$2\sqrt{\frac{a^n}{b^n}}\sqrt{b^{n+1}\beta^{n+1}b^{n+1}\delta^{n+1}}$$ oder:

$$\alpha^n\gamma^n\sqrt{\frac{1}{\alpha^{n+1}\gamma^{n+1}}} + \beta^n\delta^n\sqrt{\frac{1}{\alpha^{n+1}\gamma^{n+1}}} = 2\sqrt{\left(\frac{a^n}{b^n}\right)}\,b^{n+1}$$

$$\alpha^n\gamma^n + \beta^n\delta^n = 2\sqrt{\frac{a^n}{b^n}}\sqrt{\alpha^{n+1}\gamma^{n+1}} = 2a^n\sqrt{\alpha^{n+1}\gamma^{n+1}}.$$

[illegible] haben. —

Ferner ist:

$$\frac{1}{b}\sqrt{\frac{\beta\delta}{\alpha\gamma}}\,d.\log\frac{\delta}{\beta} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}}\,d.\log\frac{\delta}{\alpha}.$$ [illegible]

diese Gleichung werden:

$$\left[\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} - \frac{1}{b}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right] d\log\delta = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\, d\log\alpha - \frac{1}{b}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\, d\log\beta.$$

$$(b\alpha - a\beta)\, d\log\delta = b\alpha\, d\log\alpha - a\beta\, d\log\beta.$$

$$c\delta\, d\log\delta = b\alpha\, d\log\alpha - a\beta\, d\log\beta.$$

$$\underline{c\, d\delta = b\, d\alpha - a\, d\beta}$$ wird diese Relation wieder in der That Null, so:

$$\underline{b\alpha - a\beta = c\delta.}$$

Die anderen ... genau wie die Gl. ebenso ... man finden sehen, dass auch:

$$\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma}}\, d\log\frac{\delta}{\alpha}$$ unabhängig vom Index, ist.

Ganz genau wie man weiter leicht zeigen, dass

$$\underline{\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma}}\, d\log\frac{\delta}{\alpha} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\beta\cdot\gamma}{\alpha\cdot\delta}}\, d\log\frac{\gamma}{\beta}}$$ ist

Ferner ist:

$$\underline{\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma}}\, d\log\frac{\delta}{\alpha} = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\gamma\cdot\delta}{\alpha\cdot\beta}}\, d\log\frac{\delta}{\gamma}}$$ denn:

$$\left[\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} - \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\right] d\log\delta = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}\, d\log\alpha - \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\, d\log\gamma.$$

$$(c\alpha - a\gamma)\, d\log\delta = c\alpha\, d\log\alpha - a\gamma\, d\log\gamma.$$

$-b\, d\delta$ ist $c\, d\alpha - a\, d\gamma$ nach:

$$\underline{-b\delta = c\alpha - a\gamma}$$ q. e. d.

Also auch dieser Ausdruck ist unabhängig vom Index und ein klein =

$$\underline{\frac{1}{c}\sqrt{\frac{\alpha\cdot\beta}{\gamma\cdot\delta}}\, d\log\frac{\alpha}{\beta}}$$

Mit Hülfe dieser Werthe lassen sich die folgenden Relationen leicht beweisen:

$$\frac{1}{k}\,\partial\log\eta = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\alpha.\delta}{\beta.\gamma}}\,\partial.\log\frac{\delta}{\alpha} = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{\beta.\delta}{\alpha.\gamma}}\,\partial\log\frac{\delta}{\beta} = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\gamma.\delta}{\alpha.\beta}}\,\partial\log\frac{\delta}{\gamma}$$

$$= \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\beta.\gamma}{\alpha.\delta}}\,\partial.\log\frac{\gamma}{\beta} = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{\alpha.\gamma}{\beta.\delta}}\,\partial\log\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\alpha.\beta}{\gamma.\delta}}\,\partial\log\frac{\alpha}{\beta}.$$

Offenbar reicht es hin, wenn eine der Formeln nachgewiesen werden, denn man sieht leicht ein, daß die übrigen dann nothwendig gleich sind.

Es ist nun:

$$\frac{k'}{k}\,\eta^{\frac{1}{2}}\eta = \sqrt[2^n]{\frac{\gamma^n}{k}} = \sqrt[2^n]{\frac{\delta^n}{k}}.$$

$$\frac{k'}{k}\,\eta = \sqrt[2^n]{\frac{\delta^n}{k}\,\frac{4a^n}{c^n}} = \sqrt[2^n]{\frac{4.\delta^n}{c^n}}.$$

$$\eta = \sqrt[2^n]{\frac{\delta^n.4k}{c^n\beta^n}} = \sqrt[2^n]{\frac{4.b^n.\delta^n}{c^n.\alpha^n}}$$

$$\partial\eta = \frac{1}{2^n}\,\frac{\sqrt[2^n]{\frac{4.b^n.\delta^n}{c^n.\alpha^n}}\;c^n\beta^n.\,4b^n\left(\beta^n\partial\delta^n - \delta^n\partial\beta^n\right)}{4.b^n\,\partial^n.\,c^n\,\beta^{n2}}$$

$$\partial\eta = \frac{1}{2^n}\sqrt[2^n]{\frac{4.b^n\delta^n}{c^n.\alpha^n}}\,\partial\log\frac{\delta^n}{\alpha^n}$$

$$\frac{\partial\eta}{\eta} = \frac{1}{2^n}\,\partial\log\frac{\delta^n}{\alpha^n} \quad \text{oder da } \alpha^n = \beta^n \quad \delta^n = \beta^n:$$

$$\partial\log\eta = \frac{1}{2^n}\sqrt{\frac{\alpha^n.\delta^n}{\beta^n.\gamma^n}}\,\partial\log\frac{\delta^n}{\alpha^n}$$

$$n = \infty.$$

$$\frac{\partial\log\eta}{k} = \frac{1}{2^n a^n}\sqrt{\frac{\alpha^n.\delta^n}{\beta^n\gamma^n}}\,\partial\log\frac{\delta^n}{\alpha^n}$$

Ebenso ein Gleiches, wie verlangt:

$$\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\alpha.\delta}{\beta.\gamma}}\,\partial\log\frac{\delta}{\alpha}\quad q.e.d.$$

Es folgen übrigens noch einige merkwürdige Formeln, nämlich:

$$\frac{1}{k}\,\partial\log\eta = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\delta'}{\beta'}}\;\partial\log\frac{\delta^2}{\delta'}$$

denn $\sqrt{\frac{\delta'}{k}} = \sqrt{\frac{\gamma.\delta}{\alpha.\beta}}$. $\partial\log\frac{\delta^2}{\delta'} = \partial\log\frac{\delta}{\gamma}$ (c eine Constante)

Ebenso ergiebt sich:

$$\frac{1}{k}\,\partial\log\eta = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\beta'}{\delta'}}\;\partial\log\frac{\beta'}{\beta^2}$$

Mit Hülfe dieser Sätze kann bewiesen werden, dass

$$\int\frac{\partial u}{\sqrt{a^2\sin 2u^2+b^2\cos 2u^2}} = \frac{u}{k} \text{ ist.}$$

In der That, es ist:

$$\sin^2 2u = \frac{b}{c}\cdot\frac{-\delta}{\alpha}.$$

$$\partial 2u\; 2\sin 2u.\cos 2u = \frac{b}{c}\,\partial\left(\frac{-\delta}{\alpha}\right)$$

$$\partial 2u = \frac{b.\,\partial\left(\frac{-\delta}{\alpha}\right)}{c.2\sqrt{\frac{\alpha.\gamma.\,b.-\delta}{c.\alpha.\,c\alpha}}} = \frac{b.\,\partial\left(\frac{-\delta}{\alpha}\right)\left(\frac{-\alpha}{\delta}\right)}{2i\sqrt{a.c.\frac{\gamma}{\delta}}} =$$

$$\frac{b.\,\partial\log\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)}{2i\sqrt{\frac{\gamma}{\delta}.ab.}} \text{ also da:}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2\sin 2u^2+b^2\cos 2u^2}} = \sqrt{\frac{1}{a.b.\frac{\beta}{\alpha}}} \text{ ist:}$$

$$\frac{\partial 2u}{\sqrt{a^2\sin 2u^2+b^2\cos 2u^2}} = \frac{1}{a2i}\,\partial.\log\frac{\delta}{\alpha}\sqrt{\frac{\delta.\alpha.}{\beta.\gamma}} = \frac{1}{k2i}\,\partial\log\eta$$

Aber $\int\frac{1}{2ik}\,\partial\log\eta = \frac{\log\eta}{2ik}$ aber:

$$\eta^{\pm 1} = e^{\pm 2iu} \text{ also}$$

$$\log\eta = 2iu. \text{ also}$$

$$\frac{\log\eta}{2ik} = \frac{u}{k} \text{ also:}$$

$$\int\frac{\partial 2u}{\sqrt{a^2\sin 2u^2+b^2\cos 2u^2}} = \frac{u}{k}.$$

da ϑ aus ψ entsteht, wenn man α in β und a in b verwandelt, so muß auch sein, wie sich durch eine kleine Rechnung zeigt:

$$\int \frac{\partial\psi}{\sqrt{a^2\sin\psi^2 + b^2\cos\psi^2}} = \int \frac{\partial\vartheta}{\sqrt{a^2\cos\vartheta^2 + b^2\sin\vartheta^2}} = \frac{x}{k}.$$

Aus dem angenommenen ϑ folgt:

$$\frac{k}{2}\,\frac{\partial\log\frac{\alpha}{k}}{\partial x} + 2c'\sin 2\vartheta' = \frac{k}{2}\,\frac{\partial\log\frac{\beta}{k}}{\partial x}$$ demzufolge können wir schreiben:

$$\partial\log\frac{\alpha}{\beta} = -2c'\sin 2\vartheta'\,\frac{\partial\log\gamma}{c\,k} = -2c'\sin2\vartheta'\,\frac{1}{c}\sqrt{\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}}\;\frac{\partial\log\frac{\alpha}{\beta}}{2ik}\cdot k.$$

Oder:

$$1 = \frac{-2c'\sin2\vartheta'}{c}\sqrt{\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}}\;\frac{1}{c} = \frac{2c'}{c}\,c\sqrt{\frac{\alpha'}{c'}\,\frac{\delta'}{\beta'}}\;\sqrt{\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}}\;\frac{1}{c} =$$

$$\frac{2c'}{c}\sqrt{\frac{a'}{c'}} = \frac{\sqrt{4a'c'}}{c}$$ weil das $c^2 = 4ac$ ist, so ist ihre

$$\underline{1 = 1}$$

Ebenso folgt:

$$\frac{k}{2}\,\frac{\partial\log\frac{\beta}{k}}{\partial x} = \frac{k}{2}\,\frac{\partial\log\frac{\gamma}{k}}{\partial x} + a\,\frac{\sin\vartheta}{\cos\psi}$$ oder:

$$\cancel{\frac{k}{2}\,\partial\log\frac{\beta}{\gamma} = -a\,\frac{\sin\vartheta}{\cos\psi}\;\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}}\;\frac{\partial\log\frac{\gamma}{\beta}}{c}}$$

$$\frac{1}{k} = c\sqrt{\frac{\alpha}{k}\,\frac{\delta}{\beta}\,\frac{\alpha\cdot c}{\alpha\gamma}}\;\sqrt{\frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}}\;\frac{1}{2c}$$

$$1 = 1 \quad \text{q.e.d.}$$

Ebenso folgt, wenn man dann verwechselt:

$$\frac{k}{2}\,\frac{\partial\log\frac{\gamma}{k}}{\partial x} + a\,\frac{\sin\vartheta}{\cos\psi} = \frac{k}{2}\,\frac{\partial\log\frac{\delta}{k}}{\partial x} - b\,\frac{\cos\vartheta}{\sin\psi}.$$

Mit Hülfe der gefundenen Formeln kann auch die Richtigkeit der folgenden nachgewiesen werden.

$$\frac{K}{2}\,\frac{\partial \log \frac{\beta}{K}}{\partial x} = c'\sin 2v' + c^{(2)}\sin 2^2 v^{(2)} + \ldots\ldots$$

Ist dem so, schreiben wir dieselbe:

$$\frac{K}{2}\,\partial \log \frac{\beta}{K} = c'\sin 2v'\,\partial x + c^{(2)}\sin 2^2 v^{(2)}\,\partial x + \ldots\ c^{(n)}\sin 2^n v^{(n)}\,\partial x$$

und betrachten zunächst die linke Seite.

Es war K definirt durch:

$$\frac{K}{\pi} = \frac{\beta}{b}\sqrt[2]{\frac{b.\alpha}{a.\beta}}\ \sqrt[2^2]{\frac{b'\alpha'}{a'\beta'}}\ \sqrt[2^3]{\frac{b''\alpha''}{a''\beta''}}\ \ldots$$

Also:

$$\log\frac{K}{\pi} = \log\frac{\beta}{b} + \frac{1}{2}\log\frac{b.\alpha}{a\beta} + \frac{1}{2^2}\log\frac{b'\alpha'}{a'\beta'} + \frac{1}{2^3}\log\frac{b''\alpha''}{a''\beta''} + \ldots$$

$$\ldots\ \frac{1}{2^{n+1}}\log\frac{b^n\alpha^n}{a^n\beta^n}.$$

Erinnern wir uns, dass darin die $a\ a' \ldots\ b\ b' \ldots\ \pi$ Constanten sind, so wird:

$$\partial\log K = \partial\log\beta + \frac{1}{2}\log\frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{2^2}\log\frac{\alpha'}{\beta'} + \frac{1}{2^3}\log\frac{\alpha''}{\beta''} + \ldots\ \frac{1}{2^{n+1}}\log\frac{\alpha^n}{\beta^n}$$

Also:

$$\partial\log\frac{\beta}{K} = -\frac{1}{2}\log\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{2^2}\log\frac{\alpha'}{\beta'} - \frac{1}{2^3}\log\frac{\alpha''}{\beta''}\ \ldots\ -\frac{1}{2^{n+1}}\log\frac{\alpha^n}{\beta^n}$$

$$\frac{K}{2}\,\partial\log\frac{\beta}{K} = -\frac{K}{2^2}\log\frac{\alpha}{\beta} - \frac{K}{2^3}\log\frac{\alpha'}{\beta'}\ \ldots\ -\frac{K}{2^{n+2}}\log\frac{\alpha^n}{\beta^n}\ldots$$

So haben wir die linke Seite in eine unendliche Reihe verwandelt. Es handelt sich jetzt darum, die Glieder derselben mit der rechten Seite gleich zu machen.

Bedenken wir, daß

$$\sin 2^n V_n = \pm\sqrt{\frac{a^n(-\delta^n)}{c^n\beta^n}}$$ usw., so können wir dieselben schreiben:

$$\pm c'\sqrt{\frac{a'(-\delta')}{c'\beta'}}\,\partial u \mp c''\frac{\sqrt{a''(-\delta'')}}{\sqrt{c''\beta''}}\,\partial u \mp c'''\frac{\sqrt{a'''(-\delta''')}}{\sqrt{c'''\beta'''}} \mp \dots\quad c^{(n)}\frac{\sqrt{a^n(-\delta^n)}}{\sqrt{c^{(n)}\beta^{(n)}}}$$

oder:

$$\pm i\sqrt{a'c'}\sqrt{\frac{\delta'}{\beta'}}\,\partial u \mp i\sqrt{a''c''}\sqrt{\frac{\delta''}{\beta''}}\,\partial u \mp i\sqrt{a'''c'''}\sqrt{\frac{\delta'''}{\beta'''}}\,\partial u \mp i\sqrt{a^nc^n}\sqrt{\frac{\delta^n}{\beta^n}}\,\partial u.$$

Nun war u definirt durch:

$$\eta^{\pm\frac{1}{2}} = e^{\pm iu} \text{ u.s.}$$

$$\log\eta = 2iu \text{ u.s.}$$

$$\partial u = \frac{\partial\log\eta}{2i}$$ Also wird die Reihe:

$$\frac{1}{2}\sqrt{a'c'}\sqrt{\frac{\delta'}{\beta'}}\,\partial\log\eta \pm \frac{1}{2}\sqrt{a''c''}\sqrt{\frac{\delta''}{\beta''}}\,\partial\log\eta + \dots \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^nc^n}\sqrt{\frac{\delta^n}{\beta^n}}\,\partial\log\eta.$$

Für $\partial\log\eta$ haben wir verschiedene Ausdrücke gefunden, unter anderen den allgemeinen:

$$\partial\log\eta = \frac{K}{2^{n-1}c^{n-1}}\sqrt{\frac{\beta^n}{\delta^n}}\,\partial\log\frac{\alpha^{n-1}}{\beta^{n-1}}$$

$$n, n'\ 0 \ldots \infty.$$

Wir wollen für jedes $\partial\log\eta$ nur den allg. Ausdruck, in welchem die Zahl n gleich dem Index der anderen Coefficienten usf.

Also wird die Formel:

$$\pm\frac{K}{2}\sqrt{a'c'}\sqrt{\frac{\delta'}{\beta'}}\,\frac{K}{\cancel{2^{n-1}c^{n-1}}}\sqrt{\frac{\beta'}{\delta'}}\,\partial\log\frac{\alpha}{\beta} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a''c''}\sqrt{\frac{\delta''}{\beta''}}\,\frac{K}{2c'}\sqrt{\frac{\beta''}{\delta''}}\,\partial\log\frac{\alpha'}{\beta'} + \dots$$

$$\pm\frac{K}{2}\frac{\sqrt{a^nc^n}}{c^{n-1}}\sqrt{\frac{\delta^n}{\beta^n}}\sqrt{\frac{\beta^n}{\delta^n}}\,\frac{\partial\log\frac{\alpha^{n-1}}{\beta^{n-1}}}{2^{n-1}} + \dots$$

Beim [illegible] heben sich einige Glieder weg und es bleibt nur:

$$\pm\frac{k}{2}\frac{\sqrt{a'c'}}{c}\,\partial\log\frac{\alpha}{\beta}\pm\frac{k}{2.2'}\frac{\sqrt{a''c''}}{c'}\,\partial\log\frac{\alpha'}{\beta'}+\dots\pm\frac{k}{2.2^{n-1}}\frac{\sqrt{a^{n}c^{n}}}{c^{n-1}}\,\partial\log\frac{\alpha^{n-1}}{\beta^{n-1}}$$

Aber $c^{n-1}=2\sqrt{c^{n}a^{n}}$!

Also wird der ganze Unterschied:

$$\pm\frac{k}{4}\,\partial\log\frac{\alpha}{\beta}\pm\frac{k}{2^{3}}\,\partial\log\frac{\alpha'}{\beta'}+\dots\pm\frac{k}{2^{n+1}}\,\partial\log\frac{\alpha^{n}}{\beta^{n}}$$

Vergleichen wir dies mit den früher gefundenen Werth der linken Seite, so sehen wir, daß er mit demselben identisch übereinstimmt. Wenn man das allgemeine Verzeichniß betrachtet, so wird auch hier die Richtigkeit unserer Entwicklung nachgewiesen.

Wir können die bereits gefundenen Resultate zusammenstellen:

$$\frac{k}{2}\frac{\partial\log\frac{\alpha}{\kappa}}{\partial x}+2c'\sin 2v'=\frac{k}{2}\frac{\partial\log\frac{\beta}{\kappa}}{\partial x}=\frac{k}{2}\frac{\partial\log\frac{\gamma}{a}}{\partial x}+a\frac{\sin v}{\cos v}=$$

$$\frac{k}{2}\frac{\partial\log\frac{\delta}{\kappa}}{\partial x}-b\frac{\cos v}{\sin v}=c'\sin 2v'+c''\sin 2^{2}v''+c^{(3)}\sin 2^{3}v'''+\dots$$

§ 20.

Nachdem wir in dem vorigen Paragraphen allgemeine Relationen für den Quotienten zweier der Größen $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ aufgestellt haben, handelt es sich jetzt darum noch allgemeinere Relationen für dieselben Größen zu finden.

Es kann zunächst bemerkt werden, daß zwischen jeden drei auch zwischen welchen, nämlich der Ausdruck

$$\frac{\partial}{\partial \log \eta}\left[\frac{\partial \log \frac{\alpha^n}{\beta^n}}{\partial \log \eta}\right] + \frac{1}{2}\,\frac{\partial \log \frac{\alpha\beta^2}{\gamma^2\delta^n}}{\partial \log \eta}\cdot\frac{\partial \log \frac{\alpha^n}{\beta^n}}{\partial \log \eta} = 0 \text{ wird}$$

Beweis

Sehen wir zunächst zu, welchen Werth

$$\frac{\partial}{\partial \log \eta}\left[\frac{\partial \log \frac{\alpha^n}{\beta^n}}{\partial \log \eta}\right] \text{ hat.}$$

Setzen wir in der Klammer $\partial \log \eta = \kappa \frac{1}{2^n c^n} \sqrt[3]{\frac{\alpha^n\beta^n}{\gamma^n\delta^n}}\, \partial \log \frac{\alpha^n}{\beta^{n+1}}$ so wird

$$\frac{\partial}{\partial \log \eta}\left[\frac{\partial \log \frac{\alpha^n}{\beta^n}}{\partial \log \eta}\right] = 2^n \frac{\partial}{\partial \log \eta}\left[\frac{c}{2}\sqrt[3]{\frac{\gamma^n\delta^n}{\alpha^n\beta^n}}\right] = 2^n\frac{c^n}{\kappa}\frac{\partial}{\partial \log \eta}\left[\sqrt[3]{\frac{\delta^{n+1}}{\beta^{n+1}}}\right]$$

da
$$\left.\begin{aligned}\delta^{n+1} &= \frac{1}{c^{n+1}}\gamma^n\delta^n \\ \beta^{n+1} &= \frac{1}{c^{n+1}}\alpha^n\beta^n\end{aligned}\right\}$$

und c^n und κ Constanten sind. Also:

$$\frac{\partial}{\partial \log \eta}\left[\frac{\partial \log \frac{\alpha^n}{\beta^n}}{\partial \log \eta}\right] = \frac{2^n}{2}\frac{c^n}{\kappa}\frac{1}{\partial \log \eta}\sqrt[3]{\frac{\beta^{n+1}}{\delta^{n+1}}}\,\partial\!\left(\frac{\delta^{n+1}}{\beta^{n+1}}\right) = \frac{2^n}{2}\frac{c^n}{\kappa}\sqrt[3]{\frac{\delta^{n+1}}{\beta^{n+1}}}\,\frac{\partial \log \frac{\delta^{n+1}}{\beta^{n+1}}}{\partial \log \eta}$$

$$\partial \log \eta = \frac{1}{2^{n+1}}\frac{1}{c^{n+1}}\sqrt[3]{\frac{\beta^{n+1}\delta^{n+1}}{\alpha^{n+1}\gamma^{n+1}}}$$

Also: $\frac{\partial}{\partial \log \eta}\left[\frac{\partial \log \frac{\alpha^n}{\beta^n}}{\partial \log \eta}\right] = \frac{2^{n:} 2^{n+1}}{2} \frac{c^{n:} b^{n+1}}{\kappa^2} \frac{\gamma\sqrt{\alpha^{n+1:}\gamma^{n+1}}}{\beta^{n+1}}$

Betrachten wir jetzt die erste Seite:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \log \frac{\alpha^{n:}\beta^n}{\gamma^n \delta^n}}{\partial \log \eta} \frac{\partial \log \frac{\alpha^n}{\beta^n}}{\partial \log \eta}.$$

Mit Hülfe der oben gebrauchten Elemente ergiebt dasselbe aber:

$$-\frac{1}{2} \frac{2^{n:} c^{n:}}{\kappa} \gamma\sqrt{\frac{\gamma^{n:}\delta^n}{\alpha^n\beta^n}}\; 2^{n+1} \frac{b^{n+1}}{\kappa} \gamma\sqrt{\frac{\alpha^{n+1}\gamma^{n+1}}{\beta^{n+1}\delta^{n+1}}} =$$

$$-\frac{1}{2} 2^{n} \frac{c^n}{\kappa} \gamma\sqrt{\frac{\delta^{n+1}}{\beta^{n+1}}}\; 2^{n+1} \frac{b^{n+1}}{\kappa} \gamma\sqrt{\frac{\alpha^{n+1}\gamma^{n+1}}{\beta^{n+1}\delta^{n+1}}} =$$

$$-\frac{2^{n:} 2^{n+1}}{2.} \frac{c^{n:} b^{n+1}}{\kappa^2} \frac{\gamma\sqrt{\alpha^{n+1:}\gamma^{n+1}}}{\beta^{n+1}}$$

und dieser Gliedwerth ist genau dem obigen gleich und entgegengesetzt.

Daraus schließt man, daß ganz allgemein:

$$\frac{\partial}{\partial \log \eta}\left[\frac{\partial \log \frac{\alpha^n}{\beta^n}}{\partial \log \eta}\right] = -\frac{1}{2} \frac{\partial \log \alpha^{n:}\beta^n}{\partial \log \eta} \frac{\partial \log \frac{\alpha^n}{\beta^n}}{\partial \log \eta}.$$

Auf genau derselben Weise lässt sich dann zeigen – und man überzeugt sich durch die Rechnung der Richtigkeit, die sich genau an den obigen anschliesst, – daß die Elemente ungeändert bleiben, in welcher Reihenfolge man auch die $\alpha\beta\gamma\delta$ einsetzen. —

Aus dieser Gl. folgt nun:

$$\frac{\partial^2 \log \frac{\beta^{n+1}}{\beta^{n-1\,2}}}{\partial \log \eta^2} + 2^{2n+1} \frac{a c^{n+1}\, c^{n+1}}{\kappa^2} \frac{\delta^{n+1}}{\beta^{n+1}} - 2^{2n} \frac{a c^{n\cdot n}}{\kappa^2} \frac{\delta^n}{\beta^n} - 2^{2n-1} \frac{c^{n\,2}}{\kappa^2} = 0$$

die auf ihre Richtigkeit können wir die $\alpha\beta\gamma\delta$ vertauschen.

Offenbar dürften wir ihre Richtigkeit nur ... vom Vorurtheilsfreien ...

z. B. der vorliegenden, unsymmetrischen, er ist daran erkennbar, wie man sieht, klar, dass bei

Gleichung die beiden gilt.

Das erste Glied unserer Gleichung ist nun nichts als

$$\frac{\partial}{\partial \log \xi}\left(\frac{\partial \log \frac{\alpha^2}{\beta^2}}{\partial \log \eta}\right)$$ wie klar, wenn man sich erinnert dass

zu differenzierenden Logarithmus Zeichen und Nenner willkürlich ist und dabei berücksichtigt, dass

$$\beta^{n+1} = \frac{1}{\eta^{n+1}}\alpha^n \beta^n$$ und b^{n+1} eine Constante ist.

Wir werden bewiesen die Richtigkeit unserer Gleichung nachgewiesen

haben, wenn wir zeigen, dass:

$$2^{2n+1}\frac{a^{n+1}c^{n+1}}{\kappa^2}\frac{\delta^{n+1}}{\beta^{n+1}} - 2^{2n}\frac{a^n c^n}{\kappa^2}\frac{\delta^n}{\beta^n} - 2^{2n+1}\frac{c^{n^2}}{\kappa^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial \log \frac{\alpha^n \beta^n}{\kappa^2 \delta^n}}{\partial \log \eta}\,\frac{\partial \log \frac{\alpha^2}{\beta^2}}{\partial \log \eta}$$ ist.

Der rechte Seite ist nach gleich:

$$-2^{\frac{n}{2}}\cdot 2^{2n+1}\frac{c^n b^{n+1}}{\kappa^2}\frac{\gamma_{\alpha^{n+1}\delta^{n+1}}}{\beta^{n+1}}.$$

Heben wir dieses auf, multipliziren mit κ^2 und dividiren durch

2^{2n}, so haben wir zu zeigen, dass:

$$-\frac{c^n b^{n+1}}{\beta^{n+1}}\gamma_{\alpha^{n+1}\delta^{n+1}} = 2a^{n+1}c^{n+1}\frac{\delta^{n+1}}{\beta^{n+1}} - a^n c^n \frac{\delta^n}{\beta^n} - \frac{1}{2}c^{n^2}$$ ist.

Nun ist $a^{n+1}c^{n+1} = \frac{c^{n^2}}{\eta}$ also werden wir durch c^n dividiren:

$$-\frac{b^{n+1}}{\beta^{n+1}}\gamma_{\alpha^{n+1}\delta^{n+1}} = \frac{c}{2}\frac{\delta^{n+1}}{\beta^{n+1}} - \cancel{a^n c^n}\frac{\delta^n}{\beta^n} - \frac{1}{2}c^n$$

$$\cdot\ \gamma_{\alpha^{n+1}\gamma^{n+1}} = \frac{c^n \cdot \delta^{n+1}}{2\,b^{n+1}} - a^n \frac{\delta^n \cdot \beta^{n+1}}{\beta^n c^{n+1}} - \frac{1}{2} c^n \frac{\beta^{n+1}}{b^{n+1}}.$$

$$\beta^{n+1} = \frac{1}{b^{n+1}} \alpha^n \beta^n.$$

$$-\ \gamma_{\alpha^{n+1}\gamma^{n+1}} = \frac{c^n \delta^{n+1}}{2\,b^{n+1}} - a^n \frac{\delta^n \alpha^n}{(b^{n+1})^2} - \frac{1}{2} c^n \frac{\alpha^n \beta^n}{(b^{n+1})^2}.$$

$$\delta^{n+1} = \frac{1}{b^{n+1}} \gamma^{n+1} \delta^n$$

$$-\ 2(b^{n+1})^2\, \gamma_{\alpha^{n+1}\gamma^{n+1}} = c^n \cdot \gamma^n \delta^n - 2\,a^n \alpha^n \delta^n - c^n \alpha^n \beta^n =$$

$$c^n(\gamma^n \delta^n - \alpha^n \beta^n) - 2\,a^n \alpha^n \delta^n.$$

Siehe §18. Die Relation zwischen den Größen $\alpha^n \beta^n \gamma^n \delta^n$

Nun fanden wir:

$$(\gamma^n \delta^n - \alpha^n \beta^n) = \frac{a^n}{c^n}(\alpha^n \delta^n - \beta^n \gamma^n).$$

$$-\ 2\,\cancel{c^n}\, b^n\, \gamma_{\alpha^{n+1}\gamma^{n+1}} = \cancel{a^n}(\alpha^n \delta^n - \beta^n \gamma^n) - 2\,\cancel{a^n}\alpha^n \delta^n$$

Ebenso fanden wir:

$$-\ 2\,b^n\, \gamma_{\alpha^{n+1}\gamma^{n+1}} = -(\beta^n \gamma^n + \alpha^n \delta^n) \quad \text{Also:}$$

$$-\beta^n \gamma^n - \alpha^n \delta^n = \alpha^n \delta^n - \beta^n \gamma^n - 2\,\alpha^n \delta^n$$

$$-\beta^n \gamma^n - \alpha^n \delta^n = -\beta^n \gamma^n - \alpha^n \delta^n$$

$$0 = 0 \quad \text{q. e. d.}$$

Somit fanden wir:

Es besteht die Diffgl.:

$$\frac{\partial^2 \log \frac{\beta^{n+1}}{(\beta^n)^2}}{(\partial \log \eta)^2} + 2^{2n+1} \frac{a^{n+1} c^{n+1}}{\kappa^2} \frac{\delta^{n+1}}{\beta^{n+1}} - 2^{2n} \frac{a^n c^n}{\kappa^2} \frac{\delta^n}{\beta^n} - 2^{2n-1} \frac{c^{n^2}}{\kappa^2} = 0$$

[illegible] u. wir auch [illegible] mögen und wir [illegible] die $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ [illegible] mögen. –

Um ein neues Resultat zu erhalten, schreiben wir beliebig viele Gl. untereinander, [illegible] man dort n allmählig alle Werthe von 0 bis ∞ annehmen lassen:

$$\frac{\partial^2 \log \frac{\beta'}{\beta^2}}{(\partial \log \eta)^2} + 2\,\frac{a'c'}{\kappa^2}\,\frac{\delta'}{\beta'} - \frac{ac}{\kappa^2}\,\frac{\delta}{\beta} - \frac{1}{2}\,\frac{c^2}{\kappa^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \log \frac{\beta''}{(\beta')^2}}{(\partial \log \eta)^2} + 2^3\,\frac{a''c''}{\kappa^2}\,\frac{\delta''}{\beta''} - 2^2\,\frac{a'c'}{\kappa^2}\,\frac{\delta'}{\beta'} - 2\,\frac{c'^2}{\kappa^2} = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial^2 \log \frac{\beta^{(n)}}{(\beta^{(n-1)})^2}}{(\partial \log \eta)^2} + 2^{2n+1}\,\frac{a^{(n)}c^{(n)}}{\kappa^2}\,\frac{\delta^{(n)}}{\beta^{(n)}} - 2^{2(n-1)}\,\frac{a^{(n-1)}c^{(n-1)}}{\kappa^2}\,\frac{\delta^{(n-1)}}{\beta^{(n-1)}} - 2^{2n-3}\,\frac{(c^{(n-1)})^2}{\kappa^2} = 0$$

etc.

Dividiren wir die erste Gl. durch 2^0, die zweite durch 2^1 die dritte durch 2^2 etc, so können wir die Gl. schreiben:

$$\frac{\partial^2 \log \frac{\beta'}{\beta^2}}{(\partial \log \eta)^2} + \frac{2a'c'\delta'}{\kappa^2\beta'} - \frac{ac\delta}{\kappa^2\beta} - \frac{1}{2}\,\frac{c^2}{\kappa^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \log \sqrt[2]{\frac{\beta''}{(\beta')^2}}}{(\partial \log \eta)^2} + 2^2\,\frac{a''c''\delta''}{\kappa^2\beta''} - 2\,\frac{a'c'\delta'}{\kappa^2\beta'} - \frac{c'^2}{\kappa^2} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 \log \sqrt[2^2]{\frac{\beta'''}{(\beta'')^2}}}{(\partial \log \eta)^2} + 2^3\,\frac{a'''c'''\delta'''}{\kappa^2\beta'''} - 2^2\,\frac{a''c''\delta''}{\kappa^2\beta''} - \frac{2(c'')^2}{\kappa^2} = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial^2 \log \sqrt[2^{n-1}]{\frac{\beta^{(n)}}{(\beta^{(n-1)})^2}}}{(\partial \log \eta)^2} + 2^n\,\frac{a^{(n)}c^{(n)}\delta^{(n)}}{\kappa^2\beta^{(n)}} - 2^{n-1}\,\frac{a^{(n-1)}c^{(n-1)}\delta^{(n-1)}}{\kappa^2\beta^{(n-1)}} - 2^{n-2}\,\frac{(c^{(n-1)})^2}{\kappa^2} = 0$$

$$\vdots$$

Addiren wir alle ζ. so kommen wir zunächst alle Glieder, die einen Logarithmus mit β enthalten, in eine Zahl zusammengefasst. Dieselbe enthält dann die Form:

$$\frac{\partial^2 \log}{(\partial\log\eta)^2}\left[\frac{\beta'}{\beta^2}\sqrt[2^1]{\frac{\beta''}{\beta'^2}}\sqrt[2^2]{\frac{\beta^3}{(\beta'')^2}}\sqrt[2^3]{\frac{\beta^4}{(\beta^3)^2}}\cdots\sqrt[2^{n-1}]{\frac{\beta^n}{(\beta^{n-1})^2}}\sqrt[2^n]{\frac{\beta^{n+1}}{(\beta^n)^2}}\right] =$$

$$\frac{\partial^2\log}{(\partial\log\eta)^2}\left[\frac{\sqrt[2^n]{\beta^{n+1}}}{\beta^2}\right] = \frac{4}{2}\frac{\partial^2\log}{(\partial\log\eta)^2}\left[\frac{\sqrt[2^{n+1}]{\beta^{n+1}}}{\beta}\right].$$

Nun ist:

$$\frac{\kappa}{\gamma_\kappa} = \sqrt[2^{n+1}]{\frac{\beta^{n+1}}{\gamma_\kappa}} \qquad n=\infty.$$

$$\log\kappa - \log\gamma_\kappa = \log\sqrt[2^{n+1}]{\beta^{n+1}} - \log\sqrt[2^{n+1}]{\gamma_\kappa}.$$

Da aber γ_κ eine constante ist, so folgt:

$\underline{\partial\log\kappa = \partial\log\sqrt[2^{n+1}]{\beta^{n+1}}}$ Also

$$\underline{\frac{\partial^2\log}{(\partial\log\eta)^2}\left[\frac{\sqrt[2^n]{\beta^{n+1}}}{\beta^2}\right] = \frac{4}{2}\frac{\partial^2\log}{(\partial\log\eta)^2}\left(\frac{\kappa}{\beta}\right)} = 2\frac{\partial^2\log}{(\partial\log\eta)^2}\left(\frac{\kappa}{\beta}\right).$$

Die zweiten und dritten Glieder in jeder Horizontalreihe haben sich gegenseitig vernichtet bis auf und es bleibt nur noch übrig:

$$-\frac{ac^2}{\kappa^2}\frac{\delta}{\beta} + 2^{n+1}\frac{a^{n+1}}{\kappa^{n+1}}c^{n+1}\frac{\delta^{n+1}}{\beta^{n+1}}$$

Das zweite Glied fällt aber für $n=\infty$ fort, da c^{n+1} verschwindend gleich null wird.

Also bleibt nur $-\frac{ac^2}{\kappa^2}\frac{\delta}{\beta}$ übrig.—

Es sind jetzt noch die ersten Glieder der einzelnen Horizontalreihen zu summiren.

Dann erhalten wir:

$$-\frac{1}{\kappa^2}\left[\frac{c^2}{2}+2^0 c'^2+2^1 c''^2+\ldots\ldots 2^{\lambda-1} c^{(\lambda)2}\right].$$

Nun fanden wir §13:

$$2\,\partial\log M(ab)=2\,\partial\log(b)+2\Delta\left[\tfrac{1}{2}c^2+c'^2+\ldots\; 2^{\lambda-1}(c^{\lambda})^2\right].$$

Also:

$$-\frac{1}{\kappa^2}\left[\frac{c^2}{2}+c'^2+\ldots\; 2^{\lambda-1}(c^{\lambda})^2\right]=-\frac{\partial\log\frac{M(ab)}{b}}{\kappa^2\Delta}.$$

Ebenso fanden wir

$$\Delta M(ab)^2=\tfrac{1}{2}\,\partial\log\eta \quad \text{also:}$$

$$-\frac{\left[\frac{c^2}{2}+c'^2+\ldots\; 2^{\lambda-1}(c^{\lambda})^2\right]}{\kappa^2}=-\frac{2\,\partial\log\frac{M(ab)}{b}\cdot M(ab)^2}{\kappa^2\,\partial\log\eta}$$

Aber $M(ab)=K.$ also:

$$-\frac{\left[\frac{c^2}{2}+c'^2+\ldots\; 2^{\lambda-1}(c^{\lambda})^2\right]}{\kappa^2}=-\frac{2\,\partial\log\frac{K}{b}}{\partial\log\eta}.$$

Also wird vermöge unserer [illegible] den Ausdruck ergeben.

$$2\,\frac{\partial^2\log}{(\partial\log\eta)^2}\left(\frac{\kappa}{\beta}\right)-\frac{ac}{\kappa^2}\cdot\frac{\delta}{\beta}-\frac{2\,\partial\log\frac{K}{b}}{\partial\log\eta}=0 \quad \text{oder:}$$

$$\frac{\partial\log\frac{b}{K}}{\partial\log\eta}=\frac{\partial^2\log}{(\partial\log\eta)^2}\left(\frac{\beta}{\kappa}\right)+\frac{ac}{\kappa^2}\,\frac{\delta}{\beta}$$ und dies ist immer [illegible]

der bewiesen ist, um uns ableiten wollen. –

Hieraus folgt unmittelbar:

$$\frac{\partial \log \frac{b}{\kappa}}{\partial \log \eta} = \frac{\partial^2 \log \frac{\gamma}{\kappa}}{(\partial \log \eta)^2} - \frac{1}{2}\,\frac{ac}{\kappa^2}\,\frac{\gamma}{\alpha},$$ denn es ist:

$$\frac{\partial^2 \log \frac{\alpha}{\kappa}}{(\partial \log \eta)^2} - \frac{1}{2}\,\frac{a.c}{\kappa^2}\,\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\partial^2 \log \frac{\beta}{\kappa}}{(\partial \log \eta)^2} + \frac{1}{2}\,\frac{ac}{\kappa^2}\,\frac{\delta}{\beta}.$$

Da der Satz, dieser ... bewiesen ist:

$$\frac{\partial^2 \log \frac{\alpha}{\delta}}{(\partial \log \eta)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{ac}{\kappa^2}\left(\frac{\gamma\beta+\alpha\delta}{\alpha\beta}\right) = \frac{c\,b'\,\gamma\,\alpha'\,\gamma'}{\beta!}$$

die wir als richtig nachgewiesen haben.

Genau so lässt sich zeigen:

$$\frac{\partial \log \frac{b}{\kappa}}{\partial \log \eta} = \frac{\partial^2 \log \frac{\gamma}{\kappa}}{(\partial \log \eta)^2} - \frac{1}{2}\,\frac{ac}{\kappa^2}\,\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\partial^2 \log \frac{\delta}{\kappa}}{(\partial \log \eta)^2} + \frac{1}{2}\,\frac{a.c}{\kappa^2}\,\frac{\beta}{\delta}.$$

Hierbei ist aber eine Voraussetzung gemacht, die nicht ohne weiteres ersichtlich ist. Wir folgern:

$$2^{n+1}\,\frac{a^{n+1}}{\kappa^2}\,c^{n+1}\,\frac{\delta^{n+1}}{\beta^{n+1}} = 0$$

Dieses wird bewiesen sein, wenn wir zeigen, dass

$2^{2(n+1)}\,c^{n+1} = 0$ ist, da die Größen $a^{n+1}, \kappa, \delta^{n+1}, \beta^{n+1}$

endliche Größen sind.

Es ist nun:

$$c^{n+1} = \frac{c^{n+1}}{4 \cdot a^{n+1}} = \frac{c^n}{4a^{n+1}}\,\frac{c^{n-1}}{4a^n}\cdots\frac{c}{4a^1} = \frac{c^n \cdot c^{n-1}\cdots c}{2^{2(n+1)}\,a^{n+1}\cdots a^1}$$

Also:

$$2^{2(n+1)}c^{n+1} = \frac{c^n}{a^{n+1}}\,\frac{c^{n-1}}{a^n}\cdots\frac{c}{a^1} = \beta$$

Wenn diese Größe gleich Null ist, so müßte der Log. $-\infty$ werden oder

$\log\frac{1}{\beta} = \infty$ d.h.

$$\log\frac{a^{n+1}}{c^n} + \log\frac{a^n}{c^{n-1}} + \cdots \log\frac{a^2}{c^1} = \infty.$$

Daß dieß aber der Fall ist, läßt sich leicht beweisen. Es ist:

$$a^{n+1} > \frac{c^{n-1}}{4}$$

$$c^{n-1}a^{n+1} > \frac{(c^{n-1})^2}{4} > a^n c^n$$

$$\frac{a^{n+1}}{c^n} > \frac{a^n}{c^{n-1}} \text{ d.h.}$$

$$\log\frac{a^{n+1}}{c^n} > \log\frac{a^n}{c^{n-1}} \text{ d.h.}$$

$$\frac{\log\frac{a^{n+1}}{c^n}}{\log\frac{a^n}{c^{n-1}}} > 1 \quad \text{q.e.d.}$$

Darum können wir in der That jene Größe gleich Null setzen. —
Die Formeln bleiben richtig, wenn wir den $a\,b\,c\,\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ irgend einen andern als Null machenden Index geben.
Jetzt können wir unsere Formeln so schreiben:

$$\frac{\partial^2\log\frac{\beta^k}{(\beta^{k-1})^2}}{(\partial\log\eta)^2} + 2^{2k-1}\frac{a^k c^k}{k^2}\frac{\delta^k}{\beta^k} - 2^{2k-2}\frac{a^{k-1}c^{k-1}}{k^2}\frac{\delta^{k-1}}{\beta^{k-1}} - 2^{2k-3}\frac{c^{k-1}}{k^2} = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial^2\log\frac{\beta^2}{(\beta^1)^2}}{(\partial\log\eta)^2} + \cdots = 0$$

Mit Hülfe derselben:

$$\frac{\partial^2 \log \dfrac{\beta^{(\kappa)}}{\beta^{(\kappa_1-1)2}}}{(\partial \log \eta)^2} + 2^{2\kappa_1-1}\frac{a^{(\kappa_1)}c^{(\kappa)}}{\kappa^2}\frac{\delta^{(\kappa_1)}}{\beta^{(\kappa_1)}} - 2^{2\kappa_1-2}\frac{a^{(\kappa_1-1)}c^{(\kappa_1-1)}}{\kappa^2}\frac{\delta^{(\kappa_1-1)}}{\beta^{(\kappa_1-1)}} - 2^{2\kappa_1-3}\frac{c^{(\kappa_1-1)2}}{\kappa^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \log \sqrt[2]{\dfrac{\beta^{\kappa_1+1}}{(\beta^{\kappa_1})^2}}}{(\partial \log \eta)^2} + 2^{2\kappa_1}\frac{a^{(\kappa_1+1)}c^{(\kappa_1+1)}}{\kappa^2}\frac{\delta^{(\kappa_1+1)}}{\beta^{\kappa_1+1}} - 2^{2\kappa_1-1}\frac{a^{(\kappa_1)}c^{(\kappa_1)}}{\kappa^2}\frac{\delta^{\kappa_1}}{\beta^{\kappa_1}} - 2^{2\kappa_1-2}\frac{c^{(\kappa_1)2}}{\kappa^2} = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial^2 \log \sqrt[2^n]{\dfrac{\beta^{(\kappa_1+n)}}{\beta^{(\kappa_1+n-1)2}}}}{(\partial \log \eta)^2} + 2^{2(\kappa_1+n-1)}\frac{a^{(\kappa_1+n)}c^{(\kappa_1+n)}}{\kappa^2}\frac{\delta^{(\kappa_1+n)}}{\beta^{\kappa_1+n}} - 2^{2\kappa_1+n-2}\frac{a^{(\kappa_1+n-1)}c^{(\kappa_1+n-1)}}{\kappa^2}\frac{\delta^{(\kappa_1+n-1)}}{\beta^{\kappa_1+n-1}} \ldots$$

Addirt man nun zu jeder die Glieder, die unter den Logarithmen zeichen stehen, die erst q enthalten, so wird dieses, wenn man die Determinante von $\kappa^{\kappa-1}$ zu Hülfe nehmen würde:

$$\frac{2\,\partial^2 \log}{(\partial \log \eta)^2}\left(\frac{\kappa^{(\kappa_1-1)}}{\beta^{(\kappa_1-1)}}\right).$$

Von den vorderen mittleren Gliedern bleibt nur übrig von der Summe der zweiten und dritten Glieder in der Horizontalreihe blattes nur:

$$-\,2^{2\kappa_1-2}\frac{a^{(\kappa_1-1)}c^{(\kappa_1-1)}}{\kappa^2}\frac{\delta^{(\kappa_1-1)}}{\beta^{(\kappa_1-1)}},$$ da das andere fortfällt.

Ebenso wird die Summe der l. Glieder:

$$-\,2^{\kappa_1-1}\frac{\partial \log \dfrac{\kappa}{\delta^{(\kappa-1)}}}{\partial \log \eta}.$$

Also wird der Ge.

$$\frac{2\,\partial^2 \log}{(\partial \log \eta)^2}\left(\frac{\kappa^{(\kappa_1-1)}}{\beta^{(\kappa_1-1)}}\right) - 2^{2\kappa_1-2}\frac{a^{(\kappa_1-1)}c^{(\kappa_1-1)}}{\kappa^2}\frac{\delta^{(\kappa_1-1)}}{\beta^{\kappa_1-1}} - 2^{\kappa_1-1}\frac{\partial \log \dfrac{\kappa}{\delta^{\kappa-1}}}{\partial \log \eta}.$$

Dividiren wir durch $2^{2\kappa_1-1}$, so wird die Gl:

$$\frac{\partial^2\log\left(\frac{\kappa^{(\kappa_1-1)}}{\beta^{(\kappa_1-1)}}\right)}{\left(2^{\kappa_1-1}\log\eta\right)^2}-\frac{1}{2}\,\frac{a^{(\kappa_1-1)}c^{(\kappa_1-1)}}{\kappa^2}\,\frac{\delta^{(\kappa_1-1)}}{\beta^{(\kappa_1-1)}}-\frac{\partial\log\frac{\kappa}{b^{\kappa_1-1}}}{2^{\kappa_1-1}\partial\log\eta}=0 \text{ oder:}$$

$$\frac{\partial^2\log\left(\frac{\kappa^{(\kappa_1-1)}}{\beta^{(\kappa_1-1)}}\right)}{\left(\log\eta^{2^{\kappa_1-1}}\right)^2}-\frac{1}{2}\,\frac{a^{(\kappa_1-1)}c^{(\kappa_1-1)}\delta^{(\kappa_1-1)}}{\kappa^2\,\beta^{\kappa_1-1}}-\frac{\partial\log\frac{\kappa}{b^{(\kappa_1-1)}}}{\partial\log\eta^{(2^{\kappa_1-1})}}=0.$$

Aber $\eta^{2^{\kappa_1-1}}=\eta_{\kappa_1-1}$

$\eta^{2^{\kappa_1-1}}=\eta_{\kappa_1-1}$ also:

$$\frac{\partial^2\log\frac{\kappa^{(\kappa_1-1)}}{\beta^{\kappa_1-1}}}{\left(\log\eta_{\kappa_1-1}\right)^2}-\frac{1}{2}\,\frac{a^{(\kappa_1-1)}c^{(\kappa_1-1)}}{\kappa^2}\,\frac{\delta^{(\kappa_1-1)}}{\beta^{(\kappa_1-1)}}-\frac{\partial\log\frac{\kappa}{b_{\kappa_1-1}}}{\partial\log\eta_{\kappa_1-1}}=0.$$

κ_1 war eine beliebige Zahl. Setzen wir an ihre Stelle $n+1$ und für κ: κ_{κ_1-1} was ja erlaubt ist, so wird:

$$\frac{\partial^2\log\kappa^{(n)}}{\left(\log\eta^n\right)^2}-\frac{1}{2}\,\frac{a^{(n)}c^n}{\kappa_n^2}\,\frac{\delta^n}{\beta^n}-\frac{\partial\log\frac{\kappa_n}{b_n}}{\partial\log\eta_n}=0.$$

und dieses ist die zu beweisende Gl.

Also haben wir, daß ist:

$$\frac{\partial\log\frac{b^n}{\kappa^n}}{\partial\log\eta^n}=\frac{\partial^2\log\frac{a^n}{\kappa^n}}{(\partial\log\eta_n)^2}-\frac{1}{2}\,\frac{a^n c^n}{\kappa_n^2}\,\frac{\gamma^n}{\alpha^n}=\frac{\partial^2\log\frac{\beta^n}{\kappa_n^n}}{(\partial\log\eta)^2}+\frac{1}{2}\,\frac{a^n c^n}{\kappa^2}\,\frac{\delta^n}{\beta^n}$$

$$=\frac{\partial\log\frac{\gamma^n}{\kappa^n}}{(\partial\log\eta)^2}-\frac{1}{2}\,\frac{a^n c^n}{\kappa_n^2}\,\frac{\alpha^n}{\gamma^n}=\frac{\partial^2\log\frac{\delta^n}{\kappa^n}}{(\partial\log\eta)^2}+\frac{1}{2}\,\frac{a^n c^n}{\kappa_n^2}\,\frac{\beta^n}{\delta^n}$$

Aus diesen Sätzen können wir einen Schluss auf ein Integral machen, das noch allgemeiner als das vorhergehende ist

Es ist $\int \sqrt{a^2 \sin\psi^2 + b^2 \cos\psi^2}\, \partial\psi = \int \frac{a^2 b^2\, \partial v}{(a^2 \cos v^2 + b^2 \sin^2 v)^{\frac{3}{2}}}$

In der That es ist, wie gezeigt:

$$\partial\psi = \frac{b\, \partial \log\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)}{2i \sqrt{\frac{\alpha}{\delta} ab}}$$

$$\partial v = \frac{a\, \partial \log \frac{\delta}{\beta}}{2i \sqrt{\frac{\alpha}{\beta} ab}}$$

$$a^2 \sin\psi^2 + b^2 \cos\psi^2 = \sqrt{ab}.\frac{\beta}{\alpha}; \quad a^2 \sin^2 v + b^2 \cos v^2 = \sqrt{ab}.\frac{\alpha}{\delta}$$

Also folgt:

$$\frac{\cancel{\sqrt{ab.\frac{\beta}{\alpha}}}. b\, \partial \log\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)}{\cancel{2i \sqrt{\frac{\alpha}{\beta} ab}}} = \frac{a^2 b \sqrt{a}\, \partial.\log \frac{\delta}{\beta}}{2i\, \cancel{a.b.\frac{\alpha\beta}{\beta}.\sqrt{ab\frac{\alpha}{\delta}}\frac{\alpha}{\delta}ab}}$$ Also:

$\underline{b\, \partial \log \frac{\delta}{\alpha} = a \frac{\beta}{\alpha}\, \partial.\log \frac{\delta}{\beta}}$ und diese Relation findet wirklich

nach §19 statt.

Der Werth des Integrals selbst ist:

$$\int \sqrt{a^2 \sin\psi^2 + b^2 \cos\psi^2}\, \partial\psi = \frac{u}{k}\left\{a'^2 - 2c'' - 4c^{(3)} - 8c^{(4)} \cdots\right\}$$

$$+ c' \sin 2v' + c^{(2)} \sin 4 v^2 + c^{(3)} \sin 8 v^3 \cdots\cdots$$

In der That, die Grösse hinter dem Integralzeichen ist:

$$\frac{b}{2i} \sqrt{\frac{\delta\beta}{\alpha\gamma}}\, \partial \log \frac{\delta}{\alpha} = \frac{a.b}{2i\, k}\, \partial \log \eta \sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha^2}} =$$

$$\frac{ab}{k}.\frac{\beta}{\alpha}\, \partial u, \text{ da } \eta^{\pm\frac{1}{2}} = e^{\pm iu}$$

Ferner ergibt sich zugleich:

$$+2c^{(2)} - 4c^{(3)} - 8c^{(4)} \dots = \frac{\partial \log \frac{b''}{k}}{\Delta} \text{ und:}$$

$$-c'\sin 2v' + c''\sin 4v'' \dots = \frac{k}{2}\frac{\partial \log \frac{a}{k}}{\partial u} \text{ also:}$$

$$\int \frac{a.b.\beta}{k\,\alpha}\, \partial u = \frac{u}{k}\left\{\frac{\partial\log\frac{b''}{k}}{\Delta} + a'^2\right\} + \frac{k}{2}\frac{\partial \log\frac{a}{k}}{\partial u}. \text{ Also:}$$

$$\frac{a.b.\beta}{k\,\alpha} = \frac{1}{k}\left\{a'^2 + \frac{\partial\log\frac{b''}{k}}{\Delta}\right\} + \frac{k}{2}\frac{\partial^2\log\frac{a}{k}}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial^2\log\frac{a}{k}}{\partial u^2} = -4\frac{\partial^2\log\frac{a}{k}}{(\partial\log\eta)^2} \text{ da } \frac{\partial\log\eta}{\partial u} = 2i.$$

also:

$$\frac{a.b.\beta}{\alpha} = \left\{a'^2 + \frac{\partial\log\frac{b''}{k}}{\Delta}\right\} - 2k^2\frac{\partial^2\log\frac{a}{k}}{\partial\log\eta^2}$$ Nach der zuletzt ge-
fundenen Formel wird aber dieser Ausdruck:

$$\frac{a.b.\beta}{\alpha} = \left\{a'^2 + \frac{\partial\log\frac{b''}{k}}{\Delta}\right\} - \frac{2k^2\,\partial\log\frac{b}{k}}{\partial\log\eta} - \frac{a.c.\gamma}{\alpha}.$$

$$\partial\log\eta = 2\Delta k^2. \text{ Also:}$$

$$\Delta\frac{a.b.\beta}{\alpha} = a'^2\Delta + \partial\log\frac{b''}{k} - \partial\log\frac{b}{k} - \frac{a.c.\gamma}{\alpha}\Delta$$

$$\Delta\frac{a}{\alpha}[b\beta + c\gamma] = a'^2\Delta + \partial\log\frac{b''}{b}.$$

$$\Delta\alpha^2 = a'^2\Delta + \partial\log\frac{b''}{b}.$$

Nach der Definition von Δ wird dann:

$$\partial\log\frac{c}{b} = \frac{1}{2}\partial\log\frac{c'}{b'} + \partial\log\frac{b''}{b}$$

$$\partial\log\frac{(c)^2\, b'\, b}{b''^2\, c'} = \partial\log\eta = 0 \quad \text{q.e.d.}$$

Wintersemester 72/73.

Ueber Gleichungen vom fünften Grade nach Hermite.

Bevor wir zu unserer eigentlichen Aufgabe übergehen, wollen wir den Beweis von Schläfli für die Verwandlung der zwei Modulfunktionen $k^{\frac{1}{4}}$ $(kk')^{\frac{1}{2}}$ geben.–

I

Bezeichnen Ω und Ω' die beiden Periodicitätsmoduln eines elliptischen Integrals mit dem Modul k, so ist bekanntlich:

$$\Omega = 4\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = 4K.$$

$$\Omega' = 2\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = 2\int_{z'}^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = 2iK'$$

Offenbar sind diese beiden Größen Functionen des Moduls

$$x = k^2.$$

Nennen wir nun $2K$: $K(x)$, $2iK'$: $L(x)$

so können dieselben zunächst für den Fall, dass x zwischen 0 und 1 liegt und $\log\frac{16}{x}$ reell angenommen wird, ausgedrückt werden durch:

$$K(x) = \pi\Big(1 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}x^2 + \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{25}{36}x^3 + \frac{1.9.25.49}{4.16.36.64}x^4$$

$$+ \cdots \frac{1.9.25.\ldots(2n+1)^2}{4.16\ldots(2n+2)^2}x^{n+1} + \cdots = \Big[1 + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1.9.25\ldots(2n+1)^2 x^{n+1}}{4.16\ldots(2n+2)^2}\Big]\pi$$

$$\mathfrak{L}(x) = i \log \frac{16}{x} \frac{K(x)}{\pi} - i\Big[\frac{4}{1.2} \frac{1.1}{2.2} x + \Big[\frac{4}{1.2} + \frac{4}{3.4}\Big] \frac{1.1.3.3}{2.2.4.4} x^2$$

$$+ i\Big[\frac{4}{1.2} + \frac{4}{3.4} + \frac{4}{5.6}\Big] \frac{1.1.3.3.5.5}{2.2.4.4.6.6} x^3 + \Big[\frac{4}{1.2} + \frac{4}{3.4} + \frac{4}{5.6} + \frac{4}{7.8}\Big] \frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.2.4.4.6.6.8.8} x^4 +$$

$$i \log \frac{16}{x} + i \Big\{ \frac{1.1.3.3. \ldots 2n+1.2n+1}{2.2.4.4. \ldots 2n+2.2n+2} x^{n+1} \Big[\log \frac{16}{x} - 4\Big(\frac{1}{n+2} + \cdots \frac{1}{2n+2}\Big)$$

Man kann den Beweis hierfür direct geben, doch wollen wir uns bei demselben an die Sätze anschließen, die wir bei der Betrachtung des arithmetisch-geometrischen Mittels fanden.

Wir fanden nämlich:

$$\frac{1}{M(1, \sqrt{1-x})} = \frac{2K}{\pi} = F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, x)$$ wenn x unserer früheren Bezeichnung gemäß ist d. h.

$$K(x) = \frac{\pi}{2M(1, \sqrt{1-x})} = \pi F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, x).$$

Aber:

$$F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, x) = 1 + \frac{1}{4} x + \ldots\ldots \frac{1.1.3.3 \ldots 2n+1.2n+1}{2.2.4.4 \ldots 2n+2.2n+2} x^{n+1}$$

Mithin hat $K(x)$ in der That die oben angegebene Form.

Ferner fanden wir:

$$- \frac{iK'}{\pi} = \frac{1}{M(1, \sqrt{x})} = F(\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}, 1; 1-x).$$

$$2iK' = i\pi F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, 1-x) = \mathfrak{L}(x)$$

Nach Gauss Det. ser. nost. § 76 ergiebt:

$$F(\tfrac12,\tfrac12,1,1-x) = \frac{1}{\pi}\log\frac{16}{x}\,F(\tfrac12,\tfrac12,1,x) - \frac{1}{\pi}\Big[\frac{4}{1.2}\,\frac{1.1}{2.2}\,x + \cdots \Big(\frac{4}{1.2}+\frac{4}{3.4}+\frac{4}{5.6}+\cdots\frac{4}{2n+1.2n+2}\Big)\cdot$$
$$\frac{1.1.3.3\ldots 2n+1.2n+1}{2.2\ldots 2n+2.2n+2}\,x^{n+1}+\cdots\Big]$$

Formen wir zunächst um:

$$\frac{4}{1.2}+\frac{4}{3.4}+\cdots\frac{4}{2n+1.2n+2} = 4\Big[\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\cdots\frac{1}{2n+1.2n+2}\Big] = 4\Big[1-\frac12+\frac13-\frac14\cdots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\Big]$$

Dieses könnten wir auch schreiben:

$$\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots\frac{1}{2n+2}$$

Wir wollen dies so beweisen, dass wir zeigen, dass, wenn die Formel bis $\frac{1}{2n}$ gilt – und dass sie für $n=1.2.3..$ gilt, ist unmittelbar klar – sie auch bis $\frac{1}{2n+2}$ gelten muss.

In der That, es ist:

$$1-\frac12+\frac13+\cdots-\frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\quad\text{folglich:}$$

$$1-\frac12+\frac13+\cdots-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2} = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2(n+1)}\quad\text{aber}$$

$$\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2(n+1)}$$ womit ist die Wahrheit der Formel erwiesen.

Also können wir schreiben:

$$F(\tfrac12,\tfrac12,1,1-x) = \frac{1}{\pi}\log\frac{16}{x} + \frac{1}{\pi}x\Big[\log\frac{16}{x}-\frac{4}{1.2}\Big] + \frac{1}{\pi}x^2\Big[\log\frac{16}{x}-4\Big[\frac13+\frac14\Big]\Big]\frac{1.1.3.3}{2.2.4.4}$$
$$+\frac{1.1.3.3.5.5}{2.2.4.4.6.6}\,\frac{1}{\pi}x^3\Big[\log\frac{16}{x}-4\Big[\frac14+\frac15+\frac16\Big]\Big]+\cdots\frac{1}{\pi}x^{n+1}\Big[\log\frac{16}{x}-4\Big[\frac{1}{n+2}+\cdots\frac{1}{2n+2}\Big]\Big]\frac{1.1.3.3.\cdots 2n+1.2n+1}{2.2.4.4\ldots 2n+2.2n+2}$$
$$=\frac{1}{\pi}\log\frac{16}{x}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1.1.3.3\ldots 2n+1.2n+1}{2.2\ldots 2n+2.2n+2}\,x^{n+1}\Big[\log\frac{16}{x}-4\Big[\frac{1}{n+2}+\cdots\frac{1}{2n+2}\Big]\Big]$$

Bedenken wir, dass:

$L(x) = i\pi.F(\tfrac12,\tfrac12,1,1-x)$, so folgt aus dieser obigen Formel sofort.

Es handelt sich zunächst darum, die singulären Punkte der beiden Ausdrücke aufzustellen.

I. $K(x)$ wird in dem Punkte $x=1$ logarithmisch unendlich.

Wir können das am besten so beweisen.

Es ist:

$$K(x) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-x\cos\varphi}}$$

$$K(1) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi}{\sin\varphi}.$$

Nun $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi}{\sin\varphi} = \left[\log tg\frac{\varphi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

Also $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial x}{\sin\varphi} = -\log 0 \ldots$ d. h. es wird

$K(x)$ in $x=1$ logarithmisch unendlich.

II. $L(x)$ wird in $x=0$ logarithmisch unendlich.

Es geht dieses unmittelbar aus der Form hervor.

Da $\left[x^{\kappa}\log\frac{16}{x}\right]_{\substack{\kappa=1,\ldots\infty\\ x=0}} = 0$ ist, kommt $L(x)$ überhaupt nur unendlich durch das Glied $1\log\frac{16}{x}$ und dass dieses logarithmisch unendlich wird, ist klar.

III. Beide Ausdrücke werden in $x=\infty$ logarithmisch unendlich.

Es geht dieses daraus hervor, dass ab keine Dkf. nur in einem Punkte werden kann. Denn ergeben sich die Coefficienten der logarithmischen Glieder, so muss stets sein

$$\sum a_\nu \neq 0$$

und das wäre nicht möglich, wenn wir den logarithmischen Teil wegließen. Andrerseits kann $L(x)$ aber nur noch in $x=\infty$ unbeschränkt logarithmisch unendlich werden und daher vermöge einer Relation, die zwischen $L(x)$ und $K(x)$ besteht, und die wir sogleich ableiten werden, $K(x)$ auch.

Wir wissen also:

es wird $K(x)$ log. unendlich in $x=1$ u. $x=\infty$

" " $L(x)$ " " " $x=0$ u. $x=\infty$.

Die Relationen, die wir haben aufzustellen, sind nun:

$$\text{I} \quad K(1-x) = -i\, L(x)$$

$$\text{II} \quad L(1-x) = i\, K(x).$$

Es ließen sich dieselben direkt aus den Integralen vermöge einer einfachen Substitution zeigen, doch wollen wir wieder das arithm.-geom. Mittel anwenden.

Setzen wir: $1-x = x'$ d.h. $x = 1-x'$, so wird:

$$\frac{1}{M(1,\sqrt{x'})} = \frac{K(1-x')}{\pi} = F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1,1-x') = -i\,\frac{L(x')}{\pi} \text{ d.h.}$$

$$\text{I} \quad \underline{K(1-x') = -i\, L(x')} \text{ woraus folgt dann ebenso:}$$

$$\text{II} \quad \underline{L(1-x') = i\, K(x')}.$$

Denken wir uns jetzt einen Werth von x, der zwischen 0 und 1 liegt d.h. einen Werth, für den die obigen Reihen die Fkt. $K(x)$ u. $L(x)$

[illegible] unendlichen oft, dass x um diesen ursprünglichen Nennwerth M einen Umlauf um den Punkt Null macht, so werden die Fktn. $K(x)$ und $L(x)$ welche Werthe annehmen?

Denken wir uns dazu $x = re^{\varphi i}$ gesetzt, ferner r constant an und lassen φ von 0 bis 2π wachsen, so ist klar, dass $K(x)$ seinen ursprünglichen Werth beibehalten muss.

Bei $L(x)$ findet das aber nicht statt. Da der Fall, es wird dann aus $\log\frac{16}{x} = +\log\frac{x}{16} : -\log\frac{x}{16} - 2\pi i$ d.h. aus

$$\underline{L(x) : \quad L(x) + 2K(x).}$$

Wir wollen die hierbei entstehenden Functionen [illegible], die ursprünglichen Nennwerthfunctionen nennen, dann wird aus den Nennwerthen $K(x)$ und $L(x)$ nach λ Umläufen um den Punkt 0:

$$K(x) \quad \text{und} \quad 2\lambda . K(x) + L(x).$$

Setzen wir dieselben gleich $K'(x)$ und $L'(x)$ so können wir schreiben:

$$K'(x) = 1 . K(x) + 0 . L(x)$$

$$L'(x) = 2\lambda . K(x) + 1 . L(x)$$

und also sagen, es gehen die beiden Fkt. über in die Nennwerthfunctionen durch die Substitution:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Wenden wir uns jetzt $x = 1-x'$ gesetzt, und gehen nun ebenfalls von demselben Punkte M um den Punkt $x=1$ herum, so folgt dass, wenn wir den Punkt $x'=0$ herumgehen. Da aber:

$$K(1-x') = -i\,L(x). \quad L(1-x') = i\,K(x'),$$ so würde nach dem eben Gesagten:

$$L''(x) = L(x)$$

$$K''(x) = -i\left[L(x') + 2K(x')\right] = -i\left[iK(1-x') - 2i\,L(1-x')\right] = K(x) - 2L(x).$$

Also wird nach je Umläufen um den Punkt 1:

$$L''(x) = 0\cdot K(x) + 1\cdot L(x).$$

$$K''(x) = 1\cdot K(x) - 2\mu\, L(x).$$

Oder es gehen die Ordnungen $K''(x)$ und $L''(x)$ über in die Determinante. Vermöge der Substitution:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2\mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die beiden Substitutionen können wir zerlegen in:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\pi & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2\pi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ und:}$$

wobei die Multiplication in begrenzter Weise zu erfolgen hat.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2\mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2\mu \end{pmatrix}.$$ —

Offenbar kann man die beiden Wege zusammensetzen. Es würde dasselbe Resultat herauskommen müssen, wenn man von einem Punkte aus zuerst n Male um 0, dann zu [illegible] zurück [illegible] Mal um und wieder zu ihm zurück oder als Kreis auf irgend einen anderen Weges durch allen Werthe zurückzulegen.

Es lässt sich dies an einem Beispiel zeigen, daß auch es kein nöthig.

Durchläuft also x von M aus, wo die Thetafunktionen gilt, λ Mal um 0, dann μ Mal um 1 und kehrt nach M zurück, so erhält es eine Zweigfunktion, die durch die Substitution:

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&2\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-2\mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&2\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-2\mu\end{pmatrix}$$

durch das Zeichen aus ausgedrückt wird d.h. es wird die Zweigfunktion sein:

$$\left.\begin{aligned}K^{\lambda}(x)&=K(x)+2\mu\,L(x)\\ L^{\lambda}(x)&=2\lambda\,K(x)+1-2\lambda\cdot 2\mu\,L(x).\end{aligned}\right\}$$

Offenbar können wir so beliebige Umläufe zusammensetzen. Bedeuten nun $a_1\, b_1\, a_2\, b_2 \ldots a_n\, b_n$ ganze Zahlen, die positiv oder negativ sein können und von denen entweder a_1 oder b_n oder beide zugleich Null sein dürfen — wir wollen später zeigen, was das bedeutet und läuft die Variabele x von M aus $\frac{1}{2}a_1$ Mal um 0, dann $-\frac{1}{2}b_1$ Mal um 1, dann $\frac{1}{2}a_2$ Mal um 0, dann $-\frac{1}{2}b_2$ Mal um 1 u.s.w. und endlich $-\frac{1}{2}b_n$ Mal um 1 und kehrt nach M zurück, so ergibt das die entsprechende Zweigfunktion durch die Substitution

$$\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&a_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&b_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&a_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&b_2\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}0&1\\1&a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&b_n\end{pmatrix}$$

wobei die Zahlentheile, wie gezeigt, diesen Ausdruck haben muss, in der Anzahl ausgedrückt werden.

Es ist dann $\frac{\delta}{\beta}$ nichts anderes, als der Kettenbruch:

$$\frac{\delta}{\beta} = a_1 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{b_2 + \cdots \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{b_n}}}}}$$

$$\frac{\gamma}{\alpha} = a_1 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{b_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}.$$

Um die Richtigkeit beider Behauptungen nachzuweisen, brauchen wir offenbar nur die Richtigkeit der ersten nachzuweisen, denn da die Anzahl der Theilnenner eine gerade ist, muss vermöge der Relation: $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$; $\frac{\gamma}{\alpha}$ der vorletzte Näherungswerth des Kettenbruchs sein.

Dass aber $\frac{\delta}{\beta}$ wirklich durch jenen Kettenbruch ausgedrückt werden kann, geht aus dem Bildungsgesetz unmittelbar hervor.

Nennen wir die Grössen, die aus δ und β entstehen, wenn man eine, zwei etc. ... der Substitutionen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{pmatrix}$ als fortlaufende $\delta^{2n-1}\beta^{2n-1}$, $\delta^{2n-2}\beta^{2n-2}$ ... und bezeichnen wir andererseits die Näherungswerthe des Kettenbruchs mit $\delta'^{2n-1}\beta'^{2n-1}$ etc;

so muss [illegible], wie auch [illegible]:

$$\delta^{2k} = b_k \delta^{2k-1} + \delta^{2k-2}$$

$$\beta^{2k} = b_k \beta^{2k-1} + \beta^{2k-2}.$$

$$\delta^{2k-1} = a_k \delta^{2k-2} + \delta^{2k-3}$$

$$\beta^{2k-1} = a_k \beta^{2k-2} + \beta^{2k-3} \quad \text{oder auch:}$$

$$\delta'^{2k} = b_k \delta'^{2k-1} + \delta'^{2k-2}$$

etc.

Woraus folgt dann unmittelbar die Behauptung.

Ferner folgt eben aus dieser Form und daraus, dass die Zahl der Theilnenner immer gerade ist, dass:

$$\underline{\alpha \equiv \delta \equiv 1 \bmod 4}$$

$$\underline{\beta \equiv \gamma \equiv 0 \bmod 2.}$$

Noch zu bemerken ist

I der Fall, dass $a_1 = 0$ wird, dann ist $\frac{\delta}{\beta}$ ein ächter Bruch.

II " " " $b_n = 0$ ", dann ist der letzte Näherungsbruch d.h. der $2n$ gleich $\frac{\delta}{\beta}$: gleich dem $2n-2$ $\frac{\delta^{2n-2}}{\beta^{2n-2}}$, denn:

$$\begin{vmatrix} \alpha^{2n-1} & \beta^{2n-1} \\ \gamma^{2n-1} & \delta^{2n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta^{2n-1} & \alpha^{2n-1} \\ \delta^{2n-1} & \gamma^{2n-1} \end{vmatrix}.$$

Ein einzelnes Element der Zahlenreihe gleich Null anzunehmen, liegt keine Veranlassung vor, es würden sich dann nur drei Substitutionen zu einer einzigen vereinigen, nämlich:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a+b \end{pmatrix}.$$

Ferner ist zu bemerken, dass mit wachsendem n die Moduln der Zähler und Nenner der Reihenentwicklung wachsen, denn es ist z. B.

$$n_{2k} = b_k n_{2k-1} + n_{2k-2} = b_k \left[a_k n_{2k-2} + n_{2k-3} \right] + n_{k-2}$$

$$n_{2k-1} = \qquad a_k n_{2k-2} + n_{2k-3}.$$

daß aber, weil $b_k a_k$ .. ganze Zahlen sind, die nicht Null bedeuten können:

$$\mathrm{mod}\,(b_{k-1} n_{k-2} + n_{k-3}) < \mathrm{mod}\,\left(b_k (b_{k-1} n_{k-2} + n_{k-3}) + n_{k-2} \right.$$

ist klar.

Nur dann, wenn $b_k = 0$ wird die Ableitung nicht falsch, dann [illegible] der Fall, bei dem letzten Reihenentwicklung [illegible] besteht der Fall. —

So haben wir gezeigt, wie eine beliebige Menge von Elementen [illegible] in die Punkte 0 und 1 zusammenzufassen sind.

Es kann nun aber auch das Umgekehrte gefordert werden.

Es ist gegeben eine Substitution:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1. \text{ worin } \alpha \equiv 1 \bmod 2 \quad \beta \equiv \gamma \equiv 0 \bmod 2$$

es soll dieselbe in eine Menge elementarer Substitutionen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2n \end{pmatrix}$ aufgelöst werden, wobei wir die Bedingung hinzufügen, daß die Moduln der Zähler und Nenner der Reihenentwicklung wachsen sollen.

Offenbar ist dieses einzig möglich und zwar durch eine ganze Anzahl von Substitutionen, wenn $\mathrm{mod}\,\delta > \mathrm{mod}\,\gamma$, denn dann haben wir nur wieder die Gleichungen zu lösen:

$$z_{2k} = b_k z_{2k-1} + z_{2k-2} = \varrho_{2k-2} \bmod z_{2k-1} \text{ etc.}$$

mit der Bedingung, daß b_k eine gerade positive oder negative Zahl sei nun mod $z_{2k-2} \leq \mathrm{mod}^2\, 2k-1$.

Dadurch ist letztere <u>vollständig</u> bestimmt und zwar muss die Zahl der Theilnenner eine gerade sein, wenn

$$\left.\begin{array}{r} \underline{\alpha\delta - \beta\gamma = +1} \text{ und wenn } \alpha \equiv \delta, \text{ mod } n \\ \beta \equiv \gamma \equiv 0 \text{ mod } 2. \end{array}\right\} .-$$

Ist dagegen δ abs. $< \gamma$, so tritt gerade insofern [illegible] Stelle ein, dass $b_n = 0$ sein muss. Wie man aus dem obigen hervorgeht, muss $\frac{\gamma}{\alpha}$ in einen Kettenbruch verwandelt werden, der lauter gerade Theilnenner hat und dessen letzter Näherungswerth $\frac{\delta}{\beta}$ ist. In der That, wir fanden ja vorhin, dass $\frac{\delta}{\beta}$ gleich dem $2n-2$ ten Näherungswerthe ist. Die Anzahl der Theilnenner von $\frac{\gamma}{\alpha}$ ist dabei, wegen der geraden Eigenschaft des Zählers γ eine ungerade.

Wir könnten $\frac{\delta}{\beta}$ auch als Werth des Kettenbruchs betrachten, der nur die $2n-2$ Theilnenner $a_1 \dots b_{n-1}$ hat. –

So also sehen wir, dass <u>eine jede</u> Substitution $(\alpha\delta - \beta\gamma)$ die die oben aufgestellten Bedingungen befriedigt, sich in eine <u>gerade</u> Anzahl von Substitutionen der Form zerlegen lässt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2n \end{pmatrix}.$$

Wir wollen jetzt die Form der $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ einsehen:

$$\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-1\\1&a_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&b_1\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}0&1\\1&a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&b_n\end{pmatrix}$$ entstehen, wofür wir Anlagen haben.

Bei ähnlicher Bezeichnung, wie vorher, wird:

$$\beta = \beta^{2n} = b_n\beta_{2n-1} + \beta_{2n-2}$$

$$= b_n[a_n\beta_{2n-2} + \beta_{2n-3}] + \beta_{2n-2} = b_n\beta_{2n-3} + b_n a_n\beta_{2n-2} + \beta_{2n-2}$$

Zunächst ist klar, dass man nur festzulegen hat, dass nur von $a_0\ b_0$ kommen in dem Ausdrucke für β^{2n} nur Produkte zu stehen kommen werden, die aus einem, drei, fünf etc. Gliedern bestehen. Dabei sind die ersteren gerade die Glieder $b_1 + b_2 + \dots b_n$. Also wird:

$$\beta \equiv b_1 + b_2 + \dots b_n \mod 2,$$ da nämlich diese Glieder nur noch Produkte vorkommen, die dort nur mehr gerade Glieder enthalten.

Genauso lässt sich zeigen:

$$\gamma \equiv a_1 + a_2 + \dots a_n \mod 2.$$

Denken wir uns ferner α entwickelt, so wird:

$$\alpha = \beta^{2n-1} = a_n\beta_{2n-2} + \beta_{2n-3}$$

Entwickeln wir weiter, so sehen wir, dass der Ausdruck nur 1 plus Produkte aus 2, 4, 6 etc. der a u. b Glieder. Bezeichnen wir

Bezeichnet man die Summe der ternären Producte in der Entwickelung mit M, so wird $\underline{\alpha \equiv 1 + M \bmod 16}$

Für γ fanden wir:

$$\gamma \equiv a_1 + a_2 + \dots a_n \bmod 8$$

wobei auch wir Producte aus binären Ausgang? nur geraden Summen vorkommen.

Setzen wir daher:

$a_1 + a_2 + \dots a_n = \Sigma a$ und bezeichnen die Summe der binären Producte im Entwickelungsgliede, so wird jedenfalls auch:

$$\gamma \equiv A + N \bmod 16.$$

Dabei ist A, N wie derselben durch Aufg. 2, S. 8 und es wird die Form haben, wenn wir setzen:

$A_1 = a_2 + a_3 + \dots a_n.$ $A_2 = a_3 + \dots a_n \dots$ $A_{n-1} = a_n$

$N = b_1 A_1 + b_2 A_2 + \dots b_{n-1} A_{n-1}.$

In der That, entwickeln wir β_{2n-1}, so zeigt es sich, daß wir jedes $a_n \dots a_2$ multiplicirt ist mit allen b, die einen niedrigeren Index haben oder also umgekehrt alle b multiplicirt mit den a, die einen höheren Index als dieselben haben.

Ferner wird:

$M = b_1 A_1 (A - A_1) + b_2 A_2 (A - A_2) + \dots b_{n-1} A_{n-1} (A - A_{n-1})$.

Wir kommen dann so zu dem besten Resultat. Nach weiteren leichten Reductionen die Separate ausführlich, wird:

$$y = a_1 + a_2[1 + b_1 d_1] + a_3[1 + b_1 d_1 + b_2 d_3] + \dots + a_n[1 + b_1 d_1 + b_2 d_3 + \dots b_{n-1} d_{2n-3}] + \dots$$

Nun untersuchen wir die einzelnen Ausdrücke, welche wir setzen die Summe A hat, so wird das Resultat:

$$a_2 b_1 d_1$$

$$a_3[b_1 d_1 + b_2 d_3]$$

A $$a_4[b_1 d_1 + b_2 d_3 + b_3 d_5]$$

$$\vdots$$

$$a_n[b_1 d_1 + b_2 d_3 + \dots b_{n-1} d_{2n-3}] + \dots =$$

$$A_1 b_1 d_1 + A_2 b_2 d_3 + A_3 b_3 d_5 + \dots b_{n-1} A_{n-1} d_{2n-3} + \dots$$

Nehmen wir nun bloß die Glieder von $d_1, d_3 \dots d_{2n-3} \dots$ die aus einem Gliede bestehen, so wird dies, wie gezeigt:

$$a_1 \cdot a_1 + a_2, \dots \qquad a_1 + \dots a_{n-1} \text{ d.h.}$$

$$A - A_1 \cdot A - A_2 \quad \dots \quad A - A_{n-1} \text{ also in dem Ganzen:}$$

$$N = b_1 A_1 (A - A_1) + b_2 A_2 (A - A_2) + \dots b_{n-1} A_{n-1} (A - A_{n-1}) \text{ q.e.d.}$$

Dieses Resultat kann, wie unmittelbar klar, auf die Summe gebracht werden:

$N = AM - [b_1 a_1^2 + b_2 a_2^2 + \dots b_{n-1} a_{n-1}^2]$.

Wir wissen:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv 1 + M \\ \gamma \equiv A + N \end{array}\right\} \bmod 16.$$

also:

$$\alpha\gamma \equiv A + MN + AM + MN \bmod 16. \equiv A + AM + 2M + MN \bmod 16.$$

Aber $2AM \equiv MN \equiv 0 \bmod 16$ also:

$$\alpha\gamma \equiv A + N \bmod 16 \equiv A - [b_1 a_1^2 + b_2 a_2^2 + \dots b_{n-1} a_{n-1}^2] \bmod 16.$$

Also:

$$A - \alpha\gamma \equiv b_1 a_1^2 + b_2 a_2^2 + \dots b_{n-1} a_{n-1}^2 \bmod 16 \quad \text{aber:}$$

$$0 \equiv \cancel{2} b_1 (a_1 - 1) a_1 + b_2 a_2 (a_2 - 1) + \dots b_{n-1} (a_{n-1} - 1) a_n \bmod 16$$

$$A - \alpha\gamma \equiv 2[b_1 a_1 + b_2 a_2 + \dots b_{n-1} a_{n-1}] \equiv 2(\alpha - 1) \bmod 16.$$

Aber: $\alpha \equiv 1 \bmod 4$ also:

$$2 \equiv \alpha + 1 \bmod 4. \quad 2(\alpha - 1) \equiv \alpha^2 - 1 \bmod 16. \text{ also:}$$

$$A - \alpha\gamma \equiv \alpha^2 - 1 \bmod 16 \text{ oder}$$

$$A = a_1 + a_2 + \dots a_n \equiv \alpha\gamma + \alpha^2 - 1 \bmod 16.$$

Stellt man für β und δ ähnliche Betrachtungen an, bezeichnet man $B = b_1 + b_2 + \dots b_n$, so wird man vermöge genau derselben Rechnung:

$$+B = +b_1 + b_2 + \dots b_n \equiv -\delta\beta + \delta^2 - 1 \bmod 16. \equiv - [\delta\beta + \delta^2 - 1] \bmod 16$$

Man kann diese beiden Sätze noch auf eine etwas andere Form bringen.

Es ist $\alpha\delta = \beta\gamma + 1 \equiv 1 \mod 4$, ferner:

$$\alpha \equiv \delta \mod 4 \text{ u.s.f.}$$

$$\alpha - \delta \equiv 0 \mod 4 \text{ ebenso:}$$

$$\beta + \alpha + \delta \equiv 0 \mod 4$$

$$\gamma + \alpha + \delta \equiv 0 \mod 4 \text{ also:}$$

$$(\alpha - \delta)(\gamma + \alpha + \delta) \equiv 0;\ (\alpha - \delta)(\beta + \alpha + \delta) \equiv 0 \mod 16.$$

Also:

$$\left.\begin{aligned} A &\equiv \alpha\gamma + \alpha^2 - 1 \equiv \gamma\delta + \delta^2 - 1 \mod 16 \\ B &\equiv -\alpha\beta + \alpha^2 - 1 \equiv -\beta\delta + \delta^2 - 1 \mod 16. \end{aligned}\right\}$$

Also: $$A + B \equiv \alpha(\gamma - \beta) \equiv \delta(\gamma - \beta) \mod 16.$$

Ferner:

$$-\delta + \alpha(\beta\gamma + 1) \equiv (\alpha^2 - 1)\delta \equiv 0 \mod 8, \text{ ebenso:}$$

$$\delta(\beta\gamma + 1) - \alpha \equiv \alpha(\delta^2 - 1) \equiv 0 \mod 8. \text{ so wird:}$$

$$A + B \equiv (\beta - \gamma)[\alpha\beta\gamma - \delta] \equiv [\beta - \gamma][\beta\gamma\delta - \alpha] \mod 16,$$

eine Relation, die wir später benützen werden. —

Wir gehen jetzt zu den eigentlichen Untersuchungen. § 3.

Setzen wir:

$$\frac{\mathfrak{L}(x)}{K(x)} = z;\quad i\pi z = \log q;\quad x = \varphi^8(z),\quad 1 - x = \chi^8(z);\quad x(1-x) = \psi^{24}(z),$$

wobei wir $\varphi(z)$ $\chi(z)$ $\psi(z)$ [illegible] annehmen wollen.

Es ist:

$$\kappa = \left[\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}\right]^4$$

$$1 - \kappa = \left[\frac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_3(0)}\right]^4$$

Verwandeln wir nun ϑ_3 ϑ_2 ϑ_0 in unendliche Producte entwickelt, so wird:

$$\varphi(z) = 2^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\pi z}{8}} \frac{\Pi(1+q^{2n})}{\Pi(1+q^m)}; \quad \chi(z) = \frac{\Pi(1-q^m)}{\Pi(1+q^m)}; \quad \psi(z) = \frac{2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{i\pi z}{24}}}{\Pi(1+q^n)}$$

wo n jede positive ganze Zahl, m jede positive ungerade Zahl bedeutet.

Dann ist:

$$\varphi(-\tfrac{1}{z}) = \chi(z).$$

In der That:

$$-\frac{1}{z} = -\frac{K'(x)}{K(x)} = \frac{K(1-x)}{K'(1-x)} \text{ u. s. f.}$$

$$1-x = \varphi^8(-\tfrac{1}{z}) = \chi^8(z). \text{ also:}$$

$$\text{I} \quad \varphi(-\tfrac{1}{z}) = \chi(z). \text{ Ebenso:}$$

$$\text{II} \quad \chi(-\tfrac{1}{z}) = \varphi(z).$$

$$\text{III} \quad \psi(-\tfrac{1}{z}) = \psi(z).$$

Ferner:

$$\varphi(1+z) = e^{\frac{i\pi}{8}} \frac{\varphi(z)}{\chi(z)} \text{ denn dann wird aus } q:$$

$$q\, e^{i\pi} = -q. \text{ also:}$$

$$\varphi(z) = 2^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\pi}{8}} \cdot e^{\frac{i\pi z}{8}} \frac{\Pi(1+q^{2n})}{\Pi(1-q^m)} = e^{\frac{i\pi}{8}} \frac{\varphi(z)}{\chi(z)}.$$

Setzen wir $\frac{i\pi}{8} = \log \varrho$, so wird also:

$$\text{IV} \quad \varphi(1+z) = \varrho \frac{\varphi(z)}{\chi(z)}. \text{ Ebenso:}$$

$$\text{V} \quad \chi(1+z) = \frac{1}{\chi(z)}$$

$\psi(1+z) = e^{\frac{i\pi}{24}} \dfrac{\psi(z)}{\chi(z)}$ denn:

$$\psi(1+z) = 2^{\frac{1}{6}} \cdot e^{\frac{i\pi}{24}} \, e^{\frac{i\pi z}{24}} \frac{1}{\Pi(1-q^m)} = e^{\frac{i\pi}{24}} \frac{\psi(z)}{\chi(z)}$$

Setzen wir $\frac{i\pi}{24} = \log \varepsilon$, so wird also:

$$\text{VI} \quad \psi(1+z) = \varepsilon \frac{\psi(z)}{\chi(z)}$$

Denken wir uns nun, dass x $\frac{a}{2}$ Umläufe um einen der Theilpunkte macht, dann wird sich gegenseitig $K(x) : K(x)$ und $L(x) : aK(x) + L(x)$.

d.h. wird $\frac{L(x)}{K(x)} : \frac{aK(x) + L(x)}{K(x)}$ d.h. wird $z : a+z$.

Ist aber a eine gerade Zahl, so wird:

$$\text{VII} \quad \varphi(a+z) = \varepsilon^{a} \varphi(z).$$

$$\text{VIII} \quad \chi(a+z) = \chi(z).$$

Macht ferner x : $-\frac{1}{2} b$ Umläufe um 1, so wird dann:

$K(x) : K(x) + bL(x)$

$L(x) : L(x)$ d.h. wird:

$\frac{L(x)}{K(x)} : \frac{L(x)}{K(x) + bL(x)}$ d.h. wird $z : \frac{z}{1+bz}$.

Dann wird:

$$\text{IX} \quad \varphi\left(\frac{z}{1+bz}\right) = \varphi(z).$$ In der That, es ist:

$$\varphi\left(\frac{z}{1+bz}\right) = \chi\left(-\frac{1+bz}{z}\right) = \chi\left[-\left(\frac{1}{z} + b\right)\right] = \chi\left(-\frac{1}{z}\right) = \varphi(z).$$

$$\text{X} \quad \chi\left(\frac{z}{1+bz}\right) = \varepsilon^{-b} \chi(z)$$ denn:

$$\chi\left(\frac{z}{1+bz}\right) = \varphi\left(-\frac{1+bz}{z}\right) = \varphi\left[-\left(\frac{1}{z} + b\right)\right] = \varepsilon^{-b} \varphi\left(-\frac{1}{z}\right) = \varepsilon^{-b} \chi(z).$$

Macht man $x = +\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2 \dots + \frac{1}{2}a_n$ Umläufe um 0, $-\frac{1}{2}b_1 \dots -\frac{1}{2}b_n$ Umläufe um 1, so haben wir gesehen, dass wir die ursprünglichen Substitutionen [illegible] folgen können $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ d.h. es wird auch

$$\frac{\chi(x)}{\varkappa(x)} = \frac{\gamma\varkappa(x) + \delta\chi(x)}{\alpha\varkappa(x) + \beta\chi(x)} = \frac{\gamma + \delta\frac{\chi(x)}{\varkappa(x)}}{\alpha + \beta\frac{\chi(x)}{\varkappa(x)}}$$ oder auch

$$z = \frac{\gamma + \delta z}{\alpha + \beta z}.$$

Umgekehrt können wir diese Substitution zusammensetzen aus den Substitutionen

$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & a_1\end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b_n\end{pmatrix}$ oder, indem wir hier z setzen

$$z = a_1 + z \dots a_n + z;\quad \frac{z}{1+b_1 z} \dots \frac{z}{1+b_n z}.$$

Schreiben wir dieses, so wird also:

XI $\underline{\varphi\left(\frac{\gamma+\delta z}{\alpha+\beta z}\right) = \varrho^{\Sigma a}\,\varphi(z).}$

XII $\underline{\chi\left(\frac{\gamma+\delta z}{\alpha+\beta z}\right) = \varrho^{-\Sigma b}\,\chi(z)}$, wobei:

$$\Sigma a = \alpha\gamma \equiv \alpha\gamma + \alpha^2 - 1 \equiv \gamma\delta + \delta^2 - 1 \mod 16.$$

$$-\Sigma b = +\beta \equiv -\alpha\beta + \alpha^2 - 1 \equiv -\beta\delta - \delta^2 + 1 \mod 16$$ ist:

$$\alpha \equiv \delta \equiv 1 \mod 4;\quad \beta \equiv \gamma \equiv 0 \mod 2.$$

Da aber wir ursprünglich die Formeln [illegible], wenn man die [illegible] Substitutionscoefficienten [illegible], so kann die Bedingung $\alpha \equiv \delta \equiv 1 \mod 4$ fortgelassen werden, wodurch als [illegible] bleibt: $\underline{\beta \equiv \gamma \equiv 0 \mod 2}$

Damit ist die Aufgabe für diesen einen Fall in ihrer ganzen Allgemeinheit gelöst. Es bleibt übrig, die anderen Fälle darauf zurückzuführen.

Behalten wir die bei Hermite gebräuchlichen Indices, so wird dieser Fall:

V γ ungerade, β gerade, $\alpha\ \delta$ ungerade.

Offenbar muss $\alpha \equiv \delta \bmod 4$ und $\beta \equiv 0 \bmod 4$ sein, während $\gamma \equiv 1$ od. $3 \bmod 4$ sein kann. $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$

Da aber, wie gezeigt, sich nichts ändert, wenn man statt der $\alpha\beta\gamma\delta$, $-\alpha\ -\beta\ -\gamma\ -\delta$ setzt, so können wir annehmen:

$$\alpha \equiv \delta \equiv 1 \bmod 4;\ \beta \equiv 0 \bmod 4 \qquad \gamma \equiv 1 \text{ od. } 3 \bmod 4.$$

Wir reduciren diesen Fall unmittelbar auf den vorigen, wenn wir setzen:

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha-\beta, & \beta\\ \gamma-\delta, & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$ denn alsdann ist $\gamma-\delta$ eine gerade Zahl.

Denn wenn also wie oben wir setzen:

$$\frac{\gamma+\delta\tau}{\alpha+\beta\tau} = z.$$

$$\varphi(z) = \varsigma^{\lambda}\frac{\varphi(\tau)}{\chi(\tau)} \text{ wobei:}$$

$$\lambda = 1 + [(\gamma-\delta)\delta + \delta^2 - 1] \equiv \gamma\delta \text{ ist.}$$

In der That, es ist:

$$\varphi\left[\frac{\gamma-\delta+\delta\tau}{\alpha-\beta+\beta\tau}\right] = \varsigma^{\lambda-1}\varphi(\tau). \text{ und}$$

$$\varsigma^{\lambda-1}\varphi(1+\tau) = \varsigma^{\lambda}\frac{\varphi(\tau)}{\chi(\tau)}. \text{ Also:}$$

$$\text{XIII} \quad \underline{\varphi(z) = \varsigma^{\lambda}\frac{\varphi(\tau)}{\chi(\tau)}}$$

Beweis: XIV $\underline{\chi(z) = \varsigma^{\alpha\beta^2}}\frac{1}{\chi(z)}$ wo

$$\beta^2 \equiv \alpha\beta\delta + \delta^2 - 1 \mod 16, \text{ dann } \equiv \alpha^2 + 1 - \beta\alpha.$$

$$\chi\left[\frac{\gamma - \delta + \delta z}{\alpha - \beta + \beta z}\right] = \varsigma^{\alpha\beta^2}\chi(z)$$

$$\varsigma^{\alpha\beta^2}\chi(1+z) = \varsigma^{\alpha\beta^2}\frac{1}{\chi(z)} \text{ q. e. d.}$$

Nun finden die Relationen statt:

$\alpha\beta^2 \equiv \alpha\gamma\,(16)$ Denn das Zeil:

$$\alpha\beta^2 \equiv \gamma\delta + \beta\delta + \delta^2 - 1 \mod 16 \quad \text{oder ist zu beweisen}$$

$$\alpha\gamma \equiv \gamma\delta + \beta\delta + \delta^2 - 1 \mod 16 \text{ oder}$$

$$\alpha\gamma \equiv \gamma\delta + \beta\delta + 2\delta - 2 \mod 16.$$

$$\delta = \frac{\beta\gamma + 1}{\alpha} \text{ oder:}$$

$$\alpha^2\gamma \equiv \gamma[\beta\gamma + 1] + \beta[\beta\gamma + 1] + 2[\beta\gamma + 1] - 2\alpha \ (16.)$$

Daher ist $\beta \equiv 0 \mod 4$, $\alpha \equiv \delta \equiv 1 \mod 4$. $\gamma \equiv 1\,(3) \mod 4$.

Nehmen wir $\underline{\gamma \equiv 1 \mod 4}$, so wird die obige Congruenz:

$$\alpha^2\gamma \equiv \gamma[\beta + 1] + \beta[\beta + 1] + 2[\beta + 1] - 2\alpha \ (16)$$

$$\alpha^2\gamma \equiv \gamma\beta + \gamma + 3\beta + 2 - 2\alpha.$$

$$\alpha^2 \equiv (2\alpha - 1) \mod 16.$$

$$(2\alpha - 1)\gamma \equiv \beta + \gamma + 3\beta + 2 - 2\alpha \equiv \gamma + 4\beta + 2 - 2\alpha.$$

$$2[\alpha + \gamma - 1] - \cancel{\gamma} \equiv \cancel{\gamma} + 2 - 2\alpha. \mod 16.$$

$$4\alpha \equiv 4 \mod 16.$$

$$\alpha \equiv 4n + 1$$

$$\underline{4 \equiv 4 \mod 16} \text{ q. e. d.}$$

[illegible] der [illegible] $\equiv$ [illegible]

Ebenso folgt:

$$A + B \equiv (\beta-\gamma)[\beta\gamma\delta-\alpha]$$

[illegible]:

$$(\beta-\gamma)[\beta\gamma\delta-\alpha] \equiv -\gamma^2\delta\beta+\alpha\gamma-\alpha\beta. \equiv -[2\gamma-1]\delta\beta+\alpha\gamma-\alpha\beta \equiv$$

$$-[2\beta-\beta]\delta+\alpha+\gamma-1-\beta \equiv -\beta+\alpha+\gamma-1-\beta \equiv -2\beta+\alpha+\gamma-1.$$

Denselben Werth [illegible]:

$$A+B \equiv \gamma\delta-\beta\delta-\delta^2+1 \equiv \gamma\alpha+\beta\alpha-\alpha^2+1.$$

Daher [illegible]:

$$(\beta-\gamma)(\beta\gamma\delta-\alpha) \equiv (\beta-\gamma)[\delta(\alpha\delta-1)-\alpha] \equiv (\beta-\gamma)(\delta-\alpha) \equiv -\beta-\gamma\delta+2\gamma \equiv -\beta-\gamma-\delta+1+2\gamma$$

$$\equiv -\beta-\delta+1+\gamma.$$

[illegible]:

$$\gamma\delta-\beta\delta-\delta^2+1 \equiv \gamma+\delta-1-\beta-2\delta+2 \equiv -\beta-\delta+1+\gamma.$$

oder

$$-\beta-\delta+1+\gamma \equiv -\beta-\delta+1-1 \quad \text{q.e.d.}$$

III [illegible]

[illegible]

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha, & \beta-\alpha\\ \gamma, & \delta-\gamma\end{pmatrix}$$ [illegible]

XV $\varphi(\tau) = q^{A}\dfrac{1}{\varphi(\tau')}$ wobei:

$$A = [\alpha\gamma+\alpha^2-1] \equiv \gamma(\delta-\gamma)+(\delta-\gamma)^2-1 \equiv \delta^2-1-\gamma\delta.$$

In der That:

$$\varphi\left[\frac{\gamma+(\delta-\gamma)z}{\alpha+(\beta-\alpha)z}\right] = \rho^{A}\,\varphi(z).$$

$$\rho^{A}\left(\varphi\left(\frac{z}{1+z}\right)\right) = \rho^{A}\,\frac{1}{\varphi(z)} \text{ denn:}$$

$$\varphi\left(\frac{z}{1+z}\right) = \chi\left(-\frac{1+z}{z}\right) = \chi\left(-\frac{1}{z}-1\right) = \frac{1}{\chi\left(-\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\varphi(z)}.$$

Ferner:

$$\chi\,\overline{\underline{VI}}\;\chi(z) = \rho^{+B'}\frac{\chi(z)}{\varphi(z)}, \text{ wobei:}$$

$$B' = -\alpha(\beta-\alpha) + \alpha^2 = -\alpha\beta \equiv -(\beta-\alpha)(\delta-\gamma) + (\delta-\gamma)^2$$

denn:

$$\chi\left[\frac{\gamma+(\delta-\gamma)z}{\alpha+(\beta-\alpha)z}\right] = \rho^{+B'+1}\,\chi(z) \text{ und:}$$

$$\rho^{+B'+1}\left(\chi\left(\frac{z}{1+z}\right)\right) \equiv \rho^{+B'}\frac{\chi(z)}{\varphi(z)} \text{ denn:}$$

$$\chi\left(\frac{z}{1+z}\right) = \varphi\left(-\frac{1+z}{z}\right) = \varphi\left(-\frac{1}{z}-1\right) = \rho^{-1}\frac{\varphi\left(-\frac{1}{z}\right)}{\chi\left(-\frac{1}{z}\right)} \equiv \rho^{-1}\left(\frac{\chi(z)}{\varphi(z)}\right) \text{ q.e.d.}$$

Genau auf dieselbe Weise, wie vorher lässt sich dann ferner zeigen:

$$A + B' \equiv \beta\delta\,; \quad A + B' = (\beta-\gamma)(\alpha\beta\gamma-\delta).$$

Zu dem vorher Bemerkten aus den übrigen unmittelbar durch Niederschreiben der Gleichungen folgen.

Es bleiben jetzt noch drei Fälle übrig, die wieder aus den früheren unmittelbar folgen:

$\overline{\underline{II}}$ $\alpha\delta$ gerade, $\beta\gamma$ ungerade.

Folgt nun sogleich:

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix}-\gamma & -\delta\\ \alpha & \beta\end{pmatrix}}^{2}\overbrace{\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}}^{1} \text{ hieraus mit dem}$$

[illegible] Fall I) [illegible] die

$$\varphi\left(-\tfrac{1}{z}\right) = \chi(z),\quad \chi\left(-\tfrac{1}{z}\right) = \varphi(z)$$ wenn; [illegible]

klar:

$\overline{\text{XVI}}$ $\varphi(z) = q^{A}\chi(z)$.

$\overline{\text{XVII}}$ $\chi(z) = q^{+B}\varphi(z)$ wobei:

$$A = \gamma\delta + \gamma^2 - 1 = \beta\delta + \beta^2 - 1.$$

$$+B = -\alpha\gamma + \gamma^2 - 1 = \alpha\beta + \beta^2 - 1.$$

$$A + B = \gamma(\alpha - \delta) = -\beta(\alpha - \delta)$$

$$A + B = (\gamma+\delta)(\beta - \alpha\gamma\delta) = (\alpha+\delta)(\alpha\beta\delta - \gamma).$$

Wenn man diese Formeln so fort [illegible], wenn man bedenkt, daß [illegible] an Stelle von $\varphi(z)$: $\chi(z)$ und $\chi(z)$: $\varphi(z)$ [illegible] an Stelle von $\begin{matrix}\alpha & \beta & \gamma & \delta\\ -\gamma & -\delta & \alpha & \beta\end{matrix}$ getreten ist:

$\overline{\text{VI}}$ wo n α [illegible] gerade.

$\overline{\text{XVIII}}$ $\varphi(z) = q^{A}\dfrac{\chi(z)}{\varphi(z)}$, $\overline{\text{XIX}}$ $\chi(z) = q^{+B}\dfrac{1}{\varphi(z)}$ (entspricht Fall $\overline{\text{III}}$).

$$A = -\gamma\delta,\ +B = -\alpha\gamma + \gamma^2 - 1 = -\alpha\beta + \beta^2 - 1.$$

$$A + B = -\beta\delta;\quad A + B = (\alpha+\delta)(\beta - \alpha\gamma\delta).$$

$\overline{\text{V}}$ wo δ [illegible] gerade:

$\overline{\text{XX}}$ $\varphi(z) = q^{A}\dfrac{1}{\chi(z)}$ (entspricht Fall $\overline{\text{V}}$)

$\overline{\text{XXI}}$ $\chi(z) = q^{+B}\dfrac{\varphi(z)}{\chi(z)}$ wobei

$$A = \gamma\delta + \gamma^2 - 1 = \beta\delta + \beta^2 - 1.\quad B = \alpha\beta.$$

$$A + B = \alpha\gamma;\quad A + B = (\alpha+\delta)(\alpha\beta\delta - \gamma).$$

---

§ 5

Die ψ Fkt. entsteht durch Multiplication der φ und χ Fkt. Wir werden also sofort folgende Relationen erhalten:

wenn β, γ gerade oder wenn $\alpha\,\delta$ gerade (I II) $\psi(\tau) = \varepsilon^{C}\,\psi(\tau)$

wenn nur α od. nur γ gerade (VI, III) $\psi(\tau) = \varepsilon^{C}\,\dfrac{\psi(\tau)}{\varphi(\tau)}$ XXII

wenn nur β od. nur δ gerade (V IV) $\psi(\tau) = \varepsilon^{C}\,\dfrac{\psi(\tau)}{\chi(\tau)}$

Wobei ist nun:

$$\varepsilon^{A+B} = \varepsilon^{C} = \varepsilon^{3(A+B)}$$

$$C \equiv A+B \mod. 6.$$

und wir finden:

$$\begin{aligned}
&\text{II VI} \quad C \equiv (\alpha+\delta)(\beta-\alpha\gamma\delta) \\
&\text{I, V} \quad C \equiv (\beta-\gamma)(\beta\gamma\delta-\alpha) \\
&\text{I, III} \quad C \equiv (\beta-\gamma)(\alpha\beta\gamma-\delta) \\
&(\text{II IV}) \quad C \equiv (\alpha+\delta)(\alpha\beta\delta-\gamma)
\end{aligned} \quad \text{mod. 6.} \quad \text{XXIII}$$

Es lässt sich nun nachweisen, dass C diesen Grössen auch modulo 48 congruent ist.

Dazu nehmen wir folgende Betrachtungen:

Fassen wir $\psi(\tau)$ als eine ψ Fkt. mit dem Argument τ auf, so muss es nothwendig die eben aufgestellten Bedingungen befriedigen. Setzen wir für τ: $\dfrac{m+n\tau}{\mu+\nu\tau}$; $m\nu - n\mu = 1$,

so finden für die 6 bekannten Fälle jene Relationen statt.

Wir leiteten alle diese Relationen oder können sie wenigstens ableiten, indem wir dieselben wegen durch Multiplication der entsprechenden φ u. χ Fkt. fanden — aus diesen beiden Relationen:

$$\psi(a+z) = \varepsilon^{a}\,\psi(z)$$

$$\psi\left(\frac{z}{1+6z}\right) = \varepsilon^{-36}\,\psi(z).$$

Diese beiden Formeln folgen aber wiederum allein aus:

$$\left.\begin{aligned} a)\quad & \psi(1+z) = \varepsilon\,\frac{\psi(z)}{\chi(z)} \\ b)\quad & \psi\left(-\tfrac{1}{z}\right) = \psi(z). \end{aligned}\right\}$$

Es ist also die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $\psi(z)$ allen Bedingungen oder Verwandlungsformen genüge, daß es diesen beiden Formen genüge.

Andrerseits sei:

$$\psi(z) = \varepsilon^{C}\,\frac{\psi(z)}{\chi(z)}$$

Es muß also $\varepsilon^{C}\frac{\psi(z)}{\chi(z)}$ auch jenen Bedingungen a und b genügen d.h. im Falle b muß C in C' übergehen, wobei:

$\underline{C' \equiv C \mod 48}$ und im Falle a). C in D wo

$\underline{D \equiv C+1 \mod 48}$

Haben wir umgekehrt einen Ausdruck für C, der diesen beiden Bedingungen Genüge leistet, so muß C ihm congruent 48 sein. Wir sollen beweisen, daß die in XVIII aufgestellten Ausdrücke für C solche Ausdrücke sind. Wir wissen, daß dieselben congruent C modulo 16 sind d.h. daß sie im Falle a und b in Ausdrücke übergehen, die ihnen resp. 1 oder 0 congruent mod 16 sind.

Wir werden somit alles nachgewiesen haben, wenn wir zeigen daß jene Ausdrücke für C, die wir C' bezeichnen wollen, im Falle a) werden $\equiv C'+1 \bmod 3$, im Falle b) $\equiv C' \bmod 3$.

Betrachten wir zunächst die Aufgabe!

Offenbar dürfen wir bei den Verwandlungen von $\Sigma^{C'}\frac{\psi(z)}{\varphi(z)}$ u. $\Sigma^{C'}\frac{\psi(z)}{\chi(z)}$ zu unserem Beweise $\varphi(z)$ und $\chi(z)$ weglassen. Da der Exp. bei den Verwandlungen dieser Art kommen immer nur Potenzen ε von dreigliedriger Rolle modulo 3 sind $[\varepsilon = \varepsilon^3]$, welche von selbst jene Bedingung erfüllen.

Also dürfen wir uns nur mit $\varepsilon^{C'}\psi(z)$ beschäftigen.

Ferner dürfen wir aber auch nicht alle 4 Fälle von C zu unterscheiden, sondern einer genüge.

Wir werden dort nachgewiesen haben, wenn wir zeigen, daß:

$$(\alpha+\delta)(\beta-\alpha\gamma\delta) \equiv (\beta-\gamma)(\beta\gamma\delta-\alpha) \equiv (\beta-\gamma)(\alpha\beta\gamma-\delta) \equiv (\alpha+\delta)(\alpha\beta\delta-\gamma) \bmod 3$$

Wir wollen dasselbe nicht für jeden speziellen Fall wirklich nachweisen, nur die Rechnungen andeuten.

Wenn $\alpha\delta \equiv 0$, $\beta\gamma \equiv -1$, so wird:

$$(\alpha+\delta)(\beta-\alpha\gamma\delta) = \beta(\alpha+\delta) \equiv (\alpha+\delta)(\alpha\beta\delta-\gamma) \bmod 3.$$

Ebenso: $(\beta-\gamma)(\beta\gamma\delta-\alpha) \equiv (-\beta+\gamma)(\delta+\alpha) \equiv \beta(\alpha+\delta) \bmod 3$, denn

$$-\beta^2 \equiv 1 \bmod 2,$$ wie wir auch β voraussetzen mögen.

Ebenso: $(\beta-\gamma)(\alpha\beta\gamma-\delta) \equiv \beta(\alpha+\delta) \bmod 3$.

Vollständig verhält sich ganz ebenso der Fall, daß

$$\beta\gamma \equiv 0,\ \alpha\delta \equiv 1, \text{ und wenn } \alpha\delta \equiv -1,\ \beta\gamma \equiv 1.$$

Dieses tritt bei den drei einzig möglichen Fällen, folglich dürfen wir uns nur auf den C beschränken z. B.

$$C = (\alpha+\delta)(\alpha\beta\delta-\gamma).$$

Wir haben also zu untersuchen, was aus $(\alpha+\delta)(\alpha\beta\delta-\gamma)$ mod 3 wird, wenn I die Substitution $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ [dieser entspricht dem Fall b]

II " " $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ [" " " " a]

[illegible] werden der Substitution $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ oder mit anderen Worten, was aus $(\alpha+\delta)(\alpha\beta\delta-\gamma)$ wird, wenn man setzt $z = -\frac{1}{z}$ und ferner $z = 1+z$.

Im I^ten Falle hat man $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ alle zu ersetzen durch $\gamma\ \delta\ -\alpha\ -\beta$, so daß aus $(\alpha+\delta)(\alpha\beta\delta-\gamma)$ wird: $(\beta-\gamma)(\beta\gamma\delta-\alpha)$. Wir bemerken [illegible] dieses [illegible] mod 3 [illegible], so daß also dieser Fall abgethan ist.

II ist $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ zu ersetzen durch $\alpha\,\beta,\ \gamma+\alpha,\ \delta+\beta$ also wird aus $\overset{=C}{(\alpha+\delta)(\alpha\beta\delta-\gamma)}$: $(\alpha+\delta+\beta)\left[\alpha\beta\delta-\gamma+\alpha(\beta^2-1)\right] = D.$

Es ergiebt sich dann unmittelbar, daß:

$$D - C \equiv 1 \bmod 3 \quad q.e.d.$$

Mithin haben wir den [illegible] und es wird:

$$(\underline{I}\ \underline{II})\ \psi(z) = \varepsilon^{C}\psi(z);\ (\underline{VI}\ \underline{III})\ \psi(z) = \varepsilon^{C}\frac{\psi(z)}{\varphi(z)};\ \psi(z) = \varepsilon^{C}\frac{\psi(z)}{\chi(z)}\ (\underline{V}, \underline{IV})$$

wobei also:

$$\left.\begin{aligned}
(\mathrm{II}\ \mathrm{VI})\ c &\equiv (\alpha+\delta)(\beta-\alpha\gamma\delta) \\
(\mathrm{I}\ \mathrm{V})\ c &\equiv (\beta-\gamma)(\beta\gamma\delta-\alpha) \\
(\mathrm{I}\ \mathrm{III})\ c &\equiv (\beta-\gamma)(\alpha\beta\gamma-\delta) \\
(\mathrm{II}\ \mathrm{IV})\ c &\equiv (\alpha+\delta)(\alpha\beta\delta-\gamma)
\end{aligned}\right\} \text{ mod. 2.}$$

Wir gehen jetzt zu unserem eigentlichen Thema über. — Man nennt eine Transformation:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

eine Transformation n^{ten} Grades, wenn:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = n. \text{ ist.}$$

Es lassen sich diese in Klassen zerlegen.

Sei uns irgend ein bestimmtes System von Transformationszahlen gegeben, welches zum n^{ten} Grade gehört, so sollen alle diejenigen Systeme, welche durch Anwendung sämtlicher linearen Transformationen aus diesem entstehen — es bleibt dadurch natürlich die Transformation vom n^{ten} Grade — mit dem ersten zu einer Klasse gehören. Nimmt man nun aus dieser Klasse irgend eine Transformation n^{ten} Grades heraus, so bildet diese mit den durch alle linearen Transformationen

Aus dieser abgeleiteten eine zweite Klasse u.s.f.

Man hat für jede Klasse für einen bestimmten Transformations-grad einen gewissen Repräsentanten festgesetzt.

Hierdurch lässt sich zeigen, dass die Klassenanzahl eine endliche sein muss. Ist der Grad eine Primzahl p, so ist die Klassenanzahl $(p+1)$ und die Repräsentanten der einzelnen Klassen die Substitutionen:

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 16\cdot 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 16\cdot 1 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} p & 0 \\ 16(p-1) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}.$$

Zwischen den 4ten Wurzeln der Moduln der ursprünglichen und der transformierten Integrale d.h. zwischen $\varphi(\tau)$ und $\varphi\left(\frac{\gamma+\delta\tau}{\alpha+\beta\tau}\right)$ $\quad \alpha\delta-\beta\gamma=1$ besteht nun für diesen Fall eine Gleichung $(p+1)^{\text{ten}}$ Grades, deren $(p+1)$ Lösungen gemäss die $(p+1)$ Repräsentanten der einzelnen Klassen sind d.h.

$$\varphi\left(\frac{\tau}{p}\right)\ \varphi\left(\frac{\tau+16}{p}\right)\cdots\ \varphi\left(\frac{\tau+(p-1)16}{p}\right)\ \left(\frac{2}{p}\right)\varphi(p\tau)$$

wo $\left(\frac{2}{p}\right)$ das Legendre'sche Zeichen bedeutet.

Zu dieser Gleichung gehört nun auch die Transformation 2^{ten} Grades. Für diesen Fall ist die Modulargleichung, wenn wir $\varphi(\tau)=u$, $\varphi\left(\frac{\gamma+\delta\tau}{\alpha+\beta\tau}\right)=v$ $(\alpha\delta-\beta\gamma=1)$ setzen:

$$u^6 - v^6 + 5u^2v^2(u^2 - v^2) + 4uv(1 - u^2v^2) = 0.$$

Bezeichnen wir die Wurzeln dieser Gl. gleich:

$$\left.\begin{array}{lll} \left(\tfrac{8}{5}\right)\varphi(5\,8) = x_1\,; & \varphi\left(\frac{8+16}{5}\right) = x_3 & \varphi\left(\frac{8+3.16}{5}\right) = x_5 \\ \varphi\left(\frac{8}{5}\right) = x_2 & \varphi\left(\frac{8+2.16}{5}\right) = x_4 & \varphi\left(\frac{8+4.16}{5}\right) = x_6 \end{array}\right\}.$$

Bilden wir nun die Ausdrücke:

$$\varphi(a) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_6)(x_4 - x_5)$$

$$\varphi(a+16) = (x_3 - x_1)(x_4 - x_2)(x_5 - x_6)$$

$$\varphi(a+2 16) = (x_4 - x_1)(x_5 - x_3)(x_6 - x_2)$$

$$\varphi(a+3.16) = (x_5 - x_1)(x_6 - x_4)(x_2 - x_3)$$

$$\varphi(a+4.16) = (x_6 - x_1)(x_2 - x_5)(x_3 - x_4)$$

So bestehen diese Größen nach dem Galois'schen Satze Beziehungen wie:

$$\varphi^5 - 2^4 \cdot 5^3 \varphi\, \varphi^4(a)\, \varphi^{16}(a) - 2^6 \sqrt{5^5}\, \varphi^3(a)\, \psi^{16}(a)\left[1 + \varphi^8(a)\right] = 0.$$

Wir wollen nachweisen, daß:

$\varphi(a) + \cdots \quad \varphi(a + 4 16) = 0$ sei und beweisen, daß dann die Summe der Combinationen zu je zwei auch Null sein muß

Bezeichnen wir dazu:

$$\varphi(a) + \cdots \quad \varphi(a + 4.16) = S_1 = -p_1.$$

$$\varphi(a)\,\varphi(a+1.16) + \cdots \quad \varphi(a+4.16).\varphi(a+3.16) = p_2$$

$s_1 = x_3x_4x_5 + x_4x_5x_6 + x_1x_2x_4 + x_1x_2x_5 + x_1x_3x_5 + x_1x_3x_6 + x_1x_4x_6 + x_2x_3x_4 + x_2x_5x_6 + x_3x_2x_6$

$s_2 = x_4x_2x_5 + x_6x_2x_5 + x_1x_5x_6 + x_1x_4x_3 + x_1x_5x_4 + x_1x_2x_6 + x_1x_2x_3 + x_3x_5x_6 + x_3x_4x_6 + x_4x_2x_6.$

Da nun $\vartheta_1 = 0$ u. ϑ_2 wird dieses auch, weil

$$\vartheta_1 = s_1 - s_2 \quad \text{wird } s_1 + s_2 = 0$$
$$s_1 = 0$$
$$s_2 = 0.$$

Dazwischen soll man die, daß $p_2 = 0$ ist.

Nun ist wenn wir die zweiten Polarisationen Wert ϑ_2 bezeichnen:

$$\vartheta_2 = 2p_2.$$

Bilden wir p_2!

$$p_2 = (x_2-x_1)(x_3-x_6)(x_4-x_5)(x_3-x_1)(x_4-x_2)(x_5-x_6)+\dots\dots$$
$$= \sum x_1^2x_2^2x_3^2 + 2\sum x_1x_2x_3x_4x_5^2 - 20\sum x_1x_2x_3x_4x_5x_6 - \dots\dots$$

Es fehlen noch Glieder, die Ausdrücke von der Form:

$$x_1^2x_2^2x_3x_4 \text{ enthalten.}$$

Dieselben theilen sich in zwei Classen. Betrachten wir in

$\sum x_1^2x_2^2x_3x_4$ alle drei Glieder, die mit $x_1^2x_2^2$ multiplicirt sind, so werden sie lauten:

$$x_1^2x_2^2x_3x_4 \qquad x_1^2x_2^2x_4x_5$$
$$x_1^2x_2^2x_3x_6 \qquad x_1^2x_2^2x_4x_6 \qquad x_1^2x_2^2x_5x_6.$$
$$x_1^2x_2^2x_3x_5$$

Theilen wir dieselben nun wieder zu der einen Classe

$x_1^2x_2^2x_3x_4$, $x_1^2x_2^2x_3x_5$, $x_1^2x_2^2x_4x_6$, $x_1^2x_2^2x_5x_6$ zur

Andern: $x_1^2x_2^2x_3x_5$, $x_1^2x_2^2x_4x_5$

und betrachten den Ausdruck:

$$\varphi(x) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_6)(x_4 - x_5)$$

so sehen wir, dass die zu der zweiten Klasse gehörigen Glieder

$$-x_1^2 x_2^2 x_3 x_6 \,,\; x_1^2 x_2^2 x_4 x_5$$

gerade die sind, welche mit $x_1^2 x_2^2$ die x multiplicirt sind, welche in den beiden andern Klammern, die mit dem Klammern $(x_2 - x_1)$ verbunden sind, stehen.

So theilen sich sämmtliche Ausdrücke $x_3^2 x_6^2 x_4 x_5 \ldots$ in zwei Klassen, wobei zur ersten 4, zur zweiten zwei Glieder gehören.

Bezeichnen wir die Summe aller Glieder in

$$\sum x_1^2 x_2^2 x_3 x_4 \,,$$ die nun zur ersten Klasse gehören, in dem 4 Glieder gehören mit

$$\sum{}' x_1^2 x_2^2 x_3 x_4$$

die der Glieder, die nun zur zweiten Klasse gehören mit

$$\sum{}'' x_1^2 x_2^2 x_3 x_4 \,,$$ so wird:

$$-p_2 = \sum x_1^2 x_2^2 x_3^2 + 2 \sum x_1 x_2 x_3 x_4 x_5^2 - 20 \sum x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$$
$$- 3 \sum{}' x_1 x_2 x_3^2 x_4^2 + 4 \sum{}'' x_1 x_2 x_3^2 x_4^2 .$$

Bilden wir jetzt die zweite Potenz [illegible], so wird dieselbe:

$$S_2 = 2\sum x_1^2 x_2^2 x_3^2 + 4\sum x_1x_2x_3x_4x_5^2 - 40\sum x_1x_2x_3x_4x_5x_6 - 2\sum' x_1x_2x_3^2x_4^2.$$

Es muss sein:

$S_2 = -2p_2$ also folgt, wenn wir die Ausdrücke gleichsetzen:

$$4\sum' x_1x_2x_3^2x_4^2 - 8\sum'' x_1x_2x_3^2x_4^2 = 0. \text{ oder:}$$

$$3\sum' x_1x_2x_3^2x_4^2 = 6\sum'' x_1x_2x_3^2x_4^2.$$

Da aber $3\sum' x_1x_2x_3^2x_4^2 + 3\sum'' x_1x_2x_3^2x_4^2 = 3\sum x_1x_2x_3^2x_4^2$ also:

$$\sum x_1x_2x_3^2x_4^2 = 3\sum'' x_1x_2x_3^2x_4^2 = \frac{3}{2}\sum' x_1x_2x_3^2x_4^2.$$

Also wird:

$$S_2 = 2\sum x_1^2x_2^2x_3^2 - \frac{4}{3}\sum x_1x_2x_3^2x_4^2 + 4\sum x_1x_2x_3x_4x_5^2 - 40\sum x_1x_2x_3x_5x_4x_6. \text{ oder}$$

$$-p_2 = \sum x_1^2x_2^2x_3^2 - \frac{2}{3}\sum x_1x_2x_3^2x_4^2 + 2\sum x_1x_2x_3x_4x_5^2 - 20\sum x_1x_2x_3x_4x_5x_6.$$

Bilden wir jetzt:

$(\sigma_1+\sigma_2)^2 = 0$, so wird dieselbe:

$$(\sigma_1+\sigma_2)^2 = \sum x_1^2x_2^2x_3^2 + 1.2\sum x_1x_2x_3^2x_4^2 + 2.3.\sum x_1x_2x_3x_4x_5^2 + 20\sum x_1x_2x_3x_4x_5x_6 = 0.$$

Also können wir jetzt schreiben:

$$p_2 = \frac{4}{3}\sum x_1x_2x_3^2x_4^2 + 4\sum x_1x_2x_4x_3x_5^2 + 40\sum x_1x_2x_3x_4x_5x_6.$$

Dieser Ausdruck ist aber an der Ungleich Null. Erhalten wir nämlich c_1 nicht ..., so wird:

$$c_1^2 = 0 = \sum x_1 x_2 x_4 x_3 x_5^2 + \frac{2}{3} \sum x_1 x_2 x_3^2 x_4^2 + 10 \sum x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 - x_0$$

und dieses ist gerade unser Ausdruck. Also wird

$$p_2 = 0 \quad u. \quad q_2 = 0 \quad q. e. d.$$

Auf ähnliche Weise wie ... complicirter läßt sich zeigen, daß

auch $q_3 = 0$ ist. –

Setzt man in der so erhaltenen Gl. 5ten Grades:

$$\varphi = \sqrt[4]{2^4 5^5 3)}\, \varphi(a)\, \psi^4(a)\, x, \text{ so geht sie über in:}$$

$$x^5 - x - \frac{2}{\sqrt[4]{5^5}} \frac{1 + \varphi^8(a)}{\varphi^2(a)\, \psi^4(a)} = 0 \text{ d.h. hat die Form}$$

$$x^5 - x - a = 0.$$

Es ist dieses die sogenannte Jerrard'sche Form:

Es kann aber eine jede Gl. 5ten Grades

$$x^5 + p_1 x^4 \dots\dots p_5 = 0$$

mittelst einer Substitution:

$$y = a_0 + a_1 x + \dots a_4 x^4$$

auf diese Form gebracht werden, so genügt, daß man

nur die Lösungen der transformirten Gl.

$$y^5 - y - a = 0$$ kennen, die Lösungen

[illegible] [illegible] [illegible] functions [illegible] [illegible] [illegible]

$\varphi = \dfrac{1}{\sqrt[3]{[illegible]}} \quad \dfrac{\varphi(a)}{\varphi(a)+[illegible]}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{[illegible]}} \quad \dfrac{\varphi([illegible])}{\varphi(a)+[illegible]}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{[illegible]}} \quad \dfrac{\varphi([illegible])}{\varphi(a)+[illegible]}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{[illegible]}} \quad \dfrac{\varphi([illegible])}{\varphi(a)+[illegible]}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{[illegible]}} \quad \dfrac{\varphi([illegible])}{\varphi(a)+[illegible]}$

Für eine dieser Wurzeln werden nun die Werthe von φ:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt[4]{2^4 5^3}} \; \frac{\varphi(a)}{\varphi(a)\,\psi^4(a)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{2^4 5^3}} \; \frac{\varphi(a+16)}{\varphi(a)\,\psi^4(a)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{2^4 5^3}} \; \frac{\varphi(a+2.16)}{\varphi(a)\,\psi^4(a)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{2^4 5^3}} \; \frac{\varphi(a+3.16)}{\varphi(a)\,\psi^4(a)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{2^4 5^3}} \; \frac{\varphi(a+4.16)}{\varphi(a)\,\psi^4(a)}.$$

Zunächst, des Hermite'schen Satzes, daß

$$\sum_0^4 \varphi\left(\frac{\omega+16\xi}{5}\right) = 0 \text{ ist.}$$

Es ist $\varphi(\omega) = \left[\varphi(5\omega)+\varphi\left(\frac{\omega}{5}\right)\right]\left[\varphi\left(\frac{\omega+16}{5}\right)-\varphi\left(\frac{\omega+4.16}{5}\right)\right]\left[\varphi\left(\frac{\omega+2.16}{5}\right)-\varphi\left(\frac{\omega+3.16}{5}\right)\right]$

wo die $\varphi(5\omega)$ etc. die 6 Lösungen der Modulargl. 6ten Grades, die zur Transformation 5 Ord. gehört, vorstellen.

An Stelle der φ Fkt. können wir ψ Fkt., die mit den ersteren verbunden sind durch

$$\varphi^8+\psi^8=1 \text{ einführen.}$$

Daher ergeben sich folgende Relationen.

Es ist:

$$\varphi\left(\frac{\omega+4.16}{5}\right) = -\psi\left(\frac{\omega+16}{5}\right).$$

$$\varphi\left(\frac{\omega+3.16}{5}\right) = -\psi\left(\frac{\omega+3.16}{5}\right).$$

$$\varphi\left(\frac{\omega+2.16}{5}\right) = -\psi\left(\frac{\omega+2.16}{5}\right).$$

$$\varphi\left(\frac{\omega+16}{5}\right) = -\psi\left(\frac{\omega+4.16}{5}\right). \text{ ferner:}$$

$$\varphi\left(\frac{\omega}{5}\right) = \psi(5\omega).$$

$$\varphi(5\omega) = \psi\left(\frac{\omega}{5}\right). \text{ demnach wird:}$$

$$\varphi(\omega) = -\left[\psi(5\omega)+\psi\left(\frac{\omega}{5}\right)\right]\left[\psi\left(\frac{\omega+16}{5}\right)-\psi\left(\frac{\omega+4.16}{5}\right)\right]\left[\psi\left(\frac{\omega+2.16}{5}\right)-\psi\left(\frac{\omega+3.16}{5}\right)\right].$$

Bilden wir zunächst $\psi\left(\frac{\omega}{5}\right)$.

Es ist:

$$\eta(\omega) = \frac{1-q-q^3+q^6+q^{10}\cdots}{1+q+q^3+q^6+q^{10}+\cdots} = \frac{\sum(-1)^m q^{2m^2+m}}{\sum q^{2m^2+m}}.$$

Also: $$\eta\left(\frac{\omega}{5}\right) = \frac{1-q^{\frac{1}{5}}-q^{\frac{3}{5}}+q^{\frac{6}{5}}+\cdots}{1+q^{\frac{1}{5}}+q^{\frac{6}{5}}+q^{\frac{10}{5}}+\cdots} = \frac{\sum(-1)^m q^{\frac{2m^2+m}{5}}}{\sum 2q^{\frac{2m^2+m}{5}}}$$

Es lassen sich die Summen in Partialsummen zerlegen.

Nehmen wir

$$\sum q^{\frac{2m^2+m}{5}} = 1+q^{\frac{1}{5}}+q^{\frac{6}{5}}+q^{\frac{10}{5}}+\cdots$$

so wollen wir nun nur die Potenzen von $q^{\frac{1}{5}}$ zusammenfassen, die congruent 0, 1, 2, 3, 4 mod 5 sind. Zunächst ist leicht zu beweisen, dass die Potenzen, die congruent 2 und 4 mod 5 sind, nicht vorkommen können d.h. dass

1) $2m^2+m \equiv 2 \bmod 5$ nicht lösbar ist. Wir können diese Congruenz schreiben:

$$\frac{1}{8}[4m+1]^2-\frac{1}{8} \equiv 2 \bmod 5 \text{ oder}$$

$$(4m+1)^2-1 \equiv 16 \equiv 1 \bmod 5 \text{ od.}$$

$$(4m+1)^2 \equiv 2 \bmod 5.$$

2 ist aber Nichtrest aller Zahlen $5n+5$ d.h. mod 5 d.h. diese Congruenz ist nicht lösbar.

Desgleichen gilt nun:

2) $2m^2+m \equiv 4 \bmod 5$.

$$\frac{1}{8}[4m+1]^2-\frac{1}{8} \equiv 4 \bmod 5.$$

$$(4m+1)^2 \equiv 3 \bmod 5.$$

Es ist also $\left(\frac{2}{5}\right)$ zu untersuchen.

Nach dem Legendre'schen Reciprocitätsgesetz ist:

$$\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = +1. \text{ aber}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right) = -1 \text{ d.h. } \left(\frac{2}{5}\right) = -1 \text{ d.h.}$$

2 ist auch nie Divisor von 5.

Es bleiben somit nur folgende Congruenzen noch zu untersuchen übrig:

3) $2m^2+m \equiv 0 \bmod 5$.

$$(4m+1)^2 \equiv 1 \bmod 5:$$

Aus dieser Congruenz ergiebt sich, dass alle die Exponenten von $q^{\frac{1}{5}}$ die congruent 0 mod 5 sein, die Formen haben

$$\text{I)}\ 5m(10m+1)$$

$$\text{II)}\ 5[10m^2+9m+2]$$

Ebenso ergiebt sich aus

4) $2m^2+m \equiv 1 \bmod 5$, dass alle die Exponenten von $q^{\frac{1}{5}}$ die congruent 1 mod 5 sein, die Form haben:

$$\text{I}\ \ 5[10m^2+12m+3]+1.$$

$$\text{II}\ \ 5[10m^2+17m+7]+1.$$

Endlich ergiebt sich aus:

5) $2m^2+m \equiv 3 \bmod 5$, dass alle die Exponenten von $q^{\frac{1}{5}}$, die congruent 3 mod 5 sein, die Form haben

$$5(10m^2+5m)+3.$$

Danach können wir schreiben:

$$\sum q^{\frac{2m^2+m}{5}} = q^{\frac{1}{5}}\left[\sum q^{10m^2+12m+4} + \sum q^{10m^2+17m+7}\right] + q^{\frac{3}{5}}\left\{\sum q^{10m^2+8m} + \sum q^{m(10m+1)} + \sum q^{10m^2 \ldots}\right.$$

Setzen wir:

$$\sum q^{10m^2+12m+4} + \sum q^{10m^2+17m+7} = B_1.$$

$$\sum q^{10m^2+8m} = B_2$$

$$\sum q^{m(10m+1)} + \sum q^{10m^2+9m+2} = B_3,$$ so wird:

$$\sum q^{\frac{2m^2+m}{5}} = q^{\frac{1}{5}} B_1 + q^{\frac{3}{5}} B_2 + B_3$$

Offenbar werden in $\sum(-1)^m q^{\frac{2m^2+m}{5}}$ die Geraden und den Ungeraden von $\sum q^{\frac{2m^2+m}{5}}$ sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Wir können daher schreiben:

$$\sum(-1)^{\frac{2m^2+m}{5}} = q^{\frac{1}{5}} A_1 + q^{\frac{3}{5}} A_2 + A_3$$

wobei A_1 und A_3 durch B_1, A_2 durch $-B_2$ definirt wird, die leicht aus den vorher aufgestellten Summen abgeleitet werden können.

Demnach wäre:

$$\Psi\left(\frac{\omega}{5}\right) = \frac{q^{\frac{1}{5}} A_1 + q^{\frac{2}{5}} A_2 + A_3}{q^{\frac{1}{5}} B_1 + q^{\frac{2}{5}} B_2 + B_3}.$$

Es entsteht nun $\psi\left(\frac{\omega+16}{5}\right)$ aus $\psi\left(\frac{\omega}{5}\right)$ indem an Stelle von $q^{\frac{1}{5}}$: $q^{\frac{1}{5}} e^{\frac{16 i\pi}{5}}$ gesetzt würde. Setzen wir daher

$$e^{\frac{16 i\pi}{5}} = e^{8\left[\frac{2 i\pi}{5}\right]} = \alpha,$$ so wird α eine

der 5. Einheitswurzeln und:

$$\psi\left(\frac{a}{5}\right) = \frac{q^{\frac{1}{5}}A_1 + q^{\frac{2}{5}}A_2 + A_3}{q^{\frac{1}{5}}B_1 + q^{\frac{2}{5}}B_2 + B_3}$$

$$\psi\left(\frac{a+16}{5}\right) = \frac{\alpha q^{\frac{1}{5}}A_1 + \alpha^3 q^{\frac{2}{5}}A_2 + A_3}{\alpha q^{\frac{1}{5}}B_1 + \alpha^3 q^{\frac{2}{5}}B_2 + B_3}$$ ebenso:

$$\psi\left(\frac{a+2.16}{5}\right) = \frac{\alpha^2 q^{\frac{1}{5}}A_1 + \alpha q^{\frac{2}{5}}A_2 + A_3}{\alpha^2 q^{\frac{1}{5}}B_1 + \alpha q^{\frac{2}{5}}B_2 + B_3}$$

$$\psi\left(\frac{a+3.16}{5}\right) = \frac{\alpha^3 q^{\frac{1}{5}}A_1 + \alpha^4 q^{\frac{2}{5}}A_2 + A_3}{\alpha^3 q^{\frac{1}{5}}B_1 + \alpha^4 q^{\frac{2}{5}}B_2 + B_3}$$

$$\psi\left(\frac{a+4.16}{5}\right) = \frac{\alpha^4 q^{\frac{1}{5}}A_1 + \alpha^2 q^{\frac{2}{5}}A_2 + A_3}{\alpha^4 q^{\frac{1}{5}}B_1 + \alpha^2 q^{\frac{2}{5}}A_2 + A_3}$$ Ferner aber, wie leicht zu sehen klar:

$$\psi(5a) = -\frac{A_2}{B_2}.$$

Mit Hülfe dieser Grössen haben wir zu bilden:

$$\left(\psi(5a)+\psi\left(\frac{a}{5}\right)\right)\left[\psi\left(\frac{a+16}{5}\right)-\psi\left(\frac{a+4.16}{5}\right)\right]\left[\psi\left(\frac{a+2.16}{5}\right)-\psi\left(\frac{a+3.16}{5}\right)\right] = -\varphi(a).$$

Der allen Grössen gemeinschaftliche Nenner oder vielmehr der Nenner von $-\varphi(a)$ ist das Product aller Nenner von $\psi\left(\frac{a}{5}\right)$ etc. Wir dürfen denselben aber, wie wir später sehen werden, bei unserem Beweise fortlassen und beschäftigen uns nur mit dem Zähler der einzelnen Differenzen.

Es wird nun der Zähler von

$$\psi\left(\frac{a+16}{5}\right) - \psi\left(\frac{a+4.16}{5}\right):$$

$$\left(\alpha^4 q^{\frac{1}{5}}B_1 + \alpha^2 q^{\frac{2}{5}}B_2 + B_3\right)\left(\alpha q^{\frac{1}{5}}A_1 + \alpha^3 q^{\frac{2}{5}}A_2 + A_3\right) - \left(\alpha q^{\frac{1}{5}}B_1 + \alpha^3 q^{\frac{2}{5}}B_2 + B_3\right)\left(\alpha^4 q^{\frac{1}{5}}A_1 + \alpha^2 q^{\frac{2}{5}}A_2 + A_3\right) =$$

$$\alpha^2 q^{\frac{4}{5}} B_1 A_2 + \alpha^4 q^{\frac{1}{5}} B_1 A_3 + \alpha^3 q^{\frac{4}{5}} A_1 B_2 + \alpha^2 q^{\frac{2}{5}} B_2 A_3 + \alpha^6 q^{\frac{1}{5}} A_1 B_3 + \alpha^3 q^{\frac{2}{5}} A_2 B_3$$

$$-\left[\alpha^3 q^{\frac{4}{5}} B_1 A_2 + \alpha^6 q^{\frac{1}{5}} B_1 A_3 + \alpha^2 q^{\frac{4}{5}} A_1 B_2 + \alpha^3 q^{\frac{2}{5}} B_2 A_3 + \alpha^4 q^{\frac{1}{5}} A_1 B_3 + \alpha^2 q^{\frac{2}{5}} A_2 B_3\right] =$$

$$\alpha^2(1-\alpha) q^{\frac{4}{5}} B_1 A_2 + \alpha^4(1-\alpha^2) q^{\frac{1}{5}} B_1 A_3 - \alpha^2(1-\alpha) q^{\frac{4}{5}} A_1 B_2 + \alpha^2(1-\alpha) q^{\frac{2}{5}} B_2 A_3 - \alpha^4(1-\alpha^2) q^{\frac{1}{5}} A_1 B_2 -$$

$$\alpha^2(1-\alpha) q^{\frac{2}{5}} A_2 B_3 =$$

$$\alpha^2(1-\alpha)\left[q^{\frac{4}{5}} B_1 A_2 + \alpha^2(1+\alpha) q^{\frac{1}{5}} B_1 A_3 - q^{\frac{4}{5}} A_1 B_2 + q^{\frac{2}{5}} B_2 A_3 - \alpha^2(1+\alpha) q^{\frac{1}{5}} A_1 B_3 - q^{\frac{2}{5}} A_2 B_3\right].$$

Ferner wird der Größen nun:

$$\varphi\left(\frac{\omega+2.i\varkappa}{5}\right) - \varphi\left(\frac{\omega+3.i\varkappa}{5}\right):$$

$$\left(\alpha^3 q^{\frac{1}{5}} B_1 + \alpha^4 q^{\frac{2}{5}} B_2 + B_3\right)\left(\alpha^2 q^{\frac{1}{5}} A_1 + \alpha q^{\frac{2}{5}} A_2 + A_3\right) - \left(\alpha^2 q^{\frac{1}{5}} B_1 + \alpha q^{\frac{2}{5}} B_2 + B_3\right)\left(\alpha^3 q^{\frac{1}{5}} A_1 + \alpha^4 q^{\frac{2}{5}} A_2 + A_3\right) =$$

$$\alpha^4 q^{\frac{4}{5}} B_1 A_2 + \alpha^3 q^{\frac{1}{5}} B_1 A_3 + \alpha^6 q^{\frac{4}{5}} A_1 B_2 + \alpha^4 q^{\frac{2}{5}} B_2 A_3 + \alpha^2 q^{\frac{1}{5}} A_1 B_3 + \alpha^6 q^{\frac{2}{5}} A_2 B_3 -$$

$$-\left[\alpha^6 q^{\frac{4}{5}} B_1 A_2 + \alpha^2 q^{\frac{1}{5}} B_1 A_3 + \alpha^4 q^{\frac{4}{5}} A_1 B_2 + \alpha^6 q^{\frac{2}{5}} B_2 A_3 + \alpha^3 q^{\frac{1}{5}} A_1 B_3 + \alpha^4 q^{\frac{2}{5}} A_2 B_3\right] =$$

$$\alpha^4(1-\alpha^2) q^{\frac{4}{5}} B_1 A_2 - \alpha^2(1-\alpha) q^{\frac{1}{5}} B_1 A_2 - \alpha^4(1-\alpha^2) q^{\frac{4}{5}} A_1 B_2 + \alpha^4(1-\alpha^2) q^{\frac{2}{5}} B_2 A_3 + \alpha^2(1-\alpha) q^{\frac{1}{5}} A_1 B_3$$

$$-\alpha^4(1-\alpha^2) q^{\frac{2}{5}} A_2 B_3 =$$

$$\alpha^2(1-\alpha)\left[(1+\alpha)\alpha^2 q^{\frac{4}{5}} B_1 A_2 - q^{\frac{1}{5}} B_1 A_3 - \alpha^2(1+\alpha) q^{\frac{4}{5}} A_1 B_2 + \alpha^2(1+\alpha) q^{\frac{2}{5}} B_2 A_3 + q^{\frac{1}{5}} A_1 B_3 - \alpha(1+\alpha) q^{\frac{2}{5}} A_2 B_3\right].$$

Setzen wir:

$$q^{\frac{4}{5}} B_1 A_2 - q^{\frac{4}{5}} A_1 B_2 + q^{\frac{2}{5}} B_2 A_3 - q^{\frac{2}{5}} A_2 B_3 = C.$$

$q^{\frac{1}{5}} B_1 A_3 - q^{\frac{1}{5}} A_1 B_3 = D$, so wird der Größen nun:

$$\left[\varphi\left(\frac{\omega+i\varkappa}{5}\right) - \varphi\left(\frac{\omega+4.i\varkappa}{5}\right)\right]\left[\varphi\left(\frac{\omega+2.i\varkappa}{5}\right) - \varphi\left(\frac{\omega+3.i\varkappa}{5}\right)\right] =$$

$\alpha^4(1-\alpha)^2\left[C + \alpha^2(1+\alpha)D\right]\left[\alpha^2(1+\alpha)C - D\right] = \alpha(1-\alpha)^2(1+\alpha)\left[C^2 - D^2 - CD\right]$ wenn man bemerkt, daß:

$$\alpha^4(1+\alpha)^2 - 1 = \alpha^4 + \alpha + 1 = -\alpha^3 - \alpha^2 = -\alpha^2(1+\alpha) \text{ etc.}$$

Setzen wir ferner:

$$B_1 A_2 - A_1 B_2 = \mathfrak{F}$$

$$A_3 B_2 - A_2 B_3 = \mathfrak{G}.$$

$$A_3 B_1 - A_1 B_3 = \mathfrak{H},$$ so wird:

$$C = q^{\frac{4}{5}}\mathfrak{F} + q^{\frac{3}{5}}\mathfrak{G}.$$

$$D = q^{\frac{1}{5}}\mathfrak{H}.$$ Also:

$$a(1-a)^2(1+a)\left(C^2 - D^2 - CD\right) =$$

$$q^{\frac{8}{5}}\mathfrak{F}^2 + q^{\frac{6}{5}}\mathfrak{G}^2 + 2q^{\frac{7}{5}}\mathfrak{F}\mathfrak{G} - q^{\frac{2}{5}}\mathfrak{H}^2 - q^{\frac{5}{5}}\mathfrak{H}\mathfrak{F} - q^{\frac{4}{5}}\mathfrak{H}\mathfrak{G}.$$

Desgleichen:

$\psi\left(\frac{a}{5}\right) + \psi(5a)$ wird:

$$\left(q^{\frac{1}{5}}A_1 + q^{\frac{2}{5}}A_2 + A_3\right)B_3 - \left(q^{\frac{1}{5}}B_1 + q^{\frac{2}{5}}B_2 + B_3\right)A_3 =$$

$$-q^{\frac{1}{5}}\mathfrak{F} + \mathfrak{G}.$$

Nennen wir daher den Nenner von $\varphi(a)$: N, so wird:

$$\frac{N\varphi(a)}{a(1-a^2)(1+a)} = \left[-q^{\frac{1}{5}}\mathfrak{F} + \mathfrak{G}\right]\left[q^{\frac{8}{5}}\mathfrak{F}^2 + q^{\frac{6}{5}}\mathfrak{G}^2 + 2q^{\frac{7}{5}}\mathfrak{F}\mathfrak{G} - q^{\frac{2}{5}}\mathfrak{H}^2 - q^{\frac{5}{5}}\mathfrak{H}\mathfrak{F} - q^{\frac{4}{5}}\mathfrak{H}\mathfrak{G}\right].$$

Betrachten wir in dem ausgerechneten Ausdrucke den Coefficienten von $q^{\frac{5}{5}}$, so ergibt sich:

$$+\mathfrak{H}\mathfrak{G}\mathfrak{F} - \mathfrak{H}\mathfrak{G}\mathfrak{F} = 0$$ und wir bekommen ferner nur die 9, 8, 7 6, 3, 2, 1, Potenzen von $q^{\frac{1}{5}}$. Nennen wir die Coefficienten derselben $c_9\ c_8 \ldots$ so sieht man daß alle Ausdrücke, die nur ganze Potenzen von q enthalten, so daß wir

schreiben können.

$$\frac{N\varphi(\omega)}{\alpha(1-\alpha)^2(1+\alpha)} = c_2 q^{\frac{2}{5}} + c_3 q^{\frac{3}{5}} + c_4 q^{\frac{4}{5}} + c_6 q^{\frac{6}{5}} + c_7 q^{\frac{7}{5}} + c_8 q^{\frac{8}{5}} + c_9 q^{\frac{9}{5}}.$$

$\varphi(\omega+16)$ entsteht aus $\varphi(\omega)$ auf dieselbe Weise, wie

$\varphi\left(\frac{\omega+16}{5}\right)$ aus $\varphi\left(\frac{\omega}{5}\right)$. Es werden [illegible] Ausdruck

also die c und N dieselben bleiben, wenn statt $q^{\frac{1}{5}}$: $\alpha q^{\frac{1}{5}}$

zu schreiben. Demnach wird:

$$\frac{N\varphi(\omega+16)}{\alpha(1-\alpha)^2(1+\alpha)} = \alpha^2 c_2 q^{\frac{2}{5}} + \alpha^3 c_3 q^{\frac{3}{5}} + \alpha^4 c_4 q^{\frac{4}{5}} + \alpha c_6 q^{\frac{6}{5}} + \alpha^2 c_7 q^{\frac{7}{5}} + \alpha^3 c_8 q^{\frac{8}{5}} + \alpha^4 c_9 q^{\frac{9}{5}}$$

$$\frac{N\varphi(\omega+2.16)}{\alpha(1-\alpha)^2(1+\alpha)} = \alpha^4 c_2 q^{\frac{2}{5}} + \alpha c_3 q^{\frac{3}{5}} + \alpha^3 c_4 q^{\frac{4}{5}} + \alpha^2 c_6 q^{\frac{6}{5}} + \alpha^4 c_7 q^{\frac{7}{5}} + \alpha c_8 q^{\frac{8}{5}} + \alpha^3 c_9 q^{\frac{9}{5}}$$

$$\frac{N.\varphi(\omega+3.16)}{\alpha(1-\alpha)^2(1+\alpha)} = \alpha c_2 q^{\frac{2}{5}} + \alpha^4 c_3 q^{\frac{3}{5}} + \alpha^2 c_4 q^{\frac{4}{5}} + \alpha^3 c_6 q^{\frac{6}{5}} + \alpha c_7 q^{\frac{7}{5}} + \alpha^4 c_8 q^{\frac{8}{5}} + \alpha^2 c_9 q^{\frac{9}{5}}$$

$$\frac{N\varphi(\omega+4.16)}{\alpha(1-\alpha)^2(1+\alpha)} = \alpha^3 c_2 q^{\frac{2}{5}} + \alpha^2 c_3 q^{\frac{3}{5}} + \alpha c_4 q^{\frac{4}{5}} + \alpha^4 c_6 q^{\frac{6}{5}} + \alpha^3 c_7 q^{\frac{7}{5}} + \alpha^2 c_8 q^{\frac{8}{5}} + \alpha c_9 q^{\frac{9}{5}}$$

Also da $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=0$:

$$\frac{N}{\alpha(1-\alpha)^2(1+\alpha)}\left[\sum_0^4{}_\xi\, \varphi(\omega+16\xi)\right] = 0$$ d.h. da wieder $N \neq 0$ und $\alpha(1-\alpha^2)(1+\alpha) \neq \infty$

$$\sum_0^4{}_\xi\, \varphi(\omega+16\xi) = 0 \quad q.e.d.$$

Ein anderer mit etwas mehr Rechnung verbundener Beweis derselben Formel lässt sich auf folgende Weise geben.

Nehmen wir die Form:

$$\psi(\omega) = \frac{\sum (-1)^m q^{\frac{1}{2}(3m^2+m)}}{\sum (-1)^{\frac{1}{2}m(m+1)} q^{\frac{1}{2}(3m^2+m)}}$$ so können wir

ähnlich wie vorher schreiben:

$$\psi\left(\frac{\omega}{5}\right) = \frac{q^{\frac{1}{5}} A_1 + q^{\frac{2}{5}} A_2 + A_3}{q^{\frac{1}{5}} B_1 + q^{\frac{2}{5}} B_2 + B_3}$$

etc.

$$\varphi(5\omega) = -\frac{A_1}{B_1}$$

wo A_1 u. B_1 ähnliche Bedeutungen, wie vorher bedeuten.

Der Gedankengang des Beweises ist folgender:

Wir können, wenn wir an Stelle der ψ die aufzuführenden x der Einfachheit wegen einführen, $\varphi(\omega)$ zerlegen in zwei Theile, deren einer alle positiven, deren anderer alle negativen Glieder enthält.

Dieselben sind:

$$\sigma_1 = x_1 x_2 x_4 + x_1 x_2 x_5 + x_1 x_3 x_5 + x_1 x_3 x_6 + x_1 x_4 x_6 + x_2 x_3 x_4 + x_2 x_5 x_6$$
$$+ x_2 x_3 x_6 + x_3 x_4 x_5 + x_4 x_5 x_6$$

$$\sigma_2 = x_1 x_5 x_6 + x_1 x_4 x_3 + x_1 x_2 x_6 + x_1 x_4 x_5 + x_3 x_5 x_6 + x_1 x_2 x_3$$
$$+ x_3 x_4 x_6 + x_4 x_2 x_6 + x_4 x_2 x_5 + x_3 x_2 x_5.$$

Es haben die beiden Summen die Eigenschaft, daß in einem jeden Ausdrucke in der einen ein Ausdruck der anderen enthalten, der die fehlenden 3 x enthält. Hiermit bewiesen wir einen wesentlichen Theil des Lehrsatzes.

Es sollen nun die beiden Summen wirklich ausgerechnet werden und zwar zunächst s_2.

Dabei können wir nun immer sehen, daß in dem fertigen Ausdrucke von s_2 gebrochene Potenzen von q nicht vorkommen dürfen.

In der That, setzen wir:

$$\chi(\omega) = x_1 x_5 x_6 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_5 + x_2 x_6 x_4 \text{ so wird:}$$

$$\chi(\omega+16) = x_1 x_6 x_2 + x_1 x_4 x_5 + x_3 x_4 x_6 + x_3 x_2 x_5$$

$$\chi(\omega+2.16) = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_5 x_6 + x_4 x_5 x_2 + x_4 x_3 x_6$$

$$\chi(\omega+3.16) = x_1 x_3 x_4 + x_1 x_6 x_2 + x_5 x_6 x_3 + x_5 x_4 x_2$$

$$\chi(\omega+4.16) = x_1 x_4 x_5 + x_1 x_2 x_3 + x_6 x_2 x_4 + x_6 x_5 x_3.$$

Nun $\chi(\omega) + \dots \chi(\omega+4.16) = 2s_2$

Hieraus fallen beim Addiren die gebrochenen Potenzen von q fort, da die Summe der fünf Einheitswurzeln gleich Null ist.

Da die Ausdrücke für $x_1 \dots x_6$ bekannt sind, so würden bei den wachsenden Größen immer wachsendem Nenner zu stehen kommen. Um dieses zu vermeiden, denken wir uns den ganzen Ausdruck mit dem gemeinsamen Generalnenner multipliciert, und betrachten im folgenden immer nur die Zähler der Ausdrücke. —

Die Zähler oder kürzer, wenn auch ungenau ausgedrückt, die zehn Ausdrücke von δ_2 zerfallen in zwei Klassen. Die einen enthalten x_1, die anderen nicht. Die ersteren sind:

$p_1 = x_1 x_3 x_4 + x_1 x_5 x_6 + x_1 x_2 x_6 + x_1 x_4 x_5 + x_1 x_2 x_3$, die zweiten

$p_2 = x_3 x_5 x_6 + x_3 x_4 x_6 + x_2 x_4 x_6 + x_4 x_2 x_5 + x_3 x_2 x_5$.

Die ersteren Ausdrücke sind sämmtlich mit A_1 der $x_1 = \frac{A_1}{B_1}$, die zweiten sämmtlich mit B_1 multipliciert.

Ein strenger Beweis hierfür folgt später

Die Rechnung zeigt – und man kann es auch wohl von vornherein ersehen – dass die Coefficienten der einzelnen Glieder für alle Glieder in p_1 einerseits und in p_2 andererseits dieselben sind, d.h. dass wenn man den Zähler von $x_1 x_3 x_4$ z. B. bildet, derselbe genau denselben Ausdruck wie $x_1 x_5 x_6 \dots x_1 x_2 x_3$ enthält.

Daher dürfen wir nur ein Product wirklich bilden und zwar eins in p_1 und eins in p_2 und aus jedem den fünffachen zu nehmen um A_2 zu erhalten.

Möchten wir in f_1 den Ausdruck $x_1 x_3 x_4$, so bilden wir:

$$A_1 \left(\alpha q^{\frac{1}{5}} A_1 + \alpha^2 q^{\frac{2}{5}} A_2 + A_3\right) \text{ multiplicieren:}$$

$$\left(\alpha^2 q^{\frac{1}{5}} A_1 + \alpha^4 q^{\frac{2}{5}} A_2 + A_3\right)$$

$$\left(q^{\frac{1}{5}} B_1 + q^{\frac{2}{5}} B_2 + B_3\right)$$

$$\left(\alpha^3 q^{\frac{1}{5}} B_1 + \alpha q^{\frac{2}{5}} B_2 + B_3\right)$$

$$\left(\alpha^4 q^{\frac{1}{5}} B_1 + \alpha^3 q^{\frac{2}{5}} B_2 + B_3\right)$$

Wir haben nur den Gliedern von $q^0\ q^1\ q^2$ auszuzeigen zu bilden.

Das constante Glied wird:

$A_1 A_3{}^2 B_3{}^3$, ferner der Coefficient von q^2:

$A_1 A_2{}^2 B_2{}^3$.

Der Coefficient von q ergibt sich. Zunächst ergiebt sich: $\underline{A_1{}^3 B_1{}^3}$ ferner

$\underline{\overline{I}\ A_1 B_1 B_2 B_3 \left[\alpha^4 + \alpha + \alpha + \alpha^4 + \alpha^2 + \alpha^3\right]}$ ferner:

$A_1{}^2 B_1{}^2 B_2 A_3 \left[\alpha\alpha^3\alpha^3 + \alpha\alpha^4\alpha^6 + \alpha\alpha^3\alpha^4 \cancel{\alpha^4} + \alpha\alpha^2\alpha^3\alpha^3 + \alpha^2\alpha^4\alpha + \alpha^2\alpha^3\alpha^4\right] =$

$\overline{II}\ A_1{}^2 B_1{}^2 B_2 A_3 \left[\alpha^2 + \alpha + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^2 + \alpha^3\right]$. ferner:

$A_1{}^2 B_1{}^2 A_2 B_3 \left[\alpha\alpha^3\alpha^4 + \alpha\alpha^4\alpha^4 + \alpha\alpha^2\alpha^4 + \alpha\alpha^5 + \alpha^2\alpha + \alpha^2\alpha^4\right] =$

$\underline{\overline{III}\ A_1{}^2 B_1{}^2 A_2 B_3 \left[\alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha\right]}$ ferner:

$\overline{IV}\ A_1 B_1{}^3 A_2 A_3 \left[\alpha + \alpha^4\right]$.

Es sind dieses die Glieder, die entstehen wenn wir multipliciren von den Coefficienten von b, $q^{\frac{1}{5}} q^{\frac{1}{5}} q^{\frac{1}{5}} q^{\frac{2}{5}} = q$.

Coefficienten, die entstehen durch Multipliciren von:

$$q^{\frac{1}{5}} q^{\frac{2}{5}} q^{\frac{2}{5}} = q.$$

Ueberdies ergeben sich die Coefficienten:

$\underline{\mathrm{V}}$ $A_1 B_1 A_2^2 B_3^2 [\alpha^5 + \alpha^4 + \alpha]$

$\underline{\mathrm{VI}}$ $A_1^2, A_2 B_2, B_3^2 [\alpha^5 + \alpha + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^2]$

$\underline{\mathrm{VII}}$ $A_1^2 B_2^2 A_3 B_3 [\alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha]$.

$\underline{\mathrm{VIII}}$ $A_1 B_1 B_2^2 A_3^2. [\alpha^6 + \alpha^4 + \alpha]$.

$\underline{\mathrm{IX}}$ $A_1 B_1 A_2 B_2 A_3 B_3 [\alpha^4 \alpha(\alpha^2 + \alpha^4) + \alpha^4(\alpha^2 + \alpha^4) + \alpha^3 \alpha^3(\alpha^2 + \alpha^4) + \alpha^3(\alpha^2 + \alpha^4)$

$+ \alpha^3(\alpha^2 + \alpha^4) + \alpha(\alpha^2 + \alpha^4)] =$

$\underline{\mathrm{IX}}$ $A_1 B_1 A_2 B_2 A_3 B_3 [\alpha^2 + \alpha^4 + \alpha + \alpha^3 + \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^5 + \alpha^2 + \alpha^5 + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^5]$

Dieses sind aber alle möglichen Glieder.

Nehmen wir nun Argument einen in x_2 vorschreitend:

$x_2 x_3 x_5$, so wird der Zähler derselben:

$B_1 (q^{\frac{1}{5}} A_1 + q^{\frac{2}{5}} A_2 + A_3)$ mal

$(\alpha q^{\frac{1}{5}} A_1 + \alpha^2 q^{\frac{2}{5}} A_2 + A_3)$

$(\alpha^3 q^{\frac{1}{5}} A_1 + \alpha q^{\frac{2}{5}} A_2 + A_3)$

$(\alpha^2 q^{\frac{1}{5}} B_1 + \alpha^4 q^{\frac{2}{5}} B_2 + B_3)$

$(\alpha^4 q^{\frac{1}{5}} B_1 + \alpha^3 q^{\frac{2}{5}} B_2 + B_3)$.

Das correspondirende Glied lautet:

$$\bar{B}_1 A_3^3 \bar{B}_3^2.$$

Der Coefficient von q^2:

$$\bar{B}_1 \bar{A}_2^3 \bar{B}_2^{-2}$$

Der Coefficient von q:

0) $A_1^3 \bar{B}_1^3 [1 \quad]$ ferner:

1) $\bar{B}_1^3 A_1 A_2 A_3 [\alpha + \alpha^4 + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha^3]$

2) $A_1^3 \bar{B}_1 \bar{B}_1 B_3 [\alpha^2 + \alpha^3]$

3) $A_1^2 \bar{B}_1^2 \bar{B}_2 A_3 [\alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha + \alpha^4 + \alpha]$

4) $A_1^2 \bar{B}_1^2 A_2 B_3 . [\alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha + \alpha^4 + \alpha]$

5) $A_1 \bar{B}_1 A_2^2 \bar{B}_3^2 [\alpha^5 + \alpha^3 + \alpha^2]$.

6) $\bar{B}_1^2 A_2 \bar{B}_2 A_3^2 . [\alpha^5 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha + \alpha^2]$

7) $\bar{B}_1^2 A_2^2 A_3 B_3 [\alpha^5 + \alpha^5 + \alpha^2 + \alpha + \alpha^3 + \alpha^4]$

8) $A_1 \bar{B}_1 \bar{B}_2^2 A_3^2 [\alpha^5 + \alpha^3 + \alpha^2]$.

9) $A_1 \bar{B}_1 A_2 \bar{B}_2 A_3 \bar{B}_3 [\alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha + \alpha^5 + \alpha + \alpha + \alpha^5]$.

Suchen wir jetzt die zusammengehörigen Glieder zu sammeln, so zeigt es sich, dass die α fortfallen, wenn wir bemerken erstens, dass $\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = -1$; $\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 = 0$; $\alpha^5 = 1$ ist.

Dann wird der ganze Ausdruck:

$$A_1 A_3^2 B_3^3 + B_1 A_3^3 B_3^2 +$$

$$q\big[-2A_1^3 B_1 B_2 B_3 - 2B_1^3 A_1 A_2 A_3 + 2A_1^3 B_1^3 - 3A_1^2 B_1^2 A_2 B_3 - 3A_1^2 B_1^2 A_3 B_2$$

$$+ A_1 B_1 A_2^2 B_3^2 + A_1 B_1 A_3^2 B_2^2 + A_1^2 A_2 B_2 B_3^2 + B_1^2 A_2 B_2 A_3^2$$

$$+ A_1^2 B_2^2 A_3 B_3 + B_1^2 A_2^2 A_3 B_3 + 7A_1 B_1 A_2 B_2 A_3 B_3\big]$$

$$+ q^2(A_1 A_2^2 B_2^3 + B_1 B_2^2 A_2^3)$$

Wir können die Formel auch schreiben:

$$B_3^2 A_3^2[A_1 B_3 + A_3 B_1] +$$

$$q\big[2A_1^3 B_1^3 - 2A_1 B_1[A_1^2 B_2 B_3 + B_1^2 A_2 A_3] - 3A_1^2 B_1^2(A_2 B_3 + A_3 B_2) + 2A_1 B_1 A_2 B_2 A_3 B_3$$

$$+ A_1 B_1(A_2 B_3 + A_3 B_2)^2 + A_2 B_2(A_1 B_3 + A_3 B_1)^2 + A_3 B_3(A_1 B_2 + A_2 B_1)^2\big]$$

$$+ q^2(A_1 B_2 + B_1 A_2) A_2^2 B_2^2.$$

Es hat die Formel die Eigenschaft, daß sie sich nicht verändert, wenn wir an Stelle der A die entsprechenden B setzen und umgekehrt.

Dieses folgt auch schon aus dem Bau einer Ansicht auf sie zu ersehen.

Wie gezeigt, ist das Hauptglied dieser Summen gleich δ_2.

δ_1 hat aber gerade die Combinationen zu drei, der Lösungen $x_1 \dots x_6$, die in δ_2 nicht vorkommen. Es entsteht daher eine

Glieder $x_1 x_3 x_4$ in s_2, z. B. ein Glied $x_2 x_5 x_6$ in s_1;
dieses entsteht aber aus $x_1 x_3 x_4$ [immer unter der Voraussetzung, dass wir alle Glieder auf einen gemeinsamen Nenner gebracht worden sind], wenn wir an Stelle der A die entsprechenden B setzen und umgekehrt. Wie oben gezeigt, bleibt daher aber der Ausdruck, den wir soeben aufgestellt haben, unverändert, so dass wir an der Stelle schreiben können, dass $s_1 = s_2$ d. h.

$$\sum_{\xi=0}^{4} \varphi(a + \varepsilon b \xi) = 0 \text{ sei.}$$

Beweis, dass auch der dritte Coefficient verschwindet.

Bildet man sich, auf genau dieselbe Weise, die bei den beiden ersten Beweisen angewandt wurde, den grössten von

$(x_2 - x_1)(x_3 - x_6)(x_4 - x_5)$ so wird derselbe, wenn wir setzen:

$A_1 B_2 - A_2 B_1 = F$

$A_3 B_1 - A_1 B_3 = G$.

$A_2 B_3 - A_3 B_2 = H$:

$N \cdot \varphi(a) = -q^{\frac{2}{5}} G^3 - q^{\frac{3}{5}} G^2 H - q^{\frac{4}{5}} (G^2 F - H^2 G) + q^{\frac{6}{5}} (F^2 G - H^2 F) + q^{\frac{7}{5}} F^2 H + q^{\frac{8}{5}} F^3$:

oder:

$N(\varphi(a + \varepsilon b) = -\varepsilon^2 q^{\frac{2}{5}} G^3 \ldots$;

Bezeichnen wir die Summe der vollen Potenzen von $\varphi(x)$ [illegible] mit S_2, so ist S_3 gleich dem dreifachen negativen vollen Coefficienten von der geraden Zl. 5ᵗᵉⁿ Grades

Wir dürfen wiederum nur $[\varphi(x)]^3$ bilden, denn alsdann erhält man ja sofort die übrigen Größen, wenn man mit den entsprechenden Einheitswurzeln multiplicirt.

Ferner dürfen wir aber auch in dem letzteren Ausdrucke nur die Coefficienten der ganzen Potenzen von φ bilden, da die übrigen sich wieder von selbst fortheben.

Es wird nun der Coefficient von φ^0:

$$3G^6(F^2G-H^2F)-3G^3[FG^2-H^2G]^2-3G^4H^2(G^2F-H^2G)=$$

$$3[G^7F^2-G^6H^2F-G^7F^2-G^5H^4+2G^6H^2F-G^6H^2F+G^5H^4]$$

$$=0.$$

Ferner wird der Coefficient von φ^3:

$$3[-G^2H(F^2G-H^2F)^2+2G^2HF^3(G^2F-H^2G)+$$
$$(G^2F-H^2G)^2F^2H-2G^3(F^2G-H^2F)F^2H]=$$

$$3[-G^4F^4H-G^2H^5F^2+2G^3H^3F^3+2G^4HF^4-2G^3H^3F^3$$
$$+F^4G^4H+F^2H^5G^2-2G^3H^3F^3-2G^4F^4H+2G^3H^3F^3]$$

$= 0$ d. h. da nur die beiden ganzen Potenzen

φ^2 u. φ^3 vorkommen, so heben sich dieselben identisch fort, und es wird somit:

$$\sum_0^{\xi}\left[\varphi(a+ib\xi)\right]^3 = 0 \text{ q.e.d.}$$

Reduction des Beweises, dass auch:

$$\sum_0^{\xi}\left(\varphi(a+ib\xi)\right)^2 = 0 \text{ ist, auf einen}$$

einfacheren Beweis.

Es läßt sich der Beweis für diesen Fall auf die oben durchgeführte Art nicht geben.

Müßten nämlich:

$$[\varphi(a)]^2 = [(x_2-x_1)(x_3-x_6)(x_4-x_5)]^2$$

wirklich gebildet werden und gezeigt werden, dass in dem selbigen Ausdruck ganze Potenzen von φ nicht vorkommen.

Dieser Ausdruck enthält aber 36 Glieder. Man kann die Aufgabe daher reduciren, dass nur 17, oder vielmehr nur ~~10~~ 2 Glieder wirklich ausgerechnet werden dürfen.

Schreiben wir uns dazu den Ausdruck für $\varphi(a)$ hin wirklich her:

$$\varphi(\omega) = x_2x_3x_4 + x_2x_5x_6 + x_1x_3x_5 + x_1x_6x_4 - x_2x_3x_5 - x_2x_6x_4 - x_1x_3x_4 - x_1x_6x_4$$

$$\varphi(\omega+1.6) = x_3x_4x_5 + x_3x_6x_2 + x_1x_4x_6 + x_1x_2x_6 - x_3x_4x_6 - x_3x_2x_5 - x_1x_4x_5 - x_1x_2x_6$$

$$\varphi(\omega+2.16) = x_4x_5x_6 + x_4x_2x_3 + x_1x_5x_6 + x_1x_3x_2 - x_4x_5x_2 - x_4x_3x_2 - x_1x_5x_6 - x_1x_3x_2$$

$$\varphi(\omega+3.16) = x_5x_6x_2 + x_5x_3x_4 + x_1x_6x_2 + x_1x_4x_3 - x_5x_6x_3 - x_5x_4x_3 - x_1x_6x_2 - x_1x_4x_3$$

$$\varphi(\omega+4.16) = x_6x_2x_3 + x_6x_4x_5 + x_1x_2x_3 + x_1x_5x_4 - x_6x_2x_4 - x_6x_5x_4 - x_1x_2x_3 - x_1x_5x_4$$

Setzen wir, um abzukürzen, die Summe aller geraden Glieder gleich σ_1, aller ungeraden Glieder gleich σ_2, so können wir schreiben:

$$\sigma_1 = x_1x_2x_4 + x_1x_2x_5 + x_1x_3x_5 + x_1x_3x_6 + x_1x_4x_6 + x_2x_3x_4 + x_2x_3x_6 + x_2x_5x_6 + x_3x_4x_5 + x_4x_5x_6$$

Der Übersichtlichkeit setzen wir:

$$\sigma_1 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

wo die einzelnen Zahlen die Glieder bedeuten sollen, in denen sie stehen. Ferner:

$$\sigma_2 = x_6x_5x_3 + x_6x_4x_3 + x_6x_4x_2 + x_5x_4x_2 + x_5x_3x_2 + x_6x_5x_1 + x_5x_4x_1 + x_4x_3x_1 + x_6x_2x_1 + x_3x_2x_1$$

Ebenso setzen wir:

$$\sigma_2 = 1' + 2' + 3' + 4' + 5' + 6' + 7' + 8' + 9' + 10'$$

wobei dann

$1'\ 2' \ldots$ die $x_1 \ldots x_6$ enthält, die $1\ 2 \ldots$ nicht enthalten.

Bei dieser Bezeichnung können wir schreiben:

$\varphi(\alpha) = (6+8+3+5-5'-3'-8'-6')$

$\varphi(\alpha+16) = (9+7+5+2-2'-5'-7'-9')$

$\varphi(\alpha+2.16) = (10+6+2+4-4'-2'-6'-10')$

$\varphi(\alpha+3.16) = (8+9+4+1-1'-4'-9'-8')$

$\varphi(\alpha+4.16) = (7+10+1+3-3'-1'-10'-7')$

Denken wir uns jetzt

$$\sum_0^4 [\varphi(\alpha+16.\xi)]^2$$ gebildet und ziehen davon

$s_1^2 + s_2^2 - 2 s_1 s_2 = 0$ ab, so erhalten wir als übrig.

bleibende Glieder:

$$11+2.2+3.3+4.4+5.5+\cdots 10.10 + 2(1.2+1.6+1.5+2.3+2.8+3.4+3.9+4.5+4.7+5.10$$
$$+6.7+69+7.8+8.10+9.10)$$
$$+1'1'+2'2'+3'3'+4'4'+5'5'+\cdots 10'10' + 2(1'2'+1'6'+1'5'+2'3'+2'8'+3'4'+3'9'+4'5'+4'7'+5'10'$$
$$+6'7'+6'9'+7'8'+8'10'+9'10')$$

$$-2[11'+22'+33'+44'+55'+\cdots 10.10'] +$$
$$2[12'+1'2+16'+1'6+15'+1'5+23'+2'3+28'+2'8+34'+3'4+39'+3'9+45'+4'5$$
$$+47'+4'7+5\,10'+5'10+67'+6'7+69'+6'9+78'+7'8+8\,10'+8'10+9\,10'+9'10)]$$

Es sind dieselben Gruppen einzelner Glieder, abgesehen von den Zahlenkoeffizienten. Es kommt darauf an, sie so zu ordnen, daß wir sie schreiben können

$$X(\alpha) + X(\alpha+16) + X(\alpha+2.16) + X(\alpha+3.16) + X(\alpha+4.16)$$

Greifen wir jetzt zunächst die Glieder

$11 + 22 + \dots 10.10 + 1'1' + \dots 10'10'$ heraus, so können wir die in die Form bringen:

$$
\begin{array}{llll}
x_1^2x_2^2x_4^2 & + x_1^2x_2^2x_3^3 & + (x_2^2x_3^2x_4^2 + x_2^2x_3^2x_5^2) \\
+ x_1^2x_3^2x_5^2 & + x_1^2x_3^2x_4^2 & + (x_3^2x_4^2x_5^2 + x_3^2x_4^2x_6^2). \\
+ x_1^2x_4^2x_6^2 & + x_1^2x_4^2x_5^2 & + (x_4^2x_5^2x_6^2 + x_4^2x_5^2x_2^2) \\
+ x_1^2x_5^2x_2^2 & + x_1^2x_5^2x_6^2 & + (x_5^2x_6^2x_2^2 + x_5^2x_6^2x_3^2) \\
+ x_1^2x_6^2x_3^2 & + x_1^2x_0^2x_2^2 & + (x_6^2x_2^2x_3^2 + x_6^2x_2^2x_4^2).
\end{array}
$$

Diese Glieder haben schon die gewünschte Form. Setzen wir die oberste Horizontalreihe gleich $f(\alpha)$, so sind die andern: $f(\alpha+16) \dots f(\alpha+4.16)$

Ebenso läßt sich mit den übrigen Gliedern verfahren.

In der That, wir können die 15 Glieder

$12 + 16 + 15 + 2.3 + \dots \quad 9.10$ schreiben:

$$
\begin{array}{lll}
x_1^2x_2^2x_4x_5 & + x_1x_2x_3^2x_6^2 & + x_2^2x_3^2x_4x_6 \\
+ x_1^2x_3^2x_5x_6 & + x_1x_3x_4^2x_2^2 & + x_3^2x_4^2x_5x_2 \\
+ x_1^2x_3^2x_6x_2 & + x_1x_4x_5^2x_3^2 & + x_4^2x_5^2x_6x_3 \\
+ x_1^2x_5^2x_2x_3 & + x_1x_5x_6^2x_4^2 & + x_5^2x_6^2x_2x_4 \\
+ x_1^2x_6^2x_3x_4 & + x_1x_6x_2^2x_5^2 & + x_6^2x_2^2x_3x_5.
\end{array}
$$

welche in die verlangte Form bringen.

Ebenso können wir die 15 Glieder:

$1'2' + 1'6' + \dots \quad 9'10'$ schreiben.

$$x_1^2 x_2^2 x_3 x_6 + x_1 x_2 x_4^2 x_5^2 + x_2^2 x_4^2 x_5 x_6$$
$$+ x_1^2 x_3^2 x_4 x_2 + x_1 x_3 x_5^2 x_6^2 + x_3^2 x_5^2 x_6 x_2$$
$$+ x_1^2 x_4^2 x_5 x_3 + x_1 x_4 x_6^2 x_2^2 + x_4^2 x_6^2 x_2 x_3$$
$$+ x_1^2 x_5^2 x_4 x_6 + x_1 x_5 x_2^2 x_3^2 + x_5^2 x_2^2 x_3 x_4$$
$$+ x_1^2 x_6^2 x_5 x_2 + x_1 x_6 x_3^2 x_4^2 + x_6^2 x_3^2 x_4 x_5.$$

Ferner können wir schreiben.

$$11' + 22' + \dots 10\,10'$$

$$2 \cdot x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$$
$$+ 2 \cdot x_1 x_3 x_4 x_5 x_6 x_2$$
$$+ 2 \cdot x_1 x_4 x_5 x_6 x_2 x_3$$
$$+ 2\, x_1 x_5 x_6 x_2 x_3 x_4$$
$$+ 2\, x_1 x_6 x_2 x_3 x_4 x_5.$$

Ferner die übrigen Glieder, die man

$12' + 1'2 + \dots \quad 9\,10' + 9'10$ schreiben:

$$x_1^2 x_2 x_3 x_4 x_5 + x_2 x_3 x_4 x_5 x_6^2 + (x_1 x_2 x_3 x_4 x_5^2 + x_1 x_2 x_3 x_4 x_6^2) + (x_1 x_2 x_4 x_5 x_6^2 + x_1 x_2 x_4 x_5 x_3^2)$$
$$x_1^2 x_3 x_4 x_5 x_6 + x_3 x_4 x_5 x_6 x_2^2 + (x_1 x_3 x_4 x_5 x_6^2 + x_1 x_3 x_4 x_5 x_2^2) + (x_1 x_3 x_5 x_6 x_2^2 + x_1 x_3 x_5 x_6 x_4^2)$$
$$x_1^2 x_4 x_5 x_6 x_2 + x_4 x_5 x_6 x_2 x_3^2 + (x_1 x_4 x_5 x_6 x_2^2 + x_1 x_4 x_5 x_6 x_3^2) + (x_1 x_4 x_6 x_2 x_3^2 + x_1 x_4 x_6 x_2 x_5^2)$$
$$x_1^2 x_5 x_6 x_2 x_3 + x_5 x_6 x_2 x_3 x_4^2 + (x_1 x_5 x_6 x_2 x_3^2 + x_1 x_5 x_6 x_2 x_4^2) + (x_1 x_5 x_2 x_3 x_4^2 + x_1 x_5 x_2 x_3 x_6^2)$$
$$x_1^2 x_6 x_2 x_3 x_4 + x_6 x_2 x_3 x_4 x_5^2 + (x_1 x_6 x_2 x_3 x_4^2 + x_1 x_6 x_2 x_3 x_5^2) + (x_1 x_6 x_3 x_4 x_5^2 + x_1 x_6 x_3 x_4 x_2^2).$$

So haben wir alle Glieder in die gewünschte Form gebracht. Dabei

kann als Anfangsglied einer jeden Horizontalreihe gewählt werden,

welches man will, da sich die Glieder stets in einander [illegible] begreifen

müssen. Nur muss dabei beachtet werden, dass die Glieder, die

neuen Klammern stehen, nicht von einander getrennt werden.
Wir haben bei diesem Zahlenbeispiele stets die ψ Fkt. gewählt.
Daher mussten die Glieder, die in der ersten Horizontalreihe
stehen, so gewählt werden, daß sie in einander übergehen,
wenn wir an Stelle der ursprünglichen φ Fkt. die ψ Fkt. setzen.
Dieses geschieht, wenn wir setzen:

$$\chi(\omega) = -2\left[x_1^2 x_6^2 x_3 x_4 + x_2^2 x_3^2 x_4 x_6 + x_1 x_2 x_3^2 x_6^2 + x_1^2 x_4^2 x_3 x_5 + x_2^2 x_4^2 x_6 x_5 + x_1 x_2 x_4^2 x_5^2\right]$$
$$+\left[x_1^2 x_6^2 x_3^2 + x_1^2 x_3^2 x_4^2 + x_6^2 x_2^2 x_3^2 + x_6^2 x_2^2 x_4^2\right] - 4 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$$
$$+2\left[x_1^2 x_2 x_3 x_4 x_5 + x_2 x_3 x_4 x_5 x_6^2 + x_1 x_5 x_4 x_6 x_2^2 + x_1 x_4 x_5 x_6 x_3^2 + x_1 x_2 x_4 x_5 x_6^2 + x_1 x_2 x_4 x_5 x_3^2\right].$$

Wie wir sehen, sind dieses im Ganzen siebzehn Ausdrücke.
Wir könnten so noch mehrere Ausdrücke der Art aufstellen. Vor allen andern zeichnet sich aber folgender Ausdruck durch ~~[illegible]~~ ~~und~~ Einfachheit aus.

$$\chi(\omega) = -2\left[x_1^2 x_2^2 x_4 x_5 + x_1^2 x_2^2 x_3 x_6 + x_1 x_2 x_3^2 x_6^2 + x_1 x_2 x_4^2 x_5^2 + x_3 x_6 x_4^2 x_5^2 + x_4 x_5 x_6^2 x_3^2\right]$$
$$+\left[x_1^2 x_6^2 x_4^2 + x_1^2 x_6^2 x_5^2 + x_2^2 x_3^2 x_4^2 + x_2^2 x_3^2 x_5^2\right] - 4 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$$
$$+2\left[x_1^2 x_3 x_4 x_5 x_6 + x_2^2 x_3 x_4 x_5 x_6 + x_1 x_2 x_3 x_6 x_4^2 + x_1 x_2 x_3 x_6 x_5^2 + x_1 x_2 x_4 x_5 x_3^2 + x_1 x_2 x_4 x_5 x_6^2\right].$$

Es hat nämlich dieser Ausdruck die Eigenschaft, daß er sich auf folgende Form bringen läßt.

$$\chi(a) = -2\big[(x_1x_2x_5 - x_3x_4x_6)(x_1x_2x_4 - x_3x_5x_6) + (x_1x_2x_6 - x_3x_4x_5)(x_1x_2x_3 - x_4x_5x_6)$$
$$+ [x_3x_2x_6 - x_1x_4x_5](x_1x_3x_6 - x_2x_4x_5)\big] + (x_1x_6x_4 - x_2x_3x_5)(x_1x_6x_4 - x_2x_3x_5)$$
$$+ (x_1x_6x_5 - x_2x_3x_4)(x_1x_6x_5 - x_2x_3x_4).$$

Um die große Symmetrie der Formel übersehen zu können, brauchen wir wieder unser altes Zeichen. Dann wird:

$$\chi(a) = -2\big[(2-2')(1-1') + (9'-9)(10'-10) + (7-7')(4-4')\big]$$
$$+ (5-5')^2 + (6'-6)^2.$$

So haben wir also für $\chi(a)$ einen Ausdruck gefunden, der aus nur 5 Gliedern besteht. Aber auch dieser Ausdruck kann noch bedeutend vereinfacht werden.

Setzen wir:

$5-5' = f(a)$ so wird wie aus dem Ausdrucke für $f(a) - f(a+16)$ hervorgeht:

$2-2' = f(a+16)$

$4-4' = f(a+2.16)$

$1-1' = f(a+3.16)$.

Setzen wir ebenso:

$6' - 6 = f_1(a)$ sein wird:

$$9' - 9 = f_1(a+16)$$
$$10' - 10 = f_1(a+2.16)$$
$$7' - 7 = f_1(a+4.16)$$

Mithin können wir schreiben:

$$\chi(a) = \left[f(a+16)\, f(a+3.16) + f_1(a+16)\, f_1(a+2.16) - f_1(a+4.16)\, f(a+2.16)\right] 2 + f(a)^2 + f_1(a)^2.$$

Mithin ist die Aufgabe allein darauf reducirt, die beiden Glieder $f(a)$ u. $f_1(a)$ zu berechnen.

Dabei ist:

$$f(a) = x_1 x_6 x_4 - x_2 x_3 x_5$$
$$f_1(a) = x_1 x_6 x_5 - x_2 x_3 x_4.$$

Wie wir sehen, geht $f(a)$ in $f_1(a)$ über, wenn man x_4 an Stelle von x_5 setzt und umgekehrt. —

Dabei dürfen wir nur in jedem der beiden Größen $f(a)$ und $f_1(a)$ ein Glied andeuten.

In der That, denken wir uns den ganzen Ausdruck von $\chi(a)$ auf gemeinsamen Nenner gebracht.

Setzen wir

$$x_1 = \frac{x_1^{(1)}}{x_1^{(2)}}$$
$$\vdots$$
$$x_6 = \frac{x_6}{x_6^{(2)}}$$

so ist darzustellen $x_1^{(1)} x_2^{(1)} \cdots x_6^{(1)} x_1^{(2)} x_2^{(2)} \cdots x_6^{(2)}$. Er enthält nur B' Größen, während die Zähler nur A Größen enthalten.

Denn wir:

$$f(a)^2 = \left(x_1' x_6' x_4' - x_2' x_3' x_5'\right)^2$$ oder vielmehr:

$$f(a)^2 = \frac{\left(x_1' x_6' x_4' x_2^{(2)} x_3^{(2)} x_5^{(2)} - x_2' x_3' x_5' x_1^{(2)} x_6^{(2)} x_4^{(2)}\right)^2}{x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(1)} x_4^{(1)} x_5^{(1)} x_6^{(1)} x_1^{(2)} x_2^{(2)} \cdots x_6^{(2)}}$$

Offenbar geht aber $x_1' x_6' x_4' x_2^{(2)} x_3^{(2)} x_5^{(2)}$ in $x_2' x_3' x_5' x_1^{(2)} x_6^{(2)} x_4^{(2)}$ über, wenn man die A mit den B' vertauscht und umgekehrt.

Wir haben diesen Umstand schon bei dem ersten Beweise gebraucht, ohne ihn aber noch genauer bewiesen.

Wir haben also in der That nur den Zähler von

$x_1 x_6 x_4$ u. $x_1 x_6 x_5$ zu berechnen, da daraus man unmittelbar die übrigen Glieder hinschreiben zu können.

Beweis, daß
$$\sum_{\xi=0}^{4} \varphi(\omega+16\xi)^2 = 0 \text{ ist.}$$

Wir fanden früher:

$$\chi(\omega) = -2\left[f(\omega+16)f(\omega+3.16) + f_1(\omega+16)f_1(\omega+2.16) - f_1(\omega+4.16)f(\omega+2.16)\right] + f(\omega)^2 + f_1(\omega)^2$$

wobei:

$$f(\omega) = x_1 x_6 x_4 - x_2 x_3 x_5.$$
$$f_1(\omega) = x_1 x_6 x_5 - x_2 x_3 x_4.$$

Da jeder der Ausdrücke $f(\omega)$ etc. enthält ganze und gebrochene Potenzen von q, nämlich

$$q^0 \quad q^{\frac{1}{5}} \quad q^{\frac{2}{5}} \quad q^{\frac{3}{5}} \quad q^{\frac{4}{5}} \quad q \quad q^{\frac{6}{5}} \ldots \quad q^{\frac{9}{5}} \quad q^2.$$

Das Produkt zweier solcher Ausdrücke wird also auch ganze und gebrochene Potenzen von q enthalten.

Wie gezeigt, dürfen wir nur die ganzen Potenzen berücksichtigen.

Dieselben können auf doppelte Weise entstehen.

I durch Multiplicieren der ganzen Potenzen in den einzelnen Klammern miteinander.

II durch Multiplicieren der gebrochenen Potenzen die einander zu einer Zahl ergänzen, die congruent 0 mod 5 ist wie $\frac{2}{5} + \frac{3}{5}$ etc.

Mit besonderem Hinweise den

Ersten Theil.

von geraden Potenzen in $\underline{x_1 x_4 x_5}$ frei

$$A_1 A_3^2 B_3^3 + q\Big[A_1^3 B_1^3 + A_1^3 B_1 B_2 B_3 (\alpha^4+\alpha+\alpha+\alpha^4+\alpha^2+\alpha^3)$$
$$+ A_1^2 B_1^2 B_2 A_3 (\alpha^2+\alpha^3+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+\alpha^4)$$
$$+ A_1^2 B_2^2 A_2 B_3 (\alpha^2+\alpha^3+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+\alpha^4)$$
$$+ A_1 B_1^3 A_2 A_3 (\alpha+\alpha^4)$$
$$+ A_1 B_1 A_2^2 B_3^2 (\alpha^5+\alpha^4+\alpha)$$
$$+ A_1 B_1 B_2^2 A_3^2 (\alpha^5+\alpha^4+\alpha)$$
$$+ A_1^2 B_2^2 A_3 B_3 (\alpha^5+\alpha+\alpha^2+\alpha^2+\alpha^4+\alpha^5)$$
$$+ A_1 B_1 A_2 B_2 A_3 B_3 (\alpha^2+\alpha^2+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^3+\alpha^3+\alpha^5+\alpha^5+\alpha^5+\alpha^5+\alpha+\alpha^4)$$
$$+ A_1^2 A_2 B_2 B_3^2 (\alpha^5+\alpha+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^2)\Big]$$

$+ q^2 A_1 A_2^2 B_2^3$. Also werden die geraden Potenzen von zwischen

$x_2 x_3 x_4$:

$$B_1 B_3^2 A_3^3 + q\Big[A_1^3 B_1^3 + B_1^3 A_1 A_2 A_3 (\alpha^4+\alpha+\alpha+\alpha^4+\alpha^2+\alpha^3) + A_1^2 B_1^2 A_2 B_3 (\alpha^2+\alpha^3+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+\alpha^4)$$
$$+ B_1 B_2 B_3 A_3^3 (\alpha+\alpha^4) \qquad + A_1^2 B_1^2 A_3 B_2 (\alpha^2+\alpha^3+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+\alpha^4)$$
$$+ A_1 B_1 A_2^2 B_3^2 (\alpha^5+\alpha^4+\alpha). \qquad + B_1^2 A_2^2 A_3 B_3 (\alpha^5+\alpha+\alpha^5+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4)$$
$$+ A_1 B_1 A_3^2 B_2^2 (\alpha^5+\alpha^4+\alpha) \qquad + B_1^2 A_2 B_2 A_3^2 (\alpha^5+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^3+\alpha^5)$$
$$+ A_1 B_1 A_2 B_2 A_3 B_3 (\alpha^2+\alpha^2+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^3+\alpha^3+\alpha^5+\alpha^5+\alpha^5+\alpha^5+\alpha+\alpha^4$$

Mithin wird der Zähler von $f_1(\alpha)$, wenn wir nur die geraden Potenzen berücksichtigen:

$$A_1A_3^2B_3^3 - B_1B_3^3A_3^2 + q\left[A_1A_2A_3B_1^3 - A_1^3B_1B_2B_3 + A_1^2B_2^2A_3B_1 - B_1^2A_2^2A_3B_3 + A_1^2A_2B_2B_3^2 - B_1^2A_2B_1A_3^2\right]$$

$$+ q^2\left(A_1A_2^2B_2^3 - B_1B_2^3A_2^3\right).$$

Da wir nur gerade Potenzen berücksichtigen, so wird dies auch der Zähler von $f_1(\alpha+1\varepsilon)\dots f_1(\alpha+7\varepsilon)$ sein.

Bilden wir jetzt die geraden Potenzen des Zählers von

$x_1\,x_6\,x_4$ so werden dieselben:

$$A_1A_3^2B_3^3 + q\Big[A_1^3B_1^3 + A_1^3B_1B_2B_3\left[\alpha^2+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^3+\alpha+\alpha^4\right] + B_1^3A_1A_2A_3\left[\alpha^3+\alpha^2\right].$$

$$+ A_1^2B_1^2A_2B_3\left[\alpha+\alpha+\alpha^4+\alpha^4+\alpha^2+\alpha^3\right] + A_1^2B_1^2A_3B_2\left[\alpha+\alpha+\alpha^4+\alpha^4+\alpha^2+\alpha^3\right]$$

$$+ A_1B_1A_2^2B_3^2\left[\alpha^5+\alpha^2+\alpha^3\right] + A_1B_1B_2^2A_3^2\left[\alpha^5+\alpha^2+\alpha^3\right].$$

$$+ A_1^2A_2B_2B_3^2\left[\alpha^5+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5\right] + A_1^2B_2^2B_3A_3\left[\alpha^5+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5\right].$$

$$+ A_1B_1A_2B_2A_3B_3\left[\alpha^4+\alpha^4+\alpha^4+\alpha+\alpha+\alpha+\alpha^5+\alpha^5+\alpha^5+\alpha^5+\alpha^2+\alpha^3\right].$$

Dagegen wird der Zähler von

$x_2\,x_3\,x_5$, wenn wir nur die geraden Potenzen

berücksichtigen:

$$B_1B_3^2A_3^3 + q\Big[A_1^3B_1^3 + B_1^3A_1A_2A_3\left[\alpha^2+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^3+\alpha+\alpha^4\right] + A_1^3B_1B_2B_3\left(\alpha^3+\alpha^2\right).$$

$$+ B_1^2A_1^2B_2A_3\left[\alpha+\alpha+\alpha^4+\alpha^4+\alpha^2+\alpha^3\right] + A_1^2B_1^2A_2B_3\left(\alpha+\alpha+\alpha^4+\alpha^4+\alpha^2+\alpha^3\right)$$

$$+ A_1B_1A_3^2B_2^2\left[\alpha^5+\alpha^2+\alpha^3\right] + A_1B_1B_2^2A_3^2\left[\alpha^5+\alpha^2+\alpha^3\right].$$

$$+ B_1^2A_2B_2A_3^2\left[\alpha^5+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5\right] + B_1^2A_2^2B_3A_3\left[\alpha^5+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5\right]$$

$$+ A_1B_1A_2B_2A_3B_3\left[\alpha^4+\alpha^4+\alpha^4+\alpha+\alpha+\alpha+\alpha^5+\alpha^5+\alpha^5+\alpha^5+\alpha^2+\alpha^3\right].$$

Nichts anderes als den Zähler von $f(w)$ wenn wir u nach die geraden Potenzen entwickeln:

$$A_1 A_3^2 B_3^3 - B_1 B_3^2 A_3^2 + q\big[A_1 A_2 A_3 B_1^3 - A_1^3 B_1 B_2 B_3 + A_1^2 B_2^2 A_3 B_3 - B_1^2 A_2^2 A_3 B_3$$
$$+ A_1^2 A_2 B_2 B_3^2 - B_1^2 A_2 B_2 A_3^2\big] + q^2\big[A_1 A_2^2 B_2^3 - B_1 B_2^2 A_2^3\big].$$

Es ist dieser daher denn auch der Zähler von $f(w+i6) - f(w+2i6)$.

Wir wissen aber derselbe genau auch dem Zähler von $f_1(w)$ zu kommen.

Nun erhält

$$\chi(w) = -2\big[f(w+i6)f(w+2.i6) + f_1(w+i6)f_1(w+2.i6)\big] + 2f(w+4.i6)f(w+2.i6)$$
$$+ f_1(w)^2 + f(w)^2$$

4 positiven und 4 negativen Gliedern. Da die Moduln derselben alle gleich sind, daß nämlich sie selbst einander gleich sind, leicht sich und es ist leicht beweisen, daß Glieder, die durch Multiplication ganzer Potenzen entstanden entstanden sind, nicht vorkommen.

Ueber einige Sätze aus der Theorie der Modulargleichungen nach Königsb. Vorl.

Setzen wir $\sqrt[4]{c} = u$ [c^2 ist der gewöhnliche Modul]

$$\sqrt[4]{k} = v$$

so besteht für unpaare Transformationen p^{ter} Ordn., die wir im Folgenden allein untersuchen wollen, zwischen diesen beiden Größen eine Gl. $p+1^{ten}$ Grades, deren Haupteigenschaften folgende sind:

Setzen wir die Gl.

$$\Theta_p(u\,v) = 0$$

so verändert sie sich nicht, wenn man u mit v und v mit $\left(\frac{2}{n}\right) u$ vertauscht. Ebenso bleibt die Gl. erhalten, wenn man auf c und k dieselben linearen Substitutionen anwendet, da alle diese bei Zahlen unverändert lassen aus Substitutionen, die überführen c in $\frac{1}{c}$ u. in $\sqrt{1-c^2}$. (siehe Königsberger pag 176)

Wir geben zunächst eine Zusammenstellung der Wurzeln der Modulargl.

Die transcendenten Ausdrücke derselben sind von Jacobi aufgestellt und enthalten wir:

$$v_{p+1} = u^p \sin\mathrm{coam}\frac{4K}{p} \cdot \sin\mathrm{coam}\frac{8K}{p} \cdots \sin\mathrm{coam}\frac{2(p-1)K}{p}$$

und

$$v_{\xi+1} = \overset{p}{u}\,\mathrm{snc}\,\frac{4C}{p}(\tau-16\xi)\cdots\mathrm{snc}\,\frac{2(p-1)C}{p}(\tau-16\xi)$$

$$\xi = 0, 1, \dots p-1.$$

wobei C das erste ganze elliptische Hauptintegral zu dem Modul u^2 bedeutet.

Es handelt sich darum die v als Funktionen von u zu entwickeln oder wenigstens die Form der Entwickelung festzustellen.

Dieselben werden wir kennen, wenn wir das Anfangs-Glied aufstellen können. Dieses wiederum werden wir dadurch finden, daß wir u sich unendlich der Null nähern lassen und das zugehörige v berechnen.

Betrachten wir also:

$$\lim v = \lim\left(\overset{p}{}\,\mathrm{snc}\,\frac{2C}{p}\cdots\mathrm{snc}\,\frac{2(p-1)}{p}C\right)_{u=0}$$

$$\mathrm{snc}\,\frac{2Cx}{\pi} = \frac{\mathrm{cn}\,\frac{2Cx}{\pi}}{\mathrm{dn}\,\frac{2Cx}{\pi}} = \frac{\cos x\prod_1^\infty(1+2q^{2n}\cos 2x+q^{4n})\prod(1+q^{2n+1})^2}{\prod_1^\infty(1+2q^{2n+1}\cos 2x+q^{4n+2})\prod(1+q^{2n})^2}$$

Aber $\dfrac{\prod(1+q^{2n+1})^2}{\prod(1+q^{2n})^2} = 2\sqrt[4]{q}\cdot\sqrt{\frac{1}{c}}$ Also:

$$\mathrm{snc}\,\frac{2Cx}{\pi} = \frac{2}{\sqrt{c}}\sqrt[4]{q}\cos x\,\frac{\prod_1^\infty(1+2q^{2n}\cos 2x+q^{4n})}{\prod_1^\infty(1+2q^{2n-1}\cos 2x+q^{4n-2})}$$

Dieser Ausdruck ist für $c=0$ zu untersuchen.

Dafür wird: $c=\frac{\omega}{2}$ $c' = i\infty$, also:

$$\lim q = 0.$$

Bei Berücksichtigung der Formel d. Gliedes höherer Ordnung wird dann:

$$\lim \sin\frac{2cx}{\pi} = \lim \frac{2}{\gamma c}\sqrt[4]{q}\cos x.$$

Setzt man ferner für x der Reihe nach die Werthe:

$\frac{2\pi}{p}, \frac{4\pi}{p} \ldots \frac{(p-1)\pi}{p}$ ein und multiplicirt, so wird:

$$\lim v = \lim u^p \cdot \frac{2^{\frac{p-1}{2}}}{u^{p-1}} \sqrt[4]{q}^{\frac{p-1}{2}} \cos\frac{2\pi}{p}\cdots\cos\frac{(p-1)\pi}{p}.$$

Aber: (Koenigsb. pag. 147).

$$\cos\frac{2\pi}{p}\cdots\cos\frac{(p-1)\pi}{p} = \left(\frac{2}{p}\right)\frac{1}{2^{\frac{p-1}{2}}}$$ also:

$$\lim v = \lim \frac{u^p}{u^{p-1}}\left(\frac{2}{p}\right)\sqrt[4]{q^{\frac{p-1}{2}}}.$$

Aber andererseits ist:

$$u = \sqrt{2}\sqrt[8]{q}\left\{(1+q^2)(1+q^4)\cdots\right\}^2(1-q)(1-q^3)\cdots$$ also:

$$\lim u^{p-1} = 2^{\frac{p-1}{2}}\sqrt[4]{q^{\frac{p-1}{2}}}$$ also:

$$1)\ \lim v = \left(\frac{2}{p}\right)\lim\frac{u^p}{2^{\frac{p-1}{2}}},$$

da die Wurzelwerthe sich durch Vertauschung von u und v ändern
$\left(\frac{2}{p}\right)$ u nicht ändert, so muss:

$$\lim u = \lim \frac{v^p}{2^{\frac{p-1}{2}}} \text{ sein d.h.}$$

$$2)\quad v_\sigma = 2^{\frac{p-1}{2p}}\, u^{\frac{1}{p}}\, e^{\frac{2\sigma\pi i}{p}} \quad \text{wo } \sigma = 1.2\ldots p.$$

So erhalten wir in Formel 1) und 2) die Werthe aller $p+1$ Wurzeln für unendlich kleine u.
Vermuthlich wird die Entwickelung von v_σ u. v_{p+1} die Form haben:

$$v_\sigma = a_p\, u^{\frac{1}{p}} e^{\frac{2\sigma\pi i}{p}} + a_p^{(1)}\, u^{\frac{2}{p}} + \ldots \qquad \sigma = 1 \ldots p.$$

$$\left(\frac{2}{p}\right) v_{p+1} = b_p\, u^p + b_p^{(1)}\, u^{p+1} + \ldots$$

Wir können nun vorausschauend eine wichtige Eigenschaft dieser Reihen aufstellen. Denken wir uns die convergirenden Ausdrücke für v_σ u. v_{p+1} so werden diese, da l u. l nur von u^8 abhängen, — falls an Stelle von u: $u e^{\frac{\pi i}{4}}$ gesetzt wird, mit einer achten Einheitswurzel multiplizirt sein.
Dasselbe muss also auch bei den hier aufgestellten Reihen der Fall sein, d.h. da das erste Glied jedenfalls stets einen anderen Werth hat, dann [wenn nicht u = 0] so müssen wir schließen, daß die Exponenten in der Entwickelung von v_σ nur Glieder mit Exponenten $\frac{8m+1}{p}$ u. von v_{p+1} mit Gliedern [illegible]

mit den Exponenten $8m + p$ vertauschen.—

Mathieu hat die Reihen für Primzahlgrade n wirklich aufgestellt und zwar haben dieselben die Form:

$e^{\frac{2\pi i}{n}} = \alpha$

$$v_\sigma = A_0 u^{\frac{1}{n}} \alpha^{\sigma} + A_1 u^{\frac{9}{n}} \alpha^{9\sigma} + A_2 u^{\frac{17}{n}} \alpha^{17\sigma} + \dots \qquad \sigma = 1 \dots n$$

wobei:

$$A_0 = 2^{\frac{n-1}{n}} \quad A_1 = -1 \cdot 2^{\frac{n-9}{n}}, \quad A_2 = 2 \cdot 2^{\frac{n-17}{2n}}, \quad A_3 = -3 \cdot 2^{\frac{n-25}{n}}$$

$$A_4 = 4 \cdot 2^{\frac{n-33}{2n}} \quad A_5 = -6 \cdot 2^{\frac{n-41}{2n}} \dots \quad A_{n-1} = \nu \cdot 2^{-\frac{7n+7}{2n}},$$

dabei convergiren die Reihen für $u < 1$.

Ferner:

$$(2/2) \quad v_{n+1} = A_0 u^{n} + A_1 u^{n+8} + A_2 u^{n+16} + A_3 u^{n+24} \dots$$

wobei die A für die einzelnen Transformationsgrade wirklich berechnet werden können.

Dieselben Größen können aber noch auf andere Weise ermittelt werden.

In der That ändert sich die Modulargl. nicht, wenn man u^8 und v^8 mit $1-u^8$ und $1-v^8$ vertauscht. Man wird also aber neue Wurzeln der Modulargl. erhalten [natürlich ist das folgende v nicht das frühere, sondern ein anderes, welches nach Bemerkung in § 30 leicht berechnet werden kann.]

Auf die an der ... angewendete Methode findet man dann, dass das Anfangsglied der Entwickelung, welches $u=1$ entspricht, wird:

$$v_\sigma = \left(\frac{2}{n}\right) + \left(\frac{2}{n}\right) A_1 (u-1)^{\frac{1}{p}} e^{\frac{2\sigma\pi i}{p}} + \dots \qquad \sigma = 1 \dots p$$

wobei $A_1 = 2^{\frac{p-1}{p}}$ usw:

$$v_{p+1} = 1 + B_1 (u-1)^{p} + \dots \quad \text{wobei:}$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2^{p-1}}$$

Noch andere Entwickelungen können wir aufstellen. In der That, wie gezeigt, gab $u e^{\frac{\sigma\pi i}{4}}$ für u gesetzt, wieder die Wurzeln der Modulargl. ($\sigma = 1 \dots 8$). Daher muss es für unsere letzteren Entwickelung von $v_\sigma - \left(\frac{2}{n}\right)$ auch der Fall sein. Auf diese Weise erhält man Entwickelungen nach Potenzen von $\left(u - e^{\frac{\sigma\pi i}{4}}\right)$, $\sigma = 1 \dots 8$, die dieselbe Form haben, wie die zuletzt aufgestellten.

Wir werden daher bei den Modulargl. die zu den Transformationen 5ten Grades gehören, ausführlicher besprechen.

Diese Vereinfachungen setzen uns in den Stand folgendes Lemma zu führen.—

Lemma des Hermiteschen Satzes, dass die drei ersten Coeffiz. in der aus der Modulargl. 6t. Gr. hergeleiteten Gl. 5t. Gr. verschwinden.

Stellen wir dazu folgende Betrachtungen an.

Sei die Modulargl. die zu der Transformation 5ten Grades gehört:

$$v^6 - u^6 - 4uv(1-u^4v^4) + 5u^2v^2(v^2-u^2) = 0 \quad \text{wobei}$$

$$u = \varphi(\tau) = \sqrt[8]{k^2}$$

$$v = \quad = \sqrt[8]{\lambda^2}$$

Die Lösungen derselben sind:

$$-\varphi(5\tau),\ \varphi\left(\frac{\tau}{5}\right),\ \varphi\left(\frac{\tau+16}{5}\right),\ \varphi\left(\frac{\tau+2.16}{5}\right),\ \varphi\left(\frac{\tau+3.16}{5}\right),\ \varphi\left(\frac{\tau+4.16}{5}\right)$$

Wir bezeichnen dieselben der Reihe nach mit:

$$x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6.$$

Dann kann nach dem früheren entwickelt werden:

$$x_2 = A_0 u^{\frac{1}{5}} + A_1 u^{\frac{9}{5}} + A_3 u^{\frac{17}{5}} + A_4 u^{\frac{25}{5}} + A_6 u^{\frac{33}{5}} + A_7 u^{\frac{41}{5}} + A_8 u^{\frac{49}{5}} + A_9 u^{\frac{57}{5}} + \dots$$
$$x_3 = A_0 \alpha u^{\frac{1}{5}} + A_1 \alpha^4 u^{\frac{9}{5}} + A_3 \alpha^2 u^{\frac{17}{5}} + A_4 u^{\frac{25}{5}} + A_6 \alpha^3 u^{\frac{33}{5}} + A_7 \alpha u^{\frac{41}{5}} + A_8 \alpha^4 u^{\frac{49}{5}} + A_9 \alpha^2 u^{\frac{57}{5}} + \dots$$
$$x_4 = A_0 \alpha^2 u^{\frac{1}{5}} + A_1 \alpha^3 u^{\frac{9}{5}} + A_3 \alpha^4 u^{\frac{17}{5}} + A_4 u^{\frac{25}{5}} + A_6 \alpha u^{\frac{33}{5}} + \dots$$
$$x_5 = A_0 \alpha^3 u^{\frac{1}{5}} + A_1 \alpha^2 u^{\frac{9}{5}} + A_3 \alpha u^{\frac{17}{5}} + A_4 u^{\frac{25}{5}} + A_6 \alpha^4 u^{\frac{33}{5}} + \dots$$
$$x_6 = A_0 \alpha^4 u^{\frac{1}{5}} + A_1 \alpha u^{\frac{9}{5}} + A_3 \alpha^3 u^{\frac{17}{5}} + A_4 u^{\frac{25}{5}} + A_6 \alpha^2 u^{\frac{33}{5}} + \dots$$
$$x_1 = -B_0 u^5 + B_1 u^{13} - B_2 u^{21} - \dots \qquad \alpha = e^{\frac{2i\pi}{5}}$$

Hieraus ist klar, daß wir die einzelnen Wurzeln in die Form setzen können:

$$x_2 = u^{\frac{1}{5}} S_1 + u^{\frac{2}{5}} S_2 + u^{\frac{3}{5}} S_3 + u^{\frac{4}{5}} S_4 + u^{\frac{5}{5}} S_5$$
$$x_3 = \alpha u^{\frac{1}{5}} S_1 + \alpha^2 u^{\frac{2}{5}} S_2 + \alpha^3 u^{\frac{3}{5}} S_3 + \alpha^4 u^{\frac{4}{5}} S_4 + u^{\frac{5}{5}} S_5$$
$$x_4 = \alpha^2 u^{\frac{1}{5}} S_1 + \alpha^4 u^{\frac{2}{5}} S_2 + \alpha u^{\frac{3}{5}} S_3 + \alpha^3 u^{\frac{4}{5}} S_4 + u^{\frac{5}{5}} S_5$$
$$x_5 = \alpha^3 u^{\frac{1}{5}} S_1 + \alpha u^{\frac{2}{5}} S_2 + \alpha^4 u^{\frac{3}{5}} S_3 + \alpha^2 u^{\frac{4}{5}} S_4 + u^{\frac{5}{5}} S_5$$
$$x_6 = \alpha^4 u^{\frac{1}{5}} S_1 + \alpha^3 u^{\frac{2}{5}} S_2 + \alpha^2 u^{\frac{3}{5}} S_3 + \alpha u^{\frac{4}{5}} S_4 + u^{\frac{5}{5}} S_5$$
$$x_1 = - u^5 S_6.$$

Dabei haben die S die Eigenschaft, daß sie nur solche ganzen Potenzen von u enthalten, deren Exp. genau congruent Null mod. 8 ist und zwar ist:

$$S_1 = 2^{\frac{4}{10}} + c_1 u^8 + c_2 u^{16} + \dots$$
$$S_2 = \left[2 \cdot 2^{-\frac{12}{10}} + c_1' u^8 + c_2' u^{16} + \dots\right] u^3$$
$$S_3 = \left[4 \cdot 2^{-\frac{28}{10}} + c_1^{(2)} u^8 + c_2^{(2)} u^{16} + \dots\right] u^6$$
$$S_4 = \left[-1 \cdot 2^{-\frac{4}{10}} + c_1^{(3)} u^8 + c_2^{(3)} u^{16} + \dots\right] u$$
$$S_5 = \left[-3 \cdot 2^{\frac{20}{10}} + c_1^{(4)} u^8 + c_2^{(4)} u^{16} + \dots\right] u^5$$
$$S_6 = \frac{1}{2^2} + b_1 u^8 + b_2 u^{16} + \dots$$

Es soll nun gebildet werden:

$$\varphi(T) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_6)(x_4 - x_5)$$ und die daraus entstehenden

$$\varphi(T+16) \dots \varphi(T+4.16).$$

Dann soll bewiesen werden daß

$$\sum_{0}^{4} \varepsilon^{\xi}\, \varphi(T+\xi\, 16)^{r} = 0 \quad \text{resp.} \quad r = 1.2.3$$

Bilden wir:

$$x_3 - x_6 = u^{\frac{1}{5}} \rho_1 (\alpha - \alpha^4) + u^{\frac{2}{5}} \rho_2 (\alpha^2 - \alpha^3) + u^{\frac{3}{5}} \rho_3 (\alpha^3 - \alpha^2) + u^{\frac{4}{5}} \rho_4 (\alpha^4 - \alpha).$$

oder

Ebenso:

$$x_3 - x_6 = \alpha^4 (1-\alpha)\left[-(1+\alpha) u^{\frac{1}{5}} \rho_1 + \alpha^3 u^{\frac{2}{5}} \rho_2 - \alpha^3 u^{\frac{3}{5}} \rho_3 + (1+\alpha) u^{\frac{4}{5}} \rho_4\right].$$

$$x_4 - x_2 = \alpha^4 (1-\alpha)\left[-\alpha(1+\alpha) u^{\frac{1}{5}} \rho_1 + u^{\frac{2}{5}} \rho_2 - \alpha u^{\frac{3}{5}} \rho_3 + \alpha^4 (1+\alpha) u^{\frac{4}{5}} \rho_4\right].$$

$$x_5 - x_3 = \alpha^4 (1-\alpha)\left[-\alpha^2 (1+\alpha) u^{\frac{1}{5}} \rho_1 + \alpha^2 u^{\frac{2}{5}} \rho_2 - \alpha^4 u^{\frac{3}{5}} \rho_3 + \alpha^3 (1+\alpha) u^{\frac{4}{5}} \rho_4\right].$$

$$x_6 - x_4 = \alpha^4 (1-\alpha)\left[-\alpha^3 (1+\alpha) u^{\frac{1}{5}} \rho_1 + \alpha^4 u^{\frac{2}{5}} \rho_2 - \alpha^2 u^{\frac{3}{5}} \rho_3 + \alpha^2 (1+\alpha) u^{\frac{4}{5}} \rho_4\right].$$

$$x_2 - x_5 = \alpha^4 (1-\alpha)\left[-\alpha^4 (1+\alpha) u^{\frac{1}{5}} \rho_1 + \alpha u^{\frac{2}{5}} \rho_2 - u^{\frac{3}{5}} \rho_3 + \alpha (1+\alpha) u^{\frac{4}{5}} \rho_4\right].$$

Ebenso:

$$x_4 - x_5 = \alpha^4 [1-\alpha]\left[\alpha^3 u^{\frac{1}{5}} \rho_1 + (1+\alpha) u^{\frac{2}{5}} \rho_2 - (1+\alpha) u^{\frac{3}{5}} \rho_3 - \alpha^3 u^{\frac{4}{5}} \rho_4\right].$$

$$x_5 - x_6 = \alpha^4 (1-\alpha)\left[\alpha^4 u^{\frac{1}{5}} \rho_1 + \alpha^2 (1+\alpha) u^{\frac{2}{5}} \rho_2 - \alpha^3 (1+\alpha) u^{\frac{3}{5}} \rho_3 - \alpha^2 u^{\frac{4}{5}} \rho_4\right].$$

$$x_6 - x_2 = \alpha^4 (1-\alpha)\left[u^{\frac{1}{5}} \rho_1 + \alpha^4 (1+\alpha) u^{\frac{2}{5}} \rho_2 - \alpha (1+\alpha) u^{\frac{3}{5}} \rho_3 - \alpha u^{\frac{4}{5}} \rho_4\right].$$

$$x_2 - x_3 = \alpha^4 (1-\alpha)\left[\alpha u^{\frac{1}{5}} \rho_1 + \alpha (1+\alpha) u^{\frac{2}{5}} \rho_2 - \alpha^4 (1+\alpha) u^{\frac{3}{5}} \rho_3 - u^{\frac{4}{5}} \rho_4\right]$$

$$x_3 - x_4 = \alpha^4 (1-\alpha)\left[\alpha^2 u^{\frac{1}{5}} \rho_1 + \alpha^3 (1+\alpha) u^{\frac{2}{5}} \rho_2 - \alpha^2 (1+\alpha) u^{\frac{3}{5}} \rho_3 - \alpha^4 u^{\frac{4}{5}} \rho_4\right].$$

Ebenso:

$$\left.\begin{aligned}
x_2 - x_1 &= u^5\varphi_6 + u\varphi_5 + u^{\frac{4}{5}}\varphi_4 + u^{\frac{3}{5}}\varphi_3 + u^{\frac{2}{5}}\varphi_2 + u^{\frac{1}{5}}\varphi_1 \\
x_3 - x_1 &= u^5\varphi_6 + u\varphi_5 + \alpha^4 u^{\frac{4}{5}}\varphi_4 + \alpha^3 u^{\frac{3}{5}}\varphi_3 + \alpha^2 u^{\frac{2}{5}}\varphi_2 + \alpha u^{\frac{1}{5}}\varphi_1 \\
x_4 - x_1 &= u^5\varphi_6 + u\varphi_5 + \alpha^3 u^{\frac{4}{5}}\varphi_4 + \alpha u^{\frac{3}{5}}\varphi_3 + \alpha^4 u^{\frac{2}{5}}\varphi_2 + \alpha^2 u^{\frac{1}{5}}\varphi_1 \\
x_5 - x_1 &= u^5\varphi_6 + u\varphi_5 + \alpha^2 u^{\frac{4}{5}}\varphi_4 + \alpha^4 u^{\frac{3}{5}}\varphi_3 + \alpha u^{\frac{2}{5}}\varphi_2 + \alpha^3 u^{\frac{1}{5}}\varphi_1 \\
x_6 - x_1 &= u^5\varphi_6 + u\varphi_5 + \alpha u^{\frac{4}{5}}\varphi_4 + \alpha^2 u^{\frac{3}{5}}\varphi_3 + \alpha^3 u^{\frac{2}{5}}\varphi_2 + \alpha^4 u^{\frac{1}{5}}\varphi_1
\end{aligned}\right\}$$

Bilden wir nun

$(x_2 - x_1)(x_3 - x_6)(x_4 - x_5)$ so wird dieser Ausdruck:

$$\left(u^5\varphi_6 + u\varphi_5 + u^{\frac{4}{5}}\varphi_4 + u^{\frac{3}{5}}\varphi_3 + u^{\frac{2}{5}}\varphi_2 + u^{\frac{1}{5}}\varphi_1\right)\left(-(1+\alpha)u^{\frac{1}{5}}\varphi_1 + \alpha^3 u^{\frac{2}{5}}\varphi_2 - \alpha^3 u^{\frac{3}{5}}\varphi_3 + (1+\alpha)u^{\frac{4}{5}}\varphi_4\right)$$

$$\text{mal } \left(\alpha^3 u^{\frac{1}{5}}\varphi_1 + (1+\alpha)u^{\frac{2}{5}}\varphi_2 - (1+\alpha)u^{\frac{3}{5}}\varphi_3 - \alpha^3 u^{\frac{4}{5}}\varphi_4\right)\alpha^3(1-\alpha)^2.$$

Jedenfalls ist also $\varphi(T)$ eine Fct. von $\underline{u^{\frac{1}{5}}}$. Setzen wir somit:

$$\varphi(T) = f(u^{\frac{1}{5}}).-$$

Dann ist aber klar, daß:

$$\varphi(T+16) = f\left(\alpha(u)^{\frac{1}{5}}\right)$$ ist, wo α eine 5te Einheitswurzel ist.

In der That, wie aus den aufgestellten Formen ersichtlich unterscheidet sich $\varphi(T+16)$ von $\varphi(T)$ nur dadurch, daß an Stelle von $u^{\frac{1}{5}}$: $\alpha u^{\frac{1}{5}}$ von $u^{\frac{2}{5}}$: $\alpha^2 u^{\frac{2}{5}}$ ... von $u^{\frac{4}{5}}$: $\alpha^4 u^{\frac{4}{5}}$ getreten ist. Ebenso ist:

$$\varphi(T+2.16) = f(\alpha^2 u^{\frac{1}{5}})$$

$$\varphi(T+3.16) = f(\alpha^3 u^{\frac{1}{5}})$$

$$\varphi(T+4.16) = f(\alpha^4 u^{\frac{1}{5}})$$

Daraus folgt, daß nun:

$$\sum_{0}^{4}\varphi(\alpha+16\xi) = f(u^{\frac{1}{5}}) + f(\alpha u^{\frac{1}{5}}) + \dots f(\alpha^{4} u^{\frac{1}{5}}).$$

Gebrochene Potenzen von u nicht vorkommen dürfen, da dieselben in den einzelnen f Werthen stets mit einer andern $5^{\underline{ten}}$ Einheitswurzel multiplicirt sind und $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=0$ ist.

Ferner müssen die Coefficienten der ganzen Coefficienten von u bei jeder f Fct. dieselben sein, wie aus denselben oder ähnl. Gründen klar.

Was von $\sum_{0}^{4}\varphi(\alpha+16\xi)$ gilt, gilt von allen Potenzsummen und wir finden somit als

$\sum_{0}^{4}\varphi(\bar{\alpha}+16\xi)^{r} = F(u)$ etc.

Erstes Resultat

Alle $\sum_{0}^{4}\varphi(\bar{\alpha}+16\xi)^{r}$ wo r eine jede Zahl bedeuten kann, sind ganze Fct. der u, deren Grad allerdings noch ein unendlich großer sein kann.

Um die Coefficienten der einzelnen Potenzen zu finden, braucht man nur den in

$\varphi(\bar{\alpha})$ suchen, ~~allerdings~~ allerdings gerade den fünffachen des Werthes der vorkommenden Coefficienten. —

Ferner: Jedes der fünf $\varphi(\alpha+16\xi)$ hat den Faktor $u^{\frac{3}{5}}$ mit sich hat:

$\sum\limits_0^4 \varphi(\tau+16\xi)^r$ den Faktor $u^{\frac{3r}{5}}$. Da es aber eine ganze Fkt. von u ist, so muß sie den Faktor

$$u^{\frac{3r}{5}+\frac{\nu}{5}}$$ haben, wo ν die kleinste pos. ganze Zahl ist

die $2r+\nu \equiv 0 \mod 5$ macht.

Also.

<u>Zweites Resultat.</u>

Alle Potenzsummen $\sum\limits_0^4 \varphi(\tau+16\xi)^r$ haben den Faktor

$$u^{\frac{3r+\nu}{5}}$$ wo ν die kleinste pos. Zahl, die

$$2r+\nu \equiv 0 \mod 5 \text{ macht.} —$$

Ferner haben wir eine Reihenentwickelung von k nach Potenzen von $(k-1)$ gefunden. Dieselbe entsteht, indem wir c mit c', k mit k' vertauschen. Dann gehen aber die φ Fkt. in die ψ Fkt. über. Und zwar wird:

$\varphi\left(\frac{a+4\cdot16}{5}\right) = -\psi\left(\frac{a+16}{5}\right)$ d.h. $x_6 = -x_3'$ ebenso:

$$x_5 = -x_5'$$
$$x_4 = -x_4'$$
$$x_3 = -x_6'$$
$$x_2 = x_1'$$
$$x_1 = x_2'.$$

Hiernach entspricht dem früheren:

$\sigma = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6$

$\sigma' = 2\ 1\ 6\ 4\ 5\ 3.$

Darnach wird:

$p = 5.$

$$x_1 = -1 + B_1 (u-1)^{\frac{1}{p}} + B_2' (u-1)^{\frac{2}{p}} + B_3' (u-1)^{\frac{3}{p}} + \cdot B_4' (u-1)^{\frac{4}{p}} + \dots$$

$$x_6 = -\left[1 + B_1 \alpha (u-1)^{\frac{1}{p}} + B_2' \alpha^2 (u-1)^{\frac{2}{p}} + B_3 \alpha^3 (u-1)^{\frac{3}{p}} + \alpha^4 B_4 (u-1)^{\frac{4}{5}} + \dots\right]$$

$$x_4 = -\left[1 + B_1 \alpha^2 (u-1)^{\frac{1}{p}} + B_2 \alpha^4 (u-1)^{\frac{2}{p}} + B_3' \alpha (u-1)^{\frac{3}{p}} + \alpha^3 B_4' (u-1)^{\frac{4}{5}} + \dots\right]$$

$$x_5 = -\left[1 + B_1 \alpha^3 (u-1)^{\frac{1}{p}} + B_2' \alpha (u-1)^{\frac{2}{p}} + B_3 \alpha^4 (u-1)^{\frac{3}{p}} + \alpha^2 B_4 (u-1)^{\frac{4}{5}} + \dots\right]$$

$$x_3 = -\left[1 + B_1 \alpha^4 (u-1)^{\frac{1}{p}} + B_2' \alpha^3 (u-1)^{\frac{2}{p}} + B_3 \alpha^2 (u-1)^{\frac{3}{p}} + \alpha B_4 (u-1)^{\frac{4}{5}} + \dots\right]$$

$$x_2 = 1 + C_1 (u-1)^{p} + C_2 (u-1)^{p+1} + \dots$$

Mithin können wir weiter schreiben:

$$x_1 = -1 - (u-1)^{\frac{1}{p}} \mathfrak{P}_1' - (u-1)^{\frac{2}{p}} \mathfrak{P}_2' - (u-1)^{\frac{3}{p}} \mathfrak{P}_3' - (u-1)^{\frac{4}{p}} \mathfrak{P}_4' - (u-1)^{\frac{5}{5}} \mathfrak{P}_5'$$

$$x_6 = -\left[1 + \alpha (u-1)^{\frac{1}{p}} \mathfrak{P}_1' + \alpha^2 (u-1)^{\frac{2}{p}} \mathfrak{P}_2' + \alpha^3 (u-1)^{\frac{3}{p}} \mathfrak{P}_3' + \alpha^4 (u-1)^{\frac{4}{p}} \mathfrak{P}_4' + (u-1)^{\frac{5}{5}} \mathfrak{P}_5'\right]$$

$$x_4 = -\left[1 + \alpha^2 (u-1)^{\frac{1}{p}} \mathfrak{P}_1' + \alpha^4 (u-1)^{\frac{2}{p}} \mathfrak{P}_2' + \alpha (u-1)^{\frac{3}{p}} \mathfrak{P}_3' + \alpha^3 (u-1)^{\frac{4}{p}} \mathfrak{P}_4' + (u-1)^{\frac{5}{5}} \mathfrak{P}_5'\right]$$

$$x_5 = -\left[1 + \alpha^3 (u-1)^{\frac{1}{p}} \mathfrak{P}_1' + \alpha (u-1)^{\frac{2}{p}} \mathfrak{P}_2' + \alpha^4 (u-1)^{\frac{3}{p}} \mathfrak{P}_3' + \alpha^2 (u-1)^{\frac{4}{p}} \mathfrak{P}_4' + (u-1)^{\frac{5}{5}} \mathfrak{P}_5'\right]$$

$$x_3 = -\left[1 + \alpha^4 (u-1)^{\frac{1}{p}} \mathfrak{P}_1' + \alpha^3 (u-1)^{\frac{2}{p}} \mathfrak{P}_2' + \alpha^2 (u-1)^{\frac{3}{p}} \mathfrak{P}_3' + \alpha (u-1)^{\frac{4}{p}} \mathfrak{P}_4' + (u-1)^{\frac{5}{5}} \mathfrak{P}_5'\right].$$

$$x_2 = 1 + (u-1)^{p} \mathfrak{P}_6'.$$

Dabei haben sämmtliche $\mathfrak{P}'$ die Form:

$$\mathfrak{P}_n' = c_n' + c_n^{(2)} (u-1) + c_n^{(3)} (u-1)^2 + c_n^{(4)} (u-1)^3 + \dots$$

Dann ergiebt sich:

$$x_2 - x_1 = 2 + (u-1)^5 \mathfrak{P}_6' + (u-1) \mathfrak{P}_5' + (u-1)^{\frac{4}{5}} \mathfrak{P}_4' + (u-1)^{\frac{3}{5}} \mathfrak{P}_3' + (u-1)^{\frac{2}{5}} \mathfrak{P}_2' + (u-1)^{\frac{1}{5}} \mathfrak{P}_1'.$$

Ebenso in ähnlicher Form

$x_2 - x_6$, $x_2 - x_4$, $x_2 - x_5$, $x_2 - x_3$.

Ähnlich:

$$x_3 - x_6 = \alpha^4(1-\alpha)\left[-(1+\alpha)(u-1)^{\frac{1}{5}}\varrho_1' + \alpha^3(u-1)^{\frac{1}{5}}\varrho_2' - \alpha^3(u-1)^{\frac{2}{5}}\varrho_3' + (1+\alpha)u^{\frac{4}{5}}\varrho_4'\right].$$

$x_1 - x_4 = \ldots\ldots$

$x_6 - x_5 = \ldots$

$x_4 - x_3 = \ldots$

$x_5 - x_1 = \ldots$

Ebenso:

$$x_4 - x_5 = \alpha^4(1-\alpha)\left[-\alpha^3(u-1)^{\frac{1}{5}}\varrho_1' + (1+\alpha)(u-1)^{\frac{3}{5}}\varrho_2' + (1+\alpha)(u-1)^{\frac{3}{5}}\varrho_3' + \alpha^2(u-1)^{\frac{4}{5}}\varrho_4'\right].$$ und ähnlich:

$x_5 - x_3 = \ldots\ldots$

$x_3 - x_1 = \ldots\ldots$

$x_1 - x_6 = \ldots$

$x_6 - x_4 = \ldots$

Führt man diese Rechnung aus und vergleicht das Resultat mit dem, welches wir für die Reihe nach Potenzen von $u^{\frac{1}{5}}$ fanden, so sehen wir, dass wir wiederum schreiben können:

$$\varphi(T) = f_1\left((u-1)^{\frac{1}{5}}\right).$$

$$\varphi(T+16) = f_1\left(\alpha^2(u-1)^{\frac{1}{5}}\right).$$

$$\varphi(T+2.16) = f_1\left(\alpha(u-1)^{\frac{1}{5}}\right).$$

$$\varphi(T+3.16) = f_1\left(\alpha^4(u-1)^{\frac{1}{5}}\right).$$

$$\varphi(T+4.16) = f_1\left(\alpha^3(u-1)^{\frac{1}{5}}\right).$$

Jedenfalls wird also wieder:

$$\sum_0^4 \varphi(\omega+16\xi) = f_1\left((u-1)^{\frac{1}{5}}\right) + f_1\left(\alpha(u-1)^{\frac{1}{5}}\right) + f_1\left(\alpha^2(u-1)^{\frac{1}{5}}\right) +$$
$$f_1\left(\alpha^3(u-1)^{\frac{1}{5}}\right) + f_1\left(\alpha^4(u-1)^{\frac{1}{5}}\right).$$

Der Grund warum dieses möglich ist, ist <u>der</u>, daß die $\Phi(T)$ Fkt. sich ihrem Modul nach nicht ändern, wenn man die φ Fkt. mit den ψ Fkt. vertauscht.

Daraus können wir aber wieder wichtige Schlüsse ziehen.

Es kann nämlich $\sum_0^4 \varphi(\omega+16\xi)$ dann ebenso wie vorher keine gebrochenen Potenzen von u, so jetzt keine gebrochenen Potenzen von <u>$u-1$</u> haben. Was von der ersten Potenzsumme gilt, gilt von allen und wir finden somit das

<u>Drittes Resultat.</u>

Alle $\sum_0^4 \varphi(\omega+16\xi)^r$ wo r eine <u>jede</u> Zahl bedeutet, enthalten nur <u>ganze</u> Potenzen von $u-1$ und <u>müssen</u> solche enthalten, wenn sie nicht Null sind. —

Die erste Potenzsumme hat nun als gemeinsamen Faktor $(u-1)^{\frac{1}{5}}$. Da sie aber nur <u>ganze</u> Potenzen enthalten darf, so muß sie den Faktor $(u-1)$ haben.

Ebenso finden wir

<u>Viertes Resultat</u>

Die r^{te} Potenzsumme

$$\sum_{\xi=0}^{7} \varphi(\omega+16\xi)^r$$

hat den Faktor $\underline{(u-1)^{\frac{2r}{5}+\frac{\mu}{5}}}$ wo μ die kleinste ganze Zahl ist, die $\underline{2r+\mu \equiv 0}$ nach 5 macht. —

Gehen wir zu den ursprünglichen Reihen der x nach Potenzen von u zurück, so sehen wir, daß sich dieselben mit einer achten Einheitswurzel verändern — und zwar alle um dieselbe, wenn man u mit $e^{\frac{r i\pi}{4}}$; $r = 0, 1, \ldots 7$ multipliziert.

Hierbei wird aus x_k; $k = 1 \ldots 6$

1) x_k: wenn wir u mit $e^{\frac{i\pi}{4}}$ multiplizieren und die achte Einheitswurzel $e^{\frac{2i\pi}{8}} = \varepsilon$ setzen

2) $\varepsilon^5 x_k$: " " " mit $e^{\frac{2i\pi}{4}}$ " " " " " "

3) $\varepsilon^2 x_k$: " " " $e^{\frac{3i\pi}{4}}$ " " " " " "

4) $\varepsilon^7 x_k$: " " " $e^{\frac{4i\pi}{4}}$ " " " " "

5) $\varepsilon^4 x_k$: " " " $e^{\frac{5i\pi}{4}}$ " " " " "

6) $\varepsilon\, x_k$: " " " $e^{\frac{6i\pi}{4}}$ " " " " "

7) $\varepsilon^6 x_k$: " " " $e^{\frac{7i\pi}{4}}$ " " " " "

$\varepsilon^3 x_k$. —

Für Fall 1) wird aus $\varphi(\omega)$ also $\varphi(\omega)\,\varepsilon^7$

" " 2) " " $\varphi(\omega)$ " $\varphi(\omega)\,\varepsilon^6$

" " 3) " " $\varphi(\omega)$ " $\varphi(\omega)\,\varepsilon^5$.

Für Fall 4) wird aus $\varphi(a)$: $\varphi(a)\,\varepsilon^4$

" " 5) " " " : $\varphi(a)\,\varepsilon^3$

" " 6) " " " : $\varphi(a)\,\varepsilon^2$

" " 7) " " " : $\varphi(a)\,\varepsilon$.

Ebenso vertauschen sich die zugehörigen $\varphi(a+16\xi)$.

Dieselbe Vertauschung muß also stattfinden, wenn wir in den Reihen für $x_1 \dots x_6$ die nach Potenzen von $u-1$ fortschreiten für u: $u\,e^{\frac{\sigma i \pi}{4}}$ $\sigma=1\dots 7$ setzen.

Allgemein für Fall 1) z. B.

$$\varepsilon^5 x_1 = -\left[1 + \alpha^4(\varepsilon u - 1)^{\frac{1}{8}}\varrho_1' + \dots\right]$$

$$= -\left[1 + \alpha^4\left[u - \varepsilon^7\right]^{\frac{1}{8}}\varepsilon^5\varrho_1' + \dots\right].$$

etc. etc.

Auf diese Weise erhalten wir Entwickelungen für die x, die nach Potenzen von $u - \varepsilon^{\kappa}_{\kappa=1\dots 7}$ fortschreiten und die genau dieselben Formen haben, wie die Entwickelungen nach $u-1$. Wir können also die gefundenen Resultate ohne Weiteres unmittelbar auf diesen Fall anwenden. Berücksichtigen wir noch, daß:

$$(u-1)(u-\varepsilon)\dots(u-\varepsilon^7) = u^8 - 1$$ ist, so finden wir also:

Fünftes Resultat.

Die r^{te} Potenzsumme:

$$\sum_{0}^{4}{}_{\xi}\, \varphi(a+16\xi)^r$$

hat den Faktor $\underline{(u^8-1)^{\frac{2r}{5}+\frac{\mu}{5}}}$ wo μ die kleinste ganze positive Zahl ist, die $2r+\mu \equiv 0 \bmod 5$ macht.

Dieses sind also die Faktoren, die irgend eine Potenzsumme mindestens enthalten muss. Überdies könnte sie noch Faktoren der Form Const. $u^k f(u)$ enthalten, wo $f(u)$ eine beliebige Fkt. von u sein könnte.

Es kann aber gezeigt werden, dass $f(u)$ die Form haben muss:

$$f(u) = 1 + c_1 u^8 + c_2 u^{16} + \dots$$

In der That, vertauschen wir u mit $e^{\frac{\pi i}{4}}$, so verändern sich die Potenzsummen immer nur um einen multiplicatorischen Faktor, der eine achte Einheitswurzel ist. Daher muss es der Ausdruck, den wir für

$$\sum_{0}^{4}{}_{\xi}\, \varphi(a+16\xi)^r$$ finden auch thun. Und wir finden:

Sechstes Resultat ....

Die r^{te} Potenzsumme:

$$\sum_{0}^{4}{}_{\xi}\, \varphi(a+16\xi)^r$$ hat mindestens

die Faktoren $u^{\frac{3r}{5}+\frac{\nu}{5}}\cdot(u-1)^{\frac{2r}{5}+\frac{\mu}{5}}$ wo r u. μ die bekannten Bedeutung haben und nicht zweitens stets die Form haben:

$$\text{Const. } u^{\frac{3r}{5}+\frac{\nu}{5}}(u^8-1)^{\frac{2r}{5}+\frac{\mu}{5}} = u^k[1+au^8+bu^{16}+\dots].$$

Dabei könnte der Grad k und der Grad von

$[1+au^8+bu^{16}+\dots]$ noch ein beliebiger sein.

So haben wir das Minimum des Grades und die Form einer jeden Polarsumme dargestellt.

Noch lässt sich der Faktor oder der Exponent von u näher bestimmen.

In der That vermehren wir u um $e^{\frac{i\pi}{8}}$, so wird auch

$$\sum\varphi(\omega+16\xi) = \varepsilon^7\sum\varphi(\omega+16\xi) \text{ also auch}$$

$$\sum\varphi(\omega+16\xi)^r = \varepsilon^{r7}\sum\varphi(\omega+16\xi).$$

Dasselbe muss also auch in dem Ausdruck durch u stattfinden d.h. der Exponent von u, den wir mit k bezeichnen wollen, muss sein:

$$k \equiv r7 \mod 8.$$

Also

Siebentes Resultat

Alle Polarsummen $\sum\varphi(\omega+16\xi)^r$ haben die

Form:

$$u^{k}\cdot(u^{8}-1)^{\frac{2r}{5}+\frac{\mu}{5}}\left[1+au^{8}+bu^{16}+\dots\right] \text{ wo}$$

$$k \equiv 7r \mod 8 \text{ und}$$

$$k \gtrless \frac{3r}{6}+\frac{r}{5}\dots$$

Es handelt sich jetzt zunächst darum, das Maximum des Grades der einzelnen Potenzsummen zu bestimmen. Dazu dient uns eine weitere Eigenschaft der Modulargl. Nach Koenigsberger pag 176 seq. bleibt die Modulargl. ungeändert, wenn man $\frac{1}{u}$ statt u, $\frac{1}{v}$ statt v setzt.

Dabei wird in unseren Ketten aus:

$$\left.\begin{array}{l} x_6 : +\frac{1}{x_1} \\ x_5 : +\frac{1}{x_4} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x_4 : \frac{1}{x_6} \\ x_3 : \frac{1}{x_5} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x_2 : \frac{1}{x_2} \\ x_1 : +\frac{1}{x_3}. \end{array}$$

Dieser Übergang findet statt, wenn wir T in $\frac{T}{1+T}$ verwandeln.

Setzen wir dieses ein:

$$\varphi(T) = (x_2-x_1)(x_3-x_6)(x_4-x_5) = f(u) \text{, so wird:}$$

$$f_1\left(\frac{1}{u}\right) = \left(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_3}\right)\left(\frac{1}{x_5}+\frac{1}{x_1}\right)\left(\frac{1}{x_6}-\frac{1}{x_4}\right) = \frac{(x_3-x_2)(x_1+x_5)(x_4-x_6)}{x_1x_2x_3x_4x_5x_6} =$$

$$\frac{\varphi(T+3.16)}{x_1x_2x_3x_4x_5x_6} = -\frac{f_1(u)}{x_1x_2x_3x_4x_5x_6} \quad \text{ebenso:}$$

$$\varphi(T+16\xi)_{\frac{1}{u}} = f_2\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{\varphi(T+2.16\xi)_u}{x_1\dots x_6} = f_3(u)$$

etc.

Infolge dessen wird:

$$\sum_0^4 \varphi(\omega+16\xi)_{\frac{1}{u}} = -\sum_0^4 \frac{\varphi(\omega+16\xi)_u}{x_1x_2x_3x_4x_5x_6}.$$

Aber $x_1x_2x_3x_4x_5x_6 = -u^6$ also

$$\sum_0^4 \varphi(\omega+16\xi)_{\frac{1}{u}} = \sum_0^4 \frac{(\varphi(\omega+16\xi))_u}{u^6}$$

Ebenso: $$\sum_0^4 \varphi(\omega+16\xi)^r_{\frac{1}{u}} = \sum_0^4 \frac{\varphi(\omega+16\xi)^r_u}{u^{6r}}$$

Dieses Resultat lässt nun mehrfache Schlüsse machen.
Abgesehen von dem Factor u^k haben alle Potenzsummen die Form:

$$(u^8-1)^r\left(1+au^8+a_1u^{16}+\dots\right)$$

Soll aber dieses, wenn man $u : \frac{1}{u}$ setzt, in denselben Werth, dividirt durch eine u Potenz übergehen, so muss <u>erstens</u> r eine <u>gerade</u> Zahl und <u>zweitens</u> $1+au^8+a_1u^{16}+\dots$ eine <u>reciproke</u> Gl. sein.

Ferner aber lässt sich auch unmittelbar der <u>Grad</u> einer jeden Potenzsumme bestimmen.

Ist der Exponent von u : k_r bei der jedesmaligen r Potenzsumme, so muss ihr Grad sein unmittelbar klar

Ueber den Uebergang der transformirten φ Ftn. in einander bei Umkreisung der singulären Punkte der ursprünglichen.–

Setzen wir:

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\lambda^2x^2)}} = \frac{\pi}{2}\left[1 + \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{1\cdot 9\cdot 25\ldots(2\nu+1)^2}{4\cdot 16\ldots(2\nu+2)^2}\lambda^{2\nu+2}\right]$$

$$K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\lambda'^2x^2)}} = \log\frac{\lambda}{16} + \sum \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\ldots 2\nu+1\cdot 2\nu+1}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\ldots 2\nu+2\cdot 2\nu+2}\lambda^{2\nu+2}\left[\log\frac{\lambda}{16} \ldots\right]$$

Nennen wir $\tau = +i\frac{K'}{K}$ $\quad q = e^{+\pi\tau i} = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$

Für eine Transformation n^{ten} Grades ist dann allgemein:

$$\left.\begin{aligned}\frac{C}{a} &= a_0 K - a_1 K_1\\ -\frac{C_1}{a} &= b_0 K - b_1 K_1\end{aligned}\right\} \qquad \begin{vmatrix} a_0 & a_1\\ b_0 & b_1\end{vmatrix} = n.$$

wenn die C und C_1 sind:

$$\left.\begin{aligned}C &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{R(x)}_{\mu}}\\ C_1 &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{R(x)}_{\mu'}}\end{aligned}\right\}$$ und μ und μ' die transformirten

Moduln. Hieraus folgt:

$$\tau' = +i\frac{C_1}{C}.$$

Ist n eine Primzahl, so giebt es $n+1$ transformirten Moduln, die nicht durch lineare Transformationen in einander übergeführt werden können.

Um dieselben zu erhalten setzen wir:

$$c = a_0 \varkappa$$

$$c c_1 = b_0 \varkappa + b_1 i \varkappa. \qquad a_0 b_1 = n.$$

Es ist aber, dass es davon abgesehen von einem Faktor nur $n+1$ verschiedene Combinationen geben kann, denen die $n+1$ verschiedenen transformierten Moduln entsprechen. Dieselben hängen nur von dem Verhältniss $\frac{b_0}{b_1}$ ab, wenn wir daher ihren Index entsprechend bezeichnen, $\frac{b_0}{b_1}$ mod n folgen. Setzen wir also

$$v_\delta^8 = \mu_\delta^2$$

so wird es $n+1$ verschiedene v_δ geben, wobei ist

$$\delta \equiv \frac{b_0}{b_1} \bmod n.$$

Es ist also v_δ eine $n+1$ deutige Irr. von $\varkappa$, mithin wird ihre Riemannsche Fläche aus $n+1$ Blättern bestehen. Wir wollen sie nicht als Irr. von $\varkappa$ sondern von

$\sqrt[4]{\varkappa} = u$ aufstellen.

Suchen wir ihre Verzweigungspunkte!

Es ist $$u = \sqrt{2}\sqrt[8]{q}\left[\frac{(1+q^2)(1+q^4)\cdots}{(1+q)(1+q^3)\cdots}\right].$$

hängt also nur von den beiden Integralen $K(x)$ und $K'(x)$ ab.
Setzen wir an Stelle dieser die C und C' so ist klar, dass auch die transformirten Moduln $v_\infty, v_0 \dots v_p$ nur von diesen Grössen abhängen. Letztere ihrerseits sind vollständig durch u^8 bestimmt und haben die Punkte $u^8 = 0$, $=1$, $=\infty$ zu logarithmischen Polen. Mithin werden die einzigen Verzweigungspunkte der v_0 etc. sein: $u = 0$, $u = e^{\frac{i\pi}{4}} \dots e^{\frac{7i\pi}{4}} = 1$, $= \infty$.
Wir dürfen uns um den Unendlichkeitspunkt nicht kümmern, da wir durch Umkreisung der übrigen singulären Punkte zugleich stets eine Umkreisung des Unendlichkeitspunktes vornehmen.
Wir haben also als einzige Verzweigungspunkte:

$$u = 0, \quad u = e^{\frac{\sigma i\pi}{4}} \quad \sigma = 1 \dots 8.$$

Nehmen wir zunächst den Punkt $u = 0$ und sehen zu wie in diesem die einzelnen Blätter miteinander zu heften sind. Dazu muss untersucht werden, wie sich K u. K' ändern, wenn man um den Punkt $u^8 = 0$ einmal herumgeht.
Es wird demnach

$$\left.\begin{aligned} K &: K \\ K' &: -2iK + K'! \end{aligned}\right\}$$

Einem einmaligen Umlaufe um $u=0$ entspricht, aber der achte Theil einer Umkreisung um $u=0$.

Also wird bei vorzunehmender ganzer Umkreisung um $u=0$ sind

$$\kappa : \kappa$$

$$\kappa' : -16 i\kappa + \kappa!$$

Setzen wir

1) $b_0 = 0$ $b_1 = n$. so folgt

$\tau' = n\tau$ also das zugehörige ν_0'!

$$\nu_0' = \sqrt{2}\sqrt[8]{q^n}\left[\frac{(1+q^{2n})(1+q^{4n})\cdots}{(1+q)\ (1+q)^3\cdots}\right]^4$$

Gehen wir nun den Punkt $u=0$ einmal ganz herum so wird auch $\tau : \tau+16$ d.h. ν_0' bleibt unverändert. Also ist dieses bleibt mit keinem anderen in dem Nullpunkte verbunden.

Gehen wir nur ein achtel mal um $u=0$ herum, so wird auch $\tau : \tau+2$ also auch $\nu_0' : \nu_0'\varepsilon^n$, gehen wir zwei achtel mal herum " " $\nu_0'\varepsilon^{2n}$ ebenso " vier achtel " " " " $\nu_0'\varepsilon^{4n}$. $\quad e^{\frac{2i\pi}{8}} = \varepsilon.$

Setzen wir also $\nu_0' = \varphi(n\tau)$ so ist:

$\alpha = e^{\frac{2\pi i}{n}}$

$$\varphi[n(\tau+2\mu)] = \varphi(n\tau)\,\varepsilon^{n\mu}.$$

Die anderen φ oder ν werden mit definirt durch

$$\nu_r = \sqrt[8]{2}\;\alpha^{\frac{r}{16}}\, q^{\frac{1}{8n}} \frac{(1+\alpha^{r} q^{\frac{2}{n}})(1+\alpha^{2r} q^{\frac{4}{n}})\dots}{(1+\alpha^{\frac{r}{2}} q^{\frac{1}{n}})(1+\alpha^{\frac{3r}{2}} q^{\frac{3}{n}})\dots}$$

Setzen wir hierin

$$\nu_0 = \sqrt[8]{2}\, q^{\frac{1}{n8}} \frac{(1+\alpha q^{\frac{2}{n}})\dots}{(1+q^{\frac{1}{n}})(1+q^{\frac{3}{n}})\dots}$$

und gehen wir einmal ganz um den Nullpunkt herum, so wird

aus $k' : -16 i k + k'$ also aus ν_0:

$\kappa : \kappa$

$$\sqrt[8]{2}\;\alpha\, q^{\frac{1}{n}} \frac{(1+\alpha^{16} q^{\frac{2}{n}})\dots}{(1+\alpha^{8} q^{\frac{1}{n}})\dots}$$

d. h. aus $\nu_0 : \nu_{16}$.

Ebenso wird bei zweimal, dreimal, $n-1$ mal. Umkreisung

aus $\nu_0 : \nu_{16} : \nu_{32} \dots \nu_{(n-1)16}$. Dabei bilden die Indices ein

vollständiges Restsystem nach dem Modul n.

Aus den Betrachtungen von Mathieu journ. de l'éc. polyt. cah. 25 pg 276

Es ist ferner, wie man es auch unmittelbar aus der Form

schließen kann, daß wenn man einachtel mal um den Nullpunkt herum-
geht aus v_0 wird $e^{\frac{n\pi i}{4}} v_2$ etc., so daß man bei Einführung
der φ etc. allgemein wird:

$$\varphi\left(\frac{\tau+2\kappa}{n}\right) = e^{\frac{\kappa n\pi i}{4}}\varphi\left(\frac{\tau+16\xi}{n}\right)$$

$$\underline{\kappa \equiv 8\xi \mod n.}$$

So haben wir die Cyclen für den Punkt $u=0$ gebildet, es handelt
sich darum, dasselbe für den Punkt $u=1$ durchzuführen.
Dazu führen wir den complementären Modul v ein, der mit dem
ersten verbunden ist durch:

$$u^8+v^8=1.$$

Gehen wir dann um den Punkt $u=1$ einmal herum, so gehen
wir um den Punkt $v^8=0$ gleichzeitig acht Mal herum.
Dieser complementären Transformation werden dabei die
transformirten Moduln entsprechen

$$\varphi(n\tau),\ \varphi\left(\frac{\tau}{n}\right)\cdots\quad \varphi\left(\frac{\tau+(n-1)16\xi}{n}\right) \text{ oder}$$

$$\mu_0' \qquad \mu_0 \ldots\ldots \qquad \mu_{(n-1)16}.$$

Wir wissen, daß wenn man um $v=0$ einmal herumgehen
aus μ_0 wird μ_{16} etc., wir werden daher auf den

Uebergang der φ od. ν Fkt. bei der Vertauschung der Perioden zu kennen, wenn wir die Indices der Gl. bestimmen können:

$$\nu_\sigma^8 + \mu_\sigma^8 = 1.$$

Bedenken wir, dass für die μ Fkt K' das erste, K das zweite Hauptintegral ist, dass daher der Index derselben übergeht, wenn man den Doppelgrenzen von K vertauscht, die Coefficienten der K nach dem Modul n, bedenken wir ferner, dass nach einem einmaligen Umlaufe um den Punkt $u^2=1$ wird:

$$K \;:\; K - 2iK'$$

$$K' \;:\; K',$$ so ist klar, dass:

$$\nu_\sigma^8 + \mu_{-\frac{1}{\sigma}}^8 = 1 \text{ ist.}$$

$$1 - \varphi^8\left(\frac{\tau + 16\xi}{n}\right) = \psi^8\left(\frac{\tau+16\kappa}{n}\right) \text{ wo}$$

$$16\xi \equiv -\frac{1}{16\kappa} \bmod n.$$

Nach einem einmaligen Umlauf um den Punkt $u=1$ wird

aus $\mu_{-\frac{1}{\sigma}}$, $\mu_{-\frac{1}{\sigma+16}}$ also aus

$$\nu_\sigma : \frac{\nu_\sigma}{1-16\sigma}.$$

Verallgemeinerung der Hermite'schen Verwandlungstafeln der elliptischen Modulfunctionen.

Sei $K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ $\quad K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}$.

$$\tau = \frac{iK'}{K} \qquad q = e^{\pi i \tau} = e^{-\pi \frac{K'}{K}}$$

ferner $\varphi(\tau) = \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\;\dfrac{(1+q^2)(1+q^4)\dots}{(1+q^1)(1+q^3)\dots}$

$$\psi(\tau) = \frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\dots}{(1+q^1)(1+q^3)\dots}$$

Dann sind von Hermite Verwandlungstafeln aufgestellt, wie sich $\varphi\left(\frac{b_0-a_0\tau}{a_1\tau-b_1}\right)$ und $\psi\left(\frac{b_0-a_0\tau}{a_1\tau-b_1}\right)$ wenn $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}$ die allgemeinste Transformation ersten Grades bedeutet, durch $\varphi(\tau)$ und $\psi(\tau)$ ausdrücken lassen.

Es sollen diese Tafeln in bestimmter Weise verallgemeinert werden.

~~Transf.~~ Für eine Transformation n^{ten} Grades, wo n eine beliebige ungerade Zahl bedeuten mag, die keinen quadratischen Theiler enthält, ist:

$$\frac{C}{a} = a_0 K + a_1 i K' \qquad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} = n.$$
$$\frac{iC'}{a} = b_0 K + b_1 i K'$$

wo c und c' die beiden Hauptmoduln für den transformirten Modul $\tau' = \frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}$ bedeute. a ist der Multiplicator.

Bekanntlich lassen sich alle Transformationen n^{ten} Grades in eine bestimmte Anzahl von Klassen theilen, deren einzelne Repräsentanten dargestellt werden durch die Substitutionen:

$$\begin{vmatrix} \delta & 0 \\ -16\xi & \delta' \end{vmatrix}.$$

$$\xi = 0 \ldots \delta'-1$$

wo $\delta\delta' = n$ und δ einen jeden Theiler von n bedeutet. Dieselben können auch folgender Weise dargestellt werden

$q' = e^{\pi i \frac{\delta\tau+16\xi}{\delta'}}$

1) $$\varphi\left(\frac{\delta\tau+16\xi}{\delta'}\right) = \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q'}\,\frac{(1+q'^2)(1+q'^4)\ldots}{(1+q')(1+q'^3)\ldots}$$

2) $$\varphi\left(\frac{\delta\tau+16\xi}{\delta'}\right) = \left(\frac{2}{\delta}\right)\operatorname{sn}\frac{2\bar\omega}{n}\operatorname{sn}\frac{4\bar\omega}{n}\cdots\cdots(\sqrt{c})^n$$

dabei ist, wenn ~~die Transformation~~ vermittelst der Substitution gegeben: $\begin{vmatrix} \delta & 0 \\ -16\xi & \delta' \end{vmatrix}$ das zugehörige $\omega = q\delta\tau + p\delta' + q\,16\xi$ wobei

$$p\delta' + q\cdot 16\xi \text{ rel. pr. zu } q\delta,$$

wo K = ... wenn $= q\delta$

$p\delta' + q16\xi$ u. $q\delta$

... rel. prim. ...

... rel. pr.

$$\bar\omega = 2K\omega$$

~~und Hauptmoduln~~ umgekehrt, wenn ω gegeben ~~in den Klassen~~:

$\omega = mK + m'iK'$ [m u. m' rel. prim]

~~[illegible]~~ die Bezeichnung. Transformation:

$$\begin{vmatrix} \delta & 0 \\ 16\xi & \delta' \end{vmatrix} \qquad \delta\delta' = n$$

wo δ der grösste gemeinschaftliche Theiler zwischen m' und n ist

$$16\xi \equiv \frac{m\delta}{m'} \mod n$$

Wir stellen uns die Aufgabe, die Repräsentanten einer Transformation n^{ten} Grades, die ausgeübt ist auf den Modul:

$$\frac{\beta_0 - \alpha_0\tau}{\alpha_1\tau - \beta_1} \qquad \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0 = 1$$

auszudrücken durch die Repräsentanten derselben Transformation n^{ten} Grades, die ausgeübt ist auf den Modul τ. —

Dazu definiren wir die Repräsentanten folgendermaassen:

3) $$\varphi(\delta\tau, \delta')_s = \sqrt{2}\,\alpha^{\frac{\delta s}{16}} \frac{q^{\frac{\delta}{8\delta'}}\left(1+\alpha^{\delta s} q^{\frac{2\delta}{\delta'}}\right)\left(1+\alpha^{2\delta s} q^{\frac{4\delta}{\delta'}}\right)\dots}{\left(1+\alpha^{\delta s} q^{\frac{\delta}{\delta'}}\right)\left(1+\alpha^{2\delta s} q^{\frac{3\delta}{\delta'}}\right)\dots}$$
$s = 0 \dots \delta'-1$

4) $$\varphi(\delta\tau, \delta')_\infty = \varphi(\delta'\tau, \delta)_0 = \frac{\sqrt{2}\, q^{\frac{2\delta'}{16\delta}}\left(1+q^{\frac{2\delta'}{\delta}}\right)\left(1+q^{\frac{4\delta'}{\delta}}\right)\dots}{\left(1+q^{\frac{\delta'}{\delta}}\right)\left(1+q^{\frac{3\delta'}{\delta}}\right)\dots}$$

Es ist diese Definition dieselbe, [illegible] der von Hermite gebrauchten.

Wesentlich sind hier die 4 Fälle. Dieselben können dargestellt werden durch: $\omega' = c\omega$. (Das ist [illegible] $\varphi\left(\frac{\delta\tau + 16\xi}{\delta'}\right)$ [illegible] ist.

$\alpha = e^{\frac{2i\pi}{n}}$

$\omega = (p\delta_1 + q16\xi)K + q\delta' iK'$

$= \omega = mK + m'iK$. ist

d. h. für $16\xi = s \equiv \frac{m\delta}{m'}$

$\omega = \delta K$.

Letzter Fall ist [illegible]

$\omega = \delta iK'$!

$\omega' = m i K - m' K'$

m' n

δ

$\omega' = \delta i K$

Damit nun die zugehörigen [illegible] [illegible]:

~~Ebenso definieren wir die η als durch:~~

$$5)\ \eta(\delta\tau, \delta')_\sigma = \prod \left(\frac{1 - \alpha^{\frac{\delta\sigma}{2}} q^{\frac{\delta(2k+1)}{\delta'}}}{1 + \alpha^{\frac{\delta\sigma}{2}} q^{\frac{\delta(2k+1)}{\delta'}}} \right)$$

$\sigma = 0 \ldots \delta'-1$.

$$6)\ \eta(\delta\tau, \delta')_\infty = \eta(\delta\tau, \delta)_0 = \prod \left(\frac{1 - q^{\frac{\delta'}{\delta} 2k+1}}{1 + \alpha q^{\frac{\delta'}{\delta} 2k+1}} \right)$$

(Es entsprechen diese Ausdrücke der Transformation:

$$\begin{pmatrix} \delta & 0 \\ -16\xi & \delta' \end{pmatrix} \text{ wobei: }$$

$$-16\xi \equiv \sigma \bmod \delta' \;)$$

Die einzigen singulären Punkte dieser Ausdrücke sind die Punkte $u^2 = 0 = 1 = \infty$. ~~[illegible]~~, lassen sich alle durch Γ ausgeübten linearen Transformationen zusammensetzen aus ganzen derselben Umkreisungen dieser Punkte. Dabei kann der Unendlichkeitspunkt außer Acht gelassen werden, da durch Umkreisung der beiden andern Punkte zugleicher Zeit eine Umkreisung des unendlich entfernten vorgenommen wird.-

Geht man einmal um den Punkt

$u^2 = 0$ herum, so waren aus:

$K = K$

$iK' = 2iK + iK'$ d. h. wird $\tau = \tau + 2$.

Setzen wir dieses ein, so wird einerseits nach Gl. 3 n. 2, andrerseits nach Definition ... mit Berücksichtigung der Formel:

$$\varphi(\delta\tau, \delta')_\sigma = (\sqrt[8]{u})^n \left\{ \sin\frac{2\omega}{n} \ldots \sin\frac{2\omega}{8} \right\}^2$$

$$\varphi(\delta[\tau+2], \delta')_\sigma = e^{\frac{2\pi i n}{8}} \varphi(\delta\tau, \delta')_{\sigma+2\delta} = \varrho^{2n} \varphi(\delta\tau, \delta')_{\sigma+2\delta}$$

$\varrho = e^{\frac{i\pi}{8}}$ Allgemein:

$$7) \quad \varphi(\delta(\tau+2\kappa)\delta')_\sigma = \varrho^{2\kappa n} \varphi(\delta\tau, \delta')_{\sigma+2\kappa\delta}$$

Da $1 - \varphi(\delta\tau, \delta')_\sigma^8 = \psi(\delta\tau, \delta')_\sigma^8$ ist, folgt also:

$$\psi(\delta[\tau+2\kappa)\delta')_\sigma^8 = \psi(\delta\tau, \delta')^8_{\sigma+2\kappa\delta}$$ ~~oder da die~~

Ergänzungsweise die Eigenschaft, wie auch der Definition der ψ Fkt. folgt:

$$8) \quad \psi(\delta(\tau+2\kappa)\delta')_\sigma = \psi(\delta\tau, \delta')_{\sigma+2\kappa\delta}$$

Die Wurzel aus dem ersten Vorzeichenmangel ergiebt sich wirklich. S. Darstellung wird:

Zur Untersuchung des Punktes $u^2 = 1$ ist eine weitere Relation zwischen den φ und ψ Fkt. nöthig.

Nach dem ~~Satze~~ ... § 25 gehen die transformirten Moduln in ihre complementären über, wenn man setzt $\omega = \frac{m'K' \cdot miK}{n} = i\omega$

Setzen wir $p = e^{-i\frac{\tau}{n}}$ so wird

$\vartheta(\sigma\tau,\sigma')_{i} = (\sqrt[8]{u}^{\,12})^{n}$ oder $\ldots\omega'$ oder $\ldots\omega' \ldots$ $\qquad \omega = \frac{m'\tau' - m\tau}{n}$ d. h.

$i = 0 \ldots n-1$

$$\vartheta(\sigma\tau,\sigma')_0 = \sqrt{2}\,\sqrt[8]{p}\,\cancel{p^{\frac{\sigma'}{\sigma}}}\,\frac{(1+p^{\frac{2\sigma'}{\sigma}})\ldots}{(1+p^{\frac{\sigma'}{\sigma}})\ldots} \qquad \omega' = -\sigma\tau'.$$

$$\vartheta(\sigma\tau,\sigma')_\infty = \sqrt{2}\,\sqrt[8]{p}\,p^{\frac{\sigma'}{\sigma}}\,\frac{(1+p^{\frac{2\sigma'}{\sigma_1}})\ldots}{(1+p^{\frac{\sigma'}{\sigma}})\ldots} \qquad \omega' = \sigma i\tau.$$

$$\vartheta(\sigma\tau,\sigma')_\varrho = \sqrt{2}\,\sqrt[8]{p}\,p^{\frac{u}{n'}}\,\frac{\alpha^{\frac{u\sigma}{n}}(1+\alpha^{u\sigma}p^{\frac{2u}{n'}})\ldots}{(1+\alpha^{\frac{u\sigma}{2}}p^{\frac{u}{n_1}})\ldots} \qquad \text{für } \omega = \frac{m'\tau' - m i\tau}{n}$$

Wenn m mit n den grössten gemeinsamen Theiler u [illegible]

und $\qquad \sigma \equiv -\frac{m'u}{m} \bmod n$ ist. Aber:

$$\sigma' \equiv \frac{m\delta}{m'} \bmod n \text{ also:}$$

$$\sigma \equiv -\frac{\delta u}{\sigma'} \bmod n.$$

m ist in unserem Falle: $p\delta_1 + q\,16\xi$. der grösste gemeinsame Theiler dieser Zahl und n enthält einen Theiler von δ_1, ferner d. h. der grösste gemeinsame Theiler zwischen δ_1 und 16ξ [illegible] $16\xi = \sigma$ [illegible] der grösste gemeinsame Theiler von σ und δ_1.

Wir finden also: Oben auch.

$$\psi(\delta\tau, \delta')_{\delta} = \gamma_2 \sqrt[8]{q}^{\,\frac{u}{u'}} \alpha^{\frac{\pi u}{16}\frac{\delta u}{\delta'}} \frac{\left(1+\alpha^{-u\frac{\delta u}{\delta}} p^{\frac{2u}{u'}}\right)\dots}{\left(1+\alpha^{-u\frac{\delta u}{2\delta}} p^{\frac{u}{u'}}\right)\dots}$$

$\delta \smile \delta'$ allgemein.

Lassen wir jetzt κ einmal um den Punkt $u^2 = 1$ herumgehen, so wird aus

$k : k - 2\pi i k'$

$k' : k$ d.h. $\tau : \frac{\tau}{1-2\kappa\tau}$ und $p : \alpha^{u\kappa u} p$ d.h.

$$\psi\left(\delta\frac{\tau}{1-2\kappa\tau}, \delta'\right)_{\delta} = e^{\frac{2\pi n}{8}} \sqrt[8]{p^{\frac{u}{u'}}}\, \alpha^{-u\left[\frac{\delta u}{\delta}+2u\right]} \frac{\left(1+\alpha^{-u\left(\frac{\delta u}{\delta}-2u\right)} p^{\frac{2u}{u'}}\right)\dots}{\left(1+\alpha^{-\frac{u}{2}\left(\frac{\delta u}{\delta}-2u\right)} p^{\frac{u}{u'}}\right)\dots}$$

Woraus folgt:

$$\psi\left(\delta\frac{\tau}{1-2\kappa\tau}, \delta'\right)_{\delta} = \psi(v\tau, v')_{\frac{\delta\cdot v}{\delta-2\kappa\delta}}$$ wobei v den gemeinschaftlichen

ganzen Theiler g messen $\left(\frac{\delta-2\kappa\delta'}{\delta}\right)u$ und u' resp. d.h. es resp:

$$\left.\begin{aligned} u\left(\frac{\delta-2\kappa\delta'}{\delta}\right) &= bv \\ u' &= b'v \end{aligned}\right\}$$ b u. b' relat. prim.

$u(\delta+2\kappa u)$

$-\frac{u v}{\delta+2\kappa u}$

Nun ergeben:
$$\left.\begin{aligned} \delta' &= au \\ \delta &= a'u \end{aligned}\right\}$$ a u. a' relat. pr. also:

$$u' = a\delta.$$

$\delta + 2\kappa u$ und u' oder

$u\left(\frac{\delta-2\kappa\delta'}{\delta}\right)$ u. u'!

$u\left(\cancel{\delta(1-ba_1)} - 2\kappa\delta\right)$

$-\frac{\delta(1-ba_1)}{a} + 2\kappa u.$

$u\left(\frac{\delta(1-ba_1)}{\delta} - 2\kappa\right)$

Und können unsere beid. Theiler von δ sein, während er zugleich

Theiler von δ ist, denn alsdann würde er sich fortheben.

Wenn also ν ein Theiler von δ ist, so ist dies nur so möglich daß er ein Theiler von 2κ ist. Da aber ν außerdem ein Theiler von $n' = a\delta$ sein muß, so folgt also, daß er der größten gemeinsamen Theiler von

$$2\kappa a \text{ und } \frac{(\delta+2\sigma\kappa)}{\delta}\, n \text{ sein muß. oder}$$

$$\text{von} \quad 2\kappa a \text{ und } \frac{\delta+2\sigma\kappa}{a'} \text{. oder von}$$

$$\frac{2\kappa\delta'}{n} \text{ u. } \frac{\delta+2\sigma\kappa}{a'}$$

Jedenfalls wird also ν ein Theiler von:

$2\kappa\delta'$ u. $\delta - 2\sigma\kappa$ sein, aber auch der größte gemeinsame

In der That, es könnten diese Zahlen nur noch einen Theiler mit n gemein haben. Das ist aber unmöglich, weil $\delta - 2\sigma\kappa$ prim zu n vorausgesetzt ist.

Also finden wir:

$$\underline{\text{III}}\quad \varphi\left(\delta\left(\frac{T}{1-2\kappa T}\right)\delta'\right)_\delta = \varrho^{2\kappa n}\, \varphi(\nu T, \nu')_{\frac{\delta\nu}{\delta - 2\kappa\sigma}}$$

wo ν der größten gemeinsamen Theiler zwischen

$2\kappa\delta'$ und $\delta - 2\kappa\sigma$ ist.

Daraus folgt dann unmittelbar:

$$\underline{\text{IV}}\quad \varphi\left(\delta\left(\frac{T}{1-2\kappa T}\right)\delta'\right)_\delta = \varphi(\nu T, \nu')_{\frac{\delta\nu}{\delta - 2\kappa\sigma}}$$

wo v dieselbe Bedeutung hat. –

Wir wollen jetzt betrachten, was aus der φ wird, wenn man abwechselnd κ mal um den Nullpunkt, κ' mal um den Einspunkt, κ'' um den Nullpunkt etc. herumgeht.

Es ist: $\varphi(\delta(\tau+2\kappa)\delta')_\sigma = e^{2\kappa\pi}\varphi(\delta\tau,\delta')_{\sigma+2\kappa\delta}$ oder:

$$\varphi\left(\delta\left(\frac{\tau}{1-2\kappa'\tau}+2\kappa\right)\delta'\right)_\sigma = \varphi\left(\delta\frac{(1-4\kappa\kappa')\tau+2\kappa}{1-2\kappa'\tau}\delta'\right) = e^{2\kappa\pi}\varphi\left(\delta\left(\frac{\tau}{1-2\kappa'\tau},\delta'\right)\right)_{\sigma+2\kappa\delta} =$$

$$e^{2\kappa\pi}\varphi(v\tau,v')_{v\frac{\sigma+2\kappa\delta}{\delta(1-4\kappa\kappa')-2\kappa'\sigma}}$$ wo v der größte gemeinsame

Theiler von: $2\kappa'\delta'$ und $\delta-2\kappa'(\sigma+2\kappa\delta)$ oder

$2\kappa'\delta'$ und $\delta(1-4\kappa\kappa')-2\kappa'\sigma$ ist.

Setzen wir: $b_0=2\kappa$, $1-4\kappa\kappa'=-a_0$. $1=-b_1$, $2\kappa'=-a_1$ so wird also:

$$\varphi\left(\delta\left(\frac{b_0-a_0\tau}{a_1\tau-b_1}\right)\delta'\right) = e^{2b_0\pi}\varphi(v\tau,v)_{\frac{(b_0\delta-b_1\sigma)}{(-a_0\delta+a_1\sigma)}v}$$ wo

v der größte gemeinsame Theiler von:

$a_1\delta'$ und $a_0\delta-a_1\sigma$.

Ersichtlich wird:

$$\varphi\left[\delta\left(\frac{(\tau+2\kappa'')(1-4\kappa\kappa')+2\kappa}{1-2\kappa'(\tau+2\kappa'')}\right)\delta'\right]_\sigma = \varphi\left[\delta\left(\frac{\tau(1-4\varkappa\varkappa')+2\varkappa'+2\varkappa''-8\varkappa\varkappa'\varkappa''}{1-4\varkappa''\varkappa'-2\varkappa'\tau}\right)\right]_{\sigma}$$

$$e^{2(\kappa+\kappa'')n}\,\varphi(v\tau, v')_{v\cdot\frac{\sigma(1-4\kappa'\kappa'')+\delta(2\kappa+2\varkappa''-8\varkappa\varkappa'\varkappa'')}{\delta(1-4\kappa\kappa')-2\varkappa'\sigma}}$$

[illegible]:

$$1-4\kappa'\varkappa''=b_1 \qquad 2\varkappa'+2\varkappa''-8\varkappa\varkappa'\varkappa''=b_0.$$

$$1-4\kappa\kappa'=-a_0 \quad -2\varkappa'=a_1$$ [illegible]:

$$\varphi\left(\delta\left(\frac{b_0-a_0\tau}{a_1\tau-b_1}\right)\delta'\right)_\sigma = e^{\frac{2\Sigma\kappa n}{\kappa\kappa''}}\varphi(v\tau, v')_{v\frac{b_0\delta-b_1\sigma}{-\delta a_0+a_1\sigma}}$$ [illegible]

v [illegible]

$$a_0\delta-a_1\sigma \;\; a_1\delta'$$

[illegible] $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}$
$\kappa\kappa'\kappa''$ [illegible]
[illegible]

[illegible]:

$$\varphi\left(\delta\left(\frac{b_0-a_0\tau}{a_1\tau-b_1}\right)\delta'\right)_\sigma = e^{\frac{2\Sigma\kappa^{(2n+1)}}{\kappa}}\,\varphi(v\tau, v')_{\frac{b_0\delta-b_1\sigma}{-\delta a_0+a_1\sigma}}$$ [illegible]

[illegible] $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}$ [illegible]

k mal Dimension von dem Nullpunkte, k' mal von dem Grenzpunkte

als $k^{(2r+1)}$ mal von dem Nullpunkte od. k^{2r+2} mal von dem Grenzpunkte

entfernt ist.

Dass die Exponentialgrösse die richtige ist, ist unmittelbar klar. –

Nehmen wir nun an, es sei:

$$\varphi\left(\delta\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right)\delta'\right)_{\delta} = e^{2\sum_{r=m}\kappa^{2r+1}}\,\varphi(v\tau, v')\left[\frac{b_0\delta - b_1\delta'}{-\delta a_0 + a_1\delta'}\right]_{v}$$ und bemerken, $a_0\delta - a_1\delta' \underset{v}{\smile} a_1\delta'$

dass dann:

$$\mathrm{I}\quad \varphi\left[\delta\left(\frac{b_0 - a_0[\tau + 2\kappa^{2r+3}]}{a_1[\tau+2\kappa^{2r+3}] - b_1}\right)\delta'\right]_{\delta} = e^{2\sum_{r=m}^{r+1}\kappa^{2r+1}}\,\varphi[v\tau, v']_{v}\,\frac{\delta(b_0 - 2a_0\kappa^{2r+3}) - (b_1 - 2a_1\kappa^{2r+3})\delta'}{-\delta a_0 + a_1\delta'}$$

$a_0\delta - a_1\delta' \underset{v}{\smile} a_1\delta'$ ist, ferner

$$\mathrm{II}\quad \varphi\left[\delta\left[\frac{b_0 - a_0\frac{\tau}{1-2\kappa^{2r+2}\tau}}{a_1\left[\frac{\tau}{1-2\kappa^{2r+2}\tau}\right] - b_1}\right]\delta'\right]_{\delta} = e\,\varphi[u\tau, u']_{u}\,\frac{\delta b_0 - b_1\delta'}{-\delta(a_0 + 2\kappa b_0) + \delta'(a_1 + 2\kappa b_1)}$$

$\delta'(a_1 + 2\kappa b_1) \underset{u}{\smile} -(a_0 + 2\kappa b_0)\delta + \delta'(a_1 + 2\kappa b_1)$, dann wäre

unsere Behauptung allgemein nachgewiesen.

Dass I und der erste von II richtig ist, ist unmittelbar klar.

Zum Beweise bedarf man, dass u durch Grössen zusammengesetzter

Theiler von $(a_1 + 2\kappa b_1)\delta'$ und $-(a_0 + 2\kappa b_0)\delta + \delta'(a_1 + 2\kappa b_1)$ ist.

Ersetz:

$$\left.\begin{aligned} -\delta a_0 + a_1 r &= c\, v. \\ a_1 \delta' &= c_1 v. \end{aligned}\right\} \quad c \text{ und } c_1 \text{ rel. prim.}$$

$$2\kappa v' = \alpha u.$$

$$v\left(\frac{-\delta(a_0+2\kappa b_1)+r(a_1+2\kappa b_1)}{-\delta a_0 + a_1 r}\right) = \alpha_1 u \quad \Big\} \ \alpha \text{ u. } \alpha_1 \text{ relat. prim.}$$

Demnach folgt:

1) Es wird u nur dann ein Theiler von δ' sein, wenn es einer von $a_1 + r\kappa b_1$ ist und es wird dann zugleich ein Theiler von δ' sein, " " "
" 2κ ".

Da nun: $2\kappa v' = \alpha u = 2\kappa \cdot \frac{c_1 \delta'}{a_1}$ ist, so folgt, daß u der größte gemeinschaftliche Theiler von:

$$\frac{2\kappa\,\delta'(a_1+2\kappa b_1)}{v} \quad \text{und} \quad v\left(\frac{-\delta(a_0+2\kappa b_1)+r(a_1+2\kappa b_1)}{-\delta a_0 + a_1 r}\right)$$

Da nun, wenn 2κ ein Theiler irgend einer Zahl, die dieser theilt, so folgt natürlich mit Sicherheit, daß jedenfalls ein Theiler von

$$\delta'(a_1+2\kappa b_1) \text{ u. } (-\delta(a_0+2\kappa b_0)+r(a_1+2\kappa b_0))$$ ist, und zwar

vermöge desselben Schlusses, mit Sicherheit der größte gemeinschaftliche. — Wir haben also als

Erstes Resultat

Wenn eine Substitution $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}$ zugelassen gedacht werden kann durch eine ganze Anzahl von (abwechselnden) Umläufen um den Null und Einspunkt, bewirkt:

$$\varphi\left(\delta\left(\frac{b_0-a_0\tau}{a_1\tau-b_1}\right)\delta'\right)_0 = \varrho^{2n\{\kappa'+\kappa^{(2)}+\dots\}}\varphi(u\tau,u')_{u\left(\frac{b_0\delta-b_1\delta'}{-\delta a_0+a_1\delta'}\right)} \text{ und}$$

$$\underbrace{a_0\delta-a_1\delta'}_{u} \quad a_1\delta'$$

Die Substitutionen, die auf diese Weise entstehen, sind alle von der Form:

$$a_1\equiv b_0\equiv 0 \bmod 2 \qquad a_0\equiv b_1\equiv 1 \bmod 2.$$

Umgekehrt hat Schläfli gezeigt, dass auch jede Substitution dieser Form entstanden gedacht werden kann durch eine gerade Anzahl von abwechselnden Umläufen um den Null und Einspunkt. Dabei findet er gleichzeitig, dass

$$\sum \kappa^{2\nu+1} \equiv a_0 b_0 + a_0^2 - 1 \bmod 16.$$

$$\sum \kappa^{2\nu+2} \equiv a_0 a_1 + a_0^2 - 1 \bmod 16.$$

Also wird:

$\underline{\text{I} \quad a_1\equiv b_0\equiv 0 \bmod 2 \qquad a_0\equiv b_1\equiv 1 \bmod 2.}$

$$\varphi\left[\delta\left(\frac{b_0-a_0\tau}{a_1\tau-b_1}\right)\delta'\right]_0 = \varrho^{2n[a_0b_0+a_0^2-1]}\varphi(u\tau,u')_{u\frac{b_0\delta-b_1\delta'}{-\delta a_0+a_1\delta'}}$$

$$\underbrace{a_0\delta-a_1\delta'}_{u} \quad a_1\delta'$$

$$\psi\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right)\delta'\Big)_{\varepsilon} = \varrho^{a_0 a_1 + a_0^2 - 1}\, \psi(v\tau, v')_{v\,\frac{b_0\delta - b_1\varepsilon}{-a_0 + a_1\varepsilon}}$$

Um die übrigen 6 Transformationsfälle abzuleiten, brauchen wir:

$$\varphi(\delta(\tau+1)\delta')_{\varepsilon} \text{ und } \varphi\left(\delta\left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)\delta'\right)_{\varepsilon}.$$

Durch Betrachtungen genau derselben Art, wie die vorhergehenden ergibt:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\delta(\tau+1)\delta')_{\varepsilon} &= \varrho^{n}\, \frac{\varphi(\delta\tau, \delta')_{\varepsilon+\delta}}{\psi(\delta\tau, \delta')_{\varepsilon+\delta}} \\ \psi(\delta(\tau+1), \delta')_{\varepsilon} &= \frac{1}{\psi(\delta\tau, \delta')_{\varepsilon+\delta}} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi\left(\delta\left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)\delta'\right)_{\varepsilon} &= \frac{1}{\varphi(v\tau, v')_{v\left(\frac{\varepsilon}{\delta - \varepsilon}\right)}} \\ \delta' &\smile_{v} \delta - \varepsilon \end{aligned}\right\}$$

$$\psi\left(\delta\left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)\delta'\right)_{\varepsilon} = \varrho^{t}\, \frac{\psi(v\tau, v')_{v\left(\frac{\varepsilon}{\delta-\varepsilon}\right)}}{\varphi(v\tau, v')_{v\left(\frac{\varepsilon}{\delta-\varepsilon}\right)}}$$

Nehmen wir jetzt den zweiten Transformationsfall:

$$a_0 \equiv b_0 \equiv b_1 \equiv 1 \mod 2. \quad a_1 \equiv 0 \mod 2.$$

so erhielten wir auch auf dem früheren durch die Aufeinanderfolge

von $\begin{vmatrix} \beta-\alpha, & \beta \\ \delta-\gamma, & \delta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ oder vielmehr:

$$\begin{vmatrix} a_1 - a_0, & a_1 \\ b_1 - b_0, & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Ueber:

$$\varphi\left[\delta\left(\frac{b_1-b_0-(a_1-a_0)\tau}{a_1\tau-b_1}+1\right)\delta'\right]_{\delta'} = \varphi\left(\delta\left(\frac{b_0-a_0\tau}{a_1\tau-b_1}\right)\delta'\right)_{\delta'} = \frac{z^{m}\,\varphi\left(\delta\left(\frac{b_1-b_0-(a_1-a_0)\tau}{a_1\tau-b_1}\right)\delta'\right)_{\tau+\delta}}{\psi\left(\delta\left(\frac{b_1-b_0-(a_1-a_0)\tau}{a_1\tau-b_1}\right)\delta'\right)_{\tau+\delta}} =$$

$$z^{3A}\frac{\varphi(u\tau, u')}{\psi(u\tau, u')} \quad u = \frac{b_0\delta - b_1\sigma}{-\delta a_0 + a_1\sigma} \text{ wo}$$

$$u\,\frac{b_0\delta-b_1\sigma}{-\delta a_0+a_1\sigma} \quad \underbrace{a_0\delta - a_1\sigma}_{u} \quad a_1\delta'$$

Dabei ist A der von Schläfli eingegebenen Multipl. Operation

so lassen sich die sechs übrigen Transformationsfälle behandeln.

Also findet man also index:

$$u\,\frac{b_0\delta-b_1\sigma}{-\delta a_0+a_1\sigma} \text{ wo}$$

$$\underbrace{a_0\delta - a_1\sigma}_{u}$$

der Resultate sind dann unmittelbar aus den von Schläfli aufgestellten können abzuschaffen, wenn man aber nur jenen

index nur das Argument (uT, u') nimmt.

Es stimmen die Resultate mit denen von Koenigsberger – pag 176 aufgestellten.

Jacobi's Transformationstheorem der elliptischen Differentiale

Abel erschienen
$\frac{72}{73}$.
425.

Jacobi stellte sich die Frage, ob man ein ell. Differential

$$\frac{dy}{\sqrt{A'y^4+B'y^3+C'y^2+D'y+E'}}$$

durch eine rationale Fkt.

$$y=f(x) \text{ in ein ähnliches ell. Diff.}$$

$$\frac{1}{M}\,\frac{dx}{\sqrt{Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E}}$$

wo M einen constanten Faktor bedeutet, verwandeln könne. —
Bekannt waren schon folgende Transformationen von Legendre.
Wenn n eine ungerade Zahl ist, so giebt es eine rationale Fkt.

$$y=\frac{a+a'x+a''x^2+\dots a^{(n)^2}x^{(n)^2}}{b+b'x+b''x^2+\dots b^{(n)^2}x^{(n)^2}}$$

welche bei richtiger Bestimmung der Coefficienten das Diff.

$$\frac{dy}{\sqrt{a+by+cy^2+dy^3+ey^4}} \text{ in}$$

$$\frac{dx}{n\sqrt{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4}}$$

Es ist dieses das sogenannte Multiplicationsproblem, weil die Diff. in feste Multiplen verwandelt worden ist. —
Ferner war bekannt, daß die Fkt.

$$y=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2}{b_0+b_1x+b_2x^2}$$

die einfache Transformation löst. Jacobi war gleichzeitig gegeben, dass es jede Fkt. von der Form gibt:

$$y = \frac{a_0 + a_1 x + \dots \; a_{2^n} x^{2^n}}{b_0 + b_1 x + \dots \; b_{2^n} x^{2^n}}$$

Vermittelst welcher man die Transformation bekommt:

$$y = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3}$$ u. im dritten gleichzeitig:

$$y = \frac{a_0 + \dots\dots \; a_{3^m} x^{3^m}}{b_0 + b_1 x + \dots \; b_{3^m} x^{3^m}}$$

Jacobi hat die Aufgabe d. h. das Transformationsproblem ganz allgemein gelöst, u. er hat gezeigt, dass jede Fkt.

$$y = \frac{a + a'x + a''x^2 + \dots \; a^{(n)} x^n}{b + b'x + \dots \; b^{(n)} x^n}$$

wo n eine beliebige Zahl, eine Transformation hervorbringt, so dass sie uns ein beliebiges allgem. Differential auf die Form bringen kann:

$$\frac{1}{M} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

Dieses kann wieder von neuem so transformirt werden, dass der Modul kleiner, als k^2 ist. Gehen wir so weiter, so kommen wir endlich auf jenes Diff.

$$\frac{1}{M} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$ d. h. auf ein trig. Diff.

Lemma

Es seien U und V zwei ganze rationale Fkt. von x, dann wollen wir die Substitution machen:

$$y = \frac{U}{V}$$

Also haben wir:

$$\frac{dy}{\sqrt{A' + B'y + C'y^2 + D'y^3 + E'y^4}} = \frac{V\,dU - U\,dV}{\sqrt{A'V^4 + B'V^3U + C'V^2U^2 + D'VU^3 + E'U^4}}$$

die Grössen stehen von wurzelfreien weg gleich Y gesetzt werden. —
Es ist nur die Aufgabe, die Coeff. [illegible] so zu bestimmen, daß die übrigen Theile [illegible] identisch verschwinden werde.
Daß man [illegible] erlaubt sei, wenn Y zu zwei [illegible] gleiche Wurzeln hat bis auf 4. Denn dann können diese zu je zwei zusammengehörigen Factoren [illegible] vor das Wurzelzeichen gesetzt werden. Die unter dem Wurzel bleibt dann nur ein Polynom 4 Gr. [illegible] so gezeigt werden, daß der [illegible] Factor [illegible] ist. —
Es werde

U vom p ten Gr.

V " m ten Gr. $m \leq p$, dann ist

Y vom $4p$ Grade.

Y soll also nur $2p-2$ Paare gleicher Wurzeln haben, damit unter dem Wurzel nur ein Polynom 4 Grades bleibe.
Dazu sind aber $2p-2$ Bed. Gl. nöthig.
Nämlich: soll Y zwei gl. Wurzeln haben, so ist die Diff. von Y auch Null. Dabei haben Y und Y' einen gemeinsamen Factor nämlich einer der beiden Wurzeln. Haben wir diesen weg, [illegible] wir dann auf diese Weise entwickeln Y (der Factor [illegible] weggehoben) in derselben Weise $2p-2$ Mal, so ist klar, daß man für die Coefficienten von Y $\underline{2p-2}$ Bedingungsgl. erhalten. —
Es fragt sich, wieviel Coeffizienten vorhanden sind.

oder wie m und p bestimmt werden müssen, damit eine genügende Anzahl der Konstanten da ist.

Es soll also

$$m \leqq p \text{ und}$$

$$m + p + 2 \text{ oder}$$

$$m + p + 1 \geqq 2p - 2 \text{ sein.}$$

Daraus nur möglich wären:

$$\left.\begin{aligned} m &= p-3 \\ m &= p-2 \end{aligned}\right\} \text{dabei entspricht die Zahl d. Konst.} \quad \begin{aligned} &2p-2 \\ &2p-1 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} m &= p-1 \\ m &= p \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &2p \\ &2p+1. \end{aligned}$$

Es lässt sich nun zeigen, daß die ersten drei Fälle zu verwerfen sind.

In dem Fall, setzen wir bei den Fällen, in welchen $m = p-3$ und $m = p-2$ ist:

$$x = \alpha + \beta z$$

so wird weder die Ordnung von y geändert, noch die Zahl der Doppelfaktoren; es wird nur erhalten zwei neue Faktoren hinein. Mithin muß die Zahl der Konstanten die Zahl der Bedingungsgleichungen mindestens um 2 übertreffen.

Aber setzen wir:

$$x = \frac{\alpha + \beta z}{\gamma + \delta z}$$

so wird auch der dritte Fall auf den vierten reduziert und wir haben nur zu untersuchen, wo

$$x = p$$

in welchem Falle noch immer drei Konstanten beliebig bleiben können.

Hieraus ist gezeigt, daß wir von parallelen Differenzialen an der Hand der Ausdrücke:

$$y = \frac{a + a'x + a''x^2 + \dots \; a^{(n)}x^n}{b + b'x + \dots \; b^{(p)}x^p}$$

zu verwandeln von der Form:

$$\frac{\partial x}{M\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}$$

verwandeln können, und es bleibt übrig, zu bemerken, dass M eine Constante sei.

Es ist aber M, wenn wir setzen:

$$\mathcal{Y} = T^2(A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4)$$

wobei dann also T das Product der $2p-2$ gleichen Wurzel bedeutet u. wenn $2p-2$ gerade ist:

$$M = \frac{T}{v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}}$$

und es ist zu bemerken, dass dieses eine Constante sei.

Setzen wir zu dem Zwecke:

$$A'+B'y+C'y^2+D'y^3+E'y^4 = E'(1-\alpha'y)(1-\beta'y)(1-\gamma'y)(1-\delta'y) \text{ und}$$

$$y = \frac{u}{v}$$

wobei wir annehmen, dass u und v keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. Wir können das, ohne der Allgemeinheit Abbruch zu thun.

Dann wird:

$$A'v^4+B'v^3u+C'v^2u^2+D'vu^3+E'u^4 = E'(v-\alpha'u)(v-\beta'u)(v-\gamma'u)(v-\delta'u) = \mathcal{Y}.$$

Da u und v keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so würde, sollte Y durch einen Theiler zweimal zu theilen sein [und es ist dieses bei $2p-2$ der Fall] auch einer der Factoren durch welchen Y theilbar ist, diesen Factor zweimal enthalten müssen.

Y enthält $(2p-2)$ Paare gleicher Wurzeln, welche mithin sich auf die Factoren auch vertheilen.

Deshalb wird dann dieser:

$$(v-\alpha' u)\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left[v-\alpha' u\right]u = v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}$$

so ist die rechte Seite, da u und T ganze Functionen sind und ... höchstens vom $2p-2$ oder ... vom $2p-2$ Grade.

Nun müssen in den Gliedern $(v-\alpha' u)$ die ... immer je zwei gleiche Wurzeln enthalten d. h. es muss $(v-\alpha' u)$ od. $(v-\beta' u)$ ... zugleich mit der Derivirten Null werden.

Dieselben muss auch $v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}$ ... gemeinsamen Factor enthalten sein. Solcher gemeinsamen Factoren giebt es aber $2p-2$, die sämmtlich in T enthalten, ... müssen alle diese in $v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}$ enthalten sein. Da nun dieses vom $2p-2$. Grade ist, so muss also T ganz darin enthalten, und zwar kann dann nur noch eine Constante übrig bleiben.

$$v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x} = T\cdot k \text{ also}$$

Mithin $\underline{M = \frac{1}{k} \quad \text{q. e. d.}}$

Also ist es immer möglich

$$\frac{dy}{\sqrt{A'+B'y+\dots E'y^4}} \text{ durch}$$

$$y = \frac{ax+\dots a^{(n)}x^n}{bx+\dots b^{(n)}x^n} \text{ umzuformen in}$$

$$\frac{dx}{M\sqrt{A+\dots Ex^4}}$$

Dabei bleiben noch 3 Constanten willkürlich, wie wir gesehen haben. Diese können dazu angewandt werden, um das Differential umzuformen in

$$\frac{dx}{M\sqrt{x(1-x)(1-\kappa^2 x)}} \dots\dots$$

... zu einer zu bestimmenden Größe ist. Er bewies hierauf [illegible] von jedem allgemeinen Differential [illegible] auf

$$\frac{\partial y}{M\sqrt{(1-y^2)(1-\kappa^2y^2)}}$$

Von diesem wollen wir ausgehen und zeigen, daß es noch andere Transformationen giebt, die

$$\frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)(1-\kappa^2y^2)}} \text{ überführen in } \frac{\partial x}{M\sqrt{(1-x^2)(1-\lambda^2x^2)}}$$

Setzen wir dazu $y=\frac{U}{V}$

und fügen die Bedingung hinzu, daß V eine gerade Fkt. von x sei d.h. [illegible] von x^2 [illegible] oder für $x=-x$ dieselben Werthe annehme, die [illegible] ungerade Fkt. [illegible]:

1) Es sei U vom $2m-1$ } Grade.
" " V vom $2m$

dann behaupten wir, daß:

$$y=\frac{x(a+a'x^2+a''x^4+\dots a^{(m-1)}x^{2m-2})}{1+b'x^2+b''x^4+\dots b^{m}x^{2m}}$$

Auch eine [illegible] Gl. sei

Beweis

Setzen wir $y=\frac{U}{V}$ ein, so wird das Differential.

$$\frac{\left(V\frac{\partial U}{\partial x}-U\frac{\partial V}{\partial x}\right)\partial x}{\sqrt{(V+U)(V-U)(V-\kappa U)(V+\kappa U)}}=\frac{\partial x}{M\sqrt{(1+x)(1-x)(1-\lambda x)(1+\lambda x)}}$$

Offenbar wird diese Beziehung möglich sein, wenn die Gleich. erfüllbar sind:

1) $\underbrace{U+V}_{2m}=(1+x)(1+\lambda x)A^2$ wo A eine ganze Fkt. vom $m-1$ Gr. von x ist
2) $V-U=(1-x)(1-\lambda x)B^2$ " B " " " $m-1$
3) $V+\kappa U=C^2$ wo C eine ganze Fkt. vom m Gr. von x
4) $V-\kappa U=D^2$ " D " " " " " ..

Von diesen Bedingungen fallen aber einige fort.

Da das U, da U eine ungerade, V eine gerade Fct. von x ist, so folgt 2) aus 1) von selbst, wenn man

$x = -x'$ setzt.

Und ebenso 4) aus 3).

Es bleiben also nur die Bedingungen:

$$1)\quad V + U = (1+x)(1+kx)\,A^2 \quad (m-1\ \text{Gr.})$$

$$2)\quad V + \lambda U = C^2 \quad (m^{\text{ten}}\ \text{Gr.}).$$

Da $V + U$ nur $m-1$ Paare gleicher Lösungen haben soll, so werden dadurch $m-1$ Bedingungen ausgesprochen. Dazu kommt die Bedingung, die in $1+k$ liegt. ($(1+kx)$ giebt eine Bedingung für k, eine zu bestimmende Größe ist.)

Um 1) zu erfüllen, sind also $\underline{m}$ Bedingungen oder Constanten nöthig

" 2) " " aber auch $\underline{m}$ Beding.

d.h. im Ganzen sind $2m$ Constanten nöthig. Genau so viel haben wir aber d.h. es ist in der That möglich durch:

$$y = \frac{x\left(a + a'x^2 + a''x^4 + \dots a^{m-1}x^{2(m-1)}\right)}{1 + b'x^2 + b''x^4 + \dots b^m x^{2m}}$$

$$\frac{\partial y}{\sqrt{(1-\lambda^2 y^2)(1-y^2)}} = \frac{\partial x}{M\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$ zu machen.

2)

U vom $2m+1$ Gr. V vom m Gr.

$$y = \frac{x\left(a + a'x^2 + \dots a^m x^{2m}\right)}{1 + b'x^2 + \dots b^m x^{2m}}$$

Es wird wieder alles genauso sein, wenn wir die Bedingungen aufstellen können:

$$1)\quad V + U = (1+x)\,A^2 \quad (A \text{ vom } m^{\text{ten}}\ \text{Gr.})$$

$$2)\quad V - U = (1-x)\,B^2 \quad (B \text{ " " " })$$

$$3)\quad V + \lambda U = (1+kx)\,C^2 \quad (C \text{ " " " })$$

$$4)\quad V - \lambda U = (1-kx)\,D^2 \quad (D \text{ " " " })$$

2 und 4 folgen aus 6 und 3. Wenn aber 1 zu betrachten, dann $m+1$ Constanten übrig, von 3 zu betrachten m Constanten übrig, also im Ganzen $2m+1$ und genau so gross ist die Anzahl der vorhandenen Constanten.

Also man erhält die Substitution:

$$y = \frac{x(a + a'x^2 + a''x^4 + \dots + a^{m}x^{2m})}{(1 + b'x^2 + \dots + b^{m}x^{2m})}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}} = \frac{1}{M}\,\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$ genügt.

Man unterscheidet zweierlei Transformationen:

1) Gerade Transform. wenn U vom Grade $2m-1$
V " " $2m$.

2) Ungerade Transform. wenn U vom Grade $2m+1$
" V " " $2m$.

Es lassen sich nun alle geraden Transformationen auf die ungeraden Transformationen zurückführen. Ist

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\mu^2z^2)}}$$ durch $z = \dfrac{U'(y)}{V'(y)}$ von der p'ten Ordn.

übergegangen in: $$\frac{dy}{M'\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}}$$

Es möge sich ferner durch eine Substitution $p$ter Ordnung

$$y = \frac{U(x)}{V(x)}$$

ergeben: $$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}} = \frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

dann ist schliesslich auch:

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\mu^2 z^2)}} = \frac{dx}{M M' \sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2 x^2)}}$$

vermöge der Gleichungen:

$$z = \frac{U'[F(x)]}{V'[F(x)]} = \frac{U''(x)}{V''(x)} \quad \text{wenn} \quad F(x) = \frac{U(x)}{V(x)}.$$

Dabei ist die Substitution offenbar von der $p p'$ten Ordnung.

Dieses verallgemeinert d. h. man kann eine Transformation eines beliebigen $n$ten Grades immer zusammengesetzt aus einer Reihe von Transformationen der Primzahlgrade $p\ p'\ p'' \ldots$ Grades, wenn

$$n = p\,p'\,p'' \ldots \text{ist}.$$

Daraus folgt aber unsere obige Behauptung von selbst. Jede gerade Zahl kann zusammengesetzt werden aus ungeraden und einer Transformation des 2ten Grades.

Wir werden uns daher im folgenden auch nur mit den ungeraden Transformationen zu beschäftigen haben.

Bestimmen wir die Multiplicatorgleichung noch einmal directe.

Es sollen den Gleich. genügt werden:

1) $v + \mathfrak{A}u = (1+x)A^2$ und

2) $v + \lambda\mathfrak{A}u = (1+\kappa x)C^2$

Es soll gezeigt werden, daß wenn der Gleichung

1) $v+\mathfrak{A}u = (1+x)A^2$ genügt wird, und es ist:

$y = \frac{\mathfrak{A}u}{v}$ [illegible], daß es an $\frac{v}{\lambda\mathfrak{A}u}$ übergeht, wenn man setzt

$x = \frac{1}{\kappa x}$, daß dann [illegible] der zweiten

Bedingung 2) $v+\lambda\mathfrak{A}u) = (1+\kappa x)C^2$ genügt wird.

Es sei: $\frac{v+\mathfrak{A}u}{1+x} = A^2$ [illegible] und

$y = \frac{x f(x^2)}{\varphi(x^2)}$ setzen wir

$x = \frac{1}{\kappa x}$, so wird:

$\left(\frac{\mathfrak{A}u}{v}\right)_{\frac{1}{\kappa x}} = \frac{f\left(\frac{1}{\kappa^2x^2}\right)}{\kappa x\,\varphi\left(\frac{1}{\kappa^2x^2}\right)}$. Multipliciren wir Zähler u. Nenner

mit x^{2m}, so wird u. s. w.

$$\frac{v}{\lambda\mathfrak{A}u} = \frac{x^{2m} f\left(\frac{1}{\kappa^2x^2}\right)}{\kappa x^{2m+1}\varphi\left(\frac{1}{\kappa^2x^2}\right)} = \frac{\varphi(x^2)}{\lambda x f(x^2)}.$$

Mithin muß sein:

$$\varphi(x^2) = P\, x^{2m} f\left(\frac{1}{\kappa^2x^2}\right)$$

$$\lambda f(x^2) = \kappa P\, x^{2m}\varphi\left(\frac{1}{\kappa^2x^2}\right)$$ wo P eine Constante bedeutet.

Die Gl. sind identisch, denn [illegible] setzt man

$x = \frac{1}{\kappa x}$ [illegible]

$$\varphi\left(\frac{1}{\kappa^2x^2}\right) = P\frac{1}{\kappa^{2m}x^{2m}} f(x^2). = \frac{\lambda f(x^2)}{\kappa P.x^{2m}}$$ also

$$P = \sqrt{\lambda.\kappa^{2m-1}}$$

Folgen wir dieses weiter so wird:

$$a)\ \varphi(x^2) = \sqrt[4]{\lambda.\kappa^{2m-1}}\ x^{2m} f\left(\frac{1}{\kappa^2x^2}\right)$$
$$b)\ f(x^2) = \sqrt[4]{\frac{\kappa^{2m-1}}{\lambda}}\ \kappa . x^{2m}\varphi\left(\frac{1}{\kappa^2x^2}\right) \quad (1)$$

Es stelle nun

$$\frac{\varphi(x^2)+x f(x^2)}{1+x} = A^2$$ für. Wenn nun $x = \frac{1}{k^2 x}$ folgt, so bleibt doch der Ausdruck ein Ausdruck d. h.

$$\left[\frac{\varphi\left(\frac{1}{\kappa^2x^2}\right) + \frac{1}{\kappa x} f\left(\frac{1}{\kappa^2x^2}\right)}{1+\kappa x}\right] \kappa x = \text{Ausdruck } B'^2$$

$$\frac{\kappa x\ \varphi\left(\frac{1}{\kappa^2x^2}\right) + f\left(\frac{1}{\kappa^2x^2}\right)}{1+\kappa x} = B'^2$$

$$\frac{\sqrt[4]{\lambda.\kappa^{2m-1}}\ x^{2m+1}\varphi\left(\frac{1}{\kappa^2x^2}\right) + x^{2m}\sqrt[4]{\lambda.\kappa^{2m-1}}\ f\left(\frac{1}{\kappa^2x^2}\right)}{1+\kappa x} = B'^2$$

Aber nach der Bezeichnung war:

$$V = \sqrt[4]{\lambda.\kappa^{2m-1}}\ x^{2m} f\left(\frac{1}{\kappa^2x^2}\right)$$
$$\lambda U = \sqrt[4]{\ } \ldots$$

Also:

$$V + \lambda U = (1+\kappa x) B'^2 \quad \text{q. e. d.}$$

Also:

Wenn $\frac{U+V}{1+x}$ ein vollständiges Quadrat ist, wie es ist,
$\frac{U}{V}$ so beschaffen, daß es für $x = \frac{1}{\kappa x}$ übergeht in
$\frac{V}{\lambda U}$, dann wird auch selbst.

$$V + \lambda U = (1+\kappa x) B'^2$$

Natürlich darf in diesem Falle die Quadratwurzeln nicht mehr behalten, sondern es werden sich die des Zählers un- verändert durch die des Nenners.

In der That folgen aus a) b) die Quadratwurzeln gleich schon wenn man x einander gleich setzt:

$$\left.\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{k}{\lambda}}\;\frac{b^{(m)}}{k^{m}} \\ a' &= \sqrt{\frac{k}{\lambda}}\;\frac{b^{(m-1)}}{k^{m-2}} \\ &\;\vdots \\ a^{(m)} &= \sqrt{\frac{k}{\lambda}}\; b\, k^{m} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Wenn also die b bekannt sind, so sind also auch die a bekannt.

Wir haben daher bei der Transformation nur folgendes zu suchen.

Man hat eine Fkt. $\varphi(x^2)$ vom $2m$ Grade mit noch willkürlichen Constanten b b_1 … und hat dann durch Gl. k) eine Fkt. $x\,f(x^2)$ vom $2m+1$ Grade, deren Coefficienten dann bestimmt sind.

Dann werden die Coefficienten b … bestimmt sein.

$$V + U = (1+x)\,A^2$$

Beispiel

$$y = \frac{U}{V} = \frac{x\,(a + a'x^2)}{1 + b'x^2} \quad (\text{Transform. 3. Grades}).$$

Dann folgt:
$$\left.\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{k}{\lambda}}\;\frac{b'}{k} \\ a' &= \sqrt{\frac{k}{\lambda}}\;k. \end{aligned}\right\} \; 1).$$

Ferner soll sein:

$$V + U = (1+x)\,A^2$$

Da das constante Glied von V, welches auch von U 1 ist, so folgt, dass A die Form haben muss:

$$1 + \alpha x$$

wo α noch näher zu bestimmen ist.

$$V + U = (1+x)(1 + 2\alpha x + \alpha^2 x^2) = 1 + (1+2\alpha)x + \alpha(2+\alpha)x^2 + \alpha^2 x^3.$$

Aber $u + v = 1 + ax + b'x^2 + a'x^3$.

Aus folgendem der Gleichsetzung der Coefficienten gleicher Potenzen folgen:

$$2)\left\{\begin{aligned} a &= 1+2\alpha \\ b' &= \alpha(2+\alpha) \\ a' &= \alpha^3 \end{aligned}\right\}.$$

Aus 1 und 2 lässt sich α bestimmen. Es wird nämlich:

$$7)\ 1+2\alpha = \sqrt{\frac{k}{\lambda}}\ \frac{\alpha(2+\alpha)}{k} \quad \text{und } \alpha^2 = \sqrt{\frac{k^3}{\lambda}}.$$

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k^3}{\lambda}}.$$

Setzen wir $\sqrt[4]{k} = u$, $\sqrt[4]{\lambda} = v$.

$$3)\ \alpha = \frac{u^3}{v}.$$

$$4)\ a = 1+2\alpha = \frac{v+2u^3}{v}$$

$$5)\ b' = \alpha(2+\alpha) = \frac{u^3(2v+u^3)}{v^2}$$

$$6)\ a' = \frac{u^6}{v^2}.$$

Es lässt sich demnach eine Modulargleichung herstellen, zwischen der 4. ten Wurzel der Moduln.

Setzen wir die gefundenen Werthe in Gl. 7 ein, so kommt sofort:

$$\frac{v+2u^3}{v} = \frac{u^3(2v+u^3)}{v^2}\ \frac{1}{u^2v^2}$$

$$v^2+2u^3 = \frac{u(2v+u^3)}{v^3}$$

$$10)\ \underline{u^4 - v^4 + 2uv(1-u^2v^2) = 0}$$

Es ist dieses die gesuchte Modulargleichung.

Die gesuchte Transformation kann jetzt leicht bestimmt werden . . . . .

$$y = \frac{(v+2u^3)vx + u^6x^3}{v^2 + v^2u^2(v+2u^3)x^2}.$$

Hieraus kann man unmittelbar die Factoren:

$1+y$ u. $1-y$ u.s.f. $\sqrt{1-y^2}$ und

$1+v^4y$ u. $1-v^4y$ u.s.f. $\sqrt{1-v^8y^2}$ bestimmen.

und damit hat man die allgemeinen Gl. der vorgelegten Aufg. vollständig durch die des Transformirenden.

Um den transformirenden Nenner M selbst ganz darzustellen, folgen wir

$$\frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)(1-v^8y^2)}} = \frac{\partial x}{M\sqrt{(1-x^2)(1-u^8x^2)}}$$

dann hat man:

$$M = \frac{ABCD}{V\frac{\partial U}{\partial x} - U\frac{\partial V}{\partial x}}$$ und die Constanten zu bestimmen

aus:
$$A^2(1+x) = V+U.$$
$$B^2(1-x) = V-U$$
$$C^2(1+u^4x) = V+v^4U$$
$$D^2(1-u^4x) = V-v^4U.$$

M muss sich ergeben, wenn man zwei gleich hohe Potenzen z. B. die constanten Glieder des Zählers und Nenners durch einander dividirt.

Setzt man $V = 1+b'x^2$ $U = ax+a'x^3$

folglich werden die constanten Glieder von $A\,B\,C\,D$ alle gleich 1.

und das constante Glied von $V\frac{\partial U}{\partial x} - U\frac{\partial V}{\partial x} = a$.

Also wird $M = \frac{1}{a} = \frac{v}{v+2u^3}$

Schliesslich ergeben sich nun die nöthigen Werthe:

$$\frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)(1-v^8y^2)}} = \frac{(v+2u^3)\,\partial x}{v\sqrt{(1-x^2)(1-u^8x^2)}}$$

wird zwar nachher zeigen $v = \sqrt[4]{\lambda}$ und $u = \sqrt[4]{k}$ eine algebraische Gl. 4ten Gr.
Mit Hülfe dieser kann man unmittelbar den neuen Modul λ durch den früheren k ausdrücken oder auch beide durch eine Hülfsvariable α.

Das Multiplicationsproblem

Wir fanden die Modulargl.

$$u^4 - v^4 + 2uv(1-u^2v^2) = 0.$$

Dieselbe bleibt offenbar unverändert, wenn man für $v : u$
" $u : -v$ setzt.

Es wird daher zu dieser Modulargl. noch eine andere Transformation gehören, die sich aus der ersten ergiebt, wenn man die Größen u u. v vertauscht, d.h. es wird auch:

$$\frac{dz}{\sqrt{R(z)}_{u^8}} = \frac{u-2v^3}{u}\,\frac{dy}{\sqrt{R(y)}_{v^8}} \quad \text{wenn}$$

$$z = \frac{(u-2v^3)uy + v^6y^3}{u^2 + u^3v^2(u-2v^3)y}.$$

Also:

$$\frac{dz}{\sqrt{R(z)}_{v^8}} = \frac{(v+2u^3)(u-2v^3)}{uv}\,\frac{dx}{\sqrt{R(x)}_{u^8}} \text{ durch Combination.}$$

Aber nach der Modulargl. ist dieser Fact. -3.

$$\frac{dz}{\sqrt{R(z)}_{v^8}} = -3\,\frac{dx}{\sqrt{R(x)}_{u^8}}$$

Man gelangt auf diese Weise durch Zusammensetzung zweier Transformationen zu der sog. Multiplication, bei welcher also der ursprüngliche Differential mit dem gemeinsamen Nenner der Transformation ist, wo beide denselben Modul haben.
Es gilt dieser Satz ganz allgemein auch für höhere Transformationen.

Entwickelung der ell. Fkt.

Von Legendre's ersten Gattungsintegral [illegible] [illegible]

$$1)\quad u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$ Setzen wir $x = \sin\varphi$ so geht es über in

$$2)\quad u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

Man setzt nun $3)\ \varphi =$ amplitude $u =$ am u und ebenso

$4)\ x =$ sinus ampl. $u =$ sn u.

x ist dann x eine elliptische Fkt. von u.

Ferner setzt man

$$5)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{R(\varphi)}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = K \text{ (erstes vollständiges ell. Integral)}$$

und bezeichnet die Größe $K-u =$ coampl. u.

Ferner führen wir die Größe Δ amplitudinis (delta am) von u als neue elliptische Fkt. ein durch:

$$6)\quad \Delta\,\mathrm{am}\,u = \frac{d\,\mathrm{am}\,u}{du} = \sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2u} = \sqrt{1-k^2x^2}$$

und $7)\ \mathrm{cn}\,u = \sqrt{1-\mathrm{sn}^2u}$. Und eine Größe k' durch

$$8)\quad k^2+k'^2=1.$$

k' wird der complementäre Modul zu k genannt und es soll entsprechend genannt werden:

$$9)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{R(x)}_{k'}} = K'.$$

Entsprechend kann man noch als weitere ell. Fkt. die Tangens [illegible] von am u verstehen, doch genügen die drei ersten Fkt.

Dabei wird u das Argument von der allgemeinen ell. Function.

Ist daher: $x = \sin am\, u$, so ist $u = \operatorname{Arg.} \sin x$. –

Additionstheorem der ell. Fkt.

Wir kommen zu dem Additionstheorem der ell. Fkt. und wenden dabei das von Sturm angewendete Verfahren an.

Wir gehen aus von der Diffgl.

$$1)\quad \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} = 0$$

und wollen diese Diffgl. auf zwei Arten integriren, einmal transcendent das andere Mal algebraisch.

Transcendent ergibt sich unmittelbar:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} = c.$$

Die Constante kann bestimmt werden. Setzen wir fest, daß $x = 0,\ y = z$ zusammengehören, so wird

$$c = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} \quad \text{also:}$$

$$2)\quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}.$$

Ferner können wir Gl. 1) schreiben:

$$\frac{1}{1-k^2x^2y^2}\left[\sqrt{R(y)}\,dx + \sqrt{R(x)}\,dy\right] = 0 \quad \text{also:}$$

$$3)\quad \int \frac{\sqrt{R(y)}\,dx}{1-k^2x^2y^2} + \int \frac{\sqrt{R(x)}\,dy}{1-k^2x^2y^2} = c'$$

Aber: $$\int \sqrt{\frac{(1-y^2)(1-k^2y^2)}{1-k^2x^2y^2}}\,dx = \frac{x\sqrt{R(y)}}{1-k^2x^2y^2} - \int x\,dM \quad \text{wo}$$

$$M = \frac{\sqrt{R(y)}}{1-k^2x^2y^2} \quad \text{also:}$$

$$dM = -\frac{(1-k^2x^2y^2)\left[(1-k^2y^2)2y + y(1-y^2)2k^2\right]dy}{2(1-k^2x^2y^2)^2\sqrt{R(y)}} +$$

$$+ \frac{\sqrt{R(y)}\left[2k^2y^2x\,dx + 2k^2x^2y\,dy\right]}{(1-k^2x^2y^2)^2} =$$

$$y\left(\frac{2k^2(x^2+y^2)-(1+k^2)(1+k^2x^2y^2)}{(1-k^2x^2y^2)^2}\right)\frac{dy}{\sqrt{R(y)}} + \frac{2k^2xy^2\sqrt{R(y)}}{(1-k^2x^2y^2)^2}\,dx$$

Also können wir setzen:

$$-z\,dK = P\frac{dy}{\sqrt{R(y)}} + Q\sqrt{R(y)}\,dx.$$

wo P eine symmetrische Fkt. von $x\,y$ ist.

Also wird:

$$\int\frac{dx\sqrt{R(y)}}{1-k^2x^2y^2} = \frac{x\sqrt{R(y)}}{1-k^2x^2y^2} - \int P\frac{dy}{\sqrt{R(y)}} - \int Q\,dx\sqrt{R(y)}$$ und ebenso:

$$\int\frac{dy\sqrt{R(x)}}{1-k^2x^2y^2} = \frac{y\sqrt{R(x)}}{1-k^2x^2y^2} - \int P\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} - \int Q\,dy\sqrt{R(x)}$$ da P u. Q ungeändert

bleiben

Setzen wir diese Ausdrücke in B) ein, so wird, da

$$\int P\left[\frac{dy}{\sqrt{R(y)}}+\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}\right]=0$$ und auch:

$$\int Q\left[dx\sqrt{R(y)}+dy\sqrt{R(x)}\right]=0$$ für $x=0$, dann $y=z$ entsprechen

sollen in dem Anfang bleibenden Theil

$$\frac{x\sqrt{R(y)}+y\sqrt{R(x)}}{1-k^2x^2y^2} = c'$$

$$\underline{c'=z.}$$

Also erhalten wir das Resultat:

$$\frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}+y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2} = z.$$

d.h. einen algebraischen Zusammenhang zwischen den drei oberen Grenzen.
Wir können das Integral erhalten durch Auflösung nach y so ausdrücken:
Zum allgemeinen Integral unserer Diff. Gleichung lassen sich dann zu einem neuen
allgemeinen Integral unserer Gleichung anwenden, dessen obere Grenze z

sich also einfach zu bestimmen scheint durch den oberen Grenzen x und y der gegebenen Integrale.
Hieraus lassen sich unmittelbar die Additionstheoreme für die Sinus-amplitude herleiten.
Setzen wir:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = u \quad \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} = v \quad \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = u+v \text{ (u. s. w.)}$$

so wird man haben:

$$\operatorname{sn}(u+v) = \frac{\operatorname{sn} u.\operatorname{cn} v.\operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v.\operatorname{cn} u.\operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u.\operatorname{sn}^2 v.}$$

Daraus folgt dann unmittelbar der Definitionen.

$$\operatorname{cn}(u+v) = \frac{\operatorname{cn} u.\operatorname{cn} v. - \operatorname{sn} u.\operatorname{sn} v.\operatorname{dn} u.\operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v.\operatorname{sn}^2 u.}$$

$$\operatorname{dn}(u+v) = \frac{\operatorname{dn} u.\operatorname{dn} v - k^2 \operatorname{sn} u.\operatorname{sn} v.\operatorname{cn} u.\operatorname{cn} v.}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 v \operatorname{sn}^2 u.}$$

Ferner

$$\operatorname{tg}(u+v) = \frac{\operatorname{sn}(u+v)}{\operatorname{cn}(u+v)} = \frac{\operatorname{sn} u.\operatorname{cn} v.\operatorname{dn} v. + \operatorname{sn} v.\operatorname{cn} u.\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u.\operatorname{cn} v. - \operatorname{sn} u.\operatorname{sn} v.\operatorname{dn} u.\operatorname{dn} v.} =$$

$$\frac{\operatorname{tg} u.\operatorname{dn} v + \operatorname{tg} v.\operatorname{dn} u}{1 - \operatorname{tg} u.\operatorname{tg} v.\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}$$

etc.

Auch für die co fct. können wir folgende Relationen ableiten.
Es ist.

$$\operatorname{sn} K = +1. \text{ Daher. } \operatorname{cn} K = 0. \ \operatorname{dn} K = k'$$

Also:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{coSn} u &= \operatorname{sn}(K-u) = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} \\
\operatorname{coCn} u &= \operatorname{cn}(K-u) = \frac{\operatorname{sn} u\, k'}{\operatorname{dn} u} \\
\operatorname{coDn} u &= \operatorname{dn}(K-u) = \frac{k'}{\operatorname{dn} u}
\end{aligned}\right\}$$

$$\cot g\,am(u) = \frac{1}{k'\,tg\,am(u)}$$

$$\cot g\,am(u) = \frac{k'}{\cot g\,am(u)}$$ etc.

Daher ist aber gleichzeitig die Formel für die Addit. des [illegible] [illegible] [illegible]. Es folgt dies aber unmittelbar, wenn man bedenkt, dass

$am(-u) = -am(u)$ wird daher der sn tgam, ungerade [illegible], die cn, dn u gerade Fkt. sind.

Setzen wir nun für allemal

$$N = 1 - k^2 sn^2 u . sn^2 v.$$

so ergeben sich aus diesen Grundformeln unmittelbar folgende andere:

$$sn\,2u = \frac{2.sn u . cn u . dn u}{1 - k^2 sn^4 u.}$$

$$cn\,2u = \frac{cn^2 u - sn^2 u . dn^2 u}{1 - k^2 sn^4 u.}$$

$$dn\,2u = \frac{dn^2 u - sn^2 u . cn^2 u}{1 - k^2 sn^4 u.}$$

$$sn(u+v) + sn(u-v) = 2\frac{sn(u)\,cn v . dn v}{N}$$ oder besser, wenn wir

$u + v = \alpha$, $u - v = \beta$ setzen.

$$sn(\alpha) + sn\beta = \frac{2\,sn\frac{\alpha+\beta}{2}\,cn\frac{\alpha-\beta}{2}\,dn\frac{\alpha-\beta}{2}}{N}$$

$$sn(\alpha) - sn\beta) = \frac{2\,cn\frac{\alpha+\beta}{2}\,dn\frac{\alpha+\beta}{2}\,sn\frac{\alpha-\beta}{2}}{N}.$$

$$cn(\alpha) + cn\beta = \frac{2\,cn\frac{\alpha+\beta}{2}\,cn\frac{\alpha-\beta}{2}}{N}.$$

$$cn(\alpha) - cn\beta = -2.\frac{sn\frac{\alpha+\beta}{2}.\,sn\frac{\alpha-\beta}{2}\,dn\frac{\alpha+\beta}{2}.\,dn\frac{\alpha-\beta}{2}}{N}.$$

$$dn(\alpha) + dn\beta = 2.\frac{dn\frac{\alpha+\beta}{2}.\,dn\frac{\alpha-\beta}{2}}{N}$$

$$dn(\alpha) - dn\beta = -2.\frac{sn\frac{\alpha+\beta}{2}.\,sn\frac{\alpha-\beta}{2}.\,cn\frac{\alpha+\beta}{2}.\,cn\frac{\alpha-\beta}{2}}{N.}$$

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{\mathrm{sn}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \mathrm{sn}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2}{N}$$

In der That, setzt man $\mathrm{sn}\, u = x$, $\mathrm{sn}\, v = y$, so ist

$$\mathrm{sn}(u+v) = \frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)} + y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{N}.$$

$$\mathrm{sn}(u+v)\,\mathrm{sn}(u-v) = \frac{x^2(1-y^2)(1-k^2y^2) - y^2(1-x^2)(1-k^2x^2)}{N^2} = \frac{(x^2-y^2)(1-k^2x^2y^2)}{N^2} =$$

$$\frac{x^2-y^2}{N} \text{ q.e.d.} \quad \text{— Ferner:}$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{\mathrm{cn}^2\frac{\alpha+\beta}{2} - \mathrm{sn}^2\frac{\alpha-\beta}{2}\,\mathrm{dn}^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{N}$$

In der That bei derselben Bezeichnung war:

$$\mathrm{cn}(u+v)\,\mathrm{cn}(u-v) = \frac{(1-x^2)(1-y^2) - x^2y^2(1-k^2x^2)(1-k^2y^2)}{N^2} =$$

$$\frac{-(x^2+y^2)(1-k^2x^2y^2) + 1 - k^4x^4y^4}{N^2} = \frac{-x^2-y^2+1+k^2x^2y^2}{N} \text{ q.e.d.}$$

Ebenso folgt:

$$\mathrm{dn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\beta = \frac{\mathrm{dn}^2\frac{\alpha+\beta}{2} - k^2\,\mathrm{cn}^2\frac{\alpha+\beta}{2}\,\mathrm{sn}^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{N}.$$

Ferner

$$1 + \mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta = \frac{\mathrm{cn}^2\frac{\alpha-\beta}{2} + \mathrm{sn}^2\frac{\alpha+\beta}{2}\,\mathrm{dn}^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{N}.$$

In der That, ist:

$$1 + \mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta = \frac{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\frac{\alpha+\beta}{2}\,\mathrm{sn}^2\frac{\alpha-\beta}{2} + \mathrm{sn}^2\frac{\alpha+\beta}{2} - \mathrm{sn}^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{N} = \frac{\mathrm{cn}^2\frac{\alpha-\beta}{2} + \mathrm{sn}^2\frac{\alpha+\beta}{2}\,\mathrm{dn}^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{N}$$

Ebenso:

$$1 - \mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta = \frac{\mathrm{cn}^2\frac{\alpha+\beta}{2} + \mathrm{sn}^2\frac{\alpha-\beta}{2}\,\mathrm{dn}^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{N}$$

$$1 + k^2\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta = \frac{\mathrm{dn}^2\frac{\alpha-\beta}{2} + k^2\,\mathrm{sn}^2\frac{\alpha+\beta}{2}\,\mathrm{cn}^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{N} \quad \text{denn}$$

$$1 + k^2\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta = \frac{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\frac{\alpha+\beta}{2}\,\mathrm{sn}^2\frac{\alpha-\beta}{2} + k^2\,\mathrm{sn}^2\frac{\alpha+\beta}{2} - k^2\,\mathrm{sn}^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{N} = \frac{\mathrm{dn}^2\frac{\alpha-\beta}{2} + k^2\,\mathrm{sn}^2\frac{\alpha+\beta}{2}\,\mathrm{cn}^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{N} \text{ q.e.d.}$$

$$1-k^2\,\mathrm{sn}\,\alpha\cdot\mathrm{sn}\,\beta = \frac{\mathrm{dn}^2\frac{\alpha-\beta}{2}+k^2\,\mathrm{sn}^2\frac{\alpha+\beta}{2}\,\mathrm{cn}^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{N}$$

Ferner:

$$1+\mathrm{cn}\,\alpha\cdot\mathrm{cn}\,\beta = \frac{\mathrm{cn}^2\frac{\alpha+\beta}{2}+\mathrm{cn}^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{N}$$

$$1-\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\beta = \frac{\mathrm{sn}^2\frac{\alpha+\beta}{2}\,\mathrm{dn}^2\frac{\alpha-\beta}{2}+\mathrm{sn}^2\frac{\alpha-\beta}{2}\,\mathrm{dn}^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{N}$$

$$1+\mathrm{dn}\,\alpha\cdot\mathrm{dn}\,\beta = \frac{\mathrm{dn}^2\frac{\alpha+\beta}{2}+\mathrm{dn}^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{N}$$

$$1-\mathrm{dn}\,\alpha\cdot\mathrm{dn}\,\beta = k^2\left(\frac{\mathrm{sn}^2\frac{\alpha+\beta}{2}\,\mathrm{cn}^2\frac{\alpha-\beta}{2}+\mathrm{sn}^2\frac{\alpha-\beta}{2}\,\mathrm{cn}^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{N}\right)$$

Ferner:

$$(1\pm\mathrm{sn}\,\alpha)(1\pm\mathrm{sn}\,\beta) = \left(\frac{\mathrm{cn}\frac{\alpha-\beta}{2}\pm\mathrm{sn}\frac{\alpha+\beta}{2}\,\mathrm{dn}\frac{\alpha-\beta}{2}}{N}\right)^2$$

wie klar, wenn man die Formeln für $\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta$ u. $\mathrm{sn}\,\alpha+\mathrm{sn}\,\beta$ bemerkt.

Ebenso:

$$(1\pm\mathrm{sn}\,\alpha)(1\mp\mathrm{sn}\,\beta) = \left(\frac{\mathrm{cn}\frac{\alpha+\beta}{2}\pm\mathrm{sn}\frac{\alpha-\beta}{2}\,\mathrm{dn}\frac{\alpha+\beta}{2}}{N}\right)^2$$

$$(1\pm k\,\mathrm{sn}\,\alpha)(1\pm k\,\mathrm{sn}\,\beta) = \left(\frac{\mathrm{dn}\frac{\alpha-\beta}{2}\pm k\,\mathrm{sn}\frac{\alpha+\beta}{2}\,\mathrm{cn}\frac{\alpha-\beta}{2}}{N}\right)^2$$

$$(1\pm k\,\mathrm{sn}\,\alpha)(1\mp k\,\mathrm{sn}\,\beta) = \left(\frac{\mathrm{dn}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\pm k\,\mathrm{sn}\frac{\alpha-\beta}{2}\,\mathrm{cn}\frac{\alpha+\beta}{2}}{N}\right)^2$$

$$(1\pm\mathrm{cn}\,\alpha)(1\pm\mathrm{cn}\,\beta) = \left(\frac{\mathrm{cn}\frac{\alpha+\beta}{2}\pm\mathrm{cn}\frac{\alpha-\beta}{2}}{N}\right)^2$$

$$(1\pm\mathrm{cn}\,\alpha)(1\mp\mathrm{cn}\,\beta) = \left(\frac{\mathrm{sn}\frac{\alpha+\beta}{2}\,\mathrm{dn}\frac{\alpha-\beta}{2}\mp\mathrm{sn}\frac{\alpha-\beta}{2}\,\mathrm{dn}\frac{\alpha+\beta}{2}}{N}\right)^2$$

$$(1\pm\mathrm{dn}\,\alpha)(1\pm\mathrm{dn}\,\beta) = \left(\frac{\mathrm{dn}\frac{\alpha+\beta}{2}\pm\mathrm{dn}\frac{\alpha-\beta}{2}}{N}\right)^2$$

$$(1\pm\mathrm{dn}\,\alpha)(1\mp\mathrm{dn}\,\beta) = \frac{k^4\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\mp\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{N}.$$

Ferner:

$$\underset{(\beta)\ (\alpha)}{\mathrm{sn}\,\alpha\cdot\mathrm{cn}\,\beta} = \frac{\mathrm{sn}\frac{\alpha+\beta}{2}\,\mathrm{cn}\frac{\alpha-\beta}{2}\,\mathrm{dn}\frac{\alpha-\beta}{2}\pm\mathrm{sn}\frac{\alpha-\beta}{2}\,\mathrm{cn}\frac{\alpha+\beta}{2}\,\mathrm{dn}\frac{\alpha+\beta}{2}}{N}$$ wie klar

$$\underset{(\beta)\ (\alpha)}{\mathrm{sn}\,\alpha\cdot\mathrm{dn}\,\beta} = \frac{\mathrm{cn}\frac{\alpha-\beta}{2}\,\mathrm{sn}\frac{\alpha+\beta}{2}\,\mathrm{dn}\frac{\alpha-\beta}{2}\pm\mathrm{cn}\frac{\alpha+\beta}{2}\,\mathrm{sn}\frac{\alpha-\beta}{2}\,\mathrm{dn}\frac{\alpha+\beta}{2}}{N}$$

$$\underset{(\beta)\ \alpha}{\mathrm{cn}\,\alpha\cdot\mathrm{dn}\,\beta} = \frac{\mathrm{cn}\frac{\alpha+\beta}{2}\,\mathrm{cn}\frac{\alpha-\beta}{2}\,\mathrm{dn}\frac{\alpha-\beta}{2}\,\mathrm{dn}\frac{\alpha+\beta}{2}\mp k'^2\,\mathrm{sn}\,\alpha\cdot\mathrm{sn}\,\beta}{N}.$$

Die doppelte Periodicität der ell. Fkt.

Da $\int_0^{n\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\Delta(\varphi)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \dots \int_{(n-1)\pi}^{(\frac{2n-1}{2})\pi} + \int_{\frac{2n-1}{2}\pi}^{n\pi} = 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}}$ etc.

so folgt, wenn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} = K$.

$$\int_0^{\frac{2n\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = 2nK.$$

$$\underline{am(2nK) = 2n\, am K.}$$

$am K = \frac{\pi}{2}$; $am 3K = \frac{3\pi}{2}$

$am 2K = \pi$; $am 4K = 2\pi$ etc.

Also: $sn K = 1$, $sn 3K = -1$; $cn K = 0$, $cn 3K = 0$

$sn 2K = 0$, $sn 4K = 0$; $cn 2K = -1$, $cn 4K = 1$

$dn K = k'$, $dn 3K = k'$

$dn 2K = +1$, $dn 4K = 1$.

Es könnte $dn 2K = \pm 1$ sein, aber aus

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} \text{ folgt, daß}$$

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{d\, am u}{du} > 0. \text{ etc.}$$

Unter Berücksichtigung der gefundenen Additionstheoreme folgt dann unmittelbar:

$sn(u \pm 2K) = -sn u$; $cn(u \pm 2K) = -cn u$

$sn(u \pm 4K) = +sn u$; $cn(u \pm 4K) = +cn u$

$dn(u \pm 2K) = +dn u$; $tg am(u \pm 2K) = +tg am u$.

$dn(u \pm 4K) = +dn u$; $cotg am(u \pm 2K) = +cotg u$.

Woraus folgt, daß die allgemeinsten Fkt. zweifach periodische reelle Periode haben und zwar haben die sin u. cosamplit. die Per. 4 K. — und wie leicht einzusehen zu gemeinsam ... 4iK.

die Δ u. tg(ampl.) ampl. " " 2 K.

Aber die allgemeinsten Fkt. haben auch noch eine imaginäre Periode. Dieselbe beruht darauf, daß die all. Fkt. von imaginären Argumenten sich ausdrücken lassen durch all. Fkt. von dem selben, aber reellen Argumente, aber für den complementären Modul.

Nehmen wir also φ dann imaginär an, so können wir setzen folgendes

$$\sin\varphi = i\,\mathrm{tg}\,\psi \qquad \Delta\varphi = \sqrt{1+k^2\,\mathrm{tg}^2\psi} = \frac{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}}{\cos\psi} = \frac{\Delta(\psi,k')}{\cos\psi}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\cos\psi} \qquad \partial\varphi = \frac{i\,\partial\psi}{\cos\psi}$$

also $$\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\Delta\varphi} = i\int_0^\psi \frac{\partial\psi}{\Delta(\psi,k')}.$$

Setzen wir also
$$\int_0^\psi \frac{\partial\psi}{\Delta(\psi k')} = u \text{ d.h. } \psi = am(u,k') \text{ so folgt}$$
$$\varphi = am(iu,k).$$

Also:

$$\left.\begin{aligned} sn(iu,k) &= i\,\mathrm{tg}\,am(u k') \\ cn(iu,k) &= \frac{1}{cn(u,k')} \\ dn(iu,k) &= \frac{dn(uk')}{cn(uk')} \end{aligned}\right\}$$

$\mathrm{tg}(iu,k) = i\,sn(u,k')$. $\quad dn\,coam(iu,k) = k'\,sn\,coam(uk')$

$sn\,coam(iu,k) = \dfrac{1}{dn(u,k')}$ $\quad cn\,coam(iu,k) = i\dfrac{k'}{k}\cos coam(iuk)$

In diesen Gl. liegt der Beweis [illegible] bestätigt. Sie müssen daher natürlich unverändert, wenn man u in $4iK'$ $\left(K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi k')}\right)$ verwandelt, [illegible] auch [illegible]. Dieses gäbe die Relationen:

$$\mathrm{sn}(iu \pm 4iK') = \mathrm{sn}(iu).$$
$$\mathrm{cn}(iu \pm 4iK') = \mathrm{cn}(iu)$$
$$\mathrm{dn}(iu \pm 4iK') = \mathrm{dn}(iu)$$ oder wenn wir für iu: u setzen:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{sn}(u \pm 4iK') &= \mathrm{sn}(u) \\ \mathrm{cn}(u \pm 4iK') &= \mathrm{cn}(u) \\ \mathrm{dn}(u \pm 4iK') &= \mathrm{dn}(u) \end{aligned}\right\}$$

Unter Benutzung der oben aufgestellten Gl. ergiebt sich genau ebenso:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{sn}(u \pm 2iK') &= + \mathrm{sn}\, u. \\ \mathrm{cn}(u \pm 2iK') &= - \mathrm{cn}\, u. \\ \mathrm{dn}(u \pm 2iK') &= - \mathrm{dn}\, u \end{aligned}\right\}$$

Mithin ergeben sich als kleinste Perioden

für $\sin u$	—	$4K$	$2iK'$
$\mathrm{cn}\, u$	—	$4K$	$2K + 2iK'$
$\mathrm{dn}\, u$	—	$2K$	$4iK'$
$\mathrm{tgam}\, u$	—	$2K$	$4iK'$

Analytische Transformationen der ell. Fkt.

Es wurde früher gezeigt, dass eine rationale Transformation von der Form

$$\alpha)\quad y = \frac{U}{V}$$ wo U u. V ganze Fkt. von x sind von elliptischen

Normaldifferentialen in y in ein anderes in x überführt, so dass

$$\beta)\quad \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

wenn die Coefficienten von U u. V so bestimmt werden, dass

$$C\quad \left.\begin{array}{ll} (\alpha) & V + U = (1+x)\,A^2 \\ (\beta) & V - U = (1-x)\,B^2 \\ (\gamma) & V + \lambda U = (1+kx)\,C^2 \\ (\delta) & V - \lambda U = (1-kx)\,D^2 \end{array}\right\}$$

wo $A\,B\,C\,D$ ganze Polynome von x bedeuten.

Setzen wir $\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = u$, so folgt:

$$x = sn(u,k)$$

$$y = sn\left(\frac{u}{M},\lambda\right).$$

d. h. es muss sich also $sn\left(\frac{u}{M},\lambda\right)$ als rationale Fkt. von $sn(u,k)$ ausdrücken lassen.

Anmerkung

Wir wollen im Sommersem. die Bezeichnung gebrauchen

$\sin coam\, u = sn\, u$, $\cos coam\, u = cn\, u$, $\Delta coam\, u = dn\, u$.

$tg\, am\, u = tn\, u$ etc. —

Wir wollen nun wirkliche Ausdrücke für U und V aufstellen, welche eine solche Transformation bewirken.

Sei n eine beliebige ungerade Zahl, m und m' zwei ganze Zahlen, die nur der Bedingung unterliegen, dass sie keinen gemeinschaftlichen Theiler haben sollen, der zugleich Theiler von n ist. Man setze nun

$$\frac{mK+m'iK'}{n}=\omega$$

und behaupten, dass durch:

$$\text{I}\quad U=\frac{x}{M}\left(1-\frac{x^2}{sn^2 4\omega}\right)\left(1-\frac{x^2}{sn^2 8\omega}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{sn^2 2(n-1)\omega}\right)$$

$$\text{II}\quad V=\left(1-k^2x^2sn^2 4\omega\right)\left(1-k^2x^2sn^2 8\omega\right)\cdots\left(1-k^2x^2sn^2 2(n-1)\omega\right)$$

$y=\frac{U}{V}$ übergeht

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2y^2)}}\quad\text{in}\quad\frac{1}{M}\frac{dx}{\sqrt{R(x)}_k}$$

wobei:

$$\text{III}\quad\begin{cases}\lambda=k^n\left\{sn\,4\omega\cdot sn\,8\omega\ldots sn\,2(n-1)\omega\right\}^4\\ M=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left\{\dfrac{\overline{sn}\,4\omega\;\overline{sn}\,8\omega\ldots\overline{sn}\,2(n-1)\omega}{sn\,4\omega\;sn\,8\omega\ldots sn\,2(n-1)\omega}\right\}^2\end{cases}$$

ferner bezeichnet

$$\text{IV}\quad\begin{cases}\alpha)\ A=\left(1+\dfrac{x}{sn\,4\omega}\right)\left(1+\dfrac{x}{sn\,8\omega}\right)\cdots\left(1+\dfrac{x}{sn\,2(n-1)\omega}\right)\\ \beta)\ B=\left(1-\dfrac{x}{sn\,4\omega}\right)\left(1-\dfrac{x}{sn\,8\omega}\right)\cdots\left(1-\dfrac{x}{sn\,2(n-1)\omega}\right).\\ \gamma)\ C=(1+kx\,sn\,4\omega)(1+kx\,sn\,8\omega)\cdots(1+kx\,sn\,2(n-1)\omega)\\ \delta)\ D=(1-kx\,sn\,4\omega)(1-kx\,sn\,8\omega)\cdots(1-kx\,sn\,2(n-1)\omega).\end{cases}$$

Zunächst ist klar, dass U eine ungerade Fct. des n^{ten} Grades
V " gerade des $n-1^{ten}$ Grades ist.

Weiter wird leicht zu verificiren, dass:

$$\left(\frac{U}{V}\right)_{\frac{1}{kx}}=\frac{1}{\lambda}\frac{V}{U}\ \text{ist,}$$

so darf man nämlich der Gl. C befriedigt werden, und genau dasselbe mit der Gl.

β) $\underline{V - \mathfrak{U} = (1-x)\,\mathfrak{B}^2}$.

Wir wollen den bemerkten Richtigkeit so fassen, daß wir für V und B die aufgestellten Ausdrücke einführen und dann zeigen, daß U der übrige Term wird.

Ist $\frac{\mathfrak{U}}{V} = \eta$, so erhält:

$$(\beta)\quad 1-\eta = (1-x)\frac{\mathfrak{B}^2}{V} \quad \text{oder}$$

$$\mathrm{V}_a \quad 1-\eta = (1-x)\frac{\left[\left(1-\frac{x}{\overline{sn}\,4\omega}\right)\left(1-\frac{x}{\overline{sn}\,8\omega}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{\overline{sn}\,2(n-1)\omega}\right)\right]^2}{(1-k^2x^2\,\overline{sn}^2 4\omega)(1-k^2x^2\,\overline{sn}^2 8\omega)\cdots(1-k^2x^2\,\overline{sn}^2 2(n-1)\omega)}$$

Diese Gl. muß zunächst bewiesen werden.

Wir fanden:

$$[1 \pm sn(u+\alpha)][1 \pm sn(u-\alpha)] = \frac{(cn\alpha \pm sn\,u.\,dn\alpha)^2}{1-k^2 sn^2 u\, sn^2\alpha}$$

$$\frac{[1 \pm sn(u+\alpha)][1 \pm sn(u-\alpha)]}{cn^2\alpha} = \left[\frac{1 \pm \frac{sn\,u.\,dn\alpha}{cn\alpha}}{1-k^2 sn^2 u.\,sn^2\alpha}\right]^2$$

Da aber $\overline{sn}\,\alpha = \frac{cn\alpha}{dn\alpha}$ so folgt: wenn man $sn\,u = x$ setzt:

$$\left(\frac{1-\frac{x}{\overline{sn}\alpha}}{1-k^2x^2\,\overline{sn}^2\alpha}\right)^2 = \frac{(1-sn(u+\alpha))(1-sn(u-\alpha))}{cn^2\alpha} = \frac{(1-sn(u+\alpha))(1-sn(u+4n\omega-\alpha))}{cn^2\alpha}$$

da $4n\omega$ eine Periode ist, wenn sie alle Zeichen ändern können.

Verbindet man die beiden Seiten, die Terme der Ausdrücke in V_a folgen mit den für α der Reihe nach die Werte:

$$4\omega,\ 8\omega \ldots\ 2(n-1)\omega$$

so ergibt sich:

$$\text{V}_6)\quad 1-y=\frac{(1-\operatorname{sn} u)(1-\operatorname{sn}(u+4\omega))\cdots\cdots(1-\operatorname{sn}(u+4(n-1)\omega))}{[\operatorname{cn} 4\omega\ \operatorname{cn} 8\omega \ldots \operatorname{cn} 2(n-1)\omega]^2},$$

Um die Form von u hervortreten zu lassen, setzen wir in dieser Gl. $u=0$.

$$(1-y)_{u=0}=\frac{(1-\operatorname{sn} 4\omega)(1-\operatorname{sn} 8\omega)\cdots(1-\operatorname{sn} 4(n-1)\omega)}{[\operatorname{cn} 4\omega.\operatorname{cn} 8\omega \ldots \operatorname{cn}^2(n-1)\omega]^2}.$$

Aber:

$$-\operatorname{sn} 4(n-1)\omega = \operatorname{sn} 4\omega.$$

$$-\operatorname{sn} 4(n-2)\omega = \operatorname{sn} 8\omega$$

$$\vdots$$

$$-\operatorname{sn} 2(n+1)\omega = \operatorname{sn} 2(n-1)\omega.$$

Also:

$$(1-\operatorname{sn} 4\omega)(1-\operatorname{sn} 4(n-1)\omega) = 1-\operatorname{sn}^2 4\omega = \operatorname{cn}^2 4\omega$$

$$\vdots$$

$$(1-\operatorname{sn} 2(n-1)\omega)(1-\operatorname{sn} 2(n+1)\omega) = 1-\operatorname{sn}^2 2(n-1)\omega = \operatorname{cn}^2 2(n-1)\omega$$

Demnach folgt:

$$(1-y)_{u=0}=1.\ \text{d.h.}$$

$$\underline{(y)_{u=0}=0.}$$

Nun wird aber die rechte Seite der Gl. V_6 offenbar nicht verändert, wenn man für u: $u+p\,4\omega$ setzt, da dann die Glieder nur in einer anderen Reihenfolge erscheinen.

Folglich muss y für alle u der Form verschwinden:

$$0,\ 4\omega,\ 8\omega \ldots\ 4(n-2)\omega\ \ 4(n-1)\omega.\ \text{u.s.f.}$$

wenn $x=\operatorname{sn} u$ die Werthe:

$$0\ \operatorname{sn} 4\omega,\ \operatorname{sn} 8\omega \ldots\ \operatorname{sn} 4(n-2)\omega\ \ \operatorname{sn} 4(n-1)\omega.\ \text{oder}$$

da $\sin 4(n-1)\omega = -\sin 4\omega$ rc.

$$0 \pm \sin 4\omega \pm \sin 8\omega \ldots \pm \sin 2(n-1)\omega.$$

da aber

$$\pm \sin 2k\omega = \pm \sin[2n\omega - 2k\omega] = \pm \sin 2(n-k)\omega.$$

$$\vdots$$

$$\pm \sin(2k+2)\omega = \pm \sin[2n\omega - 4k\omega - 2\omega] = \sin 2[n-2(k+1)]\omega$$

so können wir auch die Werthe nehmen:

$$0 \pm \sin 2\omega \pm \sin 4\omega \ldots \pm \sin(n-1)\omega.$$

Es sind daher also n Werthe von x, für die y Werthe annimmt [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible].

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] IV [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]:

$$\sqrt{n}\,\mathfrak{A} = \frac{x}{M}\left(1-\frac{x^2}{\sin^2 4\omega}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{\sin^2 2(n-1)\omega}\right)$$

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. –

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible].

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible], dass für $x = 1$, [illegible] $y = 1$ [illegible] [illegible] $y = 1$ [illegible] $\frac{2K}{n}$.

[illegible]:

$$1 = \frac{\left(1-\frac{1}{\sin^2 2\omega}\right)\left(1-\frac{1}{\sin^2 4\omega}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\sin^2(n-1)\omega}\right)}{M\left(1-k^2\sin^2 2\omega\right)\cdots\left(1-k^2\sin(n-1)\omega\right)}$$

Aber: $\dfrac{1-\frac{1}{\sin^2 2\omega}}{1-k^2\sin^2 2\omega} = -\dfrac{\cos^2 2\omega}{\sin^2 2\omega\,\Delta^2 2\omega}$ etc. $= -\dfrac{\frac{\cos^2(2\omega)}{\Delta\omega^2}}{\sin^2\omega} = -\dfrac{\cos^2\omega}{\sin^2\omega}.$

Also:

$$\text{VIII} \quad M = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\{\sin^2 2\omega \sin^2 4\omega \dots \sin^2(n-1)\omega\}^2}{\{\sin 2\omega' \cdot \sin 4\omega' \dots \sin(n-1)\omega'\}^2}$$

Es ist hierdurch gezeigt, daß U und V die angegebene Form haben, [illegible] ist [illegible] wird; daraus folgt nun leicht, daß auch $\frac{1}{y}$ bestimmt werden [illegible] die angegebene Form haben, da es der gegebenen Gleichung für $x : -x$ genügt.

Es bleibt zu untersuchen, daß:

$$\left(\frac{U}{V}\right)_{\frac{1}{kx}} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{V}{U}\right) \text{ wenn } \lambda \text{ die oben angegebene Bedeutung}$$

hat.

Es ist nämlich $\left(U\right)_{\frac{1}{kx}} = \frac{1}{Mkx}\left(1-\frac{1}{k^2x^2\sin^2 2\omega}\right)\left(1-\frac{1}{k^2x^2\sin^2 4\omega}\right)\dots\left(1-\frac{1}{k^2x^2\sin^2(n-1)\omega}\right)$

$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{V}{k^n x^n}\,\frac{1}{\{\sin 2\omega \cdot \sin 4\omega \dots \sin(n-1)\omega\}^2}.$$

Ferner:

$$(V)_{\frac{1}{kx}} = \left(1-\frac{\sin^2 2\omega}{x^2}\right)\dots\left(1-\frac{\sin^2(n-1)\omega}{x^2}\right) =$$

$$\frac{\{\sin 2\omega \cdot \sin 4\omega \dots \sin(n-1)\omega\}^2}{x^{n-1}}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(1-\frac{x^2}{\sin^2 2\omega}\right)\dots$$

$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{U M}{x}(\sin 2\omega \cdot \sin 4\omega \dots \sin(n-1)\omega)^2.$$

Also:

$$\left(\frac{U}{V}\right)_{\frac{1}{kx}} = \frac{V}{U}\,\frac{1}{M^2 k^n\{\sin 2\omega \cdot \sin 4\omega \dots \sin(n-1)\omega\}^4}$$

Also wenn

$$\text{IX} \quad \lambda = M^2 k^n\{\sin 2\omega \dots \sin(n-1)\omega\}^4 \text{ d. h.} = (\text{nach VIII})$$

$$k^n\{\sin^2 2\omega \cdot \sin^2 4\omega \dots \sin^2(n-1)\omega\}^4 \text{ gesetzt wird:}$$

$$\text{X} \quad \left(\frac{U}{V}\right)_{\frac{1}{kx}} = \frac{1}{\lambda}\,\frac{V}{U}.$$

Es bleibt nun noch übrig, die Constanten M' u. D zu bestimmen.

Nach Ia u. Xa:

$$\left(1-\frac{1}{\lambda y}\right) = \left(1-\frac{1}{kx}\right)\frac{\left\{\left(1-\frac{1}{kx\,\mathrm{sn}\,4a}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{kx\,\mathrm{sn}\,2(n-1)a}\right)\right\}^2}{\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 4a}{x^2}\right)\cdots\left(1-\frac{\mathrm{sn}^2 2(n-1)a}{x^2}\right)}$$

$$(1-\lambda y) = \frac{\lambda y\,(1-kx)}{kx}\,\frac{1}{k^{n-1}}\,\frac{1}{\{\mathrm{sn}\,4a\cdots\mathrm{sn}\,2(n-1)a\}^2}\,\frac{1}{\{\mathrm{sn}\,4a\cdots\mathrm{sn}\,2(n-1)a\}^2}\,\frac{\prod\limits_{g=1,2,\ldots,n-1}(1-kx\,\mathrm{sn}\,2ga)^2}{\prod\limits_{g}\left(1-\frac{x^2}{\mathrm{sn}^2 2ga}\right)}(-1)$$

$$= \frac{\lambda\mathfrak{A}}{v}(1-kx)\frac{M}{\lambda}\,\frac{\prod\limits_{g=1,2,\ldots}(1-kx\,\mathrm{sn}\,2ga)^2}{\prod\limits_{g}\left(1-\frac{x^2}{\mathrm{sn}^2 2ga}\right)} = \frac{\mathfrak{A}}{v}(1-kx)\,\frac{\prod(1-kx\,\mathrm{sn}\,2ga)}{\mathfrak{A}}$$

Also:

$$1-\lambda y = (1-kx)\frac{\left\{(1-kx\,\mathrm{sn}\,4a)\cdots(1-kx\,\mathrm{sn}\,2(n-1)a)\right\}^2}{v}$$

d. h. $=(1-kx)\frac{\mathfrak{D}^2}{v}$ wo D seine Bedeutung hat.

Daß dann auch C die verlangte Gestalt hat, ist klar.

Es werden also die nöthigen Substitutionen:

$$y = \frac{\mathfrak{A}}{v} = \frac{x}{M}\,\frac{\prod\limits_{g=1,2,\ldots,n-1}\left(1-\frac{x^2}{\mathrm{sn}^2 2ga}\right)}{\prod\limits_{1}^{g=1,2,\ldots}\left(1-k^2x^2\,\mathrm{sn}^2 2ga\right)}$$

Allen Bedingungsgl. erfüllt und daher wird

$$\frac{dy}{\sqrt{R(y)}_\lambda} = \frac{dx}{M'\sqrt{R(x)}_k}$$

Noch ist aber M' zu bestimmen.

$$M' = \frac{ABCD}{v\frac{d\mathfrak{A}}{dx} - \mathfrak{A}\frac{dv}{dx}}$$

Man müßte M' erhalten, wenn man die [illegible] Glieder [illegible] [illegible] über die Zahlen ist dieselbe 1, [illegible] Also:

$$M' = M$$

Hiermit ist außerdem gezeigt, dass wenn

$$y = \frac{U}{V} \text{ wird:}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Wir wollen hieraus die Relationen für die ell. Fkt. herleiten.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = u. \quad \int \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} = \frac{u}{M}$$

Dann folgt unmittelbar:

$$sn\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = \frac{\frac{sn\,u}{M}\left(1 - \frac{sn^2u}{sn^2 4\omega}\right)\left(1 - \frac{sn^2u}{sn^2 8\omega}\right)\cdots\left(1 - \frac{sn^2u}{sn^2 2(n-1)\omega}\right)}{(1 - k^2 sn^2u\, sn^2 4\omega)\cdots\cdots(1 - k^2 sn^2u\, sn^2 2(n-1)\omega)}.$$

Oder da

$$\frac{1 - \frac{sn^2u}{sn^2\alpha}}{1 - k^2 sn^2u\, sn^2\alpha} = -\frac{sn(u+\alpha)\, sn(u-\alpha)}{sn^2\alpha}.$$

$$sn\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = \frac{sn\,u.\ sn(u+4\omega)\cdots\cdots sn(u+4(n-1)\omega)}{M\{sn\,4\omega\ sn\,8\omega\ldots\ sn\,2(n-1)\omega\}^2}.$$

Da aber

$$M = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{[sn\,4\omega.\ sn\,8\omega\ldots\ sn\,2(n-1)\omega]^2}{\{cn\,4\omega.\ cn\,8\omega\ldots\ cn\,2(n-1)\omega\}^2}$$

und da $\lambda = k^n\{sn\,2\omega.\ sn\,4\omega\ldots\ sn(n-1)\omega\}^4$ so folgt:

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} M\{sn\,4\omega)\, sn\,8\omega\ldots\ sn\,2(n-1)\omega\}^2 = \sqrt{\frac{\lambda}{k^n}}.$$

Also:

$$1)\quad sn\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = \sqrt{\frac{k^n}{\lambda}}\, sn\,u\ sn(u+4\omega)\ldots\ sn(u+4(n-1)\omega)$$

Ferner:

$$cn\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = \sqrt{1-y^2}$$

Es war: $1-y = \dfrac{(1-sn\,u)(1-sn(u+4\omega))\cdots\cdots(1-sn(u+4(n-1)\omega))}{\{cn\,4\omega.\ cn\,8\omega\ldots\ cn\,2(n-1)\omega\}^2}$ also:

$$1+y = \frac{(1+\mathrm{cn}\,u)(1+\mathrm{cn}(u+4\omega))\cdots(1+\mathrm{cn}(u+4(n-1)\omega))}{\{\mathrm{cn}\,4\omega.\,\mathrm{cn}\,8\omega\cdots\mathrm{cn}\,2(n-1)\omega\}^2}$$

Also:

$$1-y^2 = \frac{\mathrm{cn}^2 u.\,\mathrm{cn}^2(u+4\omega)\cdots\mathrm{cn}^2(u+4(n-1)\omega)}{\{\mathrm{cn}\,4\omega.\,\mathrm{cn}\,8\omega\cdots\mathrm{cn}\,2(n-1)\omega\}^4}$$

Also:

$$\mathrm{cn}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \frac{\mathrm{cn}\,u.\,\mathrm{cn}(u+4\omega)\cdots\mathrm{cn}(u+4(n-1)\omega)}{\{\mathrm{cn}\,4\omega.\,\mathrm{cn}\,8\omega\cdots\mathrm{cn}\,2(n-1)\omega\}^2}.$$

Durch Einführung des complementären Moduls kann dies Resultat vereinfacht werden.

$$1+\lambda y = (1+\kappa x)\frac{C^2}{V}$$

$$1-\lambda y = (1-\kappa x)\frac{D^2}{V}$$

$$(1-\lambda^2 y^2) = (1-\kappa^2 x^2)\frac{C^2 D^2}{V^2}$$

$x=1$ $y=1$ u.s.w. wenn man die Transformationsgleichung ...

$$\lambda' = \kappa'\left[\frac{C.D.}{V}\right]_{x=1}$$

$$\left(\frac{C.D.}{V}\right)_{x=1} = \frac{(1-\kappa^2\mathrm{sn}^2 4\omega)\cdots(1-\kappa^2\mathrm{sn}^2 2(n-1)\omega)}{1-\kappa^2\mathrm{sn}^2 4\omega\cdots(1-\kappa^2\mathrm{sn}^2 2(n-1)\omega)} = \frac{(1-\kappa^2\mathrm{sn}^2 4\omega)\cdots(1-\kappa^2\mathrm{sn}^2 2(n-1)\omega)}{\mathrm{dn}^2 4\omega.\,\mathrm{dn}^2 8\omega\cdots\mathrm{dn}^2(n-1)\omega} =$$

$$\left[\frac{\mathrm{dn}\,4\omega.\,\mathrm{dn}\,8\omega\cdots\mathrm{dn}\,2(n-1)\omega}{\mathrm{dn}\,4\omega\cdots\mathrm{dn}\,2(n-1)\omega}\right]^2$$ Da ferner $\mathrm{dn}\,\omega = \frac{\kappa'}{\mathrm{dn}\,\omega_1}$, so folgt:

$$\left(\frac{C.D.}{V}\right)_{x=1} = \frac{\kappa'^{\,n-1}}{(\mathrm{dn}\,4\omega\cdots\mathrm{dn}\,2(n-1)\omega)^4}.$$

Ferner wird daher:

$$\lambda_1 = \frac{\kappa'^{\,n}}{[\mathrm{dn}\,4\omega\cdots\mathrm{dn}\,2(n-1)\omega]^4}$$ wird:

$$\frac{\lambda\kappa'^{\,n}}{\lambda_1\kappa^n} = \left[\frac{\mathrm{sn}\,4\omega\cdots\mathrm{sn}\,2(n-1)\omega}{\cancel{\mathrm{dn}\,4\omega}}\right]^4\left[\mathrm{dn}\,4\omega.\,\mathrm{dn}\,8\omega\cdots\mathrm{dn}\,2(n-1)\omega\right]^4 = \left[\mathrm{cn}\,4\omega\cdots\mathrm{cn}\,2(n-1)\omega\right]^4$$

Also:

$$2)\quad \mathrm{cn}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \sqrt{\frac{\lambda'\kappa^n}{\lambda\kappa'^{\,n}}}\;\mathrm{cn}\,u.\,\mathrm{cn}(u+4\omega)\cdots\mathrm{cn}(u+4(n-1)\omega)$$

Demnach ergiebt sich:

$$3)\quad \mathrm{sn}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \sqrt{\frac{k^n}{\lambda}}\,\mathrm{sn}\,u\,.\,\mathrm{sn}(u+4\omega)\ldots\mathrm{sn}(u+4(n-1)\omega)$$

Ferner war:

$$\mathrm{dn}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \sqrt{1-\lambda^2y^2}$$

$$(1-\lambda y) = \frac{(1-kx)\left(1-kx\,\mathrm{sn}\,4\omega\right)^2\ldots\left(1-kx\,\mathrm{sn}\,2(n-1)\omega\right)^2}{V}$$

$$(1+\lambda y) = \frac{(1+kx)\left(1+kx\,\mathrm{sn}\,4\omega\right)^2\ldots\left(1+kx\,\mathrm{sn}\,2(n-1)\omega\right)^2}{V}.$$

Verwandeln wir jetzt mit Hülfe der Formel:

$$\frac{(1\pm kx\,\mathrm{sn}\,a)^2}{1-k^2x^2\mathrm{sn}^2a} = \frac{(1\pm k\,\mathrm{sn}(u+a))(1\pm k\,\mathrm{sn}(u-a))}{\mathrm{dn}^2a}$$ so wird:

$$\mathrm{dn}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \frac{\mathrm{dn}\,u\,.\,\mathrm{dn}(u+4\omega)\ldots\mathrm{dn}(u+4(n-1)\omega)}{\left\{\mathrm{dn}\,4\omega\,.\,\mathrm{dn}\,8\omega\ldots\mathrm{dn}\,2(n-1)\omega\right\}^2}$$

Oder

$$4)\quad \mathrm{dn}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \sqrt{\frac{\lambda'}{k'^n}}\,\mathrm{dn}\,u\,.\,\mathrm{dn}(u+4\omega)\ldots\mathrm{dn}(u+4(n-1)\omega)$$

Nun können wir die erhaltenen Multiplicationsformeln

$$5)\begin{cases}\mathrm{sn}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \sqrt{\frac{k^n}{\lambda}}\prod_0^{n-1}\mathrm{sn}(u+4s\omega)\,; & \mathrm{cn}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \sqrt{\frac{\lambda'k^n}{\lambda k'^n}}\prod_0^{n-1}\mathrm{cn}(u+4s\omega)\\ \mathrm{dn}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \sqrt{\frac{\lambda'}{k'^n}}\prod_0^{n-1}\mathrm{dn}(u+4s\omega)\,; & \mathrm{sn}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \sqrt{\frac{k^n}{\lambda}}\prod_0^{n-1}\mathrm{sn}(u+4s\omega)\,.\end{cases}$$

Es lassen sich diese Grössen mittelst [illegible] darstellen.

Wir fanden:

$$y = sn\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = \frac{x}{M} \frac{\prod_1^{\frac{n-1}{2}} 1 - \frac{x^2}{sn^2 2s\omega}}{\prod_1^{\frac{n-1}{2}} 1 - k^2 x^2 sn^2 2s\omega} =$$

$$\frac{x}{M} \frac{1}{k^{n-1} \prod_1^{\frac{n-1}{2}} (sn\, 2s\omega)^4} \frac{\prod_1^{\frac{n-1}{2}} x^2 - sn^2 2s\omega}{\prod_1^{\frac{n-1}{2}} x^2 - \frac{1}{k^2 sn^2 2s\omega}}$$ [illegible]

Ferner: $\prod_1^{\frac{n-1}{2}} (sn\, 2s\omega)^2 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\sqrt{M}} \sqrt{\frac{\lambda}{k^n}}$.

Also $M \prod (sn\, 2s\omega)^4 = \frac{\lambda}{M k^n}$

Also:

$$sn\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = \frac{M k}{\lambda}\, x \frac{\prod_1^{\frac{n-1}{2}} x^2 - sn^2 2s\omega}{\prod_1^{\frac{n-1}{2}} x^2 - \frac{1}{k^2 sn^2 2s\omega}}$$

Also:

$$x \prod_1^{\frac{n-1}{2}} (x^2 - sn^2 2s\omega) - \frac{\lambda}{M k}\, sn\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \left(x^2 - \frac{1}{k^2 sn^2 2s\omega}\right) = 0.$$

diese Gleichung [illegible] befriedigt für $x = sn(u + 4p\omega)$ $p = 0, 4, 8, \ldots 4(n-1)$. [illegible]

Also folgt:

$$6)\quad \frac{\lambda}{M k}\, sn\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = sn\, u + \sum_1^{\frac{n-1}{2}} \{sn(u + 4r\omega) + sn(u - 4r\omega)\}$$

oder $\sum = \sum_0 sn(u + 4r\omega)$

Bedenken wir nun, dass:

$$cn\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = z \frac{\prod_1^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{x^2}{sn^2 2s\omega}\right)}{\prod_1^{\frac{n-1}{2}} (1 - k^2 x^2 sn^2 2s\omega)}$$ wenn $z = cn\, u$ [illegible]

ebenso:

$$(7)\quad (-1)^{\frac{n-1}{2}}\,\frac{\lambda}{M\kappa}\,\mathrm{cn}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \mathrm{cn}\,u + \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \left\{\mathrm{cn}(u+4r\omega) + \mathrm{cn}(u-4r\omega)\right\}$$

Ferner:

$$(8)\quad (-1)^{\frac{n-1}{2}}\,\frac{1}{M}\,\mathrm{dn}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \mathrm{dn}\,u + \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \left\{\mathrm{dn}(u+4r\omega) + \mathrm{dn}(u-4r\omega)\right\}$$

$$9)\quad \frac{\lambda'}{M\kappa'}\,\mathrm{tn}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \mathrm{tn}\,u + \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \left\{\mathrm{tn}(u+4r\omega) + \mathrm{tn}(u-4r\omega)\right\}$$

Mit Hülfe der Additionsformeln für die [illegible] allgemeinen Abh. können diese Gl. auch in die Form gebracht werden.

$$10)\quad \frac{\lambda}{M\kappa}\,\mathrm{sn}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \mathrm{sn}\,u + \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{2\,\mathrm{cn}\,4r\omega\,.\,\mathrm{dn}\,4r\omega\,.\,\mathrm{sn}\,u}{1-\kappa^2\,\mathrm{sn}^2 4r\omega\,\mathrm{sn}^2 u}$$

$$11)\quad (-1)^{\frac{n-1}{2}}\,\frac{\lambda}{M\kappa}\,\mathrm{cn}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \mathrm{cn}\,u + \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{2\,\mathrm{cn}\,4r\omega\,.\,\mathrm{cn}\,u}{1-\kappa^2\,\mathrm{sn}^2 4r\omega\,\mathrm{sn}^2 u}$$

$$12)\quad (-1)^{\frac{n-1}{2}}\,\frac{1}{M}\,\mathrm{dn}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \mathrm{dn}\,u + \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{2\,\mathrm{dn}\,4r\omega\;\mathrm{dn}\,u}{1-\kappa^2\,\mathrm{sn}^2 4r\omega\,\mathrm{sn}^2 u}$$

$$13)\quad \frac{\lambda'}{M\kappa'}\,\mathrm{tn}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \mathrm{tn}\,u + \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{2\,\mathrm{dn}^2 4r\omega\,.\,\mathrm{sn}\,u\,.\,\mathrm{cn}\,u}{1-\kappa^2\,\mathrm{sn}^2 4r\omega\,\mathrm{sn}^2 u}$$

Von den andern Haupttransformationen.

Es war $\omega = \dfrac{mK + m'iK'}{n}$

In den beiden Fällen, in denen

1) $m = 1, \; m' = 0$

2) $m = 0, \; m' = 1$ } gehören die beiden fundamentalen Haupttransformationen.

Für die erste ist:

1) $\lambda = k^n \left\{ sn\frac{4K}{n}\; sn\frac{8K}{n} \dots sn\frac{2(n-1)K}{n} \right\}^4$

2) $\lambda' = \dfrac{k'^n}{\left\{ dn\frac{4K}{n}\; dn\frac{8K}{n} \dots dn\frac{2(n-1)K}{n} \right\}^4}$

3) $M = \left(\dfrac{sn\frac{2K}{n} \cdot sn\frac{4K}{n} \dots sn\frac{2(n-1)K}{n}}{sn\frac{2K}{n} \cdot sn\frac{4K}{n} \dots sn\frac{(n-1)K}{n}} \right)^2 (-1)^{\frac{n-1}{2}}$

4) $sn\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\frac{k^n}{\lambda}}\; sn\, u \cdot sn\left(u + \frac{4K}{n}\right) \dots sn\left(u + \frac{4(n-1)K}{n}\right)$

ebenso:

Für die zweite wird, wenn wir die Zeichen einführen:

5) $\lambda_1 = k^n \left\{ sn\frac{4iK'}{n} \dots sn\frac{2(n-1)iK'}{n} \right\}^4$

6) $\lambda_1' = \dfrac{k'^n}{\left\{ dn\frac{4iK'}{n}\; dn\frac{8iK'}{n} \dots dn\frac{2(n-1)iK'}{n} \right\}^4}$

7) $M_1 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left\{ \dfrac{sn\frac{2iK'}{n} \dots sn\frac{(n-1)iK'}{n}}{sn\frac{2iK'}{n} \dots sn\frac{(n-1)iK'}{n}} \right\}^2$

8) $sn\left(\frac{u}{M_1}, \lambda_1\right) = \sqrt{\frac{k^n}{\lambda_1}}\; sn\, u \cdot sn\left(u + \frac{4iK'}{n}\right) \dots sn\left(u + \frac{4(n-1)iK'}{n}\right)$

Diese wollen wir einfach, wie folgt einführen:

$$\Lambda = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} \qquad \Lambda' = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda'^2 y^2)}}$$ (1te Hyl. Transf.)

$$\Lambda_1 = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda_1^2 y^2)}} \qquad \Lambda_1' = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{R(y)\lambda_1'}}$$ (2te Hyl. Transform.)

Wenn ist also:

$$\underline{\operatorname{sn}(\Lambda, \lambda) = 1.}$$

$$\underline{\operatorname{sn}(\Lambda_1, \lambda_1) = 1}$$

Setzen wir in Gl. 7) $u = \frac{K}{n}$, so kommt:

$$\operatorname{sn}\left(\frac{K}{Mn}, \lambda\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\frac{k^n}{\lambda}} \operatorname{sn}\frac{K}{n} \operatorname{sn}\frac{5K}{n} \operatorname{sn} \dots \operatorname{sn}\frac{4n-3}{n}K.$$

Aber $\operatorname{sn} u = \operatorname{s\bar{n}}(K-u)$ also:

$$\operatorname{sn}\left(\frac{K}{Mn}, \lambda\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\frac{k^n}{\lambda}} \operatorname{s\bar{n}}\frac{n-1}{n}K \dots \operatorname{s\bar{n}}\frac{(n-(4n-3))K}{n}$$

Da aber: $\operatorname{s\bar{n}}\frac{(n-(4n-1))}{n}K = -\operatorname{sn} - \frac{n+1}{n}K = \operatorname{sn}\frac{n-1}{n}K$

(n aller ungeraden Zahlen)

so kommt:

$$\operatorname{sn}\left(\frac{K}{M_1 n}, \lambda\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left\{\sqrt{\frac{k^n}{\lambda}} \operatorname{s\bar{n}}\frac{n-1}{n}K \dots \operatorname{s\bar{n}}\frac{4K}{n} \operatorname{s\bar{n}}\frac{2K}{n}\right\}^2$$

Aber: $\lambda = k^n \left\{\operatorname{s\bar{n}}\frac{n-1}{n}K \dots \operatorname{s\bar{n}}\frac{2K}{n}\right\}^n$ also

$$\operatorname{sn}\left(\frac{K}{M_1 n}, \lambda\right) = 1 \text{ d.h. also}$$

$$9)\ \Lambda = \frac{K}{M_1 n}$$

Ebenso ergiebt sich aus Gl. 8) dass

$$10)\ \Lambda_1 = \frac{K}{M_1}$$

Ueber die complementären Transformationen

Wir wollen zeigen, dass es zu jeder beliebigen Transformation eines complementären Grades u.s.f. dass sich uns ... unmittelbar eine ... Weise, welche sich mit der allgemeinen ... complementären Moduls ergiebt.

Es war:

$$\operatorname{sn}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)=\sqrt{\frac{k^{n}}{\lambda}}\;\operatorname{sn}u\cdot\operatorname{sn}(u+2\omega)\operatorname{sn}(u+4\omega)\cdots\operatorname{sn}(u+2(n-1)\omega)$$

Setzen wir hierin $u=iu'$; $\omega=i\omega'$. u.s.f.

$$\omega'=\frac{miK-m'K'}{n}$$ so wird:

$$\operatorname{sn}\left(\frac{iu'}{M},\lambda\right)=\sqrt{\frac{k^{n}}{\lambda}}\;\operatorname{sn}iu'\cdot\operatorname{sn}(iu'+2i\omega')\cdots\operatorname{sn}(iu'+2(n-1)i\omega')$$

Nun ist: $\operatorname{sn}(iu',k)=i\operatorname{tn}(u',k')$

$\operatorname{sn}(iu',\lambda)=i\operatorname{tn}(u',\lambda')$.

Also:

1) $$\operatorname{tn}\left(\frac{u'}{M},\lambda'\right)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\operatorname{tn}u'\cdot\operatorname{tn}(u'+2\omega')\cdots\operatorname{tn}(u'+2(n-1)\omega')$$ mod k'

Ferner war: $$\lambda'=\frac{k'^{n}}{\{\operatorname{dn}2\omega\cdots\operatorname{dn}(n-1)\omega\}^{4}}.$$

$$M=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left\{\frac{\overline{\operatorname{sn}}\,2\omega\cdots\overline{\operatorname{sn}}(n-1)\omega}{\operatorname{sn}(2\omega)\cdots\operatorname{sn}(n-1)\omega}\right\}^{2}.$$

$\underline{\omega=i\omega'}$ dann wird:

$$\operatorname{dn}(iu',k)=\frac{\operatorname{dn}(u'k')}{\operatorname{cn}(u',k')}=\frac{1}{\overline{\operatorname{cn}}(u'k')}$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sn}(iu'k)&=i\operatorname{tg}(u'k')\\ \overline{\operatorname{sn}}(iu',k)&=\frac{i}{\operatorname{dn}(u'k')}\end{aligned}\right\}\text{ also: }\frac{\overline{\operatorname{sn}}(iu'k)}{\operatorname{sn}(iu',k)}=\frac{-i}{\operatorname{tg}(u'k)\operatorname{dn}(iu'k')}=-i\frac{\overline{\operatorname{sn}}(u'k')}{\operatorname{sn}(u'k')}$$

Ebenso wird: $\lambda' = k'^n \{\mathrm{sn}\,2a' \cdot \mathrm{sn}\,4a' \cdots \mathrm{sn}\,(n-1)a'\}^4$.

$$M = \frac{\{\mathrm{sn}\,2a' \cdot \mathrm{sn}\,4a' \cdots \mathrm{sn}\,(n-1)a'\}^2_{k'}}{\{\mathrm{sn}\,2a \cdots \mathrm{sn}\,(n-1)a\}^2_{k'}}$$

Vergleicht man diese Formeln mit den früheren, so kommt man zu dem Transformationssatz:

„Alle Formeln, welche für die Transformationen ersten Modulus zwischen ... gelten, gehen in die entsprechenden für die supplementären Transformationen über, sobald man darin k in k', λ in λ' ω in ω' $\left(\omega' = \frac{\omega}{i}\right)$ M in $(-1)^{\frac{n-1}{2}} M$ verwandelt." —

Wir wollen jetzt die beiden supplementären Transformationen untersuchen, welche den beiden Haupttransformationen entsprechen.

Offenbar wird, wenn:

$$\omega = \pm \frac{K}{n} \qquad \omega = \pm \frac{iK'}{n}$$

$$\omega' = \frac{\omega}{i} = \pm \frac{iK}{n}; \quad \omega' = \pm \frac{K'}{n}$$

d. h. der ersten Haupttransformation des Moduls k entspricht die zweite Haupttransformation des Moduls k' u. umgekehrt.

Geht also k in k' so gehen

$$\left.\begin{matrix}\lambda \text{ in } \lambda_1' \\ \lambda_1 \text{ in } \lambda'\end{matrix}\right\} \text{ über u. umgekehrt: } \left.\begin{matrix}M \text{ in } M_1 \\ M_1 \text{ in } M\end{matrix}\right\}.$$

Als Folgerung, wenn es sich aber auch unmittelbar aus 1) ergibt:

$$\Lambda_1' = \frac{K'}{M_1 n} \qquad \Lambda' = \frac{K'}{M}.$$

Also:

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda} = n \frac{K'}{K} \qquad \frac{\Lambda_1'}{\Lambda_1} = \frac{1}{n} \frac{K'}{K}$$