

Министерство высшего и среднего специального образования  
Латвийской ССР  
ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. П. СТУЧКИ

ЯКОВИЧ Андрис Таливалдович

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСРЕДНЁННОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОГО МЕТАЛЛА  
В АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

01.02.05 – механика жидкостей, газа и плазмы

Диссертация на соискание учёной степени кандидата  
физико-математических наук

Научный руководитель:  
к.ф.-м.н., доц. Юрий Янович  
ЛИКЕЛЬСОН

РИГА-1978

СО Д Е Р Ж А Н И Е

	Стр.
1. ВВЕДЕНИЕ .....	9
2. ОБЗОР МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ И МЕТОДОВ РАСЧЁТА АКСИА- ЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ МГД-УСТРОЙСТВ.....	19
2.1. Основные положения МГД жидких металлов .....	19
2.2. Исследования электромагнитного поля и силы .....	25
2.3. Исследования течений .....	38
2.4. Выводы .....	42
3. УТОЧНЁННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АКСИАЛЬНО-СИММЕТ- РИЧНОГО МГД УСТРОЙСТВА .....	44
3.1. Анализ основных допущений .....	44
3.2. Безразмерные уравнения МГД в случае аксиаль- ной симметрии .....	47
3.3. Граничные условия .....	53
4. МЕТОДИКА РАСЧЁТА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И СИЛ .....	57
4.1. Расчёты с помощью несобственного интеграла и по ряду Фурье-Бесселя .....	57
4.2. Применение конечно-разностных методов .....	64
4.3. Сопоставление методов расчёта .....	75
4.4. Результаты расчёта электромагнитных вели- чин .....	80
5. ОПИСАНИЕ ОСРЕДНЁННОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ В ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ .....	99
5.1. Способы описания турбулентности .....	99
5.2. Полуэмпирические формулы и рабочие гипоте- зы для турбулентных напряжений .....	104
5.3. Уравнения центральных моментов второго по- рядка .....	112

5.4. Баланс энергии осреднённого МГД течения в замкнутой области .....	117
6. МЕТОДИКИ РАСЧЁТА СКОРОСТЕЙ .....	120
6.1. Конечно-разностные схемы и методы расчёта движения при постоянном по объёму значении числа Рейнольдса .....	120
6.2. Конечно-разностные схемы для расчёта осреднённого турбулентного течения .....	132
7. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЁТА ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ .....	138
7.1. Характеристика циркуляции жидкого металла в однофазных и многофазных МГД устройствах .....	138
7.2. Результаты применения полуэмпирической теории турбулентности для расчёта поля осреднённых скоростей .....	147
7.3. Влияние безразмерной скорости на течение .....	165
7.4. Влияние геометрии устройства на течение .....	168
7.5. Примеры результатов расчёта конкретных МГД устройств .....	178
8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	187
9. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	195

Основные условные обозначения

- $\vec{A}$  - векторный потенциал магнитного поля (2.25);
- $Al$  - число Альфвена (2.10);
- $A_n, A_s$  - первичный и вторичный потенциалы;
- $A_1, A_2$  - итерационные параметры;
- $a$  - зазор между индуктором и проводником (2.40);
- $\alpha$  - квадратный корень безразмерной частоты (2.28);
- $\vec{B}$  - индукция магнитного поля;
- $b_u$  - полуввысота индуктора;
- $\beta$  - обратная величина магнитной проницаемости;
- $c_i (i=1,4), c_5$  - эмпирические постоянные в уравнении для центральных моментов второго порядка;
- $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$  - границы сеточных областей;
- $q_i$  - шаг разностной сетки по аксиальному направлению;
- $g_0$  - ускорение силы тяжести;
- $q_u$  - толщина обмотки индуктора;
- $\gamma$  - безразмерное волновое число (2.45);
- $\Delta r_p$  - сдвиг поверхности раздела;
- $\Delta', \Delta''$  - заданные погрешности итерационного процесса;
- $\delta$  - толщина скин-слоя (2.29);
- $\vec{E}$  - напряжённость электрического поля;
- $E$  - характеристика турбулентности (5.38);
- $\vec{e}_i$  - единичный вектор;
- $e$  - основание натуральных логарифмов;
- $\vec{\epsilon}$  - ротор плотности силы (2.41);
- $Z_i$  - циркуляция силы (2.37);
- $Z_{ни}, Z_{ву}$  - координаты нижнего и верхнего торцов секции индуктора;
- $Z_{\omega}, Z_{сн}$  - координаты плоскостей симметрии индуктора и металла;

- $r_{1,2}$  - радиусы нижнего и верхнего торцов проводящей области;
- $r_{1,2} = r_{1,2}$  - координаты центров верхнего и нижнего вихрей;
- $r_{1,2} = r_{1,2}$  - координаты максимумов аксиальной составляющей скорости в поверхностном и донном потоках;
- $r_{2,0}$  - координата максимума ротора электромагнитной силы;
- $\xi_{n-1}$  - торсионная  $\psi$  функция плотности вероятности;
- $\vec{H}$  - напряжённость магнитного поля;
- $h_0$  - высота индуктора;
- $h_1$  - высота проводящей области;
- $\alpha$  - шаг разностной сетки в радиальном направлении;
- $\varphi$  - угол между радиальным и тангенциальным направлениями;
- $\vec{I}$  - линейная плотность тока (настил);
- $i$  - поверхностная плотность азимутального тока;
- $e$  - мнимая единица;
- $\vec{j}$  - объёмная плотность тока;
- $\vec{j}_0$  - плотность вращательного безвихревого тока (3.2);
- $k$  - энергетическая энергия турбулентных пульсаций (5.35);
- $\kappa$  - волновое число (2.44);
- $\alpha$  - постоянная Кармана;
- $\Lambda$  - параметр турбулентности (5.41);
- $\lambda$  - длина волны бегущего поля (2.46);
- $\epsilon$  - коэффициент турбулентности;
- $\mu_0$  - вершины и радиусы вылеты индуктора (4.72); (4.73);
- $\mu_1$  - число элементов сетки в аксиальном направлении;
- $\mu_2$  - коэффициент магнитная проницаемость;
- $\mu_3$  - число элементов сетки в радиальном направлении;
- $\mu_4$  - коэффициент турбулентности, турбулентной и эффективной вязкости;

- $\nu_e, \nu_c$  - коэффициенты в полуэмпирических формулах турбулентной вязкости;
- $p$  - давление;
- $\rho$  - объёмная плотность;
- $R$  - обратная величина эффективного числа Рейнольдса (6.20);
- $Re, Re_T, Re_{эф}$  - ламинарное (2.9), турбулентное (5.6) и эффективное (3.22) число Рейнольдса;
- $Re_m$  - магнитное число Рейнольдса (2.7);
- $r_u$  - радиус кольцевого индуктора;
- $r_e$  - радиус магнитного экрана;
- $r_{ve}, r_{vn}$  - координаты центров верхнего и нижнего вихрей;
- $r_p$  - координата поверхности раздела противонаправленных течений;
- $r_T$  - коэффициент в полуэмпирических формулах турбулентной вязкости;
- $r_m$  - координаты максимумов составляющих скорости;
- $S_v$  - коэффициент схемной вязкости;
- $S$  - скольжение;
- $\sigma$  - удельная электропроводность;
- $t$  - время;
- $T$  - полюсный шаг индуктора;
- $T_1, T_2$  - итерационные параметры;
- $T_{ij}$  - тензор турбулентных напряжений (5.5);
- $F_r$  - число Фруда (2.11);
- $\vec{f}$  - объёмная плотность средней электромагнитной силы (2.33);
- $\vec{f}_T$  - плотность турбулентной силы (3.21);
- $\Phi$  - фактор плотности силы (2.39);
- $\Phi_v$  - диссипативная функция Релея (5.19);
- $\varphi$  - скалярный потенциал электрического поля;

- $\vec{v}$  - скорость движения жидкости;
- $v_m$  - максимальное безразмерное значение скорости;
- $v_0^*$  - ориентировочно заданное максимальное значение скорости;
- $v_{zc}, v_{zc}$  - максимальные значения аксиальной составляющей скорости в центральном и в пристеночном потоках;
- $v_{rm}, v_{zm}$  - максимальные значения радиальной и аксиальной составляющих скорости;
- $v_{zq}$  - максимальное значение аксиальной составляющей скорости в донном потоке;
- $v_{rq}, v_{rm}, v_{ru}$  - максимальные значения радиальной составляющей скорости в торцевых и в центральном потоках;
- $\vec{\omega}$  - ротор скорости (2.52);
- $U_1, U_2$  - параметры релаксации;
- $\Psi$  - функция тока Стокса (2.53);
- $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$  - сеточные области;
- $\hat{\omega}$  - безразмерная частота (2.28);
- $\omega$  - циклическая частота;
- $\nabla$  - оператор набла.

Индексация (на примере величины  $\dot{X}$ )

- $X_0$  - характерное значение;
- $\bar{X}$  - осреднённое значение;
- $X'$  - пульсация;
- $\vec{X}$  - вектор;
- $X^*, X_r$  - контравариантные и ковариантные компоненты вектора (аналогично для тензоров);
- $\dot{X}$  - комплексная величина;
- $\dot{X}^*$  - комплексно сопряжённая величина;

$X_R = \operatorname{Re} \dot{X}$ ,  $X_I = \operatorname{Im} \dot{X}$  - коэффициенты действительной и мнимой части комплексной величины;

$X^\circ$  - амплитуда величины (в тексте часто опускается);

$X_r, X_\varphi, X_z$  - проекции на оси в цилиндрической системе координат.

#### Сокращения

МГД - магнитогидродинамика;

ИПП - индукционная плавильная печь;

ЭМ - электромагнитный;

ЭВМ - электронно-вычислительная машина.

## І. В В Е Д Е Н И Е

Принятое в августе 1972 г. Постановление ЦК КПСС "О ходе работ по автоматизации технологических процессов в чёрной металлургии" наметило широкую программу развития металлургии. В связи с этим возник комплекс задач по созданию новых высокопроизводительных, мощных, механизированных и автоматизированных металлургических установок - плавильных печей, кристаллизаторов и др. Наряду с резким увеличением количества выплавленного металла растут требования, предъявляемые к качеству металла - необходимо получить чёрные и цветные металлы высокой степени чистоты, свободные от вредных неметаллических включений и примесей, а также с определённой поликристаллической структурой.

Для успешного решения этих задач - сокращения длительности производственного цикла, автоматизации процессов металлургического производства и улучшения качества выплавленного металла, необходимо исследовать комплекс научно-технических проблем, в том числе необходимо решить проблему управления физико-химическими процессами в жидком металле с помощью разнообразных методов воздействия во всех фазах технологического цикла. Перспективными в этом отношении являются бесконтактные методы воздействия на расплав с помощью электромагнитного поля, которые позволяют создавать в жидком металле силовые и скоростные поля с заданным пространственным и временным распределением. Перспективность электромагнитных (ЭМ) методов воздействия определяется тем, что улучшение качества и сокра-

ценне технологического цикла достигается без соприкасания с высокотемпературной (температуры до 2000<sup>0</sup>С) и агрессивной средой, соприкасание с которой приводит к быстрому износу устройств воздействия, а также к ухудшению результатов плавки [ 1 ]. Кроме того, ЭМ воздействие относительно легко управляемо. Бесконтактные электромагнитные методы широко применяются в металлургических установках - электропечах, миксерах, магнито-гидродинамических (МГД) насосах, лотках, кристаллизаторах, сепараторах и др., в том числе в индукционных плавильных печах (ИПП) [ 1,2,3 ], являющихся одной из разновидностей плавильных печей.

Действием ЭМ поля в металле определяются четыре основных явления:

1) переменное во времени ЭМ поле наводит в проводящих частях устройств и в рабочем теле вихревые токи (токи Фуко), что обуславливает выделение там джоулева тепла и тем самым - нагревание, а также плавление металла;

2) в результате взаимодействия переменного ЭМ поля с наведенными токами в металле возникает ЭМ сила с определенным объёмным распределением. Действие ЭМ силы формирует поверхность и вызывает движение жидкой фазы; характер движения в металле, интенсивность и распределение скоростей зависят от множества факторов [ 3,4 ], большинством из которых можно управлять;

3) электрические и магнитные поля взаимодействуют с потоком электропроводящей жидкости, что может привести к существенным перестроениям в течении;

4) индуцированные вихревые токи, а также конвекционные токи, определяемые движением электропроводной жидкости, являются

ют наложенное внешнее ЭМ поле, т.е. осуществляется обратное воздействие.

Таким образом, ЭМ методами возможно непосредственно влиять на тепловыделение, движение и форму металла в жидком состоянии. Посредством этих явлений ЭМ воздействие распространяется на процессы тепло-массопереноса и на формирование структуры металла, что в конечном счёте приводит к управлению физико-химическими процессами для достижения формулированных ранее технологических целей. Причём, задачи ЭМ воздействия существенно зависят от применяемого устройства, от конкретного этапа технологического цикла и могут иметь противоречивый характер. Можно указать на три основные группы задач по управлению движением:

- 1) ограничение движения,
- 2) усиление движения,
- 3) изменение характера течения и распределения скоростей.

Если первая и вторая группы задач в первом приближении разрешены на основе представления об общем характере процесса в приближённых оценках, то третья группа связана с более глубоким исследованием структуры течения электропроводящей жидкости в ЭМ поле на основе эксперимента или построения теоретических моделей с последующей разработкой методов их количественного расчёта.

Среди всех металлургических установок особое место занимают устройства, обладающие цилиндрической симметрией (плавильные печи, миксеры, МГД-насосы, кристаллизаторы и др.):

- 1) Цилиндрические МГД-устройства широко распространены и несомненно будут быстро развиваться в перспективе.

- 2) Из-за симметрии эти устройства более доступны для ма-

тематического моделирования, но тем не менее позволяет исследовать множество пространственных эффектов, присущих также другим классам МГД-устройств, не обладающих цилиндрической симметрией.

Можно указать на множество проблем общих для практического применения металлургических МГД-установок, здесь коснёмся только некоторых из них, связанных с двойственным (тепловым и силовым) характером воздействия переменного ЭМ поля, созданного индуцирующей системой, на металл:

1) В результате поверхностного эффекта основное количество джоулева тепла выделяется в тонком поверхностном слое проводника, толщина которого определяется безразмерной частотой [ 4 ]. Тепловая конвекция, скорость которой, например, в плавильной печи не превышает 5 см/сек, недостаточно эффективна для выравнивания температуры в объёме металла. Это может привести к перегреву металла в зоне выделения тепла. Однако, скорость движения расплава, создаваемая целенаправленным расположением нагревательного индуктора или дополнительного индуктора, специально предназначенного для перемешивания, может достигнуть значительных величин (до нескольких м/с в промышленных установках) и существенно влиять на выравнивание температуры, гомогенизацию жидкого металла [ 3 ].

2) С другой стороны, интенсивное движение высокотемпературной среды вблизи стенок сосуда, заполненного металлом, имеет и отрицательные стороны:

а) сильно изнашивается тигель, что сокращает срок работы устройства,

б) металл загрязняется, в результате чего ухудшается его качество.

По этой причине очень важно управлять не только абсолютным значением скорости, а также её распределением.

3) В процессе выплавки металла осуществляются различные физико-химические процессы (выделяются примеси, вводятся добавки), направленные на повышение качества. В зависимости от этапа технологического цикла и расположения активной зоны меняются условия, необходимые для оптимального протекания этих процессов. Эти условия, а также скорость протекания физико-химических реакций можно регулировать изменением движения расплава. Например, если свободная поверхность металла в ИШП покрыта шлаком, то для быстрого протекания реакций необходимо с определённой скоростью менять слой металла, соприкасающийся со шлаком, с другой стороны движение расплава не должно нарушать шлаковый покров, что ведёт к окислению и загрязнению металла.

Кроме трёх рассмотренных проблем существует множество других (обжиг и поддержание металла во взвешенном состоянии, регулирование формы мениска, гомогенизация расплава, выделение продуктов реакций, увеличение мощностей установок, охрана окружающей среды и др.), где ЭМ методы воздействия находят успешное применение. Существующие проблемы определяют необходимость исследования ЭМ-поля, вихревых токов, движущей ЭМ силы и особенно - движения расплава в цилиндрических металлургических установках. Теоретические и экспериментальные исследования этих процессов должны привести к лучшему решению задач конструирования широкого класса металлургических устройств и оптимизации протекающих в них процессов.

Из анализа научно-технической литературы следует, что достаточно подробно изучены технологические аспекты плавки и кристаллизации металла с применением ЭМ воздействия [1,2,3,

5 ], накоплен определённый практический опыт и экспериментальные данные, позволяющие давать рекомендации для решения частных проблем. Разработаны инженерные формулы для оценки характеристик ЭМ поля, а также для оценки по порядку величины скорости движения расплава в конкретных устройствах. Разрабатываются экспериментальные и теоретические методы для определения структуры ЭМ поля и поля ЭМ-сил [ 6 ], однако, во многих теоретических исследованиях математическая модель ЭМ процессов в цилиндрических металлургических устройствах сильно упрощена (модель одномерна или квазидвухмерна) и теоретический подход может не отражать существенные стороны процесса. Более сложные модели, приводящие соответственно к более сложным математическим задачам, в свою очередь, страдают тем, что не доведены до конкретных численных результатов, позволяющих давать рекомендации для практического применения. В последние годы много работ посвящено исследованию гидродинамических явлений в жидком металле, где экспериментальные исследования затруднены из-за высокой температуры и агрессивности среды, а также из-за турбулентного характера течения. Если течения в каналах [ 7 ], автомодельные струйные течения [ 8 ] и некоторые другие виды незамкнутых течений в ламинарном, а также в турбулентном режимах теоретически и экспериментально хорошо исследованы, то работы, касающиеся изучения замкнутых турбулентных течений в металлургических установках под воздействием ЭМ поля встречаются более редко [ 3,9 ]. Данное обстоятельство объясняется трудностью эксперимента и сложностью такой математической модели процесса, которая позволила бы исследовать пространственные и временные распределения гидродинамических параметров с точностью, необходимой для применения результатов в таких об-

ластях практики, которые недоступны существенно упрощённым моделям процессов тепло-массо переноса, допускающим аналитическое решение. Применение усложнённых моделей связано с использованием численных методов, влекущих за собой ряд вычислительных трудностей.

Из-за сложности отдельных этапов исследований в настоящее время отсутствуют разработки, охватывающие весь комплекс явлений, начиная от технологии и техники, включая этапы исследования ЭМ, гидродинамических и тепловых явлений, до решения проблемы тепло-массопереноса в целом для конкретных МГД-устройств.

Настоящая работа посвящена исследованию МГД явлений в аксиально-симметричных металлургических устройствах с жидкоталлическим рабочим телом, находящимся в состоянии замкнутого течения (как в ламинарном, так и в турбулентном режимах). На основе двумерной математической модели, учитывающей геометрию и ЭМ-параметры существующих на практике устройств, разрабатывалась численная методика расчёта комплекса МГД величин: ЭМ-поля и сил, вихревых токов, джоулева тепла, осреднённых скоростей движения жидкой фазы. С помощью методики проводились исследования ряда МГД-устройств. При этом необходимо было:

1) Сформулировать уточнённые математические модели процессов, позволяющие передать существенные для практического использования результаты стороны рассматриваемых явлений. Выбор моделей был осуществлён на основе анализа предшествующих исследований.

2) Выбрать и осуществить методику решения нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных, пригодной для практических расчётов в широком диапазоне парамет-

ров процесса. Из-за сложности проблемы пришлось отказаться от попыток определения неизвестных функций в аналитическом виде, а пользоваться численными методами с созданием алгоритмов и программ для ЭВМ.

3) Оценить численные результаты и сопоставить их с экспериментальными данными, что привело к усовершенствованию математического моделирования геометрии системы и описания усреднённого турбулентного течения, а также привело к улучшению численной методики расчёта.

4) Выявить закономерности процессов в конкретных МГД-устройствах и применить результаты расчётов на практике.

Основные трудности в работе возникли при учёте в модели турбулентного характера течения, а также при создании методики и устойчивых численных алгоритмов, пригодных для исследований в широком диапазоне параметров, однако, поставленные ранее задачи удалось решить. Их решение вносит частный вклад в разработку комплексной методики исследований ЭМ-процессов и тепло-массо-обмена в МГД-устройствах, при этом в одно целое объединяются ЭМ и гидродинамические процессы, вне поля зрения оставляя тепловые явления. Практическое применение разработанной методики уже сейчас позволило выявить некоторые характеристики МГД-процессов в ИПШ, расчёты применяются для усовершенствования существующих устройств и конструирования новых с заданным режимом изменения МГД и технологических параметров.

Диссертационная работа состоит из "Введения", шести разделов, "Заключения" и "Списка литературы".

В разделе 2 характеризуются и анализируются научные работы, предшествующие настоящему исследованию, а также делаются вводы по состоянию предмета исследований для формулировки рас-

чётной модели МГД-процессов в классе аксиально-симметричных устройств с замкнутым течением электропроводящей жидкости в плоскости  $r, z$ . Математическая модель, учитывающая конечность размеров всех элементов такого устройства, а также основные уравнения и граничные условия для описания процессов сформулированы в разделе 3, где проведена также оценка параметров класса математически моделируемых устройств. В разделе 4 описаны и сопоставляются разработанные методики и алгоритмы расчёта ЭМ параметров устройства, а также характеризуются возможности их применения. Здесь приведён также ряд характерных результатов расчёта ЭМ величин. Описание осреднённого турбулентного течения в работе осуществлено на основе двух подходов: полуэмпирических формул и теории центральных моментов. В разделе 5 характеризуются эти способы определения турбулентных напряжений в случае замкнутого течения в плоскости  $r, z$ . Созданные на этой основе методики и алгоритмы расчёта осреднённого поля скоростей турбулентного течения (методика в упрощённом виде применена также для ламинарного течения) описаны в разделе 6, где эти методики также сопоставляются. Результаты расчётов, полученные на основе введения переменного коэффициента турбулентной вязкости и применения теории моментов сопоставляются с экспериментальными данными в разделе 7. Здесь приведены также результаты серий расчётов, проделанных для конкретных МГД-устройств и характеризуются полученные при этом зависимости для определяющих параметров металлургических МГД-процессов.

Методики расчёта ЭМ поля, сил и поля осреднённых скоростей в аксиально-симметричных устройствах с течением в плоскости  $r, z$  в виде комплекса алгоритмов и программ для ЭМ БЭСМ-6 внедрены во ВНИИ Электротермического оборудования (г.Москва).

С помощью разработанных программ проводятся расчёты параметров, а также анализ течений индукционных плавильных печей (ИПП), целью которого является усовершенствование существующих плавильных установок, а также конструирование новых ИПП и устройств электромагнитного перемешивания (УЭМП) с заданным оптимальным режимом течения жидкого металла. Проведённые серии расчётов, необходимые для конструирования ИПП с ёмкостью 20-60 тонн показали эффективность разработанной методики.

## 2. ОБЗОР МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ И МЕТОДОВ РАСЧЁТА АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ МГД-УСТРОЙСТВ

### 2.1. Основные положения МГД жидких металлов

Магнитогидродинамические процессы в жидких металлах описывает система уравнений магнитной гидродинамики [ 7,9 ], состоящая из уравнения магнитной индукции, уравнения движения (уравнения Навье-Стокса в случае ламинарного течения или уравнения Рейнольдса в случае турбулентного течения), уравнения неразрывности, дифференциального закона Ома и некоторых дополнительных связей.

Для получения удобной для пользования безразмерной формы этих уравнений, вводятся характерные параметры:

- $r_0[m]$  - характерный размер, в качестве которого обычно используется один из основных размеров исследуемой области или толщина поверхностного слоя  $\delta$  при ярко выраженном скин-эффекте;
- $v_0[\frac{m}{c}]$  - характерная скорость; в качестве  $v_0$  можно выбрать максимальное значение скорости движения жидкости, или определить с помощью характерного значения магнитной индукции:

$$v_0 = \frac{B_0}{T \rho_0 \mu_0} ; \quad (2.1)$$

$B_0[T]$  - характерная магнитная индукция, например, -

максимальное значение на поверхности металла;

$\rho_0 \left[ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right]$  - характерная плотность;

$t_0 \text{ [с]}$  - характерное время, которое удобно связать с характерными длиной и скоростью;

$$t_0 = \frac{h_0}{v_0} ; \quad (2.2)$$

$\rho_0 \left[ \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \right]$  - характерное давление, один из возможных способов определения которого следующий:

$$\rho_0 = \rho_0 v_0^2 ; \quad (2.3)$$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$  - магнитная проницаемость вакуума;

$j_0 \left[ \frac{\text{Ам}}{\text{м}^2} \right]$  - характерная плотность тока, задаётся как плотность тока в индукторе или связывается с характерным значением магнитной индукции:

$$j_0 = B_0 / r_0 \mu_0 ; \quad (2.4)$$

$f_0 \left[ \frac{\text{Н}}{\text{м}^3} \right] = \frac{B_0^2}{r_0 \mu_0}$  - характерная объёмная плотность электромагнитной силы. (2.5)

В результате определения безразмерных переменных система уравнений МГД принимает следующую форму:

1) Уравнение магнитной индукции для однородной среды:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}_m} \Delta \vec{B} + \text{rot} [\vec{v} \times \vec{B}] , \quad (2.6)$$

где  $\text{Re}_m = \mu_0 v_0 r_0 \sigma$  - магнитное число Рейнольдса, характеризующее отношение индукций поля наведённых движением среды токов (вторичного поля) и индукции приложенного внешнего поля; (2.7)

$\sigma \left[ \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}} \right] = \text{const}$  - электропроводность материала.

2) Уравнение движения несжимаемой жидкости ( $\rho_0 = \text{const}$ ),

а) Уравнение Навье-Стокса для ламинарного течения:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \Delta \vec{v} \frac{1}{\text{Re}} + \text{Al} \vec{f} + \frac{\vec{e}_z}{\text{Fr}} , \quad (2.8)$$

$Re = \frac{V_0 r_0}{\nu}$  - число Рейнольдса, характеризующее соотношение кинетической энергии и энергии, диссипируемой трением; (2.9)

$Al = \frac{E_0^2}{\mu_0 \rho_0 V_0^2}$  - число Алфвена, характеризующее отношение магнитной энергии к кинетической; (2.10)

$Fr = \frac{V_0^2}{g_0 r_0}$  - число Фруда, выражающее соотношение сил инерции и сил тяжести; (2.11)

$\vec{f}$  - плотности объёмной электромагнитной силы;

$\nu = \frac{\eta^2}{\rho_0}$  - коэффициент кинематической вязкости.

Если характерную скорость определить не как максимальное значение скорости в объёме, а с помощью соотношения

$$V_0 = \sqrt{g_0}, \quad (2.12)$$

то уравнение Навье-Стокса приобретает следующий безразмерный вид ( $ke = const$ ):

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\sigma p + \Delta \vec{v} + Al \cdot Re^2 \vec{f} + \frac{Re^2}{Fr} \vec{e}_z, \quad (2.13)$$

где  $Al \cdot Re^2 = \frac{E_0^2 r_0^2}{\mu_0 \rho_0 V_0^2}$ ; (2.14)

$$\frac{Re^2}{Fr} = \frac{r_0^3 g_0}{\nu^2}. \quad (2.15)$$

При этом максимальное значение безразмерной скорости в объёме совпадает с числом Рейнольдса рассматриваемого потока.

б) Уравнение Рейнольдса для осреднённого турбулентного течения:

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x^j} = -\frac{\partial \bar{E}}{\partial x^i} + \frac{1}{ke} \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x^j \partial x^j} - \frac{\partial \overline{v_i v_i v_i}}{\partial x^j} + Al \cdot \bar{f}_i \quad (2.16)$$

где  $\overline{v_i v_i v_i}$  - турбулентные напряжения.

Скорость и другие величины при этом представлены в виде суммы:

$$v_i = \bar{v}_i + v_i', \quad (2.17)$$

где  $\bar{v}_i$  - осреднённое значение,

$v_i'$  - пульсационная часть.

Для замыкания системы уравнений МГД, использующей уравнение Рейнольдса, необходимо ввести дополнительные связи для определения турбулентных напряжений  $\overline{v_i v_k}$  (см. раздел 5).

3) Уравнения неразрывности для магнитного поля и течения:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad . \quad (2.18; 2.19)$$

При  $\rho = \rho_0 = \text{const}$  из уравнения неразрывности течения следует условие несжимаемости:  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ . (2.20)

4) Дифференциальный закон Ома:  $\vec{j} = Re_m (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ , (2.21)

где  $\vec{E} \left[ \frac{B}{M} \right]$  - напряжённость электрического поля.

5) Выражение для плотности электромагнитной силы:

$$\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B} + \frac{\mu_1 - 1}{2\mu_1} \operatorname{grad} B^2 - \frac{1}{2} H^2 \mu_1 \operatorname{grad} \mu_1 \quad , \quad (2.22)$$

где  $H \left[ \frac{Am}{M} \right]$  - напряжённость магнитного поля,

$\mu_1$  - относительная магнитная проницаемость среды.

Так как интервалы изменения характерных величин МГД устройств широки [ 1-9 ], то и критерии подобия ( $Re, Al, Fr, Re_m$ ) для различных устройств меняются в широких пределах. Однако, если размеры устройства порядка одного метра, электропроводность металла  $\sigma \sim 10^6 \frac{1}{\text{Ohm} \cdot \text{m}}$ , то при  $v_0 < 1$  м/с (такие скорости наблюдаются в эксперименте), выполняется условие  $Re_m < 1$ .

Следовательно безиндукционное приближение  $Re_m \ll 1$  (2.23) применимо для лабораторных устройств.

Условие  $Re_m < 1$  может нарушаться в промышленных МГД-установках из-за больших размеров и больших скоростей движения металла. Например, показано [ 10 ], что при скоростях до 1 м/с и частотах не менее 50 Гц, влияние движения расплава на индукцию не превышает 6 и 13% соответственно для стального и алюминиевого сплавов.

Применение безиндукционного приближения (2.23) радикально упрощает задачу, поэтому оно используется в большинстве существующих теоретических работ.

В результате пренебрежения влиянием движения среды на магнитное поле уравнение (2.6) упрощается:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{Re_m} \Delta \vec{B} \quad , \quad (2.24)$$

т.е., величина магнитной индукции находится независимо от гидродинамических характеристик.

В случае плоскопараллельного или аксиально симметричного магнитного поля, т.е., когда трёхмерная задача сводится к двумерной, целесообразно введение векторного потенциала

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} \quad , \quad (2.25)$$

уравнение для которого с учётом периодической временной зависимости  $\vec{A} = \vec{A}^{\circ}(\vec{r}) e^{i\omega t}$ , (2.26)

где  $\vec{A}^{\circ}$  - комплексная амплитуда векторного потенциала;

$i$  - мнимая единица;

$\omega$  [1/с] - циклическая частота периодического электромагнитного поля,

принимает вид:  $\Delta \vec{A} = i\hat{\omega} \vec{A}$  (2.27)

где  $\hat{\omega} = \mu_0 \sigma \omega r_0^2$  - безразмерная частота, характеризующая проникновение ЭМ поля во внутрь проводника. (2.28)

Частота  $\hat{\omega}$  определяет безразмерную толщину скин-слоя:

$$\hat{\delta} = \sqrt{2/\hat{\omega}} \quad . \quad (2.29)$$

Если в выражении магнитного числа Рейнольдса (2.7) в качестве характерной скорости  $v_0$  рассматривается относительная скорость движения бегущего магнитного поля и проводящей среды:

$$v_0 = \omega S / \alpha_1 \quad , \quad (2.30)$$

где  $\alpha_1 = \eta / S$  ; (2.31)

$\delta$  - скольжение;

$\bar{J}$  - полусредний шаг индуктора,

то есть при протекании  $K_{0m}$  и  $\omega$  можно принять один и тот же температурный режим.

При рассмотрении явления металлов, выходящих незначительными величинами, (2.24) выражение электромагнитной силы (2.22) существенно упрощается и сводится к первому члену этой формулы:

$$\bar{F} = \bar{J} \times \bar{E} \quad (2.32)$$

для реально существующих устройств время релаксации жидкости в рассматриваемом объёме  $T > 1 \text{ сек}$  [11], поэтому при частоте колебаний электромагнитного поля  $\omega \gg 1/T$  жидкость не успевает реагировать на пульсации силы (сила пульсирует с удвоенной частотой поля) и движение определяется усреднённой по периоду колебаний величиной силы  $\bar{F}$ . Усреднение по периоду колебаний произведения двух осциллирующих величин, представленных в комплексной форме (2.26) приводит к следующему выражению для этой средней силы [6]:

$$\bar{F} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\dot{J} \times \bar{E}^{*}) \quad (2.33)$$

где звездочкой обозначена комплексно сопряжённая величина и  $\operatorname{Re}$  - реальная часть выражения.

Таким образом, задача определения движения жидкого металла в осесимметричном приближении разделяется на два этапа:

1) Нахождение распределения электродвижущей силы (2.32) или (2.33) в жидком металле на основе решения уравнений для поля (2.24) или для потенциала (2.27) с соответствующими граничными условиями.

2) Решение гидродинамической части задачи, содержащей уравнение ламинарного (2.13) или осреднённого турбулентного (2.16) течения. При этом используется ранее найденная плотность силы.

В общем виде для произвольной формы проводящей области и произвольного распределения тока индуктора эти задачи не решены даже в безиндукционном приближении при ламинарном характере течения. Поэтому в каждом конкретном случае делаются те или иные допущения относительно формы и физических характеристик модели. Основные модели и методы, применяемые для решения поставленной задачи МГД в случае аксиальной симметрии устройства с течением в плоскости  $r, z$  характеризуются в следующих двух подразделах.

## 2.2. Исследования электромагнитного поля и силы

Как уже отмечалось, первым этапом для теоретического решения задачи о движении жидкого металла в цилиндрических МГД устройствах в безиндукционном приближении, является нахождение распределения плотности ЭМ силы, а вторым этапом - исследование гидродинамических явлений в жидком металле.

Рассмотренные в данном подразделе работы условно разделяются на аналитические, в которых находятся аналитические выражения для магнитной индукции и ЭМ силы, и на работы, в которых уравнения для  $\vec{B}$  и для векторного потенциала решаются численными методами. В большинстве аналитических работ пренебрегают конечной высотой проводника - моделью служит бесконечно длинный проводящий цилиндр с постоянными по всему объёму ЭМ свойствами. В тех случаях, когда допускается также предположение о бесконечной высоте индуктора, его воздействие учитывается заданием индукции на боковой поверхности проводящего цилиндра в виде периодически зависящей от времени функции (однофазная обмотка) или в виде бегущей волны (многофазная обмотка). Для учёта конечной высоты индуктора, последний заменяется бесконечно тонким азимута-

льным токовым слоем  $i_\varphi$  (рис.2.1).

Далее анализируются основные математические модели и методы, применяемые для определения ЭМ поля и поля сил в цилиндрических проводниках конечных размеров, находящихся в поле кольцевых индукторов с переменным током:

1) Бесконечный проводящий цилиндр с заданным на боковой поверхности  $r=r_0$  магнитным полем, периодически зависящим от времени.

Решением уравнения для комплексной магнитной индукции

$$\Delta \vec{B} - i\sigma\mu_0 \omega \vec{B} = 0, \quad (2.34)$$

в цилиндрической области I (рис. 2.1а) бесконечной длины с заданным на поверхности цилиндра  $r=r_0$  магнитным полем, в работах [11,12] находятся выражения аксиальной составляющей магнитной индукции  $B_z$  ( $B_r = B_\varphi = 0$ ) и радиальной компоненты плотности средней ЭМ силы  $f_r$  через функции Кельвина. Для такой идеализированной модели  $f_r$  зависит только от радиуса и  $f_z = f_\varphi = 0$ , причём абсолютное значение силы определяет магнитная индукция на поверхности цилиндра:

$$B_0 = \mu_0 I, \quad (2.35)$$

где  $I \left[ \frac{A}{m} \right]$  - линейная плотность тока (настил) на поверхности  $r=r_0$ . Максимальное значение силы (на боковой поверхности проводника) при значениях безразмерной частоты  $\hat{\omega} > 10$  практически меняется пропорционально её квадратному корню:  $f_r(r_0) \sim \sqrt{\hat{\omega}}$ . Убывание силы вглубь металла по радиусу, имеющее экспоненциальный характер, также существенно зависит от безразмерной частоты  $\hat{\omega}$  (2.28), что связано с вытеснением поля из проводника при больших значениях безразмерной частоты. Например, для  $\hat{\omega} = 100$  сила уменьшилась по сравнению с её максимальным значением на поверхности в 100 раз при  $r = 0,6r_0$ . (случай промышленной МГД-уста-

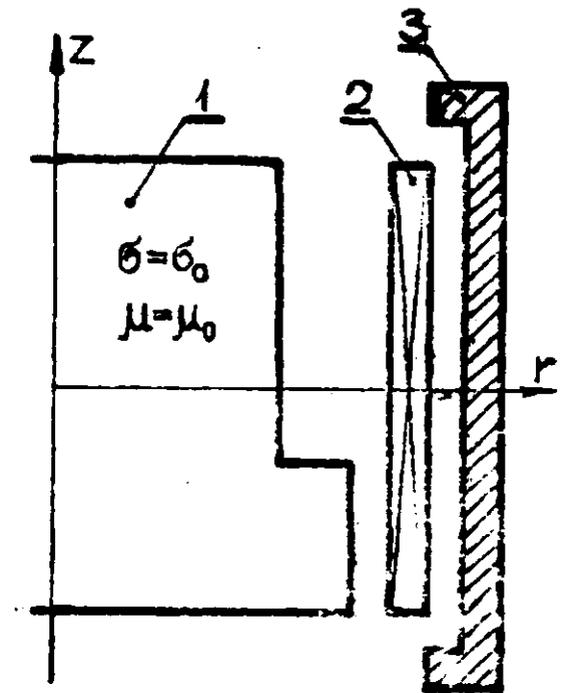
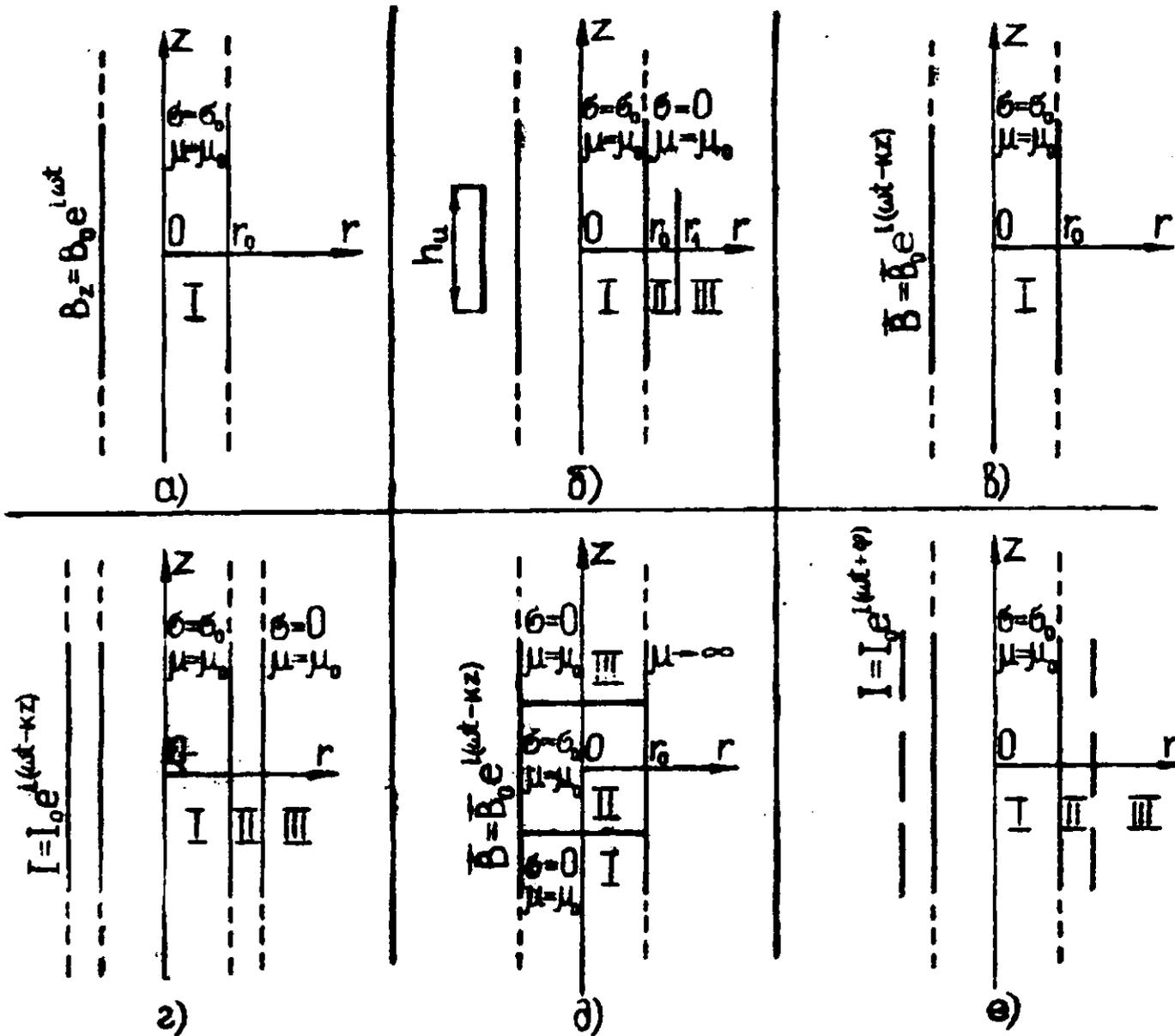


Рис. 2.2. Осесимметричная модель индукционного МГД-устройства (в разрезе).  
 1 — металл, 2 — индуктор, 3 — магнитный экран.

Рис. 2.1. Модели индукционного МГД-устройства (в разрезе).

новки), а для  $\hat{\omega} = 2.5$  (случай модельной установки) такое уменьшение достигается только при  $r = 0,3r_0$ . Во многих работах [ II, I2, I3 и др. ] вместо  $\hat{\omega}$  используется аналогичный параметр  $\alpha = \sqrt{\hat{\omega}}$ . (2.36)

Решение рассматриваемой задачи возможно также на основе теории цепей. При ярко выраженном скин-эффекте ( $r_0 \gg \delta$ ) это осуществлено в работе [ I3 ].

Рассмотренная модель однофазного устройства не даёт возможности оценить аксиальную составляющую силы отличную от нуля в реальных устройствах, кроме того - сила  $f_r$  в этой модели зависит только от одной координаты - радиуса, а ротор силы, определяющий движение жидкой фазы, равен нулю:  $\text{rot} \vec{f} = 0$ . Эти результаты являются следствиями предположений о бесконечной высоте индуктора и металла.

2) Бесконечный проводящий цилиндр в поле кольцевого однофазного индуктора конечной высоты (рис. 2.16). Решение задачи в плоском приближении (пренебрегая кривизной цилиндрической поверхности  $r_0 \gg \delta$ ) позволяет оценить характер силового поля и его интегральные характеристики [ I4 ]:

$$Z_i = \oint_{L_i} \vec{f} d\vec{l} , \quad (2.37)$$

где  $L_i$  - произвольный контур внутри металла.

Циркуляция  $Z_i$  характеризует способность ЭМ поля возбуждать движение. Если  $\text{rot} \vec{f} = 0$ , то и  $Z_i \equiv 0$ , отсутствие завихренности силы определяет отсутствие движения в замкнутом объёме. Заданием эспры тока на поверхности  $r = r_1$  (рис. 2.16) можно достаточно хорошо описать систему с однофазным индуктором и выявить некоторые характерные особенности силы. Например, аксиальная составляющая силы преимущественно направлена к торцам системы, однако при относительно большой высоте индуктора су-

местствует зона с обратной ориентацией силы  $f_z$ . В реальной системе с осевой протяжённостью металла, значительно превосходящей высоту индуктора, при обычных параметрах (толщина скин-слоя  $\delta = 0,1 \div 0,3 r_0$ ), интегральные вихревые свойства поля сил оцениваются максимальным значением ЭМ давления в поверхностном слое металла [ I4 ].

Решение задачи в цилиндрической области с токовым слоем конечной высоты  $2b_u = h_u$  на поверхности  $r = r_1$  (рис. 2.1б), аналитически получается методом разделения переменных в уравнении для магнитной индукции (2.34) или магнитного потенциала (2.27). При этом в пространстве выделяются три подобласти с граничными поверхностями  $r = r_0$  и  $r = r_u$ . Воздействие индуктора учитывается при помощи граничных условий на поверхности раздела  $r = r_u$ , где бесконечно тонкий слой азимутального тока задаётся интегралом Фурье:

$$i_\varphi = \begin{cases} I, & \text{при } |z| \leq b_u; \\ 0, & \text{при } |z| > b_u, \end{cases} \quad (2.38)$$

где  $i_\varphi$  - поверхностная плотность азимутального тока.

Магнитная индукция и сила в данном случае имеют две отличные от нуля составляющие  $B_r, B_z$  и  $f_r, f_z$ .

Влияние конечной высоты обмотки на распределение силы характеризуется фактором плотности силы [ II, I2 ]:

$$\phi(z) = f_{r=r_0}(z) / f_\infty, \quad (2.39)$$

где  $f_{r=r_0}$  - сила на боковой поверхности металла для индуктора конечной высоты,

$f_\infty$  - сила на боковой поверхности, рассчитанная на основе модели с бесконечным азимутальным токовым слоем на боковой поверхности цилиндра (см. пункт I).

распределение фактора  $\Phi_r$  по высоте на поверхности цилиндра равномерно зависит от безразмерной частоты (2.27), относительной высоты индуктора и ширины зазора между металлом и индуктором (рис. 2.16):  $a = r_u - r_0$  (2.40)

Функция  $\Phi_r$  имеет максимум в плоскости симметрии индуктора  $r = 0$  и её значение максимально равно единице при  $\hat{b}_u = b_u/\sigma \rightarrow \infty$  и  $\hat{z} = 0$ . На фиксированной высоте  $|z/b_u| < 1$  значение  $\Phi_r$  уменьшается с увеличением непроводящего зазора  $a$  или с уменьшением относительной высоты индуктора. Скорость затухания силы вне зоны индуктора также зависит от  $\hat{b}_u$  и  $a$ ; чем уже зазор и длиннее индуктор (или больше частота), тем быстрее убывает  $\Phi_r$  с удалением от плоскости симметрии системы.

Аксимальная составляющая силы заметно отклоняется от нуля только в зоне торцов индуктора, но и там значение  $f_z$  не превышает 10% максимального значения  $f_r$ . Поэтому в рамках рассматриваемой приближённой модели значение аксиальной составляющей силы не учитывается [ II, 12 ].

Вихрь плотности средней электромагнитной силы

$$\vec{\xi} = \text{rot} \vec{f} \quad (2.41)$$

имеет одну отличную от нуля составляющую  $\xi_\varphi$  ( $\xi_z = \xi_r = 0$ ). Максимальное значение ротор силы  $\xi_\varphi$  достигает на боковой поверхности проводника ( $r = r_0$ ) около торцов индуктора  $|z| = b_u$ , на оси симметрии ( $r = 0$ ) и в плоскости симметрии устройства ( $z = 0$ )  $\xi_\varphi$  обращается в нуль.

В работах [ 6, 15, 16 ] для рассматриваемой модели (рис. 2.16) выражение векторного потенциала ( $A_r = A_z = 0, A_\varphi = A_\varphi(r, z)$ ), а также распределения ЭМ поля и сил найдено путём суммирования потенциалов элементарных токов веток:

$$A_{\varphi} = \frac{\mu_0 I_{\text{н}} e^{i\omega t}}{8r_0} \int_0^{\infty} \frac{I_1(\rho r) K_1(\lambda r_0) \cos \lambda z d\lambda}{\lambda \mu_0 I_1(\rho r_0) K_0(\lambda r_0) + \rho I_0(\rho r_0) K_1(\lambda r_0)}, \quad (2.42)$$

где  $I_0, I_1, K_0, K_1$  - модифицированные функции Бесселя;

$$\rho^2 = \lambda^2 + i\sigma \mu_0 \omega. \quad (2.43)$$

Численное интегрирование комплексных подынтегральных функций типа (2.42) для получения распределений интересующих величин по объёму проводника задача трудоёмкая даже для выполнения на ЭВМ. Поэтому делаются попытки подынтегральное выражение в (2.42) заменить приближёнными формулами, которые в определённых интервалах значений параметров устройства аппроксимируют исходную функцию [17,18,34]. В работе [18] такая аппроксимация позволяет найти при  $r_0 > 10\delta$  распределение ЭМ силы без применения численного интегрирования.

Рассмотренная модель объясняет вихревой характер электромагнитных сил и тем самым возможность существования стационарного течения жидкого металла под действием этих сил. Описание МГД-устройства в данном приближении допустимо, если высота металла больше высоты катушки индуктора и если индуктор расположен в зоне  $|z| < h_{\text{н}}/2$  - основная часть мощности индуцируется в части проводящего цилиндра, ограниченной торцами индуктора. В противном случае картина поля и силы в значительной степени возмущается концевым эффектом проводника.

3) Бесконечно длинный проводящий цилиндр с заданным на боковой поверхности "идеальным" бегущим полем.

Решение уравнения магнитной индукции (2.34) методом разделения переменных в бесконечно длинной проводящей цилиндрической области, магнитное поле на поверхности которой задано в виде бегущей волны  $\vec{B} = \vec{B}^0 e^{i(\omega t - kz)}$ ;  $B_{\varphi}^0 = 0$ , (2.44)

где  $k$  - волновое число, позволяет выразить компоненты плотности силы через функции Бесселя [ II, 19, 20 ]. Для данной модели в отличие от предыдущих, аксиальная составляющая средней плотности силы существенно отличается от нуля. Также как в любом несимметричном случае радиальные составляющие поля и силы на оси симметрии равны нулю, кроме того все величины зависят только от одной координаты - радиуса.

Зависимость радиальной составляющей силы от квадратного корня безразмерной частоты  $\alpha = \sqrt{\omega}$ , также как в случае "идеального" однофазного индуктора (рис. 2.1а) имеет характерный длинный участок при  $\alpha > 5$ , сила  $f_r$  при  $\alpha > 2.5$  становится практически независимой от  $\alpha$ . Безразмерное волновое число

$$\alpha = 2\pi r_0 / \lambda, \quad (2.45)$$

где  $\lambda = \frac{c}{f}$  - длина бегущей волны. (2.46)

Если  $\omega$  постоянна, то плотность аксиальной силы на поверхности  $r = r_0$ , максимальна при  $f = \sqrt{\omega}$ . Для промышленной МТД установки ( $\omega \sim 100$ ) это условие выполняется, если  $\lambda \sim 0,5$  м.

4) Бесконечно длинный проводящий цилиндр с заданной на поверхности  $r = r_0$  токовой нагрузкой (рис. 2.1г).

Заданием линейной токовой нагрузки

$$I = I^0 e^{i(\omega t - kz)} \quad (2.47)$$

на поверхности  $r = r_0$  и решением уравнения для азимутальной составляющей комплексного векторного потенциала ( $\dot{A}_\varphi \equiv A$ )

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{A}{r^2} = i\omega \mu_0 A \quad (2.48)$$

с соответствующими граничными условиями, исследуется влияние не-проводящего зазора между металлом и индуктором на ЭМ поле [ 6 ]. В рамках упрощенной модели рассматривается два частных случая:

а) пространство вне индуктора заполнено ферромагнитным материалом с магнитной проницаемостью  $\mu = \infty$ ,  $\epsilon = 0$ , (идеаль-

или ферромагнитный экран),

б) пространство вне индуктора не ферромагнетик и изолятор ( $\mu=1, \sigma=0$ ). Показано [ 6 ], в обоих случаях зависимость максимального значения поля на боковой поверхности проводника  $H_{\text{max}}/r_0$  мало чувствительна к изменению частоты ( $10 < \omega < 100$ ), чувствительна к изменению длины волны бегущего поля. При малом поле убывает с увеличением  $r_0/r_1$  медленно (пятикратное увеличение  $r_0/r_1$  уменьшает  $H_{\text{max}}$  менее, чем на 20%), а при малом значении длины волны  $\lambda = 0,8 r_0$ , поле с увеличением  $r_0/r_1$  убывает очень быстро (при  $r_0 = 1,7 r_1, H_{\text{max}} \approx 0$ ).

Рассмотренные в пунктах 3 и 4 модели объясняют возникновение движения жидкой фазы металла и характеризуют зависимость тока от частоты  $\omega$  и длины волны бегущего поля, однако в реальных устройствах из-за конечной высоты многофазной обмотки и ввиду сдвигивания поля не имеет характера бегущей волны, а является пульсирующим.

б) Проводящий цилиндр конечных размеров с заданным бегущим магнитным полем (2.44), на поверхности  $r=r_0$  (рис. 2.1д). В окружающем пространстве при  $r > r_0$ :  $\sigma=0, \mu=1$  [ 6 ].

Такая абстракция достаточно отдалена от реально существующих металлургических МТД устройств, так как применима, если  $r_0 \ll r_1$  и металл не выдвинут из индуктора, т.е. торцевым эффектом индуктора можно пренебречь.

б) Бесконечно длинный проводящий цилиндр в поле многофазного индуктора конечной высоты (рис. 2.1е).

Качество приближения этой модели в основном определяется тем, насколько заданное распределение тока соответствует действительному распределению тока в индукторе.

В монографии [ 6 ] приводится выражение силы для рассматри-

ваемой модели, найденное путём суммирования потенциалов (2.42) элементарных токовых витков по высоте катушки и последующим суммированием векторных потенциалов отдельных катушек с учётом сдвигов фаз токов, протекающих в них. Аналогичные выражения приводятся в работах [21, 22, 23, 24]. Индуктор везде заменяется токовым слоем  $i_r$  на поверхности  $r=r_0$ . Результаты расчёта радиальной составляющей магнитного поля на поверхности цилиндра хорошо согласуются с экспериментом [23]. Составляющая силы  $f_z$  имеет выраженный максимум по частоте. В зоне концов многофазного индуктора имеются области, где меняется направление компоненты силы  $f_z$  - в модели с "идеально" бегущим полем это не наблюдается.

В работе [37] расчёты потенциала и поля  $\vec{H}(r_0, z)$  проводятся в случае сильно выраженного скин-эффекта - токи в проводнике цилиндра заменяются поверхностными токами и учитываются с помощью граничных условий при  $r=r_0$ . Этот подход для дальнейших расчётов движения жидкого металла не пригоден; так как не позволяет находить силовое поле внутри проводника.

Сравнение интегральной силы, действующей на единицу длины металлического цилиндра, с соответствующей величиной для бесконечного индуктора [24] показывает, что различие не превышает 5%. Однако, интегральная сила является второстепенным показателем и не определяет применимость той или иной модели для описания МГД процессов с замкнутым течением, где существенно распределение сил по объёму расплава.

Модель, где проводящая область, также как индуктор, имеет конечные размеры, более точно соответствует реальной конструкции МГД устройств и позволяет объяснить эффекты, определяемые конечной высотой индуктора и металла (первичный и вторичный кон-

цевые эффекты), а также взаимным расположением этих составных частей. Расчёт моделей этого класса требует применения численных методов, так как соответствующих аналитических решений не существует.

7) Осесимметричная проводящая область конечной высоты в поле кольцевого индуктора конечных размеров (рис. 2.2).

Расчёт вихревых токов в осесимметричной области сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода относительно составляющей напряжённости электрического поля  $E_{\varphi}$  [25,26,27]. Учитывая аналогию уравнений, таким же образом можно провести расчёт азимутальной составляющей векторного потенциала. Однако на практике эта методика может применяться только для небольших сплошных или больших тонкостенных проводников, т.е., при небольшом числе ( $n < 100$ ) точек расчёта [25]. Кроме того, область сходимости итерационного процесса решения этих интегральных уравнений ограничена. Границы интервала сходимости зависят от частоты и геометрических параметров системы, однако в рассмотренных работах эта область не определена.

Делаются попытки учесть первичный и вторичный концевые эффекты, т.е. рассчитать модель с индуктором и металлом конечной высоты, комбинацией результатов, полученных для двух более простых моделей (пункты 5 и 6) [28,29]. Для упрощения задачи - сведения интеграла типа (2.42) к ряду Фурье-Бесселя, рассматривается периодическая система индукторов с периодом  $T$  многократно превышающим высоту индуктора ( $T \geq 30h_u$ ). Сопоставление [28] теоретических и экспериментальных распределений относительных величин поля по высоте проводника указывает на заметные расхождения в этих распределениях, а информация о совпадении абсолютных величин отсутствует вообще.

Для осесимметричной модели с произвольным распределением азимутального тока, ЭМ силы вычисляются по методу, изложенному в статье [30]. Составляются неконсервативные конечно-разностные уравнения для азимутальной компоненты комплексного векторного потенциала в кусочно однородной ( $\sigma$  и  $\mu$  - кусочно постоянные функции) двумерной области, на границе которой полагается  $A_\varphi = 0$ . Указывается, что для получения распределения векторного потенциала с точностью до 1% на сетке 70x70 узловых точек потребовалось около 500 итераций, но проверка данной разностной схемы показала, что:

а) с увеличением значений  $\sigma$  и  $\mu$  сходимость замедляется и при больших значениях этих параметров схема становится неустойчивой,

б) при  $\mu = 100$  и  $\sigma = 10^6 \frac{1}{\Omega \cdot \text{м}}$  на сетке 30x30 узловых точек (5-6 раз меньше указанной в статье) точность 1% достигается примерно в 400-х итерациях,

в) если проводящее тело не является цилиндром, то в пограничной зоне точность вычислений существенно ниже, чем в других точках.

Практические консервативные разностные схемы с переменным шагом сетки для расчёта векторного потенциала методом нижней релаксации в осесимметричной проводящей области (рис. 2.2) построены в работах [31, 32], однако пример результатов расчёта электромагнитных сил отсутствует. Кроме того, схема имеет целый ряд недостатков вычислительного характера (первый порядок аппроксимации, медленную сходимость и др.). Аналогичная методика расчёта для ферромагнитной среды приведена в работе [38].

Результаты численных расчётов азимутальной составляющей ротора среднего ЭМ силы ( $\mathcal{E}_r = \mathcal{E}_z = 0$ )

$$\varepsilon \equiv \varepsilon_{\varphi} = \frac{\partial f_r}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial r} \quad (2.49)$$

для рассматриваемой цилиндрической модели с однофазным и двухфазным индуктором (сдвиг фаз в секциях  $\frac{\pi}{2}$ ) приведены в статье [33] (описание численной методики отсутствует). Получено, что наибольшие значения  $\varepsilon_{\varphi}$  для однофазного устройства принимает около верхнего конца индуктора и нижнего конца проводящего цилиндра, если индуктор имеет отрицательный верхний и положительный нижний вылеты. В этих зонах необходимо считаться с большой интенсивностью движения. В случае двухфазной обмотки максимум ротора силы (2.49) расположен напротив середины индуктора. Абсолютные величины вихря, определяющего интенсивность движения, больше в случае двухфазного индуктора.

Завершая на этом краткий обзор моделей, приемы для расчёта ЭМ параметров цилиндрических МГД-устройств, следует отметить, что здесь показаны только основные этапы развития теоретической модели и кроме того, сделан определённый предварительный выбор. Так как проводящая область является металлом в расплавленном состоянии, то не рассматриваются модели, учитывающие ферромагнитные свойства рабочего тела и явления насыщения. Однако, ферромагнитные свойства могут иметь другие элементы моделируемого устройства (магнитный экран), что в частности учитывается в ряде работ [30, 31, 32, 34]. Во всех рассмотренных работах существенно используется осевая симметрия модели, что упрощает задачу - расчёт поля и сил в пространственной области, сводится к расчёту в двумерной области. В случае несимметричностей по азимутальному углу  $\varphi$  формы устройства или распределения МГД-величин необходим расчёт трёхмерной модели.

### 2.3. Исследования течений

В данном подразделе рассматриваются модели и методы описания гидродинамических процессов в цилиндрических МГД устройствах с замкнутым течением проводящей жидкости. Исследовательских работ по этому вопросу гораздо меньше, чем работ, посвящённых исследованиям электромагнитных процессов. Это объясняется сложностью вопроса - уравнения, описывающие движение жидкого металла (как в ламинарном, так и в турбулентном режиме) существенно нелинейны, линеаризовать и решить эти уравнения аналитически удается только в самых простых случаях. Кроме того, всегда для упрощения задачи используется безиндукционное приближение ( $R_m \ll 1$ ).

Далее рассмотрим основные модели, применяемые для описания замкнутого МГД-течения в ламинарном режиме:

1) Бесконечно длинный цилиндр с заданным на боковой поверхности периодически зависящим от времени магнитным полем, заполненный электропроводящей жидкостью (рис. 2.1а).

Модель не объясняет существующую в реальных индукционных МГД-устройствах циркуляцию расплава, так как ЭМ сила, рассчитанная по этой модели имеет безвихревой характер ( $f_z = f_\varphi = 0$ ;  $f_r = f(r)$ ) [12]. На основе выражения для ЭМ давления с использованием уравнения гидростатики оценивается [12] изменение формы свободной поверхности расплава под воздействием электромагнитных сил. Однако, в этих расчётах не учитываются концевые эффекты, и, как показывают эксперименты, получаются завышенные до трёх раз значения высоты мениска.

2) Бесконечно длинный цилиндр, заполненный электропроводящей жидкостью в поле однофазного индуктора конечной высоты (рис. 2.1б).

Словное поле в металле имеет вихревой характер ( $\text{rot } \vec{f} \neq 0$ ) и модель в принципе позволяет объяснить существование двухконтурной циркуляции, но расчёты динамики металла по рассматриваемой модели автору не известны.

3) Бесконечно длинный цилиндр, застенный электропроводящей жидкостью, с заданным на боковой поверхности "идеальным" бегущим полем (рис. 2.1в).

Так как цилиндрический объём принимается бесконечно длинным, но рассматривается замкнутое течение, то на аксиальную составляющую скорости  $v_z$  налагается условие замкнутости [19,35]:

$$\int_0^{r_0} v_z \cdot r \cdot dr = 0 \quad (2.50)$$

Из-за осевой симметрии и характера распределения силы (см. подраздел 2.2) скорость имеет только одну компоненту  $v_z$  ( $v_r = v_\varphi = 0$ ), зависящую от радиуса. Уравнения Навье-Стокса (2.3) записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g - f_z ; \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \text{const} .$$

Оценка времени установления стационарного течения [35] позволяет в дальнейшем рассматривать только стационарную задачу. Максимальное значение скорости при этом определяется тремя электромагнитными параметрами - длиной волны  $\lambda$  и индукцией бегущего поля  $B_0$  на боковой поверхности металла, а также безразмерной частотой  $\hat{\omega}$ . Нормированная значением индукции  $B_0$ , максимальная скорость движения на оси  $v_0$  имеет выраженные максимумы как по частоте, так и по длине волны бегущего поля. С возрастанием безразмерного волнового числа  $\gamma$  (2.45) максимальное значение скорости в пристеночном потоке  $v_{z0}$  возрастает по абсолютной величине и место максимума смещается в сторону стенки  $r=r_0$ , однако, с увеличением  $\hat{\omega}$  влияние длины волны становится мало заметным

при  $\hat{\omega} = 100$ , распределения скоростей для  $\gamma = 2$  и  $\gamma = 6$  практически совпадают). Максимум скорости центрального потока всегда находится на оси симметрии и существует поверхность  $r = r_p$ , где скорость течения  $v_2 = 0$ . Положение поверхности раздела также определяется параметрами  $\lambda$  и  $\hat{\omega}$ . В работе [35] для этой задачи рассматривается длинноволновый предел:  $\lambda \gg \delta$ . Профиль скорости при этом определяется значением одного единственного критерия —  $\hat{\omega}$ , что подтверждается экспериментом [36]. Сопоставление профиля осреднённой турбулентной скорости движения жидкого металла в средней зоне многофазного ИТД-устройства с теоретическим, полученным [19,35] показывает, что максимум осреднённой скорости в пристеночном потоке смещён к стенке по сравнению с теоретическим профилем, а профиль скорости в приосевой зоне теряет параболическую форму и становится сплюснутым.

Рассмотренная модель не применима для описания движения в пристеночных зонах реальных многофазных устройств, где существенно отлична от нуля радиальная составляющая скорости  $v_r$ , а составляющая  $v_2$  — наоборот мала. Кроме того, в этой зоне распределение сил значительно отличается от поля сил "идеального" индуктора. Однако, модель даёт представление о движении и управляющих им параметрах в средней зоне многофазного устройства.

4) Цилиндр конечных размеров в поле индуктора конечной высоты (рис. 2.2).

Как уже отмечалось, расчёт движения, учитывающий конечные размеры всех её элементов, в настоящее время возможен только численными методами.

Записав систему уравнений, описывающую ламинарное движение жидкости (уравнение Навье-Стокса и условие несжимаемости), в форме ротора для переменных  $\omega$  и  $\psi$ ,

где  $w_{\varphi} = w = \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}$  - азимутальная составляющая ротора скорости; (2.52)

$\psi$  - функция тока Стокса, которая определяется в следующем виде:

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad v_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (2.53)$$

из рассмотренных удаётся исключить давление. В работе [32] построена и доведена до численной реализации разностная схема для уравнений несжимаемой жидкости в переменных  $\psi$  и  $w$ , однако, сами авторы отмечают, что схема устойчива только при малых значениях числа Рейнольдса (2.9). Кроме того, полученные по этой методике численные результаты ещё больше, чем результаты, полученные по модели предыдущего пункта, отличаются от экспериментальных [31]. Полученное по методике [32] распределение  $v_z = v_z(r)$  имеет нефизический пик на оси симметрии. Это очевидно обусловлено плохой аппроксимацией исходных уравнений, что особенно проявляется при малых значениях радиуса  $r$ .

5) Выпуклый осесимметричный проводник в поле индуктора конечной высоты [39]. Разностная схема, предложенная в работе [39], обладает рядом существенных недостатков (устойчива только при нефизически малых значениях вязкости, граница проводящей области заменяется на сетке ломаной линией и др.). Кроме того, отсутствует эффективный способ расчёта распределения сил. Методика, таким образом, для практических количественных исследований поля скоростей мало пригодна.

В заключение следует отметить, что работы, содержащие теоретические исследования замкнутого турбулентного МГД-течения в переменном во времени магнитном поле, с существенной двумерностью или трёхмерностью течения, автору не известны. Использованные в работе сведения из полуэмпирической теории турбулентности

Из этой причине характеризируются отдельно в разделе 5.

#### 2.4. Выводы

Несмотря на то, что количество исследований по применению конечных методов (метода сеток и метода конечных элементов) в электродинамике, а также в гидродинамике велико, частная задача о замкнутом осесимметричном течении электропроводящей жидкости (как в ламинарном, так и в турбулентном режимах) под воздействием переменного электромагнитного поля не решена.

Из проведенного анализа следует:

1) Более полно исследованы электромагнитные процессы в индукционных МГД-устройствах:

а) для получения предварительных сведений и характерных значений ЭМ поля и поля силы, а также для получения инженерных оценок процессов и планирования эксперимента, можно пользоваться моделями пренебрегающими конечной высотой системы "индуктор-металл", или одного из этих элементов, в зависимости от соотношения длины и взаимного расположения индуктора и проводника в реальном устройстве. Методика для расчетов такого типа усиленно разрабатывается. Решение линейной исходной задачи приводит к аналитическим выражениям, значения которых необходимо вычислять на ЭМ. Трудности возникают именно в этапе численного интегрирования или суммирования. Кроме того, недостаточно внимания уделяется оценке погрешностей и границ применимости различных моделей и методов вычислений.

б) Для исследования структуры ЭМ поля и расчета распределения ЭМ силы в большинстве случаев необходимо учитывать концевые элементы, обусловленные как металлом, так и индуктором. Расчет моделей этого типа основан на применении конечно-разностных методов и требует дальнейшего развития с целью создания эффектив-

ных консервативных схем сквозного счёта при произвольной геометрии подобластей моделируемого устройства.

2) Решение гидродинамической части проблемы более сложно и менее разработано, так как задача двумерна и нелинейна. Кроме того, необходимо найти подходы для учёта турбулентного характера течения, не выходя за рамки реальных возможностей счёта на существующих ЭВМ.

3) В рассмотренных работах практически отсутствуют количественные сравнения и сопоставления экспериментальных и теоретических результатов, что необходимо для уточнения физико-математической модели, описывающей рассматриваемые МГД процессы.

4) Имеющиеся экспериментальные и теоретические данные недостаточны для выяснения строгих количественных зависимостей движения от комплекса электромагнитных и геометрических параметров, однако, основные параметры, определяющие характер движения, выделены и установлен характер зависимости гидродинамических показателей, в том числе, максимального значения скорости движения жидкого металла, от параметров системы.

Предлагаемая далее физико-математическая модель рассматриваемых процессов и единая методика численного определения комплекса МГД величин позволяет перечисленные ранее недостатки устранить.

### 3. УТОЧНЕННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОГО МГД-УСТРОЙСТВА

#### 3.1. Анализ основных допущений

В результате анализа математических моделей индукционных МГД-устройств с замкнутым течением проводящей жидкости, проведенного в разделе 2 и в работе [40], для дальнейших расчетов была выбрана модель, являющаяся обобщением ранее рассмотренных (рис. 3.1а). В ней выделены шесть областей с существенно различными свойствами:

1. Однородный проводник произвольной осесимметричной формы с удельной электропроводностью  $\sigma = \text{const}$ . Область неферромагнитна - относительная магнитная проницаемость  $\mu = 1$ , что выполняется практически всегда для жидкого металла (феррожидкости не рассматриваются). Внутри проводника нет источников наружных токов. Вся среда находится в жидком состоянии и несжимаема ( $\text{div } \vec{v} = 0$ ), плотность её постоянна во всем объеме ( $\rho = \text{const}$ ). Снизу и в радиальном направлении металл ограничен непроницаемой, твердой стенкой, а поверхность жидкого металла - свободна. Течение металла имеет ламинарный характер (коэффициент кинематической вязкости  $\nu = \text{const}$ ) или турбулентный характер.

2. Проводящий ( $\sigma = \text{const}$ ) или непроводящий ( $\sigma = 0$ ) сосуд произвольной осесимметричной формы, который может иметь ферромагнитные свойства ( $\mu \gg 1$ ). Стенки сосуда непроницаемы для металла.

3. Кольцеобразный индуктор конечных размеров, который состоит из произвольного числа секций. Заданы плотности периодического во времени азимутального наружного тока в секциях или

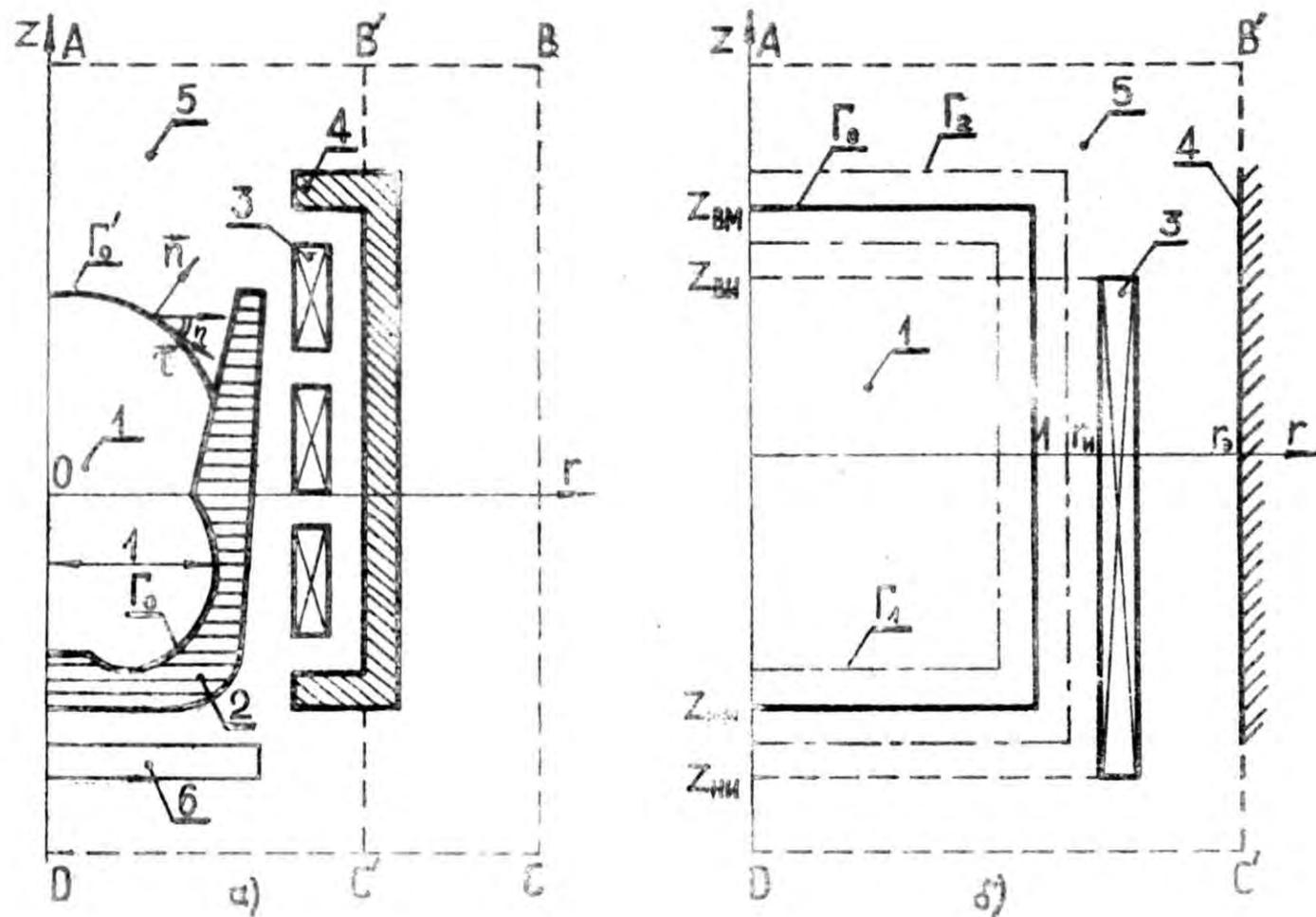


рис. 3.1. Осесимметричная модель индукционного МГД-устройства (в разрезе). 1 - жидкий металл, 2 - сосуд, 3 - индуктор, 4 - магнитный экран, 5 - газ или вакуум, 6 - электрический экран.  $\Gamma_0$  - граница "металл-сосуд",  $\Gamma_0'$  - граница "металл-газ".

перепад напряжения и проводимость материала секций индуктора. Токи, протекающие в разных секциях индуктора могут совпадать по фазе (однофазный индуктор) или быть сдвинутыми между собой по фазе (многофазный индуктор).

4. Непроводящий слой с большой относительной магнитной проницаемостью - магнитный экран. Предполагается, что внутри экрана:  $\mu = \text{const} \gg 1$ . Выбирая  $\mu = 1$ , получаем устройство без магнитного экрана.

5. Неограниченное, непроводящее ( $\sigma = 0$ ;  $\mu = 1$ ), окружающее пространство без источников электромагнитного поля.

6. Проводящая область с постоянной по объёму проводимостью ( $\sigma = \text{const}$ ), т.н. электрический экран. Выбор  $\sigma = 0$  эквивалентен отсутствию электрического экрана.

При формулировке этой модели, сделан ряд допущений:

I) Фиксирована форма проводящей области, т.е. уравнение образующей задаётся, игнорируя тем самым изменение свободной поверхности металла под действием ЭМ сил и течения. В большинстве металлургических МГД-устройств мениск слабо выражен (исключением является МГД-обжатие). Высота мениска в индукционных плавильных печах (ИПП), например, не превышает 5% высоты столба расплавленного металла [2]. Поэтому во многих случаях оправданно игнорируется изгиб свободной поверхности металла - мениск, возникающий под действием ЭМ сил. Поверхность металла при этом задаётся уравнением  $z = Z_{\text{вм}} = \text{const}$ ,

Как показало сравнение соответствующих численных методик, в результате сведения формы области, заполненной жидкостью, к комбинации цилиндрических тел значительно упрощается алгоритм счёта, и тем самым экономится машинное время по сравнению с общей методикой, рассматривающей область произвольной криволиней-

формы (см. также разделы 4 и 6).

2) Электропроводность, плотность и ламинарная вязкость расплава во всем объеме постоянны. В реальных устройствах существуют градиенты температуры, которые определяют различия физических свойств в объеме расплава. Однако, эти различия относительно незначительны. Например, при возрастании температуры цинка от  $600^{\circ}\text{C}$  до  $700^{\circ}\text{C}$ , т.е. на  $100^{\circ}$ , его плотность уменьшается примерно на  $1,3\%$  и электропроводность на  $0,3\%$  [7].

3) Предполагается однородность расплава относительно состава и свойств, не учитываются неоднородности, определяемые присутствием твердых металлических и неметаллических включений. В случае интенсивного перемешивания в объеме металла эти допущения оправданы [3].

4) Предполагается, что присутствие ферромагнитных частей в устройстве не нарушает синусоидальную зависимость ЭМ поля от времени.

5) Моделирование осредненного турбулентного течения проводится в рамках полуэмпирической теории (см. раздел 5).

6) Используется приближение квазистационарного ЭМ поля.

Выбранная модель содержит шесть областей конечных размеров с различными физическими свойствами, и поэтому МГД-процессы в ней поддаются только численному расчету.

### 3.2. Безразмерные уравнения МГД в случае аксиальной симметрии

Общий вид системы уравнений МГД представлен в разделе 2, задачей настоящего подраздела является запись этой системы с учетом особенностей рассматриваемой модели (рис. 3.10) в случае аксиальной симметрии.

Как уже отмечалось в подразделе 2.1., в случае осевой симметрии исследуемого устройства пространственная задача сводится к квазидвумерной и целесообразно введение векторного потенциала (2.25). Кроме того, уравнение магнитной индукции (2.24) может быть использовано только для проводника без наружных токов, а также при отсутствии ферромагнетиков. Поэтому оно непригодно для описания ЭМ процессов в рассматриваемой здесь модели в целом, где кроме электропроводящих областей ещё существуют области с заданной плотностью тока, непроводящая область - окружающее пространство, и в большинстве случаев (в зависимости от вида моделируемого устройства) также ферромагнитный экран, где  $\mu \gg 1$ . Безразмерное уравнение для комплексного потенциала описывающее ЭМ явления в такой неоднородной области получается из системы уравнений Максвелла в квазистационарном приближении [30,31]:

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{A}\right) = -i \hat{\omega} \vec{A} + \vec{j}_0, \quad (3.1)$$

где  $\vec{j}_0 = \frac{1}{j_0} \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \infty}} (\nabla \varphi)$  - плотность наружного безвихревого тока, (3.2)

$\varphi$  - скалярный потенциал электрического поля,

$j_0$  - характерная плотность тока - азимутальная составляющая плотности тока в одной из секций индуктора.

Для приведения уравнения (3.1) к безразмерному виду использован характерный векторный потенциал  $A_0 = j_0 \mu_0 r_0^2$ . (3.3)

Вместо  $j_0$  характерными величинами можно выбрать настил тока или амплитуду суммарного тока в секции индуктора. При этом меняются выражения (3.1) и (3.3).

В индукторе существенно отлична от нуля только азимутальная компонента плотности тока  $j_\varphi \equiv j_0 = f(r, z)$ . Остальными ком-

компонентами тока пренебрегается:  $j_z = j_r = 0$ . Из осевой симметрии и азимутальности токов возбуждения для магнитной индукции следует, что  $B_\varphi^0 = 0$ ;  $B_z^0 = f(r, z)$ ;  $B_r^0 = f(r, z)$ ; (3.4)

для векторного потенциала  $-A_z^0 = A_r^0 = 0$ ;  $A_\varphi^0 = A = f(r, z)$ . (3.5)

Уравнение для азимутальной составляющей комплексного векторного потенциала в цилиндрической системе координат принимает вид:

$$\frac{1}{A} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial (rA)}{\partial r} \right] + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right\} = -j_a + i\hat{\omega}A - \left\{ \frac{\partial \left( \frac{1}{A} \right)}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial (rA)}{\partial r} \right] + \frac{\partial \left( \frac{1}{A} \right)}{\partial z} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} \right\}. \quad (3.6)$$

Последний член правой части уравнения (3.6) отличен от нуля только там, где  $\mu \neq \text{const}$ , т.е. на границе ферромагнитного экрана и внутри экрана, если учитывается зависимость  $\mu$  от магнитной индукции. Влияние индуктора учитывается путём задания распределения плотности наружного тока. Предполагается, что в индукторе  $j_a \neq 0$ , а вне индуктора  $j_a = 0$ . Безразмерная частота отлична от нуля ( $\hat{\omega} \neq 0$ ) в проводниках, а вне них  $\hat{\omega} = 0$ .

В частном случае, если ферромагнитные области отсутствуют, уравнение для азимутальной составляющей векторного потенциала упрощается:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial (rA)}{\partial r} \right] + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = -j_a + i\hat{\omega}A. \quad (3.7)$$

Так как величины  $j_\varphi^0, E_r^0, B_z^0$  выражаются через векторный потенциал:

$$j_\varphi^0 = -i\hat{\omega}A; \quad E_r^0 = -\frac{\partial A}{\partial z}; \quad B_z^0 = \frac{1}{r} \frac{\partial (rA)}{\partial r}; \quad (3.8-3.10)$$

и компоненты средней плотности силы (2.33) имеют следующие выражения:

$$\bar{f}_r = \frac{1}{2} \text{Re}(j_\varphi^0 E_z^{0*}); \quad \bar{f}_\varphi = 0; \quad \bar{f}_z = -\frac{1}{2} \text{Re}(j_\varphi^0 E_r^{0*}); \quad (3.11)$$

то в конечном итоге:

$$\begin{aligned} \bar{f}_r &= \frac{\hat{\omega}}{2} \left( A_z \frac{\partial A_R}{\partial r} - A_R \frac{\partial A_z}{\partial r} \right); \\ \bar{f}_z &= \frac{\hat{\omega}}{2} \left( A_r \frac{\partial A_R}{\partial z} - A_R \frac{\partial A_z}{\partial z} \right); \end{aligned} \quad (3.12)$$

где через  $A_R$  и  $A_I$  обозначены соответственно коэффициенты действительной и мнимой частей комплексного потенциала ( $A = A_R + iA_I$ ).

Характерная плотность силы определена следующим образом:

$$f_0 = j_0^2 \mu_0 r_0. \quad (3.13)$$

Принятое здесь приближение малых магнитных чисел Рейнольдса (2.23), которое указывает на малую плотность индуцированных движением проводника токов, отнюдь не означает, что и плотность электромагнитной силы мала.

Величины  $j_\varphi^0$ ,  $\dot{B}_r^0$ ,  $\dot{B}_z^0$  в выражениях (3.8) - (3.10) записаны в комплексной форме, поэтому амплитудное значение этих величин определяется как модуль комплексного числа. Например:

$$|j_\varphi^0| = \hat{\omega} \sqrt{(\operatorname{Re} A)^2 + (\operatorname{Im} A)^2} \quad \text{и} \quad (3.14)$$

соответственно осредненная по периоду изменения поля тепловая мощность тока (тепло Джоуля)  $\bar{q} = \hat{\omega}^2 [(\operatorname{Re} A)^2 + (\operatorname{Im} A)^2]$ , (3.15)

где безразмерная величина определена на основе характерной величины  $q_0 = j_0^2 / 2\sigma$ . (3.16)

Более удобной для численной реализации уравнения движения (Навье-Стокса) в двумерном случае является роторная форма, которая получается в результате применения к уравнению (2.8) операции ротора и несложных векторных преобразований:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\vec{\nabla} \times \vec{v})}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \left[ \left( \frac{1}{\operatorname{Re}} \vec{\nabla} - \vec{v} \right) \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \right] + 2 \cdot \vec{\nabla} \times \left[ (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \frac{1}{\operatorname{Re}} \right] = \\ = \vec{\nabla} \times \left[ \frac{1}{\operatorname{Re}} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \right] + A \cdot \vec{\nabla} \times \vec{f}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Таким образом, из рассмотрения исключаются давление и сила тяжести. Введением функции тока Стокса  $\Psi$  (2.53) тождественно удов-

используется условие несжимаемости (2.20), поэтому оно далее не приводится.

Из равенства (3.17) при  $Re = const$  следует нелинейное уравнение четвертого порядка для функции тока:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left( r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial z} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} + \frac{\partial \psi}{\partial r \partial z^2} + \frac{3}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial r} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial z \partial r^2} \right) \right] = \frac{1}{Re r} \cdot \\ & \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial r^4} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} - \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial z^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} + \frac{3}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{3}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^4 \psi}{\partial r^2 \partial z^2} \right) + Al \left( \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_2}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Существует ещё другая возможность записи уравнения движения, при этом используется единственная отличная от нуля азимутальная компонента ротора скорости  $w$  (2.52).

В случае стационарного течения из уравнения (3.17) при  $Re = const$  следует уравнение для ротора скорости:

$$\frac{\partial^2 (w/r)}{\partial z^2} \left( r v_2 - \frac{3}{Re} \right) + v_2 \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{r}{Re} \left( \frac{\partial^2 (w/r)}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 (w/r)}{\partial z^2} \right) + Al \cdot \varepsilon, \quad (3.19)$$

где  $\varepsilon$  - азимутальная составляющая ротора силы  $(rot \vec{f})_\varphi$  (2.49).

Из определения (2.52) и (2.53) следует уравнение связи между ротором скорости  $w$  и функцией тока  $\psi$ :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = w. \quad (3.20)$$

Таким образом, система трёх уравнений, описывающих ламинарное течение в аксиально-симметричном случае (два уравнения для компонент скорости и уравнение неразрывности) сводится к одному уравнению четвертого порядка для функции тока (3.18) или к системе двух уравнений второго порядка (3.19) и (3.20) для переменных  $w$  и  $\psi$ .

Как будет показано в разделе 5 при определённых допущениях осреднённое турбулентное течение также описывается уравнением

(3.17), где число Рейнольдса  $Re$  заменено некоторым эффективным числом  $Re_{эф} \neq const$ , определение которого является самостоятельной проблемой. С использованием ротора скорости  $\vec{\omega}$  уравнение (3.17) записывается в следующей форме:

$$\text{rot}(\vec{v} \times \vec{\omega}) = \frac{1}{Re} \text{rot rot } \vec{\omega} + \text{rot } \vec{f}_r - A_1 \text{rot } \vec{f} \quad (3.21)$$

где  $\vec{f}_r = \frac{1}{Re_r} \text{rot } \vec{\omega} + \text{grad } \frac{1}{Re_r} \times \vec{\omega} + 2[(\vec{v} \cdot \text{grad}) \text{grad } \frac{1}{Re_r}]$  - плотность турбулентной силы,

$Re_r$  - турбулентное число Рейнольдса, которое определяется соотношением:  $\frac{1}{Re_{эф}} = \frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_r}$  (3.22)

Уравнение (3.21) решается совместно с уравнение связи (3.20) и дополнительными соотношениями для определения функции  $Re_r$  (см. раздел 5).

Так как при этом использовалось безиндукционное приближение, то электродинамическая часть задачи решается независимо от гидродинамической. Если отказаться от условия  $Re_m \ll 1$ , то уравнение для азимутальной составляющей потенциала принимает вид:

$$\beta \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial(A_r)}{\partial r} \right] + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right\} = i \hat{\omega} A - j_0 + Re_m \left[ v_z \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{v_r}{r} \frac{\partial(A_r)}{\partial r} \right] - \left[ \frac{\partial B}{\partial r} \frac{\partial(A_r)}{\partial r} + \frac{\partial B}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial z} \right] ; \quad (3.23)$$

где  $\beta = 1/\mu$  (3.24)

а выражения средней электромагнитной силы

$$\vec{f}_r = -\frac{1}{2} \left\{ \hat{\omega} (A_r \frac{\partial A_r}{\partial r} - A_z \frac{\partial A_z}{\partial r}) + Re_m \left[ \frac{v_z}{r} \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} \frac{\partial(A_r r)}{\partial r} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \frac{\partial(A_z r)}{\partial r} \right) + \frac{v_r}{r^2} \left( \left( \frac{\partial(A_r r)}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial(A_z r)}{\partial r} \right)^2 \right) \right] \right\} ; \quad (3.25)$$

$$\vec{f}_z = -\frac{1}{2} \left\{ \hat{\omega} (A_r \frac{\partial A_r}{\partial z} - A_z \frac{\partial A_z}{\partial z}) + Re_m \left[ v_z \left( \left( \frac{\partial A_z}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} \right)^2 \right) + \frac{v_r}{r} \left( \frac{\partial A_z}{\partial z} \frac{\partial(A_z r)}{\partial r} + \frac{\partial A_r}{\partial z} \frac{\partial(A_r r)}{\partial r} \right) \right] \right\} . \quad (3.26)$$

дифференциальное уравнение (3.23) в данном случае решается вместе с (3.22) из возможных систем уравнений, описывающих гидродинамические процессы. Учёт обратного воздействия течения на электромагнитное поле ( $R_{em} \neq 0$ ) расширяет границы применения предложенной модели - охватываются также промышленные установки, в которых  $1 < R_{em} < 3$ .

### 3.3. Граничные условия

Так как уравнение (3.23) описывает электромагнитные процессы во всех областях модели (рис. 3.1), т.е. при переходе от одной области к другой меняется только значения коэффициентов  $\hat{\omega}$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $R_{em}$ , то коэффициенты являются кусочно-гладкими функциями. Не возникает проблема об условиях для потенциала на границах между областями с различными свойствами.

Из-за неограниченности области 5 (рис. 3.1) неограниченной является вся система и из предложения, что в бесконечности источников электромагнитного поля нет, следует

$$A_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \quad ; \quad A_{z \rightarrow \pm \infty} \rightarrow 0 \quad . \quad (3.27), (3.28)$$

Из-за осевой симметрии модели достаточно рассматривать ЭМ поле только в полуплоскости, ограниченной осью симметрии. На силовой линии с уравнением

$$E_r/dr = B_z/dz \quad ,$$

следует из определения векторного потенциала (3.9), (3.10)

$A_{r=const}$ . Ось симметрии одновременно является силовой линией (на оси  $B_z=0$ ), что в свою очередь означает  $A=const$ , и из равенства (3.10) вытекает требование  $A|_{r=0} = 0$ . (3.29)

Этот результат понятен, так как линия  $r=0$ , будучи силовой линией, замыкается через бесконечность, где  $A=0$  (3.27).

В случаях, когда высота магнитного экрана превышает высоту металла и индуктора (рис. 3.1), за экраном переменное магнитное поле практически отсутствует [16]. В силу этого рассмотрение бесконечной в радиальном направлении области можно заменить рассмотрением ограниченной области (прямая  $B'C'$  на рис. 3.1). Часто возможны дальнейшие упрощения: магнитный экран можно считать "идеальным", т.е., требовать, чтобы на поверхности экрана тангенциальная составляющая магнитной индукции  $B_z$  равнялась нулю, или что эквивалентно  $\partial A / \partial r \Big|_{r=r_0} = 0$ . (3.30)

При этом область в радиальном направлении ограничивается прямой  $B'C'$ . Граничные условия (3.27-3.29) или (3.28) и (3.30) обеспечивают однозначную разрешимость уравнения для потенциала (3.23).

Гидродинамические граничные условия для составляющих скорости  $v_z$  и  $v_r$  обычные [42]:

1. На границах, где жидкий металл соприкасается со стенками сосуда задаются условия прилипания:  $v_n \Big|_{\Gamma_0} = v_r \Big|_{\Gamma_0} = 0$  или эквивалентные условия:  $v_r \Big|_{\Gamma_0} = v_z \Big|_{\Gamma_0} = 0$  (3.31)

2. На свободной поверхности задаются условия свободного скольжения:  $v_n \Big|_{\Gamma_0'} = 0$  ;  $\partial v_r / \partial n \Big|_{\Gamma_0'} = 0$  , (3.32)

где  $v_n = v_z \cos \eta - v_r \sin \eta$  - нормальная к поверхности составляющая скорости, (3.33)

$v_r = v_z \sin \eta + v_r \cos \eta$  - тангенциальная составляющая скорости, (3.34)

$\eta$  - угол между осью  $r$  и касательной поверхности (рис. 3.1а).

Если на поверхности  $\Gamma_0'$  существенное значение имеет тормозящее влияние плёнки окислов или др. факторов, то и здесь могут быть заданы условия прилипания (3.31).

Таблица 3.1.

Сводка гидродинамических граничных условий

Граница (рис. 3.1)	Условия для составляющих скорости $v_r$ и $v_z$ Система уравнений (3.17) и (2.20)	Условия для функции тока $\psi$ Уравнение (3.18)	Условия для функции тока $\psi$ и вихря $w$ скорости Системы уравнений (3.19) и (3.20) ИЛИ (3.21) и (3.20)
$r = r_a = \text{const}$ $r \neq 0$	$v_r = 0$ $v_z = 0$	$\psi = 0$ $\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$	$\psi = 0$ $w = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}$ (3.37)
$z = z_a = \text{const}$ $z \neq z_{\text{вн}}$	$v_r = 0$ $v_z = 0$	$\psi = 0$ $\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$	$\psi = 0$ $w = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$ (3.38)
$z = z_{\text{вн}}$	$v_z = 0$ $\frac{\partial v_r}{\partial z} = 0$	$\psi = 0$ $\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$	$\psi = 0$ $w = 0$
$r = 0$	$v_r = 0$ $\frac{\partial v_z}{\partial r} = 0$	$\psi = 0$ $\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 0$	$\psi = 0$ $w = 0$
Твёрдая стенка $\Gamma_0$	$v_r = 0$ $v_z = 0$	$\psi = 0$ $-\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial z}$	$\psi = 0$ $w = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)$ (3.39)
Непроницаемая поверхность $\Gamma'_0$	$v_z \cos \alpha = v_r \sin \alpha$ $\left( \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \cdot \frac{\sin 2\eta}{2} =$ $= \frac{\partial v_z}{\partial r} \sin^2 \eta - \frac{\partial v_r}{\partial z} \cos^2 \eta$	$\psi = 0$ $\frac{r \partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$	$\psi = 0$ $w = 0$

3. Линия  $r=0$  является осью симметрии, поэтому

$$v_r|_{r=0} = 0 \quad (3.35)$$

Второе условие на оси:

$$\partial v_z / \partial r|_{r=0} = 0 \quad (3.36)$$

означает требование непрерывности вихря скорости  $\omega$  при  $r=0$ .

Используя связи между составляющими скорости и функцией тока (2.53), а также между скоростью и ротором скорости (2.52) получаем граничные условия для уравнения (3.18) и для систем уравнений (3.19), (3.20) или (3.20), (3.21). Сводка эквивалентных граничных условий для  $v_z$ ,  $v_r$ ,  $\psi$  и  $\omega$  как в ламинарном, так и в турбулентном режимах приведена в таблице 3.1.

Так как функция  $\psi$  определена с точностью до аддитивной постоянной, то на линии тока, совпадающей с границей области, т.е. там, где  $\psi = \text{const}$ , произвольная постоянная выбрана равной нулю.

Количество граничных условий во всех трёх приведённых вариантах выбора переменных, как показали численные эксперименты, достаточно для получения однозначного решения.

Способ приведения МГД-уравнений и граничных условий, описывающих сформулированную модель, к конечно-разностному виду характеризуется в разделах 4 и 6.

#### 4. МЕТОДИКА РАСЧЁТА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И ПОЛЯ СИЛ

##### 4.1. Расчёты по ряду Фурье-Бесселя и с помощью несобственного интеграла

Из анализа литературы ([40], раздел 2) следует, что практическая методика численного расчёта параметров системы "бесконечно длинный цилиндрический проводник - индуктор конечной высоты" (рис. 2.1б), в подразделе 4.1 всюду подразумевается эта модель) на основе известных аналитических выражений [6] отсутствует. Это, по мнению автора, связано с трудностями численного интегрирования несобственных интегралов типа (2.42) с осциллирующей подинтегральной функцией. Упрощение подинтегральной функции в выражении потенциала [17,18] налагает существенные ограничения на параметры системы. Неудобством рассмотренных методик является также то, что все расчёты проводятся в размерном виде. Поэтому представляет интерес проведение численных расчётов поля и силы с применением ЭВМ в безразмерном виде, без ограничений на параметры системы "металл-индуктор", сравнение методов расчёта, а также выяснение условий применимости модели (рис. 2.1б) и методик для расчётов ЭМ поля и движущих сил в системе с проводящей областью и индуктором конечных размеров.

Решение уравнения для азимутальной составляющей потенциала (3.7) при  $j_a=0$  осуществляется с помощью представления потенциала  $A$  в виде суммы первичного и вторичного потенциалов:

$A = A_n + A_e$  . Первичный потенциал  $A_n$  представляет поле ин-

дуктора при холостом ходе, а  $A_0$  выражает искажения поля, вносимые присутствием проводящей области [6]. С учётом граничных условий  $A_I = A_{II}$ ;  $\frac{\partial}{\partial r}(rA_I) = \frac{\partial}{\partial r}(rA_{II})$ , при  $r=1$  ( $r=r_0$ ) (4.1) получается выражение для безразмерного векторного потенциала в первой области (рис. 2.1б) в виде несобственного интеграла (индекс, указывающий на область, далее опускается):

$$A = C_1^I \int_0^\infty \tilde{\Phi}_1^I(\lambda, r, z) d\lambda \quad ; \quad (4.2)$$

$$C_1^I = 2I r_1 / \pi \quad ; \quad (4.3)$$

$$\Phi_1^I = F_1(\lambda) \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \cos \lambda (b_u - z) I_1(p r) ; \quad (4.4)$$

$$F_1(\lambda) = \frac{\sin(b_u \lambda) K_1(\lambda r_1)}{\lambda I_1(p) K_0(\lambda) + p I_0(p) K_1(\lambda)} ; \quad (4.5)$$

$$p^2 = \lambda^2 + i\hat{\omega} \quad , \quad (4.6)$$

где  $I$  - безразмерная линейная токовая нагрузка,  
 $r_1, b_u$  - безразмерные радиус и полувысота индуктора,  
 $I_1, I_0, K_1, K_0$  - модифицированные функции Бесселя.

В соответствии с формулами (3.8 - 3.10) составляющие индукции и плотность вихревых токов в металле определяются следующими формулами:

$$j_\varphi^0 = -i\hat{\omega} C_1^I \int_0^\infty \tilde{\Phi}_1^I d\lambda \quad ; \quad (4.7)$$

$$\dot{B}_r^0 = -C_1^I \int_0^\infty \tilde{\Phi}_2^I d\lambda \quad ; \quad (4.8)$$

$$\Phi_2^I = F_1(\lambda) \sin \lambda (L_u - z) \cdot I_1(p r) ; \quad (4.9)$$

$$\dot{B}_z^0 = C_1^I \int_0^\infty \tilde{\Phi}_3^I d\lambda \quad ; \quad (4.10)$$

$$\Phi_s^2 = F_s(\lambda) \cdot \frac{1}{\lambda} \cos \lambda (b_0 - z) p I_0(pr). \quad (4.11)$$

Для вычисления ЭМ силы непосредственно используются формулы (3.11).

Если вместо отдельного индуктора рассматривается периодическая в направлении оси симметрии система индукторов с периодом  $T$ , то для векторного потенциала выполняется условие периодичности  $A(r, z) = A(r, z + T)$  и выражение потенциала через несобственный интеграл можно заменить рядом Фурье-Бесселя. Чтобы расчёты по этой модели давали результаты, согласующиеся с результатами, полученными в случае одного индуктора, необходимо выбрать период  $T$  достаточно большим. Этим практически исключается взаимное влияние полей соседних индукторов. Выражения ЭМ величин для модели с периодической системой индукторов имеют следующий вид:

$$A = C_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^2(n, r, z) ; \quad (4.12)$$

$$\Phi_n^2 = F_n \cdot \frac{1}{n} \cos(\beta_n z) I_1(\gamma_n r) ; \quad (4.13)$$

$$F_n = \frac{K_1(\beta_n r_0) \sin(\beta_n b_0)}{\beta_n I_1(\gamma_n) K_0(\beta_n) + \gamma_n I_0(\gamma_n) \cdot K_1(\beta_n)} ; \quad (4.14)$$

$$\beta_n = \pi n / T ; \quad (4.15)$$

$$\gamma_n^2 = \beta_n^2 + i\omega ; \quad (4.16)$$

$$\dot{E}_r^0 = \frac{\pi}{T} C_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^2 ; \quad (4.17)$$

$$\Phi_n^2 = F_n \sin \beta_n z \cdot I_1(\gamma_n r) ; \quad (4.18)$$

$$\dot{B}_z^0 = C_1^2 \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_3^2 ; \quad (4.19)$$

$$\Phi_3^2 = \frac{1}{n} F_n \eta_n I_0(\eta_n r) \cos(\beta_n z) ; \quad (4.20)$$

$$j\dot{\varphi}^0 = -i\hat{\omega} C_1^2 \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_1^2 , \quad (4.21)$$

где  $n = 2k - 1$  .

В выражениях для векторного потенциала и других ЭМ величин (4.2)-(4.11), так и в виде рядов (4.12)-(4.14) содержатся модифицированные функции Бесселя индексов 0 и 1 от комплексного аргумента. Для расчёта этих функций с применением ЭВМ на всей комплексной плоскости используются приближённые формулы, полученные в работе [43]:

$$\operatorname{Re} I_0 = \sum_{k=0}^6 a_k u^{2k} \cos 2k\varphi ; \quad \operatorname{Im} I_0 = \sum_{k=0}^6 a_k u^{2k} \sin 2k\varphi ; \quad (4.22)$$

$$\operatorname{Re} I_1 = \rho \sum_{k=0}^6 b_k u^{2k} \cos(2k+1)\varphi ; \quad \operatorname{Im} I_1 = \rho \sum_{k=0}^6 b_k u^{2k} \sin(2k+1)\varphi , \quad (4.23)$$

при  $0 < \rho \leq 3,75$  ;

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} I_0 &= \sqrt{\rho} \left[ e^x \sum_{k=0}^8 c_k u_1^k \cos \varphi_1 + \xi e^{-x} \sum_{k=0}^8 (-1)^k c_k u_1^k \sin \varphi_2 \right] ; \\ \operatorname{Im} I_0 &= \sqrt{\rho} \left[ -e^x \sum_{k=0}^8 c_k u_1^k \sin \varphi_1 + \xi e^{-x} \sum_{k=0}^8 (-1)^k c_k u_1^k \cos \varphi_2 \right] ; \\ \operatorname{Re} I_1 &= \sqrt{\rho} \left[ e^x \sum_{k=0}^8 d_k u_1^k \cos \varphi_1 - \xi e^{-x} \sum_{k=0}^8 (-1)^k d_k u_1^k \sin \varphi_2 \right] ; \\ \operatorname{Im} I_1 &= \sqrt{\rho} \left[ -e^x \sum_{k=0}^8 d_k u_1^k \sin \varphi_1 - \xi e^{-x} \sum_{k=0}^8 (-1)^k d_k u_1^k \cos \varphi_2 \right] ; \end{aligned} \quad (4.24)$$

при  $\rho > 3,75$

где  $\rho$  и  $\varphi$  - мнимый и действительный части комплексного числа  $p$  , являющегося аргументом функций  $I_0(p)$  ,  $I_1(p)$  ;

$$u = 8.75/\rho \quad ; \quad u_1 = 1/4 \quad ;$$

$$\varphi_1 = \left(k + \frac{1}{2}\right) \varphi - \text{Im} p \quad ;$$

$$\varphi_2 = \left(k + \frac{1}{2}\right) \varphi + \text{Im} p \quad ; \quad (4.25)$$

$$\xi = \begin{cases} 1, & \text{если } \text{Im} p > 0 \quad ; \\ 0, & \text{если } \text{Im} p = 0 \quad ; \\ -1, & \text{если } \text{Im} p < 0 \quad . \end{cases}$$

Коэффициенты  $a_k, b_k, c_k, d_k$  определяются выражениями:

$$a_k = \frac{(1.875)^{2k}}{(k!)^2} \quad ; \quad b_k = \frac{(1.875)^{2k}}{2k!(k+1)!} \quad ; \quad (4.26)$$

$$c_k = \frac{(-1)^k \Gamma(k + \frac{1}{2})}{\sqrt{2\pi} (7.5)^k k! \Gamma(\frac{1}{2} - k)} \quad ; \quad d_k = \frac{(-1)^k \Gamma(1 + k + \frac{1}{2})}{\sqrt{2\pi} (7.5)^k k! \Gamma(\frac{1}{2} - k + \frac{1}{2})}$$

однако, для практического их вычисления удобно пользоваться рекуррентными соотношениями, которые получены из (4.26) в результате применения рекуррентной формулы и формулы пополнений для гамма функции Эйлера [44]:

$$\begin{aligned} a_k &= a_{k-1} (1.875)^2 / k^2 \quad ; \quad a_0 = 1 \quad , \\ b_k &= b_{k-1} (1.875)^2 / (k+1)k \quad ; \quad b_0 = 0.5 \quad ; \\ c_k &= c_{k-1} (2k-1)^2 / 2^2 \cdot 7.5k \quad ; \quad c_0 = 1 / \sqrt{2\pi} \quad ; \\ d_k &= d_{k-1} (2k-3)(2k+1) / 2^2 \cdot 7.5k \quad ; \quad d_0 = 1 / \sqrt{2\pi} \quad ; \\ &k = 1, 2, 3 \dots \end{aligned} \quad (4.27)$$

Выражения функций Магдонольда  $K_0, K_1$  аналогичны формулам (4.23), (4.24) [43].

Для вычисления  $K_0, K_1, I_0, I_1$  от комплексного аргумента составлены стандартные программы типа SUBROUTINE на языке FORTRAN для вычислительной машины БС-415 .

Значения коэффициентов (4.27) при  $k=1, \dots, 6$  вычисляются с точностью до 5 значащих цифр.

Вычисленные значения функций сверялись с таблицами [44] в окрестности точки схождения  $\rho=3.75$ , где ошибка максимальна, точность составляет 0.01 - 0.1%, что достаточно для практических вычислений. Время вычисления одного значения функции около 1.01 минуты. Для повышения точности расчётов необходимо увеличить количество суммируемых членов в формулах (4.23), (4.24) и в целях устранения возможной потери точности при суммировании расчёт провести с двойной точностью.

Составляющие ЭМ поля и силы выражаются через несобственные интегралы I рода от комплексной функции действительного аргумента. Так как в этих интегралах промежуток интегрирования от 0 до  $\infty$ , и подынтегральные функции в точке  $\lambda=0$  имеют неопределённость вида "0/0", то вычисление интеграла сводится к трём основным задачам:

- 1) Нахождение значений подынтегральных функций при
- 2) Выбор метода интегрирования и интегрирование по конечному промежутку  $[0, m]$ .
- 3) Оценка вклада интеграла - остатка в интервале  $[m, \infty]$ .

В результате применения правил Лопиталя и использования асимптотических выражений  $K_0, K_1, I_0, I_1$  для  $\lambda \rightarrow 0$ , получаем следующие формулы:

$$\Phi_1^k(0, r, z) = \frac{b_k}{r} \frac{I_k(\rho_0 r)}{\rho_0 \cdot I_0(\rho_0)} \quad (4.28)$$

$$\Phi_2^k(0, r, z) = 0 \quad ; \quad \Phi_3^k(0, r, z) = I_0(\rho_0^2) / I_0(\rho_0)$$

где  $\rho_0^2 = i\hat{\omega}$ .

Интегрирование на конечном промежутке  $[0, m]$  осуществляется по методу Симпсона:

$$\int_0^m f(\lambda) d\lambda \approx \frac{m}{2m} \left( f_0 + f_{2m} + 2 \sum_{k=1}^{m-1} f_{2k} + 4 \sum_{k=1}^m f_{2k-1} \right), \quad (4.29)$$

где  $2m$  - число разбиений отрезка  $[0, m]$  (значения функций вычисляются в точках разбиения).

Выбор метода интегрирования обусловлен тем, что подынтегральные функции при  $\lambda \rightarrow \infty$  осциллируя быстро убывают, и основной вклад в интеграл даёт окрестность точки  $\lambda = 0$ , где подынтегральная функция законопостоянна.

Примечанием асимптотических формул для функций  $\Phi_1^{\pm}$ ;  $\Phi_2^{\pm}$ ;  $\Phi_3^{\pm}$  при  $\lambda \rightarrow \infty$  получаем:

$$\Phi_1^{\pm} \sim Y(\lambda) \frac{\cos \lambda (b_u - z)}{\lambda}; \quad (4.30)$$

$$\Phi_2^{\pm} \sim Y(\lambda) \sin \lambda (b_u - z);$$

$$\Phi_3^{\pm} \sim Y(\lambda) \frac{p}{\lambda} \cos \lambda (b_u - z);$$

$$Y(\lambda) = \sqrt{\frac{r}{r_1}} \frac{\sin \lambda b_u}{\lambda + p} e^{-\lambda(r_2 - a)} e^{-p(a-r)}. \quad (4.31)$$

Так как  $r_2 > 1$  и  $r \leq 1$ , то подынтегральные функции при  $\lambda \rightarrow \infty$  будут быстро убывать из-за присутствия экспонент с отрицательным показателем (4.31). Это позволяет выбрать верхний предел интегрирования  $m = 30 \div 70$ , шаг интегрирования выбирается в пределах  $0,1 \div 0,5$ . Программа, составленная для расчёта ЭМ величин  $A$ ,  $E_r$ ,  $E_z$ ,  $j_r$ ,  $j_z$  с использованием интегралов (4.2) - (4.11) позволяет провести расчёт одного варианта (значений функций в 15-20 точках) на ЭМ 6Э-415 с точностью 0,1 - 0,01% за 4-8 минут. В расчётах с использованием ряда (4.12 - 4.21)

время счёта и точность зависит от количества суммируемых членов — суммированием 4-5 членов ряда достигалась такая же точность 0.1-0.01% за меньшее время.

#### 4.2. Применение конечно-разностных методов

Как было показано в подразделе 3.2. в случае аксиальной симметрии модели (рис. 3.1) для расчёта поля и сил целесообразно использовать уравнение комплексного векторного потенциала, имеющего единственную отличную от нуля азимутальную составляющую  $A$ . Реализация конечно-разностных методов требует замены бесконечной полуплоскости (рис. 3.1), ограниченной осью симметрии, конечной прямоугольной областью ABCD или A'B'C'D'. На границах этой области AB, BC, CD задаются условия (3.27), (3.28), которые должны выполняться в бесконечности. Размеры сеточной области определяются в результате численных экспериментов с таким расчётом, чтобы дальнейшее расширение области влияло на результаты только в пределах заданной точности. Это условие как правило должно соблюдаться только для значений потенциала в центральной части модели. На оси симметрии задаётся условие (3.29). В приближении "идеального" магнитного экрана на границе B'C' задаётся условие (3.30).

В общем случае на области ABCD или A'B'C'D' накладывается неравномерная прямоугольная сетка с координатами узловых точек  $r_i$ ,

$z_k$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ;  $k = 0, 1, \dots, M$ ) и с шагами

$$h_i = r_{i+1} - r_i \quad \text{— по радиальному направлению (рис. 4.1)} \quad (4.32)$$

$$\text{и } g_k = z_{k+1} - z_k \quad \text{— по аксиальному направлению,} \quad (4.33)$$

где  $i = 0, 1, \dots, N-1$ ;  $k = 0, 1, \dots, M-1$ .

Сетка выбирается таким образом, чтобы границы основных областей (рис. 4.1), где значения физических параметров  $\hat{\omega}$  (3.28),

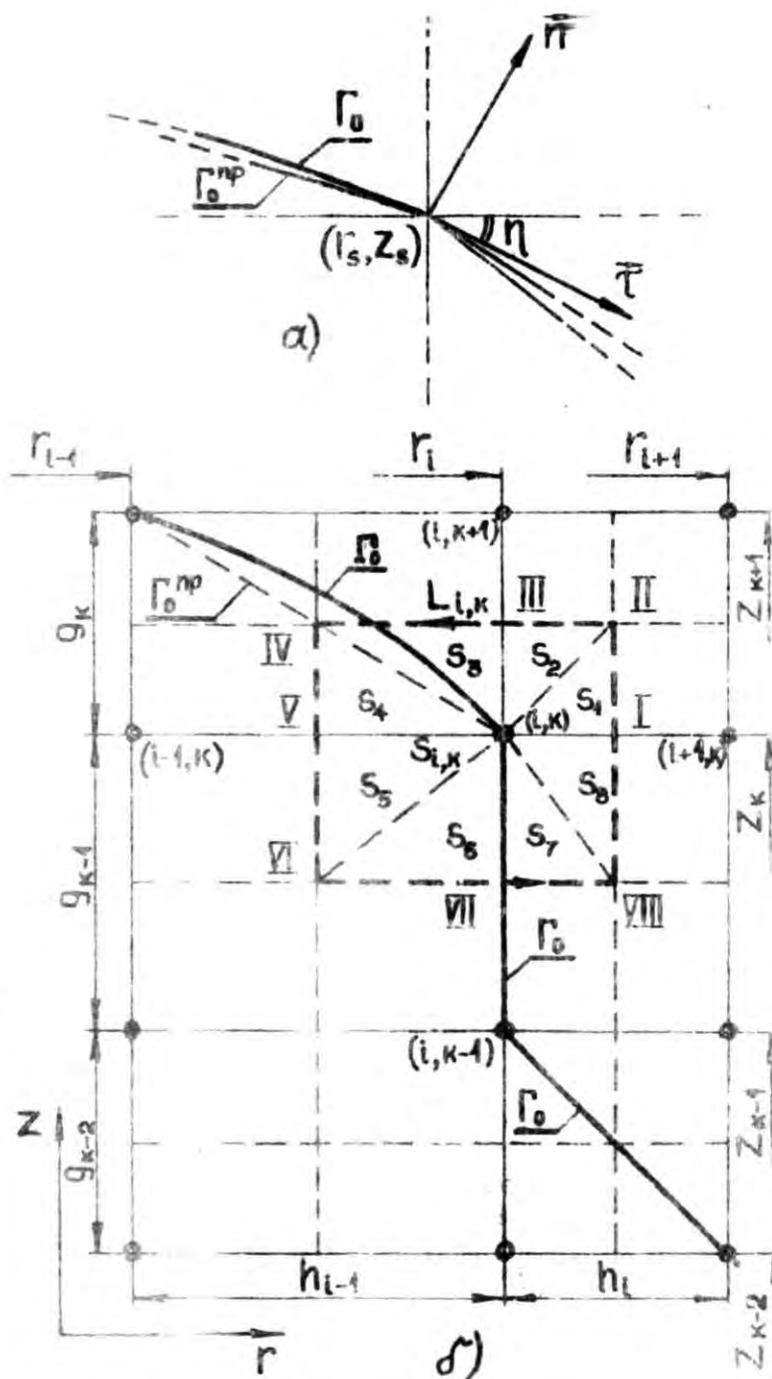


Рис. 4.1. Конечно-разностная сетка с переменным шагом.  $\Gamma_0$  - граница подобласти,  $\Gamma_0^{np}$  - аппроксимация границы,  $S_n$  - подъячейки, в каждой из которых величины  $\omega$ ,  $\mu$ ,  $\rho$  считаются постоянными.

...  $\mu$ ,  $R_{em}(2.7)$  меняется скачкообразно, по возможности совпадая с линиями сетки. В случае произвольной формы областей I и II это не всегда осуществимо, и граница проводящих областей сдвигается в пределах половины шага сетки. Кроме основной сетки на подготовительном этапе используется также вспомогательная сетка (изображена на рис. 4.1 прерывной линией\*), линии которой делят каждую ячейку основной сетки на четыре равные части. Индексом  $i + \frac{1}{2}$  будет обозначена линия вспомогательной сетки, проходящая посередине между  $i$ -ой и  $i+1$ -ой линиями основной сетки. В частном случае, для равномерной по каждому из направлений сетки

$$h_i = h = \text{const} \quad \text{и} \quad g_k = g = \text{const} .$$

Использование неравномерной сетки имеет определённые преимущества по сравнению со случаем равномерной сетки: позволяет сократить общее число узловых точек сетки при незначительном изменении результатов. Шаг сетки выбирается большим в периферийной зоне, где изменения потенциала от точки к точке малы, шаг сетки выбирается малым в местах, где изменения потенциала велики (например, в металле - около наружной поверхности). Таким образом, применение переменного шага позволяет экономить время счёта.<sup>1</sup> С другой стороны, применение неравномерной сетки усложняет конечно-разностные уравнения и алгоритм вычислений, что отрицательно влияет на время счёта, кроме того, обычно ухудшается аппроксимация исходных дифференциальных уравнений разностными. По этой причине далее предусмотрена возможность использования по необходимости как переменного (4.32), (4.33), так постоянно-го шага.

---

<sup>1</sup> Кроме того, целенаправленным выбором шагов сетки можно более точно на сетке аппроксимировать границы областей с различными свойствами.

Разностные аналоги граничных условий первого рода (3.27)–(3.29) имеют вид:

$$A_{0,k} = 0 \quad ; \quad A_{N,k} = 0 \quad ; \quad k = 0, 1, \dots, M \quad , \quad (4.34)$$

$$A_{i,0} = 0 \quad ; \quad A_{i,M} = 0 \quad ; \quad i = 0, 1, \dots, N \quad . \quad (4.35)$$

Условие (3.30) записывается в разностном виде с помощью трёхточечного шаблона:

$$3A_{N,k} - \left(1 + \frac{h_{N-2}}{h_{N-1}}\right)^2 A_{N-1,k} + A_{N-2,k} = 0 \quad . \quad (4.36)$$

При  $h_{N-2} = h_{N-1} = h$  порядок аппроксимации  $O(h^2)$ .

Консервативный разностный аналог уравнения (3.23) с разрывными коэффициентами находится с помощью метода интегральной аппроксимации [45] из интегральной формы уравнения (рис. 4.1):

$$\oint_{L_{i,k}} \frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{A} d\vec{l} = -i \int_{S_{i,k}} \hat{\omega} \vec{A} d\vec{s} + \int_{S_{i,k}} \vec{j}_a d\vec{s} + \int_{S_{i,k}} \text{Re}_m (\vec{v} \times \text{rot} \vec{A}) d\vec{s} \quad . \quad (4.37)$$

Контурам интегрирования  $L_{i,k}$  является граница прямоугольника  $S_{i,k}$  (ячейка вспомогательной сетки). Так как величины  $\hat{\omega}$ ,  $\mu$ ,  $\vec{j}_a$ ,  $\text{Re}_m$  на линиях основной сетки и диагоналях ячеек могут меняться скачкообразно, то соответствующие подинтегральные функции в (4.37) имеют разрыв, если узловая точка  $(r_i, z_k)$  находится на границе одной из подобластей модели (рис. 3.1). Граница разрыва может проходить или по вертикали  $r = r_i$ , по горизонтали  $z = z_k$ , по диагонали ячейки основной сетки или быть комбинированной, если точка  $(r_i, z_k)$  находится на границе криволинейной области (рис. 4.1). Таким образом, линии возможного разрыва делят ячейку на восемь подъячеек  $S_l$ ,  $(l = 1, \dots, 8)$  и интегрирование по ячейке необходимо заменить соответствующей суммой восьми интегралов по  $S_l$  с вынесением коэффициентов  $\hat{\omega}$ ,  $\mu$ ,  $\vec{j}_a$ ,  $\text{Re}_m$  из-под знака интегрирования. В результате приближенного интегрирования получается связь значения потенциала в точке  $(r_i, z_k)$  с его значениями

в соседних точках сетки (на пятиточечном шаблоне):

$$A_{i,k} = (B_{i,k}A_{i-1,k} + C_{i,k}A_{i+1,k} + D_{i,k}A_{i,k-1} + E_{i,k}A_{i,k+1} + iA_{i,k}G_{i,k} + J_{i,k}) / H_{i,k}, \quad (4.38)$$

где

$$H_{i,k}^1 = \frac{r_i}{h_i r_{i+1/2}} \left( \frac{g_k}{M_{i,k}} + \frac{g_{k-1}}{M_{i,k-1}} \right) + \frac{r_i}{h_{i-1} r_{i-1/2}} \left( \frac{g_k}{M_{i-1,k}} + \frac{g_{k-1}}{M_{i-1,k-1}} \right);$$

$$H_{i,k}^2 = \frac{1}{g_{k-1}} \left( \frac{h_i}{M_{i,k-1}} + \frac{h_{i-1}}{M_{i-1,k-1}} \right) + \frac{1}{g_k} \left( \frac{h_i}{M_{i,k}} + \frac{h_{i-1}}{M_{i-1,k}} \right); \quad (4.39)$$

$$H_{i,k} = H_{i,k}^1 + H_{i,k}^2;$$

$$G_{i,k} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^4 (\hat{\omega}_{2l-1} + \hat{\omega}_{2l}) \cdot S_{2l}; \quad (4.40)$$

$$J_{i,k} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^4 (j_{\omega 2l-1} + j_{\omega 2l}) \cdot S_{2l}; \quad (4.41)$$

$$B_{i,k} = \frac{r_{i-1}}{h_{i-1} r_{i-1/2}} \left( \frac{g_k}{M_{i-1,k}} + \frac{g_{k-1}}{M_{i-1,k-1}} \right) + \frac{v_{r_{i,k}} r_{i-1}}{r_i (h_i + h_{i-1})} R_{m_{i,k}}; \quad (4.42)$$

$$C_{i,k} = \frac{r_{i+1}}{h_i r_{i+1/2}} \left( \frac{g_k}{M_{i,k}} + \frac{g_{k-1}}{M_{i,k-1}} \right) - \frac{v_{r_{i,k}} r_{i+1}}{r_i (h_i + h_{i+1})} R_{m_{i,k}}; \quad (4.43)$$

$$D_{i,k} = \frac{1}{g_{k-1}} \left( \frac{h_i}{M_{i,k-1}} + \frac{h_{i-1}}{M_{i-1,k-1}} \right) + \frac{v_{2i,k}}{g_{k-1} + g_k} R_{m_{i,k}}; \quad (4.44)$$

$$E_{i,k} = \frac{1}{g_k} \left( \frac{h_i}{M_{i,k}} + \frac{h_{i-1}}{M_{i-1,k}} \right) - \frac{v_{2i,k}}{g_{k-1} + g_k} R_{m_{i,k}}; \quad (4.45)$$

$$R_{m_{i,k}} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^4 (R_{em_{2l-1}} + R_{em_{2l}}) \cdot S_{2l}; \quad (4.46)$$

$S_l$  - площадь соответствующего треугольника (рис. 4.1).

Подставляя в выражения (4.38) - (4.46)  $\mu = 1$  или  $Re_m = 0$  получаем соответственно уравнения для расчёта модели без магнитного экрана или в безиндукционном приближении. Для решения системы уравнений (4.38) - (4.46) с разностными граничными условиями (4.34) - (4.36) было применено три метода:

- 1) Метод матричной прогонки.
- 2) Метод переменных направлений.
- 3) Метод Гауса-Зейделя с применением релаксации.

Для решения задачи методом матричной прогонки уравнение (4.38) необходимо записать в матричной форме. Вводится матрица блочек  $\vec{U}_i$  размерности  $2m-2$ , составленная из действительных и мнимых частей потенциала в узловых точках, лежащих на одной вертикали и аналогично построенная матрица  $\vec{F}_i$ :

$$\vec{U}_i = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} A_{i,1} \\ \operatorname{Re} A_{i,2} \\ \vdots \\ \operatorname{Re} A_{i,m-1} \\ \operatorname{Im} A_{i,1} \\ \operatorname{Im} A_{i,2} \\ \vdots \\ \operatorname{Im} A_{i,m-1} \end{pmatrix} ; \quad \vec{F}_i = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} F_{i,1} \\ \operatorname{Re} F_{i,2} \\ \vdots \\ \operatorname{Re} F_{i,m-1} \\ \operatorname{Im} F_{i,1} \\ \operatorname{Im} F_{i,2} \\ \vdots \\ \operatorname{Im} F_{i,m-1} \end{pmatrix} . \quad (4.47)$$

(4.48)

Тогда уравнение (4.38) с учётом граничных условий (4.35) запишется в следующем виде:

$$X_i \vec{U}_{i+1} + Q_i \vec{U}_i + Y_i \vec{U}_{i-1} = \vec{F}_i ; \quad i = 1, \dots, N-1 , \quad (4.49)$$

где

$$Q_i = \begin{pmatrix} Q^0 & \vdots & -G \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G & \vdots & Q^0 \end{pmatrix} ; \quad G = \begin{pmatrix} G_{i,1} & & & 0 \\ & G_{i,2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & G_{i,m-2} \\ 0 & & & & G_{i,m-1} \end{pmatrix} ; \quad (4.50)$$

$$Q^0 = \begin{pmatrix} -H_{i,1} ; E_{i,1} & & & \\ D_{i,2} ; -H_{i,2} ; E_{i,2} & & & 0 \\ & \vdots & & \\ & & D_{i,m-2} ; -H_{i,m-2} ; E_{i,m-2} & \\ 0 & & & D_{i,m-1} ; -H_{i,m-1} \end{pmatrix} ;$$

$$X_i = \begin{pmatrix} C & | & 0 \\ \hline 0 & | & C \end{pmatrix}; \quad Y_i = \begin{pmatrix} B & | & 0 \\ \hline 0 & | & B \end{pmatrix}; \quad (4.51)$$

$$(4.52)$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{i,1} & & & 0 \\ & C_{i,2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_{i,n-2} \\ 0 & & & & C_{i,n-1} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} B_{i,1} & & & 0 \\ & B_{i,2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_{i,n-2} \\ 0 & & & & B_{i,n-1} \end{pmatrix}$$

Граничные условия (4.34) или (4.36) также используются в матричном виде:  $\vec{U}_0 = 0; \vec{U}_N = 0;$  (4.53)

или

$$3\vec{U}_N - \left(1 + \frac{h_{N-2}}{h_{N-1}}\right)^2 \vec{U}_{N-1} + \vec{U}_{N-2} = 0. \quad (4.54)$$

Таким образом, для определения  $n+1$  векторной величины имеются соответствующее количество неоднородных векторных уравнений и окончательные формулы матричной прогонки имеют вид [45]:

$$\vec{U}_i = \vec{P}_i \vec{U}_{i+1} + \vec{R}_i, \quad (4.55)$$

где

$$\vec{P}_i = -(Q_i + Y_i P_{i-1})^{-1} X_i; \quad (4.56)$$

$$\vec{R}_i = (Q_i + Y_i P_{i-1})^{-1} (F_i - Y_i \vec{R}_{i-1});$$

а значения  $\vec{P}_0, \vec{R}_0, \vec{U}_n$ , находятся при совместном решении уравнений (4.53) - (4.55):  $\vec{R}_0 = 0; \vec{P}_0 = 0;$

$$\vec{U}_n = (3E - KP_{N-1} + P_{N-2}P_{N-1})^{-1} (K\vec{R}_{N-1} - P_{N-2}\vec{R}_{N-1} + \vec{R}_{N-2}); \quad (4.57)$$

где  $K = (1 + h_{N-2}/h_{N-1})^2$ .

В частности, для сохранения порядка аппроксимации  $O(h^2 + g^2)$ ,  $h = \max_{i=0, M-1} h_i, g = \max_{k=0, M-1} g_k$  осуществляется следующий подход: область (рис. 3.1) делится на некоторое число частей, внутри каждой из которых постоянна, а в двух соседних частях шаг может отличаться в два раза. В этом случае элементы матриц  $X_i, Q_i, Y_i$  в точках перехода вычисляются по формулам (4.39) - (4.46) с шагом, вдвое большим шагу по каждому из направлений в окрестности каждой точки и с использованием соответствующих значений функций. Обращение  $n$  матриц размерности  $2M-2$  осуществляется с помощью стандартных программ. Несмотря на то, что разделение мнимой и действительной частей потенциала в уравнении (4.38) усложняет решение матричных уравнений, при счете это позволяет существенно сэкономить время, т.к. нет необходимости пользоваться действиями над комплексными числами.

В отличие от метода матричной прогонки метод переменных направлений и метод верхней релаксации являются итерационными методами.

Для реализации модификации метода переменных направлений метода продольно-поперечных прогонок [46] пятиточечное разностное уравнение (4.38) записывается в итерационном виде (итерационный слой указывает верхний индекс) с введением промежуточного итерационного слоя  $n - \frac{1}{2}$ :

$$A_{i,k}^{n+\frac{1}{2}} = A_{i,k}^n + \sigma_1 \left( E_{i,k} A_{i,k+1}^{n+\frac{1}{2}} + C_{i,k} A_{i,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - H_{i,k}^2 A_{i,k}^{n+\frac{1}{2}} + D_{i,k} A_{i,k-1}^n - E_{i,k} A_{i,k-1}^n + (A_{i,k}^{n+\frac{1}{2}} G_{i,k} + \varepsilon_{i,k} - H_{i,k}^2 A_{i,k}^n) \right); \quad (4.58)$$

$$A_{i,k}^{n+1} = A_{i,k}^{n+\frac{1}{2}} + \sigma_2 \left( E_{i,k} A_{i,k+1}^{n+\frac{1}{2}} + C_{i,k} A_{i,k+1}^{n+\frac{1}{2}} - H_{i,k}^2 A_{i,k}^{n+\frac{1}{2}} + D_{i,k} A_{i,k-1}^{n+\frac{1}{2}} - E_{i,k} A_{i,k-1}^{n+\frac{1}{2}} + (A_{i,k}^{n+\frac{1}{2}} G_{i,k} + \varepsilon_{i,k} - H_{i,k}^2 A_{i,k}^{n+\frac{1}{2}}) \right). \quad (4.59)$$

В первых двух уравнениях системы, которые получаются при разделении мнимой и действительной частей уравнений (4.38), проводится прогонка в радиальном направлении на итерационном слое  $n + \frac{1}{2}$ , а в уравнениях (4.59) прогонка в аксиальном направлении на итерационном слое  $n + 1$ . Ускорение сходимости итерационного процесса достигается с помощью выбора итерационных параметров  $J_1^n$  и  $J_2^n$ . В расчётах использовался стационарный итерационный процесс  $J_1^n = J_1$ ;  $J_2^n = J_2$ , причём значения параметров  $J_l$  в зависимости от шага сетки менялось в интервале [47]:

$$2 < J_l < 20 ; \quad l = 1, 2$$

Кроме того, поочерёдно применяются формулы левой и правой прогонки. В качестве примера далее приводятся формулы левой прогонки для уравнения (4.58):

$$A_{i,k}^{n+\frac{1}{2}} = \beta_i A_{i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} + \xi_i ; \quad i = 1, \dots, N-1 , \quad (4.60)$$

где

$$\beta_i = \frac{c_i}{b_i - \beta_{i-1} a_i} ; \quad \xi_i = \frac{a_i \xi_{i-1} - f_i}{b_i - \beta_{i-1} a_i} ; \quad (4.61)$$

$$a_i = J_2^n B_{i,k} ; \quad b_i = J_2^n H_{i,k} + 1 ; \quad c_i = J_2^n C_{i,k} ;$$

$$f_i = -A_{i,k}^n - J_2^n (D_{i,k} A_{i,k-1}^n + E_{i,k} A_{i,k+1}^n + (A_{i,k}^n G_{i,k} + F_{i,k} - H_{i,k}^2 A_{i,k}^n)) ;$$

$$\beta_0 = \xi_0 = 0 .$$

Достаточные условия устойчивости прогонки выполняются при любых значениях магнитной проницаемости  $\mu$  (в магнитном экране  $Re_m = 0$ ), но может нарушаться при больших значениях  $Re_m$  (в расплаве  $\mu = 1$ ). При  $h_i = a_{i,k} = h$  предел устойчивости  $Re_m \leq 1 + \frac{4}{J_2^n h}$ , что практически всегда в задачах МГД металлургии выполняется.

Третий из рассмотренных методов - метод релаксации наиболее простой в реализации. Найденные из выражения

$$\tilde{A}_{i,k}^{n+1} = (B_{i,k} A_{i-1,k}^{\text{тек}} + C_{i,k} A_{i,k}^{\text{тек}} + D_{i,k} A_{i,k-1}^{\text{тек}} + E_{i,k} A_{i,k+1}^{\text{тек}} + i A_{i,k}^{\text{тек}} G_{i,k} + F_{i,k}) / H_{i,k} \quad (4.62)$$

новые значения потенциала в узловых точках сетки на каждом итерационном слое уточняются с помощью релаксационного параметра  $U^n (0 < U^n < 2)$  :

$$A_{i,k}^{n+1} = (1 - U^n) A_{i,k}^n + U^n \tilde{A}_{i,k}^{n+1} \quad (4.63)$$

где  $A_{i,k}^{n+1}$  - значение потенциала после  $n+1$  - итерации.

Так как теоретические исследования об оптимальном наборе значений  $U^n$  применительно к рассматриваемой разностной задаче (4.38) отсутствуют, то был выбран стационарный итерационный процесс  $U^n = U = \text{const}$  и значение  $U$  определялось в процессе численного экспериментирования на ЭВМ. При оптимальном выборе верхней релаксации удалось в несколько раз по сравнению с методом Гаусса-Зейделя ( $U = 1$ ) сократить необходимое для получения заданной точности результатов число итераций. С учётом того, что величина  $U_{\text{опт}}$  зависит от параметров модели и разностной сетки, можно указать интервал  $1.65 < U_{\text{опт}} < 1.85$ , в котором находится значение оптимального релаксационного параметра для рассматриваемой задачи. Более выгодно с точки зрения экономии машинного времени вести счёт с системой уравнений, которая следует из уравнения (4.62) при разделении в нём действительной и мнимой частей. В таком случае для каждого из уравнений можно подбирать различающиеся между собой значения релаксационных параметров  $U_1^n$  и  $U_2^n$ .

Для ускорения и стабилизации сходимости процесса используются также другие дополнительные методы:

I) В каждой следующей итерации меняется исходная точка счёта значений потенциала на сетке и меняется также направление про-

на вычислениях.

2) После каждой итерации значение потенциала уточняется с помощью ускоряющего фактора [31]:

$$C = \frac{\int_{L_n} (\vec{j}_a - i\hat{\omega} \hat{A}^n + \text{Re}_{\text{ext}} \vec{v} \times \vec{E}^n) d\vec{s}}{\oint_{L_n} \frac{\vec{E}^n \cdot d\vec{l}}{M}}, \quad (4.64)$$

где  $L_n$  - произвольный замкнутый контур на сетке с площадью  $S$ .

Уточнение достигается умножением всех значений потенциала внутри области  $S$  на комплексный коэффициент  $C$ .

3) С целью стабилизации вычислительного процесса некоторое количество начальных итераций ( $20 < n < 50$ ) проводится со значением  $\hat{\omega} = 0$ , и только потом вводится конечное значение безразмерной частоты в проводящих частях модели (рис. 3.1).

На скорость сходимости итерационного процесса значительно влияют значения параметров  $\mu$  и  $\hat{\omega}$ , а также значения шагов сетки и общее число узловых точек. С увеличением  $\mu$ ,  $\hat{\omega}$  и числа узловых точек сетки сходимость процесса замедляется. При  $h = q = 0.05$  и общем количестве узловых точек  $N \times M \approx 2 \cdot 10^5$  используя нижнюю релаксацию  $U < 1$  устойчивость счёта сохраняется при  $\hat{\omega} \sim 10^4$ ,  $\mu \sim 10^6$ . Пользуясь верхней релаксацией и более грубой сеткой в области быстрого изменения потенциала устойчивость счёта теряется при меньших значениях параметров  $\hat{\omega}$  и  $\mu$ . На процесс сходимости существенно влияет также выбор начального приближения. Из-за сложности подбора начального распределения потенциала в каждом отдельном случае близкого к решению, в основном предполагалось, что  $A_{i,k}^0 = 0$ , где  $i = 0, \dots, N$ ,  $k = 0, \dots, M$ .

Одновременно со значением потенциала в узловых точках вычисляются его максимальное относительное изменение:

$$\Delta_1^{n+1} = \max_{i,k} (|A_{i,k}^{n+1} - A_{i,k}^n| / |A_{i,k}^n|); \quad i=0, \dots, N; \quad k=0, \dots, M, \quad (4.65)$$

или 
$$\Delta_2^{n+1} = \max_{i,k} |A_{i,k}^{n+1} - A_{i,k}^n| / \max_{i,k} |A_{i,k}^n|. \quad (4.66)$$

Величины  $\Delta^{n+1}$  характеризуют процесс сходимости. По ним осуществляется выход из итерационного процесса, с таким расчётом, чтобы при выходе погрешность  $\Delta^{n+1}$  была на порядок меньше, чем точность схемы [46].

Распределения индукции, плотности тока, ЭМ силы и ротора в проводнике находятся по разностным аналогам формул (3.9), (3.10), (3.14), (3.25), (3.26), (2.49). Аппроксимация проводится с помощью формул типа

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{h_{i-1}^2 f_{i+1} - h_i^2 f_{i-1} + f_i (h_i^2 - h_{i-1}^2)}{h_i h_{i-1} (h_{i-1} + h_i)} + O(h_i h_{i-1}). \quad (4.67)$$

обеспечивающим локально второй порядок аппроксимации. При  $h_i = h_{i-1}$  формула (4.67) совпадает с обычно используемой центральной разностью.

### 4.3. Сопоставление методов расчёта

Из сопоставления метода матричной прогонки и итерационных методов - метода продольно-поперечных прогонок и метода релаксации, следует:

1) Матричный метод при использовании сетки, содержащей более 400 узловых точек требует применения внешних запоминающих устройств, что существенно замедляет счёт. Итерационными методами без использования внешних запоминающих устройств можно проводить вычисления потенциала на сетке, содержащей более 3000 узловых точек.

2) Продолжительность счёта для модели с "идеальным" экраном на сетке с 350 узловыми точками методом верхней релаксации около 2,5 минут; методом матричной прогонки 4 минуты.

3) Применение метода продольно-поперечных прогонок с оптимально подобранными значениями  $T_1$  и  $T_2$  позволяет существенно уменьшить число итераций, необходимое для достижения заданной точности по сравнению с методом верхней релаксации, однако, как и следовало ожидать, отличия во времени счёта менее выражены (табл. 4.1).

4) Для проверки методов сравнивались результаты вычислений силы, полученные разными методами для одних и тех же устройств. При различно выбранной сетке ( $h' \leq 0.1$ ;  $h'' \leq 0.2$ )

$$\Delta = \max_{i,k} |A'_{i,k} - A''_{i,k}| / \max_{i,k} \{ |A'_{i,k}|, |A''_{i,k}| \} \quad (4.68)$$

не превышает 0,1. Эти отличия, в основном, определяются различным приближением результатов к точному решению при различном выборе шагов сетки, так как погрешность схемы является функцией от  $h_i, q_k$ . При одинаковом выборе сетки  $\Delta < 0.001$ .

В практических вычислениях по указанным в пунктах 1,2 причинам предпочтение было отдано итерационным методам, и в частности, методу продольно-поперечных прогонок. Методы 4 и 5 (табл. 4.1), строго говоря, применимы только для упрощённой модели, не учитывающей конечность высоты проводника и поэтому при их анализе необходимо выделить два аспекта:

- 1) Сопоставление методов 4 и 5 с конечно-разностными.
- 2) Применимость упрощённой модели для расчёта систем с конечной высотой металла (это будет обсуждаться в следующем подразделе).

На рис. 4.2 представлены распределения модуля векторного потенциала в зависимости от координаты  $z$  при  $r=1$  - на боковой поверхности металла, полученные с помощью несобственного интеграла, с помощью ряда и распределение, полученное методом конечных разностей при безразмерной длине проводящей области  $h_m = 1.5$ . что

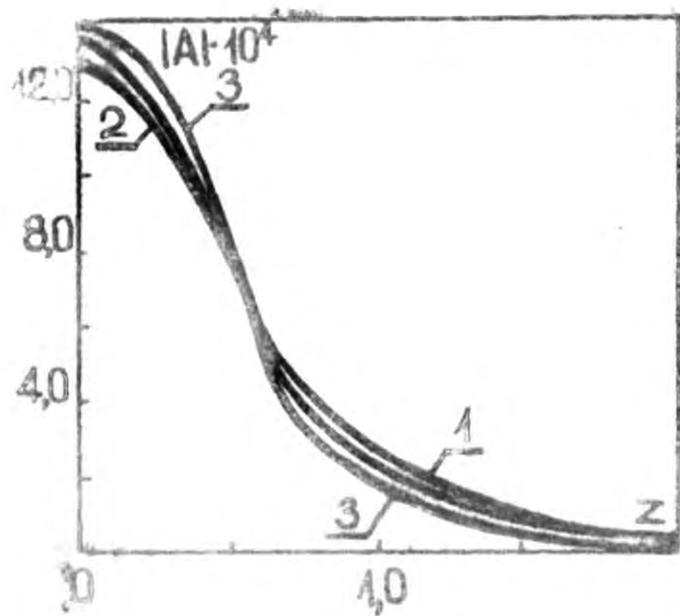


Рис. 4.2. Распределения модуля векторного потенциала по высоте проводника при  $r=1$  для модели с параметрами: ( $\omega=20$ ;  $r_0=1,1$ ;  $h_u=1$ ;  $J=0,01 \frac{Ax}{H}$ ;  $\mu=1$ ):  
 1) Собственный интеграл.  
 2) Функции Бесселя.  
 3) Конечно-разностный метод ( $h_H=15$ ).

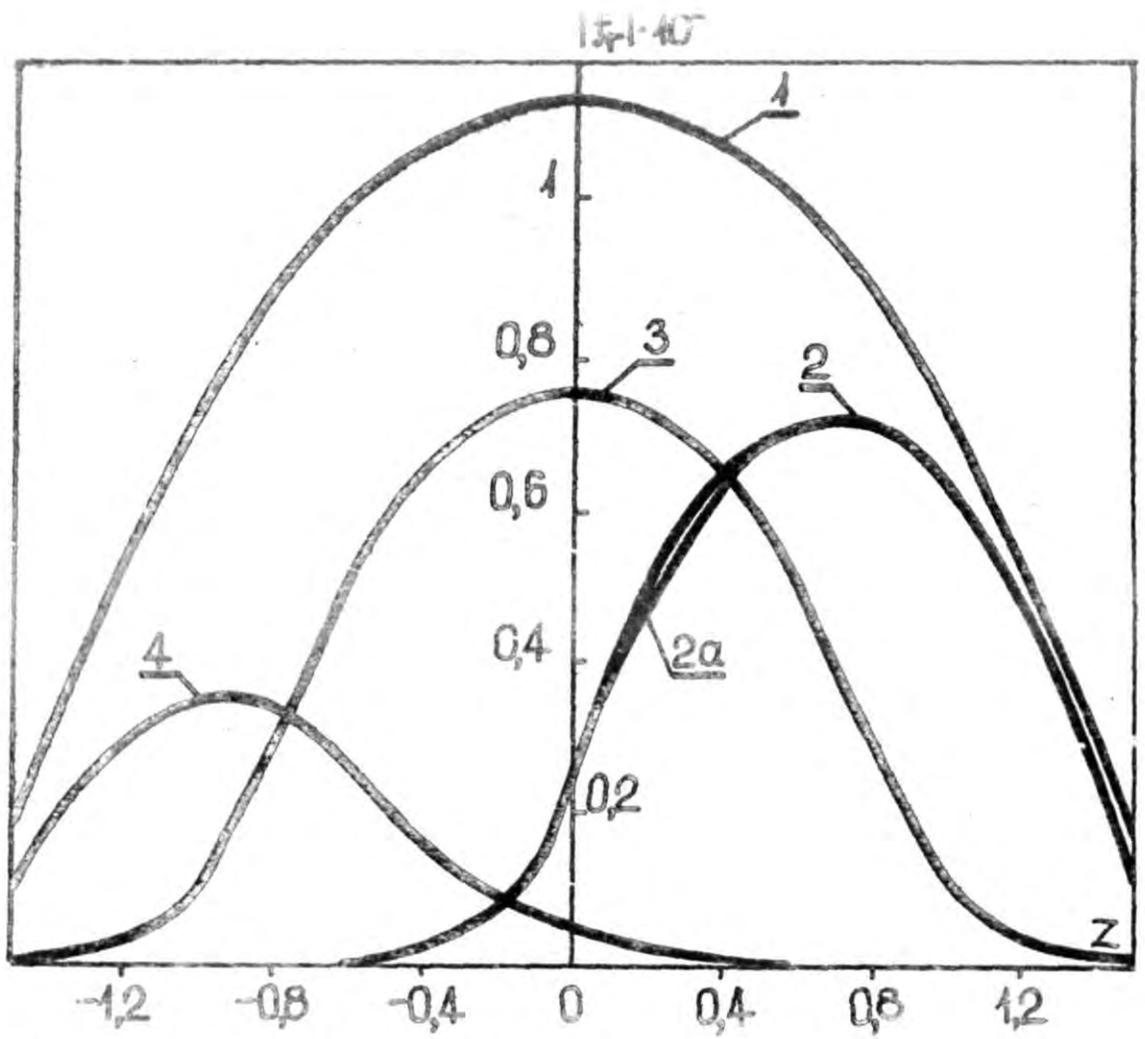


Рис. 4.3. Распределение модуля радиальной составляющей силы по высоте металла при  $\omega=10$ ;  $r_0=1,2$ ;  $h_M=3,0$ :  
 1)  $-1,5 \leq z_u \leq 1,5$ . 2) а)  $0 \leq z_u \leq 1,5$ , б) Соответствующая кривая из работы [12] 3)  $-0,75 \leq z_u \leq 0,75$ .  
 4)  $-1,5 \leq z_u \leq -0,5$ .

Таблица 4.1

## Сводка методов расчёта электромагнитных величин

№ п.	Название метода и номера формул	Модель	Количество точек расчёта	Значения параметров метода	Значения параметров модели	Погрешность вычислений (4.65)	Число итераций	№. эл. точек
1.	Метод матричной прогонки (4.47-4.57)	рис.3.1б	20x18	-	$\hat{\omega} = 10 ; M_9 = 1$	-	-	6
2.	Метод продольно-поперечных прогонок (4.58-4.61)	рис.3.1б	15x40	$J_1 = 3 ; J_2 = 8$	$\hat{\omega} = 30 ; M_9 = 1$	$10^{-4}$	55	1
			25x60	$J_1 = 5 ; J_2 = 10$	— " —	$10^{-4}$	220	22
			15x40	$J_1 = 8 ; J_2 = 20$	— " —	$10^{-4}$	170	33
			15x40	$J_1 = 3 ; J_2 = 8$	$\hat{\omega} = 200 ; M_9 = 1$	$10^{-4}$	80	1
3.	Метод релаксации (4.62), (4.63)	рис.3.1б	17x45	$U_1 = U_2 = 1,65$	$\hat{\omega} = 30 ; M_9 = \infty$	$10^{-5}$	310	6
			15x50	$U_1 = U_2 = 0,8$	$\hat{\omega} = 300 ; M_9 = 1$	$10^{-4}$	520	15
			25x60	$U_1 = U_2 = 1,75$	$\hat{\omega} = 30 ; M_9 = 1$	$10^{-4}$	400	15
			20x18	$U_1 = U_2 = 1,75$	$\hat{\omega} = 10 ; M_9 = 1$	$10^{-5}$	180	2,5
			35x60	$U_1 = U_2 = 0,5$	$\hat{\omega} = 400 ; M_9 = 10^3$	$10^{-4}$	1850	6
4.	Несобственный интеграл (4.2) - (4.11), (4.28) - (4.31)	рис.2.1б	20	$M = 50$ $2m = 100$	$\hat{\omega} = 20 ; M = 1$	—	—	10
5.	Ряд Фурье-Бесселя (4.12) - (4.22)	рис.2.1б	20	$n = 21$	$\hat{\omega} = 20 ; M_9 = 1$	—	—	6

приближённо представляет бесконечно длинный цилиндр. Из рис. 4.2 следует, что результаты, полученные различными методами, согласуются хорошо. Более быстрое стремление к нулю модуля  $|A|$ , рассчитанного разностным методом, объясняется тем, что в этом случае при  $z = \pm 7.5$ , где кончается сетка, задаются нулевые граничные условия. Максимумы модулей отличаются менее, чем на 5%, т.е. меньше, чем на ошибку вычислений разностного метода. Отличие в максимальных значениях силы, являющейся квадратичной величиной потенциала соответственно не превышает 10%.

С точки зрения вычислительного процесса можно сделать следующие замечания по применению разностных методов и методов расчёта по аналитическим выражениям.

1) На основе конечно-разностного подхода без изменения вычислительной схемы можно проводить расчёты для более широкого класса задач. При использовании аналитических выражений введение в систему новых элементов (например, магнитного экрана) существенно меняют формулы для векторного потенциала и других ЭМ величин.

2) Схемы вычислений в обоих подходах достаточно сложны - в одном случае необходимо вычислять модифицированные функции Бесселя от комплексного аргумента и интегрировать несобственный интеграл с комплексной подинтегральной функцией, в другом случае необходимо строить хорошо сходящуюся в широком интервале параметров консервативную разностную схему, причём больше опираться на численный эксперимент, так как для рассматриваемой задачи (подраздел 4.2) теоретические оценки затруднены.

3) В аналитическом подходе точность численных результатов определяется

а) выбором величин граничных условий на

- в) количеством членов, используемых в разложении Фурье,
- г) точностью приближённого интегрирования, которая зависит от количества точек разбиения интервала.

В конечно-разностном подходе точность определяется

- а) выбором разностной схемы,
- б) выбором шагов сетки.

4) Время вычислений методом верхней релаксации при  $U_1=U_2=1.75$  на сетке порядка  $10^3$  узловых точек составляет около 10-14 мин. время вычислений по аналитическим выражениям для профиля 15-20 точек составляет 4-8 минут, при сравнительно малом числе результатов. Поэтому для расчёта распределений ЭМ величин во всей области - случай МД-устройств, где необходимо найти распределение электромагнитной силы) выгодно пользоваться конечно разностными методами, в то время, как для расчётов в отдельных выбороочных точках удобно пользоваться аналитическим методом.

#### 4.4. Результаты расчёта электромагнитных величин

Цель настоящего подраздела - показать некоторые типичные результаты и на основе численных экспериментов (проведены расчёты около 200 различных вариантов) указать зависимость ЭМ поля и силы от геометрии устройства, безразмерной частоты и других факторов [56, 57, 60].

Распределения магнитного поля и силы в аксиальном направлении существенно зависят от вида и расположения секций индуктора относительно цилиндрического проводника (рис. 3.1). Изменение радиальной составляющей плотности средней силы по высоте проводника для разных однофазных индукторов показано на рис. 4.3. Для всех кривых  $\hat{\omega}=10$ ,  $n=1$  и  $h_m=3.0$ . Характерно, что сила  $f$  всегда отрицательна, максимум её во всех случаях находится напротив

середины индукторов и значения силы к концам индуктора уменьшаются. Скорость изменения силы максимальна именно в концевых зонах индуктора  $|z| \approx h_u/2$ . Если высота индуктора меньше высоты металлического цилиндра, то значения радиальной силы выше и ниже индуктора малы по сравнению с максимальным её значением. Чем уже зазор между металлом и индуктором, тем ярче выделяются три зоны:

1) В охваченной индуктором части  $f_r$  практически постоянно по высоте.

2) В зоне торцов индуктора  $f_r$  резко падает.

3) В зоне вне индуктора сила практически отсутствует.

При высоте металла больше высоты индуктора ( $h_m \gg h_u$ ) это хорошо согласуется с результатами, полученными в работе [12] по модели с бесконечно высоким цилиндрическим проводником (рис. 2.16). При наложении на кривую 2 (рис. 4.3) соответствующей кривой из работы [12], нормированной таким образом, чтобы максимумы обеих кривых совпадали, оказалось, что обе линии совпадают.

Сила  $f_r$  максимальна по модулю вблизи боковой поверхности цилиндрического проводника и убывает по мере приближения к оси симметрии (рис. 4.4), но характер распределения силы по высоте в разных сечениях  $r = \text{const} \leq 1$  практически не меняется. Скорость экспоненциального убывания  $f_r$  вглубь проводника регулируется значением безразмерной частоты  $\hat{\omega}$ . На рис. 4.4. показаны распределения плотности радиальной составляющей силы по радиусу при различных значениях частоты  $\hat{\omega}$ . На рис. 4.4 в виде точек также нанесены данные из работы [12]. Различия результатов при больших значениях частоты ( $\hat{\omega} = 100$ ) в основном связаны с тем, что быстрое изменение силы в поверхностном слое металла недостаточно точно передаётся на сетке с радиальным шагом  $h = 0,05$ . Для расчётов поля сил, при

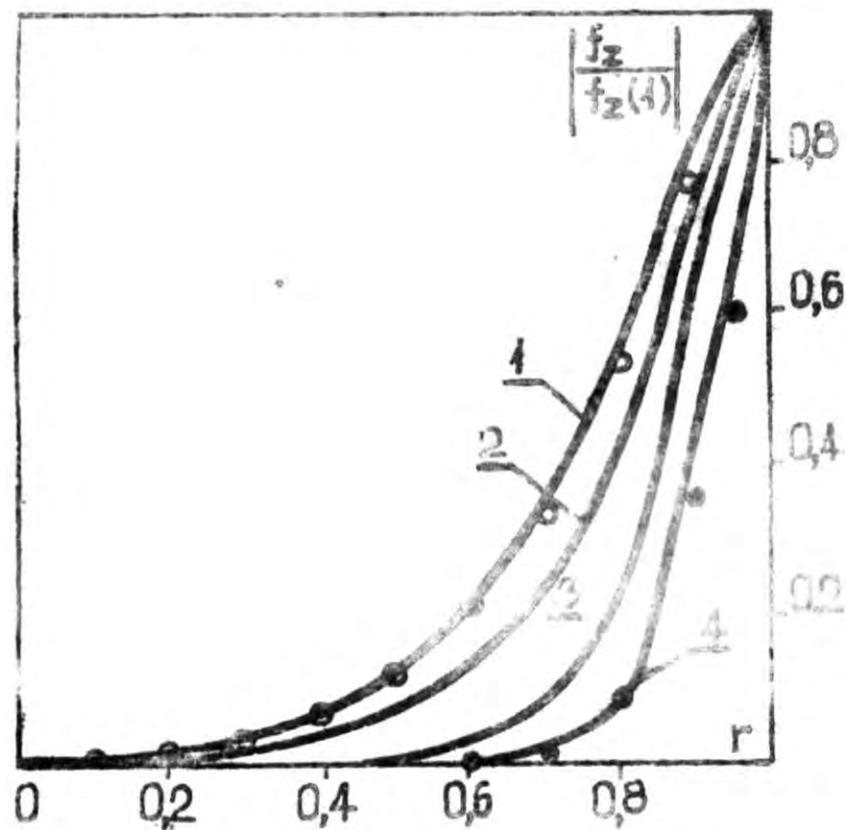


Рис. 4.4. Распределение радиальной составляющей плотности силы по радиусу при различных значениях безразмерной частоты:

- 1)  $\hat{\omega} = 1$ ;  $\circ$  - из работы [12]
- 2)  $\hat{\omega} = 20$ .
- 3)  $\hat{\omega} = 60$ .
- 4)  $\hat{\omega} = 100$ ;  $\bullet$  - из работы [12].

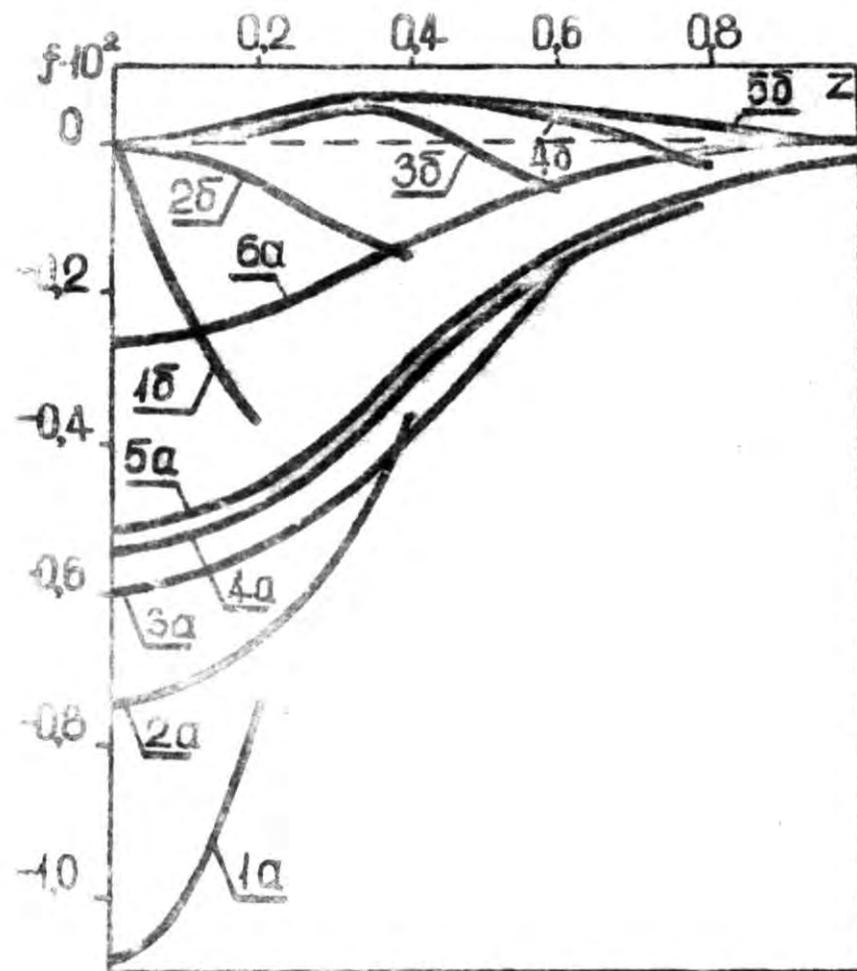


Рис. 4.5. Распределения радиальной ( $\alpha$ ) и аксиальной ( $\beta$ ) составляющих силы по высоте проводника при  $r=1$ ;  $\hat{\omega}=30$ ;  $h_u=0,8$ ;  $-0,4 \leq z_u \leq 0,4$ ;  $r_2=1,6$ .

- 1)  $-0,2 \leq z_M \leq 0,2$ .
- 2)  $-0,4 \leq z_M \leq 0,4$ .
- 3)  $-0,6 \leq z_M \leq 0,6$ .
- 4)  $-0,8 \leq z_M \leq 0,8$ .
- 5)  $-1,0 \leq z_M \leq 1,0$ .
- 6)  $-1,0 \leq z_M \leq 0,8$  (без экрана).

заданном значении безразмерной частоты  $\hat{\omega}$  необходимо, чтобы шаг сетки  $h$  в поверхностной зоне был значительно меньше глубины проникновения поля  $\delta$  ( $h \ll \delta$ ).

Аксиальная составляющая плотности силы  $f_z$  в случае однофазных индукторов обычно значительно меньше радиальной ( $|f_z| < |f_r|$ ) (рис. 4.5). Наименьшим это различие является в концевой зоне индуктора, где  $|f_z|$  максимально. Если, при совпадении плоскостей симметрии индуктора и металла, высота металла больше высоты однофазного индуктора ( $h_m > h_u$ ), то выполняется соотношение  $|f_{z \max}| / |f_{r \max}| < 0.4$  для составляющую  $f_z$ , как это делалось практически во всех предыдущих исследованиях, можно не учитывать. Движение при этом в основном определяется радиальной компонентой силы. В случае, если  $h_m \leq h_u$ , то  $f_z$  в концевых зонах однофазного индуктора может выдать по порядку величины с максимальным значением  $f_r$  (рис. 4.6, кривые 1, 2) или даже  $|f_{z \max}| > |f_{r \max}|$  (рис. 4.6). Сила  $f_z$  при этом отлична от нуля в узкой торцевой зоне и в остальных зонах ее значение близко к нулю. Аксиальная составляющая может оказать влияние на результирующее движение в этой зоне (например, вызвать образование там вихревой циркуляции). Более подробное рассмотрение дается в разделе 7.

В отличие от радиальной составляющей силы, изменение которой в радиальном направлении имеет экспоненциальный характер (рис. 4.4), изменение  $f_z$  по радиусу в торцевых зонах индуктора и металла (там, где  $f_z$  максимальна) может иметь более сложный характер (рис. 4.6).

В устройстве с многофазным индуктором аксиальная и радиальная составляющие силы являются величинами одного порядка. На рис. 4.8 и рис. 4.9 приводятся примеры распределений этих вели-

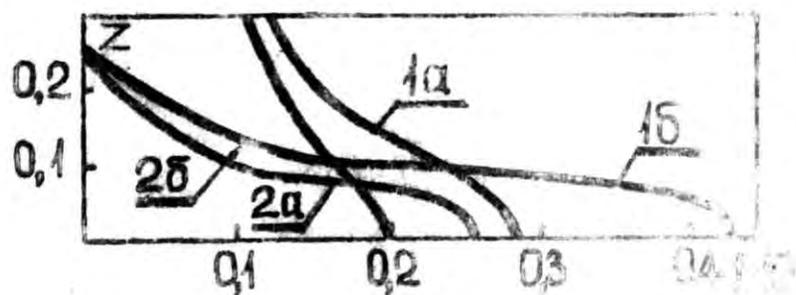


Рис. 4.6. Распределение модулей радиальной ( $1\alpha$ ) и аксиальной ( $2\delta$ ) составляющих силы вблизи поверхности вращающегося цилиндра ( $Z_{HM} = 0$ ;  $\omega = 150$ ):

- 1)  $-0,5 \leq Z_0 \leq \infty$ .
- 2)  $-0,3 \leq Z_0 \leq \infty$ .

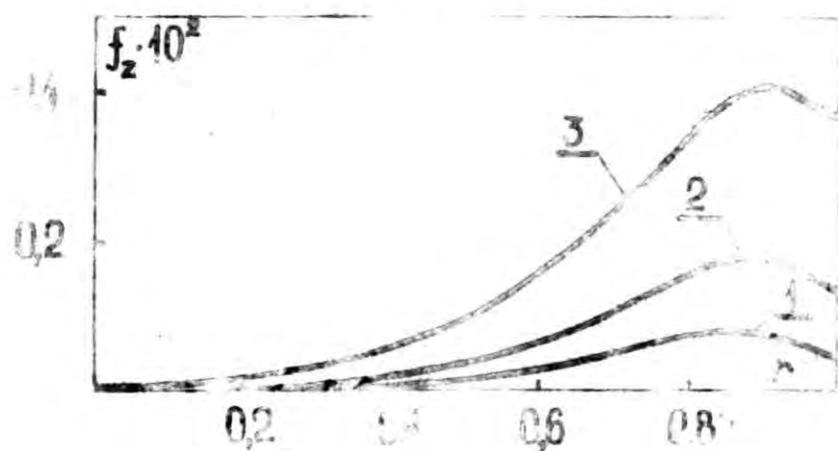


Рис. 4.7. Распределение аксиальной составляющей силы по радиусу ( $\omega = 50$ ;  $-0,4 \leq Z_0 \leq 0,4$ ;  $\Gamma_0 = 1,6$ )

- 1)  $-0,2 \leq Z_M \leq 0,2$ ;  $Z = -0,2$ .
- 2)  $-0,4 \leq Z_M \leq 0,4$ ;  $Z = -0,4$ .
- 3)  $-0,6 \leq Z_M \leq 0,6$ ;  $Z = -0,6$ .

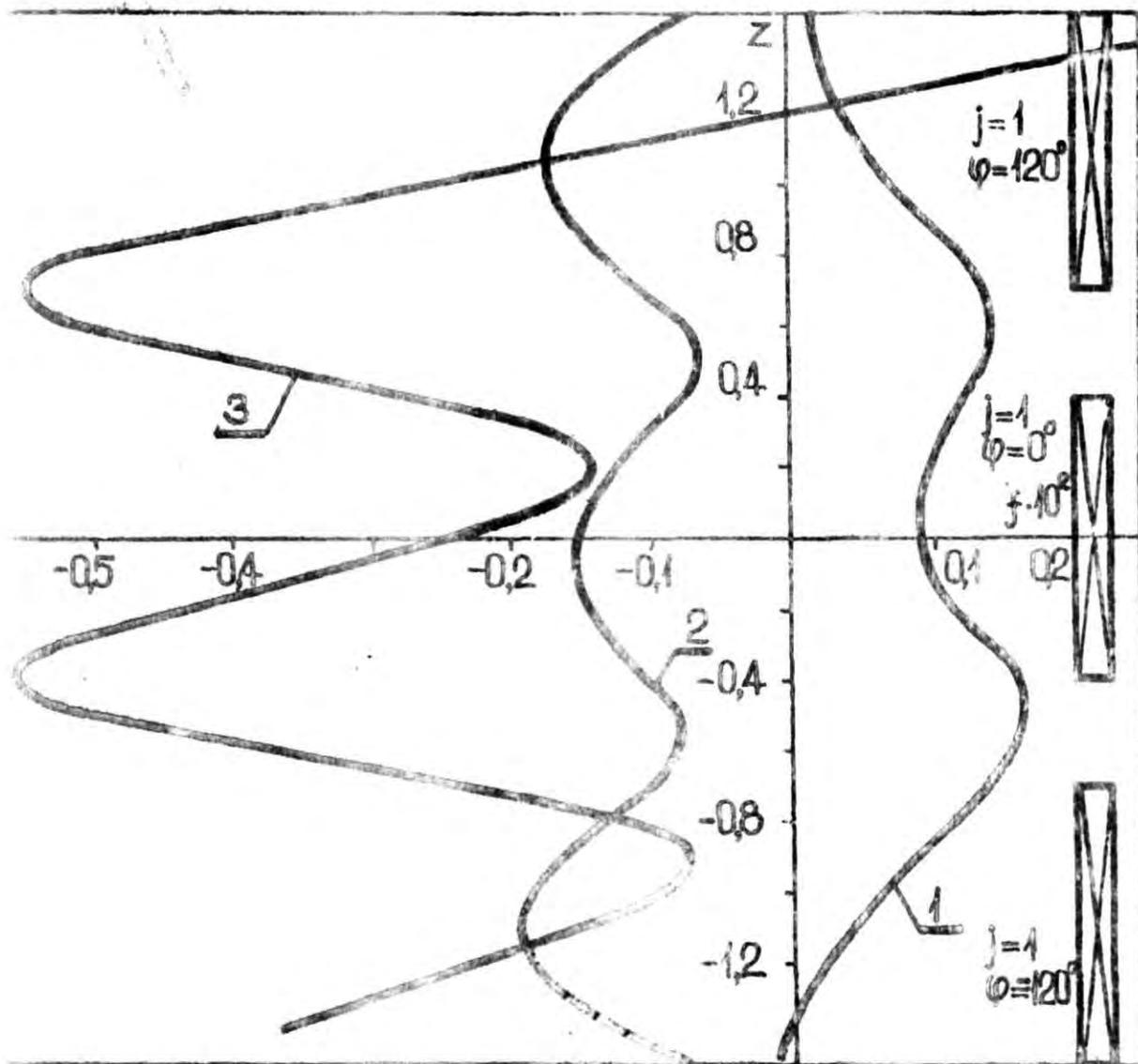


рис. 4.8. Распределения составляющих силы и ротора силы по высоте проводника в трёхфазном устройстве ( $\omega = 10$ ):  
 1)  $f_z$ ;  $r=1$ .      2)  $f_r$ ;  $r=1$ .  
 3)  $(rot f)_\varphi$ ;  $r=0,9$ .

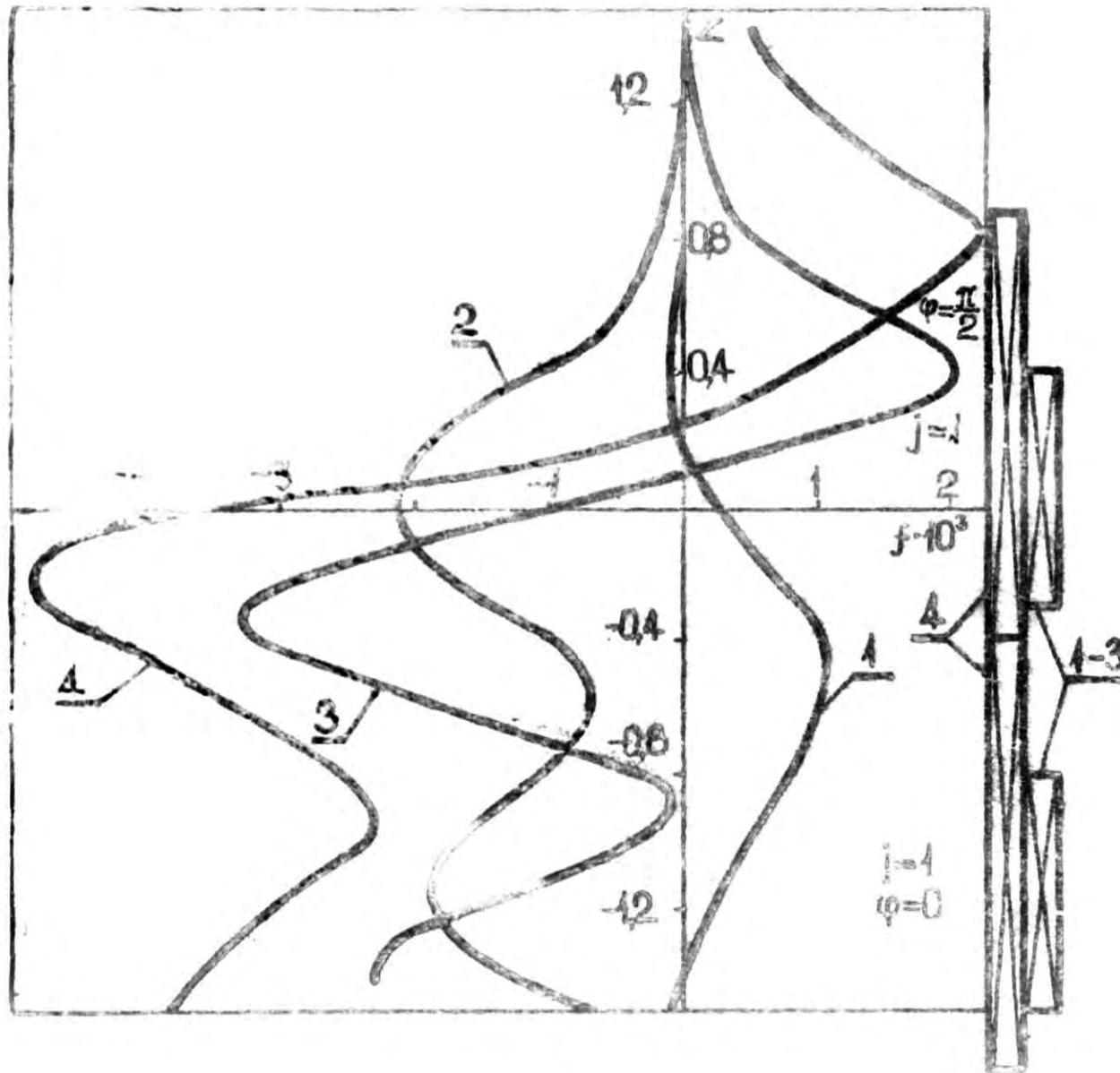


Рис. 4.9. Распределения составляющих силы и ротора силы по высоте проводника в двухфазном устройстве ( $\tilde{\omega}=10$ ):

- 1)  $f_z$ ;  $r=1$ .
- 2)  $f_r$ ;  $r=1$ .
- 3)  $\epsilon$ ;  $r=0,85$ .
- 4)  $(rot \vec{f})_{\varphi}$  из работы [33] при  $\tilde{\omega} \approx 14$ .

ны, а также ротора плотности средней ЭМ силы  $\epsilon$  (2.49) для трёхфазного индуктора со сдвигом фаз токов в соседних секциях  $120^\circ$  и двухфазного индуктора со сдвигом фаз  $90^\circ$ . Сопоставление результатов расчёта устройства с двухфазным индуктором с результатами, полученными численным методом в работе [33] для устройства с полой геометрией, указывает на качественное соответствие этих результатов (рис. 4.9) (методика вычислений в работе [33] не описана).

Полученные в случае многофазного индуктора распределения составляющих индукции на боковой поверхности цилиндрического проводника качественно согласуются с результатами работы [6] для модели рис. 2.1e. На рис. 4.10 приведены распределения индукции в зоне для устройства с трёхфазным индуктором, составленным из пяти секций со сдвигом фаз токов в соседних секциях  $120^\circ$ . В рассматриваемом случае характер поля в средней зоне индуктора близок синусоидальному, т.е., напоминает бегущее поле, и аксиальная составляющая плотности силы практически во всей области (за исключением верхнего конца) более двух раз больше аксиальной составляющей.

Присутствие магнитного экрана увеличивает значения индукции в зоне в зоне около боковой поверхности цилиндрического проводника по сравнению со случаем, когда магнитный экран отсутствует. Для однофазного устройства с высотой металла  $-2,0 \leq z_m \leq 2,0$  и индуктора  $-0,4 \leq z_o \leq 0,4$  при  $\omega = 30$  эта зависимость характеризуется в таблице 4.2 и на рис. 4.5. Максимальные значения составляющих ЭМ силы в устройстве с экраном примерно в два раза больше соответствующих значений в устройстве без экрана, таким образом, с помощью экрана можно регулировать величину ЭМ силы и тем самым интенсивность движения жидкого металла.

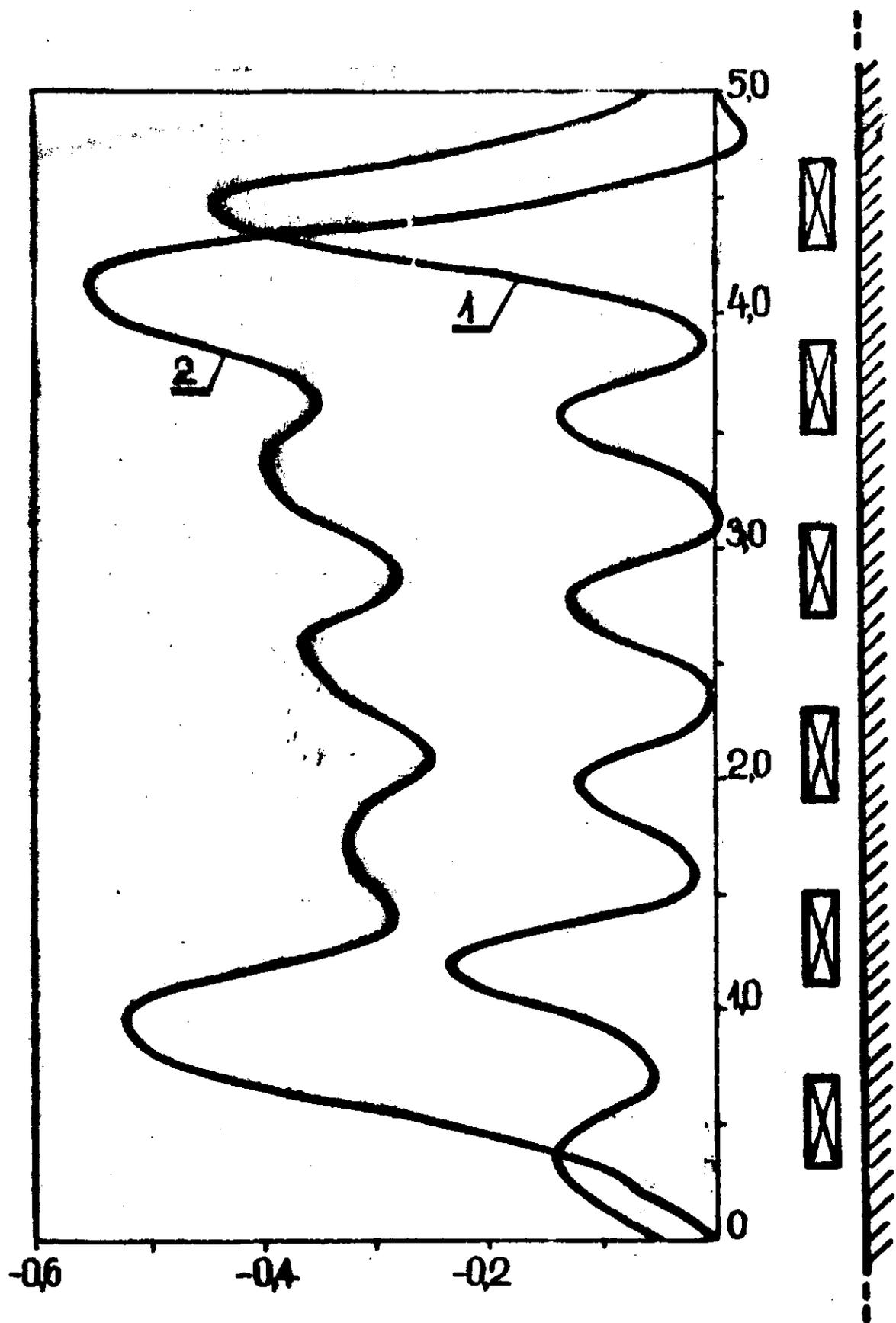


Рис. 4.10. Распределения аксиальной и радиальной составляющих силы по высоте проводника при  $\nu=1$  ( $0 \leq z \leq 5$ ,  $\omega=3,2$ ): 1)  $f_r$ . 2)  $f_z$ .

Таблица 4.2

Характеристики индукции и силы при различных значениях соотношения  
высоты металла к высоте индуктора

№ п. п.	$z_{вн}$	$z_{ин}$	$r_0$	$B_z, \text{ макс}$ при $r=1$	$B_r, \text{ макс}$ при $r=1$	$ f_z  \text{ макс}$ при $r=1$	$ f_r  \text{ макс}$ при $r=0,9$	$ (rot f)_\varphi  \text{ макс}$ при $r=0,9$	$\frac{h_m}{h_u}$	Примечания
1	0,2	-0,2	1,0	$0,294 \cdot 10^{-1}$	$0,147 \cdot 10^{-1}$	$0,369 \cdot 10^{-2}$	$0,109 \cdot 10^{-1}$	$0,129 \cdot 10^{-1}$	0,5	во всех случаях: $\omega = 30$ ; $r_u = 1,2$ ; $B_0 = j_0 \mu_0 r_0 T \lambda$ ; $f_0 = j_0 \mu_0 r_0 \frac{H}{m^2}$ ; $g_u = 0,1$ ; $r_0 = 0,2 \text{ м}$
2	0,4	-0,4	1,6	$0,736 \cdot 10^{-1}$	$0,123 \cdot 10^{-1}$	$0,142 \cdot 10^{-2}$	$0,74 \cdot 10^{-2}$	$0,102 \cdot 10^{-1}$	1	
3	0,6	-0,6	1,6	$0,701 \cdot 10^{-1}$	$0,108 \cdot 10^{-1}$	$0,545 \cdot 10^{-3}$	$0,6 \cdot 10^{-2}$	$0,588 \cdot 10^{-2}$	1,5	
4	0,8	-0,8	1,6	$0,680 \cdot 10^{-1}$	$0,134 \cdot 10^{-1}$	$0,581 \cdot 10^{-3}$	$0,545 \cdot 10^{-2}$	$0,374 \cdot 10^{-2}$	2	
5	1,0	-1,0	1,6	$0,671 \cdot 10^{-1}$	$0,144 \cdot 10^{-1}$	$0,576 \cdot 10^{-3}$	$0,528 \cdot 10^{-2}$	$0,410 \cdot 10^{-2}$	2,5	
6	1,4	-1,4	1,6	$0,668 \cdot 10^{-1}$	$0,147 \cdot 10^{-1}$	$0,534 \cdot 10^{-3}$	$0,522 \cdot 10^{-2}$	$0,435 \cdot 10^{-2}$	3,5	
7	2,0	-2,0	1,6	$0,657 \cdot 10^{-1}$	$0,147 \cdot 10^{-1}$	$0,527 \cdot 10^{-3}$	$0,521 \cdot 10^{-2}$	$0,438 \cdot 10^{-2}$	5	
8	2,0	-2,0	нет	$0,487 \cdot 10^{-1}$	$0,126 \cdot 10^{-1}$	$0,243 \cdot 10^{-3}$	$0,271 \cdot 10^{-2}$	$0,288 \cdot 10^{-2}$	5	

В случае системы с индуктором и проводником, плоскости симметрии которых совпадают, при соотношении  $\frac{h_m}{h_u} \geq 2$  максимальные значения ЭМ поля и силы практически не меняются с возрастанием  $h_m$  (отличия меньше 5%) (табл. 4.I), а их распределения отличаются незначительно (рис. 4.5). Численные эксперименты в интервале частот  $\hat{\omega} = 1; 100$  подтвердили полученный результат. Таким образом, при расчёте устройств с  $h_m \geq 2h_u$  практически можно пользоваться упрощённой моделью (рис. 2.Iб), не учитывающей конечность высоты цилиндрического проводника. Область применения упрощённой модели зависит также от радиуса индуктора  $r_u$ , т.е. зазора между индуктором и проводником, однако, из-за относительно небольшого интервала изменения этого параметра в реально существующих устройствах, зависимость от  $r_u$  имеет второстепенное значение. Критическое значение относительной высоты металла  $\frac{h_m}{h_u}$  существенно меняется в зависимости от высоты индуктора (рис. 4.II). С увеличением высоты индуктора  $h_u$  значение  $h_{кр}$  уменьшается, например, при  $h_u = 2,0$ ,  $h_{кр} \approx 0,6$ .

Для получения инженерных формул расчёта ЭМ величин на поверхности  $r = a$  при  $h_m/h_u > h_{кр}$ , азимутальная составляющая векторного потенциала элементарного токового витка представлена в виде

$$A(z) = c_1 e^{-\alpha_1 z^2} + i c_2 e^{-\alpha_2 z^2}, \quad (4.69)$$

где зависимость коэффициентов  $c_i, \alpha_i$  ( $i=1,2$ ) от  $\hat{\omega}$  и  $r_u$  задаётся аналитически или графически на основе результатов численных экспериментов. Для расчёта распределения потенциала на поверхности металла в случае индуктора высотой  $2b_u$  получена формула:

$$\Delta^2 A(z) = c_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha_1}} \left[ \theta(\sqrt{\alpha_1}(z+b_u)) - \theta(\sqrt{\alpha_1}(z-b_u)) \right] + \\ + i c_2 \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha_2}} \left[ \theta(\sqrt{\alpha_2}(z+b_u)) - \theta(\sqrt{\alpha_2}(z-b_u)) \right], \quad (4.70)$$

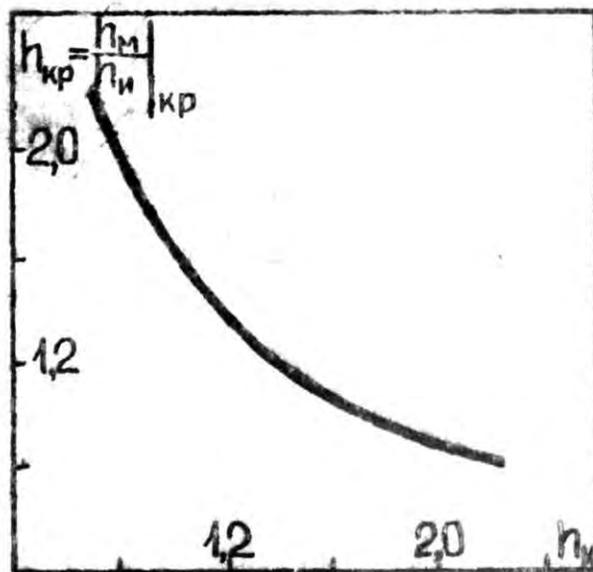
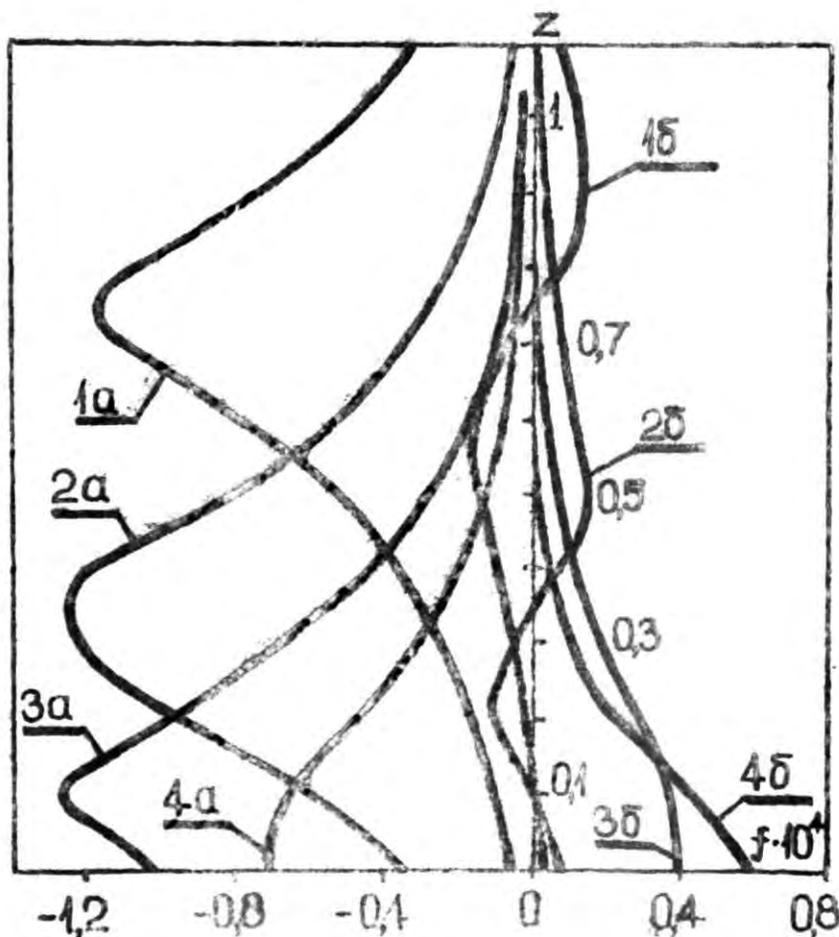


Рис. 4.11. Зависимость критического значения высоты металла от высоты индуктора при  $\omega = 30$ ;  $r_u = 1,2$ ;  $r_z = 1,6$ .



4.12. Распределения радиальной ( $a$ ) и аксиально ( $б$ ) составляющих силы в торцевой зоне проводника ( $\omega = 30$ ;  $0 \leq z_u \leq 2,7$ ):  
 1)  $0,7 \leq z_u \leq 0,8$ .      2)  $0,3 \leq z_u \leq 0,4$ .  
 3)  $0 \leq z_u \leq 0,1$ .      4)  $-0,2 \leq z_u \leq -0,1$ .

$$\theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (4.71)$$

интеграл вероятности, который подробно табулирован.

Зависимость  $h_{кр} = f(h_{уд})$  (рис. 4.11) прослеживалась сопоставлением результатов, полученных с помощью аналитических выражений (фиг. 4.1) и результатов, полученных конечно-разностным методом ( $\hat{\omega} = 20$ ,  $\sigma_{уд} = 1,1$ ;  $h_{уд} = 1,0, 1,5, 2,0, 2,5, 3,0, 3,5, 4,0, 4,5, 5,0$ ). С точностью 5-10% относительно максимальных значений для расчета силы в системах с конечной высотой проводящей области при  $h_{уд} < 1,4$  можно применять метод, основанный на выводе формулы для индуктора (модель б) конечно высокой проводящей области (рис. 2.13).

Исследование зависимости поля в переходной зоне проводящего от расположения однофазного пробного индуктора ( $h_{уд} = 0,1$ ) показало, что если  $z_{уд} \geq z_{нм}$ , то практически во всем диапазоне значений составляющей силы токовой эдс индуктора возрастает (рис. 4.10). На кривые 1а, 2а, 3а), т.е. допустив учет в предположении бесконечной высоты проводящего цилиндра. Однако, как меняется составная сила, более чувствительна к изменению конечной высоты цилиндра. При  $z_{уд} \leq z_{нм}$  наблюдается заметный максимум составляющей силы в торцевых зонах проводника (кривые 3б, 4б рис. 4.12). При удалении индуктора вне области, заполненной металлом, составляющие силы  $f_1$  и  $f_2$  убывают. При  $z_{нм} - z_{уд} = 0,6$  абсолютное значение  $f_1$  в металле не превышает 1% от максимального значения  $|f_1|$  в устройстве с  $z_{уд} \geq z_{нм}$ . Ситуация аналогична описанной также в случае длинного индуктора  $h_{уд} \geq 1$  если при этом конец индуктора не выступает вне зоны, заполненной металлом ( $z_{уд} < z_{вн}$  и  $z_{нм} > z_{нн}$ ), т.е. отсутствует положительный вылет индуктора, то конечная высота проводника на распределение поля и сил сказывается мало (конечный эффект проводника слабо выражен) - распределение поля и сил в основном опре-

деляется конечной высотой индуктора (рис. 4.13), кривые 2, 3, 4). Если верхний вылет индуктора  $l_b = z_{bu} - z_{bm}$  (4.72)

или нижний вылет индуктора  $l_n = z_{nm} - z_{ni}$  (4.73)

положительны, то значение  $B_z$  вблизи соответствующего торца цилиндрического проводника имеет максимальное значение и распределение поля в этой зоне в большой степени определяется конечной высотой металла. Значение  $B_r$  там достигает примерно 60% значения  $B_z$  в средней зоне индуктора при  $r=1$ , что не наблюдается при  $l_b < 0$  и  $l_n < 0$  (кривая I-46 рис. 4.12).

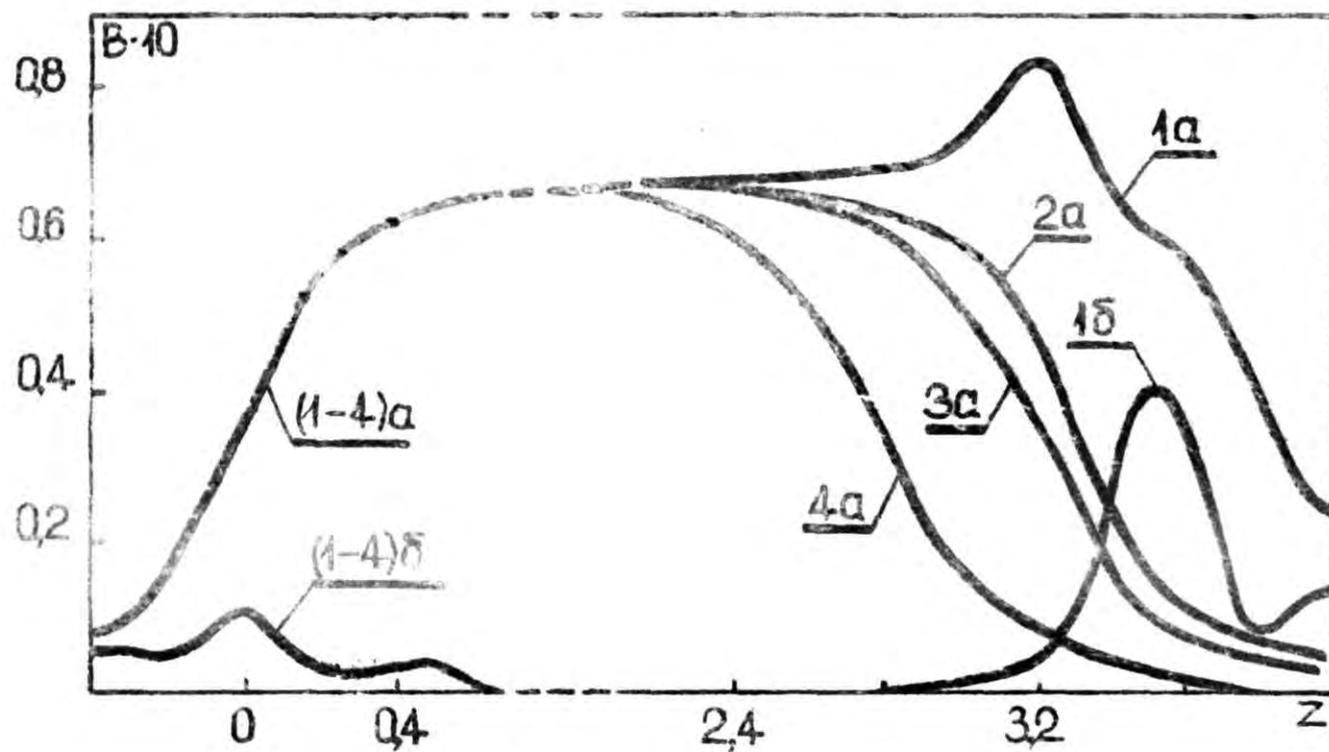
Составляющая силы  $f_r$  в средней зоне длинного индуктора постоянна по высоте и убывает в сторону концов индуктора, если

$l_b \leq 0$ ;  $l_n \leq 0$ . При  $l_b > 0$  составляющая силы  $f_r$  в окрестности торца металла резко возрастает по модулю и достигает максимального значения, (рис. 4.6), примерно трёхкратно превышающего значение  $f_r$  на боковой поверхности металла в средней зоне индуктора. Однако, значение аксиальной составляющей силы  $f_z$  на поверхности  $z = z_{bu}$  ещё превышает значение  $f_r$  (рис. 4.6).

При положительном вылете индуктора в торцевой зоне металла резко возрастает также тепловыделение (рис. 4.14), поэтому вблизи торца цилиндрического проводника необходимо считаться с сильным нагреванием проводника.

Изменение толщины индуктора (слоя с током) в широких пределах ( $0,01 \leq q_u \leq 0,5$ ) при постоянной линейной токовой нагрузке (настиле тока) не влияет на поле и силы в проводящей области, таким образом, вполне оправдана часто применяемая абстракция бесконечно тонкого токового слоя (см. также раздел 2).

Рисунок 4.4 иллюстрирует зависимость радиального распределения силы от безразмерной частоты  $\hat{\omega}$ . В связи с вытеснением поля из проводника при больших частотах  $\hat{\omega}$  радиальная составляющая



Распределения аксиальной ( $\alpha$ ) и радиальной ( $\delta$ ) составляющих магнитной индукции по высоте проводника при  $r=1$  ( $\omega=250$ ;  $h_H=3,3$ ;  $r_u=1,2$ ;  $0 \leq z_H \leq 3,3$ ):  
 1)  $0 \leq z_u \leq 3,8$ . 2)  $0 \leq z_u \leq 3,5$ . 3)  $0 \leq z_u \leq 3,2$ . 4)  $0 \leq z_u \leq 2,8$ .

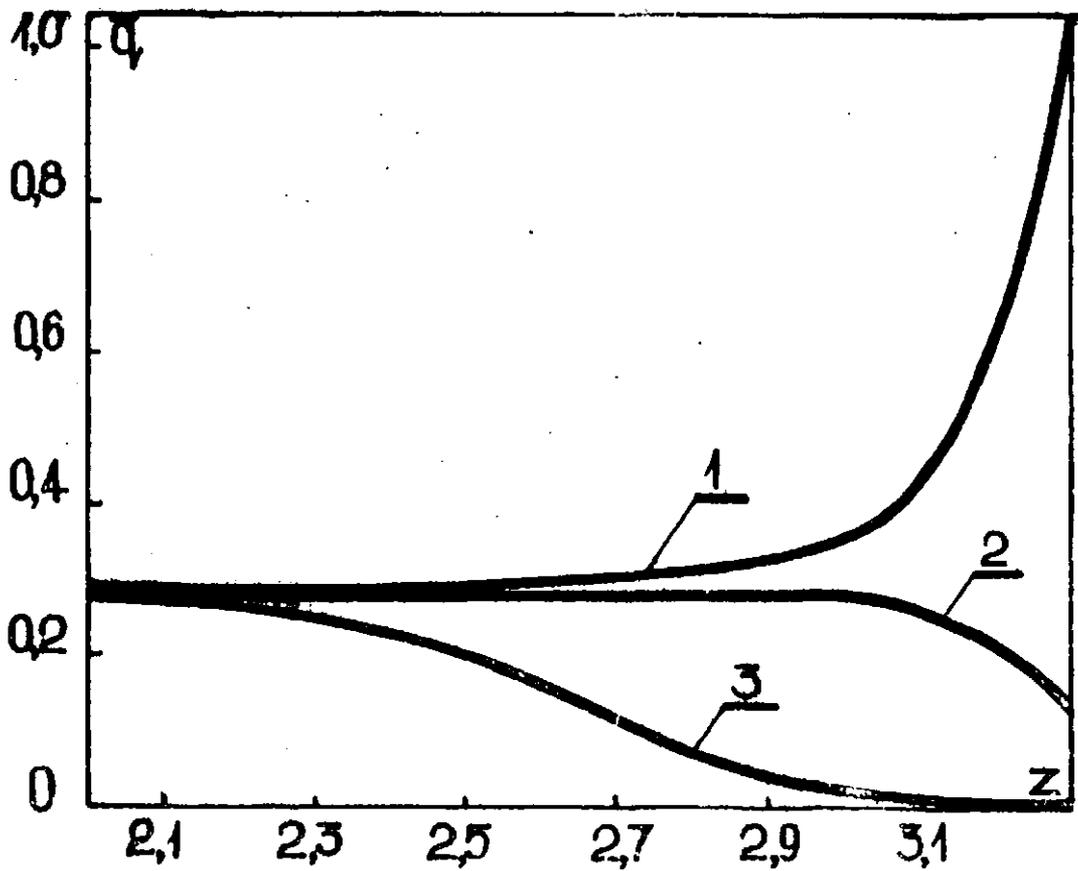


Рис. 4.14. Распределение плотности тепловой мощности по высоте металла при  $r=1$  ( $\omega=250$ ):  
 1)  $l_s=0,5$ . 2)  $l_s=0$ . 3)  $l_s=-0,5$ .

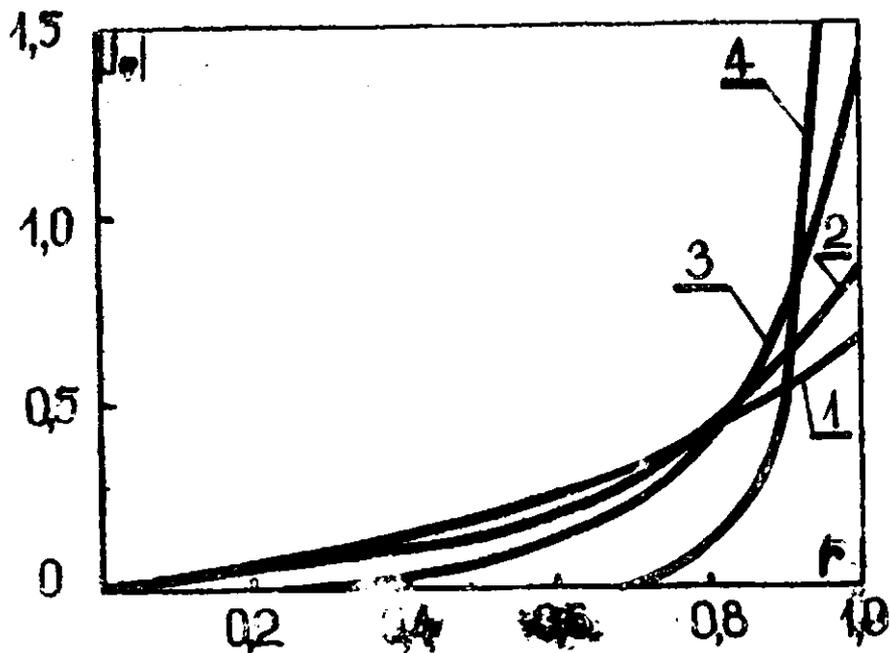


Рис. 4.15. Распределение плотности вихревых токов по радиусу проводника при различных значениях частоты:  
 1)  $\omega=19$ . 2)  $\omega=32$ . 3)  $\omega=80$ . 4)  $\omega=200$ .

индукции и азимутальная составляющая плотности вихревых токов экспоненциально убывает в поверхностном слое  $\delta$ . Кроме того, частота влияет также на абсолютные значения поля и сил. При фиксированных высоте индуктора  $h_u$ , настиле тока  $I$ , толщине зазора между индуктором и металлом, а также других параметрах модели, составляющая  $B_z$  магнитной индукции убывает с возрастанием частоты  $\hat{\omega}$  (табл. 4.3) - ухудшается электромагнитная связь между индуктором и металлом. При 200-кратном увеличении  $\hat{\omega}$  (от 1 до 200) максимальное значение  $B_z$  уменьшается примерно на 35% максимум её распределения по высоте становится более плоским. На уровне концов индуктора ( $z = \pm 4,4$ ) значение  $B_z$  составляет примерно 50%  $B_{zmax}$  и скорость убывания максимальна. Максимальное значение радиальной составляющей индукции также достигается на высоте концов индуктора и составляет меньше, чем 25%  $B_{zmax}$ . Радиальная составляющая плотности электромагнитной силы убывает в направлении концов индуктора быстрее, чем  $B_z$ . На высоте  $z = \pm 4,4$ , соответствующей концам индуктора значение  $f_r < 0,25 f_{rmax}$  при  $z = 0$  и при  $|z| \geq 0,7 h_u$  величина  $f_r$  становится незначительно малой. Это подтверждает известный факт [6], что интегральная сила  $F_1$ , действующая на зоны металла вне индуктора гораздо меньше интегральной силы  $F_0$ , действующей в зоне  $|z| < h_u/2$ . По приближительным подсчётам для модели таблицы 4.3 -  $F_1 < 0,05 F_0$ .

Возрастание составляющей плотности силы  $f_r$  при больших значениях частоты замедляется и выходит на линейную зависимость от квадратного корня безразмерной частоты ( $f_r \sim \sqrt{\hat{\omega}}$ ), что согласуется с данными работы [12]. Более детальные исследования распределения и изменения составляющих силы в конечно-разностной постановке при больших значениях безразмерной частоты ( $\hat{\omega} > 10^5$ ) затруднены, так как требуют применения разностной сетки с мелкими

Характеристика зависимости индукции, силы и течения от безразмерной частоты

№ пп	$\omega$	$B_z, \max$ $T_A$	$\bar{F}_r, \max$ $T_A$	$ f_r  \max$	$ (rot f)_z  \max$	$z_M$	$\frac{v_{zc}}{v_{z0}}$	$v_0 \left( \frac{M}{c} \right)$	Примечания
1.	1	0,13	0,0038	$0,09 \cdot 10^{-2}$	$0,46 \cdot 10^{-3}$	1,2	0,52	0,04	Во всех случаях: $g_u = 1,2$ ; $r_a = 1,4$ ; $g_u = 0,1$ ; $r_0 = 0,2M$ ; $r_p = 0,65$ ; $h_M = 5,4$ ; $h_u = 2,8$ ; $f_0 = \int_0^2 M_0 r_0 \frac{H}{M^3}$ ; $I_0 = 5 \cdot 10^4 \frac{A}{cm}$ ; $Re = 50$ . $z_M$ - координата максимума аксиальной составляющей скорости; $\frac{v_{zc}}{v_{z0}}$ - отношение максимальных значений аксиальной составляющей скорости в пристеночном потоке и на оси симметрии; $v_0$ - максимальное значение скорости.
2.	5	0,11	0,017	$1,2 \cdot 10^{-2}$	$0,68 \cdot 10^{-2}$	1,3	0,49	0,17	
3.	10	0,10	0,024	$2,1 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-2}$	1,3	0,47	0,24	
4.	15	0,10	0,026	$2,5 \cdot 10^{-2}$	$1,7 \cdot 10^{-2}$	1,4	0,46	0,26	
5.	19	0,099	0,020	$2,7 \cdot 10^{-2}$	$1,8 \cdot 10^{-2}$	1,4	0,48	0,265	
6.	32	0,094	0,017	$3,1 \cdot 10^{-2}$	$1,8 \cdot 10^{-2}$	1,4	0,51	0,25	
7.	60	0,089	0,013	$3,5 \cdot 10^{-2}$	$0,5 \cdot 10^{-2}$	1,4	0,61	0,20	
8.	30	0,080	0,012	$3,6 \cdot 10^{-2}$	$2,55 \cdot 10^{-2}$	1,4	0,67	0,18	
9.	200	0,054	0,008	$3,9 \cdot 10^{-2}$	$2,4 \cdot 10^{-2}$	1,4	0,92	0,14	

шагом. Абсолютное значение ротора силы также возрастает с частотой, но на характер распределения  $\varepsilon = (\text{rot} \vec{f})_{\varphi}$  по высоте частота влияет незначительно - максимум ротора силы при любой из рассмотренных частот имеет максимальное значение вблизи поверхности металла около концов однофазного индуктора ( $1,1 < |z| < 1,2$ , концы индуктора -  $|z| = 1,4$ ). Несмотря на то, что максимальные значения ротора силы достигаются при больших значениях частоты, из-за быстрого его убывания по радиусу в направлении оси симметрии, максимальный интегральный эффект и максимальные значения скорости движения жидкого металла достигаются не при больших частотах, а при  $\hat{\omega} \approx 20$  (более подробно об этом см. в разделе 7). Электромагнитная сила при больших частотах действует только на узкий поверхностный слой жидкого металла, при  $\hat{\omega} = 200$  этот слой составляет менее, чем 20% радиуса проводника.

Аналогично полю, вихревые токи при больших значениях частоты концентрируются в поверхностном слое  $\delta$  (рис. 4.15), где выделяется практически всё джулево тепло.

В заключении необходимо подчеркнуть, что наиболее важными, основными параметрами, определяющими распределение ЭМ поля и силы в металле, а тем самым в известной степени и движение, являются следующие:

- 1) Вид индуктора (однофазный, многофазный).
- 2) Геометрия взаимного расположения металла и индуктора и их размеры,
- 3) Значение безразмерной частоты.
- 4) Присутствие магнитного экрана.

Некоторые аспекты электродинамической части рассматриваемой задачи ещё будут затрагиваться в разделе 7 в связи с результирующей циркуляцией жидкого металла, являющейся основным объектом исследования в данной работе.

## 5. ОПИСАНИЕ ОБРЕЗАННОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ В ЭЛЕКТРОННОЙ ОБЛАСТИ

### 5.1. Способы описания турбулентности

Учитывая, что кинематическая вязкость жидких металлов [ 7 ]

$$10^{-7} \frac{\text{м}^2}{\text{с}} < \nu < 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{с}},$$

можно оценить величину числа Рейнольдса  $Re = v_0 r_0 / \nu$  (2.9)

и движения металла в металлургических МЭД-установках:

$Re < 10^8$ . Следовательно, в большинстве случаев значение числа Рейнольдса превышает критическое и течение имеет характер развитой турбулентности, т.е. распределение скоростей резко и хаотично меняется со временем и по объёму расплава. Например, для течений в трубах без воздействия магнитного поля  $Re_{кр}$  может принимать значения в интервале 900-13000 [ 48 ]. Значение  $Re_{кр}$  зависит от внешних условий течения, характера, величины и спектра возмущений. Постоянное магнитное поле действует на турбулентность сглаживающе [ 7 ], и переход ламинарного (слоистого) течения прошедшей жидкости в турбулентное в присутствии магнитного поля происходит при больших значениях  $Re$ , чем в случае отсутствия поля. Влияние переменного во времени и по объёму ЭМ поля на течение мало изучено. Поэтому при рассмотрении МЭД течений (рис.3.1) необходимо считаться с возможностью существования как ламинарного (при малых скоростях и радиусах) так и в большинстве случаев турбулентного режима течения. Турбулентный характер течений в индукционных МЭД-устройствах подтверждают многочисленные эксперименты [ 3,7,49 ].

Для теоретического определения поля скоростей в жидком ме-

а же в случае ламинарного течения используется система уравнений МГД (см. раздел 2), содержащая уравнение Навье-Стокса (2.8) и (2.13). Расчёты турбулентных МГД течений в ламинарной постановке передают качественную картину течений, однако, распределения и абсолютные значения скоростей, гидродинамическое сопротивление и характеристики тепло-переноса могут существенно отличаться от наблюдаемых в эксперименте. Для устранения этих недостатков необходимо учитывать турбулентный характер течений. Известных в настоящее время подходов решения проблемы теоретического определения поля скоростей турбулентного течения следует назвать та следующие:

1) Применение статистической теории турбулентности [ 43 ], при этом для скорости, давления и других величин, определяющих движение, строится функция плотности вероятности, зависящая от пороговых моментов соответствующих величин. Однако, математические ожидания этих величин выражаются не только через  $n$ -точечную плотность вероятности  $\xi_n$ , а также через  $n+1$ -точечную плотность  $\xi_{n+1}$  и через функции распределения вероятностей, относящихся к ещё большему числу точек. Поэтому соответствующие уравнения приходится замыкать полуэмпирическим путём. Статистический подход является наиболее обоснованным и позволяет в принципе достаточно полно изучить свойства турбулентного течения. Однако, практическая реализация его для прикладных задач гидродинамики, а тем более магнитной гидродинамики в настоящее время затруднена из-за необходимости решать сложную систему интегрированных дифференциальных уравнений, что связано с большим объёмом вычислений. В настоящее время с помощью статистической теории удалось просчитать только крайне узкие задачи, не представляющие практического интереса ! 50 Решение задачи для случаев,

интересных в практике, неосуществимо на имеющихся ЭВМ даже при  $n = 3$ .

2) Исследования на основе предположения, что турбулентное течение описывается аналогичным образом, как ламинарное течение, т.е. с помощью уравнения движения. На основе этого подхода, используя представление скорости, давления, индукции магнитного поля в виде суммы осреднённого значения и пульсации ( $a = \bar{a} + a'$ ), осредняя систему уравнений МГД (2.6, 2.8, 2.18, 2.19) с применением условий Рейнольдса [ 48 ], получаем (знаки осреднения для  $v_i, p_i, B_i, f_i$  опускаются):

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x^k} = - \frac{\partial p}{\partial x^i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^k \partial x^k} + Al \cdot f_i - \frac{\partial}{\partial x^k} \overline{v_i' v^k'} + Al \cdot \frac{\partial}{\partial x^k} \overline{B_i' B^k'} \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial v^k}{\partial x^k} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial B^k}{\partial x^k} = 0 \quad ; \quad (5.2) \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial t} = \frac{1}{Re_m} \frac{\partial^2 B_i}{\partial x^k \partial x^k} + \frac{\partial}{\partial x^k} \left[ (v_i B^k - v^k B_i) + (\overline{v_i' B^k} - \overline{v^k B_i'}) \right] \quad ; \quad i, k = 1, 2, 3 \quad (5.4)$$

Так как имеет место взаимное влияние поля скорости и магнитного поля, то пульсации скорости вызывают пульсации индукции и наоборот. Однако, величина этого взаимного влияния определяется значением магнитного числа Рейнольдса (2.7). Если  $Re_m \ll 1$ , то пульсации магнитного поля можно не учитывать и уравнение (5.1) сводится к уравнению (2.16), а уравнение (5.4) к уравнению для индукции поля (2.6). Кроме того, при расхождении течения проводящей жидкости в периодическом во времени магнитном поле из-за скин-эффекта взаимное влияние магнитного поля и поля скорости может осуществляться только в некотором поверхностном слое

жидкости, толщина которого определяется глубиной проникновения (2.29) магнитного поля в среду. За пределами этого слоя движение проводящей жидкости будет определяться практически теми же условиями, что и для непроводящей жидкости.

Как уже отмечалось в разделе 2 система уравнений (2.6, 2.16, 2.18, 2.20) так же как исходная система (5.1 - 5.4) является незамкнутой. Для определения 25 неизвестных величин имеют только 8 дифференциальных соотношений. Кроме компонент скорости, давления и индукции магнитного поля определению подлежат компоненты симметричных тензоров второго ранга  $\overline{B_i B_k}, \overline{v_i B_k}, \overline{v_i v_k}$ , последний из которых имеет смысл тензора турбулентных напряжений. При  $Re_m \ll 1$  число неизвестных величин существенно сокращается (от 25 до 13), поэтому в дальнейшем при рассмотрении осреднённых турбулентных течений будем пользоваться безиндукционным приближением.

Для замыкания системы уравнений (2.6), (2.16), (2.18), (2.20) необходимо использовать какие-то дополнительные связи:

1) Пользоваться уравнениями для одноточечных или многоточечных моментов высших порядков [ 50 ], в которые необходимо ввести определённое количество эмпирических постоянных и строить те или иные гипотезы, определяющие взаимосвязь между моментами, так как система уравнений моментов принципиально не замкнута - цепочку уравнений приходится обрывать на уровне уравнения для вторых или третьих моментов и моменты более высокого порядка вычислять через моменты более низкого порядка и другие характеристики процесса. Численные расчёты некоторых двумерных течений с использованием уравнений для вторых моментов осуществлены, например, в работах [ 51 ], [ 66 ].

2) Определять турбулентные напряжения в уравнении (2.16)

на основе полуэмпирических формул [ 52, 53, 54 и др. ], учитывающих структуру турбулентного течения в конкретном классе устройств. Эти формулы могут строиться с использованием экспериментальных данных, теории размерности, а также на основе оценки влияния магнитного поля на турбулентность [ 7 ].

3) Определение турбулентных напряжений в каждом частном случае на основе данных о пульсациях скорости, полученных непосредственно из эксперимента.

4) Введение в нестационарное уравнение Навье-Стокса осреднённого спектра возмущений, действующих во время всего движения [ 55 ]. Полученное нестационарное решение далее осредняется, что позволяет судить о распределении осреднённых скоростей и центральных моментов второго порядка.

При использовании первого источника, необходимо наряду с уравнением Рейнольдса (2.6) дополнительно решать интегро-дифференциальную проблему, которая на порядок сложнее исходной задачи для ламинарного течения (более подробно об этом подходе в подразделе 5.3). Второй из подходов позволяет при определённых допущениях исследовать осреднённое турбулентное течение в МГД устройствах с замкнутым течением, используя методики, разработанные для расчётов течений в ламинарном режиме [ 58, 59 ], задачу при этом существенно не усложняя (более подробно об этом в подразделе 5.2). Третий подход не доступен из-за недостаточности экспериментальных данных о структуре турбулентного потока в присутствии переменного магнитного поля, а четвёртый, по мнению автора, объединяет свойства рассматриваемого течения, так как сводит их к заранее заданному спектру возмущений, который на самом деле не известен. Эти методы (3, 4) по указанным причинам далее рассматриваться не будут.

## 5.2. Полуэмпирические формулы и рабочие гипотезы для турбулентных напряжений

В настоящем подразделе для расчёта осреднённого МГД течения в замкнутой области предлагаются некоторые полуэмпирические формулы и обсуждается правомерность их применения, причём рассматривается два подхода к определению турбулентных напряжений  $\overline{v_i' v_k'}$  (6.1):

1) Компоненты тензора турбулентных напряжений выражаются через осреднённые скорости с введением коэффициента турбулентной вязкости  $\lambda_T$  (видоизменённая гипотеза Буссинеска):

$$\overline{v_i' v_k'} = - \frac{\lambda}{Re_T} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x^k} + \frac{\partial v_k}{\partial x^i} \right) = - \frac{\lambda}{Re_T^*} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x^k} + \frac{\partial v_k}{\partial x^i} \right) + \frac{\lambda}{3} \delta_{ik} \overline{v_l' v_l'} \quad (5.5)$$

$$Re_T = v_0 r_0 / \nu_T - \text{турбулентное число Рейнольдса} \quad (5.6)$$

Уравнение движения приобретает вид:

$$\rho v^k \frac{\partial v_i}{\partial x^k} = - \frac{\partial p}{\partial x^i} + \frac{\lambda}{Re_{eff}} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^k \partial x^k} + \left( \frac{\partial v_i}{\partial x^k} + \frac{\partial v_k}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{\lambda}{Re_T} \right) + Al f_i \quad (5.7)$$

$$\frac{1}{Re_{eff}} = \frac{1}{Re} + \frac{1}{Re_T} \quad (3.22)$$

$Re_{eff}$  - эффективное число Рейнольдса.

2) Устанавливается связь между конвективными членами и турбулентными напряжениями в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \overline{v_i' v_k'} = - \chi_i v^k \frac{\partial v_i}{\partial x^k} \quad (5.8)$$

Суммирование только по индексу  $k$ , что при  $\chi_i = 1$ , приводит к линеаризации уравнения движения (5.1):

$$\frac{\lambda}{Re} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^k \partial x^k} - \frac{\partial p}{\partial x^i} + Al f_i = 0 \quad (5.9)$$

В общем случае коэффициент турбулентной вязкости  $\lambda_T$  является тензором чётного ранга и в виде скалярной функции

$$\nu_T = f(x_i, v_i, \frac{\partial v_i}{\partial x^k}, B_i, \dots); \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.10)$$

представим только в случае изотропной турбулентности. Так как в течениях с поперечным сдвигом, а также в присутствии магнитного поля изотропность нарушается, то введение  $\nu_T$  формулой (5.10) необходимо рассматривать как приближение, оправданное тем, что из-за поверхностного эффекта магнитное поле экспоненциально убывает в пограничном слое  $\delta$  и в большей части цилиндрического объема (рис. 3.1) градиенты скорости не велики.

При решении уравнения (5.7) в форме ротора (3.21) необходимо учитывать ряд членов, содержащих турбулентное число Рейнольдса  $Re_T$ , которые можно свести к некоторой турбулентной силе  $\vec{f}_T$  (3.22). При  $Re_T = \text{const}$ , т.е.  $\nu_T = \text{const}$  турбулентная сила

$$\vec{f}_T = \frac{1}{Re_T} \text{rot} \vec{w} \quad (5.11)$$

уравнение (3.21) принимает форму, аналогичную форме уравнения ламинарного движения с тем лишь отличием, что вместо числа Рейнольдса используется эффективное число Рейнольдса:

$$\text{rot}(\vec{v} \times \vec{w}) = \frac{1}{Re_{\text{eff}}} \text{rot} \text{rot} \vec{w} - Al \cdot \text{rot} \vec{f} \quad (5.12)$$

В случае аксиальной симметрии модели (рис. 3.1)

$$v_\varphi = 0; \quad v_r = v_r(r, z); \quad v_z = v_z(r, z); \quad w_r = w_\varphi = 0;$$

$$w_\varphi = w = w(r, z); \quad f_\varphi = 0; \quad f_r = f_r(r, z); \quad f_z = f_z(r, z) \quad (5.13)$$

уравнение (5.12) с введением функции тока Стокса сводится к одному скалярному уравнению (3.19).

Если  $\nu_T \neq \text{const}$ , то с учетом (5.13) уравнение (3.21) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{w}{r} \right) \left( r v_r - \frac{3}{Re_{\text{eff}}} \right) + r v_z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{w}{r} \right) = Al \cdot \varepsilon + \frac{r}{Re_{\text{eff}}} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( \frac{w}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{w}{r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{Re_T} \right) \left[ \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} - \frac{\partial v_z}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{Re_T} \right) \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left[ \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} \right] + 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial r} \left( \frac{1}{Re_r} \right) \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial v_z}{\partial z} + \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{1}{Re_r} \right) - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( \frac{1}{Re_r} \right) \right] \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \right). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Граничные условия для осреднённых величин сохраняют такой же вид, как в случае ламинарного течения (табл. 3.1).

Далее рассматриваются некоторые способы задания коэффициента турбулентной вязкости и тем самым  $Re_r$ , для уравнений (5.12), (5.14):

1) Постоянный по объёму коэффициент турбулентной вязкости.

В работе [ 62 ] турбулентный поток предполагался однородным, коэффициент турбулентной вязкости принимался постоянным во всём объёме жидкости  $\nu_t = \nu_0$ .

Однако,  $\nu_t$  не является физической постоянной для данной жидкости, и выбор его значения зависит от вида течения, формы области распределения электромагнитного поля и других факторов. В рассматриваемом классе МГД устройств течение допустимо считать однородно турбулентным только вдали от твёрдых стенок - в центральной части области заполненной металлом. Так как характер течения в значительной степени определяется геометрией области и ЭМ силами, то следует ожидать, что даже приближённой оценки турбулентной диссипации, то есть коэффициента  $\nu_t$ , достаточно для получения результатов удовлетворительно согласующихся с экспериментальными данными. Это подтвердили расчёты поля скоростей с помощью численной методики [ 62 ] при  $\nu_t = \nu_0$ . Конкретный интервал значений коэффициента  $\nu_t$  для класса устройств определяется в результате сопоставления результатов численного и физического экспериментов. Для сохранения баланса энергии интегральная диссипация в объёме при  $\nu_t = \nu_0$  должна приблизительно равняться действительной наблюдаемой величине. Поэтому необходимо предположить  $\nu_0 \gg \nu$

и соответственно  $Re_{эф} \approx Re_T \ll Re$ , так как  $v_{0,лам} > v_{0,турб}$  и  $\nu_T > 0$ .  
 Например, для определения осреднённого поля скоростей в индукционных плавильных печах при  $r_0 \sim 1-2$  м было установлено  $Re_{эф} = 200-800$ , а для расчёта лабораторных устройств  $Re_{эф} \approx 50$  [ 63 ].  
 Движение в приближении  $\nu_T = \nu_0$  описывается уравнением (3.19) и для решения задачи применимы все методы, разработанные для расчётов ламинарного потока несжимаемой жидкости.

2) Обобщённая гипотеза Кармана. Одним из возможных способов определения коэффициента турбулентной вязкости в изотропном приближении является формула Кармана [ 48 ]:

$$\nu_T = \alpha^2 \frac{|\partial v_x / \partial y|^3}{(\partial^2 v_x / \partial x^2)^2} \quad (5.15)$$

построенная на основе теории размерностей для одномерного течения. Формула без труда обобщается на случай трёхмерного течения [ 54 ]:

$$\nu_T = \alpha^2 \frac{[\frac{1}{2}(V; V)]^{3/2}}{[\frac{1}{2}(\Omega; \Omega)]} \quad (5.16)$$

где  $\alpha$  - безразмерная эмпирическая постоянная;

$$V_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad ; \quad \Omega_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial x_j} - \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \quad (5.17)$$

$(\Omega; \Omega)$  - скалярное произведение тензоров.

В случае рассматриваемого осесимметричного течения

$$\nu_T = \alpha^2 \Phi_v^{3/2} / Q \quad (5.18)$$

где

$$\Phi_v = 2 \left[ \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{v_r}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2$$

- диссипативная функция Релея, характеризующая

переход механической энергии осреднённого дви-

жения в тепловую энергию;

$$(5.19)$$

$$Q = r^2 \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{w}{r} \right) \right]^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \quad (5.20)$$

Экспериментально установлено [ 48, 54 ], что для турбулентных течений в трубах  $\alpha = 0,36 + 0,4$ .

Заданный формулой (5.18) коэффициент  $\alpha_f$  используется для определения локального значения эффективного числа Рейнольдса, в уравнении осреднённого движения (5.14).

3) Линеаризованное уравнение движения. В расчетах по методу [ 62 ] решалось уравнение движения несжимаемой жидкости с сохранением нелинейных членов  $(\vec{\nabla} \nabla) \vec{v}$ , характеризующих конвективное изменение скорости. Для рассматриваемого замкнутого МГД-течения жидкого металла в ламинарном режиме условия, необходимые для обнуления в нуль конвективных членов, не выполняются. Можно предположить, что в случае турбулентного течения с циркуляцией вокруг центра вихря из-за продольных и поперечных пульсаций скорости вращательные турбулентные слои жидкости связаны между собой более тесно, чем слои жидкости при ламинарном течении, скорость которого совпадает со средней скоростью рассматриваемого турбулентного течения. Сцепление слоев приводит к тому, что циркуляция вокруг центра вихря становится аналогичной квазитвёрдому вращению, и вращение  $(\vec{\nabla} \nabla) \vec{v}$  в турбулентном течении частично или полностью компенсируется силами турбулентного сцепления. В случае двумерного течения это приводит к следующим зависимостям [ 61 ]:

$$\frac{\partial \mathcal{T}_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \mathcal{T}_{rr}) = -\chi_1 \left( v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \frac{1}{Re_{\text{эф}}} (\Delta \vec{v})_r \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial \mathcal{T}_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \mathcal{T}_{rz}) = -\chi_2 \left( v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \frac{1}{Re_{\text{эф}}} (\Delta \vec{v})_z$$

где  $\mathcal{T}_{rr} = \overline{v_r^2}$ ;  $\mathcal{T}_{zz} = \overline{v_z^2}$ ;  $\mathcal{T}_{rz} = \overline{v_r v_z}$  - безразмерные турбулентные напряжения.

$\chi_i (i=1,2)$  - безразмерные постоянные ( $0 \leq \chi_i \leq 1$ )

При этом предполагается, что моменты  $\mathcal{T}_{r\varphi} = \mathcal{T}_{z\varphi} = \mathcal{T}_{\varphi\varphi} = 0$ . В благо-

приятных условиях развития вихря осреднённое течение приближённо описывается линеаризованным уравнением движения ( $\chi_1 = \chi_2 = 1$ ) в форме ротора:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial (w \cdot r)}{\partial r} \right] + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + Al \cdot Re_{eff} (r \cdot \vec{f})_r = 0. \quad (5.22)$$

Так как в безиндукционном приближении ЭМ сила не зависит от скорости течения, то из линейности уравнения (5.22) следует, что  $v_0 \sim \frac{1}{\nu}$  или  $v_0 = v^* \sqrt{Re_{eff}}$ , где  $v^* \left[ \frac{M}{\zeta} \right]$  - постоянная, зависящая от параметров устройства. Значение  $v^*$  определяется решением системы МГД-уравнений, включающих уравнение (5.22). Следовательно, полученные при различных значениях  $\nu$  распределения безразмерной скорости имеют вид:

4) Координатная зависимость коэффициента турбулентной вязкости. Так как турбулентный поток в металлургических МГД-установках не является однородным [ 3 ], то была предложена координатная зависимость коэффициента  $\nu_T$  в следующем виде:

$$\nu_T = \nu_0 \nu_1(r) \cdot \nu_2(z), \quad (5.24)$$

где

$$\nu_1(r) = \begin{cases} 1 - r^{k_1} & ; \quad \text{при } 0 \leq r < r_T ; \\ \left( (1 + \nu_2 - r_T^{k_2}) \left( \frac{1-r}{1-r_T} \right)^{k_2} - \nu_2 \right) & ; \quad \text{при } r_T \leq r < 1, \end{cases} \quad (5.25)$$

или

$$\nu_1(r) = \begin{cases} (1 - r^{k_1}) & ; \quad \text{при } 0 \leq r < r_T ; \\ (1 - r_T^{k_1}) \exp[-a_1(r - r_T)] & ; \quad \text{при } r_T \leq r < 1 ; \end{cases} \quad (5.26)$$

$$\nu_2(z) = \begin{cases} a_2 \left( \frac{z - z_1}{z_{\text{см}} - z_1} \right)^{k_2} + 1 & ; \quad \text{при } z_1 \leq z \leq z_{\text{см}} ; \\ 1 & ; \quad \text{при } z_2 < z < z_1 ; \\ a_2 \left( \frac{z - z_2}{z_{\text{см}} - z_2} \right)^{k_2} + 1 & ; \quad \text{при } z_{\text{см}} \leq z \leq z_2. \end{cases} \quad (5.27)$$

Выбор значений постоянных  $\nu_0 \left[ \frac{M^2}{C} \right]$ ,  $\nu_c$ ,  $r_T$ ,  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ ,  $\kappa_3$ ,  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  в формулах (5.24 - 5.27) обусловлен следующим:

1) Коэффициент  $\nu_0$  определяет абсолютное значение коэффициента турбулентной вязкости и совпадает с его значением в однородно-турбулентной части потока, причём  $\nu_T \gg \nu$  (см. также пункт I настоящего подраздела).

2) Размер  $r_T$ , внутри которого турбулентность принимается однородной, ограничен радиусом однонаправленного потока (обычно  $r_p = 0,65 + 0,8 [3]$ ). Так как поверхность  $r = r_p$  является границей раздела течений с противоположным направлением осреднённой скорости  $v_z$ , то можно предположить образование некоторого турбулентного слоя с обеих сторон поверхности раздела, причём толщина этих слоёв больше толщины турбулентного пограничного слоя, образующегося при течении в трубе на её стенке, т.е.  $r_T \leq 0,8 r_p$ . (5.28)

Магнитное поле существенно влияет на структуру турбулентности [50], поэтому модель однородной турбулентности применима только вне зон действия электромагнитных сил. Значение  $r_T$  сверху ограничивается также глубиной проникновения поля в металл -  $r_T = f(\delta, r_p)$ , по крайней мере  $r_T < 1 - \delta$  (5.29)

При изменении безразмерной частоты  $\omega = 5 \div 400$ , предел  $r_T$  меняется в интервале  $0,5 \div 0,95$ . Следовательно, определяющим может быть как условие (5.28), так и условие (5.29).

3) Если в формуле (5.25)  $\kappa_2 = 1$ ,  $\nu_c = 0$ , то изменение  $\nu_T$  по радиусу вблизи стенки при  $r \geq r_m$  ( $r_m$  - координата максимума скорости  $v_z$  в пристеночном потоке,  $r_m \geq 0,9$ ), эквивалентно гипотезе Прандтля, дающей логарифмический профиль скорости. Физический смысл положения заключается в том, что размер крупных вихрей, в основном определяющих турбулентную диссипацию, растёт пропорционально расстоянию от твёрдой стенки [48]. Однако, таким образом,

ние и в пунктах 1, 2, 3 не учитывается присутствие периодического поля в пристеночной зоне. Следует ожидать, что ЭМ поле при  $1-\delta < r < 1$  действует на пульсации подавляюще [ 50 ], что в случае сильных полей может привести к образованию ламинарного пограничного слоя. В отличие от центральной части, где  $\nu_t \gg \nu$ , в пристеночной зоне  $\nu_t \sim \nu$  и в формуле (5.30) следует выбирать  $\kappa > 1$  с целью существенного уменьшения сопротивления в области  $r > 1-\delta$ .

4) Экспериментально установлено [ 64 ], [ 65 ], что в сдвиговом течении под действием постоянного магнитного поля осуществляется частичный переход трёхмерной турбулентности в двухмерную с передачей энергии пульсационного движения в осреднённое течение. Это приводит к отрицательным значениям коэффициента турбулентной вязкости. Стационарность такого процесса в данном случае поддерживается за счёт энергии магнитного поля и, так как движение замкнуто, то трёхмерная турбулентность, генерируемая в зоне  $r \approx r_p$  переносится в пристеночную зону  $1-\delta < r < 1$ , где становится в большей степени двумерной. Появление эффекта отрицательной вязкости предусмотрено в формуле (5.25) при  $\nu_c > 0$ . Следует ожидать, что  $\nu_c \ll 1$  и  $\nu_c \sim \nu/\nu_0$ .

5) Увеличение значения  $\nu_t$  вне зоны действия однофазного индуктора (рис. 3.1б) определяется необходимостью уменьшить вынос скорости в торцевые зоны цилиндрического объёма. Постоянные  $a_1, \kappa_1$  (5.30) определяют характер увеличения  $\nu_t$  в этой зоне. В случае короткого индуктора ( $h_m < 1$ ) полагается  $z_1 = z_2 = 0$ , а в случае длинного  $-z_1 \approx z_{8m}, z_2 \approx z_{1m}$ .

Формула (5.26) имеет физический смысл аналогичный формуле (5.25).

В заключение следует отметить, что приведённые здесь формулы для определения турбулентных напряжений, не претендуют на

исечение процесса турбулентности, их следует рассматривать только в качестве рабочих гипотез, основанных на существенном упрощении физических явлений.

5.3. Уравнения центральных моментов второго порядка

Уравнения центральных моментов второго порядка, применяемые для описания турбулентных напряжений, получаются в результате сложения уравнения для пульсаций индукции  $B_i$  и пульсаций скорости  $v_i$  взаимосвязанные величины  $v_i$  и  $B_i$  и приведения полученных уравнений к симметричному виду, с последующим осреднением: [ 47 ]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{v_i v_j}}{\partial t} = & - \overline{v^k \frac{\partial v_i v_j}{\partial x^k}} - \overline{v^k v^l \frac{\partial v_i}{\partial x^k}} - \overline{v_j v^k \frac{\partial v_i}{\partial x^k}} + \overline{v^k \left( \frac{\partial v_i v^k}{\partial x^k} + \frac{\partial v_j v^k}{\partial x^k} \right)} - \\ & - \frac{1}{Re} \frac{\partial \overline{v_i v_j \frac{\partial v^k}{\partial x^k}}}{\partial x^k} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \overline{v^k v^l \frac{\partial v_i}{\partial x^k}}}{\partial x^k} - \frac{\partial \overline{v_i v^k}}{\partial x^k} - \frac{\partial \overline{v_j v^k}}{\partial x^k} - \frac{\partial \overline{v_i v^k v^l}}{\partial x^k} + \\ & + \Delta \left[ \overline{v_i v_j \frac{\partial B^k}{\partial x^k}} + \overline{v_j v^k \frac{\partial B^i}{\partial x^k}} + B^k \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \overline{v_j B^i} + \overline{v^i B_j} \right) - B^k \left( \overline{B^i \frac{\partial v_j}{\partial x^k}} + \right. \right. \\ & \left. \left. \overline{B^j \frac{\partial v_i}{\partial x^k}} \right) - \overline{B^k B^l \frac{\partial v_i}{\partial x^k}} - \overline{B_j B^k \frac{\partial v_i}{\partial x^k}} + \frac{\partial}{\partial x^k} \overline{v^i B_j B^k} + \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial x^k} \overline{v_j B^i B^k} \right] ; \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{v_i v_j B^k}}{\partial t} = & - \overline{v^k \frac{\partial v_i v_j B^k}{\partial x^k}} + \overline{B^i B^k \frac{\partial v_j}{\partial x^k}} + \overline{B_j B^k \frac{\partial v_i}{\partial x^k}} - \overline{v^k v^l B_j \frac{\partial v_i}{\partial x^k}} - \\ & - \frac{\partial \overline{v_i v_j B^k}}{\partial x^k} - \frac{1}{Re_m} \frac{\partial \overline{v_i v_j \frac{\partial B^k}{\partial x^k}}}{\partial x^k} + \frac{1}{Re_m} \frac{\partial \overline{v^k v^l B^i}}{\partial x^k \partial x^k} + B^k \left( \overline{B_j \frac{\partial v_i}{\partial x^k}} + \overline{B^i \frac{\partial v_j}{\partial x^k}} \right) - \\ & - \overline{v_j B^k \frac{\partial B^i}{\partial x^k}} - \overline{v_i B^k \frac{\partial B^j}{\partial x^k}} + \frac{\partial}{\partial x^k} \overline{v^i B_j B^k} + \frac{\partial}{\partial x^k} \overline{v_j B^i B^k} + \frac{\partial}{\partial x^k} \overline{v^k B^i B^j} ; \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\frac{\partial \overline{v_i v^k B^j}}{\partial t} = - \overline{v^k \frac{\partial v_i v^k B^j}{\partial x^k}} - \overline{v^l v^k \frac{\partial B_j}{\partial x^k}} - \overline{v^k B_j \frac{\partial v_i}{\partial x^k}} + \overline{v^l B^k \frac{\partial v_j}{\partial x^k}} + \left( \frac{1}{Re} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{Re_m} \left[ \overline{\frac{\partial^2 v_i' B_j'}{\partial x^k \partial x^k}} - 2 \overline{\frac{\partial v_i'}{\partial x^k} \frac{\partial B_j'}{\partial x^k}} \right] - \left( \frac{1}{Re} B_j' \frac{\partial^2 v_i'}{\partial x^k \partial x^k} + \frac{1}{Re_m} v_i' \frac{\partial^2 B_j'}{\partial x^k \partial x^k} \right) - \\
 & - \overline{v^k B_j' \frac{\partial v_i'}{\partial x^k}} + \frac{\partial}{\partial x^k} \overline{v_i' v_j' B^k} - \frac{\partial}{\partial x^k} \overline{v_i' v^k B_j'} + B^k \overline{v_i' \frac{\partial v_j'}{\partial x^k}} + B_j' \frac{\partial p'}{\partial x^k} + A l \times \\
 & \times \left[ \overline{B_j' B^k \frac{\partial B_i'}{\partial x^k}} - \overline{B^k B_i' \frac{\partial B_j'}{\partial x^k}} + B^k B_j' \frac{\partial B_i'}{\partial x^k} + \frac{\partial}{\partial x^k} \overline{B_i' B_j' B^k} \right] . \quad (5.32)
 \end{aligned}$$

Как уже отмечалось, система уравнений (5.30 - 5.32) незамкнута - в уравнении моментов второго порядка содержатся также моменты третьего порядка, которые непосредственно из этих уравнений определить нельзя.

Так как экспериментальные и теоретические исследования турбулентных течений под влиянием переменного по объёму и во времени магнитного поля в настоящее время практически отсутствуют [50], то для замыкания и упрощения системы уравнений (5.30 - 5.32) применяются гипотезы, которые оправдали себя в обычной гидродинамике; привлекаются также соображения, основанные на теории размерностей и подобия [69]:

1) Рассматривается стационарное в среднем течение:

$$\frac{\partial \overline{\sigma}_{ij}}{\partial t} = 0 . \quad (5.33)$$

2) Используется безиндукционное приближение  $Re_m \ll 1$ . Так как источником пульсаций магнитного поля в данном случае является движение, то  $|B_i'| < |v_j'|$ ,  $|B_i'| \ll |p'|$  и далее игнорируется обратное влияние течения на ЭМ поле. В результате этого из рассмотрения выпадают уравнения (5.31) и (5.32), а аналог силы (выражение в квадратной скобке) в уравнении (5.30) обращается в нуль.

3) Члены, выражающие в уравнении (5.30) диффузию турбулентности из-за пульсаций давления, представляются на основе модели градиентной диффузии [67]:

$$\overline{p' v_i'} = -\sqrt{2} K' l \frac{\partial \overline{\sigma}_{ij}^k}{\partial x^k} \quad (5.34)$$

где  $K = \frac{1}{2} \overline{v_i' v_i'}$  - кинетическая энергия турбулентных пульсаций; (5.35)

$l$  - характерный масштаб турбулентности.

Определение масштаба турбулентности является самостоятельной проблемой, т.к.  $l$  не является физической постоянной. Подробно этот вопрос изучен для течений в трубах [48], а также получены формулы, учитывающие влияние постоянного магнитного поля на величину масштаба турбулентности [7]. Так как соответствующие формулы для случая переменного магнитного поля неизвестны, то в настоящей работе  $l$  в первом приближении рассматривается как эмпирическая постоянная.

4) Член, представляющий часть диссипации турбулентной энергии, представляется в виде [68]:

$$2 \frac{\overline{\partial v_i' \partial v_i'}}{\partial x^k \partial x^k} = c_3 \frac{\sigma_{ij}}{l^2} - c_4 \cdot Re \cdot \frac{2K^{3/2}}{3} \delta_{ij} + \frac{1}{2} \frac{\sigma_{ij}}{\partial x^k \partial x^k}, \quad (5.36)$$

где  $c_3, c_4$  - эмпирические постоянные. Формула (5.36) является обобщением аппроксимации Ротта.

5) Обмен энергией пульсаций вдоль разных осей координат выражается согласно формуле [66]:

$$\rho' \left( \frac{\partial v_i'}{\partial x^i} + \frac{\partial v_i'}{\partial x^i} \right) = - \frac{c_1 \cdot E}{Re \cdot K} \left( - \frac{2}{3} K \delta_{ij} \right) + \frac{c_2 + 8}{11} \left( \sigma_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x^k} + \sigma_{jk} \frac{\partial v_i}{\partial x^k} + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} K \delta_{ij} - \frac{30c_2 - 2}{55} K \left( \frac{\partial v_i}{\partial x^i} + \frac{\partial v_i}{\partial x^i} \right) + \frac{8c_2 - 2}{11} \left( \sigma_{ik} \frac{\partial v^k}{\partial x^i} + \sigma_{jk} \frac{\partial v^k}{\partial x^i} - \frac{\delta_{ij}}{3} \sigma_{mn} \frac{\partial v_n}{\partial x^m} \right) \right), \quad (5.37)$$

где  $E = \frac{\overline{\partial v_i' \partial v_i'}}{\partial x^k \partial x^k}$  - характеристика турбулентности (5.38)

$c_1, c_2$  - эмпирические постоянные.

6) Моменты третьего порядка, представляющие диффузию энергии турбулентности, выражаются в виде комбинации моментов второго порядка [66]:

$$\sigma_{ij}^k = - \frac{c_5 K \cdot Re}{E} \left( \sigma_{kl} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x^l} + \sigma_{jl} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x^l} + \sigma_{il} \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x^l} \right), \quad (5.39)$$

где  $c_5$  - эмпирическая постоянная.

В результате подстановки формул (5.33)-(5.39) в уравнение (5.30) получается уравнение для моментов:

$$\begin{aligned} v^k \frac{\partial \overline{J}_{ij}}{\partial x^k} = & \frac{c_2 - 3}{11} \left( \overline{J}_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x^k} + \overline{J}_{jk} \frac{\partial v_j}{\partial x^k} \right) - \frac{\overline{J}_{ij}}{Re} \left( c_1 \Lambda + \frac{c_3}{l^2} \right) + \frac{1}{2 Re} \frac{\partial^2 \overline{J}_{ij}}{\partial x^k \partial x^k} + \\ & + \frac{K \overline{J}_{ij}}{3} \left( \frac{c_6 \Lambda}{Re} + \frac{c_2 + 8}{11} + \frac{c_4 \sqrt{K}}{l} \right) + \frac{8c_2 - 2}{11} \left( \overline{J}_{ik} \frac{\partial v^k}{\partial x^j} + \overline{J}_{jk} \frac{\partial v^k}{\partial x^i} - \frac{\delta_{ij}}{3} \times \right. \\ & \left. \overline{J}_n \frac{\partial v^n}{\partial x^i} \right) - \frac{60c_2 - 4}{55} K \left( \frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i} \right) + \sqrt{2} l \left[ \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{K} \frac{\partial \overline{J}_{jk}}{\partial x^k} \right) + \frac{\partial}{\partial x^j} \times \right. \\ & \left. \left( \sqrt{K} \frac{\partial \overline{J}_{ik}}{\partial x^k} \right) \right] + c_5 Re \frac{\partial}{\partial x^k} \left[ \frac{1}{\Lambda} \left( \overline{J}^{kl} \frac{\partial \overline{J}_{ij}}{\partial x^l} + \overline{J}_j^l \frac{\partial \overline{J}_{ik}}{\partial x^l} + \overline{J}_i^l \frac{\partial \overline{J}_{jk}}{\partial x^l} \right) \right], \end{aligned} \quad (5.40)$$

где 
$$\Lambda = \frac{E}{K} = \frac{c_3}{l^2} - \frac{3c_4 Re}{l} + \frac{1}{2K} \frac{\partial^2 K}{\partial x^k \partial x^k} \quad (5.41)$$

Уравнение (5.40) вместе с уравнением Рейнольдса (5.1) и условием несжимаемости образуют замкнутую систему. В общем случае система содержит 10 уравнений. Так как в трёхмерной постановке решение этой задачи на ЭВМ в настоящее время неосуществимо, то для дальнейших упрощений используется осевая симметрия (5.13) замкнутого МП-течения.

При записи системы уравнений (5.1), (5.40) в цилиндрической системе координат в форме ротора дополнительно полагается, что  $\overline{J}_{i\varphi} = 0$  ( $i = r, z, \varphi$ ), т.е., пульсации по  $r$  и  $z$  не коррелируют с азимутальными пульсациями скорости. В результате этого получается замкнутая система уравнений, состоящая из четырёх нелинейных, одного линейного уравнения и трёх дополнительных связей [69]:

1) Уравнение движения:

$$\begin{aligned} \left( r v_r - \frac{3}{Re} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{w}{r} \right) + r v_z \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{w}{r} \right) = & \frac{r}{Re} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( \frac{w}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{w}{r} \right) \right] + \\ & + Al \cdot \varepsilon + \left[ \frac{\partial^2 \overline{J}_{zz}}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \overline{J}_r)}{\partial r \partial z} - \frac{\partial^2 \overline{J}_{zr}}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (\overline{J}_{rz} r)}{\partial r} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.42)$$

2) Уравнение, связывающее ротор скорости  $w$  и функцию тока

$\Psi$  (3.20).

3) Формулы, определяющие функцию тока (2.53) и ротор скорости (2.52).

4) Уравнения для центральных моментов  $J_{rr}$ ,  $J_{rz}$ ,  $J_{zz}$ :

$$\begin{aligned}
 v_r \frac{\partial J_{rr}}{\partial r} + v_z \frac{\partial J_{rr}}{\partial z} &= \frac{2(c_2-3)}{11} \left( J_{rr} \frac{\partial v_r}{\partial r} + J_{rz} \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) - \frac{J_{rr}}{Re} \left( c_1 \Lambda + \frac{c_3}{l^2} \right) + \\
 &+ \frac{2}{3} K \left( \frac{c_1 \Lambda}{Re} + \frac{c_2+8}{11} + \frac{c_4 \sqrt{K}}{l} \right) + \frac{1}{2 Re} \left( \frac{\partial^2 J_{rr}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 J_{rr}}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial J_{rr}}{\partial r} - \frac{2 J_{rr}}{r^2} \right) - \\
 &- \frac{8(15c_2-4)K}{55} \frac{\partial v_r}{\partial r} + 2\sqrt{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \sqrt{K} \left( \frac{\partial J_{rr}}{\partial r} + \frac{J_{rr}}{r} + \frac{\partial J_{rz}}{\partial z} \right) \right] \right\} + \frac{8c_2-2}{11} \times \\
 &\times \left[ 2 \left( J_{rr} \frac{\partial v_r}{\partial r} + J_{rz} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) - \frac{1}{3} \left( J_{rr} \frac{\partial v_r}{\partial r} + J_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} + J_{rz} \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right) \right] + \\
 &+ c_3 Re \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{3}{\Lambda} \left( J_{rr} \frac{\partial J_{rr}}{\partial r} + J_{rz} \frac{\partial J_{rr}}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{\Lambda} \left( J_{rz} \frac{\partial J_{rr}}{\partial r} + J_{zz} \frac{\partial J_{rr}}{\partial z} \right) \right] \right. \\
 &\left. + 2 \left( J_{rr} \frac{\partial J_{rz}}{\partial r} + J_{rz} \frac{\partial J_{rz}}{\partial z} \right) \right\} + \frac{3}{r\Lambda} \left( J_{rr} \frac{\partial J_{rr}}{\partial r} + J_{rz} \frac{\partial J_{rr}}{\partial z} \right) \quad ; \quad (5.43)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_r \frac{\partial J_{zz}}{\partial r} + v_z \frac{\partial J_{zz}}{\partial z} &= \frac{2(c_2-3)}{11} \left( J_{rz} \frac{\partial v_z}{\partial r} + J_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - \frac{J_{zz}}{Re} \left( c_1 \Lambda + \frac{c_3}{l^2} \right) + \\
 &+ \frac{2}{3} K \left( \frac{c_1 \Lambda}{Re} + \frac{c_2+8}{11} + \frac{c_4 \sqrt{K}}{l} \right) + \frac{1}{2 Re} \left( \frac{\partial^2 J_{zz}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial J_{zz}}{\partial r} + \frac{\partial^2 J_{zz}}{\partial z^2} \right) - \frac{8(15c_2-4)K}{55} \times \\
 &\times \frac{\partial v_z}{\partial z} + 2\sqrt{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \sqrt{K} \left( \frac{\partial J_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial J_{zz}}{\partial z} \right) \right] \right\} + \frac{8c_2-2}{11} \left\{ 2 \left( J_{rz} \frac{\partial v_r}{\partial z} + \right. \right. \\
 &\left. \left. + J_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - \frac{1}{3} \left[ J_{rr} \frac{\partial v_r}{\partial r} + J_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} + J_{rz} \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] \right\} + c_3 Re \times \\
 &\times \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{\Lambda} \left( J_{rz} \frac{\partial J_{zz}}{\partial r} + J_{zz} \frac{\partial J_{zz}}{\partial z} + 2 \left( J_{rz} \frac{\partial J_{rz}}{\partial r} + J_{zz} \frac{\partial J_{rz}}{\partial z} \right) \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \times \right. \\
 &\times \left[ \frac{3}{\Lambda} \left( J_{rz} \frac{\partial J_{zz}}{\partial r} + J_{zz} \frac{\partial J_{zz}}{\partial z} \right) \right] + \frac{1}{\Lambda r} \left[ \frac{J_{rr} \partial J_{zz}}{\partial r} + \frac{J_{rz} \partial J_{zz}}{\partial z} + 2 \left( J_{rz} \frac{\partial J_{rz}}{\partial r} + \right. \right. \\
 &\left. \left. + J_{zz} \frac{\partial J_{rz}}{\partial z} \right) \right] \right\} \quad ; \quad (5.44)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_r \frac{\partial J_{rz}}{\partial r} + v_z \frac{\partial J_{rz}}{\partial z} &= \frac{c_2-3}{11} \left[ J_{rr} \frac{\partial v_z}{\partial r} + J_{rz} \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + J_{zz} \frac{\partial v_r}{\partial z} \right] - \\
 &- \frac{J_{rz}}{Re} \left( c_1 \Lambda + \frac{c_3}{l^2} \right) + \frac{1}{2 Re} \left( \frac{\partial^2 J_{rz}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 J_{rz}}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial J_{rz}}{\partial r} \right) - \frac{4(15c_2-4)K}{55} \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \sqrt{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \sqrt{K} \left( \frac{\partial \mathcal{J}_{r2}}{\partial r} + \frac{\mathcal{J}_{r2}}{r} + \frac{\partial \mathcal{J}_{zz}}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \sqrt{K} \times \right. \right. \\
 & \left. \left. \times \left( \frac{\partial \mathcal{J}_{rr}}{\partial r} + \frac{\mathcal{J}_{rr}}{r} + \frac{\partial \mathcal{J}_{r2}}{\partial z} \right) \right] \right\} + \frac{3c_2 - 2}{11} \left[ \mathcal{J}_{rr} \frac{\partial v_r}{\partial z} + \mathcal{J}_{zr} \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \mathcal{J}_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right] + \\
 & + c_5 \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{\Lambda} \left( 2 \mathcal{J}_{rr} \frac{\partial \mathcal{J}_{r2}}{\partial r} + \mathcal{J}_{r2} \left( 2 \frac{\partial \mathcal{J}_{r2}}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{J}_{rr}}{\partial r} \right) - \mathcal{J}_{zz} \frac{\partial \mathcal{J}_{rr}}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \times \right. \\
 & \times \left[ \frac{1}{\Lambda} \left( \mathcal{J}_{rr} \frac{\partial \mathcal{J}_{zz}}{\partial r} + 2 \mathcal{J}_{zz} \frac{\partial \mathcal{J}_{r2}}{\partial z} + \mathcal{J}_{r2} \left( 2 \frac{\partial \mathcal{J}_{r2}}{\partial r} + \frac{\partial \mathcal{J}_{zz}}{\partial z} \right) \right) \right] + \frac{1}{r\Lambda} \left( \mathcal{J}_{rr} \frac{\partial \mathcal{J}_{r2}}{\partial r} + \right. \\
 & \left. + 2 \frac{\mathcal{J}_{r2} \cdot \mathcal{J}_{rr}}{r} \right) \left. \right\}. \tag{5.45}
 \end{aligned}$$

Наряду с граничными условиями для функции тока и ротора осреднённой скорости (табл. 3.1) для однозначного разрешения рассмотренной системы уравнений необходимо пользоваться граничными условиями для компонент тензора турбулентных напряжений (рис. 3.1):

1) На оси симметрии ( $r=0$ ):

$$\mathcal{J}_{rr} = \mathcal{J}_{r2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{J}_{zz}}{\partial r} = 0. \tag{5.46}$$

2) На твёрдых неподвижных стенках:  $\mathcal{J}_{rr} = \mathcal{J}_{zz} = \mathcal{J}_{r2} = 0$ . (5.47)

3) На свободной поверхности ( $z = z_{вп}$ ):

$$\mathcal{J}_{r2} = \mathcal{J}_{zz} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{J}_{rr}}{\partial z} = 0. \tag{5.48}$$

Условия (5.46)–(5.48) следуют из граничных условий для компонент пульсаций скорости, аналогичных условиям для скорости, приведённым в таблице 3.1.

Система содержит 6 эмпирических постоянных  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ , значения которых смогут быть найдены путём подбора при численном решении задачи (см. подраздел 7.2).

#### 5.4. Баланс энергии осреднённого МГД-течения в замкнутой области

При расчёте осреднённого течения с использованием коэффи-

циента турбулентной вязкости (подраздел 5.2) не обязательно требовать одновременного выполнения обеих следующих условий :

- 1) совпадения расчётного распределения безразмерной скорости с экспериментальным;
- 2) совпадения экспериментально и теоретически найденных абсолютных значений скорости  $v_0$ .

Распределение скоростей может быть найдено при одном выборе функции  $v_r$  (5.10), а абсолютное значение скорости при другом. Поэтому необходимо разработать методику определения абсолютных значений скорости при заданном распределении безразмерной скорости по всему объёму жидкого металла. Распределение безразмерной осреднённой скорости при этом может находиться по любой методике, в том числе на основе гипотез, описанных в подразделе 5.2.

При интегрировании уравнения механической энергии осреднённого стационарного течения несжимаемой жидкости по полному объёму  $V$  [54], из-за обращения в нуль ряда членов получаем следующее равенство:

$$\rho \int_V v_{эф} \Phi_v dv = \int_V (\vec{f} \vec{v}) dv, \quad (5.49)$$

где  $\Phi_v = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left( \frac{\partial v^i}{\partial x_i} + \frac{\partial v^j}{\partial x_j} \right)^2$  - диссипативная функция Рейля для несжимаемой жидкости (осесимметричном случае задается формулой 5.19)),

$$v_{эф} = \nu + \nu_r - \text{эффективный коэффициент вязкости.} \quad (5.51)$$

Диссипативная функция (5.50) характеризует выделение тепла при диссипации кинетической энергии потока, а уравнение (5.49) является балансом энергии: мощность, которая выделяется в жидкости в виде тепла из-за трения, равна мощности, которую необходимо подвести объёму жидкости, для поддержания стационарного течения.

Для рассматриваемого осесимметричного течения (5.13) с представлением коэффициента  $\nu_r$  в следующем виде:  $\nu_r = \nu_0 \nu_1(r) \nu_2(z)$

из равенства (5.49) следует:

$$\rho \nu_0 v_0 = j_0^2 \int_0^1 \rho_0 r_0^3 I_F / I_\Phi , \quad (5.52)$$

где  $\nu_0 \left( \frac{M^2}{C} \right)$  - коэффициент, определяющий абсолютное значение турбулентной вязкости,

$$I_F = \int_V \left( f_z v_z + f_r v_r \right) dv ; \quad (5.53)$$

$$I_\Phi = \int_V \left[ \nu_1(r) \cdot \nu_2(z) + \frac{\nu}{v_0} \right] \phi_\nu dv . \quad (5.54)$$

Для приведения уравнения (5.49) к безразмерному виду (5.52) использованы следующие характерные величины:

$$\phi_0 = v_0^2 / r_0^2 - \text{характерное значение функции Релея,} \quad (5.55)$$

$$f_0 = j_0^2 \int_0^1 \rho_0 r_0 - \text{характерная плотность силы.} \quad (5.56)$$

При заданных распределениях безразмерных величин  $v_r$ ,  $v_z$ ,  $f_r$ ,  $f_z$ , а также значениях параметров  $\nu_{эф}$ ,  $\rho$ ,  $j_0$ ,  $r_0$ , равенством (5.52) определяется максимальное значение скорости движения жидкости  $v_0$ . Формула для функции  $\nu_{эф}$  определяется на основе анализа результатов численных экспериментов для класса ИГД-устройств, с целью согласования результатов расчёта с значением  $v_0$ , полученным физическим экспериментом.

Таким образом, при расчёте безразмерного распределения скорости может использоваться одна зависимость коэффициента  $\nu_{эф}^1$ , а при нахождении абсолютного значения скорости - другая зависимость  $\nu_{эф}^2$ , позволяющая регулировать вклад разных зон течения в общий баланс энергии в соответствии с экспериментальными наблюдениями.

При рассмотрении ламинарного потока  $\nu_{эф} = \nu$ , т.е. коэффициент вязкости является физической постоянной, метод баланса может быть применён для исследования энергетических аспектов течения, а также для проверки точности результатов, полученных, например, численным методом. Кроме того существует возможность методом баланса на основе экспериментально полученных распределений скорости находить распределение значений коэффициента турбулентной вязкости по объёму течения и строить для него эмпирические формулы.

## 6. МЕТОДИКИ РАСЧЁТА СКОРОСТЕЙ

6.1. Конечно-разностные схемы и методы расчёта движения при постоянном по объёму значении числа Рейнольдса

Получение практически ценных результатов возможно лишь на основе модели, учитывающей конечные размеры области течения с применением численных методов (см. подраздел 2.3). Нелинейность задачи требует применения метода последовательных приближений, т.е. какого-то итерационного алгоритма.

Из приведённых в подразделах 2.1 и 3.2 вариантов системы уравнений, описывающих движение несжимаемой жидкости при постоянной по объёму вязкости (ламинарной или эффективной), наиболее подходящей для вычислений на ЭВМ в двумерном случае, как показывает опыт [74]-[76], является система (3.19), (3.20) в переменных функциях тока  $\Psi$  и вихрь скорости  $\omega$ :

1) Рассматривая задачу в переменных скорости  $v_r, v_z$  и давление  $p$  необходимо решать систему трёх уравнений (2.8) и (2.20), таким образом недостаточно учитывается цилиндрическая симметрия модели для упрощения проблемы. При аппроксимации системы в стационарном случае возникают трудности, связанные с медленной скоростью вычислительного процесса, для устранения которых жидкость считается псевдосжимаемой [77], выводится уравнение для давления [78] и применяются другие методы, увеличивающие в конечном итоге объём вычислений.

2) Для нахождения поля скоростей, пользуясь только одним переменным - функцией тока  $\Psi$  (2.53), необходимо решать дифференциальное уравнение четвёртого порядка в частных производных

(3.18), разностная форма которого неудобна для вычислений на ЭМ. Шаблон аппроксимации при этом содержит более пяти точек и практически единственными методами решения такой задачи являются итерационные методы типа Зейделя [79]. Кроме того половина граничных условий при этом второго рода, что также замедляет сходимость вычислительного процесса (табл. 3.1).

3) Введением  $\Psi$  и  $w$ , получается система двух уравнений, которая удобна для численной реализации [80, 81, 82]. За исключением граничных условий (3.37)-(3.39) в таблице 3.1, которые связывают значения вихря скорости и второй производной функции тока на твёрдой стенке, остальные граничные условия однородны. Недостатком схемы в переменных  $w$  и  $\Psi$  является то, что нельзя непосредственно обобщить для расчёта пространственных течений.

Для аппроксимации рассматриваемой задачи область, заполненная жидким металлом (рис. 3.1а) заменяется сеточной областью. В основном была использована однородная по каждому из направлений сетка с шагами  $h$  и  $q$  по радиальному и аксиальному направлениям соответственно.

Уравнение связи эллиптического типа (3.20) приводится к разностному виду непосредственной заменой вторых производных разностными производными на трёхточечном шаблоне [46]:

$$\Psi_{i,j} = [\Psi_{i+1,j} a_i + \Psi_{i-1,j} b_i + (\Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j-1}) c_i - w_{i,j}] / (2c_i + a_i + b_i), \quad (6.1)$$

$$\text{где } a_i = 1/h^2(r_i + \frac{h}{2}); \quad b_i = 1/h^2(r_i - \frac{h}{2}); \quad c_i = \frac{1}{q^2 r_i}, \quad (6.2)$$

$r_i$  - радиус узловой точки.

Уравнение (6.1) аппроксимирует исходное с порядком  $O(h^2 + q^2)$ .

Для уравнения движения в форме ротора (3.19) были опробованы следующие конечно-разностные схемы:

1) Схема, аппроксимирующая конвективные члены  $\frac{\partial(\frac{w}{r})}{\partial r}$  и  $\frac{\partial w}{\partial z}$  с помощью центральных разностей [32], [58], [83] имеющая второй

порядок аппроксимации  $O(h^2 + q^2)$ . Схема неустойчива при больших значениях числа Рейнольдса. При шаге сетки  $h=q=0,05$  удалось провести расчёты только в интервале  $Re \leq 100$ . Приведённая в работе [32] схема построена на неоднородной сетке, по этой причине при неблагоприятном соотношении шагов сетки устойчивость может теряться при ещё меньших значениях  $Re$ , на что указывают также сами авторы.

2) Схема, аппроксимирующая конвективные члены с помощью направленных разностей [58], [75], [84] так называемых разностей против потока. Например,

$$\frac{\partial w}{\partial z} v_r \sim \begin{cases} \frac{w_{i,j} - w_{i,j-1}}{q} \cdot |v_{r,i,j}| ; & v_{r,i,j} \geq 0 ; \\ \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{q} \cdot |v_{r,i,j}| ; & v_{r,i,j} < 0 . \end{cases} \quad (6.3)$$

В результате такого подхода получается абсолютно устойчивая схема, однако схема имеет первый порядок аппроксимации  $O(h+q)$ .

3) В схеме Джакунова [41], [59], [85.], [86]

$$\begin{aligned} w_{i,j} \left( \frac{|v_{z,i,j}|}{r_i h} + \frac{|v_{z,i,j}|}{q} + \frac{2e_{i,j}}{h^2 d_{i,j}} + \frac{2s_{i,j}}{q^2 d_{i,j}} \right) &= Al \cdot \varepsilon_{i,j} + w_{i+1,j} \left( \frac{|v_{z,i,j}| - |v_{z,i+1,j}|}{2h r_{i+1}} + \right. \\ &+ \left. \frac{r_{i,j} e_{i,j}}{h^2 r_{i+1} d_{i,j}} \right) + w_{i,j+1} \left( \frac{|v_{z,i,j}| - |v_{z,i,j+1}|}{2q} + \frac{s_{i,j}}{q^2 d_{i,j}} \right) + w_{i-1,j} \left( \frac{|v_{z,i,j}| + |v_{z,i-1,j}|}{2h r_{i-1}} + \right. \\ &+ \left. \frac{r_{i,j} e_{i,j}}{h^2 r_{i-1} d_{i,j}} \right) + w_{i,j-1} \left( \frac{|v_{z,i,j}| + |v_{z,i,j-1}|}{2q} + \frac{s_{i,j}}{q^2 d_{i,j}} \right) , \end{aligned} \quad (6.4)$$

где

$$\begin{aligned} v_{z,i,j} &= r_i v_{r,i,j} - \frac{3}{Re_{эф}} ; & c_{i,j} &= \frac{1}{Re_{эф}} + \frac{|v_{z,i,j}| q}{2} ; \\ d_{i,j} &= 1 + \frac{|v_{z,i,j}| q \cdot Re_{эф}}{2} + \frac{|v_{z,i,j}| h Re_{эф}}{2 r_i} ; & s_{i,j} &= \frac{1}{Re_{эф}} + \frac{|v_{z,i,j}| h}{2 r_i} ; \end{aligned} \quad (6.5)$$

также используются направленные разности, но схема имеет второй порядок аппроксимации  $O(h^2 + q^2)$ . Схема абсолютно устойчива, но

скорость сходимости вычислительного процесса при использовании схемы (6.4 - 6.5) помимо выбора размеров и шага разностной сетки существенно зависит также от значения  $Re_{эф}$ .

Однако, схема с направленными разностями (пункты 2 и 3) имеет свои и тот же недостаток - им присуща так называемая аппроксимационная вязкость [87], [88]. В случае схемы (6.4) - (6.5) схемная вязкость по каждому из направлений выражается в следующем виде [89]:

$$s v_2 = \frac{d_{ij}}{s_{ij}} + \frac{|v_z|_{ij} q}{2} - \frac{\tau}{Re_{эф}} ; \quad (5.6)$$

$$s v_r = \frac{e_{ij}}{s_{ij}} + \frac{|v_t|_{ij} h}{2} - \frac{\tau}{Re_{эф}} .$$

При шаге сетки  $h=q=0,05$  и  $Re_{эф}=100$  с учётом того, что в безразмерной постановке  $|v_i| \leq 1$  схемная вязкость  $s v \leq \frac{1}{100} \approx \frac{1}{Re_{эф}}$ , т.е. её вклад становится сравнимым с вкладом физической вязкости. При расчёте таким образом происходит занижение значения  $Re_{эф}$ . Численные эксперименты показали, что использование на практике этих схем имеет смысл при  $Re_{эф} < 5 \cdot 10^2$ . На рис. 6.1 показано влияние аппроксимационной вязкости на абсолютное значение скорости в расчёте конкретного устройства. В интервале значений  $50 < Re < 10^4$  абсолютное значение скорости возрастает только на 30%. Из-за аппроксимационной вязкости при больших значениях  $Re_{эф}$  преимущества схемы Шапугова по сравнению со схемой с направленными (п.2) разностями теряются и в пределе  $Re_{эф} \rightarrow \infty$  они в смысле аппроксимации одинаково плохи.

4) В схеме без аппроксимационной вязкости [87], [90], [61], [89] также используются направленные разности на сетке с шагами  $h$  и  $q$ . Но одновременно рассматривается схема с центральными разностями на сетке с шагами  $2h$  и  $2q$ , в которую введена аппроксимация на сетке  $(2h, 2q)$  схемной вязкости первой из схем на сет-

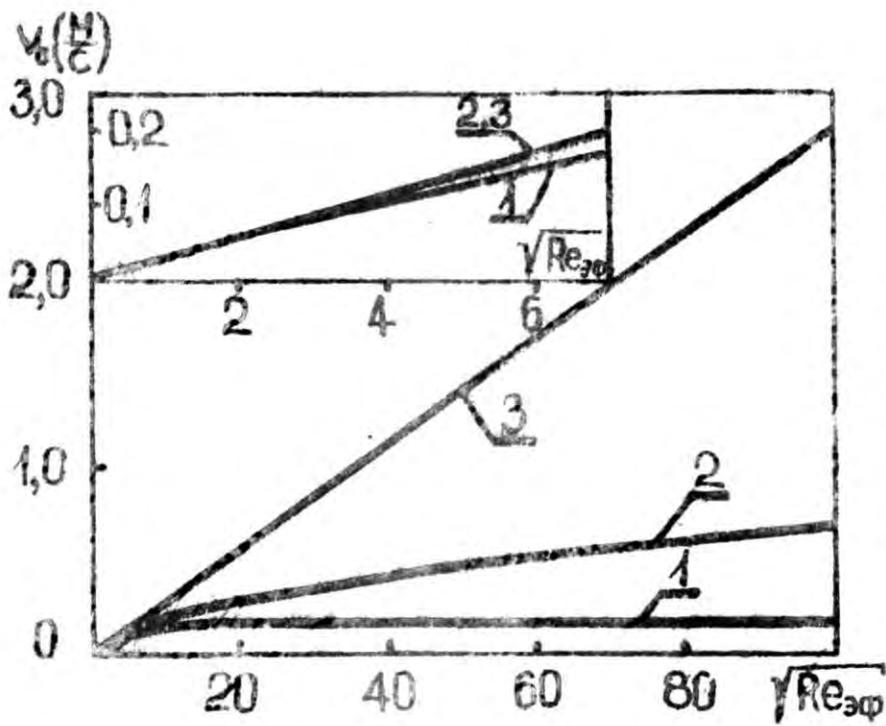


рис. 6.1. Зависимость абсолютного значения скорости от числа Рейнольдса ( $h=g=0,1$ ):

- 1) Расчёт по схеме с аппроксимационной вязкостью.
- 2) Расчёт по схеме без аппроксимационной вязкости.
- 3) Расчёт и теория для линеаризованного уравнения движения.

на  $(h, q)$ . Результирующая схема строится таким образом, чтобы аппроксимационные вязкости, присутствующие в обеих схемах (на основной сетке и сетке с двойным шагом) вычитались. Полученная схема при её решении даёт результаты свободные от аппроксимационной вязкости. Применение этого подхода для уравнения движения в форме ротора (3.19) приводит к следующей разностной схеме на девятиточечном шаблоне:

$$\Pi_{i,j} = \left\{ \Pi_{i+1,j} s_2 + \Pi_{i-1,j} s_3 + \Pi_{i,j+1} s_4 + \Pi_{i,j-1} s_5 + A_1 \cdot A_1 \cdot \varepsilon_{i,j} + \right. \\ \left. + U_1 \left[ \Pi_{i+2,j} s_7 + \Pi_{i-2,j} s_8 + \Pi_{i,j+2} s_9 + \Pi_{i,j-2} s_{10} \right] \right\} / (s_2 - U_1 s_6), \quad (6.7)$$

где

$$\Pi = \frac{w}{r} \quad ; \quad \Sigma = \frac{r}{Re_{eff}} \quad ; \quad A_2 = 1 - A_1 \quad ; \\ s_1 = 2 \sum \left( \frac{1}{h^2} + \frac{1}{q^2} \right) + \frac{|v_1|}{h} + \frac{|rv_2|}{q} \quad ; \quad s_2 = \frac{\Sigma}{h^2} + \frac{|v_1| - v_1}{2h} \quad ; \\ s_3 = \frac{\Sigma}{h^2} + \frac{|v_1| + v_1}{2h} \quad ; \quad s_4 = \frac{\Sigma}{q^2} + \frac{|rv_2| - rv_2}{2q} \quad ; \\ s_5 = \frac{\Sigma}{q^2} + \frac{|v_2 r| + v_2 r}{2q} \quad ; \quad s_6 = \frac{A_2}{2} \sum \left( \frac{1}{h^2} + \frac{1}{q^2} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{|v_1|}{h} + \frac{|rv_2|}{q} \right) \quad ; \\ s_7 = \frac{A_2}{4} \left( \frac{v_1}{h} - \frac{\Sigma}{h^2} \right) - \frac{|v_1|}{8h} \quad ; \quad s_8 = \frac{A_2}{4} \left( -\frac{v_1}{h} - \frac{\Sigma}{h^2} \right) - \frac{|v_1|}{8h} \quad ; \\ s_9 = \frac{A_2}{4} \left( \frac{rv_2}{q} - \frac{\Sigma}{q^2} \right) - \frac{|rv_2|}{8q} \quad ; \\ s_{10} = \frac{A_2}{4} \left( -\frac{v_2 r}{q} - \frac{\Sigma}{q^2} \right) - \frac{|rv_2|}{8q} \quad . \quad (6.8)$$

Коэффициент  $A_1$  меняется в пределах от 0,5 до 1 (в этом интервале доказана сходимость схемы) [90]. Если  $A_1 \neq 0,25$ , то схема имеет порядок аппроксимации  $O(h^2 + q^2)$  и решение схемы даёт результат, свободный от аппроксимационной вязкости. Коэффициент  $U_1$  принимает два значения 0 и 1. При  $U_1 = 0$  схема (6.7)-(6.8) сводится к схеме

с направленными разностями, рассмотренной в пункте 2. Расчёты по схеме (6.7) - (6.8) проводились в интервале значений  $Re_{эф} \leq 10^6$ , причём во всём интервале наблюдаются изменения распределения и абсолютных значений скорости (рис. 6.1).

Однородные граничные условия таблицы 3.1 аппроксимируются точно, а на границах жидкого металла, соприкасающихся с неподвижной стенкой, граничные условия (3.37) и (3.38) заменяются следующими разностными соотношениями [9] (порядок аппроксимации соответственно  $O(h^2)$  и  $O(q^2)$ ):

$$\omega(r_R, z) = \frac{8\Psi(r_R-h, z) - \Psi(r_R-2h, z)}{2r_R h^2}; \quad (6.9)$$

$$\omega(r, z_R) = \frac{8\Psi(r, z_R+q) - \Psi(r, z_R-2q)}{2r q^2}, \quad (6.10)$$

где  $r_R$  и  $z_R$  - координаты вертикальной и горизонтальной границ.

На неподвижной границе  $\Gamma_0$ , не совпадающей с координатными линиями, выполняется условие более общего вида (3.39). Но так как в любой точке этой границы с координатами  $r_s, z_s$  составляющие скорости равны нулю, то конечно-разностное условие для ротора скорости в этой точке получается непосредственным суммированием правых частей условий (6.9) и (6.10):

$$\omega(r_s, z_s) = \frac{8\Psi(r_s \pm h, z_s) - \Psi(r_s \pm 2h, z_s)}{2r_s h^2} + \frac{8\Psi(r_s, z_s \pm q) - \Psi(r_s, z_s \pm 2q)}{2r_s q^2} + O(h^2 + q^2) \quad (6.11)$$

Более точная аппроксимация граничных условий смысла не имеет [86], так как условия (6.9)-(6.11) используются вместе со схемами, порядок аппроксимации которых не превышает второго.

Если применяются схемы пунктов 1-3, то счёт в итерационном процессе ведётся по всем внутренним точкам рассматриваемой области  $\Omega_0$ , заполненной жидкостью (рис. 3.1б). При использовании схемы без аппроксимационной вязкости, работающей на девятиточечном шаблоне было опробовано два подхода:

1) Счёт разностного уравнения (6.7) в итерационном процессе проводится только по строго внутренним точкам (внутри области  $\hat{\Omega}_1$ ), а в приграничных точках для определения  $w$  используются дополнительные связи. Последовательность вычислений  $n+1$  приближения такова:

а) из уравнения связи (6.1) выражается  $w_{ij}$  и находится  $w_{ij}^{n+1}$  на границе  $\Gamma_1$  области  $\hat{\Omega}_1$  (граница  $\Gamma_1$  проходит по внутренним приграничным точкам области  $\hat{\Omega}_0$ ),

б) с помощью граничных условий (6.9)-(6.11) находятся значения  $w_{ij}^{n+1}$  на границе  $\Gamma_0$  основной области  $\hat{\Omega}_0$ ,

в) решается уравнение (6.7) относительно  $w_{ij}$  внутри области  $\hat{\Omega}_1$  и находится тем  $w_{ij}^{n+1}$ , в результате чего получено  $n+1$  приближение для ротора скорости во всей основной области  $\hat{\Omega}_0$ ,

г) из уравнения (6.1) внутри области  $\hat{\Omega}_0$  находится  $\Psi_{ij}^{n+1}$ , на границе  $\Gamma_0$  функции тока задана ( $\Psi=0$ ),

д) корректируются значения  $\Psi_{ij}$  на границе  $\Gamma_1$  внутренней области (122):

$$\begin{aligned} \Psi(r_0-h, z) &= \frac{1}{2} \Psi(r_0-2h, z) - \frac{1}{9} \Psi(r_0-3h, z) + O(h^3); \\ \Psi(r, z_0 \pm q) &= \frac{1}{2} \Psi(r, z_0 \pm 2q) - \frac{1}{9} \Psi(r, z_0 \pm 3q) + O(h^3); \\ \Psi(r, z_{0n}-q) &= \frac{4}{5} \Psi(r, z_{0n}-2q) - \frac{1}{5} \Psi(r, z_{0n}-3q) + O(h^3); \\ \Psi(h, z) &= \frac{2}{5} \Psi(2h, z) - \frac{1}{15} \Psi(3h, z) + O(h^4). \end{aligned} \quad (6.12)$$

2) Счёт уравнений (6.1) и (6.7) проводится по всем внутренним точкам области  $\hat{\Omega}_0$ , для этого дополнительно задается и в итерационном процессе пересчитываются значения ротора скорости  $w$  на расстоянии одного шага сетки от границы  $\Gamma_0$  вне области  $\hat{\Omega}_0$  (расширенная область  $\hat{\Omega}_2$  с границей  $\Gamma_2$ ):

$$w(-h, z) = w(2h, z) - 3w(h, z);$$

$$w(r_2+h, z) = 3[w(r_2, z) - w(r_2-h, z)] + w(r_2-2h, z);$$

$$w(r, z_2 \pm q) = 3[w(r, z_2) - w(r, z_2 \mp q)] + w(r, z_2 \mp q); \quad (6.13)$$

$$w(r, z_{2n+q}) = w(r, z_{2n-2q}) - 3w(r, z_{2n-q}).$$

Схемы с центральными и направленными разностями на ЭВМ

6Б-415 решались тремя методами:

1) Методом дробных шагов с параметром  $\theta$ , ускоряющим сходимость. Метод был полностью заимствован из работ [85] и [86].

2) Методом минимальных невязок [41], суть которого заключается в том, что при переходе от  $n$ -того итерационного слоя к  $n+1$ -ому слой параметр, ускоряющий сходимость процесса и сходится на основе минимизации функционала для невязки на рассматриваемом  $n$ -том итерационном слое.

3) Методом релаксации (4.66). Суть метода изложена ранее в подразделе 4.2. Для уравнения движения в целях стабилизации применялась нижняя релаксация ( $0 < U_1 \leq 1$ ), обычно  $U_1 = 0.5$  для уравнения связи (6.1) верхняя релаксация ( $1 \leq U_2 < 2$ ), обычно  $1.63 \leq U_2 \leq 1.87$ . В результате численных экспериментов со схемой Шакупова было установлено, что используя сетку с 11х31 узловыми точками при  $Re_{\text{эф}} = 50$  для достижения точности (4.66)  $\Delta_2 \sim 10^{-4}$  необходимо

а) методом дробных шагов порядка 10 итераций и 6 минут времени.

б) методом минимальных невязок - 50 итераций и 6 мин.

в) методом релаксации при  $U_1 = 0.5$ ,  $U_2 = 1.75$  примерно 300 итераций и 7 минут времени.

Так как отличия во времени счёта не велики, а метод дробных шагов требует существенно больше машинной памяти, то выбор для практического применения остановился на последних двух методах. Методом релаксации на ЭВМ 6Б-415 без применения наружных запо-

подобных устройств возможно осуществлять счёт поля скоростей на сетке, количество узловых точек которой достигает 2500, что оказалось достаточным для практических вычислений. Время счёта при  $\Delta_2 \sim 10^4$  с точностью итерационного процесса составляет примерно 15-25 минут.

Реализация схемы без аппроксимационной вязкости (6.7), (6.1) была осуществлена методом релаксации, так как применение более быстрых итерационных методов для схемы на девятиточечном шаблоне затруднено. Время счёта одного варианта при  $Re_{эф} = 10^3$  на сетке порядка 2500 точек составляет примерно 30-40 минут.

Для получения поля скоростей при заранее заданном значении числа Рейнольдса (2.9), содержащего в виде множителя скорость, в вычислительном процессе через определённое количество итераций производится коррекция в начале счёта приближённо заданного числа Шёнвена (2.10), также содержащего скорость. Коррекция числа  $Al$  производится таким образом, чтобы в результате вычислительного процесса безразмерная скорость  $v_n = \max_{i,j} \sqrt{v_{z,i,j}^2 + v_{r,i,j}^2}$  (6.14) стремилась к 1, т.е. полученное в результате счёта значение  $Re$  совпадало с заранее заданным. При использовании уравнения в форме (2.13) необходимость такого пересчёта замедляющего сходимость вычислительного процесса отпадает, но скорость в результате решения получается в единицах числа Рейнольдса и невозможно проводить счёт при заранее выбранном значении числа  $Re$ .

В разработанных программах предусмотрена возможность счёта как в безиндукционном приближении, при этом в начале находится распределение электромагнитной силы в области, заполненной проводящей жидкостью по методике, описанной в разделе 4. и далее эта сила используется при решении гидродинамической части проблемы, так и с учётом обратного воздействия движения на ЭМ поле. В последнем случае электродинамическая и гидродинамическая части за-

дачи решаются совместно методом последовательных приближений по следующему алгоритму:

1) Задаются начальные приближения всех величин, в том числе ориентировочное значение максимальной скорости  $v_0^*$ .

2) Находится распределение силы в безиндукционном приближении (или при ориентировочно заданном значении магнитного числа Рейнольдса  $Re_{m,0}$ , вычисленным по  $v_0^*$ ) с небольшой точностью  $\Delta_1 \sim 10^4$  (4.65), для чего требуется некоторое начальное число итерации  $n_0$ . ( $n_0 \approx 50+200$ ).

3) На основе полученного распределения ЭМ силы решается гидродинамическая часть задачи и находится распределение безразмерной скорости (с максимальным значением  $v_{m,0}$ ) при числе Альфвена, определённом по ориентировочному значению скорости  $v_0^*$ . Этот счёт проводится также с небольшой точностью  $\Delta_1 \sim 10^4$ , для чего требуется число итераций  $k_0 \approx 50+100$ .

4) Происходит следующий цикл пересчёта (индекс цикла  $p$ ):

а) на основе найденного значения  $v_{m,p-1}$  корригируются значения чисел  $Al$  и  $Re_m$ , например,

$$Al_p = Al_{p-1} / v_{m,p-1} ; \quad Re_{m,p} = Re_{m,p-1} \cdot v_{m,p-1} \quad (6.15)$$

б) уточняется значение силы, число итераций  $n_p \approx 15+40$ ,

в) уточняется значение скорости, число итераций  $k_p \approx 15-30$ ,

г) происходит проверка по выходу вычислительного процесса на заданное значение числа Рейнольдса:

$$|1 - v_{m,p}| < \Delta' \quad (6.16)$$

где  $\Delta'$  - заданное маленькое число ( $\Delta_0 \sim 10^4$ ), а также проверка сходимости итерационного процесса на основе условий

$$\Delta_1 < \Delta'' \quad \text{или} \quad \Delta_2 < \Delta'' \quad (6.17)$$

где  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  (4.65), (4.66) - относительные изменения функций в итерационном процессе;

$\Delta''$  - заданная точность вычислительного процесса, которую следует согласовать с  $\Delta'$  и с точностью разностной схемы.

д) при выполнении условий (6.16) и (6.17) происходит выход из цикла пересчёта, с последующей печатью полученных результатов.

В результате работы комплекса программ, написанных на языке FORTRAN для ЭЕМ BESM-6 и 6E-415 определяются распределения следующих величин в безразмерном виде:

- действительной и мнимой частей комплексного потенциала (3.20),
- модуля и фазы потенциала,
- модуля и фазы плотности вихревых токов в проводнике (3.14),
- тепловой мощности вихревых токов (3.15),
- модуля и фазы составляющих  $B_r$  и  $B_z$  магнитной индукции (3.9) и (3.10),
- составляющих  $f_r$  и  $f_z$  средней плотности электромагнитной силы (3.25), (3.26),
- азимутальной составляющей ротора силы (2.49),
- азимутальной составляющей ротора скорости (2.52),
- функции тока Стокса (2.53),
- составляющих скорости  $v_r$  и  $v_z$ .

Если вместо безразмерных критериев задан полный набор физических характеристик исследуемого объекта, то по мере необходимости приводятся все рассмотренные распределения также и в размерном виде.

Приведённые в настоящем подразделе разностные схемы применимы не только для расчёта ламинарных течений, а также для расчёта осреднённого турбулентного течения в приближении  $Re_\tau = const$  (см. подраздел 3.2).

### 6.2. Конечно-разностные схемы для расчёта осреднённого турбулентного течения

При исследовании турбулентных течений на основе полуэмпирических формул, предусматривающих введение коэффициента турбулентной вязкости в виде скалярной функции (5.10), а также при исследовании ламинарного течения с переменной по объёму вязкостью (например, из-за градиента температуры) уравнение движения имеет более сложный вид (3.17) или (3.21), чем при  $\nu = \text{const}$  и конечно-разностные схемы, рассмотренные в предыдущем подразделе не пригодны для расчёта скоростей.

Для аппроксимации методом баланса [45], уравнение движения в форме ротора (3.17) после ряда тождественных преобразований приводится к следующему интегральному виду:

$$\int_{L_{i,k}} \text{grad} \frac{1}{Re_{eff}} \times \vec{\omega} d\vec{l} + 2 \int_{L_{i,k}} (\vec{\nu} \text{grad}) \text{grad} \frac{1}{Re_{eff}} d\vec{l} = \int_{L_{i,k}} \frac{1}{Re_{eff}} \text{rot} \vec{\omega} d\vec{l} + A \int_{L_{i,k}} \vec{f} d\vec{l}, \quad (6.18)$$

где  $L_{i,k}$  — граница прямоугольной области  $S_{i,k} (z_i - \frac{h}{2} \leq z \leq z_k + \frac{h}{2}; -\frac{h}{2} \leq r \leq r + \frac{h}{2})$  с центром в точке  $r_i, z_k$  (рис. 4.1).

В отличие от аппроксимации уравнения для потенциала (4.37), где коэффициенты  $\hat{\omega}$  и др. меняются на границах или на диагоналях ячеек основной сетки (рис. 4.1), в данном случае  $Re_{eff}$  считается постоянным в пределах сеточной области  $S_{i,k}$ . С учётом цилиндрической симметрии (5.13), используя для скоростей направленные разности из (6.18) следует разностный аналог уравнения движения при  $Re_{eff} \neq \text{const}$

$$\omega_{i,k} \left\{ g \left[ (|C| - C)_{i-\frac{1}{2},k} + (|C| + C)_{i-\frac{1}{2},k} \right] + h \left[ (|D| + D)_{i,k+\frac{1}{2}} + (|D| - D)_{i,k-\frac{1}{2}} \right] + \frac{g r_i}{h} \left[ \frac{R_{i+1,k} + R_{i,k}}{r_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{R_{i,k} + R_{i-1,k}}{r_{i-\frac{1}{2}}} \right] + \frac{h}{g} (R_{i,k-1} + 2R_{i,k} + R_{i,k+1}) \right\} = \omega_{i+1,k}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[ \frac{r_{i+1/2} g}{h r_{i+1/2}} (R_{i+1, k} + R_{i, k}) + g(|C| + C)_{i+1/2, k} \right] + w_{i-1, k} \left[ \frac{r_{i-1/2} g}{h r_{i-1/2}} (R_{i, k} + R_{i-1, k}) + \right. \\
 & \left. + g(|C| - C)_{i-1/2, k} \right] + w_{i, k+1} \left[ \frac{h}{g} (R_{i, k+1} + R_{i, k}) + h(|D| - D)_{i, k+1/2} \right] + w_{i, k-1} \times \\
 & \times \left[ \frac{h}{g} (R_{i, k} + R_{i, k-1}) + h(|D| + D)_{i, k-1/2} \right] + \left[ h(f_{i, k+1}^r - f_{i, k-1}^r) - g(f_{i+1, k}^z - f_{i-1, k}^z) \right] + \\
 & + (v_{i+1, k}^r + v_{i, k}^r) \frac{1}{h} (R_{i+1, k+1} + R_{i, k-1} - R_{i+1, k-1} - R_{i, k+1}) + (v_{i+1, k}^z + v_{i, k}^z) \frac{1}{g} (R_{i+1, k+1} - \\
 & - 2R_{i+1, k} + R_{i+1, k-1} + R_{i, k+1} - 2R_{i, k} + R_{i, k-1}) + (v_{i, k}^r + v_{i-1, k}^r) \cdot \frac{1}{h} (R_{i, k-1} + R_{i-1, k+1} - \\
 & - R_{i, k+1} - R_{i-1, k-1}) + (v_{i, k}^z + v_{i-1, k}^z) \cdot \frac{1}{g} (-R_{i, k+1} + 2R_{i, k} - R_{i, k-1} - R_{i-1, k-1} + 2R_{i-1, k} - \\
 & - R_{i-1, k-1}) + (v_{i, k}^r + v_{i, k-1}^r) \cdot \frac{1}{h} (R_{i+1, k} - 2R_{i, k} + R_{i-1, k} + R_{i+1, k-1} - 2R_{i, k-1} + R_{i-1, k-1}) + \\
 & + (v_{i, k}^z + v_{i, k-1}^z) \frac{1}{g} (R_{i+1, k} + R_{i-1, k-1} - R_{i-1, k} - R_{i+1, k-1}) + (v_{i, k+1}^r + v_{i, k}^r) \frac{1}{h} (-R_{i+1, k+1} + 2R_{i, k+1} - \\
 & - R_{i-1, k+1} - R_{i+1, k} + 2R_{i, k} - R_{i-1, k}) + (v_{i, k+1}^z + v_{i, k}^z) \frac{1}{g} (-R_{i+1, k+1} - R_{i-1, k} + R_{i-1, k+1} + R_{i+1, k}),
 \end{aligned}$$

(6.13)

где  $R = 1 / Re_{эф}$  ; (6.20)

$$\begin{aligned}
 C_{i+1/2, k} &= \frac{R_{i+1, k} - R_{i, k}}{h} - \frac{v_{i+1, k}^r + v_{i, k}^r}{2} ; & C_{i-1/2, k} &= \frac{R_{i, k} - R_{i-1, k}}{h} - \frac{v_{i, k}^r + v_{i-1, k}^r}{2} ; \\
 D_{i, k+1/2} &= \frac{v_{i, k+1}^z + v_{i, k}^z}{2} - \frac{R_{i, k+1} - R_{i, k}}{g} ; & D_{i, k-1/2} &= \frac{v_{i, k}^z + v_{i, k-1}^z}{2} - \frac{R_{i, k} - R_{i, k-1}}{g} .
 \end{aligned}$$

(6.21)

При постоянном значении  $Re_{эф}$  уравнение (6.19) сводится к разностному уравнению с направленными разностями (пункт 2 подраздела 6.1). Схема (6.19), (6.1) устойчива при любых значениях эффективного числа Рейнольдса и решается методом итераций с использованием релаксации (4.63). Схема (6.19) имеет следующие недостатки:

- 1) Первый член левой части уравнения (6.18) аппроксимируется с первым порядком  $O(h+g)$ ,
- 2) Схема обладает аппроксимационной вязкостью и применение её

оправдано только при  $Re_{эф} \leq 10^3$ , т.к. при выходе из этого интервала результаты расчётов теряют достоверность.

Эти недостатки полностью устраняются с использованием для построения схемы комбинации метода интегральной аппроксимации с методом аппроксимации на сетке с двойным шагом (см. также 4 подраздел 6.1) [89]. Отличие от схемы (6.19) заключается в широкости первого члена левой части уравнения (6.18):

$$I_1 = \int_{L_{i,k}} \left[ \left( q \operatorname{grad} \frac{1}{Re_{эф}} - \vec{v} \right) \times \vec{w} \right] d\vec{l} \quad (6.22)$$

В схеме (6.19)  $I_1$  аппроксимируется с первым порядком в следующем виде:

$$I_1^h = \frac{q}{2} \left\{ w_{i,k} \left[ (c-|c|)_{i+\frac{1}{2},k} - (c+|c|)_{i-\frac{1}{2},k} \right] + w_{i+1,k} (c+|c|)_{i+\frac{1}{2},k} - w_{i-1,k} (c-|c|)_{i-\frac{1}{2},k} \right\} + \\ + \frac{h}{2} \left\{ w_{i,k} \left[ (D-|D|)_{i,k-\frac{1}{2}} - (D+|D|)_{i,k+\frac{1}{2}} \right] + w_{i,k+1} (D+|D|)_{i,k-\frac{1}{2}} - w_{i,k+2} (D-|D|)_{i,k+\frac{1}{2}} \right\} \quad (6.23)$$

Для построения второй схемы схемная вязкость на сетке с шагом  $h$  и  $g$ :

$$G^h = \frac{hq}{2} \left( |c|_{i+\frac{1}{2},k} \frac{w_{i+2,k} - w_{i,k}}{h} - |c|_{i-\frac{1}{2},k} \frac{w_{i,k} - w_{i-2,k}}{h} + \right. \\ \left. + |D|_{i,k-\frac{1}{2}} \frac{w_{i,k-1} - w_{i,k}}{g} - |D|_{i,k+\frac{1}{2}} \frac{w_{i,k} - w_{i,k+1}}{g} \right) \quad (6.24)$$

Содержащаяся в  $\Gamma_1^h$  аппроксимируется на сетке с двойным шагом  $2h$  и  $2g$ :

$$G^{2h} = \frac{hq}{2} \left( |c|_{i+\frac{1}{2},k} \frac{w_{i+2,k} + w_{i+1,k} - w_{i,k} - w_{i-1,k}}{4h} - |c|_{i-\frac{1}{2},k} \frac{w_{i+1,k} + w_{i,k} - w_{i-1,k} - w_{i-2,k}}{4h} + \right. \\ \left. + |D|_{i,k-\frac{1}{2}} \frac{w_{i,k-1} + w_{i,k-2} - w_{i,k} - w_{i,k+1}}{4g} - |D|_{i,k+\frac{1}{2}} \frac{w_{i,k} + w_{i,k+1} - w_{i,k+2} - w_{i,k+1}}{4g} \right) \quad (6.25)$$

Схема второго порядка аппроксимации, свободная от схемной вязкости, получается в результате вычитания схемных вязкостей  $G^h$  и  $G^{2h}$ .

т.е. вместо  $\Gamma_1^h$  используемого в схеме (6.19), для аппроксимации в том случае используется выражение  $\Gamma_1^h - G^{2h}$ . Аппроксимация остальных

членов уравнения (6.18) не меняется. Схем устойчива при любых значениях эффективного числа Рейнольдса. Для решения используется метод релаксации и расчёты ведутся в расширенной области (см. л. подраздела 6.1).

Схема (6.19) и схема без аппроксимационной вязкости [59] реализованы на ЭВМ "СБ-415". Время вычислений существенно зависит от выбора шага сетки, а также от заданной точности. Для расчёта одного варианта на сетке средней густоты ( $h=0,05, g=0,1$ ) с точностью  $\Delta_2 \sim 10^4$  требуется соответственно 20-30 и 25-35 минут машинного времени и затрачивается 350-400 итераций. На количество итераций влияют также выбор начальной приликечки и значений релаксационных параметров.

Разностные аналоги уравнений (5.43)-(5.45), которые используются для расчёта компонент тензора турбулентных напряжений  $\overline{u_i u_j}$ , строятся с использованием направленных разностей при аппроксимации первых производных этих величин. Аналогичным образом используется для аппроксимации уравнения движения (3.19) в пункте 3 подраздела 6.1. Использование направленных разностей обеспечивает относительную точность счёта уравнений в итерационном процессе. Однако результаты расчётов в данном случае при больших значениях числа  $Re$  практически не искажаются. Это обусловлено тем, что влияние аппроксимационной вязкости сказывается только в том случае, если коэффициенты у вторых производных соответствующих величин малы. В уравнении (3.19) этот коэффициент  $\nu/Re$  при  $Re \rightarrow \infty$  стремится к нулю. В уравнениях (5.43)-(5.45) коэффициент у старшей производной имеет более сложную структуру. Например, в уравнении для напряжения  $\overline{u_{22}}$  коэффициент у производной  $\frac{\partial^2 \overline{u_{22}}}{\partial z^2}$  следующий:  $1/2 Re + 2\sqrt{2}kl + 3C_5 Re \overline{u_{22}}/\Lambda$ . (6.26) Увеличение значения  $Re$  приводит к изменению вклада различных сла-

гаемых  $\lambda$  сумму (6.26), но стремление к нулю не наблюдается. Таким образом, использование направленных разностей в данном случае оправдано для любых значений числа  $Re$ . Вторые производные в уравнениях (5.43)-(5.45) аппроксимируются традиционно [46] и полученные разностные аналоги этих уравнений (из-за громоздкости они здесь не выписываются) имеют первый порядок аппроксимации. Из-за сложности исходных уравнений пришлось отказаться от попыток повышения этого порядка, т.к. это привело бы к ещё большему усложнению схемы. Для уравнения (5.42) используется схема без аппроксимационной вязкости (6.7).

В конечном счёте на сетке решается система состоящая из пяти разностных уравнений (уравнение движения, 3 уравнения для моментов и уравнение, связывающее ротор скорости с функцией тока) совместно с соответствующим набором граничных условий (табл. 3.1 и (5.46)-(5.48) в разностном виде. Каждому из уравнений системы применяется метод итераций с использованием параметра релаксации а для решения всей системы - метод последовательных приближений. Алгоритм решения имеет следующие основные этапы:

- 1) Задаются начальные приближения функций  $\Psi, \omega, \mathcal{J}_{rr}, \mathcal{J}_{rz}, \mathcal{J}_{zz}$  в узловых точках сетки.
- 2) При  $\mathcal{J}_{rr} = \mathcal{J}_{rz} = \mathcal{J}_{zz} = 0$  находится приближённое решение уравнений для функции тока (3.20) и ротора скорости (5.42).
- 3) С использованием вычисленных распределений  $\Psi$  и  $\omega$  в процессе итераций находятся ориентировочные распределения  $\mathcal{J}_{rr}, \mathcal{J}_{rz}, \mathcal{J}_{zz}$ . Для этого проводится некоторое количество итераций в уравнениях (5.43)-(5.45) с учётом граничных условий (5.46)-(5.48).
- 4) Для уточнения результатов проводится цикл пересчёта. На каждом шаге цикла для каждого из уравнений проводится определённое количество (10-30) итераций.

5) При удовлетворении условий (6.16) и (6.17) цикл пересчёта прекращается и выводятся результаты расчётов.

Методика расчёта реализована на языке FORTRAN на ЭВМ 6Е-415 для расчёта одного варианта на сетке с 500 узловыми точками необходимо 40-50 минут машинного времени. Счёт устойчив для любых значений числа Рейнольдса из интервала  $1 < Re \leq 10^6$ , однако при некоторых комбинациях эмпирических постоянных, входящих в уравнения для моментов, счёт становится неустойчивым. Области неустойчивости применённой разностной схемы могут быть уточнены только на базе большого вычислительного материала, полученного при различных значениях параметров, так как соответствующие теоретические исследования устойчивости отсутствуют.

Метод баланса (см. подраздел 5.4), позволяющий определять абсолютные значения скорости, численно также реализован в виде программы для ЭВМ 6Е-415. Расчёт двойного интеграла (по объёму, заполненному жидкостью) при заданных дискретных распределениях составляющих силы и скорости осуществлён с помощью стандартной программы численного интегрирования, использующей метод Симпсона.

## 7. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЁТА ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ

### 7.1. Характеристика циркуляции жидкого металла в однофазных и многофазных МГД-устройствах

В зависимости от значений электромагнитных, гидродинамических и геометрических параметров устройства (рис. 3.1б) в жидком металле могут возникнуть самые разнообразные формы замкнутого течения. Наиболее характерные из них будут кратко охарактеризованы в настоящем подразделе, а более детальный анализ этих зависимостей следует в подразделах 7.2.-7.5.

По характеру течений можно выделить две основные группы:

1) Одноконтурная циркуляция - всю цилиндрическую область, заполненную металлом, занимает один тороидальный вихрь. При этом теоретически внутри жидкости существует только одна линия  $r = r_0$ ,  $z = z_0$ , на которой скорость движения равна нулю ( $v_r = v_z = 0$ ).

2) Двухконтурная циркуляция. В области, заполненной металлом, существуют два тороидальных вихря - верхний и нижний контур циркуляции. Соответственно существуют две окружности  $r = r_{vB}$ ;  $z = z_{vB}$  и  $r = r_{vH}$ ;  $z = z_{vH}$ , на которых  $v_r = v_z = 0$ .

Может также существовать циркуляция с большим числом контуров, но в реальных устройствах этот тип движения встречается редко. Например, четырёхконтурная циркуляция возникает в случае, когда высота однофазного индуктора, расположенного симметрично относительно средней плоскости расплава, более чем на 25% превышает высоту области, заполненной металлом. (рис. 7.1в).

В случае симметрично расположенного относительно средней плоскости расплава  $z = z_{cm}$  однофазного индуктора, высота которого не превышает высоту металла или меньше этой высоты, возникает характерная картина двухконтурной циркуляции (рис. 7.1г). Металл в этом

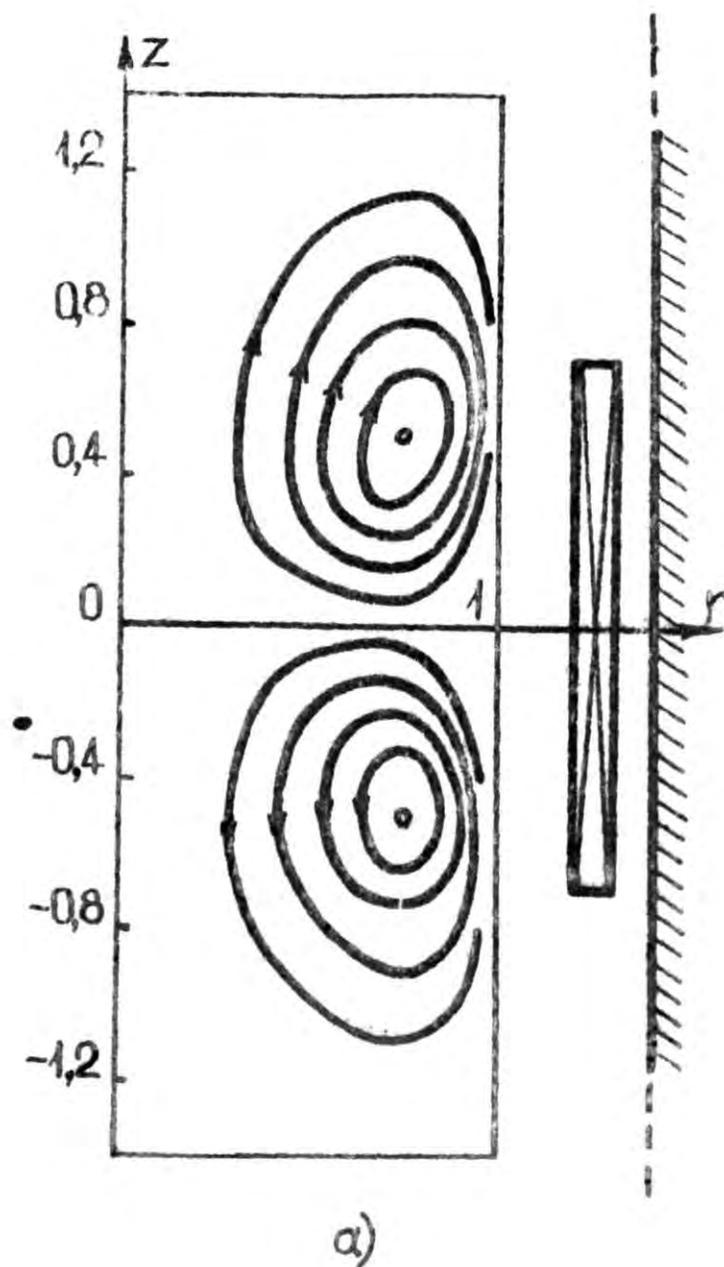


Рис. 7.1. Распределение линий тока при симметрично относительно средней плоскости расплава расположенном однофазном индукторе,

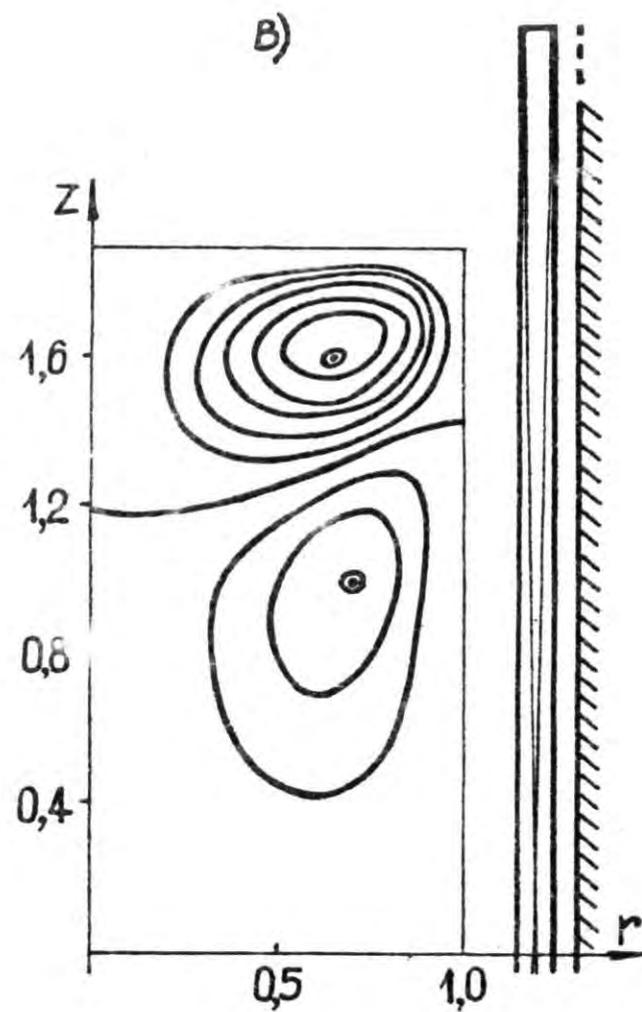
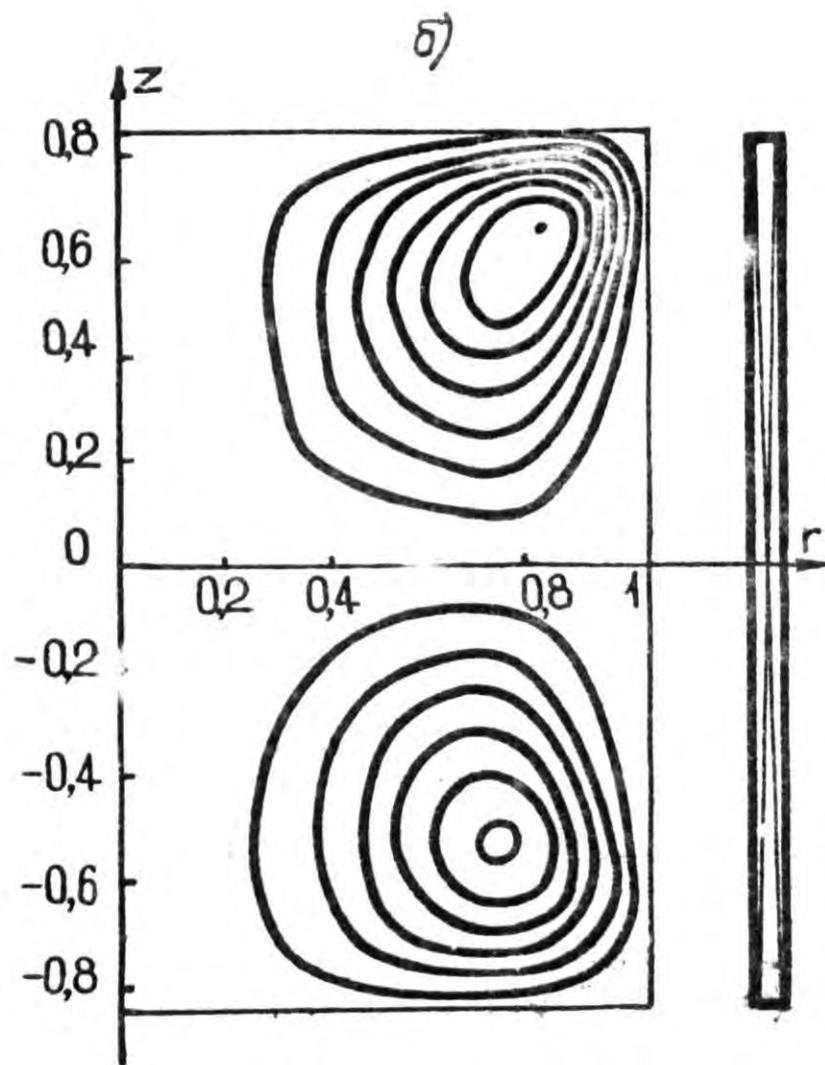


Рис. 7.1. Распределение линий тока при вимметрично относительно средней плоскости расшлава расположенном однофазном индукторе.

на некоторые характерные особенности этого течения:

1) Так как распределение ЭМ движущей силы при этом полностью симметрично (см. подраздел 4.4) относительно средней плоскости устройства  $z=0$  (распределение ротора силы антисимметрично), то и картина линий тока близка к симметричной. Однако, наблюдаются и некоторые отличия, кроме того могут отличаться и интенсивности течения в верхнем и в нижнем контурах (при рассмотрении ординарных случаев не более, чем на 20%). В этом сказывается роль различных гидродинамических условий на торцах области  $z=z_{вн}$  и  $z=z_{нн}$ . На поверхности  $z=z_{вн}$  предполагается свободное скольжение, а на поверхности  $z=z_{нн}$  - прилипание (см. табл. 3.1). Влияние различных граничных условий наиболее выражено в устройствах с малой безразмерной высотой металла ( $h_n < 2$ ) и индуктором, высота которого  $h_u \geq h_n$  (рис. 7.1б). Поверхность  $\Psi=0$ , разделяющая контуры с противоположным направлением циркуляции, практически совпадает с плоскостью симметрии металла  $z=0$  (направление циркуляции на рисунках указано стрелками).

2) Центр вихря находится и движение наиболее интенсивно (скорость движения достигает максимума) в зоне концов индуктора. При  $h_u < 1$  и  $h_n > 1$   $|z_m| > h_u/2$ , а при  $h_u > 1$   $|z_m| < h_u/2$  ( $z_m$  - координата плоскости, где скорость имеет максимальное значение). Это обусловлено тем, что в зоне концов индуктора вблизи боковой поверхности металла максимальное значение принимает ротор плотности силы (см. подраздел 4.4), определяющий закручивание жидкости. Вне зоны действия сил при  $|z| > 3h_u/2$  движение быстро затухает и в торцевых зонах цилиндрического объема циркуляция малоинтенсивна.

3) С возрастанием значения числа Рейнольдса центры вихрей скорости ( $z=z_v$ ,  $r=r_v$ ) приближаются к боковой стенке цилиндрической области и смещаются в сторону её торцов, а линии тока  $\Psi=const$  сжимаются в радиальном и вытягиваются в аксиальном направлениях.

т.е. возрастают скорости течения в пристеночных зонах и происходит вынос скорости вне зоны, охваченной индуктором. Это связано с изменением гидродинамического сопротивления в пристеночных зонах. Возрастание значения безразмерной частоты также приводит к перемещению центра вихря в сторону боковой стенки. В интервале значений  $\hat{\omega} = 1 \div 500$  при  $Re = 10^5$  центр вихря сдвигается в пределах  $r_0 = 0,6 \div 0,8$ .

В случае сдвинутого относительно средней плоскости металла однофазного индуктора (рис. 7.2) симметрия картины линий тока относительно плоскости  $z=0$  теряется. Поверхность раздела контуров  $\Psi=0$  перемещается в таком же направлении как индуктор. Если при сдвиге индуктора вышз  $h_u < h_m$ ;  $1 < h_u < 2$  и  $z_{cu} > z_{cm}$ , (7.1) то поверхность  $\Psi=0$  достаточно точно совпадает с поверхностью симметрии индуктора  $z_{cu} = (z_{mu} + z_{du})/2$ . Это объясняется тем, что в плоскости  $z_{cu}$  составляющая силы  $f_r$  принимает максимальное значение и вдавливает жидкость внутрь области. Если условия (7.1) существенно нарушаются, то в зависимости от гидродинамических и ЭМ условий могут возникнуть самые разнообразные формы циркуляции. В случае длинного ( $h_u > 1$ ) сдвинутого относительно плоскости  $z=z_{cm}$  индуктора, действие радиальной силы вызывает только некоторые пертурбации одноконтурной циркуляции (рис. 7.2а), а линия раздела вихрей существенно сдвинута к нижнему торцу цилиндрической области. Это объясняется тем, что конец индуктора, в окрестности которого ротор силы обычно принимает максимальное значение, выдвинут вне зоны, заполненной металлом. — следовательно сила, закручивающая нижний контур, в данном случае гораздо меньше силы в верхнем контуре. Если устройство имеет короткий однофазный индуктор ( $h_u \ll h_m$ ), то в области, заполненной металлом, могут образоваться застойные зоны, где циркуляция малоинтенсивна.

- В устройстве, показанном на рис. 7.2б застойными являются

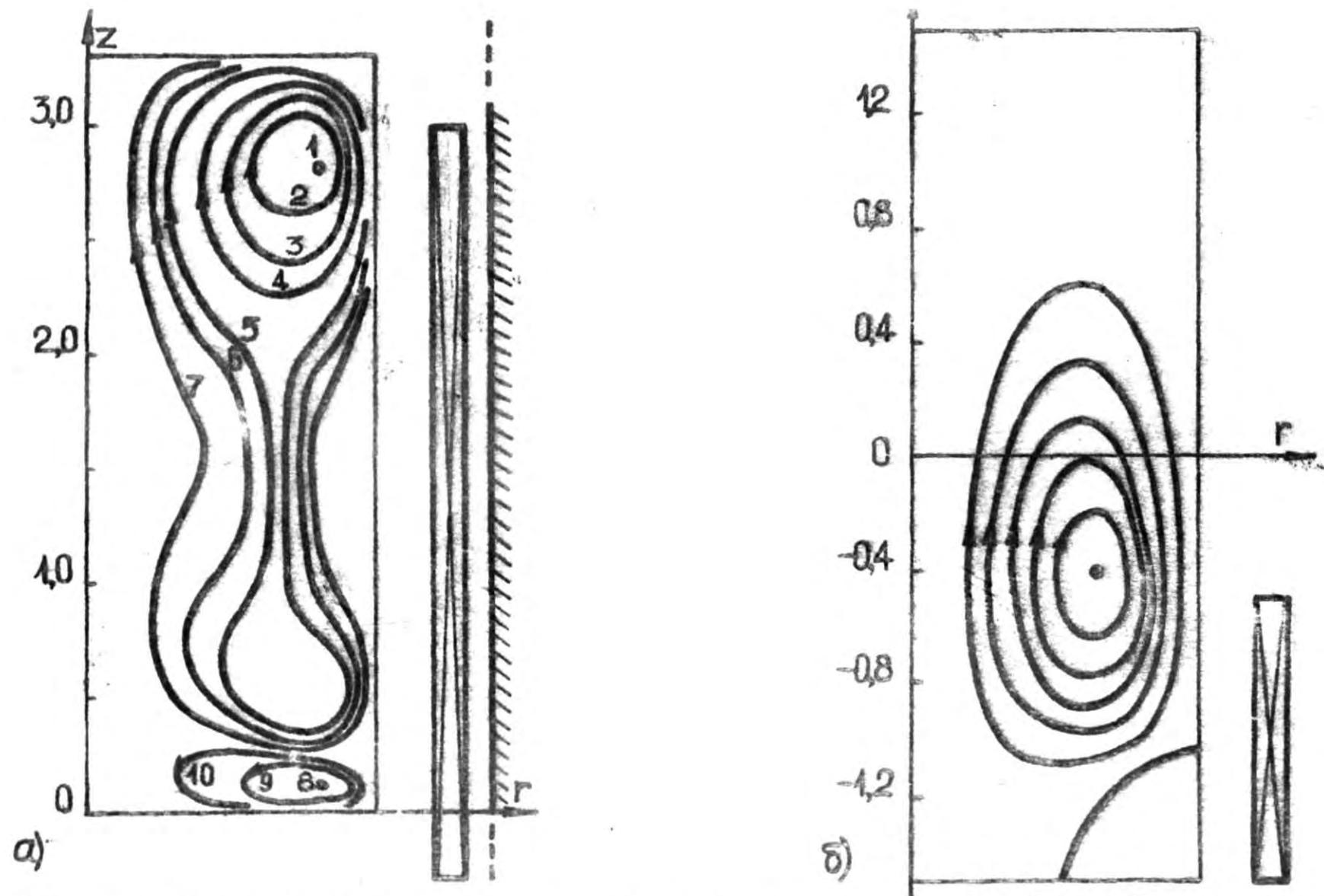


Рис. 7.2. Картины линий тока в случае сдвинутого относительно средней плоскости расплава однофазного индуктора

торцевые зоны области, заполненной металлом.

Для устройств со сдвинутым относительно средней плоскости металла индуктором характерно следующее:

1) Один из контуров циркуляции подавляется, в результате чего при увеличении сдвига индуктора относительно металла может произойти преобразование двухконтурной циркуляции в одноконтурную.

2) При одинаковых настилах тока и высотах индукторов, в устройстве с несимметрично расположенным индуктором интенсивность циркуляции меньше (меньше абсолютное значение скорости и могут существовать застойные зоны), чем в случае симметрично расположенного индуктора.

3) Аналогично случаю с симметрично расположенным индуктором координата центра большего из вихрей  $z_v$  близка координате верхнего конца секции индуктора  $z_{вн}$  ( $z_v \approx z_{вн}$  — если индуктор сдвинут вниз), что также связано с максимальной плотностью ротора силы в этой зоне.

Системе с многофазным индуктором "бегущего поля" характерна одноконтурная циркуляция (рис. 7.3). Определяющее влияние при этом имеет аксиальная составляющая плотности ЭМ силы. Картина линий тока, приведённая на рис. 7.3а, получена для трёхфазного устройства, распределение составляющих силы в котором показано на рис. 4.8. Тенденция появления в верхней зоне цилиндрической области контура с противонаправленной основному контуру циркуляцией связана с изменением знака ротора силы в этой зоне из-за концевого эффекта индуктора. Если индуктор имеет положительный верхний вылет (рис. 7.3б), то упомянутый эффект устраняется. Несмотря на симметричное расположение секций индуктора относительно средней плоскости расплава (рис. 7.3а), картина линий тока су-

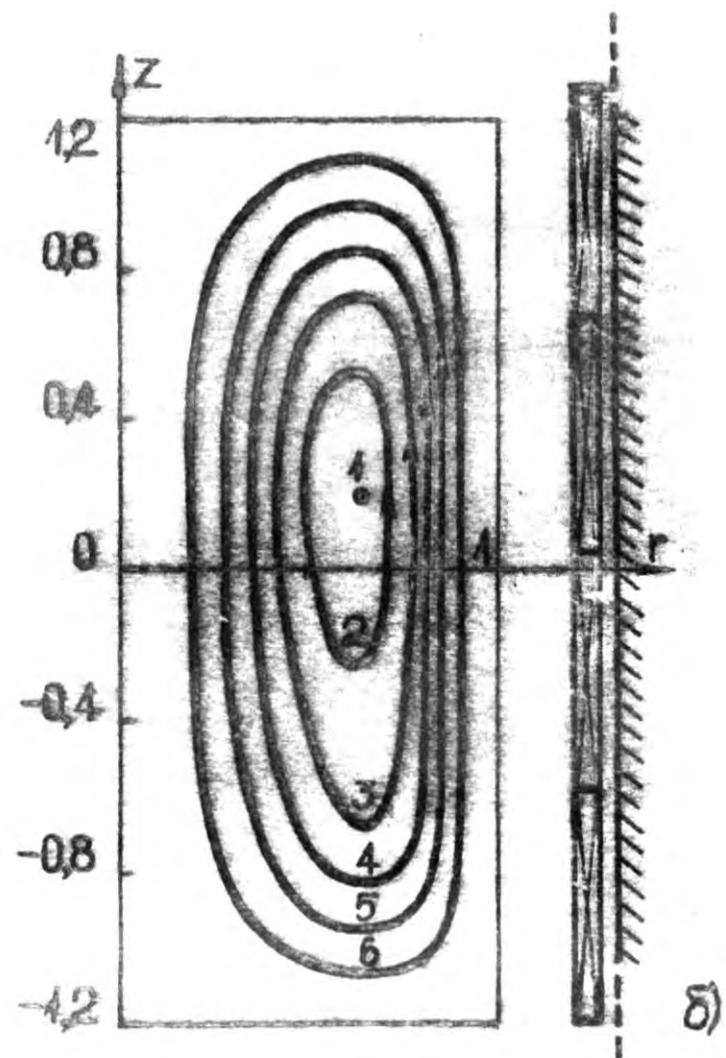
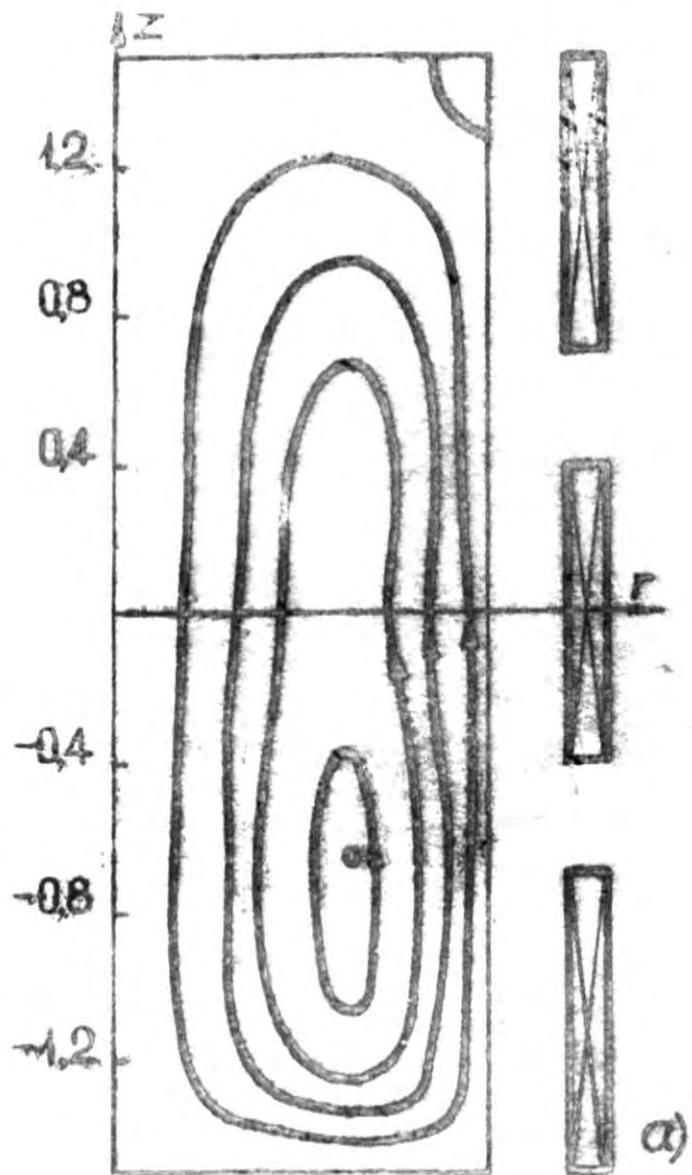


Рис.7.3. Картини линий тока в устройствах с трёх-  
фазным индуктором.

фактически не симметрична относительно плоскости  $z=z_{\text{сн}}$ , т.к., в распределениях составляющих силы (особенно  $f_z$ ) симметрия отсутствует. При одинаковом интегральном токе в индукторе интенсивность циркуляции в многофазном устройстве больше, чем в однофазном. Относительно расположения центра вихря необходимо сказать, что его перемещение в радиальном направлении таким же образом зависит от параметров  $\hat{\omega}$  и  $Re$ , как в случае однофазного индуктора.

Так как в известных экспериментальных работах из-за ограниченности количества точек измерения, полные представления картин течений отсутствуют, то в следующих подразделах численные результаты сопоставляются с имеющимися экспериментальными распределениями  $v_r$  и  $v_z$  в фиксированных сечениях. Далее внимание уделяется результатам численных расчётов течений в аналогичных устройствах, полученным методами, рассмотренными в подразделе 2.3. Приведённые в работах [32,39] распределения линий тока по характеру совпадают с распределениями, полученными с использованием методик, предложенных в настоящей работе. Однако, заметны количественные отличия. Например, распределения линий тока, полученные по методикам [32,39] плотно подходят к оси симметрии, т.е., на оси  $r=0$  имеется сильно выраженный пик скорости, существование которого противоречит экспериментальным данным [3,49,93]. Кроме того, несколько раз занижена скорость течения в пристеночной зоне и наблюдаются другие отличия. Исследование соответствующих конечно-разностных схем показало, что основой этих различий является некачественная аппроксимация исходных уравнений в работах [32,39], что особенно сказывается вблизи оси симметрии. Кроме того, из-за неустойчивости счёта даже при значениях числа Рейнольдса  $Re \approx 1$ , счёт в этих работах проводился с необоснованно заниженным значением числа  $Re$ . Необходимо отметить, что в последние годы

ти независимо от разработок в Латвийском Государственном университете и во ВНИИ Электротермического оборудования, появились исследования за рубежом [94, 95], где для расчёта осреднённых турбулентных течений в металлургических МГД-устройствах используется следующая формула для коэффициента турбулентной вязкости [96]:

$$\nu_t = K / E^{1/2} \quad (7.2)$$

т.н. "К, Е" модель (энергия турбулентных пульсаций К и характеристика турбулентности Е определяются формулами (5.35) и (5.38)). Однако, ранее указанные существенные отклонения от экспериментальных результатов в работах [94, 95] устранить не удалось. Причиной этого могут быть обнаруженные в методиках следующие недостатки (описание конечно-разностных схем в работах [94, 95] отсутствуют):

1) В уравнении движения (3.17) учитывается только часть членов, возникающих из-за переменности по объёму значения коэффициента  $\nu_t$ .

2) Уравнения переноса для величин Е и К используются в сильно упрощённом виде.

Кроме того методики применимы только для цилиндрических областей с использованием безиндукционного приближения.

## 7.2. Результаты применения полуэмпирической теории турбулентности для расчёта поля осреднённых скоростей

Экспериментально установлено [3, 62, 93], что осреднённое течение в устройствах рассматриваемого класса (рис. 3.1б) имеет следующие основные особенности:

1) Максимальное значение аксиальной составляющей скорости в пристеночном потоке достигается на расстоянии  $1 - r_n \leq 0,05$  от твёрдой стенки, и значение  $v_z$  здесь превышает максимальное значе-

ние  $v_z$  на оси симметрии (в центральном потоке).

2) Поверхность, разделяющая противонаправленные потоки  $v = v_r$  находится в интервале  $r_p = 0,65 \div 0,8$ .

3) Если торцевые зоны цилиндрической области не находятся под прямым воздействием электромагнитных сил, то движение там малоинтенсивно. В качестве примера на рисунке 7.4 приведено сопоставление экспериментальных и численных (при  $Re_{эф} = 50$ ) распределений аксиальной и радиальной составляющих скорости [62]. Экспериментальные данные получены на модельном устройстве с расплавленным оловом ( $\hat{\omega} = 32$ ). Скорость определялась по осреднённому динамическому давлению, измеренному тензометрически с помощью погружённого датчика. В качестве датчика были использованы пластины: в осевом столбе металла  $10 \times 10$  и  $20 \times 20$  мм, в зоне соприкосновения встречных потоков и в пристеночном потоке -  $20 \times 5$  мм (большая сторона параллельна границе потока). Экспериментально определённые скорости представлены среднеквадратичными значениями. Эти данные (так же как все приведённые в следующих подразделах) имеют значительный разброс точек, обусловленный главным образом гидродинамической нестабильностью тока. Поэтому они используются только для выявления основных закономерностей, не зависящих от упомянутого разброса точек и подтверждаемых другими экспериментами.

Данные рисунка 7.4 показывают, что метод расчёта при  $Re_{эф} = const$  позволяет получить правильную в общих чертах картину движения, включая характер распределения скорости в осевом и в радиальном направлениях. Это подтверждается как в случае расплава, находящегося целиком внутри индуктора ( $h_m \leq h_u$ ), так и при наличии объёмов расплава, вынесенных за торцы индуктора.

В то же время отмечаются и некоторые различия расчётного и экспериментального полей скорости. В частности, зоны максималь-

ных скоростей, полученные расчётом, несколько смещены к торцам расплава. Этот сдвиг выражен сильнее при  $h_m > h_u$ , но проявляется как при слабом взаимодействии двух основных торoidalных вихрей скорости ( $h_m/2 > 1$ ), так и при сильном их взаимодействии ( $h_u/2 < 1$ ). Тенденция к завышению выноса скорости к торцам расплава в расчётах при  $Re_{эф} = 50$  проявляется также и при рассмотрении поля скорости  $v_r$ .

Характерной особенностью расчётных распределений  $v_z$  вдоль радиусов расплава является завышение расстояний точки, где  $v_z$  максимально от боковой поверхности металла, а также завышение отношения  $v_{max}/v_{zc}$  по сравнению с экспериментальным (обозначения см. в таблице 7.1). Радиальные профили скорости, рассчитанные конечно-разностным методом для среднего по высоте участка многофазной системы, близки к профилям, полученным в работе [35] на основе аналитических выражений.

В качестве расчётной модели, для сопоставления результатов, полученных на основе полуэмпирических формул (5.17), 5.21), (5.24)-(5.27) используется устройство (рис. 3.16) со следующими параметрами:  $z_{en} = 1,4$ ;  $z_{mm} = -1,4$ ;  $z_{en} = 0,7$ ;  $z_{mu} = -0,7$ ;  $r_u = 1,2$ ;  $q_u = 0,1$ ;  $r_s = 1,4$ ;  $\hat{\omega} = 33$ ;  $r_0 = 0,2$  м;  $I = 5 \cdot 10^4 \frac{\text{Ам}}{\text{м}}$ ;  $\sigma = 2,1 \cdot 10^6 \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{м}}$ ;  $\rho = 6,84 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ .

1) Постоянный по объёму коэффициент турбулентной вязкости.

Было показано (рис. 7.4), что применение в расчёте постоянного значения  $Re_{эф}$  позволяет качественно правильно передать картину течения, однако, следует выяснить влияние изменения значения  $Re_{эф}$  на распределение скоростей. Результаты проведённых численных экспериментов в интервале  $1 \leq Re_{эф} \leq 10^6$  показали, что с увеличением значения этого параметра (таблица 7.1; рис. 7.5-7.10):

а) возрастает скорость течения в пристеночном потоке по сравнению со скоростью в центральном потоке и  $v_{zc}$  становится больше мак-

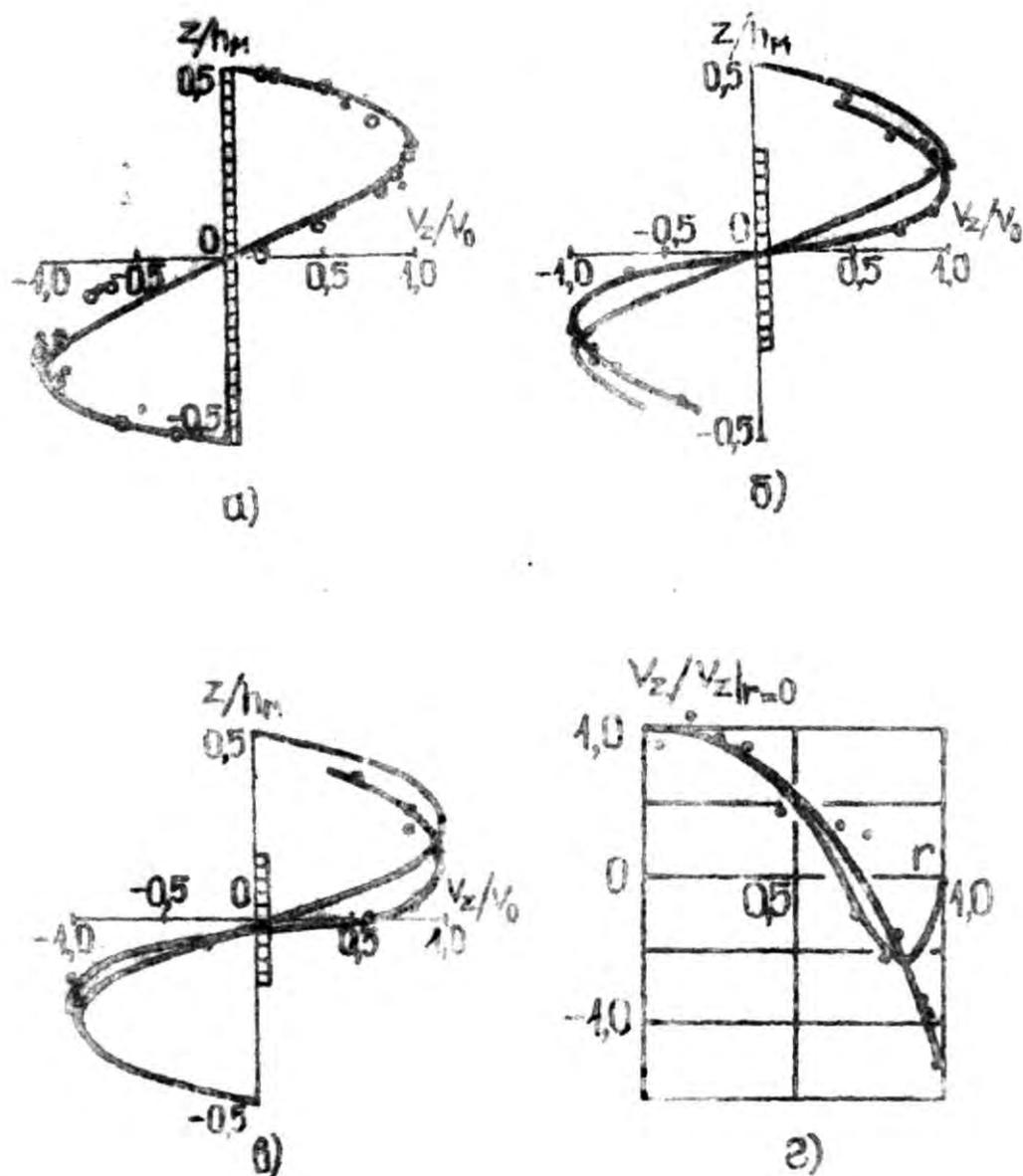


Рис. 7.4. Распределения составляющей скорости  $V_z$  по высоте расплава при  $r=0$  и по радиусу. Жирные кривые - расчёт ( $Re_{app} = 50$ ), тонкие кривые и точки - опыт: а)  $h_m/h_u = 1$ ;  $h_u/2 = 0,85$  - жирная кривая, 0,95 - тёмные точки и 1,65 - светлые точки; б)  $h_m/h_u = 1,9$ ;  $h_u/2 = 1,4$ ; в)  $h_m/h_u = 2,8$ ;  $h_u/2 = 0,85$ ; г)  $z = 0,43 h_u$ ;  $h_m/h_u = 1,8$ ;  $h_u/2 = 1,4$ .

ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ

№ пп	Формула и значения коэффициентов	$\frac{V_{zc}}{V_{zu}}$	$r_p$	$Z_M$	$\frac{V_r}{V_{ru}}$	$v_0 \left( \frac{M}{c} \right)$	Обозначения
I.	$Re_{\varphi} = const$						$V_{zc}, V_{zu}$ - максимальные значения аксиальной составляющей скорости в пристеночном потоке и в центральном потоке;
I.1.	$Re_{\varphi} = 5.$	0,52	0,60	0,6	0,64	0,07	
I.2.	$Re_{\varphi} = 50.$	0,55	0,65	0,75	1,35	0,21	
I.3.	$Re_{\varphi} = 500.$	0,94	0,65±0,75	0,8	1,92	0,33	
I.4.	$Re_{\varphi} = 10^4$	2,1	0,65±0,8	0,9	1,6	0,72	
2.	Гипотеза Кармана (5.16)						$V_{rn}, V_{ru}$ - максимальные значения радиальной составляющей скорости на свободной поверхности $z = Z_{вн}$ и в центральном потоке;
2.1.	$\alpha = 0,04$ ; $Re_{\varphi} \Big _{r=0}^{\max} = 2,6 \cdot 10^3$	0,81	0,7	0,8	1,45	0,22	
2.2.	$\alpha = 0,4$ ; $Re_{\varphi} \Big _{r=0}^{\max} = 0,8 \cdot 10^3$	0,96	0,75	0,6	0,51	0,08	
3.	Линеаризованное уравнение (5.22) $Re_{\varphi} = 50$	0,58	0,65	0,7	0,58	0,20	$Z_M$ - координата максимума аксиальной составляющей скорости;
4.	Координатная зависимость турбулентной вязкости (5.24)						$v_0$ - максимальное значение скорости.
4.1.	Ф-лы (5.25); (5.27); $rot \vec{f}_r = \frac{1}{Re_r} rot rot \vec{w}$ ; $Re_{\varphi} \Big _{r=0}^{\max} = 9,5$	0,96	0,75	0,7	0,84	0,19	
4.2.	Ф-лы (5.26); (5.27); $rot \vec{f}_r = \frac{1}{Re_r} rot rot \vec{w}$ ; $Re_{\varphi} \Big _{r=0}^{\max} = 50$	0,79	0,7	0,7	0,98	0,20	
4.3.	Ф-лы (5.26); (5.27); $grad \frac{1}{Re_r} \neq 0$ ; $Re_{\varphi} \Big _{r=0}^{\max} = 50$	1,46	0,8	0,5	0,28	0,21	

симметричного значения  $v_{z0}$  (при больших значениях  $Re_{эф}$  максимум скорости приосевого потока может не находиться на оси симметрии (рис. 7.5);

б) поверхность, разделяющая противонаправленные потоки перемещается в сторону боковой стенки, но сдвиг относительно невелик  $-\Delta r_p \leq 0,1$  (рис. 7.5);

в) максимум распределения  $v_z = v_z(z)$  (рис. 7.6) сдвигается в сторону торцов цилиндрической области - изменение числа Рейнольдса от 5 до  $10^4$  приводит к сдвигу максимума, составляющему примерно 40% высоты расплава  $h_m$ ;

г) пристеночный максимум распределения  $v_r = v_r(z)$  перемещается в сторону дна тигля и становится более выраженным (рис. 7.7):

$$\frac{v_{r\max} | Re_{эф} = 10^4; r = 0,7}{v_{r\max} | Re_{эф} = 5; r = 0,5} = 3,1$$

д) картина течения становится неустойчивой - небольшие изменения параметров устройства, а также числа  $Re_{эф}$  могут приводить к существенному перестроению всего течения. Это связано с уменьшением диссипации при возрастании  $Re_{эф}$ ;

е) поверхность раздела противонаправленных потоков  $r = r_p(z)$  вместо кругового цилиндра (при малых значениях эффективного числа Рейнольдса  $r_p = const$ ) принимает форму более сложной поверхности вращения.

Совпадение распределений  $v_r = v_r(z)$  и  $v_z = v_z(z)$  с соответствующими экспериментальными распределениями, точнее при малых значениях эффективного числа Рейнольдса, но для распределения  $v_z = v_z(r)$  совпадение лучше при больших значениях  $Re_{эф}$ . При  $Re_{эф} > 50$  возрастание абсолютных значений скорости замедляется (рис. 6.1) по сравнению со случаем линеаризованного уравнения, когда  $v_0 \sim \sqrt{Re_{эф}}$ . Перестроения картины течения при больших значениях  $Re_{эф}$ , определяется существенным уменьшением гидродинамического сопротивления

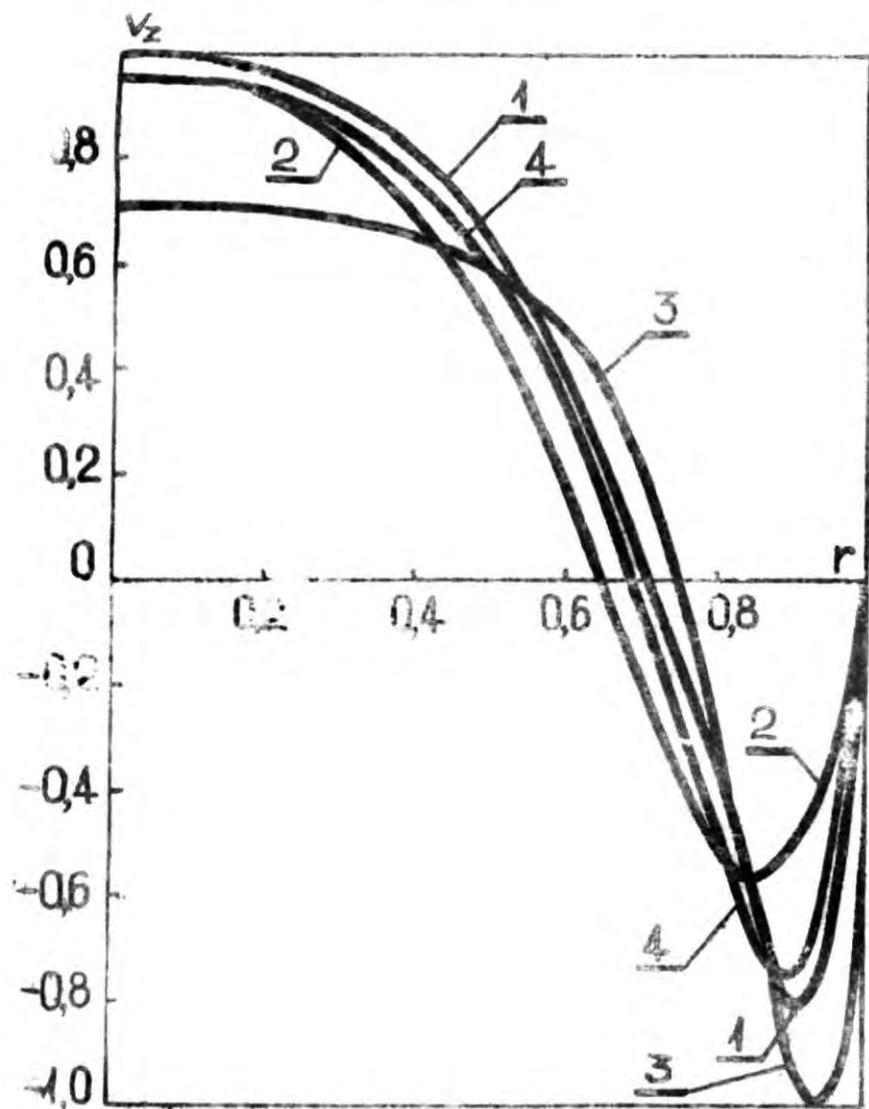


Рис. 7.5. Распределение составляющей скорости  $v_z$  по радиусу: 1) Гипотеза Кармана  $\kappa=0,4$ . 2) Линеаризованное уравнение. 3) Формулы (5.31), (5.32). 4) То же, что и 3), но в приближении (5.12).

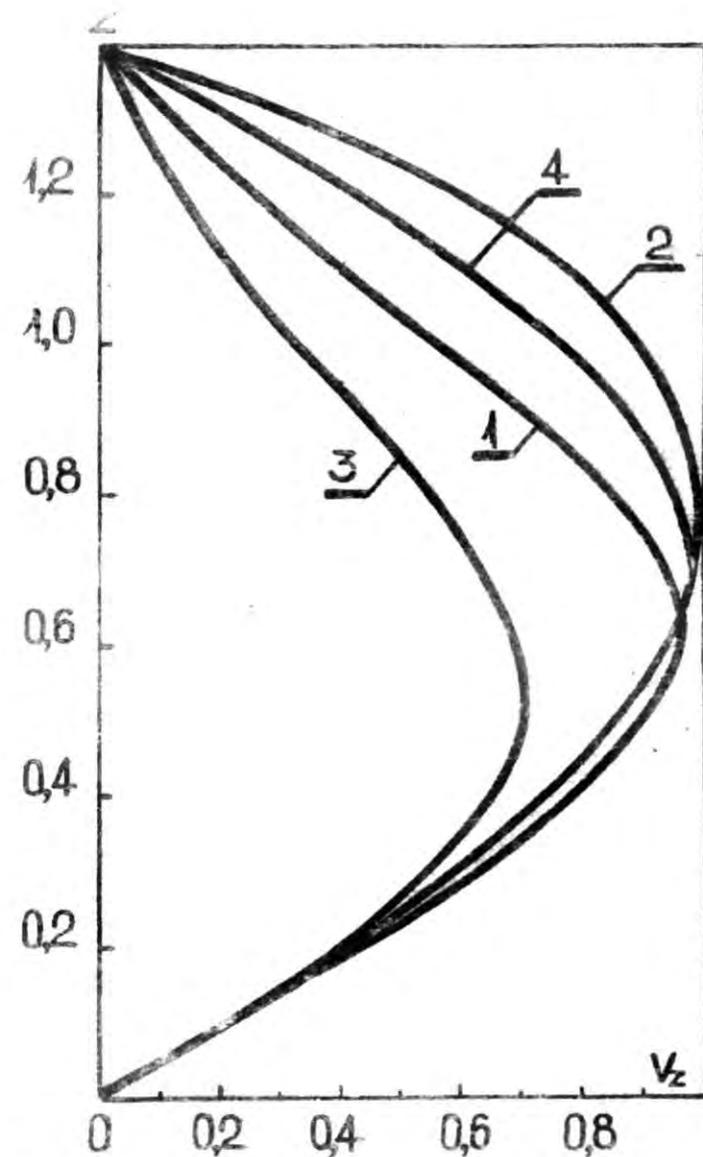


Рис. 7.6. Распределение составляющей скорости  $v_z$  по высоте (нумерация кривых как на рис. 7.5).

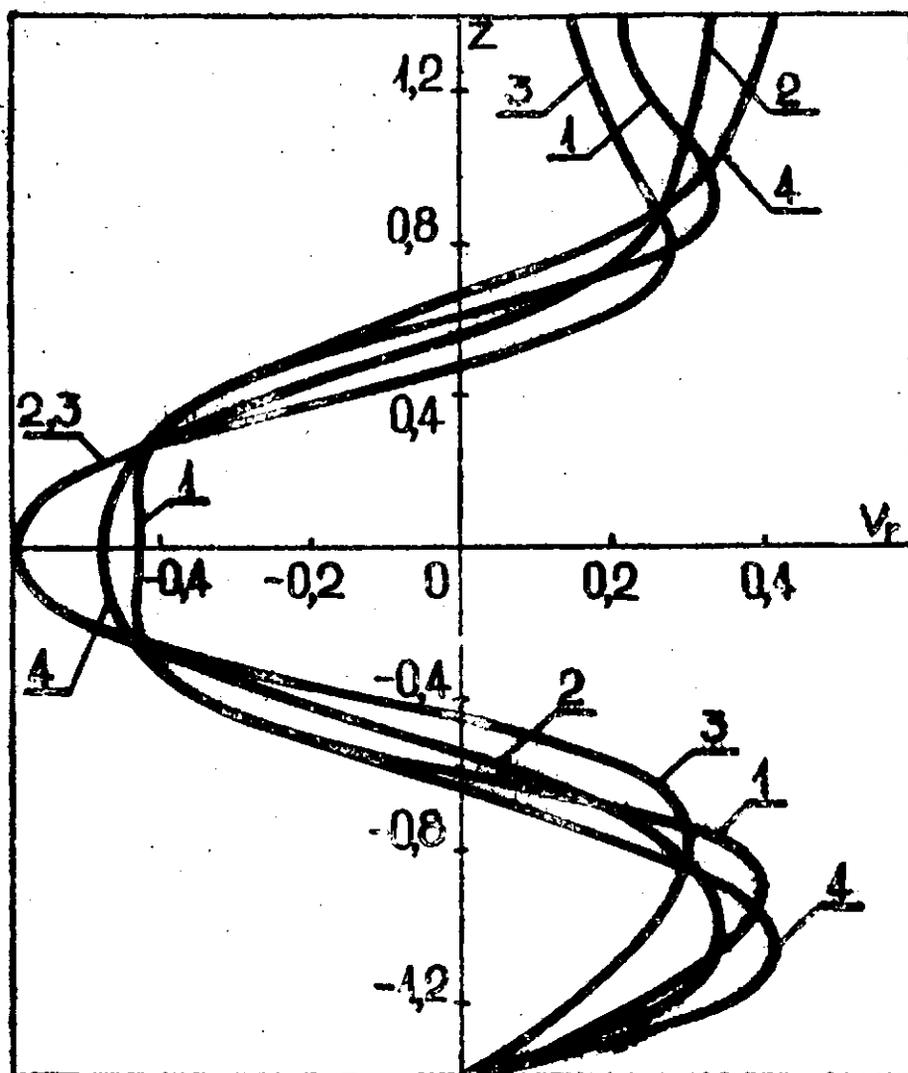


Рис. 7.7. Распределение радиальной составляющей скорости по высоте расплава (нумерация кривых как на рис.7.5).

пограничных зонах, в результате чего там наблюдаются большие градиенты скорости. Экспериментально установлено, что максимальное значение скорости для устройства, параметры которого приведены раньше, находится в интервале  $v_0 = 0,15 - 0,25 \frac{m}{c}$ , т.е. в расчёте максимальное значение скорости правильно передаётся при  $Re = 10 \div 100$ . С использованием постоянного коэффициента турбулентной вязкости не удаётся одновременно одинаково хорошо в расчёте передать различные аспекты течения - уточнение одного показателя влечёт за собой ухудшение другого. В практических расчётах с применением данного приближения можно рекомендовать пользоваться таким значением  $Re_{эф}$ , которое позволяет правильно передать абсолютные значения скорости. Это значение числа  $Re_{эф}$  для классов устройств определяется сопоставлением экспериментальных и численных результатов.

2) Гипотеза Кармана. Расчёты с применением гипотезы Кармана были проведены для интервала значений  $\alpha = 0,04 \div 0,4$  (табл. 7.1 и рис. 7.5-7.7) в приближении (5.12). При больших значениях  $\alpha \approx 0,4$  уменьшается вынос скорости в торцевые зоны и соотношения максимальных скоростей становятся близкими к экспериментальным ( $v_{2c} \approx v_{2y}$ ), однако, при этом занижается абсолютное значение скорости. Полученное при  $\alpha = 0,4$  абсолютное значение скорости приблизительно равно  $v_0$  в расчётах с  $Re_{эф} = 5$ . Достоинством данной формулы является то, что с помощью выбора одной эмпирической постоянной  $\alpha$  удаётся уточнить численные результаты расчёта безразмерных скоростей по сравнению с предположением  $v_1 = v_0$ , где также определяется одна эмпирическая постоянная. Определение абсолютных значений скорости в данном случае можно осуществить методом баланса (подраздел 5.4).

3) Линеаризованное уравнение (5.22). Сопоставление результатов расчёта для трёх однофазных модельных установок (пункты 2, 3,

4, табл. 7.2), промышленной плавильной печи с ёмкостью 60 тонн (пункт 1, табл. 7.2) и модельной двухфазной установки с относительно небольшой высотой расплава  $h_m = 1,0$  (пункт 5, табл. 7.2), показывает отличия распределений скорости, полученных на основе линейной и нелинейной (конвективные члены учитываются) постановок ( $Re_{эф} = 50$ ):

а) центр вихря и соответственно максимум аксиальной составляющей скорости для всех рассмотренных устройств в линейной постановке сдвинуты в сторону средней плоскости расплава по сравнению с положением этих характерных точек, полученным по расчётам в нелинейной постановке. Эти результаты подтверждают правомерность ранее (в подразделе 5.2) сделанных предположений, позволяющих линеаризовать уравнение осреднённого движения;

б) соотношения максимальных значений скорости в верхнем и в нижнем контурах, а также соотношения высот этих контуров в обеих постановках практически совпадают - существенного перераспределения потоков не происходит. В случае малых высот расплава  $h_m \leq 1$  обнаруживаются некоторые отличия в распределении  $v_z = v_z(r)$  (пункт 5, табл. 7.2).

$$\text{в) при соблюдении условия } h_m \geq 2h_u > 2 \quad (7.3)$$

(устройства № 3 и 4) использование линейного уравнения движения приводит к существенному уменьшению скорости движения в торцевых зонах цилиндрической области (в том числе вблизи свободной поверхности) по сравнению со случаем нелинейного уравнения движения. При экстремально большой высоте металла  $h_m \approx 2h_u = 2,6$  уменьшение достигает пяти раз, а при  $h_m = 2h_u = 2,8$  - около 1,6 раз. Если условие (7.3) не выполнено из-за малой высоты расплава (устройство № 5) или из-за большой длины индуктора (устройство № 2) при симметричном его расположении относительно средней плоскости расплава, то уменьшение скорости  $v_r$  на поверхности расплава не су-

Таблица 7.2

Характеристика результатов расчета теоретич. в устройствах с различными геометрическими и электромагнитными параметрами<sup>I</sup>

№ пп.	$h_m$	$h_u$	$l_0$	$l_m$	$r_2$	$\hat{\omega}$	$r_0$	$I$ ( $\frac{A}{H}$ )		$\bar{z}_m$	$r_p$	$\frac{V_{2c}}{V_{2u}}$	$V_{r11}$	$V_{r14}$	$V_c$ ( $\frac{H}{C}$ )	$v^*$ ( $\frac{M}{C}$ )	Примечания
1	3,3	2,3	-0,8	-0,2	1,3	250	0,95	$2,67 \cdot 10^5$	б.к.ч. с.к.ч.	2,3 2,4	0,7 0,7	0,58	0,16 0,28	0,36 0,34	0,33 0,32	0,0463	Индуктор-однофазный
2	2,8	2,8	0	0	1,4	33	0,2	$5 \cdot 10^4$	б.к.ч.	0,8	0,7	0,51	0,95	0,23	0,25	0,0348	Индуктор-однофазный, симметрично расположенный
3	5,4	2,8	-1,3	-1,3	1,4	33	0,2	$5 \cdot 10^4$	б.к.ч. с.к.ч.	1,0 1,3	0,65 0,65	0,46 0,45	0,04 0,2	0,22 0,17	0,27 0,27	0,0368	"
4	3,9	1,7	-1,1	-1,1	1,4	33	0,2	$5 \cdot 10^4$	б.к.ч. с.к.ч.	0,6 0,9	0,65 0,7	0,54 0,5	0,09 0,15	0,5 0,2	0,23 0,22	0,033	"
5	1,0	0,3 0,3	-0,5 -0,8	-0,2 0,1	-	18	0,15	$4 \cdot 10^4$	б.к.ч. с.к.ч.	- -	0,65 0,65	0,62 1,1	1,0 1,0	0,51 0,45	0,07 0,06	0,0093 0,0093	Индуктор двухфазный со сдвигом в секциях $60^\circ$

<sup>I</sup> Обозначения такие же как в таблице 7.1, б.к.ч. - расчёт без учёта конвективных членов в уравнении движения, с.к.ч. - расчёт по уравнению (3.19).

щественно;

г) в однофазном устройстве с индуктором, расположенным несимметрично относительно средней плоскости расплава, вместо условия (7.3) необходимо рассматривать условия:

$$l_b \geq -1 ; h_u \geq 1 ; h_m \geq 2 \quad (7.4)$$

Приближённо эти условия выполняются для устройства, рассмотренного в пункте I таблицы 7.2 и соответственно:

$$\frac{v_{rn}|_{с.к.ч.}}{v_{rn}|_{д.к.ч.}} = 1,75 ;$$

д) при малой высоте столба металла  $h_m \leq 1$  (устр. №5) наблюдаются также изменения в распределении аксиальной составляющей скорости по радиусу.

Как уже отмечалось, зависимость максимального значения скорости от квадратного корня числа  $Re_{эф}$  имеет линейный характер (рис. 6.1). При  $Re_{эф} \leq 50$  абсолютные значения скорости в обеих постановках практически совпадают. Возникающие отличия при  $Re_{эф} > 50$ , объясняются тем, что при больших значениях  $Re_{эф}$ , диссипация мала и на движение существенно влияет конвективный перенос, а при малых значениях  $Re_{эф}$  наоборот - скорость течения в основном определяется турбулентной и молекулярной диссипацией. Расчёт абсолютных значений скорости на основе линеаризованной постановки также связан с выбором значения коэффициента  $Re_{эф}$  для класса устройств. Совпадение экспериментально наблюдаемых и расчётных значений максимальной скорости  $v_0$  в лабораторных установках ( $r_0 \sim 0,2 м$ ) с однофазным индуктором имеет место при  $10 < Re_{эф} < 100$ , а в промышленных установках ( $r_0 \sim 1 м$ ), при  $5 \cdot 10^2 < Re_{эф} < 5 \cdot 10^3$ . В таблице 8 приводятся также значения коэффициентов пересчёта скорости  $v$  (5.23) для рассматриваемых МГД-устройств. Таким образом, применение линейной постановки упрощает как расчёт распределения ск

стей (решается система линейных уравнений), так и определение абсолютных значений скоростей при различных значениях  $Re_{эф}$ , причём полученные распределения лучше соответствуют экспериментальным данным (уменьшается вынос скорости) чем результаты, полученные при  $Re_{эф} = const$ .

4) Координатная зависимость коэффициента турбулентной вязкости (5.24). Выбором эмпирических постоянных в выражениях (5.25) – (5.27) удаётся удовлетворить всем требованиям, которые предъявляются экспериментом (см. рис. 7.5–7.10 и табл. 7.1), причём на результаты расчёта существенно влияет выбранное приближение в определении турбулентной силы (3.21). Пренебрежение производными от  $\frac{1}{Re_T}$ , т.е. предположение в уравнении движения

$$\text{rot} \vec{f}_T = \frac{1}{Re_T} \text{rot} \text{rot} \vec{\omega} \quad (3.17)$$

снижает эффективность применения формул с переменной вязкостью [61]:

а) соотношение максимальных значений скорости  $v_z$  в пристеночном потоке и на оси симметрии  $v_{zc}/v_{z0}$  становится меньше единицы, наименьшее из рассмотренных вариантов значение  $v_{zc}/v_{z0} = 0,52$  получается при постоянной турбулентной вязкости  $Re_{эф} = 5$  (п. 1.1 табл. 7.1);

б) возрастает интенсивность циркуляции в торцевых зонах, что характеризуется возрастанием координаты  $z_m$  максимума  $v_z$  и возрастанием соотношения радиальной составляющей скорости на свободной поверхности металла  $z = z_m$  и при  $z = 0$ . Наиболее интенсивное движение в торцевых зонах получается при больших значениях  $Re_{эф}$ .

Поэтому для решения задачи в случае переменной вязкости не рекомендуется использовать упрощённое уравнение (3.19), учитывающее только изменение диссипации механической энергии в различных зонах течения. Кроме того, в расчётах необходимо пользоваться

разностной схемой свободной от аппроксимационной вязкости (см. подраздел 6.2), так как значений  $Re_{эф}$  меняется в интервале  $Re_{эф} \leq 10^7$ . Однако, в основной части области турбулентными пульсациями поглощается гораздо больше энергии, чем диссипируется вязким трением, т.е.  $\dot{\nu} \gg \nu$  и  $Re_{эф} \leq 10^8$ . Результаты расчётов по схеме с аппроксимационной вязкостью на сетке с шагами  $h, g \geq 0,05$  при  $Re_{эф} > 10^2$  существенно искажаются.

Предшествующий анализ был проведён на примере устройства с индуктором, высота которого меньше высоты металла. Как показывает физический эксперимент [93] в устройствах с  $h_u \geq h_m$  течение имеет более сложный характер. Движение становится многоконтурным. Кроме того, осреднённое турбулентное течение в случае  $h_u \geq h_m$  может состоять из нескольких квазистабильных состояний, переход между которыми осуществляется подводом конечноамплитудных возмущений. Необходимо отметить, что эти особенности отчётливо проявляются также в численном эксперименте, проведённом для устройства соотношением высот индуктора и металла  $h_u/h_m \approx 1,8$  ( $h_u=5,0$ ;  $h_m=2,8$ ,  $r_u=1,15$ ;  $r_o=1,4$ ;  $r_s=0,2$ ;  $\hat{\omega}=32$ ). На рис. 7.8-7.10 представлены распределения составляющих осреднённой скорости, полученные при постоянных по объёму металла значениях  $Re_{эф}$  (кривые 1,2), а также полученные с использованием координатных зависимостей для коэффициента  $\dot{\nu}$  (5.25), (5.27). Из сопоставления результатов следует:

I) Уменьшение значения коэффициента турбулентной вязкости в пристеночной зоне ( $r > r_r$ ) по сравнению с её значением в центральной зоне, приводит к существенной интенсификации пристеночного потока. Если при  $Re_{эф} = const \leq 10^2$  отношение максимальных значений скорости  $v_z$  в пристеночном и в центральном потоках меньше единицы ( $v_{zc}/v_{zc} \leq 1$ ), то в случае переменной вязкости ( $Re_{эф}|_{z=0} \leq 10$ ) соотношение  $v_{zc}/v_{zc}$  возможно изменить в очень широких пределах - максимальное значение скорости в пристеночном потоке  $v_{zc}$  может не-

сколько раз превышать максимальное значение скорости в центральном потоке.

2) Увеличение ширины зоны с относительно небольшой турбулентной вязкостью приводит к деформации центрального потока и смещению точки максимума  $v_{z,c}$  в сторону боковой стенки (рис. 7.4, кривая 5). Эта трансформация потока связана с тем, что в зоне  $r < r_t$ , где вязкость  $\nu_t$  большая, течение существенно тормозится. Если при этом  $r_t < r_p$ , то максимум скорости пристеночного потока смещается в зону, где  $\nu_t$  мало, а соотношение  $v_z|_{r=0} / v_{z,c} \rightarrow 0$ . Кроме того, в случае широкой зоны с малой турбулентной вязкостью  $r_t \leq 0,6$  в отдельных случаях пристеночное течение может разбиваться на два противоположных течения - в узком пристеночном слое появляется течение, направление которого совпадает с направлением центрального аксиального потока. Так как распределения такого типа в эксперименте не наблюдаются, то применяя формулу (5.24) необходимо ограничиваться значениями  $r_t > r_p$  ( $r_p \approx 0,6 \div 0,8$ ).

3) В устройствах с  $h_u \geq h_m$ , в отличие от случая  $h_u < h_m$ , увеличение  $\nu_t$  в торцевых зонах не вызывает там существенного уменьшения интенсивности движения по сравнению с движением в центральной части цилиндрической области. Более того, если зону большой турбулентной вязкости приложено практически всё силовое воздействие, то относительная интенсивность движения здесь может расти, а также могут происходить существенные перестроения течения. Это проявляется и в рассматриваемом примере (рис. 7.8-7.10), где  $h_u > h_m$  и силовые воздействия сконцентрированы в узких торцевых зонах цилиндрической области - происходит перестроение четырёхконтурного течения в двухконтурное (кривая 5). Направление вихря скорости в торцевых зонах при этом меняется в противоположное. Следовательно, при  $h_u > h_m$  применение в расчётах возрастания зна-

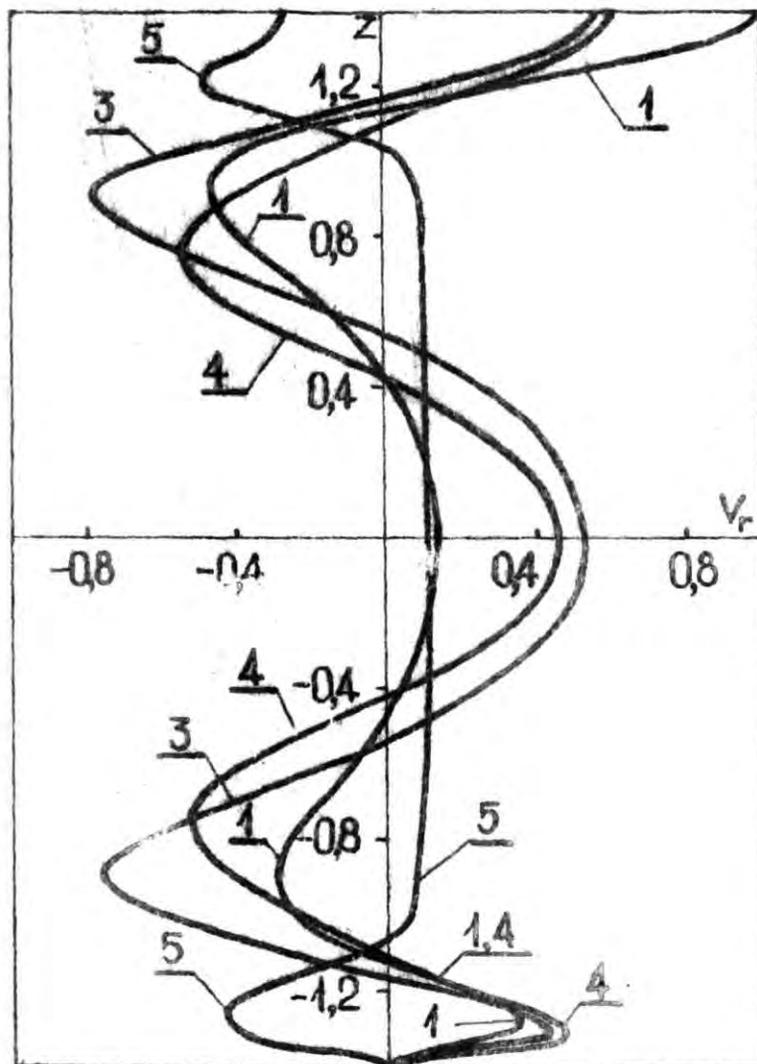


Рис. 7.8. Распределение радиальной составляющей скорости по высоте расплава:

1)  $Re_{эф} = 5$ ;  $r = 0,55$ .

2)  $Re_{эф} = 10^5$ ;  $r = 0,6$ .

3) Ф-лы вязкости (5.25), (5.27);  $k_1 = 1$ ;  $k_2 = 0,1$ ;  $k_3 = 10$ ;  $\bar{v}_c = 0$ ;  $r_T = 0,8$ ;  $z_1 = -1$ ;  $z_2 = 1$ ;  $\alpha_1 = \alpha_2 = 5,0$ ;  $\bar{\nu} = 10^{-5}$ ;  $r = 0,6$ .

4) Ф-лы те же;  $k_1 = 1$ ;  $k_2 = 1$ ;  $k_3 = 10$ ;  $\bar{v}_c = 0$ ;  $r_T = 0,65$ ;  $z_1 = -0,7$ ;  $z_2 = 0,7$ ;  $\alpha_1 = \alpha_2 = 5,0$ ;  $\bar{\nu} = 10^{-5}$ ;  $r = 0,6$ .

5) Ф-лы те же;  $k_1 = 3$ ;  $k_2 = 5$ ;  $k_3 = 10$ ;  $\bar{v}_c = 0$ ;  $r_T = 0,5$ ;  $z_1 = -0,6$ ;  $z_2 = 0,6$ ;  $\alpha_1 = \alpha_2 = 15$ ;  $\bar{\nu} = 10^{-5}$ ;  $r = 0,8$ .

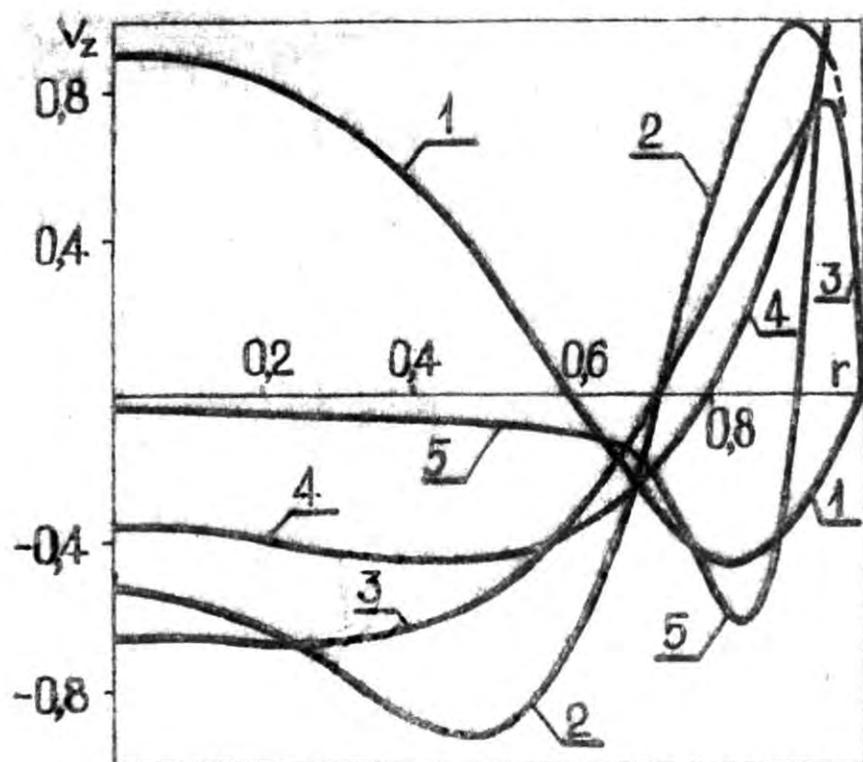


Рис. 7.9. Распределение аксиальной составляющей скорости по радиусу:  
 1)  $z=1,1$  . 2)  $z=0,5$  . 3)  $z=0,4$ . 4)  $z=0,4$ . 5)  $z=1,0$ .

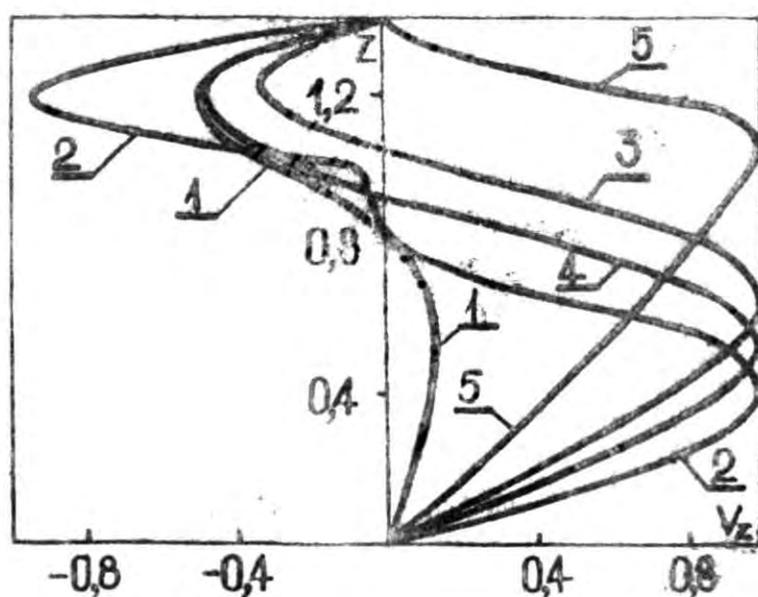


Рис. 7.10. Распределение аксиальной составляющей скорости по высоте жидкого металла:  
 1)  $r=0,25$  . 2)-5)  $r=0,95$ .

чения  $\lambda$  в торцевых зонах может оказаться не оправданным.

Использованные в настоящих расчётах (рис. 7.8-7.10) значения коэффициентов в формуле для  $\lambda$ , (5.24) физически мало обоснованы, поэтому приведённые результаты необходимо считать численным экспериментом с целью выявления возможностей подхода, основанного на эмпирических формулах (5.25-5.27), а также с целью локализации значений этих параметров в некоторых пределах на основе сопоставления численных и экспериментальных данных.

Таким образом, установлено, что с помощью надлежащего выбора эмпирических постоянных в выражениях для коэффициента турбулентной вязкости возможно обеспечить хорошее совпадение экспериментальных и теоретических распределений осреднённой скорости. Однако, значения эмпирических постоянных удаётся зафиксировать только для ограниченного класса устройств. Существенное изменение геометрии области, заполненной жидким металлом, изменения в индукционной системе требуют подбора новых значений эмпирических постоянных. Поэтому представляет интерес исследовать возможности применения таких подходов к расчёту осреднённого течения, в которых постоянные имеют более универсальный характер, т.е. сохраняют свои значения для расчётов более широкого класса устройств. В настоящей работе такие попытки делаются на основе теории центральных моментов, ограничиваясь уравнениями для моментов второго порядка (5.43)-(5.45). Полученные при значениях параметров:

$$Re = 10^3 \div 10^5; c_1 = 1,5; c_2 = 0,4; c_3 = 0,5; c_4 = 0,1; c_5 = 0,01; l = 0,5$$

распределения осреднённых скоростей качественно согласуются с экспериментальными данными. В настоящее время продолжаются численные эксперименты оптимального определения постоянных, позволяющих проводить расчёты в классе цилиндрических МГД-устройств (индукционных печах, миксерах, кристаллизаторах и др.). Так как

эти эксперименты связаны с большим объёмом вычислений на ЭВМ (расчёт одного варианта занимает 40-50 мин. машинного времени), то обсуждение этих результатов ещё преждевременно.

### 7.3. Влияние безразмерной частоты на течение

Для выяснения зависимости движения жидкого металла от частоты (2.28) проведены расчёты устройства со следующими параметрами:  $h_u = 2,8$ ;  $h_m = 5,4$ ;  $r_u = 1,2$ ,  $r_o = 1,4$ ,  $Re_{эф} = 50$ ,  $q_u = 0,1$  в интервал значений  $\hat{\omega} = 1 \div 400 (1; 5; 10; 15; 19; 32; 60; 80; 100; 400)$ . В подразделе 4.4 (см. также табл. 4.3) было показано, что в результате вытеснения полта из проводника при больших значениях силовое воздействие локализовано только в тонком пристеночном слое. По этой причине, несмотря на то, что значение ротора силы с возрастанием частоты также возрастает, максимальный интегральный эффект и соответственно максимальные значения скорости движения расплава достигаются не при  $\hat{\omega} \rightarrow \infty$ , а существует явно выраженный максимум скорости по частоте. На рис. 7.1 показаны теоретические и экспериментальные зависимости относительной максимальной скорости расплава от частоты  $\hat{\omega}$ . Расчёты конечно-разностным методом выявили значение частоты, при котором движение наиболее интенсивно -  $\hat{\omega}_m^T \approx 20$ , т.е.  $\delta \approx 0,2$ , (кривые 1 и 2), что хорошо согласуется со значением  $\hat{\omega}_m^g \approx 25$ , полученным в работе [97], на основе приближённых оценок передачи механической энергии замкнутому потоку металла. Однако, оба этих результата заметно отличаются от имеющихся экспериментальных данных, приведённых в работе [3], где скорость движения для устройства с параметрами  $h_m/h_u = 0,35$  и  $h_m/2r_o = 1,38$ , имеет максимум при  $\hat{\omega} \approx 75$ . Эти отличия объясняются в основном двумя причинами:

1) Недостаточное количество экспериментальных точек вблизи максимума скорости, что не позволяет локализовать этот максимум

с необходимой точностью (рис. 7.8).

2) Эксперимент проведён на установке, геометрия которой существенно отличается от расчётной модели.

Характерно, что аналогично как в расчётах однофазных устройств и в многофазном устройстве по данным работы [35] максимальная интенсивность течения достигается при небольших значениях частоты  $\hat{\omega}_m \approx 10$  (рис. 7.II). В работах [19,35] расчёты проводились на основе модели (рис. 2.Iв) с бесконечно длинным цилиндром, заполненным металлом в "идеальном" бегущем магнитном поле (в работе [35] рассматривается длинноволновой предел). Таким образом, несмотря на разнообразие моделей и методов, применённых для определения  $\hat{\omega}_m$ , значения этого параметра находятся в интервале  $10 < \hat{\omega}_m < 75$ .

Изменение значения частоты  $\hat{\omega}$  влияет не только на абсолютные значения, а также на форму распределений скорости. При возрастании  $\hat{\omega}$  от 1 до 400:

1) Максимум распределения  $v_z = v_z(z)$  на оси симметрии перемещается на 0,2 (от  $z_{m1} = 1$  до  $z_{m2} = 1,4$ ) в сторону торцов проводящей области, что обуславливает отличия скорости в торцевых зонах, достигающие при  $z = 2,4$  двух раз. Отмеченный сдвиг вызван соответствующим перемещением максимума ротора силы (см. подраздел 4.4 и табл. 4.3).

2) Максимум пристеночного потока в распределении  $v_z = v_z(r)$  возрастает и смещается в сторону боковой стенки примерно на 0,1 и поверхность  $r = r_p$ , разделяющая противоположенные потоки - на 0,1 (рис. 7.I2), что вызвано сужением зоны приложения ЭМ сил. Если при  $\hat{\omega} = 1$ , относительная толщина поверхностного слоя  $\delta \rightarrow 1$ , то при  $\hat{\omega} = 40$ ;  $\delta = 0,05$ .

Распределения  $v_z = v_z(r)$  сопоставлялось также с полученными

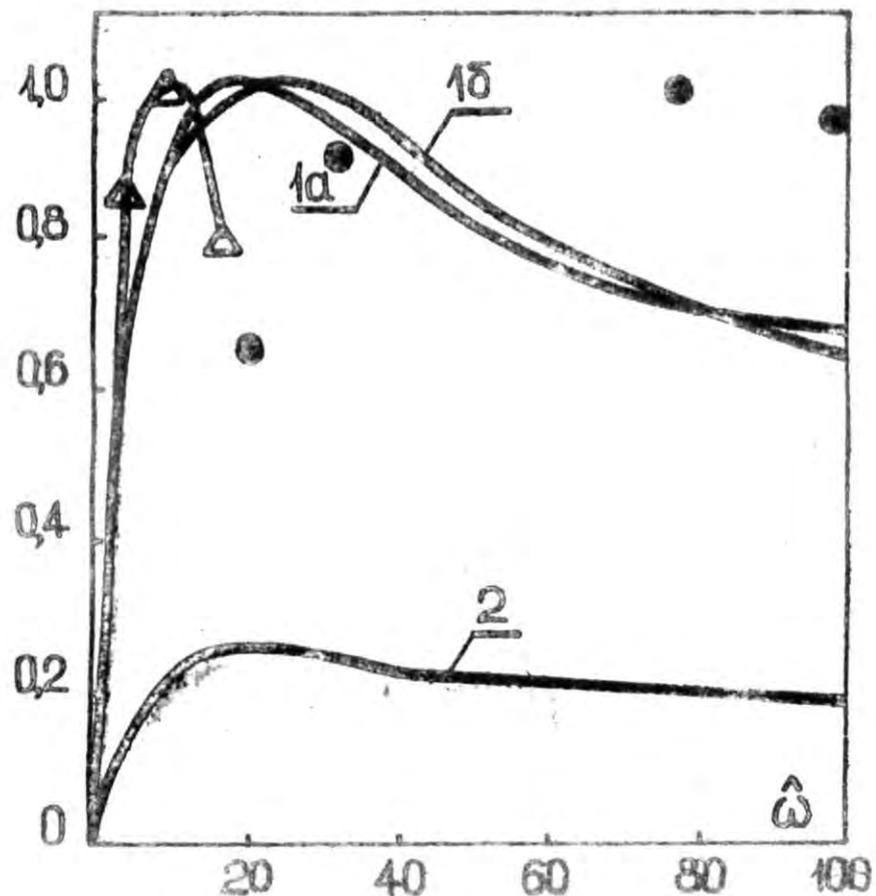


Рис. 7.11. Зависимость максимального значения скорости от безразмерной частоты:

1)  $\frac{V_0}{V_0|\hat{\omega}=20}$  - расчёт конечно-разностным методом.

2)  $V_0/V^*$ , где  $V^* = \sqrt{g/M_0}$  - расчёт конечно-разностным методом.

• -  $\frac{V_0}{V_0|\hat{\omega}=75}$  - эксперимент [3].

Δ - расчёт [35] для многофазного устройства в длинноволновом пределе.

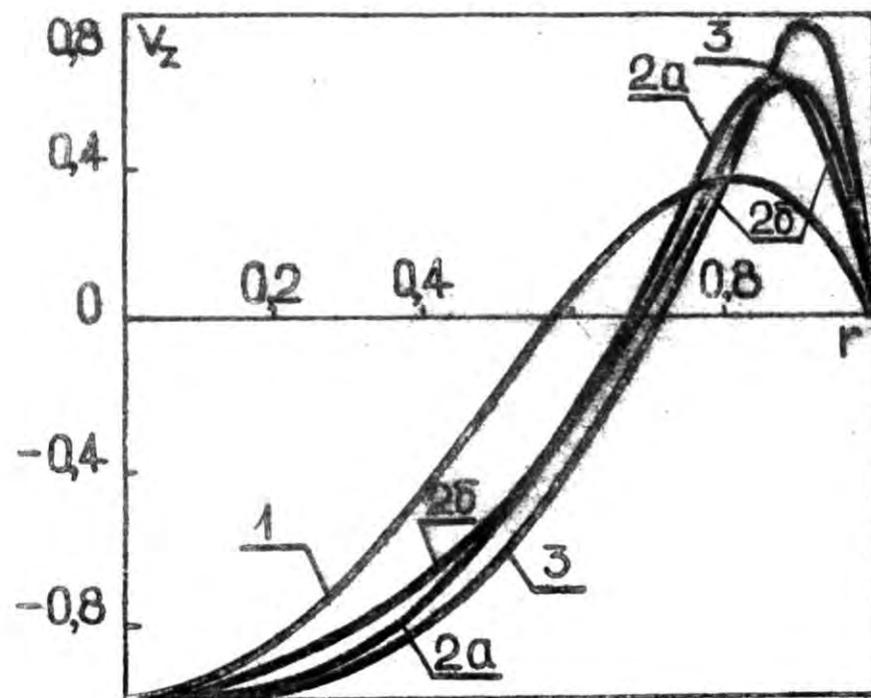


Рис. 7.12. Распределение аксиальной составляющей скорости по радиусу многофазного устройства при различных значениях безразмерной частоты:

1)  $\hat{\omega} = 1$  - из работы [35].

2) а)  $\hat{\omega} = 16$  - конечно-разностное решение линеаризованного уравнения движения.

б)  $\hat{\omega} = 16$  - из работы [35].

3)  $\hat{\omega} = 200$  - конечно-разностное решение нелинейного уравнения движения.

в работах [19,35] (рис. 7.12). Как и следовало ожидать, полученные по упрощённой методике распределения  $v_z = v_z(r)$ , хорошо согласуются с численными, полученными на основе линеаризованного уравнения движения для средней зоны многофазного индуктора (рис. 7.12). Счёт по линейным уравнениям для сопоставления использовался по той причине, что в работах [19,35] уравнения движения линейны и значение числа Рейнольдса на распределение скорости не влияет. Кроме того распределениям  $v_z = v_z(r)$ , полученным в работе [35] характерны те же тенденции, которые наблюдаются в численном расчёте при возрастании  $\hat{\omega}$ : поверхность раздела  $r = r_p$  сдвигается к боковой стенке и возрастает значение отношения  $\frac{v_{zc}}{v_{zc}}$  (рис. 7.9). Так как в упрощённых методиках предлагается бесконечность цилиндрической области в аксиальном направлении и, следовательно,  $v_r \equiv 0$ , то они, в отличие от численных методик, предложенных в настоящей работе, не позволяют описывать течение в торцевых зонах многофазных устройств (для однофазных методики [19,35] вообще не применимы).

#### 7.4. Влияние геометрии устройства на течение

Из числа геометрических параметров цилиндрического МГД-устройства (рис. 3.16), в данном подразделе внимание обращено на две характеристики, управляющие движением жидкого металла:

- 1) Соотношение высот металла и однофазного индуктора  $h_m/h_u$ .
- 2) Несимметричность расположения индуктора относительно средней плоскости цилиндрического объёма, заполненного металлом -  $(l_b - l_m)/h_m$ .

Изучение влияния на течение таких факторов, как толщина обмотки секции индуктора  $q_u$ , ширина зазора между индукторами и металлом  $\alpha$ , расположение магнитного экрана  $r$ , показало, что это влияние имеет второстепенный характер:

1) Интервал изменения  $q_u, \alpha, r_2$ , в реальных устройствах ограничен ( $q_u = 0.05 \pm 0.5$ ;  $\alpha < 0.5$ ;  $r_2 < 1.6$ ) и увеличение этих параметров приводит к нежелательному ослаблению ЭМ связи в системе "металл-индуктор".

2) Изменение параметров  $q_u, \alpha, r_2$ , как правило влияет только на интенсивность циркуляции - качественные изменения в картине течения не происходят, но их необходимо учитывать при расчёте конкретных ИГД-устройств (см. подраздел 7.5).

Для анализа влияния параметра  $h_m/h_u$  на течение в устройстве с симметрично относительно средней плоскости расплава расположенным индуктором в таблице 7.3 приведены четыре группы результатов:

- 1) Высота металла вдвое больше высоты индуктора -  $h_m/h_u \approx 2$
- 2) Высота металла совпадает с высотой индуктора -  $h_m = h_u$
- 3) Изменение высоты металла при фиксированном среднем значении высоты индуктора ( $h_u = 1.6$ ).
- 4) Изменение высоты металла при фиксированной малой высоте индуктора ( $h_u = 0.6$ ).

Все расчёты указывают на типичный для устройств, где  $h_u \leq h_m$  двухконтурный характер циркуляции. Однако в каждом из случаев тенденции изменения поля скоростей различаются. Для их анализа далее рассматриваются перемещения характерных точек и изменения характерных значений скорости. На основе численных экспериментов, небольшая часть результатов которых представлена в таблице 7.3, можно указать на следующие свойства и тенденции изменения течений:

- 1) При фиксированном значении соотношения  $h_m/h_u$  независимо от высоты индуктора ( $h_u \leq h_m$ ), зона, где аксиальный поток наиболее интенсивен, также зафиксирована, например если  $h_u \approx h_m$ , то  $z_m/h_u = 0.5 \pm 0.6$ ; но если  $h_u = 0.5 h_m$ , то  $z_m/h_u = 0.3 \pm 0.4$ . Характерно, что зона максимума  $v_z$  по высоте не совпадает с зоной, где наи-

Таблица 7.3

Влияние высот индуктора и металла на течение

№ пп.	$h_M$	$h_U$	$\frac{h_M}{h_U}$	$\frac{z_{3M}}{h_U}$	$\frac{z_M}{h_U}$	$v_{rM}$	$\frac{v_{rg}}{v_{rU}}$	$\frac{z_{gM}}{h_M}$	$\frac{v_{rM}}{v_{zM}}$	Примечания
1.1	5,4	2,8	1,93	0,39	0,5	0,28	1,19	0,46	0,28	Во всех случаях: $\hat{\omega} = 32$ ; $Re_{эф} = 50$ ; $q_U = 0,1$ ; $\alpha = 0,2$ ; $r_g = 1,4$
1.2	3,9	1,7	2,3	0,38	0,56	0,4	0,85	0,45	0,40	
1.3	3,2	1,6	2,0	0,375	0,56	0,58	1,15	0,44	0,58	
1.4	2,8	1,4	2,0	0,36	0,57	0,62	1,02	0,43	0,62	
2.1	3,3	3,3	1,0	0,5	0,38	1,0	3,8	0,32	1,94	$z_M$ - координата максимума аксиальной составляющей силы;
2.2	2,8	2,8	1,0	0,5	0,39	1,0	2,45	0,43	1,36	$z_{gM}$ - координата максимума радиальной составляющей скорости в донном потоке;
2.3	1,7	1,7	1,0	0,5	0,294	1,0	2,85	0,44	2,0	$v_{rM}$ - максимальное значение радиальной составляющей скорости в поверхностной зоне металла;
2.4	1,6	1,6	1,0	0,5	0,31	1,0	1,69	0,44	1,8	
3.1	4,0	1,6	2,5	0,375	0,625	0,36	0,78	0,45	0,38	$v_{rg}, v_{rU}$ - максимальные значения в донном и в центральном потоках;
3.2	3,2	1,6	2,0	0,375	0,56	0,58	1,15	0,44	0,58	
3.3	2,4	1,6	1,5	0,375	0,435	1,0	1,45	0,425	1,01	
3.4	1,6	1,6	1,0	0,5	0,31	1,0	1,69	0,44	1,8	
4.1	4,0	0,8	5,0	0,4	0,9	0,08	0,375	0,275	0,51	$v_{zM}, v_{zM}$ - максимальные значения радиальной и осевой скорости.
4.2	2,8	0,8	3,5	0,44	0,89	0,61	0,82	0,43	0,56	
4.3	2,0	0,8	2,5	0,42	0,7	1,0	1,05	0,4	4,12	

большие значения принимает ротор силы. Это обусловлено тем, что в случае короткого индуктора  $h_n/h_u > 1,5$  наличием торцевых зон, где электромагнитное воздействие незначительно, обеспечиваются условия для смещения центра вихря в сторону торцов  $z_{cm}/z_n < 1$ . В случае  $h_n/h_u \approx 1$ , когда такая зона отсутствует, центр вихря и место максимума аксиальной составляющей скорости смещаются вглубь цилиндрической области ( $z_{cm}/z_n > 1$ ). Дальнейшее увеличение значения  $h_n/h_u$  приводит к потере устойчивости двухконтурной циркуляции и образованию четырёхконтурного течения.

2) При фиксированном значении соотношения  $h_n/h_u$  с уменьшением высоты индуктора движение в торцевых зонах становится более интенсивным. На основе представления о квазитвёрдом вращении диска вокруг неподвижной оси принято считать, что созданы нормальные условия развития вихря, если высота зоны, заполненной вихрем не меньше его радиального размера. Таким образом, с уменьшением  $h_u$  граница области, необходимой для нормального развития вихря приближается к торцам цилиндрической области. Возрастание интенсивности циркуляции в этих зонах особенно выражается в возрастании скорости движения на свободной поверхности, где отсутствует трение, препятствующее приближению максимума скорости к поверхности.

3) В широком диапазоне изменения параметров  $h_n$  и  $h_u$  относительное значение координаты максимума радиальной составляющей скорости в данном потоке остаётся неизменной  $z_{gm}/h_n = 0,4 \pm 0,45$ . Только в случае экстремальных высот (например,  $h_n/h_u = 5$ ) происходит перемещение этого максимума вглубь металла.

4) Так как при  $h_n/h_u \approx 2$  созданы примерно одинаковые гидродинамические условия для течений в плоскости симметрии и вблизи свободной поверхности, то значение соотношения соответствующих максимальных значений скорости  $v_{rn}/v_{nz} \approx 1$ . Соотношение  $v_{rg}/v_{rz}$  также

близко к единице. При  $h_m \approx h_u$  условия крайне неблагоприятны в торцевых зонах, где  $\varepsilon = \varepsilon_p$  принимает максимальные значения. Центр вихря также приближён к торцу области, т.е. для поверхностного и донного потоков остаётся только узкая зона. Поэтому радиальная составляющая скорости здесь достигает значений несколько раз превышающих максимальное значение  $v_r$  в центральном потоке (вблизи плоскости симметрии).

5) При  $h_m \approx h_u$  максимальное значение скорости достигается на свободной поверхности расплава и соотношение максимальных значений составляющих скорости  $v_{rM}/v_{zM} > 1$ . Если  $h_m/h_u > h_{кр} > 1$ , то максимальное значение скорости достигается внутри области (вблизи оси симметрии или пристеночном потоке) и  $v_{rM}/v_{zM} < 1$ . Конкретное значение  $h_{кр}$  зависит в основном от высоты индуктора, а также вязкости потока, влияние которой обсуждается в подразделе 7.2. При  $h_m \approx h_u$  соотношение  $v_{rM}/v_{zM}$  максимально, увеличение  $h_u/h_m$  приводит к уменьшению упомянутого соотношения, а также к общему снижению интенсивности циркуляции металла.

6) С возрастанием высоты  $h_m$  ( $h_u = \text{const}$ ) центр вихря смещается в сторону торцов цилиндрической области, однако, следует ожидать, что при  $h_m \rightarrow \infty$ , координата максимума аксиальной составляющей скорости  $z_m$  будет стремиться к конечному пределу. Это проявляется уже при  $h_m/h_u = 5$  (см. табл. 7.3) — отдалённые от плоскости симметрии слои жидкости вихрем не увлекаются и дальнейшее возрастание соотношения  $h_m/h_u$  на равновесие вихря практически не влияет.

7) С возрастанием  $h_m/h_u$  существенно снижается интенсивность циркуляции вблизи свободной поверхности и дна цилиндрического объёма. Снижение интенсивности более выражено при малых высотах индуктора ( $h_u < 1$ ), когда вихрь скорости в зоне плоскости симмет-

рии сильно деформируется. Однако интенсивность движения при  $z=0$  может оставаться большой.

Далее на примере устройства с параметрами  $h_n = 3,5$  (3,1);  $r_u = 1,2$ ;  $\hat{\omega} = 250$ ;  $r_0 = 0,95$ ;  $I = 2,7 \cdot 10^5$  рассмотрим некоторые аспекты влияния несимметричного вылета индуктора относительно металла (4.72), (4.73) на течение (рис. 7.13-7.15):

1) При высоте металла ( $h_n > 2$ ), обеспечивающей "нормальные" условия для развития вихрей двухконтурной циркуляции, влияние вылета ( $l_b \leq 0,5$ ) сказывается только в соответствующей половине цилиндрического объема. Движение в противоположной половине практически не возмущается (кривые 1,4, 2,5 и 2,3 рис. 7.14-7.15), что является отчасти следствием независимости распределений силы в торцевых зонах длинного индуктора ( $h_n > 2$ ). Таким образом основные характеристики течений в устройствах с несимметрично относительно средней плоскости металла расположенным индуктором близки к характеристикам течений в соответствующих зонах симметричного устройства.

2) В результате возрастания вылета индуктора зона, занимаемая соответствующим контуром циркуляции сужается. При  $l_b = 0,5$  верхний контур циркуляции занимает только узкую полосу  $3,1 < z < 3,5$  вблизи свободной поверхности металла (кривые 1,4) и дальнейшее увеличение вылета ( $2l_b > h_n$ ) приводит к исчезновению этого контура циркуляции. В отличие от устройства с симметрично расположенным индуктором, где плоскость раздела контуров практически совпадает с плоскостью симметрии индуктора, в случае большого несимметричного вылета индуктора поверхность, разделяющая контуры циркуляции значительно сдвинута вверх относительно плоскости симметрии индуктора  $z = 2,15$ . Уменьшение и исчезновение контура циркуляции обусловлено изменением характера вихревых сил - знак ро-

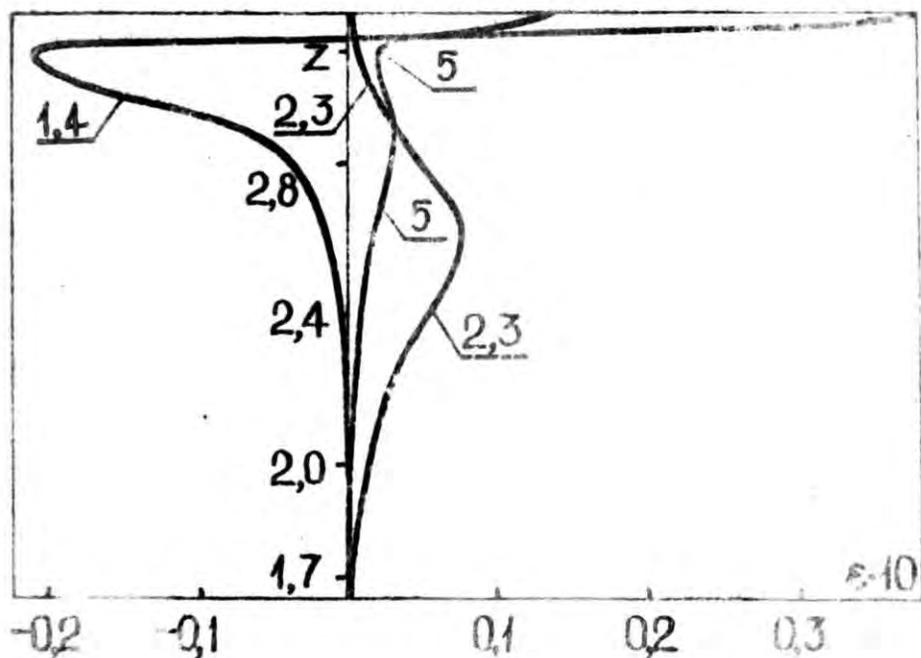


рис. 7.13. Распределения ротора плотности средней электромагнитной силы в верхней половине проводящей области при  $r=0,3$ :

- 1)  $\langle v \rangle = 0,5$ ;  $\langle n \rangle = 0$ .
- 2)  $\langle v \rangle = -0,5$ ;  $\langle n \rangle = 0$ .
- 3)  $\langle v \rangle = -0,5$ ;  $\langle n \rangle = 0,5$ .
- 4)  $\langle v \rangle = 0,5$ ;  $\langle n \rangle = 0,5$ .
- 5)  $\langle v \rangle = 0$ ;  $\langle n \rangle = 0$ .
- 6)  $\langle v \rangle = -0,5$ ;  $\langle n \rangle = 0,1$ .

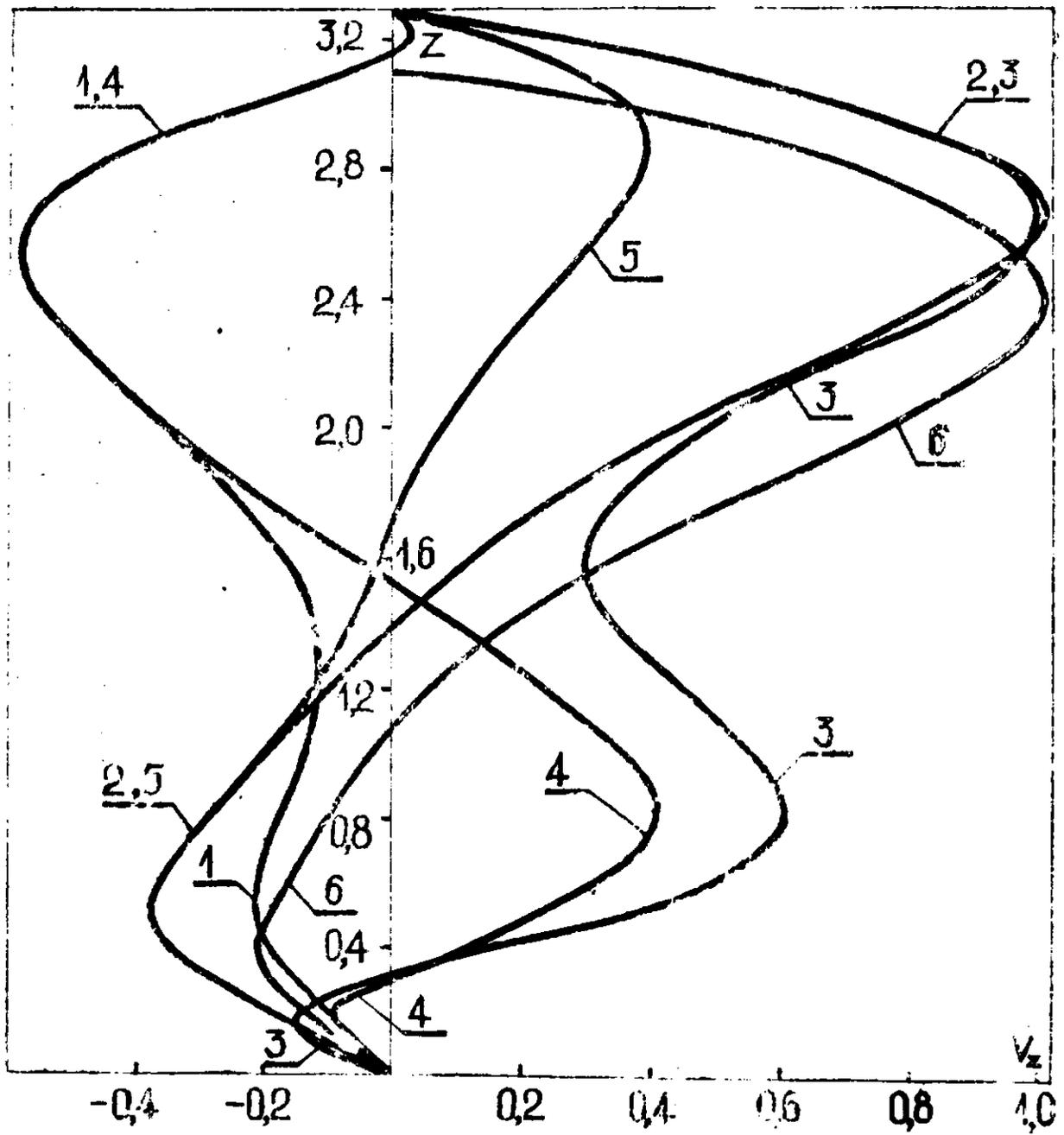


Рис. 7.14. Распределение аксиальной составляющей скорости по высоте  $z$  плава на оси симметрии (нумерация кривых как на рис. 7.13).

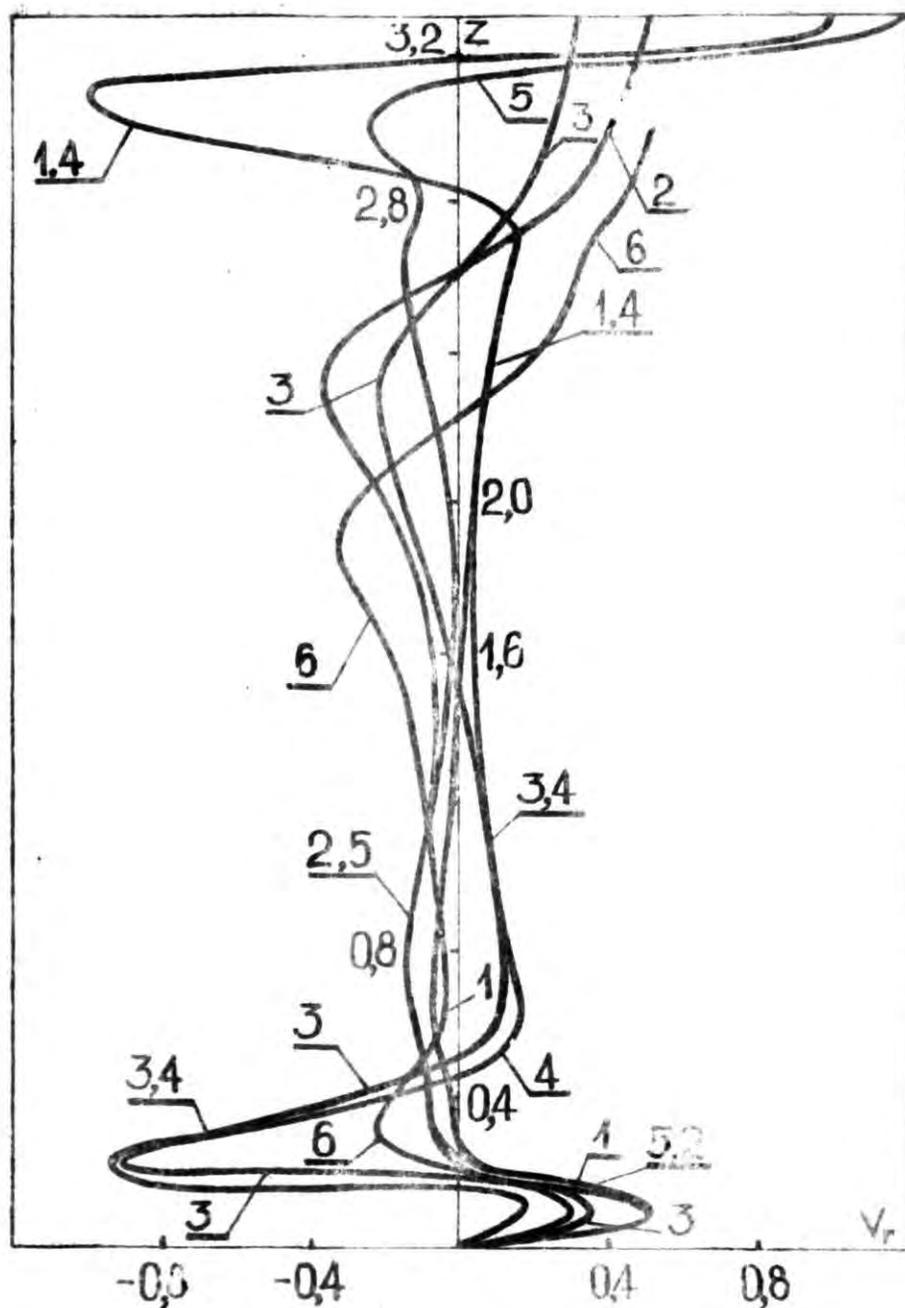


Рис. 7.15. Распределение радиальной составляющей скорости по высоте металла в сечении  $r = const$ , где  $V_r$  принимает максимальное значение (нумерация кривых как на рис. 7.13.).

тора силы меняется вблизи торца проводящей области или меняется вообще (рис. 7.13). ЭМ-сила на торце проводника принимает наибольшее значение, примерно в 5 раз превышающее значение на боковой поверхности металла в плоскости симметрии. Кроме того, в торцевой зоне составляющие силы  $f_r$  и  $f_z$  закручивают жидкость в противоположных направлениях, но определяющее влияние при этом имеет аксиальная составляющая и жидкость закручивается по часовой стрелке. При  $|z| < 3.0$  движение практически определяется радиальной составляющей силы, которая закручивает жидкость в противоположном направлении.

3) Если выполняется одно из условий:

а)  $l_b \leq 0$  ;  $l_n \leq 0$  ,

б)  $l_b < b_u = h_u/2$  ;  $l_n < 0$  ,

в)  $l_n < b_u$  ;  $l_b < 0$  ,

то течение имеет двухконтурный характер. Если  $l_b > 0$  и  $l_n > 0$  , то течение имеет четырёхконтурный характер. Переход к одноконтурной циркуляции происходит при выполнении одного из условий:

а)  $l_b > b_u$  ;  $l_n < 0$  ,

б)  $l_n > b_u$  ;  $l_b < 0$  .

4) Если  $l_b \geq 0$  , то максимальное значение радиальной составляющей скорости на свободной поверхности больше максимального по объёму значения аксиальной составляющей скорости, и относительная интенсивность течения в торцевой зоне больше, чем при  $l_b < 0$  .

В отличие от имеющихся приближённых оценок интенсивности движения в цилиндрических МГД-устройствах [3 и др.], применение численных экспериментов позволяет определить количественные соотношения интенсивности в различных зонах потока, а также полностью раскрывает всю картину течения.

### 7.5. Примеры результатов расчёта конкретных ИГД-устройств

Из множества результатов, полученных с применением предложенных в настоящей работе методик, далее приводятся только отдельные примеры, представляющие различные классы устройств и указывающие на существующие проблемы, требующие дальнейших исследований.

Расчёты движения жидкого металла, проведённые для индукционных тигельных печей с ёмкостью от 21,5 до 60 т при различной конструкции (см. табл. 7.4) показали, что циркуляция металла во всех рассмотренных случаях имеет двухконтурный характер. Это обусловлено ограниченностью интервала изменения геометрических параметров печей. (Относительная высота индукторов меняется в следующих пределах:  $h_u/h_m = 0,68 + 1$ . Верхний вылет, за исключением устройства №4, имеет отрицательное значение и меняется в пределах 10-25% высоты металла. Среди рассмотренных устройств наиболее выделяется печь с ёмкостью 21,5 тонн, которая в отличие от остальных устройств имеет положительный нижний вылет и наименьшее значение безразмерной частоты, а также выделяется устройство №7 с нулевыми вылетами индуктора. Поэтому течение в этих печах наиболее отличается от течения в остальных (табл. 7.4).

Так как индукторы относительно средней плоскости металла сдвинуты менее, чем на 20% высоты индуктора и  $h_u < h_m$ , то конечность высоты металла мало сказывается на распределение ЭМ поля, концевой эффект, обусловленный металлом наиболее выражен для печи №7, где  $l_m > 0$ . Интенсивность циркуляции металла во всех случаях примерно одинакова  $v_0 = 2,0 + 2,5$  м/с и течение подчинено тем же закономерностям, которые отмечались в подразделах 7.1 и 7.4. Например, поверхность, где  $\psi = c$ , разделяющая контуры с противоположной циркуляцией металла, практически совпадает с плоско-

Таблица 7.4

Некоторые результаты расчётов индукционных тигельных печей с ёмкостью 21,5 - 60 тонн<sup>I</sup>

№ ПП	Ёмкость	$h_m$	$h_u$	$L_b$	$L_n$	$\hat{\omega}$	$r_0$ (м)	$I$ (А) (М)	$B_{zm}$ (Тл)	$B_{gm}$ (Тл)	$ f_{gm} $ (Н/М)	$Z_{em} - Z_m$ $Z_{nm} - Z_{ng}$	$\frac{V_{gm}}{V_{zm}}$	$\frac{V_{zg}}{V_{zm}}$	$\frac{V_{uz}}{V_{gm}}$	$Z_p$
1	60 т	3,3	2,3	-0,8	-0,2	250	0,95	$2,67 \cdot 10^5$	0,22	0,026	$8,8 \cdot 10^4$	1,0; 0,5	0,53	0,74	0,7	1,35
2	60 т с "идеаль- ными" коль- цами	3,3	2,3	-0,8	-0,2	250	0,95	$2,67 \cdot 10^5$	0,21	0,033	$8,8 \cdot 10^4$	0,9; 0,5	0,65	0,88	0,6	1,35
3	60 т с отрица- тельными вылетами	3,3	-2,3	-0,5	-0,5	250	0,95	$2,67 \cdot 10^5$	0,21	0,024	$8,8 \cdot 10^4$	0,6; 0,7	0,69	0,95	0,58	1,65
4	60 т с нулевы- ми выле- тами	3,3	3,3	0	0	250	0,95	$2,67 \cdot 10^5$	0,22	0,032	$8,9 \cdot 10^4$	0,5; 0,6	1,65	0,73	0,147	1,65
5	50 т	2,8	1,9	-0,7	-0,2	250	0,95	$2,62 \cdot 10^5$	0,21	0,025	$7,3 \cdot 10^4$	0,8; 0,5	0,54	0,74	0,75	1,15
6	31 т	2,8	2,2	-0,5	-0,1	179	0,805	$2,0 \cdot 10^5$	0,18	0,023	$7,0 \cdot 10^4$	0,6; 0,4	0,69	0,61	0,55	1,15
7	21,5 т	3,1	2,6	-0,6	0,1	133	0,695	$1,87 \cdot 10^5$	0,18	0,031	$7,9 \cdot 10^4$	0,7; 0,3	0,58	0,42	0,57	1,1

<sup>I</sup> Во всех случаях:  $r_1 = 1,2$  ;  $r_2 = 1,5$  ;  $\omega = 314$

стью симметрии индуктора  $z = z_{cu}$ . При  $z_{cu} \leq z_{cm}$  движение в нижнем контуре менее интенсивно, чем в верхнем, и с возрастанием сдвига индуктора вниз движение в нижнем контуре всё больше и больше подавляется (печь №7). Если верхний конец однофазного индуктора достаточно отдалён от зеркала металла, то имеются благоприятные условия для свободного развития верхнего вихря и расположение центра вихря "жёстко" связано с расположением верхнего конца индуктора. Центр вихря во всех случаях, кроме №4, расположен на расстоянии 0,2 ниже верхнего конца индуктора. Если при  $l_b < 0$  максимальное значение скорости достигается в аксиальном пристеночном потоке, то при  $l_b \geq 0$  максимум достигается в радиальном потоке на свободной поверхности металла (см. табл. 7.4). Двукратное уменьшение частоты (от 250 до 133) на структуру течения влияет незначительно.

Для промышленных установок магнитное число Рейнольдса (2.7) принимает значение порядка единицы. Учёт обратного воздействия течения на ЭМ поле показал, что отличия этих результатов от полученных в безиндукционном приближении несущественны - максимальные значения скорости течения практически совпадают и характер течения не меняется. Наибольшие различия имеются в пристеночном потоке, но и там отличия максимальных значений скорости не превышает 5% при  $Re_m = 2-3$ . Таким образом, если велико значение  $\hat{\omega}$ , определяющее глубину проникновения ЭМ поля в проводник, то соблюдение условия  $Re_m \ll 1$  не обязательно для правомерности применения безиндукционного приближения [57]. При  $v_0/\omega r_0 \ll 1$  безиндукционное приближение применимо, независимо от значения  $Re_m$ . Поэтому в расчётах силовых и скоростных полей для промышленных печей ( $\hat{\omega} \gg 1$ ), оправдано использование безиндукционного приближения.

На примере печей 60 и 50 тонн исследовалось также влияние

различных элементов конструкции ИИП (рис.3.1а) на течение. Оказалось, что присутствие коротко замкнутых проводящих колец на небольшом расстоянии от концов индуктора влияет на течение. Влияние максимально, если кольца являются "идеально" проводящими ( $\sigma \rightarrow \infty$ ) и расстояние между индуктором и кольцом стремится к нулю (см. табл.7.4). Несмотря на совпадение максимальных значений поля и сил, распределения этих величин в торцевых зонах отличаются, а отличия максимальных значений ротора силы в устройствах с "идеальными" кольцами и без них достигают двух раз. Если нижнее кольцо находится на уровне дна тигля, то его влияние на течение выражено сильнее, чем влияние верхнего кольца, более отдалённого от торца цилиндрической области, заполненной металлом. В результате влияния "идеальных" колец на 25% увеличивается максимальное значение скорости движения в донном потоке, возрастает также абсолютное значение скорости движения.

Так как математическая модель, описывающая процессы в расплаве ИИП имеет приближённый характер (рассматривается осреднённое турбулентное течение с введением коэффициента турбулентной вязкости) и метод счёта (конечно-разностный метод на сетке с шагом  $h=q=0.05$ ) также имеет определённую погрешность, которая по имеющимся данным может достигать 20%, то результаты расчёта имеют ориентировочный характер, но тем не менее правильно передают тенденции и направления изменений в течении. Кроме того в настоящее время экспериментальные исследования структуры течений в промышленных установках практически не возможны. Таким образом, при создании базы для усовершенствования теоретических моделей, необходимо пользоваться сопоставлением экспериментальных и теоретических результатов в модельных установках (см. подраздел 7.2) [61], [62]. Однако и здесь при рассмотрении относительно длинных

систем с положительным вылетом индуктора ( $l_s > 0; l_n > 0$ ) возникают затруднения [93]. Экспериментально установлено, что в таких системах движение устойчиво вблизи торцов цилиндрической области заполненной металлом (рис. 7.16), т.е. в зонах максимума ротора ЭМ силы, причём в этих зонах движение качественно такое же как в системах с отрицательным вылетом индуктора. В центральной части области расчёты показывают наличие "паразитных" вихревых потоков с противоположным направлением циркуляции. По экспериментальным данным в пристеночной зоне  $r > r_p$  также существуют "паразитные" вихри (рис. 7.16), но осреднённое движение в зоне их образования неустойчиво - происходят спонтанные изменения направления движения в зоне, где  $(\text{rot } \vec{f})_r \approx 0$ . "Паразитные" вихри только в отдельных случаях проникают в приосевую зону, однако поток в этой зоне они существенно деформируют, о чём свидетельствует разброс экспериментальных точек. Учёт ежеминутного внезапного перебрасывания направления движения в рамках модели стационарного осреднённого движения не возможен, но зоны неустойчивости и условия их возникновения с помощью используемого стационарного подхода в численном эксперименте можно эффективно исследовать. Это связано с тем, что изменения в расчётах значения эффективного числа Рейнольдса (см. подраздел 7.2), а также изменения распределения  $Re_{eff}$  (рис. 7.8-7.10) приводят к существенным перестроениям течения именно в тех зонах, где осреднённое течение является квазиустойчивым. Неустойчивость может возникать также в торцевых зонах систем с большой относительной высотой металла  $h_n/h_u > 2$ , но относительная интенсивность движения в этих зонах согласно экспериментальным и расчётным данным мала.

В многофазных устройствах распределения ЭМ поля и силы часто имеют сложный пульсирующий характер, и аналитическое их опи-

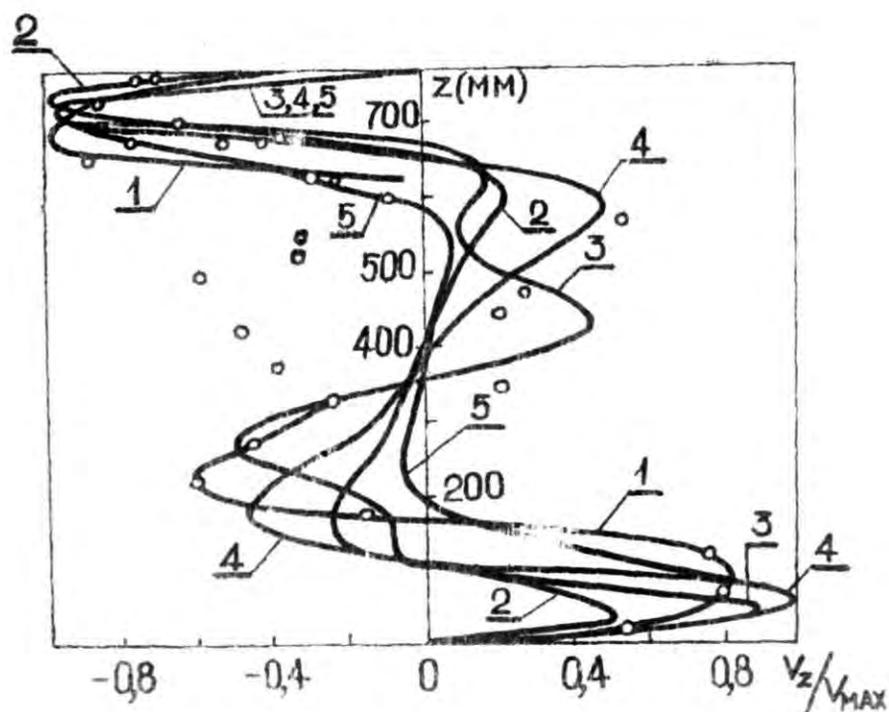


Рис. 7.16. Распределение аксиальной составляющей скорости по высоте модели IIII в пристеночной зоне ( $h_m = 1,9$ ;  $h_u = 2,5$ ;  $\delta = 0,3$ ;  $\mu = 0,3$ ):  
 1) Эксперимент (o - экспериментальные точки).  
 2) Расчёт при  $Re_{эф} = 5$  с условием свободного скольжения на поверхности  $Z = Z_{вм}$ .  
 3) Расчёт при  $Re_{эф} = 5$  с условием прилипания на поверхности  $Z = Z_{вм}$ .  
 4) то же, что и 3), но при  $Re_{эф} = 10^3$ .  
 5) переломное по объёму значение  $Re_{эф}$ .

ределение затруднено. Численное их определение является задачей эквивалентной определению ЭМ величин в однофазных устройствах. На рис. 4.10, 7.17 и 7.18 приведены распределения составляющих магнитной индукции, силы и скорости для моделей кристаллизатора с многофазными устройствами ЭМ перемешивания. Так как в основной части устройства вихревая ЭМ сила достаточно велика, то осреднённое течение имеет только одно устойчивое состояние, и численные результаты удовлетворительно согласуются с экспериментальными даже при  $Re_{эф} = const$  (рис. 7.17). Из-за гораздо большей разновидности многофазных устройств по сравнению с однофазными задача выявления общих зависимостей движения в них от геометрии системы "индуктор-металл" требует большого объёма вычислительных работ и может быть осуществлена только после их завершения.

Предложенные в настоящей работе численные методики применимы также для расчёта характеристик цилиндрических МГД-преобразователей (датчиков) расхода, уровня, ЭМ свойств среды, её геометрических размеров [98]. Учёт факторов, влияющих на коэффициент преобразования и основную приведённую погрешность, требует весьма сложной математической модели, поэтому не может быть осуществлён аналитически. Приведённая на рис. 7.19 зависимость ЭДС индукторной катушки от радиуса струи жидкого металла получена при учёте конечных размеров рабочего тела и катушек преобразователя.

Следует отметить, что возможности применения предложенных в настоящей работе комплексных методик расчёта МГД-величин в аксиально-симметричных устройствах не исчерпываются приведёнными в настоящем разделе примерами для промышленных и лабораторных индукционных плавильных печей, кристаллизаторов, устройств ЭМ перемешивания и МГД-преобразователей. Методики были опробованы также для расчёта движения в ванне при электронно-лучевой плавке и расчётов устройств ЭМ нагрева и могут применяться в практических исследованиях процессов в этих, а также других классах устройств.

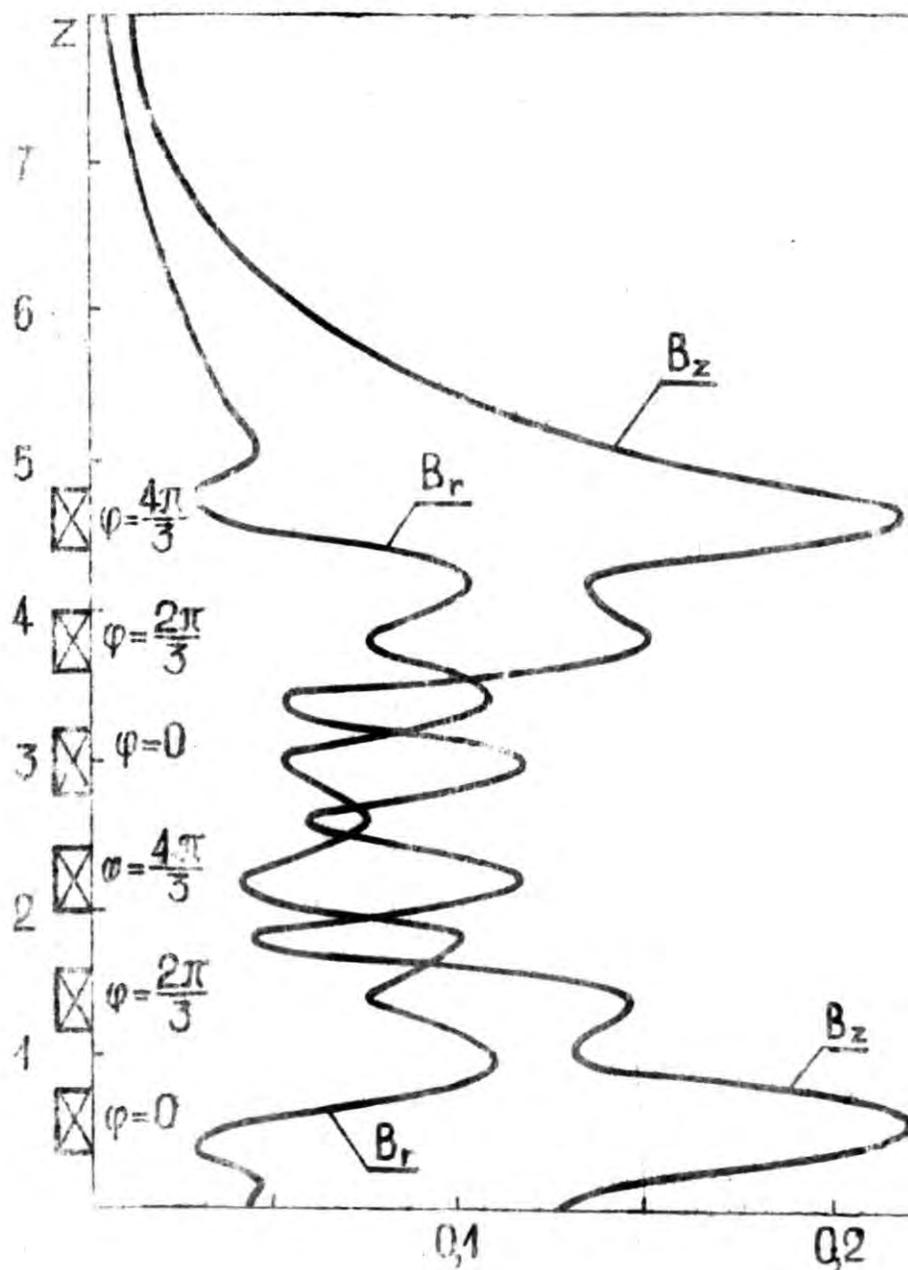


Рис. 7.17 Распределения составляющих индукции в модели кристаллизатора с многофазным индуктором при  $r=1$  ( $h_M=9$ ).

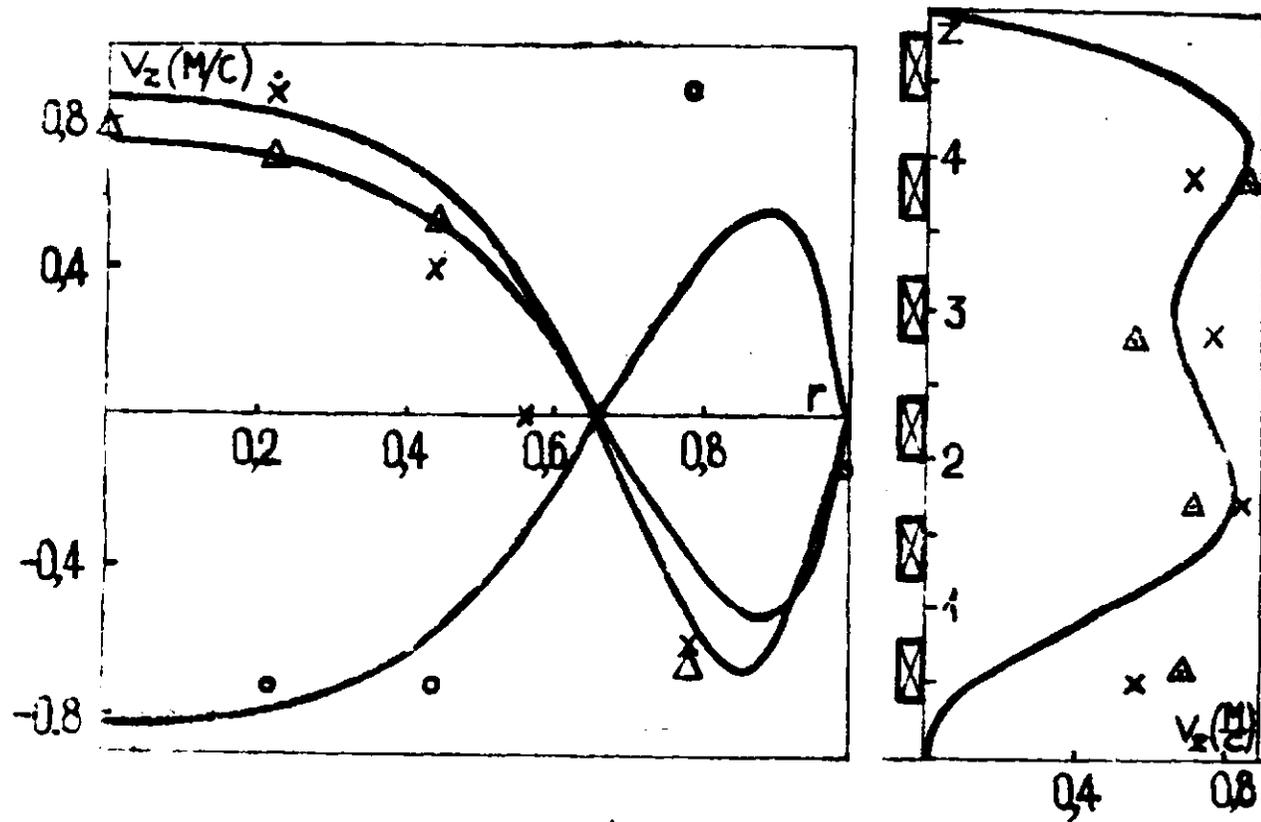


Рис. 7.18. Сопоставление экспериментальных и расчётных распределений скорости в модели кристаллизатора с многофазным индуктором ( $h_m=5$ ):  
 а)  $x - z=3,9$ ;  $o - z=1,7$ ;  $\Delta$  - усреднённое при  $z=3,9$ ; — - расчёты при  $Re_{\text{эф}}=10^4$ ,  
 б)  $x - r=0,22$ ;  $\Delta - r=0$ ; — - расчёт при  $Re_{\text{эф}}=10^4$ .

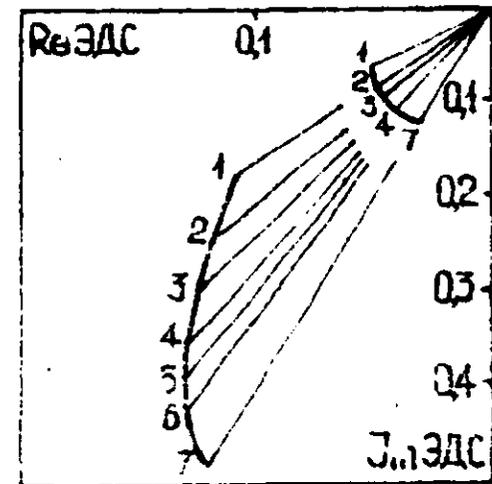


Рис. 7.19. Зависимость ЭДС индикаторной катушки от радиуса струи жидкого металла при различных значениях синусоидального поля возбуждения ( $r_k=1, 2$ ;  $r_3=1, 8$ ;  $h_u=0, 3$ ;  $\omega=10$ ):  
 1)  $r=1, 0$ ; 2)  $r=0, 9$ ; 3)  $r=0, 8$ .  
 4)  $r=0, 7$ ; 5)  $r=0, 6$ ; 6)  $r=0, 5$ .  
 7)  $r=0$ .

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На Всемирном Электротехническом конгрессе, проходившем в Москве летом 1977 года снова была подчеркнута роль применяемых электромагнитных методов в металлургии и машиностроении. В частности отмечалась [99] актуальность

а) исследований движения жидкого металла и способов управления общей интенсивностью и структурой течений в металлургических установках, проводимых в СССР, ФРГ, США и др. странах,

б) исследований влияния циркуляции металла на структуру и свойства выплавленного металла, а также анализа возможностей интенсификации металлургических процессов с использованием ЭМ методов воздействия.

В настоящей работе, которая также посвящена решению этих актуальных проблем, использовался комплексный подход для исследования электромагнитных и гидродинамических процессов в индукционных МГД-устройствах с замкнутым аксиально-симметричным течением электропроводящей жидкости. Общностью подхода обеспечиваются возможности применения предлагаемых методик для анализа ЭМ полей и течений (как ламинарных, так осреднённых турбулентных) в широком классе устройств (плавильные печи, кристаллизаторы, ЭМ перемешиватели и др.), при различных значениях параметров этих устройств. Для практического осуществления единого подхода и доведения его до численной реализации в виде комплекса программ на ЭВМ сделано следующее:

1) На основе анализа предшествующих исследований (раздел 2) предложена такая физическая модель индукционного МГД-устройства (раздел 3), применение которой обеспечивает необходимую на прак-

тике точность результатов и возможность исследования различных МГД-объектов, связанных с конструкцией реальных устройств. Одновременно модель не является настолько сложной, чтобы отсутствовала возможность численной реализации соответствующей методики на расширяющихся в настоящее время ЭВМ. В отличие от ранее предложенных моделей:

1) подобласти устройства с различными значениями ЭМ и гидродинамических параметров (рис. 3.1) могут иметь произвольную осесимметричную форму и взаимное расположение,

2) учтено присутствие основных составных элементов конструкции реально существующих устройств,

3) для элементов устройства не используются абстракции бесконечно длинных областей и бесконечно тонких поверхностей,

4) для расчётов ламинарного и осреднённого турбулентного течения с введением коэффициента турбулентной вязкости не используется индукционное приближение, число  $Re_m$  может принимать значения  $Re_m < 10$ .

5) В результате применения полуэмпирической теории турбулентности в замкнутому МГД-потoku в переменном поле предложена формула для коэффициента турбулентной вязкости (5.24), позволяющая при соответствующих подобранных значениях эмпирических постоянных проводить расчёты осреднённых течений, результаты которых хорошо согласуются с экспериментальными (подраздел 7.2).

6) Предложена замкнутая система уравнений для расчёта осреднённого течения, содержащая уравнения для центральных моментов второго порядка и позволяющая проводить численные эксперименты по расчёту осреднённых скоростей и турбулентных напряжений (подраздел 8.3).

7) Разработан метод баланса (подраздел 5.4) для расчёта аб-

сопутных значений осреднённой скорости, а также для построения эмпирических формул для коэффициента турбулентной вязкости.

5) Разработан комплекс методик для расчёта ЭМ и гидродинамических характеристик предложенной модели МГД-устройства, при этом:

а) усовершенствована (разделы 4 и 6), по сравнению с ранее известной, конечно-разностная аппроксимация МГД уравнений в случае криволинейных границ подобластей модели (рис. 3.1),

б) для расчёта поля скоростей при произвольном постоянном значении числа Рейнольдса реализована схема баз аппроксимационной вязкости и проверена в интервале значений  $Re \leq 10^3$  (подраздел 6.1). Для расчётов при переменном по объёму значении числа Рейнольдса разработана и реализована также схема свободная от аппроксимационной вязкости, позволяющая учитывать все дополнительные члены в уравнении движения, возникающие из-за переменности числа Рейнольдса (подраздел 6.2),

в) разработаны практические численные методики для расчёта ЭМ величин на основе модели с бесконечной высотой проводящей цилиндрической области (подраздел 4.1),

г) на основе экспериментального сопоставления различных схем и методов расчёта, выявлены наиболее подходящие для практического использования в разных этапах решения рассматриваемых МГД-задач,

д) алгоритмы всех разработанных методик реализованы и оформлены в виде комплексов программ для ЭВМ 6т-415, БЭСМ-6 и ЕС-1022 на языке FORTRAN.

Для проверки разработанных методик и оценки использованных в них допущений проводилось сопоставление результатов расчёта при различных значениях параметров устройств с экспериментальными

ми [3,4,49,62,93,94] и результатами, полученными для упрощённых моделей, а также с использованием других аналитических и численных методов расчёта [3,6,11,12,19,28,30, 33,35,94,95]. Установлено качественное совпадение результатов, а также выявлены закономерные отличия, причиной которых являются:

1) Ограниченность допустимой области применения упрощённых моделей и методов для расчёта реальных устройств.

2) Использование в целях сопоставления тех или других допущений в предлагаемых методиках.

3) Ориентировочный характер использованных экспериментальных данных.

С помощью разработанных методик успешно были проведены расчёты (в общей сложности более 200 вариантов) для:

- 1) Модельных и лабораторных индукционных печей.
- 2) Промышленных плавильных печей с ёмкостью 20–60 тонн.
- 3) Устройств электромагнитного перемешивания.
- 4) Индукционных расходомеров.
- 5) Кристаллизаторов для непрерывной разливки металла.
- 6) Установок индукционного нагрева.

Необходимо отметить, что разработанные численные методики непосредственно применимы также для расчёта других аксиально-симметричных процессов (течение в каналах различной конфигурации, МГД-бланкет, течение в ванне электронно-лучевой плавки и др.). Существенные ограничения на геометрию и параметры устройств не налагаются ( $Re_{эф} \leq 10^7$ ;  $\mu \leq 10^6$ ).

Проведённые исследования показали, что

а) применение в расчётах эмпирических формул (5.24–5.27) для коэффициента турбулентной вязкости при учёте всех членов в уравнении движения позволяет одновременно получить распределения и

абсолютные значения скорости движения жидкого металла в индукционном МГД-устройстве, согласующиеся с экспериментом,

б) для расчёта распределения осреднённых скоростей могут применяться также другие полуэмпирические формулы, в том числе (5.16) и (5.21), но обязательным условием является учёт всех дополнительных членов в уравнении движения (3.21), возникающих из-за переменности по объёму значения числа  $Re_{эф}$ . Абсолютные значения скорости при этом определяются методом баланса,

в) при больших значениях числа Рейнольдса  $Re_{эф} > 10^4$  небольшие изменения параметров устройства, в том числе изменения геометрии и значения числа Рейнольдса, приводят к существенным перестроениям в потоке. Таким образом в расчёте проявляется неустойчивость ламинарного течения относительно малых возмущений,

г) численные методики расчёта осреднённых скоростей, предложенные в работах [32, 39, 62, 4, 95] по причинам, изложенным в разделах 2 и 7 дают результаты существенно отличающиеся от экспериментальных и не могут быть рекомендованы для количественных исследований,

д) характеристика МГД-течений на основе информации о распределении ЭМ силы или ротора силы, которая на практике часто применяется [3, 14, 33], в лучшем случае может дать только ориентировочные результаты,

е) в гидродинамических расчётах аксиально-симметричных МГД-устройств с замкнутым течением (как однофазных, так и многофазных) нельзя пренебрегать ни одной из составляющих ЭМ силы,

ж) несмотря на возрастание максимального значения плотности ЭМ силы при возрастании безразмерной частоты максимальная интенсивность движения достигается в области небольших частот ( $10 < \Omega < 60$ ),

з) в расчётах ЭМ величин для устройств с соотношением  $h_0 > h_{эф}$

(см. подраздел 4.4) допустимо использование упрощённой модели (рис. 2.16), где пренебрегается конечностью высоты металла, и соответственно упрощённой методики расчёта (подраздел 4.1),

г) интенсивность циркуляции в многофазном устройстве с индуктором "бегущего поля" существенно больше, чем в однофазном при одинаковой геометрии и интегральном токе,

к) применением индуктора "бегущего поля" или сдвигом однофазного индуктора относительно средней плоскости цилиндрической области, заполненной металлом, обеспечивается одноконтурность циркуляции, однако в случае однофазного индуктора возникают застойные зоны,

д) если при  $h_u/h_m > 1$  высота индуктора возрастает, то движение становится многоконтурным (более двух контуров) и общий уровень интенсивности движения снижается, но в торцевых зонах относительная интенсивность в отдельных случаях может расти.

Для практического использования рекомендуется:

1) В расчётах ЭМ поля сил, плотности тока, теплоделения и др. ЭМ величин применять конечно-разностную методику (подраздел 4.2), основанную на методе переменных направлений.

2) В расчётах ламинарного и осреднённого турбулентного течений применять схемы без аппроксимационной вязкости (подраздел 6.1), решение которых осуществляется методом релаксации.

3) Применять координатную зависимость для определения коэффициента турбулентной вязкости (5.24)-(5.27) и проводить вычисления с учётом всех возникающих в уравнении движения (3.21) из-за переменности  $Re_{eff}$  членов.

4) В качестве базисных в расчётах применять безразмерные уравнения для азимутальной составляющей комплексного потенциала  $A$  (3.23), азимутальной составляющей ротора скорости  $\omega$  (3.17) или

(3.19) и функции тока (3.20).

5) Применять для сопоставления численных и экспериментальных результатов предложенную в подразделах 7.2-7.4 систему характерных значений скорости и характерных точек потока.

6) Применять методики расчёта, основанные на вычислении ряда Фурье-Бесселя и несобственного интеграла (подраздел 2.1) для определения ЭМ величин в немногочисленных точках исследуемой области при  $h_m/h_u > h_{кр}$ .

7) Применять при реализации схем без аппроксимационной вязкости (раздел 6) вариант счёта, предусматривающий расширение сеточной области.

Комплекс разработанных программ внедрён для расчётов во ВНИИ Электротермического оборудования (г. Москва) и используется при проектировании индукционных плавильных печей и устройств электромагнитного перемешивания, а также для исследования МГД-процессов и металлургических установок. Однако практика выдвигает новые проблемы, требующие решения. Поэтому предложенные в настоящей работе методики необходимо считать только фиксацией этапа исследований. Необходима дальнейшая работа по их развитию и усовершенствованию. Основные направления этой работы представляются следующими:

1) Развитие предложенных численных методик для расчёта МГД-течений в областях, форма которых не является заранее заданной, а формируется и меняется под действием ЭМ сил и гидродинамических факторов. Это позволит проводить численные исследования процессов МГД-обжата и поддержания металла во взвешенном состоянии.

2) Создание на основе существующей модели и подхода методик для исследования процессов тепло- и массопереноса в комплексе с ЭМ и гидродинамическими явлениями.

3) Развитие использованных численных методов, в том числе, реализация метода конечных элементов для расчёта МГД-процессов, повышающего в случае криволинейной формы подобластей исследуемого устройства эффективность использования ЭВМ.

4) Разработка физически обоснованных моделей и методов для исследования структуры турбулентных МГД-потокос в переменном по объёму и во времени ЭМ поле.

Решение поставленных задач является делом будущего.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ВАЙНБЕРГ А.И. Индукционные плавильные печи. М., "Энергия", 1967, 254 с.
2. БРОКМАЙЕР К. Индукционные плавильные печи М., "Энергия", 1972, 272 с.
3. ТИР Л.Л., СТОЛОВ М.Я. Электромагнитные устройства для управления циркуляцией расплава в электропечах. М., "Металлургия", 1975, 224 с.
4. МИКЕЛЬСОН Ю.Я., ЯКОВИЧ А.Т. Движение жидкого металла в индукционных печах. Ч.1. - В кн.: Ученые записи Латвийского государственного университета имени П.Стучки, т. 252, Рига, Изд. ЛГУ, 1976, с. 3 - 26.
5. ВЕРТЕ Л.А. Магнитная гидродинамика в металлургии. М., "Металлургия", 1975, 288 с.
6. КРУМИНЬ Ю.К. Взаимодействие бегущего магнитного поля с проводящей средой. Рига, "Зинатне", 1969, 258 с.
7. БРАНОВЕР Г.Г., ЦИНОБЕР А.Б. Магнитная гидродинамика несжимаемых сред. М., "Наука", 1970, 380 с.
8. ЦЕРБИНИН Э.В. Струйные течения вязкой жидкости в магнитном поле. Рига, "Зинатне", 1973, 304 с.
9. ГЕЛЬБГАТ Ю.М., ЛИЕЛАУСИС О.А., ЦЕРБИНИН Э.В. Жидкий металл под действием электромагнитных сил. Рига, "Зинатне", 1976, 248 с.
10. ТИР Л.Л. Методика исследования магнитогидродинамических и массообменных характеристик индукционных тигельных электропечей. - В кн.: Исследования в области промышленного электронагрева, вып. 5. М., 1972, с. 81-92.

11. Mühlbauer A. Über die elektrodynamischen Kräfte in der Schmelze von Induktionsöfen. - Elektrowärme international, 1967, Bd.25, Nr. 12, S. 461 - 473.
12. Mühlbauer A. Kräfte und Strömungen in der Schmelze eines Induktions - Tiegelofens. - Acta Technica, 1969, Nr.6, S.606 - 712.
13. Reichert K. Die Berechnung von verlorener Induktions - Tiegelofen mit elektrisch leitendem Tiegel. - Archiv für Elektrotechnik, 1965, Bd.49, Nr.6, S. 576 - 598.
14. ТИР Л.Л. О вихревых силах в жидком металле в поле однофазного индуктора. - Магнитная гидродинамика, 1974, № 1, с.127 - 135.
15. ФЕВДЕЛЕВ З.Н., МАРТЫНОВ Г.И. Расчёт электромагнитного давления в индукционном вентиле. - Магнитная гидродинамика, 1968, № 1, с 150-156.
16. МАММУДОВ К.М., СЛУХОЦКИЙ А.Е. Расчёт электрических параметров цилиндрических индукторов произвольной длины. - В кн.: Труды ВНИИ токов высокой частоты, вып. 10 Л., 1969, с. 20- 29.
17. МАММУДОВ К.М., НЕЛКОВ В.С., СЛУХОЦКИЙ А.Е. Методы электрического расчёта индукторов. - В кн.: Известия Ленинградского электротехнического института, вып. 114. Л., 1973, с. 3-27.
18. ФЕВДЕЛЕВ З.Н., МАРТЫНОВ Г.И. Расчёт электромагнитных параметров цилиндрической системы "индуктор-металл". - Магнитная гидродинамика, 1976, № 4, с. 87-94.
19. Mühlbauer A. Beschleunigung in mehrphasig erregten Induktions - Tiegelöfen. - Die Elektrische Ausrüstung, 1969, Bd 10, Nr. 1, S. 1 - 7.
20. Dumitrescu A. Etude du champ electromagnetique dans un canal cylindrique, circulaire. - Rev. Roum. Sci. Techn. Ser. Electrotechn. et. Energ, 1973, vol. 18 Nr. 2, p. 169 - 189.

21. МИКЕЛЬСОН А.Э., САУЛИТЕ У.А., ШКЕРСТЕНА А.Я. Исследования не цилиндрических бессердечниковых насосов. -Магнитная гидродинамика, 1965, №2, с. 92-100.

22. МИКЕЛЬСОН А.Э., САУЛИТЕ У.А. К расчёту сил, действующих на цилиндр в бегущем магнитном поле цилиндрического индуктора конечной длины. -Изв. АН Латв. ССР. Серия физико-технических наук, 1966, №6, с.57-69.

23. САУЛИТЕ У.А. Учёт неравномерности поля и концевых эффектов при расчёте трёхфазных аксиально-симметричных систем с осевым магнитным полем. -Изв. АН Латв.ССР. Серия физико-технических наук, 1968, №4, с.96-101.

24. СТОЛОВ М.Я. Электромагнитное поле и ponderomotorные силы в устройствах электромагнитного перемешивания цилиндрического типа. -В кн.: Исследования в области промышленного электронагрева, вып.4. М., 1970, с.192-199.

25. ФЕДЧУН Л.В., РОМАНОВИЧ С.С. Расчёт на ЭВМ вихревых токов в осесимметричных проводниках. -В кн.: Кибернетика и вычислительная техника, вып. 17. Киев, 1972, с.31-36.

26. РОМАНОВИЧ С.С., ФЕДЧУН Л.В., КУХИМОВ И.Г. Электрический и тепловой расчёт индукционного нагрева осесимметричных металлических тел. -В кн.: Кибернетика и вычислительная техника, вып. 22. Киев, 1973, с.155-162.

27. КОСТЮК Э.Н. Исследование вихревых токов в массивном анизотропном цилиндре методами численного анализа. -В кн.: Кибернетика и вычислительная техника, вып. 26. Киев, 1974, с.122-128.

28. Lavers J. D. An analysis of the coreless induction furnace: Load end effects. -Elektrowärme International, 1971, Bd 29, Nr. 7, S. 390 - 396.

29. Lavers J.D., Biringer P. P., Segsworth R. S.

Распределение тока и силы действующие на расплавленный металл, и циркуляция тока в индукционной тигельной печи. - IEEE Trans. Ind. Appl., 1973, vol. 9, Nr. 4, p. 395 - 399.

30. Dodd C. V., Deeds W. E. Elektromagnetic Forces in conductors. - Journal of Applied Physics, 1967, Nr. 13, p. 5045-5054.

31. Reichert K. Ein numerisches Verfahren zur Berechnung von Anordnungen zur induktiven Erwärmung. - Elektrowärme International, 1968, Bd 26, Nr. 4, S. 113 - 123.

32. Reichert K., Die numerische Berechnung der elektromagnetisch verursachten Strömung in Induktionstiegelöfen. - Scientia Electrica, 1970, vol. 16, Nr. 4, p. 126 - 146.

33. Vogt W. Badebewegung und magnetische Feldkräfte im Induktionstiegelofen. - Brown Boveri Mitteilungen, 1969, Bd 56, Nr. 1, S. 25 - 36.

34. ГЕЛДЕНБЕРГ З.Н., МАРТЫНОВ Г.И. Расчёт электромагнитных полей в системах "индуктор-экран-слиток". - Магнитная гидродинамика, 1977, №1, с. 89-96.

35. БИРНИ Р.В., БРИСКИАН В.А., РУДАКОВ В.К. Осесимметричные замкнутые течения, вызванные бегущим полем, при малых магнитных числах Рейнольдса. - В кн.: Учёные записки Пермского гос. университета, т. 216. Пермь, 1970, с. 241-253.

36. ТИР Л.Л. Движение расплава в индукционной тигельной печи под действием бегущего магнитного поля. - В кн.: Труды ВНИИ электротермического оборудования, вып. 6. М., 1973, с. 122-131.

37. ГЕЛДЕНБЕРГ З.Н., ТЕЛЯКОВ Г.В., БОСШАКИН И.М., ПЕРСИКОВ В.М., МАРТЫНОВ Г.И. Расчёт параметров электромагнитных кристаллизаторов для отливки круглых слитков. - Магнитная гидродинамика,

1975, №3, с.119-123.

38. Meyer P. W., Werner C. Ein Verfahren zur numerischen Behandlung der bei stationären und quasistationären elektromagnetischen Feldern auftretenden partiellen Differentialgleichungen unter Einbeziehung nichtlinearer Medien. - Im. B.: Internat. Wiss. Kolloq. Techn. Hochschulen. Ilmenau, 1975, Nr. 2, S. 71 - 74.

39. ГЕЦЕЛЕВ З.Н., МАРТЫНОВ Г.И. Расчёт поля скоростей, возникающего в жидкой фазе слитка, под действием электромагнитных сил. - Магнитная гидродинамика, 1975, №2, с.106-111.

40. МИКЕЛЬСОН Ю.Я., ЯКОВИЧ А.Т. Движение жидкого металла в индукционных печах. Ч.П. -В кн.: Вопросы электродинамики и механики сплошных сред, т.3. Рига, 1977, с.40-66.

41. ДЖАКУПОВ К.Б. Разностный метод решения уравнений вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрических координатах. -Изв. АН Каз. ССР. Серия физико-математическая, 1972, №1, с.31-40.

42. ЛОЙЦЯНСКИЙ Л.Г. Механика жидкости и газа. М., "Наука", 1978. 736 с.

43. КОСТЮК Э.Н. Вычисление модифицированных цилиндрических функций комплексного аргумента. -В кн.: Кибернетика и вычислительная техника, вып.17. Киев, 1972, с.58-79.

44. ЯНКЕ Э., ЭМДЕ Ф., ЛЁШ Ф. Специальные функции. М., "Наука", 1978, 342 с.

45. МАРЧУК Г.И. Методы вычислительной математики. Новосибирск, "Наука", 1973. 352 с.

46. САМАРСКИЙ А.А. Введение в теорию разностных схем. М., "Наука", 1971. 552 с.

47. Ильин В.П. Численные методы решения задач электрооптики. Новосибирск, "Наука", 1974. 202 с.

48. МОНИН А.С., ЯГЛОМ А.М. Статистическая гидромеханика.

М., "Наука". Ч.1, 1965, 650 с. Ч.2, 1967, 720 с.

48. ИВЕНЬСОН А.Э., ПАНАСЮК Л.С., СЛЮСАРЕВ Н.М., ЯВИЧ В.Е. Исследование перемешивания в модели горноразрядного тигля в переменном магнитном поле. -Магнитная гидродинамика, 1973, №3, с. 71-75.

50. ИВАНОВ В.М. Турбулентное движение высокотемпературных окислительных сред. М., "Наука", 1975. 254 с.

51. КУРБАВЕНА А.Ф. Численное моделирование третьих моментов турбулентности поля скорости в слое смешения. -В кн.: Тр. III Всес. семинара по моделям механики сплошной среды. Новосибирск, 1976, с.74-76.

52. КОМКОГЕРОВ А.Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости. -Изв. АН СССР. Серия физическая, 1942, т.6, №1-2, с.56-58.

53. Nielsen P. V. Die Berechnung von Raumströmungen. - K1. Klima + Kälteing., 1975, T. 5, Nr. II, p.351 - 358.

54. БЕРГ Р., СТЕВART В., ЛАНТЮТ Е. Явления переноса. М., "Металл", 1974. 688 с.

55. ВУЛКIS Л.А., ГЕНЦИН А.Л., ЯРИН Л.П. Структура струи с периодическим изменением импульса. -Докл. АН СССР, 1969, т.185, №3, с.36-39.

56. ЯКОВИЧ А.Т., СТЕПОВА Ю.А., СТОЛЯРОВА Л.А. Распределение плотности электромагнитных сил в индукционной тигельной печи. -В кн.: Научно-технический прогресс в промышленности. Свердловск, 1974, с.64.

57. ИВЕНЬСОН А.Э., ЯКОВИЧ А.Т., ПОЗМАНИС Я.Э., СТЕПОВА Ю.А. Магнитное поле и объёмные силы в цилиндрических проводниках ограниченных размеров. -В кн.: Восьмое Рижское совещание по магнитной гидродинамике, т.3. Рига, "Зинатне", 1975, с.23-24.

58. ЯКОВИЧ А.Т., СТОЛЯРОВА Л.А. Гидродинамика расплава в индукционной тигельной печи. -В кн.: Научно-технический прогресс в промышленности. Свердловск, 1974, с.63.

59. МИКЕЛЬСОН Ю.Я., ЯКОВИЧ А.Т., ТИР Л.Л. Методика расчёта МГД-течения в цилиндрической электропечи. -В кн.: Восьмое Рижское совещание по магнитной гидродинамике, т.3. Рига, "Зинат", 1975, с.34-36.

60. МИКЕЛЬСОН Ю.Я., ПАВЛОВ С.И., ЯКОВИЧ А.Т. Методика расчёта МГД-течения в произвольной осесимметричной области. -В кн.: Пятое Рижское совещание по магнитной гидродинамике, т.3. Саласпилс, 1978, с.73-74.

61. МИКЕЛЬСОН Ю.Я., ЯКОВИЧ А.Т., ПАВЛОВ С.И. Численное исследование осреднённого МГД-течения в цилиндрической области с использованием рабочих гипотез для турбулентных напряжений. -Магнитная гидродинамика. 1978, №1, с.51-58.

62. МИКЕЛЬСОН Ю.Я., ЯКОВИЧ А.Т., ТИР Л.Л. Методика расчёта распределения скоростей в цилиндрической индукционной электропечи. -Магнитная гидродинамика, 1977, №1, с.97-101.

63. Якович А.Т. Применение некоторых полуэмпирических гипотез для расчёта осреднённого турбулентного течения в индукционных электропечах. -В кн.: Вопросы электродинамики и механики сплошных сред, т.3. Рига, 1977, с.67-88.

64. ВОЦИШ А.Д., КОЛЕСНИКОВ Ю.Б. Аномальный перенос импульса в сдвиговом МГД-течении с двумерной структурой турбулентности. -Магнитная гидродинамика, 1976, №4, с.47-52.

65. ВОЦИШ А.Д., КОЛЕСНИКОВ Ю.Б. Экспериментальное исследование свойств двумерной турбулентности в плоском канале в азимутальном магнитном поле. -Магнитная гидродинамика, 1977, №1, с.35-38.

66. Hanjalić K., Launder B. E. Contribution towards a Reynolds - stress closure for low - Reynolds - number turbulence. - J. Fluid Mech., 1976, vol. 74, Nr. 4, p. 593 - 610.

67. Reynolds W. C. Recent advances in computation of turbulent flows. - Adv. Chem. Eng., 1974, vol. 9, p. 193 - 246.

68. КОЛОВАНДИН Б.А. Модельное описание статистических характеристик переноса в несжимаемой турбулентной жидкости. - В кн.: Теплообмен, т.1. Минск, 1976, с.3-13.

69. ЛЮБИЧ А.Т., ПАВЛОВ С.И. Численный эксперимент по расчету осредненных скоростей и турбулентных напряжений для замкнутого осесимметричного МГД-течения. - В кн.: Девятое Рижское совещание по МГД, т.1. Саласпилс, 1978, с.27-28.

70. БРАЙЛОВСКАЯ И.В., КУШКОВА Т.В., ЧУКОВ Л.А. Разностные методы решения уравнений Навье-Стокса. - В кн.: Вычислительные методы в газовой динамике, т.П. М., 1968, с.3-18.

71. КАЛИС И.Э. О численном решении системы уравнений Навье-Стокса методом сеток. - В кн.: Латвийский математический ежегодник, т.5. Рига, 1969, с.53-70.

72. ВИНЬЕВ Н.И., ТИМОШИН Г.И. О численном решении уравнений гидродинамики для плоского потока вязкой несжимаемой жидкости. - Изв. АН СССР, Серия технических наук, 1969, т.1, №3, с.14-24.

73. КУШКОВА Т.В. Численное исследование двумерных течений вязкой несжимаемой жидкости. - В кн.: Некоторые применения метода сеток в газовой динамике. М., изд. МГУ, 1971, с.7-136.

74. ВУКОЛОВИЧ Г.А., КАЛИС И.Э. Об одном численном методе решения стационарной системы уравнений Навье-Стокса относительно функций  $u, v, p$ . - В кн.: Численные методы механики сплошной среды, т.3. Новосибирск, 1972, №4, с.34-52.

75. ГОСМАН А.Д., ПАН В.М., РАНЧЕЛ А.К., СПОЛДИНГ Д.В., ВОЛЫНТЕЛИН М. Численные методы исследования течений вязкой жидкости. М., "Мир", 1972. 324 с.
76. ОТРОЩЕНКО И.В., ФЕДОРЕНКО Р.П. О приближённом решении стационарных уравнений Навье-Стокса. М., препринт института прикладной мат. АН СССР, 1976. 64 с.
77. КУЗНЕЦОВ Б.Г., СМАГУЛОВ Ш. Об аппроксимации уравнений Навье-Стокса. -В кн.: Численные методы механики сплошной среды, т.8. Новосибирск, 1975, №2, с.70-79.
78. ПРУСОВ В.А. Численное интегрирование уравнений Навье-Стокса для стационарных течений. -В кн.: Гидромеханика, вып.32. Киев, 1975, с.63-68.
79. ЧЕРЕПАНОВ В.Ю. Модельная задача о МГД-течении в литиевом blanketе. -Магнитная гидродинамика, 1978, №1, с.117-120.
80. СИРОЧЕНКО В.П. Численное решение одной задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости в двусвязной области. -В кн.: Численные методы механики сплошной среды, т.8. Новосибирск, 1977, №1, с.113-134.
81. ВИТОЛИНЫ Г.А., МИКЕЛЬСОН А.Э., МОШНЯГА В.Н., ФИЛЬ В.А. Влияние постоянных магнитных полей на конвективный теплообмен в вязкой области. -В кн.: Девятое Римское совещание по магнитной гидродинамике, т.1. Саласпилс, 1978, с.58-59.
82. ПИВА Р., ОРЛАНДИ П. Численное решение для течений в атмосферном слое под уличными каньонами. -В кн.: Численное решение задач гидродинамики. М., "Мир", 1977, с.127-134.
83. БУШЕВИЧ И.Э., ПЕТЕРСОН Д.Е., ШАРАМСИН В.И., ШЕРБИНИН С.В. МГД-течения в замкнутых жидких объёмах при неоднородном распределении тока. - Магнитная гидродинамика, 1976, №1, с.92-97.
84. БАРАБАЕВ В.И., ЗЫРИНА Г.И., ПЕРЕКАЛЬСКИЙ В.М. Течение

вязкой несжимаемой жидкости в диффузорных и конфузорных каналах с пористыми стенками. -В кн.: Математическое программирование и расчёт строительных конструкций, т.121. М., 1974, с.36-50.

85. ШЛАХИНОВ К.Б. О некоторых разностных схемах для уравнений Навье-Стокса. -В кн.: Численные методы механики сплошной среды, т.2. Новосибирск, 1971, №1-2, с.17-26.

86. ВАРЛАПОВ В.Н., БЕРИНА Г.Н., ПЕРЕКАЛЬСКИЙ В.М. Сравнение некоторых сеточных методов, пригодных для решения уравнений Навье-Стокса при больших числах Рейнольдса. -В кн.: Математическое программирование и расчёт строительных конструкций, т.121. М., 1974, с.51-61.

87. КОЧЕРГИН В.П., ШЕРБАКОВ А.В. Метод последовательных приближений при решении задачи Дирихле для эллиптического уравнения с малым параметром при старших производных. -В кн.: Численные методы механики сплошной среды, т.4. Новосибирск. 1973, №3, с.25-36.

88. ШЛАХИНОВ К.Б. о разностной схеме без аппроксимационной вязкости для стационарных уравнений Гельмгольца. -В кн.: Вопросы прикладной математики и механики, вып.1. Алма-Ата, 1974, с.77-87.

89. ЛЮБИЧ А.Т., ПАВЛОВ С.И. Некоторые конечно-разностные методы расчёта осесимметричного стационарного течения при постоянном и переменном по объёму значении числа Рейнольдса. -В кн.: Вопросы электродинамики и механики сплошных сред, т.4. Рига, 1978, с.44-66.

90. КОЧЕРГИН В.П., ШЕРБАКОВ А.В. О разностных схемах второго порядка аппроксимации для эллиптического уравнения с малым параметром при старших производных. -В кн.: Численные методы механики сплошной среды, т.5. Новосибирск, 1974. №1, с.88-97.

91. КУСКОВА Т.В., ЧУДОВ Л.А. Повышение точности приближённых граничных условий. -Изв. СО АН СССР, серия технических наук, вып.2. Новосибирск, 1967, №8, с.3-20.

92. ПОЛЕЖАЕВ В.И., ГРЯЗНОВ В.Л. Метод расчёта граничных условий для уравнений Навье-Стокса в переменных "вихрь, функция тока". -Доклады АН СССР, 1974, т.219, №2, с.301-304.

93. ТИР Л.Л., МИКЕЛЬСОН Ю.Я., ЯКОВИЧ А.Т. Результаты экспериментального и численного исследования движения в индукционных тигельных печах. -Р.кн.: Десятое Рижское совещание по магнитной гидродинамике, т.3. Саласпилс, 1978, с.75-76.

94. Tarapore E. D., Evans J. W. Fluid Velocities in Induction Melting Furnaces: Part I. Theory and Laboratory Experiments. - Metallurgical Transactions B, 1976, vol. 7, Nr. 3, p. 343 - 351, Part 2. 1977, vol. 8B, Nr. 1, с.179 - 184.

95. Szekely J., Chang C. W. Turbulent electromagnetically driven flow in metals processing: Part I, Formulation. Part 2, practical applications. - Ironmaking and Steelmaking, 1977, Nr. 3, с. 190 - 204.

96. Launder B. E., Spalding D. B. The numerical computation of turbulent flows. - Comput. Meth. Appl. Mech. and Eng., 1974, vol. 3, Nr. 2, с. 269 - 289.

97. ТИР Л.Л. Особенности передачи механической энергии замкнутому потоку металла в электромагнитных системах с азимутальными токами. -Магнитная гидродинамика, 1976, №2, с.100-108.

98. ДРЕЙМАНИС Ю.А., ЦИРКУНОВ В.Э., ЯКОВИЧ А.Т. Методика расчёта характеристик индукционных МГД-преобразователей. -В кн.: Восьмое Рижское совещание по магнитной гидродинамике, т.2. Рига, 1975, с.201-203.

99. Altgauzen A. Die Elektrowärme in Maschinenbau (Zum Elektrotechnischen Weltkongress). - Elektrowärme International, 1977, Bd 35, Nr. 3, S. 147 - 150.

## АННОТАЦИЯ

диссертация ЯКОВИЧА А.Т. "Исследование осреднённого течения жидкого металла в аксиально - ~~симметричном~~ магнитном поле"

Диссертация состоит из введения, шести разделов и заключения с выводами, содержит 149 стр. машинописного текста, 39 рисунков, 8 таблиц и список литературы, содержащий 99 наименований, диссертация написана на русском языке.

Работа посвящена: а) разработке математических моделей и численных методик для исследования МГД-процессов в аксиально - ~~симметричных~~ устройствах с замкнутым течением жидкого металла в ламинарном и в турбулентном ~~режимах~~, б) получению качественных данных и ~~зависимостей~~ электромагнитных (ЭМ) и гидродинамических величин от определяющих параметров класса моделируемых устройств, в) применению разработанных методик и полученных результатов для повышения эффективности конкретных технологических процессов и устройств, а также исследованию возможностей использования на практике выявленных эффектов.

В введении даётся обоснование направления исследований. В разделе 2 анализируются работы, предшествующие настоящему исследованию, делаются выводы для формулировки расчётной модели. Математическая модель учитывающая конечность размеров всех основных элементов металлургического МГД-устройства, в безразмерном виде сформулирована в разделе 3.

В разделе 4 сопоставляются разработанные методики и алгоритмы определения ЭМ величин модели, здесь приведён также ряд характерных результатов. В разделе 5 анализируются возможности применения различных полумпирических способов определения турбулентных напряжений в случае течения в переменном ЭМ поле. Методики и алгоритмы расчёта осреднённого турбулентного течения и ламинарного течения описаны и сопоставляются в разделе 6. Результаты гидродинамических расчётов сопоставляются с экспериментальными данными в разделе 7. Здесь приводятся также результаты ~~серий~~ расчётов, проведённых для конкретных МГД-устройств и характеризуются ~~полу~~ енные при этом зависимости.

В заключении работы даются выводы. Методики расчёта внедрены в НИИ электротермического оборудования.