Академия наук Латвийской ССР
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ

На правах рукописи

БЕРСОНС Имантс - Янис Язепович

УДК 539.183/.184; 539.193/.196

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СВОБОДНОГО И СВЯЗАННОГО В АТОМЕ ЭЛЕКТРОНА С СИЛЬНЫМ ПОЛЕМ ИЗЛУЧЕНИЯ

01.04.02 - теоретическая и математическая физика

Диссертация
на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук

Рига - 1983

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В 60-тых годах в связи с созданием лазеров началось интенсивное исследование таких элементарных процессов, вызываемых сильным полем излучения, как многофотонное возбуждение атомов, сдвиг и расщепление атомных уровней в переменном поле, многофотонная ионизация атомов и диссоциация молекул, многоквантовый поверхностный фотоэффект в металлах, а также процессов, протекающих без поля излучения, но модифицированных им. К последним можно отнести распады частиц, радиационные переходы в атомах, рассеяние электронов на атомах и атом-атомные столкновения. Эти элементарные процессы определяют действие излучения на газы и поверхность твердого тела, от них зависит распространение излучения в средах. Изучение их важно для создания новых методов исследования плазмы, нахождения новых оптически активных сред, разработки методов селективного возбуждения атомов и молекул и объяснения некоторых астро-физических явлений. С другой стороны, их изучение расширяет наши знания о структуре атомов и молекул, их энергетических спектрах. В связи с возросшими экспериментальными возможностями получения атомов в высоковозбужденных состояниях в последние годы началось также изучение воздействия излучения на такие, так называемые, ридберговские атомы.

За немногими исключениями, теоретическое описание многофотонных процессов в атомах базируется на теории возмущений. Но использование в экспериментах все более мощных источников когерентного излучения и, особенно, экспериментальные исследования многофотонных процессов в высоковозбужденных атомах требуют развития методов расчета этих процессов, не основанных на теории возмущений.

Диссертация посвящена теоретическому исследованию взаимодействия свободного и связанного в атоме электрона с сильным полем излучения.

Актуальность темы диссертации определяется важностью понимания различных многофотонных процессов, сопровождающих взаимодействие интенсивного лазерного излучения с атомами, в том числе с высоковозбужденными атомами, и важностью разработки методов расчета этих процессов для решения задач научного и прикладного характера в проблеме взаимодействия мощного электромагнитного излучения с веществом.

Целью работы являлось:

I) выяснение различия в классическом и квантовом описании плоской электромагнитной волны при ее взаимодействии со свободным электроном;

2) строгая математическая постановка и решение задач о взаимодействии электрона с полем некоторых модельных потенциалов в присутствии сильной электромагнитной волны и выяснение на этих задачах специфических особенностей, связанных с их многофотонностью;

3) распространение метода квазиэнергий на задачи ионизации сильным полем излучения и задачи рассеяния в присутствии такого поля путем сведения их к решению соответствующих уравнений метода сильной связи;

4) нахождение квазиклассического предела уравнений метода сильной связи и разработка квазиклассической теории для описания многофотонных процессов в высоковозбужденных атомах;

5) расчет на основе квазиклассической теории сечений много-

фотонной ионизации по теории возмущений и сравнение их с имеющимися квантовомеханическими сечениями с целью выяснения точности квазиклассического приближения;

6) расчет вне рамок теории возмущений вероятностей и сечений ряда многофотонных процессов в высоковозбужденных атомах и объяснение на их основе некоторых экспериментальных результатов.

Научная новизна и практическая ценность работы. Впервые найдено обобщение известного решения Волкова, описывающего движение электрона в классическом поле плоской электромагнитной волны, на случай квантованного электромагнитного поля. Найдены также решения уравнения Дирака для электрона в квантованном поле монохроматической волны плюс постоянное магнитное поле и в поле двух волн.

Впервые математически строго поставлены и решены задачи об отражении электрона от непроницаемой стенки в присутствии монохроматической волны, ионизации системы, связанной короткодействующим потенциалом, под действием циркулярно поляризованной электромагнитной волны и рассеяния электрона на δ-потенциале в присутствии такой волны. В сечениях рассеяния обнаружены зависящие от частоты и интенсивности поля резонансы.

Найдено обобщение рядов Неймана для специальных функций Бесселя, аргумент которых содержит индекс под корнем и которые часто встречаются при теоретическом исследовании многофотонных процессов.

Впервые выведены уравнения метода сильной связи для описания взаимодействия электрона с центральным полем атома и сильным полем электромагнитной волны, проведен анализ проблемы удовлетворения граничных условий. Впервые рассмотрен квазиклассический предел уравнений метода сильной связи, получено в этом случае их общее решение и проблема расчета различных многофотонных процессов в высоковозбужденных атомах сведена к решению сравнительно простых граничных задач.

Впервые получено простое и достаточно точное выражение для сечений N-фотонной ионизации атома водорода.

Впервые в приближении эквидистантности уровней найдена волновая функция высоковозбужденных состояний атомов в сильном поле излучения, и на ее основе вычислены вероятности радиационных переходов между высоковозбужденными состояниями атомов в присутствии сильного микроволнового поля и оценена вероятность ионизации высоковозбужденных состояний атомов под действием такого поля.

Впервые вне рамок теории возмущений найдены сечения вынужденного тормозного излучения при рассеянии электрона на кулоновском центре.

Развитый в диссертации метод получения решений уравнения Дирака в квантовемном поле плоской электромагнитной волны был затем использован другими авторами (Федоров и Казаков, Абакаров и Олейник, Багров и Гитман, Бергоу и Эхлотцки) для решения аналогичных задач.

Найденное в диссертации выражение для сечений N-фотонной ионизации было использовано (Делоне и Крайнов) для оценки границы классического механизма диффузионной ионизации атомов.

Полученные в диссертации конкретные результаты позволили объяснить ряд экспериментальных данных, относящихся к радиационным переходам в высоковозбужденных атомах в присутствии сильного микроволнового поля и ионизации таким полем высоковозбужденных состояний атомов.

Апробация работы. Результаты, полученные в диссертации, докладывались на Всесоюзных конференциях по теории атомов и атомных спектров в Воронеже (1980 г.) и в Минске (1983 г.), на Всесоюзных конференциях по физике электронных и атомных столкновений в Тбилиси (1975 г.) и в Ленинграде (1981 г.), на заседаниях секции атомных столкновений Совета по физике плазмы АН СССР в Кишиневе (1974 г.), в Риге (1975 г.) и Черноголовке (1975 г.), на заседаниях секции по фотопроцессам Совета по физике электронных и атомных столкновений АН СССР в Риге (1982 г.) и в Ужгороде (1983 г.), на международной конференции по взаимодействию электрона с сильным электромагнитным полем в Венгрии (Балатонфюред, 1972 г.), на УI международной конференции по атомной физике в Риге (1978 г.).

Основные защищаемые положения изложены в Заключении.

Объем и структура. Диссертация состоит из введения, обзора литературы (глава I.), четырех глав, содержащих оригинальные результаты, заключения и списка литературы.

ГЛАВА I.
МЕТОДЫ РАСЧЕТА МНОГОФОТОННЫХ ПРОЦЕССОВ НА СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНАХ И В АТОМАХ
(Обзор литературы)

При теоретическом изучении таких элементраных процессов, как многофотонное возбуждение и ионизация атомов, многоквантовый поверхностный фотоэффект в металлах, многофотонная диссоциация молекул, рассеяние частиц в присутствии сильного поля излучения и др., возникли две задачи: нужно было выяснить физические механизмы упомянутых процессов и разработать математический аппарат для их описания. Следует сказать, что математический аппарат квантовой механики не был достаточно приспособлен для описания различных процессов в сильных полях переодически меняющихся во времени. Фактически имелись только теория возмущений, используемая обычно в первом, реже во втором ее порядках, и предложенный Дираком метод решения нестационарных задач, использование которого вне рамок теории возмущений обсудим ниже.

Имелось, правда, еще в 1935 году найденное Волковым [1,2] решение уравнения Дирака для электрона в поле плоской электромагнитной волны. Интерес к этому решению возрос в связи с созданием лазеров. Естественно, что теоретическое исследование указанных процессов в сильных переменных полях началось с изучения самых простых задач. Ряд работ поэтому был посвящен исследованию взаимодействия электрона с полем изучения в отсутствии других полей. Сюда можно отнести работы [3,4] по изучению свойств решения Волкова и построению функции Грина электрона в поле плоской электромагнитной волны [5-7].

В ряде работ [8-10] изучалось движение электрона в поле двух распространяющихся друг другу навстречу электромагнитных волн с одинаковой частотой. Этот вопрос стал актуальным в связи с экспериментальными исследованиями [11] эффекта КапицыДирака. Более сложным является вопрос о нахождении решения уравнения Дирака для электрона, движущегося в поле плоской электромагнитной волны и одновременно в другом однородном в пространстве поле. Такие решения были найдены в случае постоянного магнитного поля, направление которого совпадает с направлением распространения волны [12] и в случае скрещенных электрического и магнитного полей [13].

Следует, однако, отметить, что решение Волкова не является полностью квантовомеханическим, так как поле плоской волны в нем описывается классически. С другой стороны, в большинстве работ [14-17], посвященных изучению статистических свойств свободного поля излучения (т.е. задач без электрона), последнее рассматривается как квантованное. В работе [14] показано, что специальное состояние квантового поля излучения, так называемое когерентное состояние, эквивалентно классическому полю. При больших числах фотонов классическое и квантовое описания приводят к одинаковым результатам, но при малых числах фотонов, когда важно спонтанное излучение, необходимо [17] квантовомеханическое рассмотрение. Вопрос о том, приводит ли классическое и квантовое описания электромагнитного поля к одному и тому же результату для задач о движении электрона в поле, также обсуждался в ряде работ [18-20] при рассмотрении комптоновского рассеяния в интенсивном поле излучения. Для последовательного квантовомеханического рассмотрения электромагнитного поля в этой задаче требовалось провести сложное суммирование определенного класса диаграмм Фейнмана. Результаты расчетов при этом получались довольно противоречивыми [18-20] .

В связи с этим диссертантом была поставлена цель найти обобщение решения Волкова на случай квантованного электромагнитного поля. Были найдены решения обобщенного уравнения Дирака в случаях монохроматической [21] и плоской [22] электромагнитных волн, двух монохроматических волн [23,24] и в случае монохроматической волны и постоянного магнитного поля, направление которого совпадает с направлением распространения волны [25] . Было показано, что если образовать специальную комбинацию полученных решений, соответствующих движению электрона в когерентной волне, то в результате предельного перехода рассматриваемая комбинация переходит в решение Волкова.

Найденные автором диссертации решения в случае плоской волны и монохроматической волны плюс магнитное поле были потом получены также в работах [26-28] и в недавней работе [29] . На основе разработанного автором метода решения задач с квантованным полем были получены еще решения уравнения Дирака для электрона в квантованном поле плоской волны плюс магнитное поле в направлении распространения волны [30-33] или плюс скрещенные электрическое и магнитное поля [13] и в менее интересных случаях [34-37] . В этих, а также в работах [38-41] , обсуждались те приближения в рамках квантовой электродинамики, на основе которых можно пользоваться обобщенным уравнением Дирака, и ряд математических (проблема ортогональности волновой функции) и физических (поведение системы вблизи циклотронного резонанса и наличие запрещенных зон в спектре системы в случае с магнитным полем) вопросов.

Полученные решения обобщенного уравнения Дирака, описывающие взаимодействие электрона с квантованной электромагнитной волной, представляют также интерес для квантовой электродинамики при попытках разработать методы вне рамок теории возмущений. Действительно, в случае взаимодействия электрона с квантованным полем плоской электромагнитной волны получается характеристическое уравнение, фактически совпадающее с соответствующим характеристическим уравнением, полученным Ван Кампеном [42] при рассмотрении взаимодействия электрона со всем квантованным электромагнитным полем в дипольном приближении. Модель Ван Кампена обсуждалась также в работе [43] . Если в уравнении Дирака вместо потенциала электромагнитного поля подставить его квантовое выражение, то задача решения такого уравнения Дирака становится похожей на задачу о поляроне большого радиуса [44] , т.е. на задачу о движении электрона в полярном кристалле. В случае полярона кроме теории возмущений разработано большое число других, в основном вариационных, методов расчета.

Решение Волкова было использовано [6,45-49] для расчета таких процессов как комптоновское рассеяние, рождение пар и распады частиц в поле излучения. Как и в отсутствии поля излучения, эти процессы рассчитываются по теории возмущений; сильным считается взаиможействие частиц с переменным полем лишь в начальном и конечном состояниях.

При описании многофотонных процессов в атомах приходится решать более сложную задачу о взаимодействии электрона с атомным полем и одновременно с сильным полем электромагнитной волны. Следует сказать, что теория многофотонных процессов в атомах в настоящее время является почти полностью одноэлектронной. Попытки выхода за рамки одноэлектронного приближения были предприняты только при расчете динамической поляризуемости [50-55] , а также в работе [56]. Имеются, правда, эксперименты по двухэлектронной [57,58] и многоэлектронной [59,60] многофотонной ионизации атомов, для объяснения которых одноэлектронное приближение может оказаться и недостаточным. Вопросы выхода за рамки одноэлектронного приближения не будут обсуждаться в диссертации и всюду будет использовано одноэлектронное приближение. Но даже в этом приближении и в монохроматическом поле расчет многофотонных процессов вызывает значительные математические трудности. Эти трудности связаны с необходимостью решить уравнение Шредингера для электрона в двух полях разной природы: в поле атома и в периодически меняющемся во времени поле электромагнитной волны.

Естественно поэтому, что в первой работе [61] по расчету многофотонной ионизации атомов потенциал атома заменялся некоторым модельным потенциалом, так называемым δ-потенциалом. В этой основополагающей работе впервые было показано, что многофотонная и туннельная ионизация являются двумя предельными случаями ионизации системы переменным полем. Предложенный Келдышем [61] метод расчета сечений многофотонной ионизации атомов был далее развит в работах [62,63]. Но даже с таким модельным потенциалом уравнение Шредингера не удалось решить точно, а была использована теория возмущений. Последняя, однако, страдала тем формальным недостатком, что матричный элемент в ней вычислялся от волновых функций, принадлежащих разным базисам: начальная волновая функция описывала частицу в -потенциале, а конечная - в поле монохроматической волны.

Другой модельный потенциал в виде ступеньки был использован [61,64,65] при расчете многоквантового поверхностного фотоэффекта в металлах. В работе [65] задача была сведена к решению бесконечной системы алгебраических уравнений, которая решалась методом теории возмущений.

Использование δ-потенциала и потенциала в виде ступеньки упрощает математическую задачу тем, что оно фактически заменяет истинный потенциал некоторым граничным условием, накладываемым на волновую функцию, описывающую электрон только в поле волны в остальном пространстве. Хотя такие модельные потенциалы и не отражают всех особенностей истинных потенциалов, особенно в случае многофотонных переходов в атомах, они позволяют существенно упростить задачу и подробнее исследовать границы применимости теории возмущений и особенности, которые связаны с многофотонностью ее характера. Самыми простыми из таких задач являются одномерные задачи. В работе автора [66] было показано, к каким математическим проблемам приводит строгая постановка задачи об отражении электрона от непроницаемой стенки в присутствии сильной монохроматической электромагнитной волны. Были исследованы границы применимости теории возмущений и найдены интересные пороговые особенности для вероятностей поглощения (испускания) фотонов электроном. Аналогичные вопросы были исследованы также в случае движения электрона в колеблющемся одномерном -потенциале [67,68].

Из трехмерных модельных потенциалов наибольший интерес представляет упомянутый трехмерный -потенциал, использование которого в атомной физике и техника обращения с которым изложены в книгах [69,70]. Как известно, частица в трехмерном δ-потенциале имеет один связанный уровень. Оказывается, что задачу ионизации системы, связанной трехмерными короткодействующими силами, можно точно решить [71,72] в случае циркулярно поляризованной электромагнитной волны. Проблема нахождения комплексных собственных значений энергии приэтом сводится к решению некоторого трансцендентного уравнения. Удается подробно исследовать все многофотонные особенности ионизации. В работе автора [71] был найден также явный вид сечений рассеяния частицы на δ-потенциале в присутствиициркулярно поляризованной электромагнитной волны. В этом случае легко прослеживается ряд особенностей многоканальных задач, а сечения имеют интересную, зависящую от поля резонансную структуру. В случае линейно поляризованного излучения задачу об ионизации системы, связанной короткодействующими силами, можно свести [73,74] к решению бесконечной однородной алгебраической системы. Отметим еще работы [75, 76], в которых численным интегрированием уравнения Шредингера исследовалась временная динамика ионизации системы, связанной полем одномерного δ-потенциала.

При расчетах многофотонных процессов, особенно в случае рассмотренных выше модельных потенциалов, приходится иметь дело с функциями Бесселя целого индекса и с аргументом, содержащим индекс под корнем. В связи с этим возникает математическая проблема разложения функций по таким функциям Бесселя. Автору диссертации удалось обобщить [77] известные ряды Неймана и на случай таких функций Бесселя. Близко к этой математической проблеме стоит пока нерешенная проблема разложения произвольной функции в ряд по некотрой специальной неортогональной системе функций, переходящей в пределе выключения поля в систему функций ряда Фурье.

Реальный атомный потенциал отличается от модельного δ-потенциала в двух отношениях. Во-первых, атомный потенциал имеет дальнодействующий характер, обусловленный кулоновским полем. Во-вторых, в противоположность одному состоянию в δ-яме, атом имеет много дискретных состояний, что приводит к резонансному характеру многофотонных процессов при некоторых частотах поля излучения. Первые попытки [78-80] учета влияния кулоновского поля на вероятность многофотонной ионизации атомов связаны с исследованием влияния дальнодействующего характера кулоновского поля на вероятность ионизации и пренебрежением ее резонансной структурой. Эти попытки нельзя признать особенно успешными.

Для расчета многофотонных процессов в реальных атомах поэтому широкое развитие получила теория возмущений высокого порядка, в которой атомное поле учитывается по возможности точно, а поле излучения принимается за возмущение. После первых, довольно грубых расчетов Бебба и Гольда [81,82] последовали аккуратные расчеты вероятностей различных двухфотонных и многофотонных процессов в атоме водорода [83-94]. В настоящее время для случая ионизации основного состояния атома водорода расчеты проведены до 16-того порядка теории возмущений [95]. Результаты суммированы в обзоре [96].

В сложных атомах возникают трудности даже в одноэлектронном приближении, так как приходится как-то аппроксимировть потенциал атома, в поле которого движется электрон. Для расчета сил осцилляторов и сечений фотоионизации в атомной физике успешно применяется метод квантового дефекта. Это метод в работах [97-99] был распространен на случай многофотонных переходов и успешно применен для расчета сечений многофотонной ионизации, дипольной поляризуемости и гиперполяризуемости в сложных атомах. Этими же авторами для тех же целей было предложено [100-102] использовать модельный потенциал Саймонса. Применение этого потенциала приводит приблизительно к тем же результатам, что и метод квантового дефекта, но проще при проведении вычислений. Модельный потенциал был использован также в работе [103]. Экспериментально впервые многофотонная ионизация атомов наблюдалась Вороновым и Делоне [104,105]. В обзорах [106-108] приведены более поздние экспериментальные результаты по многофотонной ионизации атомов и проведено их сравнение с результатами расчетов методами квантового дефекта и модельного потенциала. В большинстве случаев наблюдается хорошее согласие измеренных и рассчитанных сечений многофотонной ионизации атомов.

Фактически только для динамической поляризуемости предложены другие способы расчета [50-55], не основанные на методах квантового дефекта и модельного потенциала. Трудности заключаются в построении функции Грина электрона в сложном атоме. Правда, проблему нахождения функции Грина можно свести методом Далгарно и Льюиса [109] к решению неоднородных дифференциальных уравнений, в которых потенциал может быть и более сложным, чем в методе модельного потенциала. Однако расчет при этом становится заметно сложнее и результатов пока получено мало.

Теорию возмущений необходимо несколько модифицировать в резонансном случае [110-112]. Если поле сильное, то необходимо учитывать сдвиг резонансного уровня, который впервые был обнаружен в работе [113]. В резонансном случае более существенным становится также проблема включения поля [112].

Если в рассмотренных выше задачах за возмущение принималось поле излучения, то в случае рассеяния электрона на атоме в присутствии электромагнитной волны, наоборот, атомный потенциал считается как возмущение, а действие поля излучения на электрон учитывается точно. Сечения рассеяния в первом порядке теории возмущений были найдены Бункиным и Федоровым [114]. Кролл и Ватсон [115] получили более общий результат в случае низкочастотного поля. Последние экспериментальные данные [116-118] хорошо согласуются с предсказаниями теории.

Перейдем теперь к рассмотрению квантовомеханических методов расчета многофотонных процессов, не основанных на теории возмущений. В настоящее время имеются три таких метода. Первый из них есть предложенный Дираком метод решения нестационарных задач и состоит в разложении волновой функции электрона по его невозмущенным состояниям [119]. Для зависящих о времени коэффициентов такого разложения получается система дифференциальных уравнений первого порядка. Так как число состояний электрона в атоме бесконечно и имеется еще непрерывный спектр, то практически приходится систему "обрывать", ограничиваясь конечным числом дискретных состояний. Простейший случай двух состояний исследован очень подробно [111,120]. Случай трех и большего числа состояний с трудом поддается аналитическим исследованиям, но в ряде работ исследован численно. Так, например, была исследована динамика возбуждения атома водорода из различных начальных состояний под действием периодического импульсного [121] и монохроматического [122] полей. Преимуществом этого метода является то, что им могут быть исследованы воздействие на систему немонохроматического излучения и способ включения взаимодействия. Метод, однако, плохо приспособлен для задач ионизации и переходов в непрерывном спектре.

Второй метод развит в основном Рейнхардтом с сотрудниками [123-125], а также Преображенским и Рапопортом [126] и состоит в введении комплексных координат с целью превращения всех функций в квадратично интегрируемые. Этот метод является вариационным и при выборе подходящего базиса дает очень хорошие результаты. В случае резонансной многофотонной ионизации он приводит к зависящей от напряженности поля ширине резонанса, тогда как в низшем порядке теории возмущений последняя получается не зависящей от напряженности поля. Полная вероятность ионизации в этом методе равна мнимой части энергии, но вычисление вероятностей надпороговой ионизации по отдельным каналам вызывает значительные трудности, так как соответствующие ряды являются расходящимися [127].

Третий метод - это метод квазиэнергий. Он был предложен в работах [128-131] и применим в случае монохроматического поля. Метод основан на теореме Флоке и введении понятия квазиэнергии. Точные значения квазиэнергии и соответствующие волновые функции известны только для свободного электрона в электромагнитной волне и для гармонического осциллятора в периодическом внешнем поле [70]. В остальных случаях волновая функция ищется в виде ряда Фурье по переменному полю. Для двухуровневой системы при этом получается бесконечная система однородных алгебраических уравнений [128], для одноэлектронного атома - бесконечная система однородных парциальных дифференциальных уравнений [129]. Последние уравнения пока решались только по теории возмущений, в ряде случаев с учетом вырождения. Отметим, что в периодическом поле вырожденными считаются и такие состояния, разница энергий которых равна састоте поля. Ритус [129] на основе теории возмущений второго порядка нашел сдвиг и расщепление уровней атома водорода в поле электромагнитной волны. Из-за вырождения водородного спектра для возбужденных состояний приходится решать некоторое секулярное уравнение [132]. К решению секулярного уравнения приводится и задача о перестройке атомного мультиплета в нерезонансном поле [133] и задача о двух резонирующих мультиплетах [107,134]. При малых частотах внешнего поля в атоме водорода начинает преобладать линейный эффект Штарка. В работах [135,136] исследовалось соотношение между линейным и квадратичным эффектами Штарка для оболочки с главным квантовым числом n, равным двум. При частотах поля, меньших или порядка линейного штарковского сдвига, может быть найдено явное выражение для расщепления уровня любой оболочки [137,138]. Если частота внешнего поля меньше расстояния между соседними уровнями, то можно ограничиться учетом только состояний внутри одной оболочки. В таком приближении получен явный вид волновой функции квазиэнергетического состояния [139-141]. Некоторые общие закономерности квазиэнергетического спектра были рассмотрены в работе [142].

В упомянутых работах метод квазиэнергии был реализован в виде теории возмущений или с помощью процедуры диагонализации в случае вырожденных состояний. Но метод квазиэнергии может быть развит в двух направлениях, что и было сделано автором диссертации [143-145]. Во-первых, волновую функцию электрона можно искать в виде двойного ряда: ряда Фурье по переменному полю (как выше) и ряда по сферическим функциям. В результате получается [143] бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений для радиальных функций, аналогичная так называемая уравнениям метода сильной связи, широко используемым в теории атомных столкновений [146]. Получающиеся уравнения существенно проще, чем соответствующие уравнения в атомной физике, так как они не содержат обменных членов, а ответственный за связь каналов потенциал пропорционален напряженности внешнего поля и имеет очень простой вид.

В первых работах [128-130], в которых было введено понятие квазиэнергии, считалось, что она может принимать дискретные значения. Это действительно будет так, если принять, что вызываемые переменным полем переходы происходят только в области дискретного спектра. В атомах при достаточно сильном поле всегда будет происходить также ионизация. Необходимо поэтому обобщить понятие квазиэнергии с учетом всегда присутствующего непрерывного спектра. Как показано автором [143] , квазиэнергия может принимать различные значения в зависимости от задачи, определяемой граничными условиями. Она принимает дискретные значения, если учитываются только закрытые каналы; она комплексна в случае задачи ионизации, когда радиальные волновые функции на больших расстояниях экспоненциально убывают в закрытых каналах и имеют вид расходящихся волн в открытых каналах; она принимает непрерывные действительные значения в случае задачи рассеяния. Аналогичное обобщение понятия квазиэнергии было предложено позже в работе [147] .

К сожалению, до настоящего времени полученные уравнения метода сильной связи еще не решались численно, так что трудно оценить их эффективность для описания многофотонных процессов. Но в квазиклассическом пределе, когда решение этих уравнений удается найти в явном виде (см. ниже), они позволяют решить ряд многофотонных задач.

Большинство наблюдаемых многофотонных процессов в атомах может быть объяснено и рассчитано на основе теории возмущений или с помощью изложенных выше методов, не пользующихся этой теорией. Исключение составляют эксперименты [148-155] , проведенные на высоковозбужденных состояниях атомов. Исследование радиационных переходов между ридберговскими состояниями атомов стало актуальным в связи с созданием мазеров [156,157] на таких атомах и возможностью использования их как детекторов инфракрасного и микроволнового излучения [158] . Современное состояние исследований высоковозбужденных атомов изложено в обзорах [159,160] .

Теоретических работ, посвященных исследованию воздействия переменного поля на ридберговский атом, сравнительно мало. Имеются работы, в которых вычисляются вероятности радиационных переходов в таком атоме. Так, Буреева [161] показала, что найденное Гордоном [162] выражение для дипольных матричных элементов в атоме водорода существенно упрощается в случае переходов между близко лежащими высоко возбужденными состояниями. Этому вопросу посвящена и работа [163] . Полученное Буреевой выражение было обобщено [164] на случай водородоподобных атомов с учетом квантового дефекта. На основе квазиклассического приближения были исследованы [165,166] все случаи, когда дипольные матричные элементы от водородных функций принимают более простой вид.

Из двухфотонных процессов в высоковозбужденных атомах рассчитаны вероятности двухфотонных переходов из основного состояния атома водорода в высоковозбужденные состояния [167] и сечения двухфотонной ионизации уровней с главным квантовым числом, равным 8,9 и 10 [168] . Во втором порядке теории возмущений вычисляется и динамическая поляризуемость уровней, которая на основе квазиклассического приближения была оценена в работе [169] . Однако полученное в ней выражение неудовлетворительно в двух отношениях. Во-первых, ее вывод в сильной степени основан на введенных в работе [163] феноменологических параметрах. Во-вторых, заключение о том, что динамическая поляризуемость высоковозбужденных состояний атомов не меняет знака при прохождении резонанса, является, по-видимому, приближенным. В противном случае, например, для сдвига энергии ридберговских состояний в поле излучения черного тела получилось бы расходящееся выражение. В действительности этот сдвиг конечен и для ряда атомов был вычислен в работе [170].

Все эти расчеты относятся к одно- и двухфотонным процессам в высоковозбужденных атомах и основаны на теории возмущений. Что же касается экспериментов по ионизации высоковозбужденных состояний атомов микроволновым полем [148-152], то теория возмущений вряд ли может быть развита в настоящее время для их описания. К тому же, полученные на ее основе результаты были бы ненадежными, так как число поглощенных фотонов (таков и порядок теории возмущений) в некоторых из них достигает нескольких сотен. Не приспособлены для этого случая и изложенные выше методы, не пользующиеся теорией возмущений, в том числе и метод комплексных координат, так как для расчета таких процессов необходимо учитывать огромное число состояний, часть из которых находится в непрерывном спектре.

Было поэтому предложено несколько других подходов для объяснения этих экспериментов. Один из них [171,62] состоит в том, что в выражении для вероятности туннельной ионизации в постоянном электрическом поле последнее заменяется переменным полем и в дальнейшем проводится усреднение по периоду переменного поля. Хотя конечное выражение и предсказывает порог ионизации приблизительно при тех же полях, что и наблюдается на эксперименте, оно не зависит от частоты поля и несущественным множителем отличается от исходного выражения.

С целью объяснения этих экспериментов был разработан также другой, чисто классический подход [172-175], который состоит в решении классических уравнений движения для электрона в кулоновском поле и в поле монохроматической волны. Задавалось равновероятное распределение по начальным орбитам электрона и проводилось усреднение по этому распределению. Хотя авторы отмечают хорошее согласие результатов расчета с экспериментальными данными, все же остается открытым принципиальный вопрос: в какой области частот и напряженностей поля можно пользоваться классической механикой, так как оба предельных случая - многофотонная и туннельная ионизации являются существенно квантовыми. Шепелянский [122] на основе своих квантовомеханических расчетов считает согласие результатов работы [172] с экспериментом [148] случайным.

Интересным является другой классический механизм ионизации [176-179], основанный на явлении перекрытия нелинейных резонансов и возникновении стохастической неустойчивости при движении электрона одновременно в кулоновском поле и в поле монохроматической волны. Электрон начинает блуждать по резонансам. Процесс такого блуждания может быть описан уравнением диффузии [180]. Были оценены коэффициент диффузии и вероятность ионизации. Последняя оказалась пропорциональной интенсивности поля, тогда как эксперимент указывает на очень резкую - пороговую - зависимость вероятности ионизации от напряженности поля. В недавнем обзоре [181] проведен подробный анализ условий стохастизации движения электрона в высоковозбужденном атоме под действием переменного поля и оценены границы применимости диффузионного механизма ионизации.

Все же вопрос о применимости данного механизма для описания ионизации высоковозбужденных состояний атомов низкочастотным полем остается открытым, особенно после недавних квантовомеханических расчетов вероятности возбуждения атома водорода периодическим импульсным [121] и синусоидальным [122] полем. Результаты расчета [122] показывают, что в этом процессе велика роль многофотонных переходов, что диффузионный механизм возбуждения в атоме сильно подавлен и что классическая и квантовая механика в данном случае приводят к различным результатам.

Следовательно, вопрос о применимости классического рассмотрения многофотонных процессов в высоковозбужденных атомах остается открытым. С другой стороны, применение квазиклассического приближения для их описания хорошо обосновано, если только энергия начального, промежуточных и конечного состояний меньше энергии на первой боровской орбите [119] . Последовательная квазиклассическая теория была развита в работах автора диссертации [182-189] . В них был исследован квазиклассический предел вышеупомянутых уравнений метода сильной связи и найдено в этом пределе их общее решение. В итоге расчет различных многофотонных процессов сведен к проблеме удовлетворения граничных условий соответствующих задач. Удовлетворение граничных условий для радиальных волновых функций в закрытых каналах приводит к учету дискретного спектра электрона в поле атома и в результате к резонансной структуре сечений многофотонных процессов.

Развитая автором квазиклассическая теория для описания многофотонных процессов в атомах имеет некоторые общие черты с предложенной в работах [190-192] квазиклассической теорией возбуждения атомов и молекул при рассеянии на них электронов. В обеих теориях подлежащие решению уравнения параметра удара имеют подобныйцвид, и спектр возбуждаемой системы является эквидистантным: в случае атома и молекулы он является таковым приближенно для высоковозбужденных состояний; в случае электромагнитной волны он является точно эквидистантным по своей природе. Главное отличие развиваемой в диссертации квазиклассической теории от предложенной в работах [190-192] теории состоит в том, что в последней падающая частица рассматривается чисто классически, и она является только источником зависящего от времени поля, которое действует на атом. Наш подход является существенно квазиклассическим, так как решение уравнений параметра удара вместе с удовлетворением соответствующих граничных условий определяет квазиклассическую волновую функцию системы, состоящей из электрона в поле атома и взаимодействующего с ним поля излучения.

На основе квазиклассической теории возмущений автору [183--186] удалось получить простое выражение для сечений N-фотонной ионизации высоковозбужденных состояний атомов. Сравнение с имеющимися квантовомеханическими расчетьам подтверждает высокую точность квазиклассического приближения. В приближении эквидистантности уровней автором найдена [187,188] также квазиклассическая волновая функция электрона в кулоновском поле в присутствии сильного низкочастотного поля. На основе этой волновой функции были вычислены вероятности радиационных переходов между высоковозбужденными состояниями атомов в присутствии сильного микроволнового поля и объяснены соответствующие экспериментальные данные [153]. Была оценена также [189] вероятность многофотонной ионизации высоковозбужденных состояний атомов микроволновым полем, которая удовлетворительно воспроизводит экспериментальные результаты на атоме водорода [97,151].

Кроме многофотонных переходов в высоковозбужденных атомах имеется еще один процесс, который вызывает трудности его расчета. Это так называемая надпороговая ионизация атомов, когда наблюдается $N+S$ -фотонная ионизация выше порога N-фотонной ионизации. Как в теории возмущений, так и в методе комплексных координат трудности ее расчета связаны с плохой сходимостью или даже расходимостью соответствующих разложений. Эти трудности были частично преодолены с помощью привлечения процедиры аналитического продолжения [193,194] , применения метода Паде [195, 196] или сведения задачи к интегрированию неоднородных дифференциальных уравнений [84,197,198] . При некоторых N и S были сосчитаны сечения $N+S$ -фотонной ионизации основного и первых%возбужденных состояний атома водорода [84,193-200] , а также отдельных щелочных атомов [201] . Трудности все же остаются при больших N [200] . С другой стороны, развитая автором диссертации квазиклассическая теория приводит к простым выражениям для сечений $N+S$-фотонной ионизации любых водородных состояний. Сравнение с квантовомеханическими расчетами показывает, что точность квазиклассических сечений порядка нескольких процентов.

Как квантовомеханическая, так и квазиклассическая теории дают значительно меньшие значения для сечений $N+S$-фотонной ионизации, чем наблюдается в недавних экспериментах [202-206] . Причина расхождения теории с экспериментом пока неясная, тем более, что наблюдается и большое расхождение экспериментальных результатов между собой.

В заключении отметим, что в обзоре литературы не рассматривались и не будут рассматриваться также в диссертации вопросы, связанные с немонохроматичностью поля излучения лазера. Эти вопросы обсуждались в работах [207-209] .

ГЛАВА II. ЭЛЕКТРОН В КВАНТОВАННОМ ПОЛЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

В этой главе решение Волкова для электрона в классическом поле плоской электромагнитной волны обобщено на случай квантованного поля монохроматической и плоской электромагнитных волн. Обсуждается связь полученного решения с решением Волкова. Рассмотрено взаимодействие электрона с полем (классическим и квантованным) двух электромагнитных волн и с квантованным полем монохроматической электромагнитной волны плюс однородное магнитное поле.

2.I. Монохроматическая волна

Исходным является уравнение Дирака с учётом электромагнитного поля [2I0]

$$\left[\gamma_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu\right) + m\right]\psi = 0, \qquad (2.I),$$

где e и m - заряд и масса электрона, γ_μ - эрмитовские матрицы. В этой главе используется система единиц, в которой $\hbar = c = 1$, $e^2/4\pi = 1/137$, и обозначения: $p_\mu = (\vec{p}, ip_0)$, $(pq) = \vec{p}\vec{q} - p_0 q_0$, $\hat{p} = (\gamma p) = \vec{\gamma}\vec{p} + i\gamma_0 p_0$.

Квантованное поле монохроматической электромагнитной волны может быть описано оператором вида [2I0]

$$A_\mu = \frac{e_\mu}{\sqrt{2\omega\Omega}}\left[c\,e^{i(kx)} + c^+ e^{-i(kx)}\right], \qquad (2.2),$$

где e_μ - единичный вектор поляризации, $\omega = k_0$ - частота волны, Ω - нормировочный объем. Предполагается, что четырехмерный вектор $k(\vec{k}, ik_0)$ удовлетворяет условию $k^2 = \vec{k}^2 - k_0^2 = 0$ и что выполнено лоренцовское условие калибровки, так что $(ek) = 0$. В целях удобства при различных преобразованиях, полученных ниже волновых функций, выберем "координатное" представление [2II] для операторов испускания c^+ и поглощения c фотонов с волновым вектором k и поляризацией e_μ:

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi + \frac{\partial}{\partial \xi}\right), \quad c^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi - \frac{\partial}{\partial \xi}\right) \tag{2.3}$$

Если подставить выражения (2.3) в уравнение (2.I), то получим уравнение Дирака, модифицированное в том смысле, что волновая функция ψ будет теперь зависеть как от координат электрона x_μ, так и от полевой переменной ξ.

Решение уравнения (2.I) с оператором потенциала (2.2) будем искать в виде

$$\psi = U_1 \Phi, \quad U_1 = \exp\left\{ i\frac{(kx)}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \xi^2\right)\right\} \tag{2.4}$$

Если подставить эту функцию в уравнение (2.I), умножить последнее слева на U_1^+ и учесть опереторное тождество

$$\exp\left\{-i\frac{(kx)}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \xi^2\right)\right\}\left(\xi \pm \frac{\partial}{\partial \xi}\right) \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{ i\frac{(kx)}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \xi^2\right)\right\} = e^{\mp i(kx)}\left(\xi \pm \frac{\partial}{\partial \xi}\right), \tag{2.5}$$

то будем иметь следующее уравнение для неизвестной функции Φ:

$$\left\{\gamma_\mu\left[\frac{\partial}{\partial x_\mu}-i b_\mu \xi+\frac{i k_\mu}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}-\xi^2\right)\right]+m\right\}\Phi=0, \quad (2.6)$$

$$b_\mu = e\cdot e_\mu / (\omega\Omega)^{1/2}. \quad (2.7)$$

Переход от уравнения (2.I) к уравнению (2.6) представляет собой каноническое преобразование. В связи с этим интересно отметить, что если вместо U_1 использовать

$$U_1' = \exp\left\{-\frac{i\omega x_0}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}-\xi^2\right)\right\}. \quad (2.8)$$

и от матриц γ перейти [210] к матрицам Дирака $\vec{\alpha}$ и β, то вместо уравнения (2.6) получим уравнение, употребляемое в квантовой электродинамике в гамильтоновом формализме [212]. Полный гамильтониам при этом будет состоять из гамильтонианов свободного электрона, свободного поля монохроматической волны и не зависящего от времени гамильтониана взаимодействия.

Так как уравнение (2.6) содержит переменные x_μ только в качестве производных, то естественно его решение искать в виде

$$\Phi = e^{i(qx)}\varphi(\xi), \quad (2.9),$$

где $q(\vec{q}, iq_0)$ - постоянный четырехмерный вектор, а φ зависит только от переменной ξ. В результате подстановки (2.9) в уравнение (2.6) получим

$$\left[\hat{q}-\hat{b}\xi+\frac{\hat{k}}{2}\left(\frac{d^2}{d\xi^2}-\xi^2\right)-im\right]\varphi=0. \quad (2.10).$$

Желательно было бы избавиться в этом уравнении от члена, содержащего $\hat{b}$. Этого действительно можно достичь с помощью подстановки

$$f = U_2 V, \quad U_2 = \exp\{l\hat{k}\hat{b}\xi\} = 1 + l\hat{k}\hat{b}\xi, \tag{2.11}$$

где l - пока произвольная постоянная. Последнее равенство легко проверяется, если учесть, что

$$\hat{k}\hat{b} + \hat{b}\hat{k} = 2(bk), \quad (bk) = 0, \quad k^2 = 0. \tag{2.12}$$

Подставив функцию (2.11) в уравнение (2.10) и умножив последнее слева на $U_2^+ = \exp\{-l\hat{k}\hat{b}\xi\}$, придем к следующему уравнению для функции V:

$$\Big\{\hat{q} - \hat{b}[1 - 2l(qk)]\xi + \frac{\hat{k}}{2}\Big[\frac{d^2}{d\xi^2} - \xi^2 - 4l(qb)\xi -$$

$$- 4b^2l^2(qk)\xi^2 + 4b^2l\xi^2\Big] - im\Big\}V = 0 \tag{2.13}$$

Если произвольную постоянную l положить равной

$$l = 1/2(qk), \tag{2.14}$$

то уравнение (2.13) примет вид

$$\Big\{\hat{q} + \frac{\hat{k}}{2}\Big[\frac{d^2}{d\xi^2} - \xi^2 - \frac{2(qb)}{(qk)}\xi + \frac{b^2}{(qk)}\xi^2\Big] - im\Big\}V = 0 \tag{2.15}$$

Перейдем далее к переменной

$$\eta = \tau(\xi + \varkappa), \tag{2.16}$$

где

$$\tau^4 = 1 - b^2/(qk), \quad \varkappa = (qb)/(qk)\tau^4. \tag{2.17}$$

Тогда окончательно получим следующее уравнение:

$$\left[\hat{q} + \frac{\hat{k}\tau^2}{2}\left(\frac{d^2}{d\eta^2} - \eta^2 + \varkappa^2\tau^2\right) - im\right]v = 0 \qquad (2.18).$$

Его решение, конечное при $\eta \to \infty$, представляет собой произведение собственной функции гармонического осциллятора [213] и постоянного биспинора u

$$v = H_n(\eta)\exp(-\eta^2/2)u, \qquad (2.19),$$

где $H_n(\eta)$ - полиномы Эрмита степени n. Постоянный биспинор удовлетворяет такому же уравнению, как и в случае свободного электрона,

$$(\hat{p} - im)u = 0 \qquad (2.20),$$

где

$$p_\mu = q_\mu - k_\mu\tau^2\left[n + 1/2 - \varkappa^2\tau^2/2\right]. \qquad (2.21)$$

Собрав вместе все подстановки (2.4), (2.9), (2.11) и (2.19), получим, что волновая функция, удовлетворяющая уравнению (2.1) с потенциалом (2.2), имеет вид

$$\psi_{qn} = N\exp\left\{i(qx) + \frac{i(kx)}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - \xi^2\right)\right\}\cdot \left(1 + \frac{\hat{k}\hat{b}}{2(qk)}\xi\right)H_n(\eta)\exp\{-\eta^2/2\}u, \qquad (2.22),$$

где N - нормировочный множитель.

Отметим, что аналогично может быть найдено решение уравнения Клейна-Гордона с потенциалом (2.2). Это решение совпадает с функцией (2.22), если в последней круглую скобку, содержащую γ -матрицы, и постоянный биспинор u положить равными единице.

Если взаимодействие между электроном и полем монохроматической волны отсутствует, т.е. $b_\mu = 0$, то $\tau = 1$, $\varkappa = 0$, переменная η переходит в ξ и вместо волновой функции (2.22) имеем

$$\psi_{qn} = N \exp\{i(qx) - i(kx)(n+1/2) - \xi^2/2\} H_n(\xi) u \quad (2.23).$$

Функция (2.23) является собственной функцией оператора импульса монохроматической волны $\frac{1}{2} k_\mu (\xi^2 - \partial^2/\partial\xi^2)$ и оператора импульса электрона $p_\mu = q_\mu - k_\mu (n+1/2)$. Отсюда видно, что введенный ранее четырехмерный вектор q_μ представляет собой полный импульс системы. Этот вектор является сохраняющимся и в случае присутствия взаимодействия. Хотя при $b_\mu \neq 0$ не сохраняется в отдельности ни импульс электрона, ни импульс монохроматической волны, но сохраняется квазиимпульс монохроматической волны

$$\bar{k}_\mu = k_\mu \tau^2 [(n+1/2) - \varkappa^2 \tau^2/2], \quad (2.24),$$

являющийся собственным значением оператора

$$L = \frac{k_\mu \tau^2}{2} U_1 U_2 \left(\eta^2 - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \varkappa^2 \tau^2\right) U_2^+ U_1^+ =$$

$$= \frac{k_\mu}{2}\left[\xi^2 - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{2e(qA)}{(qk)} - \frac{e^2 A^2}{(qk)} - i\frac{e}{2(qk)} \gamma_\nu \gamma_\sigma F_{\nu\sigma}\right], \quad (2.25),$$

где $F_{\nu\sigma} = \partial A_\sigma/\partial x_\nu - \partial A_\nu/\partial x_\sigma$ - тензор напряженности электромагнитного поля, а потенциал A_μ определен как оператор выражением (2.2). Сохраняется и квазиимпульс электрона $\bar{p}_\mu$, равный $q_\mu - \bar{k}_\mu$. Соответствующий ему оператор равен разности оператора полного импульса системы и оператора L. Если вернуться к уравнению (2.20), то видно, что для квазиимпульса электрона имеет место такое же соотношение, как и для импульса свободного электрона

$$p^2 + m^2 = 0 \qquad (2.26).$$

Отметим еще следующее свойство функций ψ_{qn}: так как $(qk)=(pk)$ и $(qe)=(pe)$, то волновая функция не изменит своего вида, если вместо полного импульса q_μ подставить квазиимпульс электрона p_μ. Появится при этом только дополнительный множитель $\exp\{i(kx)\}$.

Условие ортогональности функции ψ_{pn} проще рассмотреть в системе координат, ось 3 которой совпадает с направлением распространения электромагнитной волны. В этой системе координат $p_1 = q_1$, $p_2 = q_2$, $p_3 - p_0 = q_3 - q_0$, $(pk) = k_0(p_3 - p_0)$, а произведение (pb) зависит только от компонент p_1 и p_2. В этой системе координат функции ψ_{pn} ортогональны в следующем смысле

$$\int \psi^+_{p'n'} \psi_{pn} dx_1 dx_2 dx_3' d\xi =$$

$$= N^2 \pi^{1/2} 2^n n! \tau^{-1} \delta_{n'n} \delta_{p_1' p_1} \delta_{p_2' p_2} \delta_{p_3'-p_0', p_3-p_0}, \qquad (2.27),$$

где переменная $x_3' = x_3 + x_0$. Здесь учтено условие ортогональности собственных функций гармонического осциллятора от одинакового аргумента, нормировочный объем положен равным единице и принято, что $u^+ u = 1$. Если множитель перед символами Кронекера в правой части равенства (2.27) выбрать равным единице, то нормировочный множитель

$$N = (\pi^{1/2} 2^n n! \tau^{-1})^{-1/2} \qquad (2.28).$$

Выражение (2.22) для функции ψ_{pn} неудобно в том отношении, что в нем явно не вычислено действие оператора U_1 на стоящую за ним функцию. Но это нетрудно сделать. Во-первых, можно перенести оператор U_1 за стоящую за ним круглую скобку. Если учесть тождество (2.5), то в результате такого переноса множитель $\hat{b}\xi$ во втором члене в круглых скобках следует заменить на $e\hat{A}$, где оператор A_μ определен согласно (2.2). Во-вторых, действие оператора U_1 на осцилляторную волновую функцию от переменной η можно вычислить, если разложить последнюю по системе невозмущенных осцилляторных функций от переменной ξ. В результате

$$\psi_{pn} = N e^{i(qx)}\left(1 + \frac{e\hat{k}\hat{A}}{2(pk)}\right) u F_n, \tag{2.29}$$

$$F_n = U_1 H_n(\eta)\exp\{-\eta^2/2\} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \exp\{-i(kx)(m+1/2)\}\beta_m^n H_m(\xi)\exp\{-\xi^2/2\}, \tag{2.30}$$

$$\beta_m^n = \frac{1}{\pi^{1/2} 2^m m!}\int d\xi\, H_n(\eta) H_m(\xi)\exp\left\{-\frac{\xi^2+\eta^2}{2}\right\}. \tag{2.31}$$

Интеграл (2.31) можно вычислить с помощью производящей функции [213]. Сравнивая выражения (2.29), (2.30) и (2.23), можно заключить, что если в отсутствии взаимодействия между электроном и квантованной волной осциллятор находился в состоянии n, то взаимодействие привело к тому, что в волновой функции системы присутствуют все состояния невозмущенного осциллятора. Если не обращать внимание на второй член в круглых скобках функции (2.29), который вовсе отсутствует для бесспинового электрона, описываемого уравнением Клейна–Гордона, то видно, что вероятность находится осциллятору в состоянии m пропорциональна $|\beta_m^n|^2$.

Скалярная функция F_n может быть преобразована к более замкнутому виду. Для этого необходимо в формуле (2.30) поменять местами суммирование и интегрирование, в результате чего сумму под знаком интеграла можно свернуть с помощью формулы Мелера [2I4] для многочленов Эрмита. Выполнив после этого еще интегрирование [2I4], получили окончательно

$$F_n = \left\{ \frac{2z\,[1+z^2-\tau^2(1-z^2)]^n}{[1+z^2+\tau^2(1-z^2)]^{n+1}} \right\}^{1/2} H_n\left(\frac{\tau[x(1+z^2)+2z\xi]}{[(1+z^2)^2-\tau^4(1-z^2)^2]^{1/2}} \right) \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{ \frac{\xi^2[z^2-1-\tau^2(1+z^2)]-4\tau^2 x z\xi-\tau^2 x^2(1+z^2)}{2[1+z^2+\tau^2(1-z^2)]} \right\}, \qquad (2.32),$$

где

$$z = \exp\{-i(kx)\}. \qquad (2.33).$$

Волновая функция (2.22) или (2.29) и (2.32) описывает систему из взаимодействующих между собой электрона и n фотонов. Поскольку любая линейная комбинация функций ψ_{pn} тоже будет решением уравнения (2.I), то можно найти такую волновую функцию, которая будет описывать движение электрона в поле волны с заданным распределением по числам заполнения фотонов. В частности, можно найти волновую функцию, описывающую движение электрона в так называемой когерентной световой волне. В противоположность совершенно неопределенной фазе волны, состоящей из n фотонов [I6], фаза когерентной волны вполне определена. По аналогии с образованием когерентного состояния [I5, I6] составим линейную комбинацию из функций ψ_{pn} :

$$\psi_{p\bar{n}} = \exp\{-\bar{n}/2\}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^{n/2}}{\sqrt{n!}} e^{i\theta n}\psi_{pn}, \tag{2.34}$$

где $\bar{n}^{1/2}e^{i\theta}$ равно комплексному числу α, введенному Глаубером [I5], $\bar{n}$ - среднее число фотонов, а θ - фаза световой волны, которую впредь положим равной нулю. Если учесть выражение (2.29), (2.32) и (2.2I), то с помощью производящей функции нетрудно вычислить сумму по n в волновой функции (2.34).

Рассмотрим теперь предел функции (2.34), когда среднее число фотонов $\bar{n}$ и нормировочный объем Ω стремятся к бесконечности, но так, чтобы среднее число фотонов в единице объема $\bar{n}/\Omega$ оставалось конечным. Учтем ещё, что когерентное состояние описывает волновой пакет с центром в точке $\xi_0 = (2\bar{n})^{1/2}$. Волновая функция (2.34) поэтому будет заметно отличаться от нуля только при $\xi \sim (2\bar{n})^{1/2}$ или $\varsigma = \xi - (2\bar{n})^{1/2}$ порядка единицы. Если теперь выполнить указанные выше суммирование и предельный переход, то волновая функция (2.34) примет вид

$$\psi_p = \frac{1}{\pi^{1/4}}\left[1 + \frac{e\hat{k}\hat{a}}{2(pk)}\cos(kx)\right]\exp\Big\{-\varsigma^2/2 + i(px) -$$

$$- i\frac{ea^2}{4(pk)}(kx) + i\frac{e(ap)}{(pk)}\sin(kx) - i\frac{e^2a^2}{8(pk)}\sin 2(kx)\Big\}. \tag{2.35}$$

$$a_\mu = e_\mu\,(2\bar{n}/\omega\Omega)^{1/2}. \tag{2.36}$$

Функция (2.35) совпадает с решением Волкова [I, 2] для монохроматической волны с точностью до множителя $\pi^{-1/4}\exp(-\varsigma^2/2)$, представляющего собой собственную функцию осциллятора для основного состояния. Решение Волкова описывает движение электрона в когерентной световой волне, заполняющей все пространство со средней плотностью энергии $\omega^2a^2/2 = \omega\bar{n}/\Omega$.

Таким образом, решению Волкова для электрона в классическом поле электромагнитной волны в квантовом случае соответствует специальная комбинация (2.34) решений ψ_{pn} уравнения (2.I). Эта комбинация описывает электрон в когерентной световой волне. В сильном поле излучения, когда число фотонов в волне велико, классическое и квантовое описания приводят к одинаковым результатам. Отличие будет наблюдаться только при небольших числах фотонов. Другая комбинация решений ψ_{pn} будет соответствовать другой статистике поля электромагнитной волны.

2.2. Плоская волна

Решение уравнения (2.I) может быть найдено не только в случае монохроматической волны, описываемой потенциалом (2.2), но и для произвольной плоской электромагнитной волны. Если квантование плоской электромагнитной волны проводить в кубе с длиной ребра L и если плоская волна распространяется вдоль одного из ребер куба, то волновой вектор k_μ может принимать только значения

$$k_\mu = (n\vec{\varkappa}, in\varkappa_0) \quad , |\vec{\varkappa}| = |\varkappa_0| = 2\pi/L, \qquad (2.37)$$
$$n = 1, 2, 3 \ldots$$

Векторный потенциал квантованного поля такой волны может быть представлен в виде [210]

$$A_\mu = \sum_{\substack{n=1 \\ s=1,2}}^{\infty} \frac{e_{s\mu}}{\sqrt{2n\varkappa_0 L^3}} \left[C_{ns} e^{in(\varkappa x)} + C^+_{ns} e^{-in(\varkappa x)} \right], \qquad (2.38),$$

$$(e_s \varkappa) = (e_1 e_2) = \varkappa^2 = 0. \qquad (2.39).$$

Два единичных вектора $e_{1\mu}$ и $e_{2\mu}$ отвечают двум возможным состояниям поперечной поляризации электромагнитной волны.

Если для операторов рождения C^+_{ns} и уничтожения C_{ns} использовать представление (2.3) и волновую функцию Ψ искать в виде

$$\Psi = U_1 \Phi, \quad U_1 = \exp\Big\{ i \frac{(\varkappa x)}{2} \sum_{ns} n \Big(\frac{\partial^2}{\partial \xi_{ns}^2} - \xi_{ns}^2 \Big) \Big\}, \tag{2.40}$$

то получим следующее уравнение для функции Φ:

$$\Big\{ \gamma_\mu \Big[\frac{\partial}{\partial x_\mu} - i \sum_{ns} \frac{b_{s\mu} \xi_{ns}}{\sqrt{n}} + i \frac{\varkappa_\mu}{2} \sum_{ns} n \Big(\frac{\partial^2}{\partial \xi_{ns}^2} - \xi_{ns}^2 \Big) \Big] + m \Big\} \Phi = 0, \tag{2.41}$$

$$b_{s\mu} = b e_{s\mu}, \quad b = e / \sqrt{\varkappa_0 L^3}. \tag{2.42}$$

Решение уравнения (2.41) можно представить как

$$\Phi = \exp\{ i (qx) \} \varphi, \tag{2.43}$$

где постоянный четырехмерный вектор q_μ имеет смысл полного импульса системы. Если независящую от координат электрона функцию φ искать в виде

$$\varphi = U_2 V, \quad U_2 = \exp\Big\{ \frac{\hat{\varkappa}}{2(q\varkappa)} \sum_{ns} \frac{\hat{b}_s \xi_{ns}}{\sqrt{n}} \Big\} = 1 + \frac{\hat{\varkappa}}{2(q\varkappa)} \sum_{ns} \frac{\hat{b}_s \xi_{ns}}{\sqrt{n}}, \tag{2.44}$$

то для неизвестной функции V получим уравнение

$$\Big\{ \hat{q} + \frac{\hat{\varkappa}}{2} \sum_s \Big[\sum_n n \Big(\frac{\partial^2}{\partial \xi_{ns}^2} - \xi_{ns}^2 \Big) - 2\alpha_s \sum_n \frac{\xi_{ns}}{\sqrt{n}} + \beta \Big(\sum_n \frac{\xi_{ns}}{\sqrt{n}} \Big)^2 \Big] - i m \Big\} V = 0, \tag{2.45}$$

$$\alpha_s = \frac{(q\, b_s)}{(q\varkappa)}, \quad \beta = \frac{b^2}{(q\varkappa)} \qquad (2.46).$$

Как видно, все полевые переменные электромагнитной волны заключены в этом уравнении в квадратной скобке, не содержащей γ-матриц. Существенно также, что переменные относящиеся к двум различным поляризациям, не перемешаны. Поэтому решение уравнения (2.45) можно искать в виде

$$V = f_1 f_2 u \qquad (2.47),$$

где постоянный биспинор u удовлетворяет уравнению

$$[\hat{q} - \hat{\varkappa}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - im]u = 0, \qquad (2.48),$$

а функции f_s уравнению

$$\Big[\sum_n n\Big(\frac{\partial^2}{\partial \xi_{ns}^2} - \xi_{ns}^2\Big) - 2\alpha_s \sum_n \frac{\xi_{ns}}{\sqrt{n}} + \beta\Big(\sum_n \frac{\xi_{ns}}{\sqrt{n}}\Big)^2 + 2\varepsilon_s\Big] f_s = 0 \qquad (2.49).$$

Из уравнения (2.49) следует, что оно описывает систему связанных гармонических осцилляторов. Так как функции f_s удовлетворяют одинаковым уравнениям, то в дальнейшем сосредоточим внимание на одном из них и для простоты записи опустим индекс поляризации s.

Прежде всего избавимся в уравнении (2.49) от членов, линейных по ξ_n, и изменим масштаб переменных так, чтобы коэффициенты при вторых производных были равны единице. Для этого перейдем в уравнении (2.49) к переменным

$$z_n = n^{-1/2}\xi_n + a_n \qquad (2.50).$$

Приравняв нулю коэффициент при z_n, получим уравнение для определения a_n

$$n^2 a_n - \alpha - \beta \sum_{m=1}^{\infty} a_m = 0, \qquad (2.51),$$

откуда

$$a_n = \frac{\alpha}{n^2(1-\pi^2\beta/6)} \qquad (2.52).$$

В новых переменных уравнение (2.49) выглядит следующим образом:

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial z_n^2} - \sum_{n,m=1}^{\infty} (n^2\delta_{nm} - \beta) z_n z_m + \right.$$

$$\left. + 2\varepsilon + \frac{\alpha^2\pi^2}{6(1-\pi^2\beta/6)} \right] f = 0 \qquad (2.53).$$

В уравнении (2.53) можно произвести ортогональное преобразование от переменных z_n к новым переменным y_n так, чтобы квадратичная форма в ней стала диагональной. Ортогональное преобразование связывает переменные z_n и y_n следующим образом:

$$z = Dy\ ,\ y = D^{-1}z\ ,\ DD^{-1} = 1 \qquad (2.54)$$

Здесь через z и y обозначены одностолбцовые матрицы из переменных z_n и y_n соответственно, а обратная матрица D^{-1} получается из D путем замены строк столбцами. Как известно [215], для приведения квадратичной формы к диагональному виду необходимо, чтобы равнялся нулю характеристический определитель матрицы, составленной из коэффициентов этой квадратичной формы, т.е.

$$|(n^2 - \lambda^2)\delta_{nm} - \beta| = 0 \qquad (2.55).$$

Определитель этот легко вычисляется, и в результате уравнение (2.55) преобразуется к виду

$$\prod_{m=1}^{\infty}(m^2-\lambda^2)\left[1-\beta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\lambda^2}\right]=0 \qquad (2.56).$$

Отсюда следует, что характеристические числа определяются уравнением

$$(2\lambda^2-\beta)\,\mathrm{tg}\,\pi\lambda+\beta\pi\lambda=0 \qquad (2.57)$$

Интересно отметить, что похожее характеристическое уравнение получил Ван Кампен [42] при исследовании взаимодействия электрона, описываемого уравнением Шредингера, с квантованным электромагнитным полем в дипольном приближении.

Из уравнения (2.57) видно, что при $\beta=0$ характеристические числа равны целым числам, как и должно быть для несвязанных осцилляторов. Согласно определению (2.38), необходимо рассматривать только положительные характеристические числа. При $\beta\neq 0$ они будут несколько отличаться от целых чисел. Для малых β это отличие можно искать в виде ряда по β. Нетрудно получить, что с точностью до β^3

$$\lambda_k \approx k-\frac{\beta}{2k}-\frac{\beta^2}{2k^3}-\beta^3\left(\frac{7}{8k^5}-\frac{\pi^2}{24k^3}\right) \qquad (2.58).$$

Как видно, отклонение λ_k от целого числа k тем меньше, чем больше k.

Поскольку все корни различны, то элементы k-того столбца матрицы D пропорциональны минорам определителя (2.55), в котором λ заменено на λ_k. Вычисление миноров приводит к следующему выражению для элементов матрицы D:

$$d_{nk}=\frac{d_k}{n^2-\lambda_k^2} \qquad (2.59).$$

Коэффициент пропорциональности d_k можно определить из того, что согласно (2.54) должно выполняться равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_k d_m}{(n^2-\lambda_k^2)(n^2-\lambda_m^2)} = \delta_{km} \qquad (2.60).$$

Учитывая то, что λ_k и λ_m удовлетворяют уравнению (2.56), можно вычислить сумму в выражении (2.60). При $k \neq m$ она равна нулю. При $k=m$ она отлична от нуля, и равенство (2.60) позволяет определить d_k. В результате элементы матрицы D равны

$$d_{nk} = \frac{\beta \lambda_k}{(n^2-\lambda_k^2)\left[\lambda_k^2 - 3\beta/2\,(1-\beta\pi^2/6)\right]^{1/2}} \qquad (2.61).$$

В новых переменных y_k квадратичная форма в уравнении (2.53) диагональна, переменные поэтому разделяются и собственные функции уравнения (2.53) имеют вид

$$f = \prod_{k=1}^{\infty} f_k , \qquad (2.62)$$

$$f_k = \left[\frac{\lambda_k^{1/2}}{\pi^{1/2}\, 2^{n_k} n_k!}\right]^{1/2} H_{n_k}(\lambda_k^{1/2} y_k)\, e^{-\frac{\lambda_k y_k^2}{2}} .$$

Собственные значения уравнения (2.53) равны

$$\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (n_k + 1/2) - \frac{\alpha^2 \pi^2}{12(1-\beta\pi^2/6)} . \qquad (2.63).$$

Волновая функция ψ исходного уравнения (2.I) с потенциалом (2.38), следовательно, определяется выражениями (2.40), (2.43), (2.44), (2.47) и (2.62). Приёмом, изложенным в предидущем параграфе, может быть образована суперпозиция из таких волновых функций и совершен предельный переход к волновой функции Волкова, описывающей движение электрона в плоской электромагнитной волне.

Из уравнения (2.48) следует, что полный импульс системы должен удовлетворять уравнению

$$q^2 - 2(q\varkappa)(\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2) + m^2 = 0 \qquad (2.64).$$

Удобно перейти от полного импульса к импульсу электрона. Последний, однако, можно ввести по-разному. Например,

$$p_\mu = q_\mu - \varkappa_\mu(\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2) \qquad (2.65)$$

$$\bar{p}_\mu = q_\mu - \varkappa_\mu \sum_k (n_{1k} + n_{2k} + 1) \qquad (2.66)$$

Условимся называть p_μ импульсом, а $\bar{p}_\mu$ - квазимпульсом электрона. Из выражений (2.64) и (2.65) следует, что p_μ удовлетворяет такому же соотношению, как и для свободного электрона: $p^2 + m^2 = 0$. Если в уравнении (2.64) перейти к квазимпульсу $\bar{p}_\mu$ и учесть выражения (2.46), (2.58) и (2.63), то с точностью до членов порядка β^2 его можно представить следующим образом:

$$\bar{p}^2 + m^2 + b^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(n_{1k} + n_{2k} + 1) + \frac{\pi^2 b^2 [(\bar{p}e_1)^2 + (\bar{p}e_2)^2]}{6[(\bar{p}\varkappa) - \pi^2 b^2/6]} +$$

$$+ \frac{b^4}{(\bar{p}\varkappa)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}(n_{1k} + n_{2k} + 1) = 0, \qquad (2.67),$$

где согласно (2.42) $b^2 = e^2/\varkappa_0 L^3$.

Как видно, третий член в уравнении (2.67) не зависит от квазимпульса электрона, поэтому его можно рассматривать как добавку к массе электрона, возникающую в результате взаимодействия электрона с электромагнитным полем плоской волны. Введем эффективную массу m_*:

$$m_*^2 = m^2 + \frac{e^2}{\varkappa_0 L^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(n_{1k} + n_{2k} + 1). \qquad (2.68).$$

Для вакуумного состояния, когда все $n_{1k}=n_{2k}=0$, добавка к массе содержит логарифмически расходящуюся сумму, но коэффициент при этой сумме пропорционален L^{-2} и может быть сделан сколь угодно малым при увеличении объема квантования. В другом предельном случае - классическом - число квантов n_{sk} и объем квантования устремляются к бесконечности, но так, что число квантов в единице объема n_{sk}/L^3 остается конечным. В этом случае операторы c_{ks} и c_{ks}^+ можно заменить c-числами $(n_{ks})^{1/2}\exp(i\vartheta_{ks})$ и $(n_{ks})^{1/2}\exp(-i\vartheta_{ks})$ соответственно, где ϑ_{ks} -фаза. Тогда выражение (2.38) представляет собой ряд Фурье плоской волны. Сравнивая это разложение с выражением (2.68), видим, что к квадрату массы электрона, движущегося в классической электромагнитной волне, добавляется известный [7,45,216] член e^2A^2. Что касается двух последних слагаемых в выражении (2.67), то они появляются только для квантованного электромагнитного поля. При $L\to\infty$ ими и членами более высокого порядка по e^2 можно пренебречь. Тогда квазиимпульс электрона $\bar{p}_\mu$ удовлетворяет соотношению $\bar{p}^2+m_*^2=0$, полученному при рассмотрении движения электрона в классической электромагнитной волне [7,45,216].

Решение уравнения (2.1) с потенциалом (2.38) было потом найдено также в работах [26,27].

Отметим, что если в уравнении (2.1) вместо потенциала плоской волны (2.38) подставить оператор потенциала всего электромагнитного поля, то аналогично (2.40) может быть введен унитарный оператор U_1 и волновая функция представлена в виде (2.43). Но оператор U_2, аналогичный (2.44), не приводит в данном случае к разделению спиновых и полевых переменных. Если исходить не из уравнения Дирака, а из уравнения Клейна-Гордона, которое не содержит спиновых переменных, то получится уравнение, аналоличное уравнению для полярона большого радиуса [44]. Последнее было исследовано с помощью разнообразных методов, преимущественно вариационных.

2.3. Монохроматическая электромагнитная волна и магнитное поле, параллельное направлению распространения волны

Уравнение (2.I) может быть решено и в случае, когда на электрон кроме монохроматической волны действует еще постоянное магнитное поле, приложенное в направлении распространения волны. Выберем это направление за ось z и будем рассматривать волну с правой круговой поляризацией. Оператор вектор потенциала этих полей тогда можно представить в виде [2I0]

$$A_\mu = Hy e_{1\mu} + \frac{1}{2\sqrt{\omega\Omega}}\left[(e_{1\mu} - i e_{2\mu}) c\, e^{i(kx)} + \right.$$

$$\left. + (e_{1\mu} + i e_{2\mu}) c^+ e^{-i(kx)}\right], \qquad (2.69),$$

где H - величина постоянного магнитного поля, а векторы поляризации $e_{1\mu}$ и $e_{2\mu}$ и волновой вектор k_μ имеют следующие компоненты в выбранной нами системе координат

$$e_{1\mu}(1,0,0,0),\ e_2(0,1,0,0),\ k_\mu(0,0,\omega,i\omega) \qquad (2.70).$$

Поэтому

$$(e_1 e_2) = (e_1 k) = (e_2 k) = k^2 = 0 \qquad (2.7I).$$

Если от волновой функции ψ перейти к функции Φ, а потом и к φ таким же образом как в параграфе 2.I, то для функции φ получим следующее уравнение:

$$[\hat{q} - i\hat{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} - \hat{b}_1 \xi - i\hat{b}_2 \frac{\partial}{\partial \xi} - \hat{h} y +$$
$$+ \frac{\hat{k}}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \xi^2\right) - im] \varphi = 0 \qquad (2.72),$$

$$h_\mu = eH e_{1\mu} \qquad (2.73).$$

Здесь постоянный четырехмерный вектор $q_\mu(q_1, 0, q_3, iq_0)$ имеет нулевую компоненту по оси y, а функция φ зависит от переменных ξ и y.

Сделаем в этом уравнении подстановку

$$\varphi = U_2 V,\ U_2 = 1 + A,\ U_2^+ = 1 - A,\ U_2^+ U_2 = 1$$
$$A = \frac{\hat{k}}{2(qk)}\left[\hat{e}_1(hy + b\xi) + i\hat{e}_2\left(\frac{\partial}{\partial y} - b\frac{\partial}{\partial \xi}\right)\right]. \qquad (2.74).$$

Если умножить уравнение (2.72) слева на U_2^+, то придем к следующему уравнению для неизвестной функции V:

$$\left[\hat{q} + i\,\frac{(b^2 - h)}{2(qk)}\hat{k}\hat{e}_1\hat{e}_2 - \frac{\hat{k}}{2(qk)} L - im\right] V = 0 \qquad (2.75),$$

где переменные ξ и y и их производные заключены только в независящем от γ-матриц операторе

$$L = [b^2 - (qk)]\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \xi^2\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - h^2 y^2 - 2b\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial y} -$$
$$- 2bhy\xi + 2q_1(hy + b\xi). \qquad (2.76).$$

Решение уравнения (2.75) поэтому можно представить в виде произведения скалярной функции f от переменных ξ и y и постоянного биспинора u:

$$V = fu,\ Lf = \lambda f. \qquad (2.77).$$

Постоянный биспинор u удовлетворяет уравнению (2.75) с постоянной λ вместо оператора L.

Уравнение (2.77) для скалярной функции f описывает два осциллятора, связанных билинейными силами. Это хорошо известная задача квантовой механики, и нахождение ее решения не представляет труда. Окончательное выражение для нормированных собственных функций, удовлетворяющих уравнению (2.77), имеет вид

$$f_{ns} = \frac{H_n(\eta_1) H_s(\eta_2)}{\sqrt{\pi\, 2^{n+s}\, n!\, s!}} \exp\left(-\frac{\eta_1^2+\eta_2^2}{2}\right). \qquad (2.78).$$

Переменные η_1 и η_2 выражаются через переменные ξ и y следующим образом:

$$\eta_1 = \left[\frac{l+h+\delta}{2\delta}\right]^{1/2}\left[\xi - \frac{d}{l+h+\delta}\varsigma\right],$$

$$\eta_2 = \left[\frac{l+h+\delta}{2\delta}\right]^{1/2}\left[\frac{l+h-\delta}{d}\xi + \varsigma\right],$$

$$\varsigma = \sqrt{h}\left(y - \frac{q_1}{\sqrt{h}}\right), \quad \delta = \left[(l+h)^2 - d^2\right]^{1/2},$$

$$d = 2bh^{1/2}, \quad l = b^2 - (qk). \qquad (2.79).$$

Собственное значение λ, соответствующее собственной функции (2.78), равно

$$\lambda_{ns} = (h-l-\delta)(n+1/2) + (l-h-\delta)(s+1/2) + q_1^2 \qquad (2.80).$$

Собственное значение полной энергии q_0 можно найти, если приравнять нулю детерминант уравнения (2.75) с λ_{ns} вместо оператора L. Тогда получим, что

$$(q_0^2 - q_1^2 - q_3^2 - m^2 + \lambda_{ns})^2 - (b^2-h)^2 = 0 \qquad (2.81).$$

Отметим, что λ_{ns} согласно (2.80) и (2.79) зависит от q_0.

Если взаимодействие между электроном и электромагнитной волной отсутствует, т.е. $b=0$, то решения уравнения (2.81) равны

$$q_0^0=(n+1/2)\omega\pm\{[q_3-(n+1/2)\omega]^2+m^2+h(2s-\gamma+1)\}^{1/2} \quad (2.82).$$

Здесь два значения $\gamma=\pm 1$ соответствуют двум возможным спиновым состояниям электрона, а разность $q_3-(n+1/2)\omega$ равна импульсу электрона в направлении оси z. Как следует из выражения (2.82), при $b=0$ полная энергия равна энергии свободной квантованной волны плюс энергия электрона в магнитном поле [210]. Нетрудно найти из уравнения (2.81) первую поправку к q_0^0 порядка b^2. Она равна

$$q_0^1=b^2\frac{(2n+\gamma+1)(q_3-q_0^0)\omega+(2s-\gamma+1)h}{[2q_0^0-(2n+1)\omega][(q_3-q_0^0)\omega-h]}. \quad (2.83).$$

Если собрать вместе все подстановки, то получим следующее выражение для волновой функции, удовлетворяющей уравнению (2.1) с потенциалом (2.69)

$$\Psi_{qns}=exp\{i(qx)+i\frac{(kx)}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-\xi^2\right)\}.$$

$$\{1+\frac{\hat{k}}{2(qk)}[\hat{e}_1(hy+b\xi)+i\hat{e}_2(\frac{\partial}{\partial y}-b\frac{\partial}{\partial\xi})]\}f_{ns}u. \quad (2.84).$$

Также как и для волновой функции (2.22), замена полного импульса q_μ квазиимпульсом

$$p_\mu=q_\mu-\frac{k_\mu}{2(qk)}(h-l-\delta)(n+1/2) \quad (2.85)$$

не меняет вида функции (2.84). Появляется при этом только дополнительный множитель $exp\{i(px)-i(qx)\}$.

Решение уравнения Клейна-Гордона с потенциалом (2.69) отличаются от (2.84) только тем, что в (2.84) фигурная скобка, содержащая γ -матрицы, и биспинор равны единице. Собственные значения определяются уравнением (2.8I) без последнего члена в левой части.

Аналогично волновой функции (2.34) в случае отсутствия магнитного поля можно образовать линейную комбинацию из функций (2.84) и перейти к пределу, когда среднее число фотонов $\bar{n}$ и нормировочный объем Ω стремятся к бесконечности, но так, что среднее число фотонов в единице объема $\bar{n}/\Omega$ остается конечным. После выполнения такого предельного перехода получим волновую функцию

$$\psi_{ps} = \left\{1 + \frac{\hat{k}}{2(pk)}\left(\hat{e}_1 \hat{A}' + i\hat{e}_2 \frac{\partial}{\partial y}\right)\right\} \frac{u}{\sqrt{\pi 2^s s!}} \cdot$$

$$\cdot H_s\left[\xi + a\chi\cos(kx)\right] \exp\left\{i(px) - \frac{1}{2}(\xi - \sqrt{2\bar{n}})^2 + \right.$$

$$+ \frac{ie\chi a^2}{\sqrt{h}}(kx) - \frac{1}{2}\left[\xi + a\chi\cos(kx)\right]^2 -$$

$$\left. - ia\chi\xi\sin(kx) + i\frac{a^2\chi^2}{4}\sin 2(kx)\right\}, \qquad (2.86),$$

$$A'_\mu = Hye_{1\mu} + ae_{1\mu}\cos(kx) + ae_{2\mu}\sin(kx) \qquad (2.87)$$

$$a = (\bar{n}/\omega\Omega)^{1/2}, \quad \chi = eh^{1/2}/[h - (pk)] \qquad (2.88)$$

Так как полевая переменная ξ не перемешана с другими переменными и заключена только во втором члене показателя экспоненты, то этот член можно даже опустить. В результате получим решение Редмонда [I2], когда электромагнитная волна описывается классически.

Решение уравнения (2.I) с потенциалом (2.69) было потом получено также в работах [28-3I] и обобщено на случай плоской электромагнитной волны [32,33]. В этих работах обсуждаются особенности поведения системы вблизи циклотронного резонанса и отмечается, что в спектре энергии системы имеются запрещенные области.

2.4. Две монохроматические электромагнитные волны

В этом параграфе рассмотрим движение электрона в поле двух монохроматических волн. Подобная задача рассматривалась в связи с эффектом Капицы-Дирака. Но при рассмотрении этого эффекта обычно исходят из уравнения Шредингера, в котором векторный потенциал усредняют по времени [9,10]. В случае уравнения Дирака эта задача обсуждалась в работе [8]. Ниже рассмотрим как случай классического, так и квантованного поля электромагнитных волн. Для простоты выкладок пренебрежем спиновыми свойствами электрона, поэтому вместо уравнения (2.1) будем рассматривать уравнение Клейна-Гордона

$$\left[\left(i\frac{\partial}{\partial x_\mu}+eA_\mu\right)^2+m^2\right]\psi=0 \qquad (2.89).$$

Рассмотрение проведем в системе координат, в которой обе волны распространяются в противоположных направлениях с одинаковыми частотами. Пусть это направление совпадает с осью z. К такой системе координат всегда можно перейти с помощью преобразования Лоренца, исключая случай двух волн, распространяющихся в одном направлении. Далее предположим, что электрон тоже распространяется вдоль оси z и что обе волны циркулярно поляризованы. Рассмотрим сначала случай классического поля двух таких электромагнитных волн. Их вектор - потенциал имеет вид

$$A_\mu = a_1 [e_{1\mu} \cos(k_1 x) + e_{2\mu} \sin(k_1 x)] +$$

$$+ a_2 [e_{1\mu} \cos(k_2 x) \pm e_{2\mu} \sin(k_2 x)], \qquad (2.90),$$

где a_1 и a_2 - амплитуды волн, а единичные векторы поляризации $e_{1\mu}$ и $e_{2\mu}$ и волновые векторы k_1 и k_2 удовлетворяют условиям:

$$(e_1 e_2) = (e_i k_j) = k_1^2 = k_2^2 = 0 \qquad (2.91).$$

Знаки "+" и "-" в выражении (2.90) относятся соответственно к противоположной и одинаковой круговой поляризациям волн.

Если теперь подставить выражение (2.90) в (2.89), то легко найти, что в случае противоположной поляризации волновая функция равна

$$\psi = f_1(z) \exp(-iEt) \qquad (2.92),$$

где f_1 удовлетворяет уравнению

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + E^2 - m^2 - e^2 (a_1^2 + a_2^2) - 2e^2 a_1 a_2 \cos 2\omega z \right] f_1 = 0 \qquad (2.93).$$

В случае одинаковой поляризации волновая функция равна

$$\psi = f_2(t) \exp(i p_z z) \qquad (2.94),$$

где $f_2(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + p_z^2 + m^2 + e^2 (a_1^2 + a_2^2) + 2e^2 a_1 a_2 \cos 2\omega t \right] f_2 = 0 \qquad (2.95).$$

Здесь E и p_z - энергия и импульс электрона, t - время.

Замечательно то, что в обеих случаях переменные разделяются. Это свойство теряется в случае линейно-поляризованных волн и если учесть компоненты импульса электрона, перпендикулярные направлению распространения волн. Как видно, в первом случае сохраняется энергия электрона и потенциал является периодическим по оси z, а во втором случае сохраняется импульс электрона вдоль оси z и эффективный потенциал периодичен во времени. Уравнения (2.93) и (2.95) являются уравнениями Матье [214]. Остановимся на стационарных решениях этих уравнений в виде распространяющихся волн, так что

$$f_1 = \exp(ip_z' z) \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(in\omega z) \tag{2.96}$$

$$f_2 = \exp(-iE't) \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \exp(-in\omega t), \tag{2.97}$$

где p_z' и E' - действительные характеристические экспоненты и суммы являются периодическими функциями по z и t с периодом $2\pi/\omega$. Стационарные решения уравнений (2.93) и (2.95), однако, существуют не при любых значениях параметров, а только в так называемых зонах устойчивости. Наряду с этими зонами существуют запрещенные зоны по энергии для уравнения (2.93) и по импульсу для уравнения (2.95). В первом случае физическая картина качественно соответствует движению электрона в одномерной решетке в твердом теле. Во втором случае труднее найти аналогичную физическую проблему.

Заметим, что сумма по n в (2.97) распространяется от $-\infty$ до ∞ и поэтому функция f_2 будет содержать члены как с положительными, так и отрицательными частотами. Это значит, что во втором случае будет наблюдаться рождение пар. В практически создаваемых полях, однако, $e^2 a_1 a_2 / m^2 \ll 1$, поэтому движение электрона во втором случае является почти свободным, только слабо возмущенным полем. К тому же, для оптических частот $\omega \ll 2m$ и для рождения пары необходимо поглощение большого числа фотонов от обеих волн. Процесс будет описываться высоким порядком теории возмущений.

Перейдем теперь к случаю квантованного поля электромагнитных волн. Оператор векторного потенциала тогда имеет вид

$$A_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2\omega\Omega}}\left\{ e_\mu^- C_1 \exp[i(k_1x)] + e_\mu^+ C_1^+ \exp[-i(k_1x)]\right\} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\omega\Omega}}\left\{ e_\mu^\mp C_2 \exp[i(k_2x)] + e_\mu^\pm C_2^+ \exp[-i(k_2x)]\right\}. \tag{2.98}$$

$$e_\mu^\pm = \frac{e_{1\mu} \pm i e_{2\mu}}{\sqrt{2}} \tag{2.99}.$$

Верхний (нижний) знак в (2.98) соответствует противоположной (одинаковой) поляризации обеих волн. Для операторов рождения C_i^+ и уничтожения C_i выберем представление (2.3).

Подставив (2.98) в уравнение (2.89) и поступая также как и в предыдущих параграфах, найдем, что волновая функция ψ имеет вид

$$\psi = \exp\left[i(qx) + i\frac{(k_1x)}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2} - \xi_1^2 + 1\right) + \right.$$

$$\left. + i\frac{(k_2x)}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi_2^2} - \xi_2^2 + 1\right)\right]\varphi, \tag{2.100},$$

где $q_\mu(0, 0, q_z, iq_0)$ есть полный момент рассматриваемой системы, а функция φ зависит только от переменных ξ_1 и ξ_2 и удовлетворяет уравнению

$$\left\{\frac{(k_1k_2)}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2} - \xi_1^2 + 1\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi_2^2} - \xi_2^2 + 1\right) + [(qk_1) - h]\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2} - \xi_1^2 + 1\right) + \right.$$

$$+ [(qk_2) - h]\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi_2^2} - \xi_2^2 + 1\right) + 2h\left(\xi_1\xi_2 \mp \frac{\partial^2}{\partial\xi_1\partial\xi_2}\right) +$$

$$\left. + q^2 + m^2 + 2h\right\}\varphi = 0, \tag{2.101},$$

где

$$h = e^2/2\omega\Omega \qquad (2.102).$$

При выводе (2.101) предпологалось, что электрон и фотоны распространяются вдоль оси z. Чтобы не иметь дело с нулевой энергией осцилляторов, в показатель экспоненты (2.100) введен член $i(k_1x)/2 + i(k_2x)/2$.

Рассмотрим сначала случай противоположной поляризации волн, который отвечает знаку "–" в последней круглой скобке уравнения (2.101). В этом случае оператор полного числа фотонов

$$S = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2} - \xi_1^2 + 1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi_2^2} - \xi_2^2 + 1\right) \qquad (2.103)$$

коммутирует с фигурной скобкой уравнения (2.101). Обозначим собственное значение и собственную функцию оператора S через s и φ_s. Величина s может принимать целые неотрицательные значения. Так как полная энергия системы и энергия фотонов $s\omega$ сохраняются, то сохраняется и энергия электрона, что находится в полном согласии со случаем неквантованного поля монохроматических волн, имеющих противоположную поляризацию.

Так как полное число фотонов является хорошим квантовым числом, то решение уравнения (2.101), убывающее при $\xi_1, \xi_2 \to \pm\infty$, можно искать в виде конечного ряда по невозмущенным осцилляторным функциям

$$\varphi_s = \exp\left\{-\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{2}\right\} \sum_{n=0}^{s} C_n^s H_n(\xi_1) H_{s-n}(\xi_2) \qquad (2.104),$$

где H_n – полиномы Эрмита. Если подставим (2.104) в уравнении (2.101) и учтем известные соотношения между смежными полиномами Эрмита [214], то получим следующее рекурентное соотношение для коэффициентов C_n^s:

$$[n(s-n)+d_1 n+\lambda_s]C_n^s - b[(s-n+1)C_{n-1}^s+(n+1)C_{n+1}^s]=0 \quad (2.105).$$

Здесь введены следующие обозначения

$$d_1=\frac{(q k_2)-(q k_1)}{(k_1 k_2)}=\frac{q_z}{\omega},\ b=-\frac{h}{(k_1 k_2)}=\frac{h}{2\omega^2},$$

$$\lambda_s=\frac{q_0^2-q_z^2-m^2-2h-2s[\omega(q_z+q_0)+h]}{4\omega^2} \quad (2.106).$$

Чтобы получить нетривиальные значения для $s+1$ коэффициентов C_n^s, необходимо приравнять нулю детерминант, составленный из коэффициентов при C_n^s. Следовательно, при любом s можно получить $s+1$ различных корней $\lambda_{s\nu}$ и построить соответствующие ортогональные функции $\varphi_{s\nu}(\xi_1,\xi_2)$, где $\nu=0,1,\dots,s$. Зная $\lambda_{s\nu}$ и учитывая (2.106) можем найти полную энергию системы

$$q_0=s\omega\pm[(q_z+s\omega)^2+m^2+2h(s+1)+4\omega^2\lambda_{s\nu}]^{1/2}, \quad (2.107),$$

которая равна сумме энергии фотонов и электрона. Из-за взаимодействия с фотонами последняя отличается от выражения энергии для свободного электрона.

Приведем выражения для $\lambda_{s\nu}$, полной энергии q_0 и нормированных функций $\varphi_{s\nu}$ при $s=0$ и $s=1$.

$$s=0,\ \lambda_{00}=0,$$
$$q_0=\pm(m^2+q_z^2+2h)^{1/2},$$
$$\varphi_{00}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{\xi_1^2+\xi_2^2}{2}\right); \quad (2.108)$$

$$s=1,\ \nu=0,1,\ \lambda_{1\nu}=-\frac{d_1}{2}+(-1)^\nu\left(\frac{d_1^2}{4}+b^2\right)^{1/2},$$
$$q_0=\omega\pm[m^2+q_z^2+\omega^2+4h+(-1)^\nu 2(\omega^2 q_z^2+h^2)^{1/2}]^{1/2},$$
$$\varphi_{1\nu}=\frac{2(b\xi_2-\lambda_{1\nu}\xi_1)}{[2\pi(b^2+\lambda_{1\nu}^2)]^{1/2}}\exp\left(-\frac{\xi_1^2-\xi_2^2}{2}\right). \quad (2.109)$$

Отметим следующее обстоятельство. Из коэффициентов C_n^s можно построить полином степени s от некой переменной x :

$$F_s = \sum_{n=0}^{s} C_n^s x^n \qquad (2.110).$$

Если учесть рекурентное соотношение (2.105), то можно вывести дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет этот полином:

$$\left\{x^2 \frac{d^2}{dx^2} - \left[bx^2 + (d_1 + s - 1)x - b\right]\frac{d}{dx} - bsx - \lambda_s\right\} F_s = 0 \qquad (2.111).$$

Следовательно, решение парциального дифференциального уравнения (2.101) в этом случае эквивалентно решению обыкновенного дифференциального уравнения (2.111). Полиномиальные решения уравнения вида (2.111) были рассмотрены в работе [217], в которой была доказана ортогональность полиномов $F_{s\nu}(x)$ на единичном круге.

Перейдем теперь к случаю одинаковой поляризации электромагнитных волн, который соответствует знаку "+" в последней круглой скобке уравнения (2.101). В этом случае со всей фигурной скобкой уравнения (2.101) коммутирует оператор

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} - \xi_2^2\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} - \xi_1^2\right), \qquad (2.112),$$

т.е. оператор разности числа фотонов, распространяющихся в противоположных направлениях. Обозначим собственное значение и собственную функцию этого оператора через ℓ и φ_ℓ. Величина может быть любым целым числом. Так как полный импульс системы и импульс фотонов $\ell\omega$ сохраняется, то сохраняется и импульс электрона, что находится в согласии со случаем неквантованного поля обеих волн с одинаковой поляризацией.

Решение уравнения (2.101) опять можно искать в виде ряда по невозмущенным осцилляторным функциям. Но теперь, однако, этот ряд будет бесконечным, так как сохраняется не полное число фотонов, а их разность. При $\ell \geq 0$ имеем

$$\varphi_\ell = \exp\left(-\frac{\xi_1^2+\xi_2^2}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty} C_n^\ell H_n(\xi_1) H_{n+\ell}(\xi_2) \qquad (2.113).$$

Подставив (2.113) в уравнение (2.101), получим следующее рекурентное соотношение для коэффициентов C_n^ℓ :

$$[n(n+\ell)-d_2 n+\lambda_\ell]C_n^\ell - b\left[\tfrac{1}{2}C_{n-1}^\ell + 2(n+1)(n+\ell+1)C_{n+1}^\ell\right] = 0, \qquad (2.114)$$

$$n = 0, 1, \ldots$$

$$d_2 = \frac{(q k_1)+(q k_2)+2h}{(k_1 k_2)} = \frac{q_0}{\omega}+2b,$$

$$\lambda_\ell = \frac{q_0^2 - q_z^2 - m^2 - 2h - 2\ell[\omega(q_z+q_0)+h]}{4\omega^2} \qquad (2.115).$$

При $\ell<0$ сумма (2.113) начинается с $|\ell|$, но рекурентные соотношения (2.114) остаются теми же с $|\ell|$ вместо ℓ и противоположным знаком перед q_z.

Приравняв нулю бесконечный детерминант, составленный из коэффициентов при C_n^ℓ, получим собственные значения $\lambda_{\ell\nu}$, где $\nu = 0,1,\ldots$. Так как $\lambda_{\ell\nu}$ зависит от полной энергии системы q_0, то удобнее в этом случае q_0 считать параметром, а q_z – собственным значением. Из (2.115) отсюда получаем

$$q_z = -\omega\ell \pm \left[(q_0-\ell\omega)^2 - m^2 - 2h(\ell+1) - 4\omega^2\lambda_{\ell\nu}\right]^{1/2} \qquad (2.116).$$

Если вместо C_n^ℓ ввести

$$\tau_n^\ell = C_n^\ell 2^n (n+1), \qquad (2.117),$$

то рекурентные соотношения становятся более симметричными

$$[n(n+\ell)-d_2 n+\lambda_\ell]\tau_n^\ell - b[(n+\ell)\tau_{n-1}^\ell + (n+1)\tau_{n+1}^\ell] = 0. \qquad (2.118).$$

Также как в случае противоположной поляризации можем ввести функции F_ℓ и G_ℓ от переменной x :

$$F_\ell=\sum_{n=0}^{\infty} c_n^\ell x^n, \quad G_\ell=\sum_{n=0}^{\infty} r_n^\ell x^n \tag{2.119}$$

Используя рекурентные соотношения (2.114) и (2.118), можно вывести дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют эти функции:

$$\left\{(x^2-2bx)\frac{d^2}{dx^2}+[(-\alpha_2+\ell+1)x-2b(\ell+1)]\frac{d}{dx}-\frac{bx}{2}+\lambda_\ell\right\}F_\ell=0 \tag{2.120}$$

$$\left\{x^2\frac{d^2}{dx^2}-[bx^2+(\alpha_2-\ell-1)x+b]\frac{d}{dx}-b(\ell+1)x+\lambda_\ell\right\}G_\ell=0 \tag{2.121}$$

Уравнение (2.120) имеет две регулярные особые точки при $x=0$ и $x=2b$ и существенно особую точку на бесконечности. Уравнение (2.121) имеет две существенно особые точки в нуле и на бесконечности и отличается от уравнения (2.111) только знаками некоторых коэффициентов. Согласно общей теории дифференциальных уравнений с двумя особыми точками [218], уравнение (2.121) относится к типу уравнений, имеющих одно существенно сингулярное решение и второе решение, которое может быть представлено рядом (2.119). Этот ряд является асимптотическим и становится сходящимся только при λ_ℓ, равных собственным значениям $\lambda_{\ell\nu}$.

При малых b собственные значения и собственные функции можно искать в виде

$$\lambda_{\ell\nu}=\sum_{m=0}^{\infty} b^m \lambda_{\ell\nu}^m, \quad G_{\ell\nu}=\sum_{m=0}^{\infty} b^m G_{\ell\nu}^m \tag{2.122}$$

С точностью до b^2

$$\lambda_{\ell\nu}=-\nu(\alpha-\nu)+b^2\left[\frac{\nu(\nu+\ell)}{1-\alpha}+\frac{(\nu+1)(\nu+\ell+1)}{1+\alpha}\right]+\dots \tag{2.123}$$

$$G_{l\gamma}=x^{\gamma}+b\left[\frac{\gamma x^{\gamma-1}}{1-\alpha}+\frac{\gamma+l+1}{1+\alpha}x^{\gamma+1}\right]+$$

$$+b^2\left[\frac{\gamma(\gamma-1)}{2(1-\gamma)(2-\gamma)}x^{\gamma-2}+\frac{(\gamma+l-1)(\gamma+l+2)}{2(1+\alpha)(2+\alpha)}x^{\gamma+2}\right]+\dots \qquad (2.124)$$

$$\alpha=2\gamma-d_2+l, \quad \gamma=0,1,\dots \qquad (2.125).$$

Можно привести выражение для λ_{l0} при $\gamma=0$ с точностью до b^6:

$$\lambda_{l0}=b^2\frac{(l+1)}{(-d_2+l+1)}-b^4\frac{d_2(l+1)}{(-d_2+l+1)^3(-d_2+l+2)}+$$

$$+b^6\frac{2d_2(l+1)(d_2+l+1)}{(-d_2+l+1)^5(-d_2+l+2)(-d_2+l+3)}+\dots \qquad (2.126).$$

Здесь d_2 определено согласно (2.115) и, следовательно, зависит еще от b. Считая полную энергию положительной величиной, получим, что d_2 всегда положительно.

Ряды (2.123) - (2.126) теряют свой смысл, если d_2 равно положительному числу K. При этом с точностью до небольшого слагаемого $q_0=K\omega$. Такое соотношение между q_0 и частотой ω соответствует порогу рождения-аннигиляции электронно-позитронной пары. При рождении электронно-позитронной пары поглощается K фотонов из каждой волны. Если положить в уравнении (2.121) d_2 равным K и от функции G_l перейти к функциям R_l,

$$G_l=\exp(bx)R_l, \qquad (2.127),$$

то вместо (2.121) получим уравнение

$$\left\{x^2\frac{d^2}{dx^2}+\left[bx^2+(l+1-K)x-b\right]\frac{d}{dx}-Kbx+\lambda_l-b^2\right\}R_l=0 \qquad (2.128).$$

Это уравнение также, как и уравнение (2.III), имеет полиномиальное решение. При каждом K имеется $K+1$ решений. Собственные значения $\lambda_{e\nu}$ определяются из определителя $K+1$ порядка.

Случай $K=0$ соответствует нулевой полной энергии. При этом

$$R_e = const \ , \quad \lambda_{e0} = b^2 \qquad (2.I29).$$

Интересно, что это собственное значение является одинаковым при любом ℓ. Если теперь учесть выражения (2.I27), (2.II9), (2.II7) и (2.II3), то получим следующее выражение для волновой функции

$$\psi_{e0} = N \exp\left[-\frac{\xi_1^2+\xi_2^2}{2}\right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b/2)^n}{n!\,(n+\ell)!} H_n(\xi_1) H_{n+\ell}(\xi_2), \qquad (.I30),$$

где нормировочный множитель N равен

$$N = \left[b^\ell / \pi 2^\ell I_\ell(2b)\right]^{1/2} \qquad (2.I3I).$$

$I_\ell(2b)$ - модифицированная функция Бесселя первого рода [2I4].

Рассмотренная в этом параграфе задача обсуждалась также в работе [2I9]. Отметим еще, что на основе разработанного автором метода решения уравнения Дирака для электрона в квантованном поле были получены еще решения, описывающие электрон в квантованном поле плоской волны плюс скрещенные электрическое и магнитное поля [I3], поле гармонического осциллятора [36] и другие поля [34,35,37].

ГЛАВА III.
ЧАСТИЦА В ПОЛЕ МОДЕЛЬНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ В ПРИСУТСТВИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

В данной главе рассмотрены задачи об отражении электрона от стенки в присутствии электромагнитной волны, ионизации системы, связанной короткодействующими силами, под действием циркулярно поляризованного поля излучения и рассеяния электрона на δ-потенциале в присутствии циркулярно поляризованной волны. Рассмотрены также некоторые математические вопросы, связанные с этими задачами. Первая задача имеет отношение к расчетам многоквантового фотоэффекта с поверхности металла [61,64-65], а модель с δ-потенциалом может быть использована для описания многофотонных переходов в отрицательных ионах [69]. Эти задачи интересны и сами по себе как простые многоканальные задачи с открытыми и закрытыми каналами, когда удается легко проследить ряд особенностей многофотонных процессов.

3.1. Отражение электрона от стенки в присутствии электромагнитной волны

Так как основное внимание хотим уделить постановке и математическим трудностям задачи, то для простоты рассмотрим одномерную задачу [66] об отражении электрона от непроницаемой стенки в присутствии монохроматической волны, поле которой направлено перпендикулярно стенке. Пусть волна распространяется вдоль оси z, а ось x направлена перпендикулярно стенке. Тогда вектор-потенциал волны равен

$$A = (cF_0/\omega)\cos\omega(t - z/c), \qquad (3.1),$$

где F_0 - амплитуда напряженности поля, ω - его частота. Пусть электрон падает тоже перпендикулярно стенке, и допустим законность дипольного приближения для данной задачи, т.е. пренебрежем зависимостью A от z. Законность этого приближения обсудим ниже. В таком поле уравнение Шредингера имеет вид

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x} + \frac{F_0}{\omega}\cos\omega t\right)^2\psi, \qquad (3.2),$$

частным решением которого является

$$\psi_k = \exp\left\{ikx - iEt/\hbar + i\,\frac{keF_0}{\omega^2 m}\sin\omega t - \right.$$
$$\left. - i\,\frac{e^2F_0^2}{8\hbar\omega^3 m}\left(2\omega t + \sin 2\omega t\right)\right\}, \qquad (3.3),$$

где импульс электрона $\hbar k$ связан с энергией, точнее квазиэнергией E обычным соотношением $E = \hbar^2k^2/2m$. Решение (3.3) описывает движение электрона в электромагнитной волне со средней энергией $E + e^2F_0^2/4m\omega^2$.

Пусть электрон падает на стенку со стороны положительных x . Тогда падающая волна равна ψ_{-k} . При отражении от стенки электрон может поглотить из волны или отдать ей n фотонов. Поэтому отраженная волна представляет суперпозицию таких состояний, и полная волновая функция равна

$$\psi = \psi_{-k} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n\psi_{k_n}, \qquad (3.4),$$

где ψ_{k_n} отличается от (3.3) только, тем, что E заменено на $E + n\hbar\omega$ и k на $k_n = [2m(E+n\hbar\omega)]^{1/2}/\hbar$. Величина A_n есть амплитуда состояния, в котором электрон при отражении от стенки поглотил n фотонов. Так как n может принимать и отрицательные значения (электрон отдает волне энергию $|n|\hbar\omega$), то при $n < -E/\hbar\omega$ импульс электрона станет чисто мнимым, т.е.

$k_n = i|k_n|$. Физически такие состояния допустимы. Они соотвествуют закрытым каналам в многоканальных задачах рассеяния. Волновая функция в них экспоненциально убывает при $x \to \infty$. Поток в канале n равен $|A_n|^2 v_n$, где v_n - скорость электрона в этом канале, а условие сохранения потока в данном случае имеет вид.

$$\sum_{n>n_0}^{\infty} |A_n|^2 \left(1 + n\frac{\hbar\omega}{E}\right)^{1/2} = 1 \tag{3.5}$$

$$n_0 = -[E/\hbar\omega] \tag{3.6},$$

где квадратной скобкой обозначена целая часть отношения E к $\hbar\omega$.

Коэффициенты A_n определяются граничным условием, которое для непроницаемой стенки имеет вид $\psi(x=0)=0$. Для волновой функции (3.4) это условие сводится к следующему:

$$\exp(-ib\sin\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \exp(-in\tau + ib\alpha_n \sin\tau), \tag{3.7}$$

где введены следующие безразмерные величины:

$$\tau = \omega t,\ b = \frac{eF_0}{\hbar\omega^2}\sqrt{\frac{2E}{m}},\ \alpha_n = \sqrt{1+n\xi},\ \xi = \frac{\hbar\omega}{E}. \tag{3.8}$$

Если бы $\xi = 0$, то A_n в выражении (3.7) были просто равны коэффициентам ряда Фурье для функции $\exp(-2ib\sin\tau)$. При конечных ξ выражение (3.7) можно рассматривать как разложение произвольной функции, в данном случае $\exp(-ib\sin\tau)$, в ряд по системе функций

$$|\alpha_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-in\tau + ib\alpha_n \sin\tau). \tag{3.9}$$

Система этих функций, по-видимому, полна. Но она неортогональна, так как интеграл от произведения $|\alpha_n\rangle$ и $\langle\alpha_m|$ по τ в пределах от 0 до 2π не равен нулю при $m \neq n$, а равен

$$\langle\alpha_m|\alpha_n\rangle = J_{n-m}\left[b(\alpha_n - \alpha_m^*)\right], \tag{3.10}$$

где $\mathcal{J}_n$ - функции Бесселя. По-видимому, должно существовать некая система функций $\langle\beta_n|$, которая вместе с $|\alpha_n\rangle$ образует биортогональную систему, т.е. для которых интеграл $\langle\beta_m|\alpha_n\rangle$ равен нулю при $m \neq n$. Имея такие функции $\langle\beta_n|$ легко найти явный вид решения рассматриваемой задачи и также любой другой задачи со ступенчатым потенциалом.

К сожалению, в настоящее время такая система функций $\langle\beta_n|$ не построена. Поэтому поступим следующим образом. Разложив обе части уравнения (3.7) в ряд Фурье, можно получить следующую бесконечную систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов A_n

$$\mathcal{J}_K(-b) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \mathcal{J}_{n+K}(b\alpha_n), \quad K = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (3.11).$$

Появление функции Бесселя $\mathcal{J}_{n+K}(b\alpha_n)$, аргумент которых согласно (3.8) зависит от индекса, вообще характерно для многофотонных задач [62,65,114].

При малых b из системы (3.11) можно найти для коэффициентов A_n разложения в ряд по b. Первые члены таких рядов для некоторых A_n имеют вид

$$A_0 = 1 - (b^2/2)(\alpha_1 + \alpha_{-1}) + \ldots$$

$$A_{\pm 1} = \pm b \mp (b/2)^3 \left[1 + 2(\alpha_1 + \alpha_{-1}) - 2\alpha_{\pm}^2 - \alpha_{\mp}^2 + 2\alpha_{\pm 1}\alpha_{\pm 2}\right] + \ldots$$

$$A_{\pm 2} = (b^2/2)\alpha_{\pm 1} + \ldots \qquad (3.12).$$

Если $\xi \ll 1$, то

$$\alpha_n \simeq 1 + n\xi/2 \qquad (3.13).$$

Подставив такие α_n в уравнение (3.7) и вводя вместо τ переменную $u = \tau - (b\xi/2)\sin\tau$, можно увидеть, что A_n есть коэффициенты ряда Фурье. В результате получим, что

$$A_n = \left(1 + \frac{n\xi}{4}\right)^{-1} \mathcal{J}_n\left[2b\left(1 + \frac{n\xi}{4}\right)\right] \qquad (3.14).$$

Выражение (3.14) фактически применимо при более жестком ограничении $b\xi<1$, поскольку если b велико, то существенны большие n и, следовательно, $n\xi$ уже не мало. При $\xi=0$ коэффициенты $A_n=J_n(2b)$.

При $\xi\neq 0$ и b порядка единицы система (3.11) решалась численно следующим образом. Принималось, что отличны от нуля только коэффициенты $A_0, A_{\pm 1},\ldots, A_{\pm m}$, которые находились из $2m+1$ уравнений (3.11) с $k=0,\pm 1,\ldots,\pm m$. Критерием того, что определенные таким образом A_n удовлетворяют системе (3.11), являлось постоянство A_n при увеличение числа каналов m, а также выполнение равенства (3.5). Расчеты показали, что при $\xi\leq 1$ вплоть до $b=3$ достаточно ограничиться $m=7$.

На рис. 3.1 приведены вероятности возбуждения $|A_n|^2$ разных каналов в зависимости от ξ при $b=0,8$. Числа у кривых - значения n. Бросается в глаза то, что при $\xi=1$ вероятности $|A_n|^2$ имеют особенности в виде пика или сглаженной ступеньки. Такие аномалии возникают и при $\xi^{-1}=2,3,\ldots$, но все менее выраженные с уменьшением ξ. Природа этих особенностей та же, что и аномалий в сечениях процессов на пороге реакции [70]. Действительно, при $E=s\hbar\omega$, где s - целое число, открывается новый канал неупругого рассеяния, поскольку k_{-s} проходит через нуль. Такие пороговые аномалии были отмечены при многофотонной ионизации [65] и, по-видимому, должны появляться при рассеянии электрона и на более сложном потенциале в присутствии электромагнитной волны. Экспериментально их трудно обнаружить, так как требуется высокое разрешение по энергии.

С практической точки зрения интересно знать, происходит ли поглощение или усиление излучения при рассеянии на различных потенциалах в присутствии электромагнитной волны [220]. В данном случае коэффициент поглощения пропорционален величине

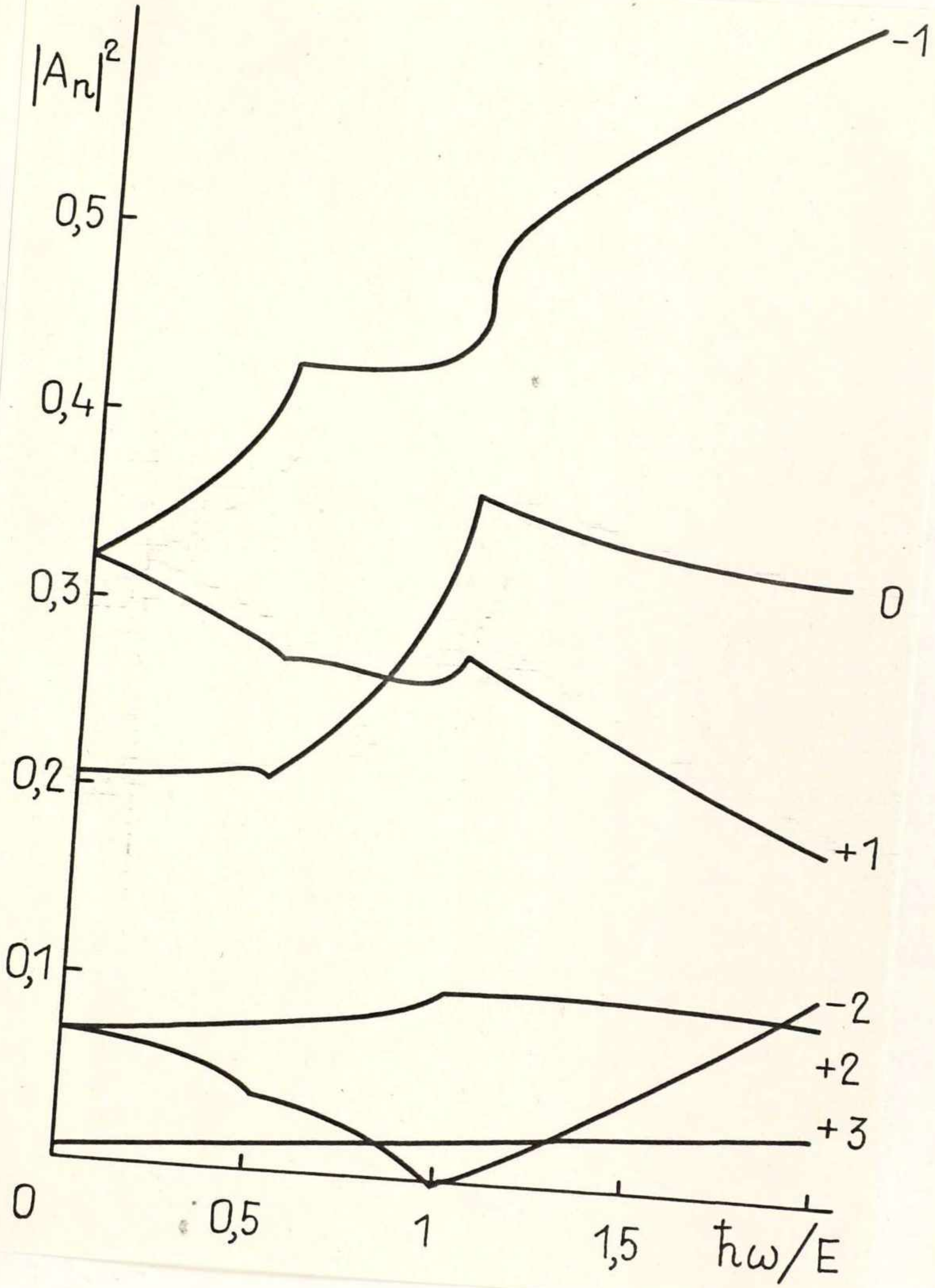

Рис. 3.I. Вероятности возбуждения $|A_n|^2$ разных каналов в зависимости от отношения $\hbar\omega/E$ при $b=0,8$. Числа у кривых - значения n .

$$\rho = \frac{\xi}{8} \sum_{n>n_0}^{\infty} n \alpha_n |A_n|^2 \qquad (3.15).$$

Используя (3.12), можно показать, что при $b, \xi \ll 1$ величина ρ стремится к $\rho_{кл} = \xi^2 b^2/8$, равному отношению колебательной энергии электрона в поле к его поступательной энергии. Такую же величину для ρ дает классическая механика. В таблице 3.I приведено несколько примеров численного расчета по формуле (3.15). Как и следовало ожидать, квантовая механика дает результаты, отличающиеся от классических только при $\xi > 1$. Так как ρ, рассчитанные по формуле (3.15), и $\rho_{кл}$ положительны, то можно утверждать, что при отражении электрона от стенки в присутствии электромагнитной волны происходит поглощение излучения. Интересно отметить, что при рассеянии на кулоновском потенциале в случае параллельности скорости падающих электронов и поляризации электромагнитного поля (так же как и в данной задаче) наблюдается, наоборот, максимум отрицательного поглощения [220].

Обсудим еще точность дипольного приближения для данной задачи. Так как уравнение Шредингера является нековариантным, то его решение для векторного потенциала $A = (cF_0/\omega)\cos\omega(t - z/c)$ не может быть найдено в явном виде. Однако известно решение уравнения Клейна-Гордона с таким потенциалом [216]. В выбранной нами системе координат это решение имеет вид

$$\psi(p_x, p_z) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(p_x x + p_z z - \varepsilon t) + i\frac{ec^2 F_0 p_x}{(\varepsilon - cp_z)\hbar\omega^2}\sin u - i\frac{e^2 c^2 F_0^2}{8(\varepsilon - cp_z)\hbar\omega^3}(2u + \sin 2u)\right\}, \qquad (3.16),$$

$$u = \omega(t - z/c), \quad \varepsilon^2 = c^2(p_x^2 + p_z^2) + m^2c^4, \qquad (3.17),$$

Таблица 3.I

Сравнение квантовомеханических ρ и классических $\rho_{кл}$ пропорциональных коэффициенту поглощения, при разных b и ξ.

b	ξ	ρ	$\rho_{кл}$
0,I	2	0,0044	0,005
0,I	20	0,I2	0,5
0,8	0,2	0,00322	0,0032
0,8	2	0,29	0,32

p_x и p_z - импульсы вдоль осей x и z. Пусть падающая волна есть $\psi(-p_x, 0)$, где $p_x = (\varepsilon^2 - m^2c^4)^{1/2}/c$. Как и выше, отраженная волна есть суперпозиция состояний, в которых электрон поглотил из волны или отдал ей n фотонов. Граничное условие при $x=0$ должно теперь удовлетворяться при любых значениях переменных u и z. Оказывается, что оно будет удовлетворяться, если в отраженных волнах импульс p_z выбрать равным $n\hbar\omega/c$. Поэтому полная волновая функция равна

$$\psi = \psi(-p_x, 0) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \psi(p_{x_n}, p_{z_n}), \qquad (3.18),$$

где $\psi(p_{x_n}, p_{z_n})$ имеет вид (3.16) с $\varepsilon + n\hbar\omega$ вместо ε и $n\hbar\omega/c$ вместо p_z, а p_{x_n} находится из (3.17). Приравняв ψ нулю при $x=0$, получим то же уравнение (3.7) со следующими значениями параметров

$$b = \frac{ecF_0}{\hbar\omega^2}\sqrt{1 - \frac{m^2c^4}{\varepsilon^2}}, \quad \alpha_n = \sqrt{1 + n\frac{2\hbar\omega\varepsilon}{\varepsilon^2 - m^2c^2}}, \qquad (3.19).$$

При малой кинетической энергии электронов $E = \varepsilon - mc^2$ формулы (3.19) переходят в (3.8). Таким образом, кроме выполнения закона сохранения импульса, учет запаздывания в данной задаче не привел к каким-либо существенным изменениям. Это обусловлено тем, что в данной задаче взаимодействие фактически происходит на стенке, т.е. имеет нулевой радиус.

Отметим, что система алгебраических уравнений, аналогичная системе (3.11), была получена в работе [65], где приближенное ее решение было найдено в результате замены функций Бесселя их первым членом разложения в ряд. Подход, аналогичный вышеизложенному, был развит в работе [68] при рассмотрении прохождения частицы через периодически меняющийся во времени δ-потенциал.

3.2. Электрон в короткодействующим потенциале в присутствии электромагнитной волны

Нашей второй задачей, допускающей даже аналитическое решение, будет задача о многофотонной ионизации системы, связанной короткодействующими силами, под действием циркулярно поляризованной электромагнитной волны и рассеяния электрона на короткодействующем потенциале в присутствии такой волны [71]. Математически задачу о движении электрона в очень узкой и глубокой яме удобно формулировать с помощью метода δ-потенциала [69]. Известно, что в трехмерном δ-потенциале электрон имеет всего один связанный уровень с энергией E_0. Вблизи этой бесконечно узкой и бесконечно глубокой ямы волновая функция имеет вид

$$\psi \approx \left(\frac{1}{r} - \varkappa\right) \exp(-iE_0 t/\hbar), \qquad (3.20),$$

где $\varkappa$ и E_0 связаны соотношением $\varkappa = (2m|E_0|)^{1/2}/\hbar$. Движение электрона с массой m в такой яме может быть определено из решения уравнения Шредингера с потенциалом [69]

$$V(r) = \frac{2\pi\hbar^2}{m\varkappa}\,\delta(\vec{r})\,\frac{\partial}{\partial r} r \qquad (3.21).$$

Пусть теперь кроме потенциала (3.21) на электрон еще действует поле циркулярно поляризованной волны, распространяющейся с частотой ω вдоль оси z. Напряженность поля такой волны имеет компоненты

$$F_x = F_0 \cos\omega(t - z/c),\; F_y = F_0 \sin\omega(t - z/c),\; F_z = 0. \qquad (3.22).$$

Если ограничиться дипольным приближением, которое столь же хорошо обосновано для данной задачи, как и задачи предыдущего параграфа, то в (3.22) можно пренебречь зависимостью напряженности поля от координаты z.

3.2.1. Ионизация системы, связанной короткодействующими силами, циркулярно поляризованной волной

Задача о вырывании электрона из δ-ямы под действием циркулярно поляризованной электромагнитной волны может быть сведена в дипольном приближении к решению следующего уравнения Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\Big[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+\frac{2\pi\hbar^2}{m\varkappa}\delta(\vec{r})\frac{\partial}{\partial r}r+$$
$$+i\frac{\hbar e F_0}{m\omega}\Big(-\frac{\partial}{\partial x}\sin\omega t+\frac{\partial}{\partial y}\cos\omega t\Big)+\frac{e^2F_0^2}{2m\omega^2}\Big]\psi \qquad (3.23).$$

Последний член в правой части уравнения (3.23) есть средняя энергия колебания электрона в волне.

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$\psi=\exp(-iEt/\hbar)\,\Phi(\vec{r},t), \qquad (3.24),$$

где E - квазиэнергия [128-130], а $\Phi(\vec{r},t)$ - периодическая функция времени.

В присутствии переменного электромагнитного поля уровень в δ-потенциале становится квазистационарным. Поглотив несколько число фотонов)электрон может покинуть яму. Это должно быть отражено в граничных условиях, налагаемых на волновую функцию: в открытых каналах волновая функция должна быть в виде расходящихся волн в то время как в закрытых каналах она должна экспоненциально убывать на бесконечности. Так как граничные условия комплексны, то квазиэнергия E тоже будет комплексной. Ее действительная часть определяет положение уровня, а мнимая - его ширину. Фактически это является обобщением определения квазистационарного состояния [119] на случай многоканальных задач.

Чтобы учесть эти граничные условия, построим сначала функцию

Грина для электрона в циркулярно поляризованном поле с требуемым поведением на бесконечности. Функция Грина должна удовлетворять уравнению

$$\left[E + i\hbar\omega\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta + i\,\frac{e\hbar F_0}{m\omega}\left(\frac{\partial}{\partial x}\sin\tau - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial}{\partial y}\cos\tau\right)\right] G_E(\vec{r}, \vec{r}', \tau, \tau') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}')\,\delta(\tau - \tau') \qquad (3.25),$$

где $\tau = \omega t$.

Будем искать решение уравнения (3.25) в виде

$$G_E = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \exp[i(\vec{r} - \vec{r}')\vec{p}]\, g_E(\vec{p}, \tau, \tau')\, d\vec{p} \qquad (3.26).$$

Если подставить (3.26) в (3.25), то получим уравнение для функции $g_E(\vec{p}, \tau, \tau')$

$$\left[E + i\hbar\omega\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\hbar^2 p^2}{2m} - \frac{e\hbar F_0}{m\omega}(p_x\sin\tau - p_y\cos\tau)\right] g_E = -\delta(\tau - \tau') \qquad (3.27).$$

Этому уравнению удовлетворяет следующая периодическая функция

$$g_E = \frac{1}{(2\pi)}\exp\left\{i\,\frac{e\vec{p}}{m\omega^2}\left[\vec{F}(\tau) - \vec{F}(\tau')\right]\right\}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\exp[-in(\tau - \tau')]}{\hbar^2 p^2/2m - E - n\hbar\omega} \qquad (3.28)$$

Подставив (3.28) в (3.26) и интегрируя по $d\vec{p}$ с учетом того, что G_E должна описывать расходящиеся волны, получим окончательно

$$G_E = \frac{m}{4\pi^2\hbar^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\exp\{in(\tau - \tau') + ik_n|\vec{r} - \vec{r}' + (e/m\omega^2)[\vec{F}(\tau) - \vec{F}(\tau')]|\}}{|\vec{r} - \vec{r}' + (e/m\omega^2)[\vec{F}(\tau) - \vec{F}(\tau')]|} \qquad (3.29),$$

$$k_n = [2m(E + n\hbar\omega)]^{1/2}/\hbar. \qquad (3.30).$$

Полученная функция Грина представляет собой бесконечную сумму расходящихся волн с частотой, кратной ω . Это есть отражение того факта, что частица в монохроматической электромагнитной волне имеет целый спектр эквидистантных уровней, а не одну определенную энергию. Из (3.29) видно, что при $E+n\hbar\omega>0$ мы имеем расходящиеся волны. в то время как при $E+n\hbar\omega<0$ - экспоненциально затухающие волны.

Если в уравнении (3.25) опустить E и отказаться от условия периодичности, то вышеизложенным методом может быть получено хорошо известное [70] представление для функции Грина

$$G(\vec{r},\vec{r}\,',\tau,\tau')=\frac{i}{\hbar\omega}\left[\frac{m\omega}{2\pi i\hbar(\tau-\tau')}\right]^{3/2}\eta(\tau-\tau')\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{i\frac{m\omega}{2\hbar(\tau-\tau')}\left(\vec{r}-\vec{r}\,'+\frac{e}{m\omega^2}[\vec{F}(\tau)-\vec{F}(\tau')]\right)^2\right\}, \tag{3.31}$$

где $\eta(\tau-\tau')$ равно нулю при $\tau-\tau'<0$ и единице при $\tau-\tau'>0$.

Если теперь использовать функцию Грина (3.29) и преобразовать уравнение (3.23) в интегральное уравнение, то волновая функция будет иметь правильное асимптотическое поведение. Соответствующее уравнению (3.23) интегральное уравнение имеет вид

$$\Phi(\vec{r},\tau)=-\frac{2\pi\hbar^2}{m\varkappa}\int d\vec{r}\,'\int_0^{2\pi}d\tau'\,G_{E'}(\vec{r},\vec{r}\,',\tau,\tau')\cdot$$

$$\cdot\delta(\vec{r}\,')\frac{\partial}{\partial r'}[r'\Phi(\vec{r}\,',\tau')], \tag{3.32}$$

$$E'=E-\frac{e^2F_0^2}{2m\omega^2} \tag{3.33}$$

Так как в уравнении (3.32) под интегралом находится δ-функция, то поведение волновой функции при любом τ будет определяться ее поведением около нуля. Но вблизи нуля $\Phi(\vec{r},\tau)$ может отличаться от (3.20) только зависящим от времени множителем:

$$\Phi(\vec{r},\tau)\simeq\left(\frac{1}{r}-\varkappa\right)u(\tau) \tag{3.34}$$

где $u(\tau)$ - периодическая функция от τ. Чтобы найти

$u(\tau)$ подставим (3.34) в уравнение (3.32), устремим τ к нулю и устраним особенность в нуле. В результате получим следующее интегральное уравнение для функции $u(\tau)$

$$u(\tau) = -\frac{1}{4\pi\rho}\int_0^{2\pi} d\tau' \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-in(\tau-\tau')]}{|\sin\frac{1}{2}(\tau-\tau')|} \cdot$$

$$\cdot \{\exp[2i\rho(E+nw)^{1/2}|\sin\tfrac{1}{2}(\tau-\tau')|]-1\}u(\tau'), \qquad (3.35),$$

где введены следующие безразмерные величины:

$$\varepsilon = \frac{E'}{|E_0|}, \quad w = \frac{\hbar\omega}{|E_0|}, \quad \rho = \frac{2^{1/2}V}{w^2}, \quad V = \frac{e\hbar F_0}{m^{1/2}|E_0|^{3/2}}. \qquad (3.36).$$

Так как ядро уравнения (3.35) является периодической функцией и зависит только от разности $\tau-\tau'$, то решение этого уравнения есть просто постоянная, при условии, что

$$F(\varepsilon) = 0, \qquad (3.37)$$

$$F(\varepsilon) = 1 + \frac{1}{4\pi\rho}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi} dx \frac{e^{inx}}{\sin\frac{1}{2}x} \cdot$$

$$\cdot \{\exp[2i\rho(\varepsilon+nw)^{1/2}\sin\tfrac{x}{2}]-1\} \qquad (3.38).$$

Уравнение (3.37) есть трансцендентное уравнение для определения квазиэнергии E.

Найдем теперь другие представления для функции $F(\varepsilon)$. Заметим сначала, что $\exp i[\cdots]-1$ в фигурных скобках выражения (3.38) может быть заменено на $i\sin[\cdots]$. Действительно, если эту экспоненту разложить в ряд, то четные члены этого ряда будут представлять собой сумму членов вида $n^k \sin^s(x/2)$, для которых всегда $s>k$. Чтобы устранить n^k, проинтегрируем эти члены k раз по частям. В результате сумма по n даст нам δ-функцию $\delta(x)$. Из-за множителя $\sin^{s-k}(x/2)$ оставшийся интеграл по x равен нулю. Нечетные члены ряда для $\exp i[\ldots]$ дают $i\sin[\ldots]$. Если использовать формулу [214]

$$\int_0^{\pi} d\tau\, e^{2in\tau}(2\sin\tau)^{2s} = \frac{(-1)^n\,\Gamma(1+2s)}{\Gamma(1+s-n)\,\Gamma(1+s+n)} \qquad (3.39),$$

то получим следующее представление для $F(\varepsilon)$:

$$F(\varepsilon) = 1 + i\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{s=|n|}^{\infty}\frac{(-1)^{n+s}\,\rho^{2s}\,(\varepsilon+n\omega)^{s+1/2}}{(2s+1)\,(s-|n|)!\,(s+|n|)!} \qquad (3.40).$$

Используя разложение квадрата функции Бесселя в ряд, можно убедиться, что представление

$$F(\varepsilon) = 1 + \frac{i}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\varepsilon+n\omega)^{1/2}\int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta\, J_n^2\left[\rho(\varepsilon+n\omega)^{1/2}\, 2\sin\vartheta\right] \qquad (3.41)$$

приводит к (3.40). Из выражений (3.40) и (3.41) ясно видно, что все открытые каналы $(\varepsilon + n\omega > 0)$ дают вклад в ширину, а закрытые - в сдвиг уровня.

Если использовать функцию Грина (3.31), то вывод, аналогичный выводу выражения (3.38), приводит к следующему интегрально-му представлению для $F(\varepsilon)$:

$$F(\varepsilon) = 1 + i\varepsilon^{1/2} + \frac{1}{2\sqrt{i\pi}}\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^{3/2}}\, e^{i\varepsilon x}\cdot$$

$$\left[\exp\left(i\rho^2\frac{\sin(\omega x/2)}{x}\right) - 1\right]. \qquad (3.42).$$

В эквивалентности (3.42) и (3.40) можно убедиться, если в (3.42) экспоненту в квадратных скобках разложить в ряд и провести интегрирование по x .

Решение трансцендентного уравнения (3.37) дает

$$E_r = E_0 + \Delta - \frac{1}{2}i\Gamma, \qquad (3.43),$$

где Δ есть сдвиг уровня, а Γ - его ширина. Мы примем, что $\Gamma \ll |E_0|$ и пренебрежем величинами порядка Γ^2. Если $\Gamma/|E_0|$ не мало, то само понятие квазиэнергии теряет смысл.

В слабом поле, когда $V \ll w$ и $V \ll w^2$, из (3.40) можно получить

$$\frac{\Delta - \frac{1}{2}i\Gamma}{|E_0|} \simeq \frac{V^2}{2w^2} - \frac{2V^2}{3w^4}\left[(1+w)^{3/2} - 2 + i(w-1)^{3/2}\right] \quad (3.44).$$

Чтобы найти асимптотическое представление для $F(\varepsilon)$ при малых w проинтегрируем сначала интеграл в (3.42) по частям. Тогда

$$F(\varepsilon) = 1 - \left(\frac{2i}{\pi w}\right)^{1/2} \int_0^\infty \frac{dz}{z^{1/2}} \left[\frac{d}{dz} X(z)\right] \exp\left[-\frac{2i}{w} X(z)\right], \quad (3.45),$$

$$X(z) = E_1 z + \frac{V^2}{2w^2}\left(z - \frac{\sin^2 z}{z}\right), \quad E_1 = -E/|E_0| \quad (3.46).$$

При малых частотах w интеграл (3.45) может быть вычислен методом перевала. Если принять, что $w \ll V \ll 1$, то получим

$$F(E_1) \simeq 1 - E_1^{1/2} + \frac{V^2}{2^6 E_1^{5/2}} + \frac{7V^2 w^2}{3\cdot 2^9 E_1^{9/2}} + \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot V^4}{2^{13} E_1^{13/2}} + \ldots$$
$$+ i\frac{V}{2^{7/2} E_1} \exp\left[-\frac{2^{5/2} E_1^{3/2}}{3V}\left(1 - \frac{2E_1 w^2}{15 V^2}\right) + \ldots\right] \quad (3.47).$$

Решение уравнения (3.37) с таким $F(E_1)$ приводит к следующему сдвигу и ширине

$$\frac{\Delta - i\Gamma/2}{|E_0|} = -\frac{V^2}{2^5}\left(1 + \frac{7}{24}w^2\right) - \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2^{11}} V^4 - \ldots$$
$$- i 2^{-5/2} V \exp\left[-\frac{2^{5/2}}{V}\left(1 - \frac{2}{15}\frac{w^2}{V^2}\right)\right] \quad (3.48).$$

Для полей V порядка единицы сдвиг Δ и ширина Γ вычислялись с помощью формулы (3.40) и уравнения (3.37). Результаты

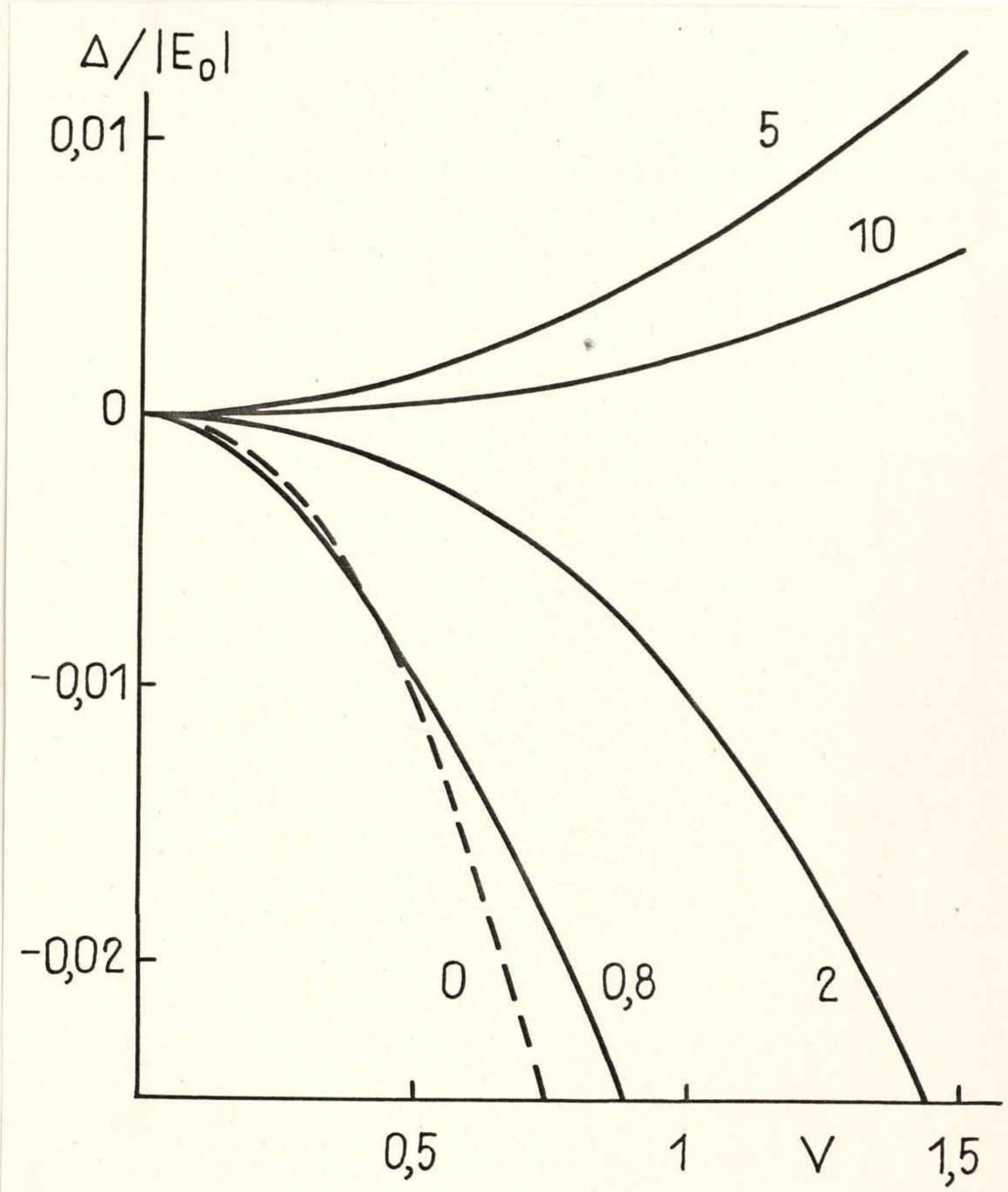

Рис. 3.2. Сдвиг уровня в δ-потенциале как функция напряженности электромагнитного поля V. Числа у кривых - значения частоты $\varkappa$.

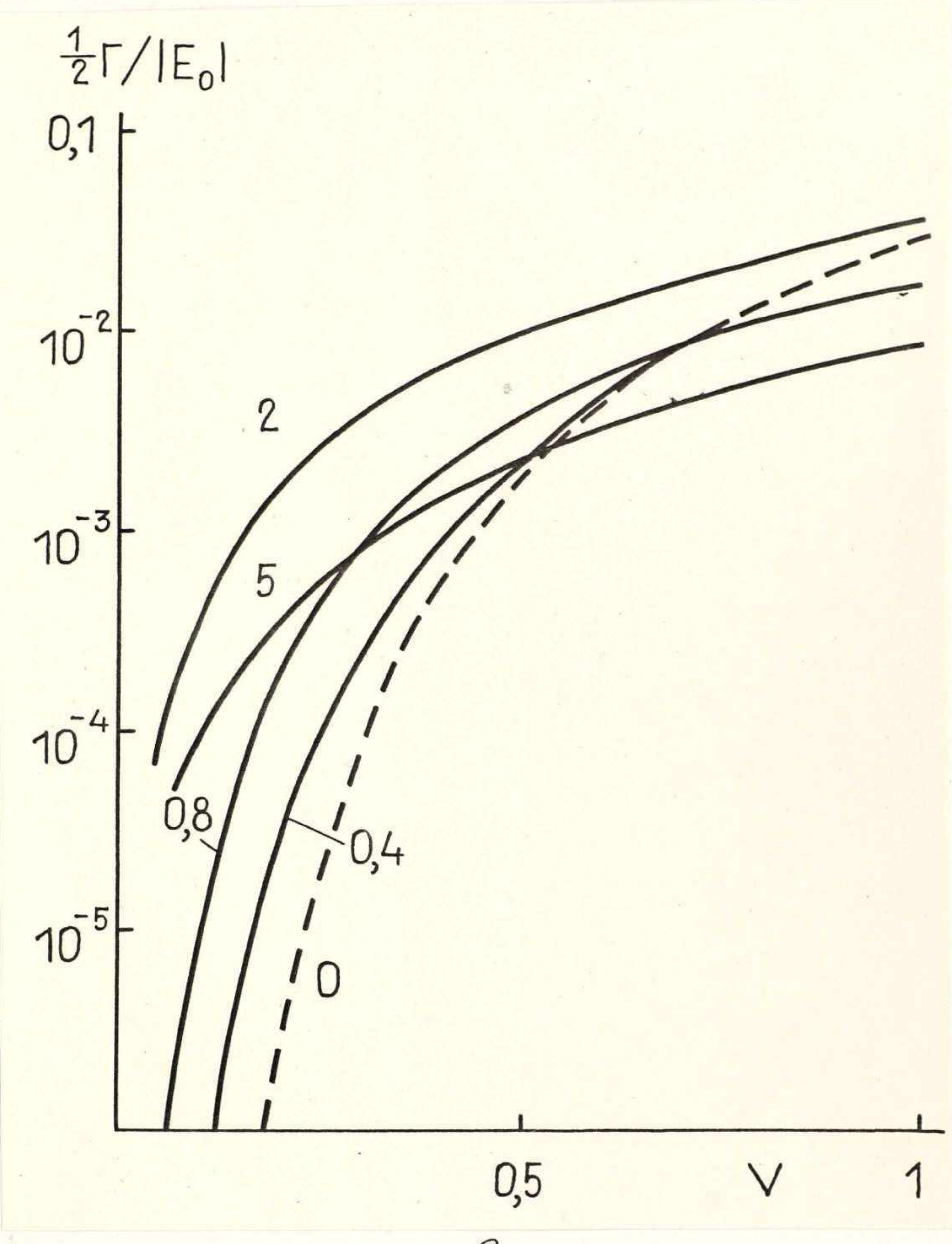

Рис. 3.3. Полуширина уровня в δ - потенциале как функция напряженности электромагнитного поля. Числа у кривых - значения частоты w .

приведены на рис. 3.2 и 3.3. Пунктирные кривые соответствуют постоянному полю и получены из выражения (3.48) при $w=0$. Из рис.3.2 следует, что с уменьшением частоты поля сдвиг уровня стремится очень быстро к своему асимптотическому значению при $w=0$. При больших частотах, когда возможна однофотонная ионизация, сдвиг становится положительным и медленно приближается к значению $eF_0^2/2mw^2$, равному кинетической энергии колебания электрона в волне. Ширина уровня растет очень быстро с увеличением напряженности поля. С увеличением частоты ширина сначала растет, а потом убывает. Последнее находится в согласии с тем фактом, что сечение прямого фотоэффекта уменьшается с ростом частоты.

Наряду с полной вероятностью ионизации в единицу времени $w=\Gamma/\hbar$ можно вычислить и вероятность ионизации в единицу времени в каждом канале. Для этого подставим (3.34) и (3.29) в правую часть уравнения (3.32) и устремим r к бесконечности. В результате найдем, что на больших расстояниях волновая функция ведет себя как

$$\Phi \simeq \frac{1}{r}\sum_{n=n_0}^{\infty} \exp[ik_n r + in(\varphi-\tau) + i\rho(\varepsilon_r + nw)^{1/2}\sin\vartheta\cos(\varphi-\tau)](-i)^n J_n[\rho(\varepsilon_r+nw)^{1/2}\sin\vartheta] \quad (3.49),$$

$$k_n = k(\varepsilon_r + kw)^{1/2}, \quad \varepsilon_r = -1 - \frac{V^2}{2w^2} + \frac{\Delta}{|E_0|} \quad (3.50).$$

Здесь ϑ и φ - полярные углы, определяющие направление вылета электрона по отношению к оси z, совпадающей с направлением распространения поля. Сумма по n в (3.49) включает только открытые каналы. Из (3.49) следует, что вероятность вылета электрона в единицу времени в результате поглощения n фотонов равна

$$W_n = N(\mathcal{E}_r + n\omega)^{1/2}\int\limits_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta \, J_n^2\left[\rho(\mathcal{E}_r + n\omega)^{1/2}\sin\vartheta\right] \tag{3.51}$$

Множитель N может быть определен из условия, что сумма всех W_n должна равняться полной вероятности ионизации $\Gamma/\hbar$. Из представления функции Бесселя в ряд следует, что при $V \ll \omega^2$ вероятность n-фотонной ионизации имеет максимум в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны. Чем больше n, тем этот максимум острее.

Выражение (3.5I) для W_n было получено также в работах [62, 63], только с тем отличием, что в их случае $\mathcal{E}_r$ было равным $-1 - V^2/2\omega^2$, т.е. не учитывалось влияние сдвига уровня на вероятность ионизации. Это влияние в самом деле мало, исключая область вблизи порога n-фотонной ионизации.

Одновременно с нами задача данного параграфа была решена несколько другим методом Манаковым и Рапопортом [72]. Задача об ионизации системы, связанной короткодействующими силами, под действием линейно поляризованной волны рассматривалась в работах [73,74]. Был использован изложенный выше метод. В этом случае также получается интегральное уравнение (3.35), но так как его ядро не является разностным, то функция $u(\tau)$ не является постоянной, и ее приходится искать в виде ряда Фурье. Задача тогда сводится к решению бесконечной однородной алгебраической системы.

3.2.2. Рассеяние на δ-потенциале в присутствии электромагнитной волны

Рассматривая рассеяние электрона на δ-потенциале в присутствии циркулярно поляризованной волны, мы должны в интегральное уравнение (3.32) добавить неоднородный член, описывающий падающую волну:

$$\Phi(\vec{r},\tau)=\Phi_0(\vec{r},\tau)-\frac{2\pi\hbar^2}{m\varkappa}\int d\vec{r}'\int_0^{2\pi}d\tau' G_{E'}(\vec{r},\vec{r}';\tau,\tau')\cdot$$
$$\cdot\,\delta(\vec{r}')\frac{\partial}{\partial r'}\left[r'\Phi(\vec{r}',\tau')\right] \qquad (3.52).$$

Неоднородный член удовлетворяет уравнению (3.23) без δ-потенциала и равен

$$\Phi(\vec{r},\tau)=K\exp\left[i\vec{k}\vec{r}+i\frac{keF_0}{m\omega^2}\sin\vartheta_0\cos(\varphi_0-\tau)\right]=$$

$$=Ke^{i\vec{k}\vec{r}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}i^n\exp[in(\varphi_0-\tau)]J_n\left(\frac{keF_0}{m\omega^2}\sin\vartheta\right), \qquad (3.53)$$
$$k=(2mE')^{1/2}/\hbar. \qquad (3.54).$$

Углы ϑ_0 и φ_0 определяют направление $\vec{k}$.

Вблизи начала координат волновая функция должна иметь вид (3.34), где теперь

$$u(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}B_n e^{-in\tau}, \qquad (3.55).$$

Если подставить (3.34), (3.55) и (3.53) в уравнение (3.52), устремить r к нулю и приравнять коэффициенты рядов Фурье, то получим, что

$$B_n=-\frac{i^n\varepsilon^{1/2}e^{in\varphi_0}J_n(\rho\varepsilon^{1/2}\sin\vartheta_0)}{F(\varepsilon+nw)}. \qquad (3.56).$$

Зная B_n, а следовательно, и волновую функцию вблизи нуля, можем с помощью уравнения (3.52) найти волновую функцию при любом r. Рассеянная волна равна

$$\Phi_{рас.}(\vec{r},\tau)=\frac{2\pi\hbar^2}{m}\int_0^{2\pi}G_{E'}(r,0,\tau,\tau')u(\tau')d\tau' \qquad (3.57).$$

Чтобы найти $\Phi_{рас}(\vec{r},\tau)$ при больших r, подставим (3.29) в (3.57) и устремим r к бесконечности. В результате

$$\Phi_{рас} \sim \frac{1}{r}\sum_{n=n_0}^{\infty} \exp\left[ik_n r + in(\varphi-\tau) - ik_n \frac{eF_0}{m\omega^2}\sin\vartheta\sin(\varphi-\tau)\right] f_n, \tag{3.58}$$

$$f_n = -\frac{i^n k}{\varkappa}\sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp[il(\varphi_0-\varphi)] J_l(\rho\varepsilon^{1/2}\sin\vartheta_0)\cdot J_{l-n}[\rho(\varepsilon+n\omega)^{1/2}\sin\vartheta]/F(\varepsilon+l\omega) \tag{3.59}$$

$$k_n = [2m(E'+n\hbar\omega)]^{1/2}/\hbar \tag{3.60}$$

Углы ϑ и φ определяют направление рассеянной частицы в системе координат, в которой z ось совпадает с направлением распространения электромагнитной волны.

Зная f_n и учитывая нормировку падающей волны (3.53), можем найти дифференциальное

$$d\sigma_n = \frac{k_n}{k^3}|f_n|^2 d\Omega \tag{3.61}$$

и полное

$$\sigma_n = \frac{2\pi k_n}{k\varkappa^2}\sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l^2(\rho\varepsilon^{1/2}\sin\vartheta_0)|F(\varepsilon+l\omega)|^{-2}\cdot\int_0^{\pi} d\vartheta\sin\vartheta\, J_{l-n}^2[\rho(\varepsilon+n\omega)^{1/2}\sin\vartheta] \tag{3.62}$$

сечения n-фотонной ионизации.

Интересно заметить, что в нашем случае нетрудно доказать справедливость оптической теоремы [II9]

$$\operatorname{Im} f_0(\vartheta_0,\varphi_0) = \frac{k}{4\pi}\sigma_t, \tag{3.63}$$

$$\sigma_t = \sum_{n=n_0}^{\infty}\sigma_n \tag{3.64}$$

В самом деле, из (3.59) следует, что мнимая часть амплитуды упругого рассеяния вперед равна

$$\operatorname{Im} f_0(\vartheta_0,\varphi_0) = \frac{k}{\varkappa}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{J_l^2(\rho\varepsilon^{1/2}\sin\vartheta_0)\operatorname{Im}F(\varepsilon+l\omega)}{|F(\varepsilon+l\omega)|^2} \tag{3.65}$$

Если учтем определение (3.41) для функции $F(\varepsilon)$ и формулы (3.64) и (3.62), то легко увидеть законность оптической теоремы (3.63).

Если в знаменателе выражения (3.59) положить равным нулю, то

$$F(\varepsilon+l w)=1+i\varepsilon^{1/2}$$

и сумма по l может быть свернута с помощью тоеремы сложения для функций Бесселя [214]. В результате получим следующее приближенное выражение для амплитуды f_n (с точностью до фазового множителя)

$$f_n=\frac{\varepsilon^{1/2}}{(1+i\varepsilon^{1/2})}J_n\{\rho[\varepsilon\sin^2\vartheta_0+(\varepsilon+nw)\sin^2\vartheta-$$

$$-2\varepsilon^{1/2}(\varepsilon+nw)^{1/2}\sin\vartheta_0\sin\vartheta\cos(\varphi_0-\varphi)]\} \qquad (3.66).$$

Это же выражение может быть получено на основе рассмотренного Бункиным и Федоровым [64] борновского приближения. Можно ожидать что приближение Борна даст хорошие результаты при больших энергиях падающего электрона и не очень больших интенсивностях поля излучения.

Однако при некоторых энергиях разница между борновской амплитудой (3.66) и точной амплитудой (3,59) может стать очень заметной. Действительно, так как l может принимать отрицательные значения то, при $\varepsilon+lw\simeq-1$ функция $F(\varepsilon+lw)$ будет близкой к нулю. Физически это означает, что электрон отдал волне энергию $l\hbar\omega$ и сам перешел в связанное состояние. Следовательно, вблизи энергий $E_0+l\hbar\omega$ в сечениях рассеяния возникнут резонансы. Амплитуда рассеяния (3.59) вблизи резонанса может быть представлена всего одним членом суммы по l, для которого $l=-s$. В такой области энергий функция $F(\varepsilon-sw)$ может быть разложена в ряд по $E-s\hbar\omega-E_r$, где E_r определено выражением (3.43). В результате получим следующее выражение для амплитуды рассеяния вблизи резонанса

$$f_n^s = (-i)^n \varepsilon^{1/2} E_0 J_s [\rho(\varepsilon_r + s w)^{1/2} \sin\vartheta_0] \cdot$$

$$\cdot J_{s+n}[\rho(\varepsilon_r + (n+s)w)^{1/2} \sin\vartheta] / (E - E_0 - s\hbar\omega - \Delta + \tfrac{1}{2} i\Gamma) F'(\varepsilon_r) \quad (3.67),$$

где $F'(\varepsilon_r)$ есть производная $F(\varepsilon)$ по ε при $\varepsilon = \varepsilon_r$.

Следовательно, в сечениях рассеяния σ_n будет наблюдаться резонансы, удаленные друг от друга на расстоянии $\hbar\omega$. Сама величина резонансного сечения будет быстро уменьшаться с уменьшением V и ростом энергии падающего электрона. Резонанс будет заметным, если будет заметной также вероятность перехода электрона в процессе рассеяния в квазистационарное состояние. Если E велика по сравнению с $\hbar\omega$, эта вероятность заметна только в сильных полях.

Исходя из амплитуды (3.67), сечение σ_n вблизи резонанса может быть представлено в виде

$$\sigma_n^s = \sigma_t^s \frac{\Gamma_{n+s}}{\Gamma} \quad (3.68),$$

где

$$\sigma_t^s = \frac{2\pi E_0^2 J_s^2 [\rho(\varepsilon_r + s w)^{1/2} \sin\vartheta_0]}{k\varkappa |F'(\varepsilon_r)|^2 [(E - E_0 - s\hbar\omega - \Delta)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}]}, \quad (3.69)$$

$\Gamma_{n+s} = w_{n+s}/\hbar$ и w_{n+s} может быть найдено из (3.5I). Следовательно, сечение σ_n^s есть произведение σ_t^s на относительную вероятность $n+s$ -фотонной ионизации.

С практической точки зрения больший интерес представляют не сами сечения σ_n , а коэффициент поглощения света, определяемый выражением [220]

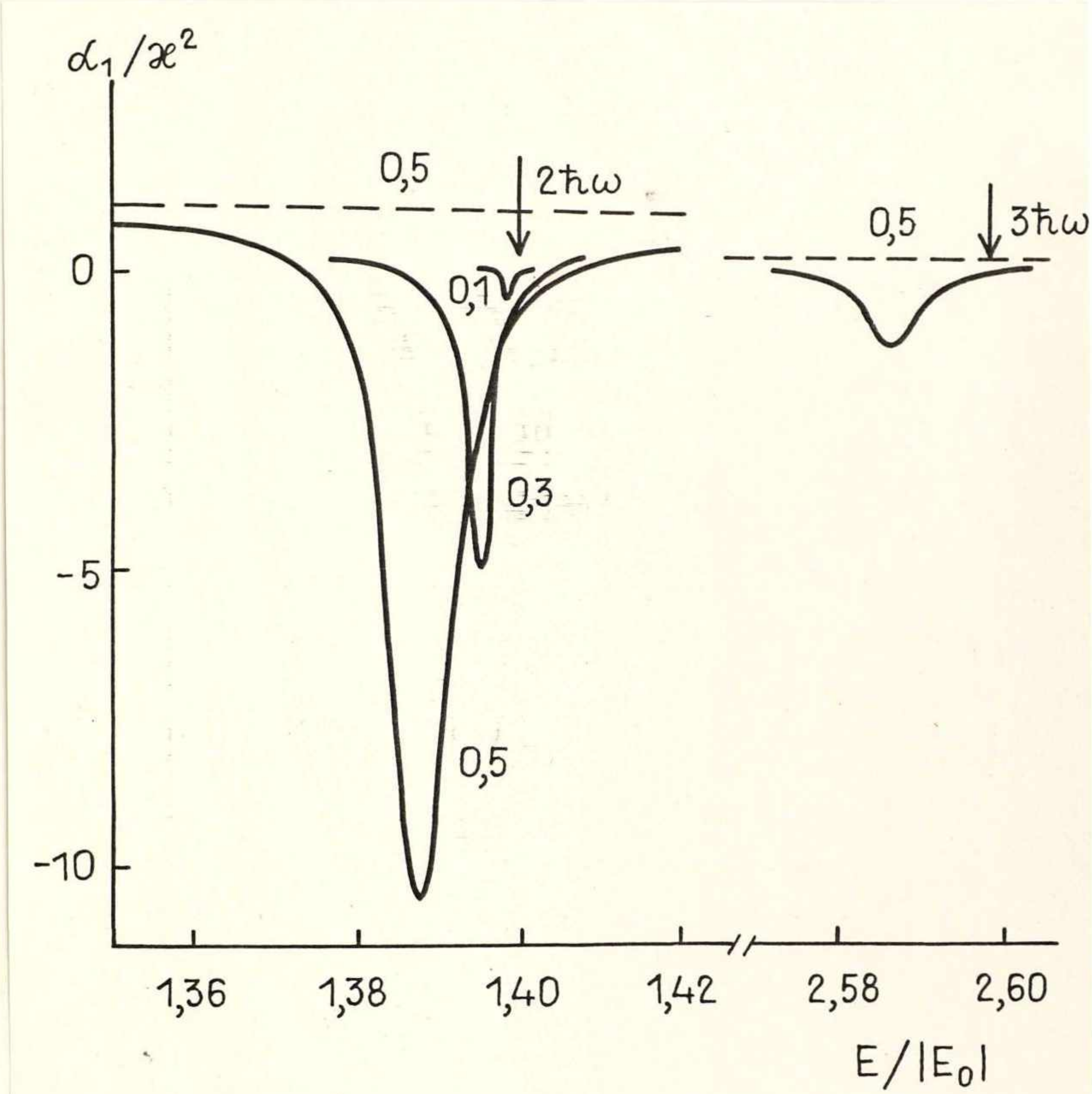

Рис. 3.4. Зависимость величины α_1, пропорциональной коэффициенту поглощения света α, от энергии падающего электрона при частоте поля $W=1,2$. Числа у кривых - значения напряженности поля V. Пунктирная кривая - приближение Борна.

$$\alpha = N_i N_e \hbar\omega v \alpha_1 I^{-1}, \tag{3.70}$$

где

$$\alpha_1 = \sum_{n=n_0}^{\infty} n \sigma_n \tag{3.71}$$

N_i и N_e - плотности падающих электронов и рассеивающих центров, I - интенсивность поля излучения, v - скорость электрона.

Так как n принимает и отрицательные значения, то α_1 может стать отрицательным. На рис. 3.4 представлены вычисленные по формулам (3.71) и (3.62) значения α_1 (в единицах $\varkappa e^2$) вблизи $E = E_0 + 2\hbar\omega$ и $E = E_0 + 3\hbar\omega$ при $\vartheta_0 = \pi/2$ и $\hbar\omega = 1,2|E_0|$. Главная особенность представленных кривых та, что коэффициент α_1 почти всюду положителен, кроме области вблизи резонансов, где он принимает большие отрицательные значения. Максимально возможное усиление быстро падает с уменьшением поля V и ростом числа s. С уменьшением поля V область энергий, при которых наблюдается усиление, также сужается. Из рисунка следует, что борновское приближение достаточно правильно воспроизводит точное значение α_1, кроме областей вблизи резонансов. Можно ожидать, что наибольшее усиление будет при $E = E_0 + \hbar\omega$ (если $\hbar\omega > |E_0|$). Однако в этом случае вычисленный по формуле (3.71) коэффициент α_1 положителен, так как все n тоже положительны. Прямой захват в связанное состояние является нестационарным процессом, процессом с несохранением потока, который в нашем рассмотрении сохраняется. Представление о сечении захвата можно получить, если его идентифицировать с сечением образования компаунд-состояния (3.69).

3.3. Обобщение рядов Неймана для специальных функций Бесселя, встречающихся при решении многофотонных задач

В этой главе при решении различных многофотонных задач мы часто имели дело с функциями Бесселя вида $J_n(z\sqrt{1+na})$ и их разными суммами. В данном параграфе представим [77] различные функции в виде ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n J_{\nu+n}(z\alpha_{\nu+n}) \tag{3.72}$$

и его некоторых модификаций, где

$$\alpha_{\nu+n}=[1+(\nu+n)a]^{1/2}, \tag{3.73}$$

z, ν и a – любые комплексные числа, исключая $\nu=-1,-2,\dots$. Фактически будем иметь некоторое обобщение рядов Неймана [214, 221] которое переходит в эти ряды при $a=0$. Имеется и некоторая аналогия с рядами Каптейна [214,221] , т.е. рядами по функциям Бесселя вида $J_{\nu+n}[(\nu+n)z]$.

В дальнейшем вывод ряд формул будет основан на свойстве полинома

$$R_{lm}^{\nu}(a)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{l}\frac{(-1)^{l-n}(\nu+2n)\Gamma(\nu+n)}{n!\,(l-n)!\,\Gamma(\nu+l+n+1)}\left\{[1+(\nu+2n)a]^m+\right.$$

$$\left.+[1-(\nu+2n)a]^m\right\}=\frac{2^{2l}}{(2l+1)!}\left[\left(a\frac{d}{d\varphi}\right)^m\exp(\varphi/a)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{d}{d\varphi}\operatorname{sh}^{2l+1}\varphi\operatorname{ch}^{\nu-1}\varphi\, F\left(\frac{1-\nu}{2},1-\frac{\nu}{2};l+\frac{3}{2};\operatorname{tg}^2\varphi\right)\right]_{\varphi=0}$$

$$\nu\neq-1,-2,\dots \tag{3.74}$$

обращаться тождественно в нуль при целых положительных m, меньше $2l$. Это свойство вытекает из последнего представления полинома $R^{\nu}_{lm}(a)$, которое можно получить, если $(\alpha_{\nu+2n})^m$ представить как

$$[1 \pm (\nu+2n)a]^m = \left\{\left(a\frac{d}{d\varphi}\right)^m \exp[(a^{-1} \pm (\nu+2n))\varphi]\right\}_{\varphi=0}, \quad (3.75),$$

свести сумму в (3.74) к производным от двух гипергеометрических функций, а потом использовать формулы преобразования для гипергеометрических функций [214].

Используя разложение функции Бесселя в степенной ряд и указанное свойство полинома (3.74), можно убедиться в справедливости разложения

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu+2n)\Gamma(\nu+n)}{n!\,\alpha^{\nu}_{\nu+2n}} J_{\nu+2n}(z\alpha_{\nu+2n}) + \{-a\}, \quad (3.76),$$

где z и a - любые комплексные числа, ν не является целым отрицательным числом, а символом $\{-a\}$ здесь и в дальнейшем будет обозначено выражение, равное по форме предшествующему, но с противоположным знаком перед константой a в формуле (3.73), определяющей $\alpha_{\nu+n}$. Обоснование изменения порядка суммирования при выводе формулы (3.76) и дальнейших формул такое же, как и в работе [221] при выводе соответствующих формул для рядов Неймана.

Если имеем разложение

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (3.77),$$

то с учетом (3.76) его можно представить как

$$f(z) = z^{-\nu}\sum_{n=0}^{\infty} b_n J_{\nu+n}(z\alpha_{\nu+n}) + \{-a\}, \quad (3.78)$$

где

$$b_n = \frac{2^{\nu+n-1}\,(\nu+n)}{\alpha_{\nu+n}^{\nu+n}} \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\nu+n-s)}{2^{2s}\, s!}\, \alpha_{\nu+n}^{2s}\, C_{n-2s} \qquad (3.78),$$

Если разложение функции $f(z)$ в ряд Маклорена не задано, то ее разложение в ряд по $J_n(z\alpha_n)$ можно построить по аналогии с ее разложением в ряд Неймана [22I]. Для этого допустим, что $|z|<|t|$, разложим $1/(t-z)$ в ряд по возрастающим степеням z, подставим вместо z^s выражение (3.76) с $\nu = s$, произведем перестановку двойного ряда и в результате получим:

$$\frac{1}{t-z} = O_0(t) J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_n O_n(t\alpha_n) J_n(z\alpha_n) + \{-a\}\right], \qquad (3.80),$$

где $O_n(t)$ - полиномы Неймана. Если использовать неравенство

$$|J_n(z\alpha_n)| \leq \frac{|z/2|^n |\alpha_n|^n}{n!} \exp\{|z|^2(1+|a|)/4\} \qquad (3.8I),$$

которое может быть получено из соответствующего неравенства работы [22I] для обычных функций Бесселя $J_n(z)$, то перестановка членов двойного ряда при выводе (3.80) обосновано, так как при $|z|<|t|$ сходится ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{2^s}{|t|^{s+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(s+2m)(s+m-1)!}{m!\,|\alpha_{s+2m}^{s}|} |J_{s+2m}(z\alpha_{s+2m})| \leq$$

$$\leq \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2^s}{|t|^{s+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(s+m-1)!\,|\alpha_{s+2m}|^{2m} \left|\frac{z}{2}\right|^{s+2m}}{m!\,(s+2m-1)!} \exp\{|z|^2(1+|a|)/4\} \leq$$

$$\leq \sum_{s=1}^{\infty} \frac{|z|^s}{|t|^{s+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left|\frac{z}{2}\right|^{2m}(1+|a|)^m 2^m}{m!} \exp\{|z|^2(1+|a|)/4\} =$$

$$= \frac{|z|}{|t|(|t|-|z|)} \exp\left\{\frac{3}{4}|z|^2(1+|a|)\right\}.$$

Если теперь $f(z)$ - аналитическая функция от z внутри замкнутой области с контуром C и если z - ее внутренняя точка, то по теореме Коши с использованием разложения (3.80) сразу получаем

$$f(z) = b_0 J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} [b_n J_n(z\alpha_n) + \{-a\}], \qquad (3.82),$$

где

$$b_n = \frac{\alpha_n}{2\pi i} \int_C f(t) O_n(t\alpha_n) dt \qquad (3.83).$$

Приведем далее ряд примеров разложений некоторых функций в ряд по $J_{\nu+n}(z\alpha_{\nu+n})$. Если разложить $(kz/2)^{\mu-\nu} J_\nu(kz)$ в степенной ряд и использовать формулу (3.76), то можно получить, что

$$\left(\frac{kz}{2}\right)^{\mu-\nu} J_\nu(kz) = \frac{k^\mu}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu+2n)\Gamma(\mu+n)}{n!\,\Gamma(\nu+1)\,\alpha^{\mu}_{\mu+2n}} \cdot$$

$$J_{\mu+2n}(z\alpha_{\mu+2n}) F\left(-n, \mu+n; \nu+1; \frac{k^2}{\alpha^2_{\mu+2n}}\right) + \{-a\} \qquad (3.84).$$

Аналогично выводятся формулы:

$$z^\nu e^{i\gamma z} = 2^{\nu-1}\Gamma(\nu) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n(\nu+n)}{\alpha^\nu_{\nu+n}} J_{\nu+n}(z\alpha_{\nu+n}) \cdot$$

$$C_n^\nu\left(\frac{\gamma}{\alpha_{\nu+n}}\right) + \{-a\}, \qquad (3.85),$$

$$\cos(z\sin\varphi) = \sum_{n=\infty}^{\infty} J_{2n}(z\alpha_{2n}) F\left(-n, n; 1/2; \frac{\sin^2\varphi}{\alpha^2_{2n}}\right) \qquad (3.86)$$

$$\sin(z\sin\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(2n+1)\sin\varphi}{\alpha_{2n+1}} J_{2n+1}(z\alpha_{2n+1}) \cdot$$

$$\cdot F\left(-n, n+1; 3/2; \frac{\sin^2\varphi}{\alpha^2_{2n+1}}\right) + \{-a\}. \qquad (3.87),$$

где $C_n^\nu(x)$ - полиномы Гегенбауэра [214].

Приведем ряд примеров разложений функций по произведениям двух функций вида $J_{\nu+n}(z\alpha_{\nu+n})$. Заменим в формуле (3.76) ν на $\nu+\mu$ и z на $2z\cos\vartheta$. Помножим обе части равенства на $\cos[(\mu-\nu)\vartheta]$ и проинтегрируем по ϑ от нуля до $\pi/2$. Если при этом использовать формулу

$$J_\mu(z)J_\nu(z)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}J_{\nu+\mu}(2z\cos\vartheta)\cos[(\mu-\nu)\vartheta]d\vartheta, \quad \mathrm{Re}(\nu+\mu)>-1 \qquad (3.88),$$

то получим

$$(z/2)^{\mu+\nu}=\frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\mu+1)}{2\Gamma(\nu+\mu+1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\nu+\mu+2n)\Gamma(\nu+\mu+n)}{n!\,\alpha_{\nu+\mu+2n}^{\nu+\mu}}\,.$$

$$\cdot J_{\nu+n}(z\alpha_{\nu+\mu+2n})J_{\mu+n}(z\alpha_{\nu+\mu+2n})+\{-a\}. \qquad (3.89).$$

Если функцию $J_\nu(2z\sin\varphi/2)/(2z\sin\varphi/2)^\nu$ разложить в степенной ряд и использовать (3.89) с $\mu=\nu$, то получим, что

$$\frac{J_\nu(2z\sin\varphi/2)}{(2z\sin\varphi/2)^\nu}=2^{\nu-1}\Gamma(\nu)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\nu+n)}{\alpha_{\nu+n}^{2\nu}}J_{\nu+n}^2(z\alpha_{\nu+n})\cdot$$

$$\cdot C_n^\nu\left(1-\frac{1-\cos\varphi}{\alpha_{\nu+n}^2}\right)+\{-a\},\quad \nu\neq 0,-1,-2,\dots \qquad (3.90).$$

Представим теперь $J_\nu(kz)J_\mu(kz)$ в виде интеграла (3.88), а функцию Бесселя под знаком интеграла разложим в ряд по $J_{\nu+\mu+2n}(2z\alpha_{\nu+\mu+2n}\cos\vartheta)$ с помощью формулы (3.84). Снова используя (3.88), найдем

$$J_\nu(kz)J_\mu(kz)=\frac{k^{\nu+\mu}}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\nu+\mu+2m)\Gamma(\nu+\mu+m)}{m!\,\Gamma(\nu+\mu+1)\,\alpha^{\nu+\mu}_{\nu+\mu+2m}}\cdot$$

$$\cdot J_{\nu+m}(z\alpha_{\nu+\mu+2m})\,J_{\mu+m}(z\alpha_{\nu+\mu+2m})\cdot$$

$$\cdot F\left(-m,\nu+\mu+m;\nu+\mu+1;\frac{k^2}{\alpha^2_{\nu+\mu+2m}}\right)+\{-a\},\ \mathrm{Re}(\nu+\mu)>-1 \qquad (3.91).$$

Если в разложении (3.90) квадрат от функции Бесселя преобразовать с помощью формулы (3.91), в которой положить $a=0$, $\mu=\nu$, заменить ν на $\nu+n$ и k на $\alpha_{\nu+n}$, изменить порядок суммирования и сравнить полученный ряд с обычным рядом (3.90), в котором $a=0$, то получим

$$C^\nu_m(\cos\varphi)=\sum_{n=0}^{m}\frac{(\nu+n)\Gamma(2\nu+m+n)\,\alpha^{2n}_{\nu+n}}{(m-n)!\,\Gamma(2\nu+2n+1)}\cdot$$

$$\cdot F(n-m,2\nu+m+n;2\nu+2n+1;\alpha^2_{\nu+n})\cdot$$

$$C^\nu_n\left(1-\frac{1-\cos\varphi}{\alpha^2_{\nu+n}}\right)+\{-a\}. \qquad (3.92).$$

Отсюда следует, что если известно разложение в ряд по ортогональной системе полиномов Гегенбауэра $C^\nu_n(\cos\varphi)$, то с помощью выражения (3.92) можно построить и разложение по системе неортогональных на отрезке от нуля до π полиномов $C^\nu_n[1-(1-\cos\varphi)\alpha^{-2}_{\nu+n}]$.

Дальнейшей нашей целью будет получение теоремы умножения. Будем исходить из разложения

$$\frac{(z/2)^\mu}{\Gamma(\mu+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2}z\alpha_n)^n}{n!\,\alpha_n^{\mu+2}}J_{\mu+n}(z\alpha_n) \qquad (3.93),$$

в справедливости которого можно убедиться путем подстановки вместо $J_{\mu+n}(z\alpha_n)$ соответствующего степенного ряда и перегруппировки слагаемых по степеням z. Из отмеченного выше свойства многочлена (3.74) при $\nu=0$ и I тогда следует, что все коэффициенты, за исключением коэффициента при z^{μ}, обращаются в нуль.

Если теперь в разложении (3.93) заменить μ на $\nu+s$, помножить обе части на $(-1)^s(z/2)^s\lambda^{\nu+2s}/s!$, просуммировать по s от нуля до бесконечности, в правой части равенства изменить порядок суммирования и использовать теорему умножения для обычных функций Бесселя, то после некоторых преобразований получим в нашем случае следующую теорему умножения:

$$\mathcal{J}_\nu(\lambda z)=\lambda^\nu(1-\lambda^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z/2)^n(\alpha_n^2-\lambda^2)^{n-1}}{n!\,\alpha_n^{\nu+n}}\mathcal{J}_{\nu+n}(z\alpha_n) \tag{3.94}$$

Используя свойство полинома (3.74), нетрудно убедиться в справедливости следующего разложения гиперболического косинуса по функциям Бесселя

$$ch\left(\frac{az^2}{4}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z\alpha_n/2)^n}{n!}\mathcal{J}_n(z\alpha_n)+\{-a\}. \tag{3.95}$$

Существуют в данном случае также разложения, аналогичные разложениям Шлемильха [221], а именно:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_{2n}^{2k}\mathcal{J}_{2n}(z\alpha_{2n})=\sum_{l=0}^{k}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l}\sum_{n=-l}^{l}\frac{(-1)^{l+n}[1+2na]^{l+k}}{(l-n)!\,(l+n)!}, \tag{3.96}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_{2n+1}^{2k-1}\mathcal{J}_{2n+1}(z\alpha_{2n+1})=\sum_{l=0}^{k-1}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l+1}\sum_{n=-l-1}^{l}\frac{(-1)^{l+n}[1+(2n+1)a]^{l+k}}{(l-n)!\,(l+n+1)!} \tag{3.97}$$

которые доказываются таким же образом, как и разложение (3.93). Выражения (3.96) и (3.97) остаются в силе и при целых отрицательных k, с той лишь разницей, что суммирование по ℓ в обеих суммах тогда распространяется до $|k|-1$. При $k=0$ имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{2n}(z\alpha_{2n}) = 1, \qquad (3.98),$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{2n+1}^{-1} J_{2n+1}(z\alpha_{2n+1}) = 0 \qquad (3.99).$$

Воспользовавшись формулой (3.88), отсюда нетрудно получить, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{n+2k}(z\alpha_n)\, J_{n+2\ell}(z\alpha_n) = \delta_{k\ell}, \qquad (3.100),$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^{-1} J_{n+2k}(z\alpha_n)\, J_{n+2\ell+1}(z\alpha_n) = 0 \qquad (3.101)$$

при любых целых k и ℓ. Выражения (3.90), (3.100) и (3.101) при $a=0$ представляют собой частные случаи известных теорем сложения для бесселевых функций [214,221]. К сожалению, не удается найти аналогичных теорем сложения в общем случае при $a\neq 0$. Обобщение теоремы сложения Графа несомненно представило бы интерес, так как помогло бы в построении упомянутой в параграфе 3.1 системы функций $\langle \beta_n|$, биортогональных функциям (3.9).

ГЛАВА IУ

УРАВНЕНИЯ МЕТОДА СИЛЬНОЙ СВЯЗИ ДЛЯ МНОГОФОТОННЫХ ЗАДАЧ

В этой главе проблема взаимодействия электрона с центральным полем атома и полем монохроматической электромагнитной волны сведена к решению уравнений метода сильной связи. Так как при этом возникают некоторые трудности с удовлетворением граничных условий, то выведены уравнения метода сильной связи также в колеблющейся системе координат. Обсуждаются граничные условия для различных многофотонных задач и обобщено понятие квазиэнергии на задачи ионизации и рассеяния.

4.I. Уравнения метода сильной связи в неподвижной системе координат

В одноэлектронном приближении исходным является уравнение Шредингера для электрона, взаимодействующего с центрально-симметричным полем атома $V(r)$ и полем излучения в дипольном приближении

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[-\Delta/2 + V(r) - F_0 z\cos\omega t\right]\psi \qquad (4.I)$$

В этой и в следующей главах будем пользоваться атомной системой единиц [I62]. Вопрос о точности дипольного приближения в случае многофотонных переходов обсуждался в монографии [I07], где показано, что квадрупольные члены могут дать существенный вклад в минимумах дисперсионных кривых и при наличии промежуточного резонанса, запрещенного в дипольном приближении. Мы не будем интересоваться этими исключительными случаями и сосредоточим внимание на существенно многофотонных процессах, когда частота фотона меньше атомной и точность дипольного приближения должна еще увеличиться.

В уравнении (4.I) рассматривается случай линейной поляризации поля, вектор напряженности которого направлен по оси z . В случае циркулярной поляризации поля, распространяющегося вдоль оси z , последний член в уравнении (4.I) следует заменить на $F_0(x\sin\omega t + y\cos\omega t)/\sqrt{2}$.

Если волновую функцию ψ разложить в ряд Фурье по полю излучения и в ряд по сферическим функциям

$$\psi = \sum_{N=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=|M|}^{\infty} \frac{f_{N\ell}(r)}{r} Y_{\ell M}(\vartheta,\varphi) \exp\{-it(E+N\omega)\}, \qquad (4.2)$$

то получим [186] следующую систему уравнений для радиальных функций $f_{N\ell}(r)$:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + K^2_{N\ell}(r)\right] f_{N\ell}(r) = -F_0 r \sum C^M_{\ell_m} f_{N'\ell'}(r), \qquad (4.3)$$

$$K^2_{N\ell}(r) = 2\left[E_N - V(r) + \ell(\ell+1)/2r^2\right], \qquad (4.4)$$

$$E_N = E + N\omega, \qquad (4.5)$$

$$C^M_{\ell_m} = \left[\frac{\ell_m^2 - M^2}{(2\ell_m-1)(2\ell_m+1)}\right]^{1/2}, \qquad (4.6)$$

Здесь N -число поглощенных ($N>0$) или испущенных $(N<0)$ фотонов, E - квазиэнергия электрона, M - магнитное квантовое число, являющееся сохраняющейся величиной в случае линейно поляризованного поля, ℓ_m - максимальное из орбитальных квантовых чисел ℓ и ℓ'. Сумма в (4.3) содержит четыре члена с $N'=N\pm 1$ и $\ell'=\ell\pm 1$.

Уравнения (4.3) аналогичны уравнениям метода сильной связи, широко используемым в теории атомных и ядерных столкновений [146,222]. Там вывод этих уравнений основан на разложении полной волновой функции атома и падающей частицы по системе атомных волновых функций. Здесь роль атомной системы играет электромагнитная волна. Аналогия становится более полной, если от классического поля электромагнитной волны, используемого в уравнении (4.I), перейти к квантованному полю (параграф 2.I). Тогда последний член в (4.I) заменяется на

$$iZ\left(\frac{2\pi\omega}{V}\right)^{1/2}\left(b^{+}e^{i\omega t}-b\,e^{-i\omega t}\right) \tag{4.7}$$

где b^{+} и b - операторы рождения и уничтожения, связанные коммутационным соотношением $[b,b^{+}]=1$, V - объем квантования.

Представив функцию ψ в виде

$$\psi=\exp\{i\omega t\,b^{+}b\}\Phi, \tag{4.8}$$

найдем, что Φ удовлетворяет стационарному уравнению Шредингера

$$\left[-\Delta/2+V(r)+\omega b^{+}b+iZ\left(\frac{2\pi\omega}{V}\right)^{1/2}(b^{+}-b)\right]\Phi=E\Phi \tag{4.9}$$

Если теперь аналогично (4.2) волновую функцию Φ искать в виде ряда по сферическим функциям и ряда по собственным функциям поля волны $|n\rangle$, т.е. осцилляторным функциям, то придем [145] к системе, аналогичной (4.3):

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+k_{n\ell}^2(r)\right]f_{n\ell}(r)=r\sum C_{\ell m}^{M}\,G_{n'}f_{n'\ell'}(r) \tag{4.10}$$

$$G_{n'} = i\left(\frac{8\pi\omega}{V}\right)^{1/2}\begin{cases} n^{1/2}, & n' = n-1, \\ -(n+1)^{1/2}, & n' = n+1. \end{cases} \qquad (4.11)$$

В сильном поле излучения, когда число фотонов n в волне велико, $G_{n'}$ переходит в классическую величину $\pm iF_0$, где $F_0 = (8\pi\omega n/V)^{1/2}$ - амплитуда напряженности поля. Оставшееся тогда несущественное отличие (4.10) и (4.3) связано с тем, описываемым ли переменное поле синус - или косинус - функцией времени.

Отметим, что уравнения (4.3) существенно проще аналогичных уравнений метода сильной связи, используемых в атомной физике [146,222]. Причина в том, что первые не содержат обменных членов и получены в результате разложения полной волновой функции по эквидистантным состояниям электромагнитного поля. В атомной физике полная волновая функция раскладывается по системе атомных функций, содержащих также состояния непрерывного спектра. Расчет методом сильной связи в атомной физике поэтому удается провести только при энергиях ниже порога ионизации, когда открыто небольшое число каналов. В случае системы (4.3) необходимое число учитываемых уравнений будет зависеть только от напряженности поля F_0.

Однако при численном решении уравнений (4.3) могут возникнуть некоторые трудности, связанные с удовлетворением граничных условий на больших расстояниях. Поскольку при $r \to \infty$ потенциал $V(r)$ стремится к нулю и остается только периодический потенуиал, решение системы (4.3) или уравнения (4.1) при больших r можно искать в виде разложения по состояниям в поле $F_0 \cos\omega t$. Волновая функция электрона в поле $F_0 \cos\omega t$ имеет простой вид (3.53). Но пока не ясно, как из этих состояний образовать функцию, которая удовлетворяла бы граничным условиям задачи рассеяния или ионизации. Во избежание этих трудностей можно перейти к колеблющейся системе координат, что и будет осуществлено в следующем параграфе.

4.2. Уравнения метода сильной связи в колеблющейся системе координат

Аналочично тому, как имеются три альтетнативные формы дипольных матричных элементов [162], имеются три альтернативные формы уравнения Шредингера, описывающего электрон в поле атома и в поле монохроматической волны в дипольном приближении. Одна из этих форм есть уравнение (4.I). Рассмотрим общий случай поляризации, когда $F_0 Z$ в уравнении (4.I) следует заменить на $(\vec{F}\vec{r})$. Если ввести функцию

$$\psi_2 = \psi \exp\{-\frac{i}{\omega}(\vec{F_0}\vec{r})\sin\omega t\}, \tag{4.I2}$$

то получим для нее "градиентное" уравнение

$$i\frac{\partial\psi_2}{\partial t} = \left[\frac{1}{2}\left(-i\vec{\nabla} + \frac{\vec{F_0}}{\omega}\sin\omega t\right)^2 + V(r)\right]\psi_2 . \tag{4.I3}$$

Переходя к переменной

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{a}\cos\omega t, \quad \vec{a} = \vec{F}/\omega^2 \tag{4.I4}$$

и вводя функцию

$$\psi_3 = \psi_2 \exp\{i\frac{F_0^2}{2\omega^2}\int dt \sin^2\omega t\} \tag{4.I5}$$

получим [223] третью форму уравнения Шредингера

$$i\frac{\partial\psi_3}{\partial t} = \left[-\frac{1}{2}\Delta_R + V(|\vec{R} - \vec{a}\cos\omega t|)\right]\psi_3 \tag{4.I6}$$

Таким образом, имеем задачу движения электрона в поле колеблющегося потенциала. При $R\to\infty$ потенциал в уравнении (4.16) переходит в статический и поэтому граничные условия на бесконечности почти такие же, как в случае статического потенциала.

Выберем теперь ось z в направлении $\vec{F}$ и разложим потенциал в уравнении (4.16) в ряд Фурье по ωt и в ряд по полиномам Лежандра от $\cos\vartheta$

$$V(|\vec{R}-\vec{a}\cos\omega t|)=\sum_{N=-\infty}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} e^{-iN\omega t} P_l(\cos\vartheta) V_{Nl}(R,a) \quad (4.17)$$

Если и волновую функцию Ψ_3 искать в виде (4.2), то придем к следующей системе уравнений для радиальных функций [143,144]

$$\left[\frac{d^2}{dR^2}+K_N^2(R)\right] f_{Nl}^M(R)=\sum_{N'=-\infty}^{\infty}\sum_{l'=|M|}^{\infty} U(N-N',l,l',M) f_{N'l'}^M(R), \quad (4.18)$$

$$U(N-N',l,l',M)=2\sum_{k} V_{N-N',k}(R,a)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{2l'+1}{2l+1}\right)^{1/2}(l'k00|l0)(l'kM0|lM), \quad (4.19)$$

т.е. системе, аналогичной (4.3), но с более сложной правой частью. Из свойств симметрии, входящих в (4.19) коэффициентов Клебша-Жордана [224] следует, что уравнение (4.18) не меняется при замене M на $-M$.

Радиальные функции должны удовлетворять граничному условию в нуле:

$$f_{Nl}^M(0)=0 \quad (4.20)$$

Остановимся сначала на задаче рассеяния. При наличии падающей волны только в канале с $N=0$ и $l=l_0$, функции $f_{Nl}^M(R)$

должны иметь на бесконечности следующий асимптотический вид [225]

$$f_{N\ell}^{M\ell_0} \sim \begin{cases} K_N^{-1/2}(\delta_{N0}\delta_{\ell\ell_0}e^{-i\gamma_N} - S_{N\ell}^{M\ell_0}e^{i\gamma_N}), & K_N^2>0 \\ B_{N\ell}^{N\ell_0}\exp\{-|K_N|R-\eta_N\ln 2|K_N|R\}, & K_N^2<0, \end{cases} \quad (4.21)$$

$$\gamma_N = K_N R - \eta_N \ln 2K_n R - \frac{1}{2}\ell\pi - \sigma_\ell^N,$$

$$K_N = (2E_N)^{1/2},\ \eta_N = |K_N|^{-1},\ \sigma_\ell^N = \arg\Gamma(\ell+1+i\eta_N). \quad (4.22)$$

Верхняя строка в выражении (4.21) описывает асимптотическое поведение $f_{N\ell}^{M\ell_0}$ в открытых каналах, а нижняя - в закрытых каналах. Через $S_{N\ell}^{M\ell_0}$ здесь обозначены элементы S -матрицы, а через σ_ℓ^N - кулоновская фаза.

Выведем теперь формулы, определяющие сечения рассеяния через элементы S - матрицы. Эти сечения будут зависеть от угла между направлением падающего электрона и направлением поляризации электромагнитной волны, который обозначим через α. На больших расстояниях R электрон должен описываться падающей под этим углом волной, искаженной кулоновским полем, и расходящейся волной. При рассеянии на статическом чисто кулоновском потенциале волновая функция с такой асиптотикой известна [225] и имеет следующее поведение при больших R :

$$\psi_c \sim \sum_{\ell m} \frac{i^\ell 4\pi}{KR}\exp(i\sigma_\ell^0 - iEt)\cdot$$

$$\cdot Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)Y_{\ell m}(\alpha,0)\sin\gamma_0(R). \quad (4.23)$$

Составим комбинацию

$$\Psi = \sum_{l_0 M} A_{l_0 M} \Psi_{l_0}^{M} \qquad (4.24)$$

где $\Psi_{l_0}^{M}$ определяется выражением (4.2), а $f_{Nl}^{Ml_0}$ имеет асимптотический вид (4.21). При больших R разность между функциями (4.24) и (4.23) должна представлять чисто расходящуюся волну. Отсюда можно найти, что

$$A_{l_0 M} = 2\pi K^{-1/2} i^{l_0+1} e^{i\sigma_{l_0}^{0}} Y_{l_0 M}(\alpha, 0). \qquad (4.25)$$

Если теперь подставить найденные $A_{l_0 M}$ в (4.24), использовать асимптотическое выражение (4.21) для радиальных функций и вновь вернуться от колеблющейся системы координат к системе координат, связанной с атомом, то можно получить следующее выражение для части волновой функции, описывающей расходящиеся волны,

$$\Psi_{расх} \sim \frac{1}{R} \sum_{N} f_N \exp\{-iEt - iN\omega t + ik_N r -$$

$$- i\eta_N \ln 2k_N r + ik_N a \cos\vartheta \cos\omega t\}, \qquad (4.26)$$

где

$$f_N = f_c \delta_{N0} + \frac{2\pi}{\sqrt{KK_N}} \sum_{l l_0 M} i^{l_0 - l - 1} e^{i(\sigma_{l_0}^{0} - \sigma_l^{N})} \cdot$$

$$\left[S_{Nl}^{Ml_0} - \delta_{N0} \delta_{ll_0} \right] Y_{lM}(\vartheta, \varphi) Y_{l_0 M}(\alpha, 0), \qquad (4.27)$$

$$f_c = -\frac{1}{4E_0 \sin^2 \vartheta'/2} \exp\left[-2i\eta_0 \ln \sin\frac{\vartheta'}{2} + 2i\sigma_0^{0}\right], \qquad (4.28)$$

$$\cos\vartheta' = \cos\alpha \cos\vartheta + \sin\alpha \sin\vartheta \cos\varphi. \qquad (4.29)$$

Выражение (4.26) фактически есть разложение по состояниям с различным числом поглощенных фотонов, т.е. по введенным в параграфе 3.I функциям

$$|N\rangle = \exp(-iN\omega t + ik_N a \cos\vartheta \cos\omega t) \tag{4.30}$$

Эти функции неортогональны, так как интеграл $\langle S|N\rangle$ по ωt от 0 до 2π не равен нулю при $S \neq N$. Поэтому при вычислении потока с помощью волновой функции (4.26) появляются зависящие от r интерференционные члены. Если в выражении потока произвести усреднение по r, то интерференционные члены исчезнут и получим следующее выражение для дифференциального сечения рассеяния с поглощением N фотонов

$$d\sigma_N = \frac{k_N}{k} |f_N|^2 d\Omega . \tag{4.31}$$

Появление таких интерференционных членов связано, конечно, с тем, что сечения вычисляются в области, где присутствует электромагнитная волна, которая в нашем рассмотрении занимает все пространство. Измерение же потока частиц всегда происходит вне лазерного пучка. Вычисленные сечения будут соответствовать измеренным, если выключение поля происходит адиабатически и не приводит к перераспределению частиц по каналам.

Уравнения, аналогичные (4.18) и (4.19), могут быть получены и в случае циркулярно поляризованной волны. В этом случае удобнее ось Z выбрать в направлении распространения волны. Тогда сохранятся сумма проекций моментов электрона и фотонов на эту ось. Единственное отличие соответствующих уравнений от (4.18) и (4.19) состоит в том, что в сумме (4.19) последний коэффициент Клебша-Жордана заменяется на $(l'kM{+}n'\,n{-}n'|lM{+}n)$.

Приведем еще выражения для коэффициентов $V_{N\ell}$ разложения (4.17) в случае кулоновского поля. Для циркулярно поляризованной волны

$$V_{N\ell}=\frac{(-1)^{\ell+\frac{N+\ell}{2}}\left[1+(-1)^{\ell+N}\right]\left[(\ell-N)!\,(\ell+N)!\right]^{1/2}}{2^{\ell+1}\left(\frac{\ell+N}{2}\right)!\left(\frac{\ell-N}{2}\right)!}V_\ell(R,a), \qquad (4.32)$$

$$V_\ell(R,a)=\begin{cases} a^\ell R^{-\ell-1}, & a<R \\ R^\ell a^{-\ell-1}, & a>R \end{cases} \qquad (4.33)$$

Для линейно поляризованной волны соответствующие выражения имеют более сложный вид. Если $a<R$, то

$$V_{N\ell}=\frac{a^\ell\left[1+(-1)^{\ell+N}\right]\ell!}{R^{\ell+1}2^{\ell+1}\left(\frac{\ell+N}{2}\right)!\left(\frac{\ell-N}{2}\right)!} \qquad (4.34)$$

При $a>R$

$$V_{N\ell}=\frac{\left[1+(-1)^{\ell+N}\right]}{2\pi R}\left[\left(\frac{a}{R}\right)^\ell I_1+\left(\frac{R}{a}\right)^{\ell+1}I_2\right], \qquad (4.35)$$

$$I_1=\frac{1}{2^{\ell-1}}\sum_{s=0}^{\ell}(-1)^{\frac{\ell+N}{2}-s}\frac{\ell!\,\sin(\ell+N-2s)u}{s!\,(\ell-s)!\,(\ell+N-2s)}, \qquad (4.36)$$

$$I_2=\sum_{s=0}^{\ell-1}\frac{2^{s+1}\left(\frac{N-\ell+1}{2}\right)_s}{\ell(-\ell+1)_s}\left(\frac{a}{R}\right)^{\ell-s}\sin(N+s+1)(\pi/2-u)+$$

$$+(-1)^{\frac{\ell-N}{2}}\frac{2^\ell\left(\frac{N-\ell+1}{2}\right)_\ell}{\ell!}\left[-4\sum_{k=0}^{\left(\frac{\ell+N}{2}\right)}\frac{\cos(2k-1)u}{2k-1}+\ln\frac{1+\cos u}{1-\cos u}\right], \qquad (4.37)$$

$$u=\arcsin(R/a). \qquad (4.38)$$

При $l+N-2s=0$ в формуле (4.36) отношение синуса к этой величине следует заменить на u. В формуле (4.37) сумма по s равна нулю при $l=0$. Отметим, что в обоих случаях коэффициенты V_{Nl} отличны от нуля только при четных $l+N$, что является отражением закона сохранения четности при дипольных переходах.

Величина E, входящая в уравнения (4.3) или (4.18), есть квазиэнергия. В работах [128-130], в которых было введено это понятие, считалось, что квазиэнергия может принимать только дискретные значения. В рассмотренной выше задаче рассеяния она принимает непрерывные действительные значения, как и в обычной задаче рассеяния без переменного поля. Присутствие поля вносит ту особенность, что с каждым дискретным уровнем электрона в атоме будет связана эквидистантная серия резонансов в сечениях рассеяния, такая же как при рассеянии электрона на δ-потенциале (параграф 3.2.2).

Если интересоваться только переходами в дискретном спектре и пренебречь ионизацией, то уравнения (4.3) или (4.18) можно решать на собственные значения. В результате получим расщепление и сдвиг атомных уровней под действием поля излучения. Если хотим учитывать и ионизацию, то эти уравнения можно решать на комплексные собственные значения, т.е. искать те значения энергии $E=E_0-i\Gamma/2$, при которых радиальные части волновых функций $f_{Nl}^{M}(R)$ на больших расстояниях имеют асимптотический вид

$$f_{Nl}^{M}(R)\sim\begin{cases} B_{Nl}^{M}\exp[ik_NR-i\eta_N\ln 2k_NR], & Re(k_N^2)>0 \\ B_{Nl}^{M}\exp[-\varkappa_NR-\eta_N\ln 2\varkappa_NR], & Re(k_N^2)<0 \end{cases} \qquad (4.39)$$

где $\varkappa_N=(-k_N^2)^{1/2}$

Вероятность ионизации в единицу времени по каналу N равна

$$w_N = A v_N \sum_e (B_{Ne}^{M})^2 \qquad (4.40)$$

где v_N - скорость электрона в канале N, A - нормировочный множитель, который может быть найден из условия, что сумма по всем открытым каналам должна равняться полной вероятности ионизации

$$\sum w_N = \Gamma \qquad (4.41)$$

Аналогичное обобщение понятия квазиэнергии было сделано в работе [147].

Численное интегрирование уравнений (4.18) представляет собой все же довольно сложную задачу и до сих пор не проводилось. Поэтому трудно судить об эффективности метода сильной связи для расчета мнргофотонных процессов в атомах, в частности, по сравнению с методом комплексных координат [123-126]. Однако полученные в этой главе уравнения метода сильной связи (4.3) являются исходными уравнениями для развития квазиклассической теории многофотонных процессов в атомах, к изложению которой перейдем в следующей главе.

ГЛАВА У

КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ МНОГОФОТОННЫХ ПРОЦЕССОВ В ВЫСОКОВОЗБУЖДЕННЫХ АТОМАХ

В данной главе дан вывод основных уравнений квазиклассики, описывающих взаимодействие электрона с центрально симметричным полем атома в присутствии сильной монохроматической электромагнитной волны. Показано, как применение итерационной процедуры к этим уравнениям позволяет получить простое выражение для сечений N-фотонной ионизации высоковозбужденных состояний атомов. Найдено точное решение полученных уравнений, и задача расчета различных многофотонных процессов в атомах сведена к решению некоторого интегрального уравнения или системы алгебраических уравнений. Последние возникают как результат удовлетворения граничных условий, налагаемых на волновую функцию. Найдены приближенное решение интегрального уравнения и соответствующая ему квазиклассическая волновая функция. Эта волновая функция использована для расчета вероятностей радиационных переходов между высоковозбужденными состояниями атомов в присутствии сильного низкочастотного поля и оценена вероятность многофотонной ионизации ридберговских состояний атомов микроволновым полем. Проведено сравнение с соответствующими экспериментально измеренными величинами. Вне рамок теории возмущений рассчитаны сечения вынужденного тормозного излучения при рассеянии электрона на кулоновском потенциале.

5.I. Вывод основных уравнений квазиклассического приближения

Высоковозбужденные состояния атомов водородоподобны. Как известно [II9], движение электрона в кулоновском поле квазиклассично, если его энергия меньше по абсолютной величине энергии на первой боровской орбите. Этому условию удовлетворяют энергии начального, промежуточных и конечного состояний электрона в атоме как в случае многофотонных переходов между высоковозбужденными состояниями, так и в случае их многофотонной ионизации. Квазиклассически можно рассматривать и процесс рассеяния электрона на положительном ионе, если энергия падающего электрона меньше по абсолютной величине энергии на первой боровской орбите.

Применим теперь квазиклассическое приближение к системе (4.3). Строго говоря [226], использование квазиклассического приближения для решения системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка (4.3) приводит к необходимости диагонализации матрицы $K^2_{N\ell}(r)+F_0 r C^M_{\ell m}$. Для двух связанных уравнений диагонализацию можно провести аналитически, и этот случай был подробно исследован Штюкельбергом [227]. Применение квазиклассического приближения для решения системы (4.3) упрощается, если недиагональные матричные элементы потенциала взаимодействия $F_0 r C^M_{\ell m}$ меньше $K^2_{N\ell}(r)$. Тогда можно не учитывать влияние первых на относительное движение в каждом канале. При таком дополнительном приближении решение связанных уравнений методом квазиклассики было рассмотрено [228,229] в связи с задачами возбуждения атомов при атомных столкновениях. В этих работах, однако, не отделялись угловые части волновых функций и использовалось трехмерное квазиклассическое приближение для решения связанных парциальных дифференциальных уравнений. Поэтому конечные квазиклассические уравнения фактически идентичны с уравнениями параметрами удара. Квазиклассическое приближение для радиальных функций рассматривалось Биртером [230], но он ограничился вырожденным случаем, когда все E_N равны E, а используемое им дополнительное приближение только частично учитывает связь каналов.

Будем искать радиальные волновые функции $f_{N\ell}$ в виде [182]

$$f_{N\ell}(r)=\frac{1}{2i\,K_{N\ell}^{1/2}(r)}\left\{a_{N\ell}^{+}(r)\exp\left[i\left(S_{N\ell}(r)+\pi/4\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\,a_{N\ell}^{-}(r)\exp\left[-i\left(S_{N\ell}(r)+\pi/4\right)\right]\right\}, \tag{5.1}$$

$$S_{N\ell}(r)=\int_{r_1}^{r}dr\,K_{N\ell}(r) \tag{5.2}$$

$$K_{N\ell}^{2}(r)=2\left[E_N-V(r)+(\ell+1/2)^2/2r^2\right], \tag{5.3}$$

$$E_N=E+N\omega \tag{5.4}$$

Здесь через r_1 обозначена ближайшая к ядру точка поворота, при которой для краткости опускмем индексы N и ℓ. Если подставить (5.I) в уравнения (4.3), использовать обычные приближения квазиклассики [II9] и отбросить быстро осциллирующие члены, содержащие в показателе экспоненты $S_{N'\ell'}+S_{N\ell}$, то придем [182,186] к следующей системе уравнений для медленных амплитуд

$$i\frac{da^{+}_{N\ell}(r)}{dr} = -\frac{F_0 r}{2}\sum C^{M}_{\ell m}\frac{a^{+}_{N'\ell'}(r)}{(K_{N\ell}K_{N'\ell'})^{1/2}}\exp[i(S_{N'\ell'}-S_{N\ell})] \qquad (5.5)$$

и комплексно сопряженной системе для амплитуд $a^{-}_{N\ell}(r)$.

Как видно из (5.5), при отсутствии электромагнитной волны функции $a^{\pm}_{N\ell}(r)$ становятся постоянными, и (5.I) переходит в обычную квазиклассическую функцию, описывающую движение электрона в потенциале $V(r)$. Выбрав $f_{N\ell}(r)$ в виде (5.I), мы фактически разделили сложное квантовомеханическое движение электрона в двух полях на два зависящих друг от друга движения: квазиклассическое - в поле атома $V(r)$ и квантовомеханическое - во внешнем поле. Считается, что взаимодействие электрона с внешним полем слабо влияет на относительное движение во всех каналах. Двигаясь в поле $V(r)$, электрон из-за взаимодействия с внешним полем может находиться в состояниях с различной энергией E_N и орбитальным моментом ℓ.

Используя (5.5) нетрудно показать, что

$$\sum_{N\ell}|a^{\pm}_{N\ell}(r)|^2 = const \qquad (5.6)$$

Если выбрать эту постоянную равную единице, то $a^{-}_{N\ell}(r)$ имеет смысл амплитуду вероятности нахождения электрона в состоянии с энергией E_N и моментом ℓ при его движении к ядру (сходящаяся волна). Амплитуда $a^{+}_{N\ell}(r)$ имеет аналогичный смысл при обратном движении (расходящаяся волна).

Рассмотрим теперь граничные условия для функций $a^{\pm}_{N\ell}(r)$. Во-первых, функции $f_{N\ell}(r)$ должны экспоненциально убывать слева от точки роворота r_1. Это приводит к условию [II9]

$$a^{+}_{N\ell}(r_1) = a^{-}_{N\ell}(r_1) \qquad (5.7)$$

Для открытых каналов в задачах рассеяния должна отсутствовать сходящаяся на бесконечности волна во всех каналах, кроме исходного, т.е.

$$a^{-}_{N\ell}(\infty) = \delta_{N0}\delta_{\ell\ell_0}, \quad E_N > 0. \tag{5.8}$$

В задаче ионизации должна отсутствовать сходящаяся волна во всех открытых каналах:

$$a^{-}_{N\ell}(\infty) = 0 \quad , E_N > 0 \tag{5.9}$$

Это комплексное граничное условие должно приводить к комплексной энергии, мнимая часть которой определяет вероятность ионизации рассматриваемого состояния.

Для закрытых каналов функция $f_{N\ell}(r)$ должна экспоненциально убывать также справа от второй точки поворота r_2. Это произойдет только при условии [II9] :

$$a^{+}_{N\ell}(r_2)\exp[i\, S_{N\ell}(r_2)] + a^{-}_{N\ell}(r_2)\exp[-i\, S_{N\ell}(r_2)] = 0,$$
$$E_N < 0. \tag{5.10}$$

В отсутствии переменного поля, когда $a^{+}_{N\ell} = a^{-}_{N\ell} = const$, последнее условие удовлетворится, если

$$S_{N\ell}(r_2) = \pi(n + 1/2) \tag{5.11}$$

где n - целое число. А это есть условие Бора-Зоммерфельда, определяющее в квазиклассическом приближении стационарное состояние.

В случае кулоновского поля притяжения

$$S_{N\ell}(r_2) = \pi\left[(-2E_N)^{-1/2} - \ell - 1/2\right]. \tag{5.12}$$

Уравнения (5.5) можно назвать квазиклассическими уравнениями метода сильной связи. Квазиклассика применима, когда величины S_{Nl}, имеющие смысл действия, велики. Если разности $S_{N'l'}-S_{Nl}$ тоже велики, то из-за быстрых осцилляций правых частей уравнений (5.5) амплитуды $a^{\pm}_{Nl}(r)$ будут малы. В этом случае можно пользоваться теорией возмущений. Нас будет интересовать случай, когда сами S_{Nl} велики, но их разности малы. Тогда из величин S_{Nl} можно выделить общее при всех N и l большое слагаемое S_0. Физически выделение такого слагаемого означает, что в движении электрона можно выделить упомянутое выше классическое движение в поле $V(r)$ (это движение является доминирующим). Как следует из (5.3), выделение такого общего для всех каналов движения возможно при выполнении двух условий. Во-первых, орбитальные моменты l во всех каналах должны отличаться незначительно от некоторого среднего орбитального момента $L\gg 1$. Во-вторых, $N\omega$ должно быть значительно меньше суммы остальных слагаемых в (5.3). Последнее условие означает, что поглощение и излучение фотонов должно слабо влиять на относительное движение во всех каналах. При выполнении этих условий

$$S_{Nl} \simeq S_0 + N\omega\tau - m\varphi(\tau), \tag{5.13}$$

$$m = l - L \ll L. \tag{5.14}$$

Здесь τ и $\varphi(\tau)$ -классическое время и угол.

Приведем необходимые в дальнейшем параметрические представления зависимостей $\varphi(\tau)$ и $r(\tau)$ от τ в случае классического движения электрона в кулоновском поле притяжения $V(r)=-1/r$. Они имеют следующий вид [215] для

параболы:

$$r=\frac{L^2}{2}(1+u^2),\ \varphi=2\,\mathrm{arctg}\,u,\ \tau=\frac{L^3}{2}\left(u+\frac{u^3}{3}\right); \tag{5.15}$$

эллипса:

$$r=\frac{1}{2|E|}(1-\varepsilon\cos u),\ \varphi=2\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\,\mathrm{tg}\frac{u}{2}\right),$$

$$\tau=\frac{1}{(2|E|)^{3/2}}(u-\varepsilon\sin u),\ \varepsilon=(1-2|E|L^2)^{1/2}; \tag{5.16}$$

гиперболы:

$$r=\frac{1}{2E}(\varepsilon\,\mathrm{ch}\,u-1),\ \varphi=2\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}}\,\mathrm{th}\frac{u}{2}\right),$$

$$\tau=\frac{1}{(2E)^{3/2}}(\varepsilon\,\mathrm{sh}\,u-u),\ \varepsilon=(1+2EL^2)^{1/2}. \tag{5.17}$$

Подставим теперь (5.13) в уравнения (5.5) и пренебрежем различием $K_{N\ell}(r)$ и $K_{N'\ell'}(r)$ в предэкспоненциальном множителе. Если учесть условие (5.14), то в коэффициентах $C^{M}_{\ell m}$ можем заменить орбитальные моменты ℓ и ℓ' на L.

Перейдя от переменной r к переменной τ, связанных соотношением $dr=K_{0L}(r)d\tau$, придем окончательно к следующей системе уравнений

$$i\frac{da_{Nm}(\tau)}{d\tau}=-\frac{r(\tau)F_0}{4}\left(1-\frac{M^2}{L^2}\right)^{1/2}\cdot$$

$$\cdot\sum a_{N'm'}(\tau)\exp\left[i(N'-N)\omega\tau+i(m-m')\varphi(\tau)\right], \tag{5.18}$$

где суммирование проводится по всем $N'=N\pm1$ и $m'=m\pm1$, а функция $a_{Nm}(\tau)$ равна $a^-_{Nm}(\tau)$ и $a^+_{Nm}(\tau)$ соответственно при $\tau<0$ и $\tau>0$. Граничное условие (5.7) при этом удовлетворяется автоматически, так как в момент $\tau=0$ электрон находится в точке поворота r_1.

Уравнения (5.I8) являются основными уравнениями квазиклассики для описания многофотонных процессов в высоковозбужденных атомах. Их решение вместе с (5.I) и разложением (4.2) определяет квазиклассическую волновую функцию электрона в поле атома и в поле электромагнитной волны.

Уравнения (5.I8) подобны уравнениям параметра удара, широко используемым в теории атомных столкновений [225,231]. В теории атомных столкновений соответствующая амплитуда $a_n(t)$ определяет вероятность возбуждения состояния атома с квантовыми числами n. Решение уравнений (5.I8) дает распределение вероятностей не только по состояниям с различным числом поглощенных фотонов N, но и по состояниям с различными орбитальными моментами электрона. Но главное отличие метода параметра удара от развиваемой в диссертации квазиклассической теории описания многофотонных процессов в атомах состоит в следующем. В методе параметра удара падающая частица описывается чисто классически и является только источником зависящего от времени поля, действующего на атом при пролете частицы по классической траектории. Решение же уравнений (5.I8), удовлетворяющее граничным условиям (5.8) - (5.I0), определяет вместе с (5.I) и разложением (4.2) квазиклассическую волновую функцию системы, состоящей из электрона в поле $V(r)$ и поля излучения.

Если с помощью уравнений параметра удара рассматривались только задачи рассеяния, то с помощью уравнений (5.I8) вместе с граничными условиями (5.8) - (5.I0) и разложением (4.2) можно рассматривать также задачу на собственные значения, ионизацию, переходы в дискретном спектре и влияние дискретного спектра на сечения рассеяния. Конечно, при этом необходимо, чтобы выполнялось отмеченное выше требование, что в существенной для поглощения и излучения фотонов области само поглощение и излучение можно влияет на классическое движение электрона в потенциале $V(r)$.

Переход от уравнений (5.18) к соответствующим уравнениям параметра удара рассмотрим в параграфе 5.5. Вопрос о точном решении системы (5.18) тоже рассмотрим позже, а теперь используем для ее решения теорию возмущений.

5.2. Теория возмущений для расчета сечений многофотонной ионизации

5.2.1. Вывод сечений N-фотонной ионизации

Развиваемая квазиклассическая теория применима для описания многофотонных процессов в высоковозбужденных атомах. Так как высоковозбужденные атомы водородоподобны, то в дальнейшем в этой главе будет рассмотрен только случай кулоновского поля притяжения, когда $V(r) = -1/r$.

Что касается изложенной в этом параграфе теории возмущений [185,186], то она применима при частотах ω, много больших расстояния между соседними уровнями, равного n^{-3}, где n - главное квантовое число начального состояния. Так как при N-фотонной ионизации $N\omega$ порядка n^{-2}, то отсюда следует, что накладываются следующие ограничения на частоту ω и N:

$$1 \gg \omega \gg n^{-3}, \quad N \ll n \tag{5.19}$$

В действительности из проведенного ниже сравнения квазиклассических сечений с соответствующими квантовомеханическими сечениями будет видно, что первые достаточно точны и при менее жестком ограничении, чем (5.19). Случай, когда ω меньше или порядка расстояния между уровнями, будет рассмотрен в параграфе 5.4.3.

Если $\omega \gg n^{-3}$, то разности $S_{N'\ell'} - S_{N\ell}$ в общем случае велики и матричные элементы поэтому экспоненциальны малы, за одним исключением. Это исключение возникает при $\ell \ll n$, когда разности $S_{N'\ell'} - S_{N\ell}$ становятся малыми вблизи точки поворота r_1. Именно эта область изменения r и такие ℓ и будут нас интересовать в дальнейшем. При $\ell \ll n$ точка поворота

$$r_1 = n^2\left[1 - \left(1 - (\ell + 1/2)^2/n^2\right)^{1/2}\right] \simeq (\ell + 1/2)^2/2 \qquad (5.20)$$

не зависит от энергии электрона и приблизительно одна и та же во всех каналах (в том числе и открытых), так как считаем, что выполнены обычные условия квазиклассики (5.14). Разложив $K_{N\ell}(r)$ в ряд вблизи r_1 мы придем к разложению (5.13), в котором классическое движение описывается параболой (формулы (5.15)). Область вдали от r_1 вносит экспоненциальны малый вклад в величину матричных элементов и поэтому при их вычислении переменную r (или u) можно продолжить до бесконечности. Из (5.18) следует, что в нашем приближении матричные элементы сводятся к компонентам Фурье, как и должно быть при переходе к классическому пределу [119].

Перепишем теперь уравнения (5.18) в виде

$$a_{Nm}(\tau) = a_{Nm}(-\infty) + \frac{iF_0}{4}\left(1 - \frac{M^2}{L^2}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' r(\tau') \cdot$$

$$\cdot \sum a_{N'm'}(\tau') \exp\left[i(N'-N)\omega\tau' + i(m-m')\varphi(\tau')\right], \qquad (5.21)$$

где постоянная $a_{Nm}(-\infty)$ согласно (5.9), (5.10) и (5.12) равна нулю при $E_N > 0$, а если $E_N < 0$, то

$$a_{Nm}(-\infty) = a_{Nm}(\infty)\exp[2i\pi(-2E_N)^{-1/2}] \qquad (5.22)$$

Введем далее функции

$$h_\pm(\tau) = \frac{iF_0}{4}\left(1-\frac{M^2}{L^2}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\tau} d\tau' r(\tau')\exp[-i\omega\tau' \pm i\varphi(\tau')], \qquad (5.23)$$

$$H_\pm = h_\pm(\infty). \qquad (5.24)$$

В случае параболического движения (5.15) интеграл (5.24) можно выразить через функцию Эйри $Ai(x)$ и ее производную $Ai'(x)$ [232]

$$H_\pm = i\pi F_0(2\omega^5)^{-1/3}\left(1-\frac{M^2}{L^2}\right)^{1/2}[-Ai'(x) \pm x^{1/2}Ai(x)], \qquad (5.25)$$

$$x = (\omega L^3/2)^{2/3}. \qquad (5.26)$$

Если учесть, что начальное состояние описывается квазиклассической волновой функцией [162]

$$f_{0\ell_0}(r) = a_0 K_{0\ell_0}^{-1/2}(r)\sin[S_{0\ell_0}(r) + \pi/4], \qquad (5.27)$$

$$a_0 = (2/\pi n^3)^{1/2} \qquad (5.28)$$

с квантовыми числами n и ℓ_0, то с помощью итерационной процедуры из (5.21) можно получить следующие выражения для нескольких первых амплитуд a_{Nm}:

$$a_{11}(\tau) = (h_+ + \gamma_1 H_+)a_0, \quad a_{1-1}(\tau) = (h_- + \gamma_1 H_-)a_0,$$

$$a_{22}(\tau) = \frac{1}{2!}[h_+^2 + 2\gamma_1 h_+ H_+ + \gamma_2(1+2\gamma_1)H_+^2]\,a_0,$$

$$a_{20}(\tau) = [h_+h_- + \gamma_1(h_+H_- + h_-H_+) + $$
$$+ \gamma_2(1+2\gamma_1)H_+H_-]a_0,$$

где

$$\gamma_K = \begin{cases} 0 & , K\omega > 1/2n^2 \\ -1/2\,(1 - i\,ctg\,\pi\nu_K) & , K\omega < 1/2n^2, \end{cases} \tag{5.29}$$

$$\nu_K = n\,(1-2K\omega n^2)^{-1/2}. \tag{5.30}$$

Методом индукции можно доказать справедливость общей формулы [186]:

$$a_{NS}(\tau) = \frac{a_0}{(N-S)!\,S!}\sum_{K=0}^{N-S}\sum_{r=0}^{S}\binom{N-S}{K}\binom{S}{r}\cdot$$
$$\cdot h_+^{N-S-K}(\tau)H_+^K h_-^{S-r}(\tau)H_-^r\gamma_{K+r}R_{K+r}, \tag{5.31}$$

$$S = (N-m)/2\ ,\quad S = 0,1,\ldots N. \tag{5.32}$$

Для величин R_K существует рекурентное соотношение

$$R_K = \sum_{\ell=0}^{K-1}\binom{K}{\ell}\gamma_\ell R_\ell\ ,\quad \gamma_0 R_0 = 1 \tag{5.33}$$

Нас интересует вероятность N-фотонной ионизации, которая определяется амплитудами $a_{NS}(\infty)$ при $E_N > 0$. Из (5.31) следует, что они имеют следующий вид

$$a_{NS}(\infty) = a_0 H_+^{N-S}H_-^S R_N/(N-S)!\,S! \tag{5.34}$$

Вычислив поток электронов с энергией E_N через элемент поверхности, поделив его на поток фотонов $F_0/8\pi\alpha\omega$ и усреднив по магнитному квантовому числу M, получим дифференциальное сечение N-фотонной ионизации состояния с квантовыми числами n и l_0:

$$d\sigma_N(nl_0,\vartheta)=\frac{2\pi\alpha\omega}{F_0^2(2l_0+1)}\cdot$$

$$\sum_{M=-l_0}^{l_0}\left|\sum_{S=0}^{N}a_{NS}(\infty)Y_{l_0+N-2S,M}(\vartheta,\varphi)\right|^2 d\Omega \tag{5.35}$$

Здесь α-постоянная тонкой структуры, ϑ- угол между направлениями вылета электрона и поляризации электромагнитного поля. Так как M во внутренней сумме одно и то же для всех сферических функций, то сечение (5.35) не зависит от угла φ. Из (5.34) и (5.25) следует, что сечение (5.35) содержит множитель $(1-M^2/L^2)$ в степени N.

Суммирование по M в (5.35) можно заменить интегрированием по переменной β, связанной с M соотношением $M=L\sin\beta$. Проинтегрировав (5.35) по угловым переменным и переменной β и просуммировав по S, получим полное сечение N-фотонной ионизации состояния с квантовыми числами n и l_0:

$$\sigma_N(nl_0)=\frac{4\alpha(2\pi F_0)^{2N}\omega}{n^3F_0^2(2N+1)!}(2\omega^5)^{-\frac{2N}{3}}|R_N|^2\cdot$$

$$[Ai'(x)-x^{1/2}Ai(x)]^{2N}\cdot$$

$$F[-N,-N;1;[Ai'(x)+x^{1/2}Ai(x)]^2/[Ai'(x)-x^{1/2}Ai(x)]] \tag{5.36}$$

Последний множитель в этом выражении есть полином, выражающийся через гипергеометрическую функцию с аргументом, меняющимся от единицы до нуля при изменении X от нуля до бесконечности.

Определим также сечение N-фотонной монизации из оболочки с главным квантовым числом n :

$$\sigma_N(n) = \frac{1}{n^2}\sum_{l_0=0}^{n-1}(2l_0+1)\,\sigma_N(nl_0) \simeq \simeq \frac{2}{n^2}\int_0^\infty dL\, L\, \sigma_N(nL) \qquad (5.37)$$

Если использовать следующее соотношение для гипергеометрических функций [232]

$$(1+x)^{2N} F\left[-N,-N;1;\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\right] = \frac{(2N)!}{(N!)^2} F\left[-N, 1/2, -N+1/2; x^2\right], \qquad (5.38)$$

то сечение (5.37) может быть представлено в виде [186]

$$\sigma_N(n) = \frac{\alpha F_0^{2N-2}\, T_N\, |R_N|^2}{n^5 (N!)^2\, \omega^{(10N-1)/3}}, \qquad (5.39)$$

где числа T_N в случае линейной поляризации определяются интегралом

$$T_N^l = \frac{2^{(4N+8)/3}\,\pi^{2N}}{(2N+1)}\int_0^\infty dx\,[Ai'(x)]^{2N}\cdot F\left[-N, 1/2; -N+1/2; x Ai^2(x)/Ai'^2(x)\right] \qquad (5.40)$$

В случае циркулярной поляризации имеется аналогичное представление

$$T_N^c = \frac{2^{(7N+8)/3}\,\pi^{2N}(N!)^2}{(2N+1)!}\int_0^\infty dx\,[Ai'(x)]^{2N}\cdot F\left[-N,-N;1; x Ai^2(x)/Ai'^2(x)\right]. \qquad (5.41)$$

В случае $N=1$ имеем $T_N^l = T_N^c = 8\pi\, 3^{-3/2}$. При больших N в работе [233] были найдены следующие асимптотические выражения для T_N^l и T_N^c :

$$T_N^{\ell}(ac) \simeq \frac{4{,}80\,(1{,}30)^{2N}}{(2N+1)\,N^{1/2}}\,, \quad T_N^{c}(ac) \simeq \frac{7{,}52\,(1{,}4054)^{2N}}{(2N+1)\,N^{1/2}} \tag{5.42}$$

В таблице 5.I приведены значения T_N, найденные численным интегрированием [I83], вместе с их асимптотическими значениями (5.42).

Таблица 5.I

Числа T_N^{ℓ} и T_N^{c}, определяющие сечение N-фотонной ионизации (5.39), вместе с их асимптотическими значениями (5.42)

N	T_N^{ℓ}	$T_N^{\ell}(ac.)$	T_N^{c}	$T_N^{c}(ac.)$
I	4,837	2,7	4,837	5,0
2	3,223	I,5	4,I20	4,I
3	2,89I	I,9	4,785	4,8
4	3,036	2,2	6,397	6,4
5	3,522	2,7	9,274	9,2
6	4,399	3,5	I4,I8	I4,0
7	5,682	4,8	22,50	22,2
8	7,650	6,7	36,72	36,2
9	I0,57	9,5	6I,23	60,4
I0	I4,9I	I3,7	I03,9	I02,3

Отношение T_N^{c}/T_N^{ℓ} есть отношение сечений многофотонной ионизации атома циркулярно поляризованным и линейно поляризованным светом. Оно характеризует сечения, усредненные по l_0. Из таблицы 5.I следует, что с увеличением N это отношение растет значительно медленнее, чем известное [234] выражение $(2N-1)!!/N!$, выведенное в случае ионизации состояния с $l_0=0$.

Отметим, что формулы (5.36) и (5.39) для сечений многофотонной ионизации без резонансного множителя $|R_N|^2$, могут быть получены более простым путем из выражения для вероятности поглощения N фотонов электроном при его движении по классической траектории в поле атома в присутствии электромагнитной волны. Это выражение получено в параграфе 5.5 и равно квадрату функции Бесселя $J_N(|B|)$, где

$$B = \int d\tau \, (\vec{F}_0 \vec{r}(\tau))\, e^{-i\omega\tau} \tag{5.43}$$

Интеграл (5.43) пропорционален классическому интегралу, определяющему компоненту Фурье с частотой ω для дипольного излучения при столкновениях [235].

Если вероятность поглощения N фотонов поделить на период движения электрона по орбите $2\pi n^3$ и поток фотонов $F_0^2(8\pi\alpha\omega)^{-1}$ и усреднить по всем ориентациям орбиты электрона, то получим

$$\sigma_N(nl_0) = \frac{\alpha\omega}{\pi n^3 F_0^2} \int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \, J_N^2(|B|), \tag{5.44}$$

$$|B^e| = \pi F_0 (2/\omega)^{5/3} \left[Ai'^2(x)\cos^2\vartheta + x\, Ai^2(x) \sin^2\vartheta \cos^2\varphi \right]^{1/2}, \tag{5.45}$$

$$|B^c| = \pi F_0 (2/\omega)^{5/3}\, 2^{-1/2} \{ x\, Ai^2(x)\cos^2\vartheta \sin^2\varphi + \left[Ai'(x)\cos\vartheta + x^{1/2} Ai(x)\cos\varphi \right]^2 \}^{1/2}, \tag{5.46}$$

где X определено выражением (5.26). Ограничиваясь первым членом разложения функции Бесселя в ряд и проинтегрировав (5.44) по угловым переменным, придем в случае линейной поляризации к сечению (5.36), в котором, однако, $R_N=1$.

Величины R_N определены выражениями (5.33), (5.29) и (5.30) и для нескольких первых N имеют вид

$$R_1=1, \quad R_2=\begin{cases} 1 & , \omega > 1/2n^2 \\ i\,\mathrm{ctg}\,\pi\nu_1 & , \omega < 1/2n^2, \end{cases}$$

$$R_3=\begin{cases} 1 & , \omega > 1/2n^2, \\ -1/2\,(1-3i\,\mathrm{ctg}\,\pi\nu_1) & , 1/4n^2 < \omega < 1/2n^2, \\ -1/2\,(1+3\,\mathrm{ctg}\,\pi\nu_1\,\mathrm{ctg}\,\pi\nu_2) & , 1/6n^2 < \omega < 1/4n^2, \end{cases}$$

$$R_4=\begin{cases} 1 & , \omega > 1/2n^2, \\ -(1-2i\,\mathrm{ctg}\,\pi\nu_1) & , 1/4n^2 < \omega < 1/2n^2, \\ -(1+i\,\mathrm{ctg}\,\pi\nu_1+3\,\mathrm{ctg}\,\pi\nu_1\,\mathrm{ctg}\,\pi\nu_2) & , 1/6n^2 < \omega < 1/4n^2, \\ -i\,(\mathrm{ctg}\,\pi\nu_1+\mathrm{ctg}\,\pi\nu_3+3\,\mathrm{ctg}\,\pi\nu_1\,\mathrm{ctg}\,\pi\nu_2\,\mathrm{ctg}\,\pi\nu_3), & \\ & 1/8n^2 < \omega < 1/6n^2. \end{cases} \qquad (5.47)$$

Недавно экспериментально была исследована так называемая надпороговая ионизация, когда наряду с поглощением минимального числа необходимых для ионизации фотонов N наблюдается поглощение дополнительно S фотонов. Сечения $\sigma_{N+S}(n)$ такой надпороговой ионизации тоже могут быть получены из (5.39) с учетом (5.33). Приведем соответствующие R_{N+S} при $N=2$ и 3 :

$$R_{2+s} = -\frac{s}{2} + i\,\frac{s+2}{2}\,\mathrm{ctg}\,\pi\nu_1\,, \quad 1/4n^2 < \omega < 1/2n^2,$$

$$R_{3+s} = -\frac{s+1}{2} - i\,\frac{s(s+3)}{4}\,\mathrm{ctg}\,\pi\nu_1 - \frac{(s+2)(s+3)}{4}\,\mathrm{ctg}\,\pi\nu_1\,\mathrm{ctg}\,\pi\nu_2,$$

$$1/6n^2 < \omega < 1/4n^2.$$

$$s = 0, 1, \ldots \tag{5.48}$$

Нетрудно с помощью формул (5.33), (5.29) и (5.30) получить R_N и R_{N+s} при больших значениях N. Различный вид R_N при различных частотах вызван тем, находятся ли промежуточные состояния в дискретном или непрерывном спектре. Из этих формул видно, что при переходе промежуточного состояния из дискретного в непрерывный спектр соответствующий $\mathrm{ctg}\,\pi\nu_k$ следует в согласии с (5.29) заменить просто на $-i$.

В случае $N=1$ сечение (5.39) равно

$$\sigma_1(n) = \frac{8\pi\alpha}{3^{3/2}\,n^5\omega^3}, \tag{5.49}$$

что совпадает с известной формулой Крамерса [236] для обычного фотоэффекта.

Сечение двухфотонной ионизации $\sigma_2(n)$, совпадающее с (5.39) при $N=2$, было позднее получено в работе [237] методом, отличным от изложенного. Отметим, что квазиклассическую теорию возмущений можно было бы применять прямо к уравнениям (4.3), используя для этого квазиклассическую волновую функцию начального состояния (5.27) и следующие квазиклассические функции Грина

$$G_{N\ell}(r,r') = -[K_{N\ell}(r)K_{N\ell}(r')]^{-1/2}\sin[S_{N\ell}(r_<)+\tfrac{\pi}{4}]\cdot$$

$$\exp[i(S_{N\ell}(r_>)+\pi/4],\ E_N>0, \tag{5.50}$$

$$G_{N\ell}(r,r') = -[K_{N\ell}(r)K_{N\ell}(r')]^{-1/2}\{\sin[S_{N\ell}(r_<)+\tfrac{\pi}{4}]\cdot$$

$$\cdot\cos[S_{N\ell}(r_>)+\pi/4]+tg[S_{N\ell}(r_2)]\cdot$$

$$\cdot\sin[S_{N\ell}(r)+\pi/4]\cdot\sin[S_{N\ell}(r')+\pi/4]\},\ E_N<0, \tag{5.51}$$

где $r_<$ и $r_>$ - соответственно меньший и больший из r и r'. Квазиклассическая функция Грина недавно обсуждалась в работе [238].

Но расчет с помощью функций Грина (5.50) и (5.51) вызывает трудности, так как в квазиклассическом случае величины $S_{N\ell}$ велики и функции (5.50) и (5.51) быстро осциллируют. В результате матричные элементы от таких функций содержат члены вида $\exp\{i(S_{N\ell}+S_{N'\ell'})\}$, которые быстро осциллируют и в квазиклассике должны отбрасываться. Выделение таких членов в промежуточных выкладках при больших N затруднительно, поэтому удобнее пользоваться изложенным в этой главе методом, в котором такие члены выделены и отброшены с самого начала.

Прежде чем перейти к сравнению квазиклассических и соответствующих им квантовомеханических сечений, отметим, что в резонансной области сечения (5.39) должны быть достаточно точны там, где сами сечения велики. Однако в межрезонансных минимумах, где сами сечения заметно меньше усредненных квазиклассических сечений $(R_N=1)$, формула (5.39) не может отражать всех тонкостей квантовомеханической интерференции. Поэтому в следующем параграфе в случае двухфотонной ионизации найдем поправки к сечениям (5.39)

5.2.2. Учет поправок в межрезонансных минимумах

Главная неточность в квазиклассических сечениях предыдущего параграфа возникла не из-за самого квазиклассического приближения, а в результате перехода от уравнений (5.5) к уравнениям (5.18), При этом в предэкспоненциальных множителях мы пренебрегли различием $K_{N\ell}(r)$ в разных каналах, а в показателях экспоненты учли их различия только в первом порядке по разности энергий и моментов количества движения. Разлагая $K_{N\ell}$ вблизи точки поворота r_1, учтем еще следующий порядок. Тогда

$$K_{N\ell} = \left[\frac{2}{r} - \frac{L^2}{r^2} + 2E_N + \frac{L^2-(\ell+1/2)^2}{r^2}\right]^{1/2} \simeq$$

$$\simeq a^{1/2} + \frac{b}{2a^{1/2}} - \frac{b^2}{8a^{3/2}} + \ldots \tag{5.52}$$

где с учетом параметрического представления (5.15) движения в раболическом случае найдем, что

$$a \equiv \left(\frac{2}{r} - \frac{L^2}{r^2}\right)^{1/2} = \frac{2u}{L(1+u^2)} \tag{5.53}$$

$$b \equiv 2E_N + \frac{L^2-(\ell+1/2)^2}{r^2} = 2E_N - \frac{4(2Lm+m^2)}{L^4(1+u^2)^2} \tag{5.54}$$

В результате

$$K_{Nm} \simeq \frac{2}{L}\left\{\frac{u}{1+u^2} + \frac{1}{Lu}\left[\frac{\xi_N}{2}(1+u^2) - \frac{m}{1+u^2}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2L^2u^3}\left[-\frac{\xi_N^2}{4}(1+u^2)^3 + m\xi_N(1+u^2) - m^2\right]\right\}, \tag{5.55}$$

$$(K_{N_1 m_1} K_{N_2 m_2})^{1/2} \simeq \frac{L(1+u^2)}{2u}\left\{1+\frac{1}{2Lu^2}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left[\frac{\xi_{N_1}+\xi_{N_2}}{2}(1+u^2)^2 - m_1 - m_2\right]\right\}, \tag{5.56}$$

$$S_{N_1 m_1} - S_{N_2 m_2} \simeq (N_1-N_2)\omega\tau - (m_1-m_2)\varphi(\tau) +$$

$$+\frac{1}{L}\left[\frac{1}{4}(\xi_{N_2}^2-\xi_{N_1}^2)\left(\frac{u^5}{5}+u^3+3u-\frac{1}{u}\right)+\right.$$

$$\left.+(m_1\xi_{N_1}-m_2\xi_{N_2})\left(u-\frac{1}{u}\right)+\frac{m_1^2-m_2^2}{u}\right] \tag{5.57}$$

$$\xi_N = L^3 E_N/2\,, \quad m = l-L\,. \tag{5.58}$$

Как видно, учитываемые в этом параграфе поправки есть малые величины порядка L^{-1}.

Рассмотрим сначала амплитуду a_{22}. В этом случае при решении системы (5.5) с помощью итераций в ее правой части имеется всего один член с $N'=N-1$ и $m'=m-1$. Подставив теперь (5.56) и (5.57) в (5.5) и сохранив только члены порядка L^{-1}, получим следующее выражение для амплитуды $a_{22}(\infty)$ ниже порога однофотонной ионизации:

$$a_{22}(\infty) = -i\frac{a_0 F_0^2}{8}\left(1-\frac{M^2}{L^2}\right)\left\{\frac{M_+^2}{\omega^{10/3}}\,\mathrm{ctg}\,\pi\nu_1 - \omega^{-3} I_{22}\right\}, \tag{5.59}$$

$$M_\pm = 2^{2/3}\pi\left[-A_i'(x) \pm x^{1/2}A_i(x)\right], \quad x = \left(\frac{\omega L^3}{2}\right)^{2/3}. \tag{5.60}$$

Первый член в (5.59), содержащий котангенс, соответствует приближению предыдущего параграфа, а поправка I_{22} к нему с учетом интегрального тождества

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t) \int_{-\infty}^{t} dt'\, g(t') = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, g(t) \int_{t}^{\infty} dt'\, f(t') \tag{5.61}$$

может быть представлена в виде

$$I_{22} = \frac{\xi^3}{8}\int\limits_{-\infty}^{\infty} du\, g_+(u)\, G_+(u) \{ i [1 - \frac{\xi}{2}(1+u^2)^2] \cdot$$

$$[u^2 - \frac{1}{L}(\frac{L^3}{4n^2} - \xi + 2)]^{-1} - Z(u) + 2\xi(\frac{1}{u} - u)\}, \qquad (5.62)$$

$$g_\pm(u) = (1+u^2)(1-u^2 \pm 2iu)\exp[-i\xi(u+\frac{u^3}{3})],$$

$$G_\pm(u) = \int\limits_{-\infty}^{u} du'\, g_\pm(u') - \int\limits_{u}^{\infty} du'\, g_\pm(u'),$$

$$Z(u) = \frac{\xi^2}{2}[\frac{u^5}{5} + u^3 + 3u - \frac{1}{u}] + \frac{2}{u}, \quad \xi = \frac{\omega L^3}{2} \qquad (5.63)$$

Вблизи минимумов резонансной кривой, где котангенс обращается в нуль, определяющим будет член I_{22}. При выводе (5.59) мы пренебрегли множителями порядка L^{-1} при котангенсе, также как не будем учитывать поправки такого порядка к амплитудам в нерезонансной области, т.е. выше порога однофотонной ионизации.

Займемся теперь вычислением интеграла (5.62). Во-первых, отметим, что он является сходящимся (в смысле главного значения), хотя и содержит отрицательные степени переменной u под знаком интеграла. Учитывая, что $n \gg L \gg 1$, можно проинтегрировать (5.62) по частям и вовсе избавиться от отрицательных степеней переменной u. Тем же интегрированием по частям можно понизить степени переменных u и u'. Появившиеся при этом однократные интегралы опять сводятся к функциям Эйри. Если от переменных u и u' перейти к переменным $v = u + u'$ и $v' = u - u'$, то оставшийся двукратный интеграл может быть сведен к двукратному интегралу с постоянными пределами и в конечном счете к интегралу от функции Эйри. В результате довольно длинных вычислений можно получить следующее выражение для интеграла (5.62):

$$I_{22} = \frac{\pi}{64}\left\{(296y - 4y^{5/2} + y^4)Ai(y) - \right.$$
$$-\left(\frac{1608}{5}y^{1/2} - 2y^2 + 4y^{7/2} - y^5\right)Ai'(y) +$$
$$\left. + \left[\frac{64}{5}(7 - 2y^{3/2}) - 4y^{9/2} + y^6\right]\int_y^\infty dv\, Ai(v)\right\}, \tag{5.64}$$

$$y = (\omega L^3)^{2/3} = 2^{2/3}X. \tag{5.65}$$

Интересно, что аргумент функции I_{22} может быть получен из аргумента функции $M_\pm$ заменой в последнем ω на 2ω.

Вычисление амплитуд a_{2-2} проводится аналогично. Получающийся интеграл I_{2-2} отличается от (5.64) только противоположными знаками при дробных степенях y. Амплитуда a_{20} определяется двумя матричными элементами в соответствии с двумя возможными значениями орбитального момента промежуточного состояния $l' = l_0 \pm 1$ и может быть представлена в виде

$$a_{20} = -i\frac{a_0 F_0^2}{4}\left\{\left(1 - \frac{M^2}{L^2}\right)\left[\omega^{-10/3}M_+M_-\operatorname{ctg}\pi\gamma_1 - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \omega^{-3}I_{20}\right] + \frac{M^2}{L^2}\omega^{-3}P\right\}, \tag{5.66}$$

$$I_{20} = \frac{\xi^3}{16}\int_{-\infty}^{\infty} du\, g_-(u)G_+(u)\left\{i\left[1 - \frac{\xi}{2}(1+u^2)^2\right]\cdot\right.$$
$$\left.\left[u^2 - \frac{1}{L}\left(\frac{L^3}{4n^2} - \xi - 1\right)\right]^{-1} - Z(u)\right\} -$$
$$- \frac{\xi^3}{16}\int_{-\infty}^{\infty} du\, g_+(u)G_-(u)\left\{i\left[1 + \frac{\xi}{2}(1+u^2)^2\right]\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left[u^2 - \frac{1}{L}\left(\frac{L^3}{4n^2} - \xi + 1\right)\right]^{-1} + Z(u)\right\}, \tag{5.67}$$

$$P = -\frac{i\xi^3}{8}\int_{-\infty}^{\infty} du\, g_-(u)\, G_+(u) \tag{5.68}$$

Последний член в амплитуде (5.66) возник из-за различия множителей $1 - M^2/L^2$ этих двух матричных элементов. Вычисления, аналогичные предыдущим, приводят к следующим значениям интегралов I_{20} и P

$$I_{20} = \frac{\pi}{320}\Big\{(296y + 5y^4)Ai(y) + (226y^2 + 5y^5)Ai'(y) +$$

$$+ (-192 + 256y^3 + 5y^6)\int_y^{\infty} dv\, Ai(v)\Big\}, \tag{5.69}$$

$$P = 2\pi\int_y^{\infty} dv\, Ai(v). \tag{5.70}$$

Зная амплитуды $a_{2m}(\infty)$ и проделав те же выкладки, что и при выводе формулы (4.39), найдем сечение двухфотонной ионизации ниже порога однофотонной ионизации для атомной оболочки с главным квантовым числом n [186]:

$$\sigma_2(n) = \frac{\alpha F_0^2}{n^5 \omega^{19/3}}\left[C_0\, \mathrm{ctg}^2 \pi\nu_1 - C_1 \omega^{1/3}\, \mathrm{ctg}\, \pi\nu_1 + C_2 \omega^{2/3}\right]. \tag{5.71}$$

Числа C_0, C_1 и C_2 определяются интегралами

$$C_0 = \frac{1}{15\cdot 2^{1/3}}\int_0^{\infty} dx\left[M_+^4 + M_-^4 + 4M_+^2 M_-^2\right],$$

$$C_1 = \frac{2^{2/3}}{15}\int_0^{\infty} dx\left[M_+^2 I_{22} + M_-^2 I_{2-2} + M_+ M_-(4I_{20} - P)\right],$$

$$C_2 = \frac{1}{15\cdot 2^{1/3}}\int_0^{\infty} dx\left[I_{22}^2 + I_{2-2}^2 + 4I_{20}^2 - 2I_{20}P + \frac{3}{2}P^2\right]. \tag{5.72}$$

Численное интегрирование приводит к следующим значениям этих констант:

$$C_0 = 0,8058; \; C_1 = 1,612; \; C_2 = 1,299 \qquad (5.73)$$

Последние два члена в сечении (5.7I) есть найденные в этом параграфе поправки к сечению двухфотонной ионизации и, как видно, являются первыми членами разложения по малой величине $\omega^{1/3}$.

5.2.3 Сравнение с квантовомеханическими расчетами и экспериментом

Сравним теперь простые выражения для сечений многофотонной ионизации (5.39) и (5.7I) с соответствующими квантовомеханическими расчетами. К сожалению, в настоящее время квантовомеханические расчеты при больших n проведены только в случае двухфотонной ионизации. Ниже порога однофотонной ионизации имеется только единственный квантовомеханический расчет [I68] по двухфотонной ионизации атома водорода с оболочек n = 8,9 и I0. На рис. 5.I сравниваются результаты этих расчетов с формулой (5.7I) при n = 8. Как видно, уже один первый член формулы (5.7I) дает удовлетворительное согласие с квантовомеханическими расчетами, исключая области межрезонансного минимума. Учет последних двух членов в (5.7I) приводит практически к полному согласию с квантомеханическими расчетами. Такое же согласие наблюдается и при n = 9 и I0. На рис. 5.2 проводится аналогичное сравнение для основного состояния атома водорода. Даже в этом случае квазиклассическая формула (5.7I) дает удовлетворительные результаты.

Выше порога однофотонной ионизации поправочные члены не учитываются и сечение двухфотонной ионизации, деленное на интенсивность излучения, принимает согласно (5.39) очень простой вид

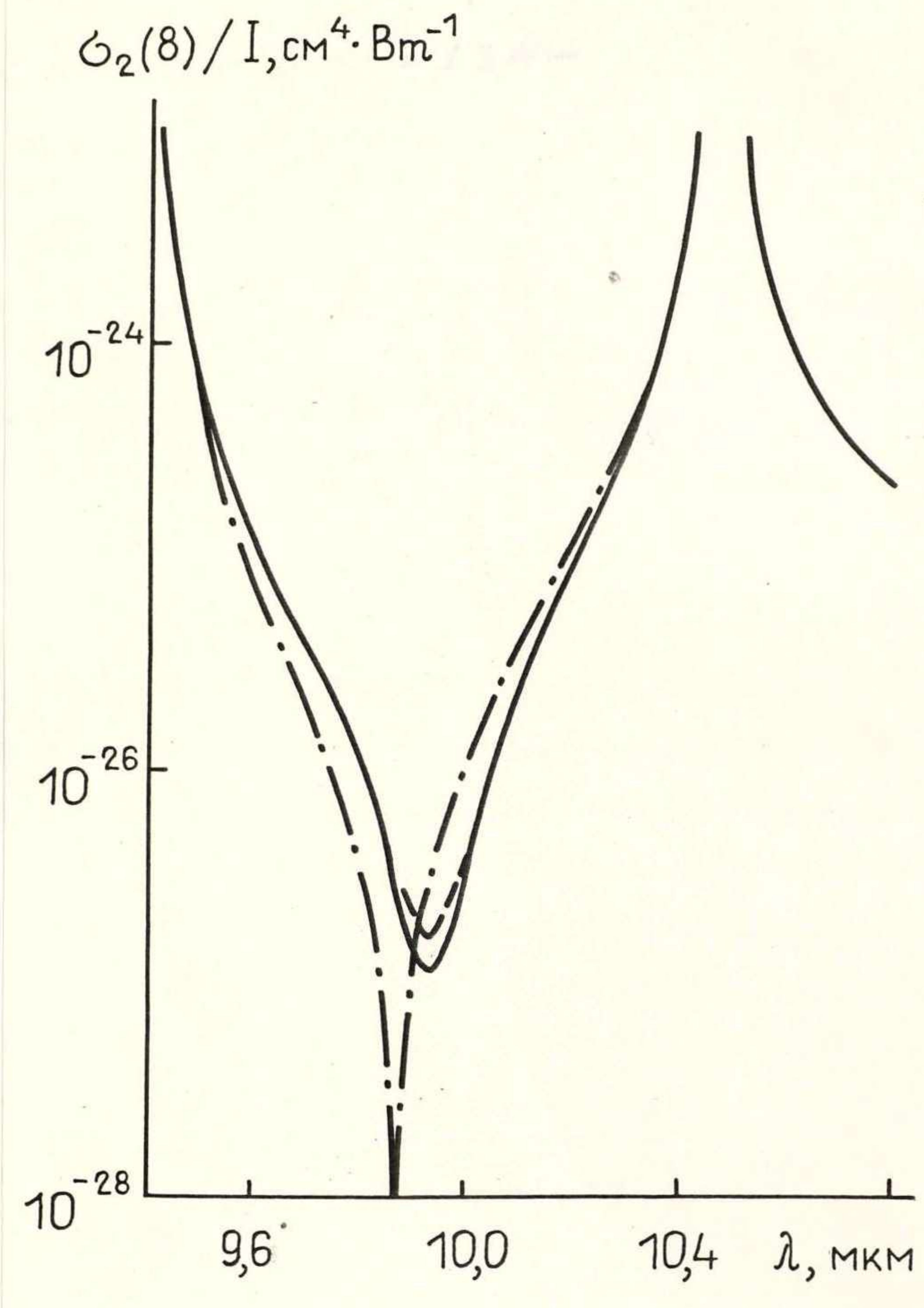

Рис. 5.I. Сечение $\sigma_2(8)$ двухфотонной ионизации атома водорода из оболочки $n=8$, деленное на интенсивность поля излучения I, в зависимости от его длины волны λ, мкм. Сплошная кривая – квантовомеханический расчет [I68], штриховая кривая – расчет по формуле (5.7I), штрихпунктриная кривая – расчет по формуле (5.7I) без последних двух поправочных членов.

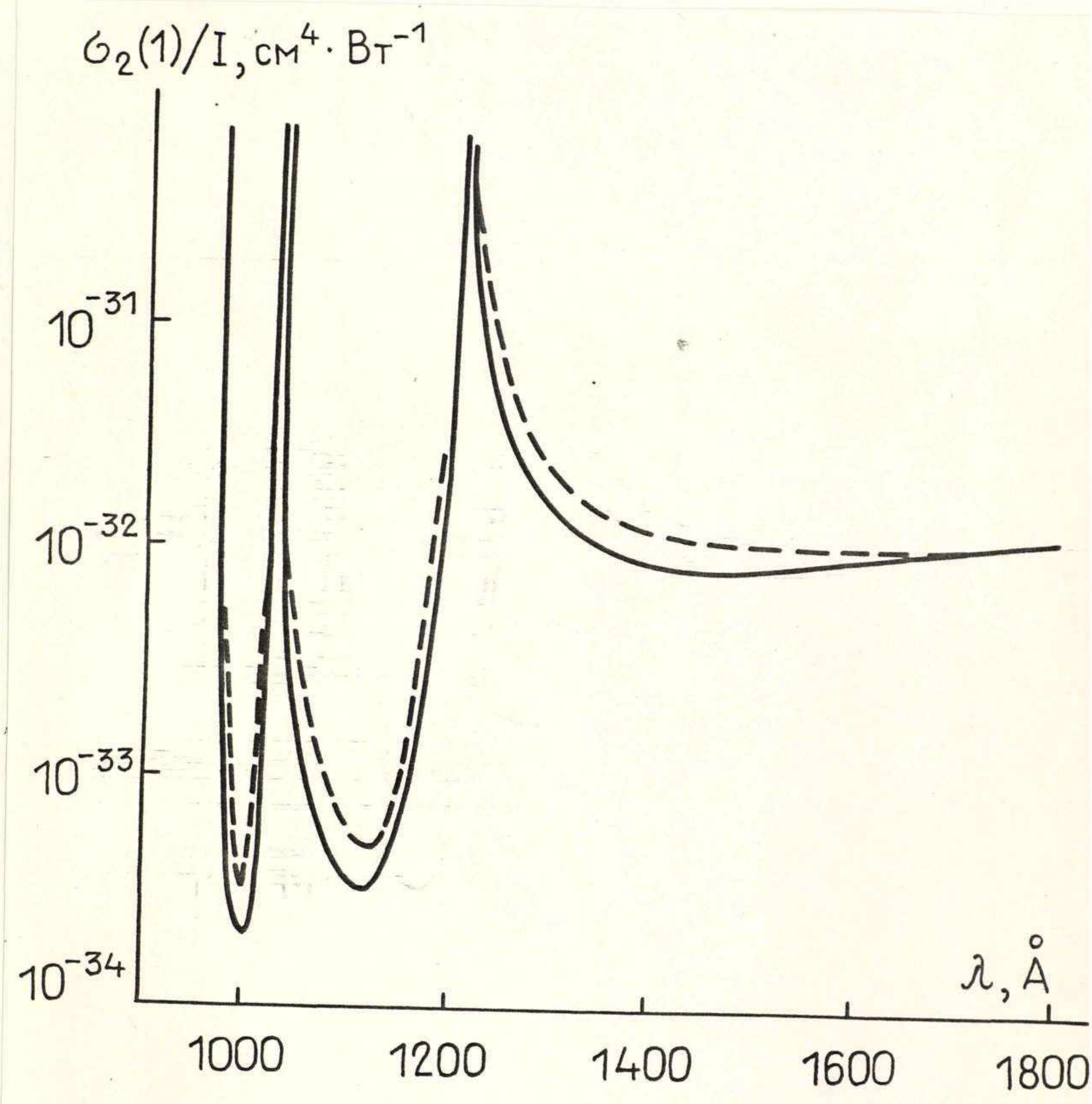

Рис. 5.2. Сечение $\sigma_2(1)$ двухфотонной ионизации основного состояния атома водорода, деленное на интенсивность поля излучения I, в зависимости от его длины волны λ. Сплошная кривая - квантовомеханический расчет [95], штриховая кривая - - расчет по формуле (5.71).

[183,184]

$$\sigma_2(n)/I = 0{,}681\cdot 10^{-52}\lambda^{19/3}/n^5 \qquad (5.74)$$

Здесь левая часть выражена в $см^4 Вт^{-1}$, а длина волны λ – в $\mathring{A}$. В таблице 5.2 представлено отношение квантовомеханического сечения двухфотонной ионизации выше порога однофотонной ионизации к квазиклассическому выражению (5.74) в зависимости от энергии вылетевшего электрона. Как видно, точность квазиклассики порядка нескольких процентов в этой области энергии вылетевшего электрона. Хотя выражения (5.39), (5.71) и (5.74), также как и полученная при тех же предположениях формула Крамерса (5.49), справедливы в случае ионизации высоковозбужденных состояний, они оказываются достаточно точными и при небольших n. Это свойство формулы Крамерса обсуждалось в книге [236].

Таблица 5.2.

Изменение отношения квантовомеханического [195] и квазиклассического (формула (5.74)) сечений двухфотонной ионизации атома водорода в зависимости от энергии вылетевшего электрона

E_e (ev)	$n=2$	$n=3$	$n=4$
4	0,968	0,975	0,981
6	0,965	0,984	0,997
8	0,971	0,995	1,01
10	0,979	1,01	1,02
12	0,987	1,01	1,03
14	0,999	1,03	1,04
16	1,01	1,04	1,05
20	1,03	1,05	1,06

Таблица 5.3. Отношение квазиклассических (формула (5.74)) и квантовомеханических [239] сечений двухфотонной ионизации атома водорода при различных длинах волн λ поля излучения и главных квантовых числах n .

$\lambda/n^2, A^{\circ}$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n \neq 9$
20	0,74	0,79	0,83	0,87	0,89	0,92	0,93	0,95
50	0,80	0,07	0,9I	0,94	0,96	0,97	0,98	0,99
I00	0,87	0,92	0,96	0,98	0,99	0,99	I,00	I,00
200	0,95	0,98	I,00	I,00	I,0I	I,0I	I,0I	I,00
300	0,99	I,0I	I,0I	I,0I	I,02	I,02	I,02	0,93
400	I,0I	I,02	I,02	I,02	I,02	I,02	I,02	0,79
500	I,03	I,03	I,02	I,02	I,02	I,02	I,02	0,62
600	I,03	I,03	I,02	I,02	I,02	I,02	I,02	0,46
700	I,04	I,03	I,02	I,02	I,02	I,0I	I,0I	0,33
800	I,03	I,02	I,02	I,02	I,0I	I,0I	I,0I	0,25
900	I,03	I,02		I,0I	I,0I	I,02	I,0I	0,18

Таблица 5.4. Отношение $\sigma_2^c(n)/\sigma_2^l(n)$ квантовомеханических сечений [239] двухфотонной ионизации атома водорода циркулярно и линейно поляризованным светом при различных длинах волн λ поля излучения и главных квантовых числах n .

λ/n^2, Å	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$
20	0,72	0,77	0,83	0,88	0,92	0,96	0,98	I,0I
50	0,79	0,87	0,94	0,99	I,02	I,05	I,07	I,09
I00	0,87	0,96	I,02	I,06	I,09	I,II	I,I2	I,I4
200	0,97	I,06	I,I0	I,I3	I,I5	I,I6	I,I7	I,I8
300	I,04	I,II	I,I4	I,I6	I,I8	I,I9	I,20	I,22
400	I,I0	I,I5	I,I7	I,I9	I,20	I,2I	I,22	I,27
500	I,I4	I,I8	I,20	I,2I	I,22	I,23	I,23	I,32
600	I,I7	I,20	I,22	I,23	I,24	I,24	I,24	I,36
700	I,20	I,23	I,24	I,24	I,25	I,25	I,26	I,39
800	I,23	I,25	I,25	I,26	I,26	I,26	I,27	I,4I
900	I,26	I,27		I,27	I,27	I,28	I,27	I,43

В таблице 5.3 проведено сравнение выражения (5.74) с недавними квантовомеханическими расчетами [239] при $n = 1, \dots, 9$. Как видно из таблицы 5.3, согласие формулы (5.74) с квантовомеханическими расчетами Каруле [239] приблизительно такое же, как и в таблице 5.2 с расчетами Кларсфелда и Маквета [195]. Следует сказать, что абсолютные значения сечений в этой области частот меняется на много порядков.

В таблице 5.4 приведены результаты квантовомеханических расчетов [239] отношения $\sigma_2^c(n)/\sigma_2^l(n)$ сечений двухфотонной ионизации атома водорода циркулярно и линейно поляризованным светом. Как следует из таблицы 5.1, в квазиклассическом приближении это отношение равно 1,28 и не зависит от длины волны поля и главного квантового числа. Таблица 5.4 показывает, что квантовомеханический расчет тоже приводит к величине, близкой к 1,28 вблизи порога однофотонной ионизации. При больших частотах квазиклассическая формула менее точна в случае циркулярно поляризованного поля, чем в случае линейно поляризованного поля. Несколько непонятное в настоящее время различие квантовомеханических и квазиклассических сечений наблюдается вблизи порога однофотонной ионизации при $n = 9$, которое имеет тенденцию роста с увеличением λ.

Следует отметить, что квантовомеханический расчет сечений $\sigma_2(n)$ выше порога однофотонной ионизации вызывает значительные математические трудности: в работах [195,196] привлекался метод Паде, в работе [239] даже после улучшения сходимости соответствующих рядов расчет потребовал значительное машинное время.

Конечно, можно ожидать, что для дифференциальных сечений (5.35) или парциальных сечений (5.36) будет наблюдаться большее отличие от соответсвующих квантовомеханических сечений, чем для сечений $\sigma_N(n)$, для которых более тонкие квантовомеханические эффекты могут исчезнуть в результате усреднения (5.37). Но для выяснения этого вопроса необходимы более детальные квантовомеханические расчеты.

Не установлена точность формулы (5.39) в случае $N>2$, так как в настоящее время отсутствуют квантовомеханические расчеты сечений $\sigma_N(n)$ при $N>2$ и больших n. Для основного состояния атома водорода имеются расчеты [95] сечений $\sigma_N(1)$ ниже порога N-I-фотонной ионизации для N=I,..., I6, и расчеты [I98] сечений надпороговой ионизации σ_{N+S} при N= 6,8,I0,I2 и S= = 0, ...,5. Но в этом случае формула (5.39) недостаточно точна без поправочных членов в области межрезонансных минимумов. Эти поправочные члены при $N>2$ еще не найдены.

Сечения (5.39) и (5.7I), строго говоря, относятся только к атому водорода. Хотя высоковозбужденные состояния сложных атомов водородоподобны, из проведенного выше вывода сечений (5.39) следует, что вероятность многофотонной ионизации высоковозбужденных состояний атомов в основном определяется небольшими расстояниями r и состояниями с небольшим ℓ, т.е. как раз теми r и ℓ, при которых отличие волновых функций сложных атомов от водородных наиболее сильное. Метод квантового дефекта [I07], по-видимому, является наиболее подходящим методом для учета этого отличия в рамках квазиклассического приближения.

В связи с недавними экспериментами [202-206] по надпороговой ионизации атомов представляет интерес сравнение результатов этих экспериментов с предсказаниями развиваемой в этой главе квазиклассической теорией. Так как сечения (5.39) относятся к атому водорода, а эксперименты проведены на атомах благородных газов, то такое сравнение имеет только оценочный характер.

Если для ионизации атома требуется поглощение не менее N фотонов, то отношение сечения $N+s$ -фотонной ионизации к сечению N -фотонной ионизации согласно (5.39) равно

$$\frac{\sigma_{N+s}}{\sigma_N} = \frac{F_0^{2s}\,(N!)^2\, T_{N+s}\, |R_{N+s}|^2}{\omega^{\frac{10s}{3}}\,[(N+s)!]^2\, T_N\, |R_N|^2} \qquad (5.75),$$

где резонансный множитель R_N определен рекурентным соотношением (5.33), а для R_{N+s} в этом случае имеется аналогичное соотношение

$$R_{N+s} = \sum_{\ell=0}^{N-1} \binom{N+s}{\ell} \gamma_\ell R_\ell \qquad (5.76),$$

формулы (5.48) дают явный вид множителей R_{N+s} при $N=2$ и 3. На основе квазиклассического приближения отношение σ_{N+1}/σ_N было оценено также в работах [240,241]. Полученная там оценка имеет ту же функциональную зависимость от F_0 и ω, что и (5.75) при $s=1$, но не содержит резонансных множителей и имеет другой числовой множитель.

Если интересоваться только оценкой отношения σ_{N+s}/σ_N, то можно не учитывать резонансных множителей, которые для отличного от водорода атома имеют другой вид. Тогда выражение (5.75) становится очень простым. Из него следует, что σ_{N+1}/σ_N пропорционально интенсивности поля и обратно пропорционально $\omega^{10/3}$. При тех интенсивностях и частотах, при которых проводился эксперимент [205], формула (5.75) дает для отношения величину порядка 10^{-3}. Такую же приблизительно величину дает квантовомеханический расчет [198]. На эксперименте же получается значение, близкое к 0,5. Следует сказать, что экспериментальные результаты [202-206] тоже сильно расходятся между собой. Трудно представить, что столь большое различие между теорией и экспериментом может быть объяснено тем, что теория относится к атому водорода, а эксперимент проведен на атоме ксенона. Правда, недавние эксперименты [151,152] по многофотонной ионизации высоковозбужденных состояний атомов микроволновым полем показывают большое различие между вероятностями ионизации атома водорода и более сложных атомов.

5.3. Точное решение основных уравнений квазиклассики. Проблема удовлетворения граничных условий

Оказывается, что для основных уравнений квазиклассики (5.18) может быть найдено точное аналитическое решение. Причиной этому то, что матричные элементы в уравнениях (5.18) зависят только от разности индексов $N-N'$ и $m-m'$. А такие системы, как было показано в работе [242], имеют точные аналитические решения. Действительно, если ввести производящую функцию

$$G(x,y,\tau)=\sum_{N,m=-\infty}^{\infty} \exp\{-iNx+imy\}\, a_{Nm}(\tau), \tag{5.77}$$

то система (5.18) сводится к одному уравнению

$$i\frac{\partial G}{\partial \tau}=-F_0\left(1-\frac{M^2}{L^2}\right)^{1/2} r(\tau)\cos(x+\omega\tau)\cos(y+\varphi(\tau))\,G, \tag{5.78}$$

которое имеет решение

$$G=\exp\left\{iF_0\left(1-\frac{M^2}{L^2}\right)^{1/2}\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau\, r(\tau)\cos(x+\omega\tau)\cos(y+\varphi(\tau))\right\}. \tag{5.79}$$

После разложения функции G в ряд Фурье [214] по x и y найдем, что амплитуда a_{Nm} выражается через произведение функций Бесселя

$$a_{Ns}=J_{N-s}(h_-(\tau))J_s(h_+(\tau))\exp\{i(N-s)\gamma_-(\tau)+is\gamma_+(\tau)\},\qquad(5.80),$$

$$m=N-2s\,,\qquad(5.81),$$

$$h_\pm(\tau)=[C_\pm^2(\tau)+d_\mp^2(\tau)]^{1/2},\ \operatorname{tg}\gamma_\pm(\tau)=C_\pm(\tau)/d_\pm(\tau),\qquad(5.82),$$

$$C_\pm(\tau)=\frac{F_0}{2}\left(1-\frac{M^2}{L^2}\right)^{1/2}\int_{\tau_0}^{\tau}d\tau'\,r(\tau')\cos(\omega\tau'\pm\varphi(\tau'))\qquad(5.83),$$

$$d_\pm(\tau)=\frac{F_0}{2}\left(1-\frac{M^2}{L^2}\right)^{1/2}\int_{\tau_0}^{\tau}d\tau'\,r(\tau')\sin(\omega\tau'\pm\varphi(\tau')),\qquad(5.84).$$

Так как функция G определена с точностью до множителя $\exp\{iN'x+im'y\}$, где N' и m' - произвольные целые числа, то общее решение системы (5.18) имеет вид

$$a_{Ns}(\tau)=\sum_{N's'=-\infty}^{\infty}b_{N's'}\,J_{N-N'-s+s'}(h_-(\tau))\,J_{s-s'}(h_+(\tau))\cdot$$

$$\cdot\exp\{i(N-N'-s+s')\gamma_-(\tau)+i(s-s')\gamma_+(\tau)\}.\qquad(5.85),$$

где $b_{N's'}$ - произвольные постоянные. В том, что функции (5.85) удовлетворяют системе (5.18), можно убедиться и непосредственной подстановкой. Произвольные постоянные $b_{N's'}$ должны быть выбраны так, чтобы удовлетворялись граничные условия (5.8) - (5.10).

Сначала рассмотрим случай переходов в дискретном спектре и ионизацию. Если частота поля излучения ω меньше или порядка расстояния между уровнями, то при не очень большой силе поля поглощение и излучение фотонов происходит в небольшой области спектра и поэтому с хорошей точностью движение электрона в кулоновском поле описывается эллипсом (5.16). При росте частоты или силы поля будут наблюдаться переходы в высоковозбужденную область спектра и даже ионизация. Набирая при этом энергию электрон выйдет из области эллиптичности своего движения. Однако, если вероятность ионизации за один период мала по сравнению с единицей, то волновая функция электрона в основном определяется областью эллиптического движения, а ее часть, связанная с ионизацией, мала и слабо влияет на основную часть волновой функции. Для грубой оценки вероятности ионизации можно принять, что движение электрона описывается эллипсом во всей области спектра . Если частота ω больше расстояния между уровнями, то хорошим приближением является параболическое приближение (5.15), которое применимо как в области дискретного, так и непрерывного спектра. В этом случае параболическое приближение должно хорошо описывать ионизацию.

В случае эллиптического движения переменная u связана с τ соотношением (5.16) и меняется в пределах от $-\pi$ до π . Выбрав u_0 в (5.83) и (5.84) равным $-\pi$, найдем, что $h_{\pm}(-\pi)=0$. Но так как функции Бесселя от нулевого аргумента отличны от нуля только при нулевом индексе, то

$$a_{Ns}(-\pi) = b_{Ns}. \tag{5.86}$$

Для открытых каналов согласно граничному условию (5.9) все $a_{Ns}(-\pi)$ должны равняться нулю. Поэтому

$$b_{Ns}=0\ ,\quad E_N>0. \tag{5.87}$$

Подставив общее решение (5.85) в граничное условие (5.10), учитывая (5.12), (5.87) и то, что $d_{\pm}(\pi)=0$, получим следующую однородную систему алгебраических уравнений для определения постоянных b_{Ns} и энергии E :

$$b_{NS}\, e^{-2i\pi\gamma_N} = \sum_{N'=-\infty}^{N_0} \sum_{S=-\infty}^{\infty} i^{N-N'} J_{N-N'-S+S'}(C_-(\pi)) \cdot$$

$$\cdot J_{S-S'}(C_+(\pi))\, b_{N'S'}\,, \quad N = N_0, N_0-1, \dots, -\infty, \quad (5.88),$$

где N_0 есть целая часть от $-E/\omega$. Случай параболического движения получается из эллиптического, если в интеграле (5.83), определяющем $C_\pm(\pi)$, перейти к асимптотическому пределу при больших $\omega(2|E|)^{-3/2}$.

Заметим, что система (5.88) может быть существенно упрощена, если ввести периодические функции

$$b_N'(\gamma) = \sum_{S=-\infty}^{\infty} e^{iS\gamma} b_{NS}\,, \quad b_N'(\gamma+2\pi) = b_N'(\gamma) \quad (5.89).$$

Если использовать теорему сложения для функций Бесселя [214], то вместо (5.88) будем иметь

$$b_N'\, e^{-2i\pi\gamma_N} = \sum_{N'=-\infty}^{N_0} i^{N-N'} e^{i(N-N')\psi} J_{N-N'}(w)\, b_{N'}', \quad (5.90)$$

$$C_+(\pi)\sin\gamma = w\sin\psi\,,$$

$$w = [C_-^2(\pi) + C_+^2(\pi) + 2C_+(\pi)C_-(\pi)\cos\gamma]^{1/2}. \quad (5.91).$$

Вводя функцию

$$d_N(\gamma) = b_N'\, i^N e^{iN\psi}, \quad (5.92),$$

получим вместо (5.90) следующую систему

$$d_N e^{-2i\pi\gamma_N} = \sum_{N'=-\infty}^{N_0} J_{N-N'}(w)\, d_{N'} \quad (5.93).$$

Величина γ входит в (5.93) в качестве параметра и изменяется в пределах от $-\pi$ до π.

Если, далее, ввести функцию

$$F(\varphi)=\sum_{N=-\infty}^{N_0} e^{iN\varphi} d_N \quad , F(\varphi+2\pi)=F(\varphi) \tag{5.94}$$

и использовать интегральное представление [214] для функции Бесселя, то система (5.93) может быть сведена к однородному интегральному уравнению

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\alpha\, F(\alpha) \sum_{N=-\infty}^{N_0} e^{iN(\varphi-\alpha)} \left[e^{-2i\pi\gamma_N} - e^{iw\sin\alpha} \right] = 0 , \tag{5.95}$$,

которое должно удовлетворяться при любом φ.

Уравнения (5.88), (5.93) или (5.95) представляют собой уравнения на собственные значения. Так как они учитывают то, что в открытых каналах отсутствуют сходящиеся волны (комплексное граничное условие (5.9)), то энергия тоже получится комплексной. Из уравнения (5.95) следует, что энергия E зависит от γ и φ как параметров, т.е. каждый уровень в присутствии поля превращается в полосу. Это связано с тем, что при наличии поля волновая функция есть смесь бесконечного числа состояний с различными орбитальными моментами и различным числом поглощенных (испущенных) фотонов.

В случае задачи рассеяния вместо граничного условия (5.9) имеем условие (5.8). При больших энергиях электрона E его движение происходит по гиперболе, а при малых - по параболе. Переменная u в обоих случаях меняется от $-\infty$ до ∞. Также как и в случае ионизации, все b_{NS} при $E_N>0$ равны нулю, кроме одного, а именно b_{0S_0}, который равен единице. Аналогично выводу уравнений (5.88) в этом случае можно при прийти к системе

$$b_{NS}\, e^{-2i\pi\gamma_N} = i^N J_{N-S+S_0}(C_-(\infty)) J_{S-S_0}(C_-(\infty)) +$$

$$+\sum_{N'=-\infty}^{\infty}\sum_{S'=-\infty}^{\infty} i^{N-N'} J_{N-N'-S+S'}(C_-(\infty)) J_{S-S'}(C_+(\infty))\, b_{N'S'} \quad (5.96).$$

Число N_0 есть целая часть от $-E/\omega$, и так как энергия E в этом случае положительна, то N_0 отрицательно.

Вводя, как и выше, функции $d_N(\gamma)$, получим неоднородную систему

$$d_N e^{-2i\pi\gamma_N} = \sum_{N'=-\infty}^{N_0} J_{N-N'}(w)\, d_{N'} + e^{iS_0\gamma} J_N(w), \quad (5.97),$$

аналогичную системе (5.93). Если ввести функцию

$$F(\varphi) = e^{iS_0\gamma}\sum_{N=-\infty}^{N_0} e^{iN\varphi} d_N,\quad F(\varphi+2\pi) = F(\varphi), \quad (5.98),$$

то получим, что оно должно удовлетворять неоднородному интегральному уравнению

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\alpha \sum_{N=-\infty}^{N_0} e^{iN(\varphi-\alpha)}\Big[F(\alpha)\big(e^{-2i\pi\gamma_N} - e^{iw\sin\alpha}\big) - e^{iw\sin\alpha}\Big] = 0 \quad (5.99).$$

Выражение (5.85) определяет амплитуды $a_{NS}(\infty)$, которые в этом случае равны

$$a_{NS}(\infty) = i^N J_{N-S+S_0}(C_-(\infty) J_{S-S_0}(C_+(\infty)) +$$

$$+\sum_{N'=-\infty}^{N_0}\sum_{S'=-\infty}^{\infty} b_{N'S'} J_{N-N'-S+S'}(C_-(\infty)) J_{S-S'}(C_+(\infty))\, i^{N-N'} \quad (5.100).$$

Если энергия электрона E, частота ω и напряженность поля F_0 таковы, что можно пренебречь влиянием переходов в дискретном спектре на рассеяние, то все b_{NS} можно положить равными нулю, и амплитуда $a_{NS}(\infty)$ определится одним первым членом (5.100). Учет влияния дискретного спектра приводит к резонансам в сечениях рассеяния, аналогично тому, как это наблюдалось в случае рассеяния на δ - потенциале (параграф 3.2.2).

Таким образом, в отличие от большинства задач квантовой механики, для которых основную трудность составляет нахождение решений соответствующих уравнений, а не удовлетворение граничных условий, в данном случае основная трудность та же, что и в традиционных задачах математической физики, когда легко написать общее решение соответствующих уравнений и вся трудность связана с удовлетворением граничных условий. Отметим, что алгебраические уравнения с разностными коэффициентами, аналогичные уравнениям (5.93) и (5.97), встречаются в теории уравнений Винера-Хопфа [243,244]. По сравнению с уравнениями Винера Хопфа здесь возникают дополнительные трудности при нахождении решений уравнений (5.93) и (5.97), что связано с экспоненциальными множителями в их левых частях. Уравнения Винера-Хопфа возникают при решении задач математической физики на полуплоскости. Здесь разделение на две разные области происходит в пространстве энергий: асимптотическое поведение волновой функции различно в дискретном и непрерывном спектрах.

5.4. Приближение эквидистантности уровней

5.4.1. Волновая функция электрона в кулоновском поле в присутствии сильного низкочастотного поля излучения

Найдем теперь приближенное решение уравнения (5.95). Это решение будет применимо, когда частота ω меньше или порядка расстояния между уровнями, т.е. $\omega n^3 \leq 1$. При таких частотах приближенно

$$\nu_N \simeq \nu_0 + N\omega\nu_0^3 \,, \quad \nu_0 = (-2E)^{-1/2} \tag{5.101}$$

и верхний предел N_0 для суммы в (5.95) можно устремить к бесконечности. Так как в случае осциллятора с его эквидистантным спектром ν_N имеет вид (5.101), то назовем это приближение приближением эквидистантности. Сумма по N в (5.95) сводится в этом случае к δ - функции и само уравнение из интегрального переходит в функциональное

$$F(\varphi - 2\pi\omega\nu_0^3)\, e^{-2i\pi\nu_0} = F(\varphi)\, e^{iW\sin\varphi} \,, \tag{5.102}$$

Функцию $F(\varphi)$ будем искать в виде

$$F(\varphi) = \exp\{if(\varphi)\} \,. \tag{5.103}$$

Тогда $f(\varphi)$ должна удовлетворять функциональному уравнению

$$f(\varphi - 2\pi\omega\nu_0^3) = f(\varphi) + W\sin\varphi + 2\pi(\nu_0 - n) \,, \tag{5.104}$$

где n - целое число. Уравнение (5.104) имеет следующее решение [245]

$$f(\varphi) = \frac{n - \nu_0}{\omega\nu_0^3}\,\varphi + \frac{W}{2}\,\frac{\cos(\varphi + \pi\omega\nu_0^3)}{\sin\pi\omega\nu_0^3} \,. \tag{5.105}$$

Из условия периодичности (5.94) функции $F(\varphi)$ следует, что

$$\nu_0 = n + k\omega\nu_0^3 \,, \tag{5.106}$$

где k - также целое число. Так как $k\omega\nu_0^3$ мало по сравнению с n, то

$$E \simeq -1/2n^2 + k\omega \,, \tag{5.107}$$

т.е. разные k соответствуют просто различным квазиэнергическим уровням, отстоящим от рассматриваемого на $k\omega$. Выбрав $k=0$, получим, что

$$\gamma_0 = n \tag{5.108}$$

и квазиэнергия электрона E совпадает с энергией невозмущенного состояния. Впредь будем рассматривать только состояния с $k = 0$, которые при выключении поля переходят в невозмущенное состояние. Тогда

$$f(\varphi) = \frac{w\cos(\varphi + \pi\omega n^3)}{2\sin\pi\omega n^3} \tag{5.109}$$

Самой интересной особенностью выражения (5.109) является то, что оно проявляет резонансную структуру. Резонансы будут наблюдаться при частотах ω, кратных n^{-3}, как и должно быть в случае эквидистантного спектра.

При рассматриваемых частотах излучения и поглощение фотонов вызывают переходы в небольшой области спектра около его невозмущенного значения, и для описания движения электрона в кулоновском поле следует пользоваться эллиптической траекторией (5.16). Подставив (5.16) в (5.83) и (5.84) найдем, что последние принимают вид

$$C_\pm(u) = \frac{F_0\gamma^5}{2}\left(1-\frac{M^2}{L^2}\right)^{1/2}\int_{-\pi}^{u} du'(1-\varepsilon\cos u')\cdot$$

$$\cdot\left[(\cos u'-\varepsilon)\cos\omega\gamma^3(u'-\varepsilon\sin u') \mp \sqrt{1-\varepsilon^2}\sin u'\sin\omega\gamma^3(u'-\varepsilon\sin u')\right], \tag{5.110}$$

$$d_\pm(u) = \frac{F_0\gamma^5}{2}\left(1-\frac{M^2}{L^2}\right)^{1/2}\int_{-\pi}^{u} du'(1-\varepsilon\cos u')\cdot$$

$$\cdot\left[(\cos u'-\varepsilon)\sin\omega\gamma^3(u'-\varepsilon\sin u') \pm \sqrt{1-\varepsilon^2}\sin u'\cos\omega\gamma^3(u'-\varepsilon\sin u')\right], \tag{5.111}$$

где γ есть некое среднее для всех каналов значение главного квантового числа. Часто мы будем заменять ν на главное квантовое число невозмущенного состояния n.

Если разложить $F(\varphi)$ в ряды Фурье по φ и γ и учесть определения (5.89), (5.92) и (5.94), то найдем, что

$$b_{NS} = J_{N+S}(g_-)\, J_S(g_+)\exp[iN(\pi+\pi\omega n^3)+iS\pi], \tag{5.112}$$

$$g_\pm = C_\pm(\pi)/2\sin\pi\omega n^3 \tag{5.113}$$

Подставив (5.112) в (5.85) и используя теорему сложения для функций Бесселя, получим следующее выражение для амплитуд $a_{NS}(u)$:

$$a_{NS}(u) = R\, J_{N+S}(w_-(u))\, J_{S}(w_+(u))\cdot$$

$$\exp\{iN[\gamma_-(u)+\psi_-(u)]+iS[\gamma_-(u)-\gamma_+(u)+\psi_-(u)+\psi_+(u)+\pi]\}, \tag{5.114}$$

$$w_\mp(u) = [h_\pm^2(u)+g_\pm^2-2h_\pm(u)g_\pm\cos(\gamma_\pm(u)-\pi\omega n^3)]^{1/2}, \tag{5.115}$$

$$g_\pm\sin(\gamma_\pm(u)-\pi\omega n^3) = w_\mp\sin\psi_\pm(u) \tag{5.116}$$

где R - нормировочная постоянная. Можно показать, что она совпадает с невозмущенным значением

$$R = (2/\pi n^3)^{1/2}. \tag{5.117}$$

Выражения (4.2), (5.1) и (5.114) определяют искомую квазиклассическую волновую функцию высоковозбужденного состояния с большими квантовыми числами n, L и M в поле излучения. Она представляет собой двойной ряд: ряд по квазиэнергетическим гармоникам (т.е. ряд Фурье по полю излучения) и ряд по сферическим функциям. Хотя энергия в присутствии поля не сохраняется, квазиэнергия совпадает с энергией невозмущенного состояния. Уровень с главным квантовым числом n в присутствии поля не сдвигается и не расщепляется в нашем приближенном рассмотрении. Появляются только квазиэнергетические гармоники, отстоящие от данного уровня на $N\omega$. Таким же образом поле вызывает примесь к данному состоянию состояний с другими орбитальными квантовыми числами. Величина примеси квазиэнергетических гармоник и состояний с другими орбитальными квантовыми числами существенно зависит от интенсивности поля излучения. То, что в нашем рассмотрении уровень не сдвигается и не расщепляется, является следствием приближения эквидистантности уровней.

Вывод найденной выше волновой функции основан на предположении, что частота поля ω меньше или порядка расстояния между уровнями. Как видно из (5.109) или (5.113), при частотах ω, кратных n^{-3}, т.е. при резонансе, пользоваться полученной волновой функцией, по-видимому, нельзя, так как происходит быстрое возбуждение атома и система выходит из области эквидистантности уровней. В результате недостаточно ограничиться приближением эквидистантности уровней, используемым при выводе уравнения (5.102), а необходимо учитывать следующие члены разложения γ_N в ряд по $N\omega$. Фактически имеется и некоторое ограничение на силу поля сверху, которое, однако, трудно определить, так как оно зависит от близости к резонансу. Практически это ограничение можно сформулировать в виде следующего требования: необходимо, чтобы те эффективные $N_{эфф}$, которые дают существенный вклад в волновую функцию (4.2), были такими, чтобы $\omega N_{эфф}$ оставалось в области эквидистантности уровней. Чем ближе частота ω находится к резонансу, тем при меньших полях нарушается это требование.

Поиск волновой функции атома водорода в сильном низкочастотном поле был впервые предпринят Блохинцевым [139]. Он нашел, что основное действие низкочастотного поля на вырожденные водородные состояния сводится к изменению временной части волновой функции и что сама функция принимает вид

$$\psi(\vec{r},t) = \varphi_{nn_1n_2}(\vec{r})\exp\left\{it/2n^2 - i\frac{3F_0n(n_1-n_2)}{2\omega}\sin\omega t\right\}, \tag{5.118}$$

где $\varphi_{nn_1n_2}(\vec{r})$ – координатная часть волновой функции атома водорода в параболических координатах [119], n, n_1, n_2 – параболические квантовые числа. Как видно, единственное отличие от невозмущенной волновой функции состоит в появлении слагаемого в экспоненте, содержащего синус, в качестве множителя перед которым стоит отношение штарковской энергии к энергии фотона. Волновая функция (5.118) получена в базисе волновых функций одной оболочки, поэтому ею можно пользоваться при частотах ω, значительно меньших расстояния между уровнями. Учет влияния на волновую функцию состояний других оболочек учитывается в этом методе по теории возмущений.

Волновая функция (5.118) была использована в работе [141] для расчета вероятностей радиационных переходов между состояниями, описываемыми этой волновой функцией, под действием второго поля с частотой Ω. Характерно, что вероятность таких радиационных переходов с поглощением одного фотона с частотой Ω и k фотонов с частотой ω пропорциональна J_k^2. Аргумент функции Бесселя равен множителю перед синусом в функции (5.118). В работе [141] был исследован, однако, только переход с основного на первый возбужденный уровень. Волновая функция вида (5.118). рассматривалась также при нахождении спектра низкорасположенных состояний атома водорода [135,136] и вероятностей их туннельной ионизации [246] в низкочастотном поле.

Функция Блохинцева применима при частотах ω, значительно меньших расстояния между уровнями, равного n^{-3}. Найденная выше квазиклассическая волновая функция применима и при частотах порядка n^{-3}, т.е. в более широком интервале. В ней проявляется характерная для этих частот резонансная структура. Отметим, что квазиклассическая волновая функция не переходит прямо в функцию (5.118), так как она в отличие от (5.118), получена в сферической системе координат и в квазиклассическом приближении.

5.4.2. Расчет вероятностей радиационных переходов между высоковозбужденными состояниями атомов в присутствии сильного низкочастотного поля

Полученная в предыдущем параграфе волновая функция описывает высоковозбужденное состояние электрона в сильном низкочастотном поле. Вычислим [187,188] теперь вероятность радиационных переходов между двумя такими состояниями под действием слабого поля с частотой Ω и единичным вектором поляризации $\vec{e}$, направление которого по отношению к оси z (направление поляризации поля с частотой ω) задается полярными углами ϑ_Ω и φ_Ω. Вероятность такого перехода определяется матричным элементом [119]

$$T = -i\int_0^t dt \langle \Psi_{n_f L_f}^{M} | (\vec{e}\vec{r}) e^{-i\Omega t} | \Psi_{n_i L_i}^{M_i} \rangle \tag{5.119}$$

где индексы i и f относятся соответственно к начальному и конечному состояниям. Если подставить (4.2) в (5.119), провести простое интегрирование по угловым переменным [162] и воспользоваться зависящей от времени теорией возмущений, то найдем, что просуммированная по M_f вероятность перехода в единицу времени равна

$$dW = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(1/2n_i^2 - 1/2n_f^2 - \Omega + k\omega) W_k d\Omega, \tag{5.120}$$

$$W_k = 4\pi^2 \alpha I_\Omega \Big\{ \tfrac{1}{2}(3\cos^2\vartheta_\Omega - 1) | R_k^+ + R_k^- |^2 + \\ + \sin^2\vartheta_\Omega \left(|R_k^+|^2 + |R_k^-|^2 \right) \Big\}, \tag{5.121}$$

$$R_k^\pm = \sum_{N_i l_i} \int dr\, r\, f_{N_i+k,\, l_i \pm 1} f_{N_i, l_i} \tag{5.122}$$

где I_Ω - интенсивность поля с частотой Ω , α - постоянная тонкой структуры, $d\Omega$ - телесный угол. Так как M_f и L_f мало отличаются от соответствующих M_i и L_i, в то время как сами эти величины велики, то всюду в (5.121) и (5.122) множитель $(1 - M_f^2/L_f^2)$ заменен на $1 - M_i^2/L_i^2$. Выражение (5.120) имеет структуру, типичную для многофотонных процессов. Наличие δ-функции в (5.120) означает, что переходы происходят при частотах Ω , равных разности энергий конечного и начального состояний атома плюс $k\omega$. Поэтому в спектре поглощения наряду с основным резонансом, соответствующим переходу от n_i к n_f , будет наблюдаться большое число резонансов - сателлитов, соответствующих поглощению фотона с частотой Ω и одновременно поглощению (испусканию) k фотонов с частотой ω .

Вычислим теперь радиальные интегралы (5.122). В общем случае их вычисление затруднительно, так как амплитуды a_{Nl} от которых зависят функции f_{Nl} , являются сложными функциями от переменной u . Последняя связана с r параметрически посредством (5.16). Вычислим радиальные интегралы для случая, соответствующего эксперименту [153] , в котором исследуются радиационные переходы между далеко отстоящими по энергии состояниями (n_i= 10 и n_f порядка 50). Дальнейшее рассмотрение поэтому будет проведено при следующем ограничении на частоту Ω :

$$\omega \gg n_i^{-3} \tag{5.123}$$

При выполнении этого условия вычисление радиальных интегралов существенно упрощается, так как заметный вклад в вероятность перехода между далеко отстоящими по энергии состояниями дают только состояния с $L \ll n\ (\varepsilon \sim 1)$ и область изменения r около ближайшей к ядру точки поворота (параграф 5.2.1). Поэтому при вычислении интеграла (5.122) можно пользоваться параболическим приближением. С учетом (5.1) и (5.13) тогда будем иметь

$$R_K^{\pm} = \frac{1}{4} \sum_{N_i l_i} \int d\tau\, r(\tau)\, a_{N_i, l_i}(v)\, a^*_{N_i+K, l_i \pm 1}(v) \cdot \exp\{-i\Omega\tau \pm i\varphi(\tau)\} \tag{5.124}$$

где τ, r и φ связаны согласно (5.15) через переменную u. Последнюю здесь обозначим через V. В амплитудах a_{Nl} тоже нужно перейти к параболическому приближению. Для этого необходимо заменить ε на $1 - L^2/2n^2$, от эллиптической переменной u перейти к параболической $V = u\, n_i/L_i$, считая u и L_i/n_i малыми и оставляя первые члены разложения всех функций по этим величинам. Тогда интегралы (5.110) и (5.111) при $\omega = 0$ принимают вид

$$C_{\pm}(V, \omega=0) \simeq -\frac{3\pi F_0 n^5}{4}\left(1 - \frac{M^2}{L^2}\right)^{1/2}\left[1 - \frac{L^2}{2n^2} - \frac{L^5}{6\pi n^5} V\right] \tag{5.125}$$

$$d_{\pm}(V, \omega=0) \simeq \mp F_0 n^4 L \left(1 - \frac{M^2}{L^2}\right)^{1/2}\left[1 - \frac{L^4}{8n^4} V^2\right] \tag{5.126}$$

Отсюда следует, что в квадратных скобках этих функций можно пренебречь всеми членами, кроме единицы, как при малых, так и больших значениях параметра $L^3\Omega$ $(\Omega n^3 \gg 1)$, которым определяется величина интеграла (5.I24). Поэтому функции $C_\pm(V, \omega=0)$ и $d_\pm(V,\omega=0)$, а следовательно, и амплитуды a_{Nl} в интеграле (5.I24) можно считать постоянными и заменить их значениями при $u=0$. При отличных от нуля ω такую оценку сделать труднее, но можно показать, что если ωn^3 меньше или порядка единицы, то все еще в интеграле (5.I24) можно пренебречь зависимостью амплитуд от V. Если учесть, что

$$d_\pm(\pi)=0\,,\quad \gamma_\pm(\pi)=\pi/2\,,\quad C_\pm(\pi)=2C_\pm(0),$$

$$C_+(0)=C_-(0)\,,\ d_+(0)=d_-(0)\,,\ \psi_+(0)=\psi_-(0)= \\ =\gamma_+(0)=\gamma_-(0), \qquad (5.I27)$$

то амплитуды $a_{N_is}(0)$ принимают вид

$$a_{N_is_i}(0)=(2/\pi n_i^3)^{1/2}J_{N_i+s_i}\left(\frac{w_i}{2}\cos\beta\right)J_{s_i}\left(\frac{w_i}{2}\cos\beta\right)\cdot \\ \cdot\exp\{i(2N_i\gamma_i(0)+is_i\pi\}, \qquad (5.I28)$$

$$w_i=c_i\,\mathrm{ctg}\,\pi\omega n_i^3-d_i \qquad (5.I29)$$

$$c_i=-F_0 n_i^5\int_0^\pi du\,(1-\cos u)^2\cos\omega n_i^3(u-\sin u) \qquad (5.I30)$$

$$d_i=F_0 n_i^5\int_0^\pi du\,(1-\cos u)^2\sin\omega n_i^3(u-\sin u) \qquad (5.I31)$$

$$\mathrm{tg}\,\gamma_i=c_i/d_i\,,\quad \sin\beta=M_i/L_i \qquad (5.I32)$$

Согласно вышеизложенному, эксцентриситет в (5.I30) и (5.I31) положен равным единице. Интегралы (5.I30) и (5.I31) могут быть выражены через функции Ангера-Вебера [2I4], как это было сделано в работе [I64].

$$C_i = \frac{F_0 \pi n_i^2}{\omega}\left[J'_\xi(\xi) - \frac{2\sin\pi\xi}{\pi}\right] \tag{5.133}$$

$$d_i = -\frac{F_0 \pi n_i^2}{\omega}\left[E'_\xi(\xi) + \frac{2\cos\pi\xi}{\pi}\right], \quad \xi = \omega n_i^3 \tag{5.134}$$

Аналогичные выражения имеют место для амплитуд $a_{N_f s_f}(0)$.

Вынося в (5.124) амплитуды $a_{N_i s_i}(0)$ и $a_{N_f s_f}(0)$ перед интегралом, оставшийся интеграл может быть выражен через функцию Эйри и ее производную. Используя еще теорему сложения, окончательно найдем в рассматриваемом приближении следующее представление для радиальных интегралов:

$$R_k^+ = P_+ J_{k+\varkappa}\left(\frac{x}{2}\cos\beta\right)\cdot J_\varkappa\left(\frac{x}{2}\cos\beta\right)\cdot$$
$$\exp\{ik(\psi + 2\gamma_f) + i\varkappa\pi\}, \tag{5.135}$$

$$x = \left[w_i^2 + w_f^2 - 2w_i w_f \cos 2(\gamma_i + \gamma_f)\right]^{1/2} \tag{5.136}$$

$$w_i \cdot \sin 2(\gamma_i + \gamma_f) = x \sin\psi \tag{5.137}$$

$$P_\pm = (n_i n_f)^{-3/2}(2^2/\Omega^5)^{1/3}\left[-A_i'(y) \pm y^{1/2} A_i(y)\right], \tag{5.138}$$

$$\varkappa = (L_i - L_f - k + 1)/2, \quad y = (\Omega L_i^3/2)^{2/3} \tag{5.139}$$

Радиальный интеграл R_k^- получается из (5.135) заменой $\varkappa$ на $\varkappa$-1 и P_+ на P_-. Величина $\varkappa$ принимает только целые значения.

После подстановки $R_k^\pm$ в (5.121) необходимо провести ряд усреднений и суммирований. Во-первых, необходимо провести суммирование по всем моментам L_f конечного состояния, что сводится к суммированию по всем целым $\varkappa$. Предположим, далее, что все начальные состояния заселены равновероятно. Усреднение полученного выражения по M_i можно заменить интегрированием по β в пределах от $-\pi/2$ до $\pi/2$, а усреднение по L_i -интегрированием по y, также как при выводе сечений (5.36) и (5.39). Взятие интегралов от квадратов функции Эйри и ее производной не представляет трудностей, так что в результате получим следующее выражение для вероятности радиационного перехода в единицу времени с поглощением одного фотона с частотой Ω и k фотонов с частотой ω:

$$\overline{W}_k = \frac{8\pi\alpha I_\Omega}{3^{1/2} n_i^5 n_f^3 \Omega^4}\left\{(3\cos^2\vartheta_\Omega - 1)F_k(x) + \sin^2\vartheta_\Omega\, G_k(x)\right\}, \qquad (5.140)$$

$$F_k(x) = \frac{1}{2}\sum_{\varkappa}\int_{\pi/2}^{\pi/2} d\beta \cos^3\beta\, U_\varkappa^k\left(U_\varkappa^k - U_{\varkappa-1}^k/3\right), \qquad (5.141)$$

$$G_k(x) = \sum_{\varkappa}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\beta\cos\beta\left(U_\varkappa^k\right)^2 \qquad (5.142)$$

$$U_\varkappa^k = J_{k+\varkappa}\left(\frac{x}{2}\cos\beta\right) J_\varkappa\left(\frac{x}{2}\cos\beta\right). \qquad (5.143)$$

Найдем более простые представления для функций $F_k(x)$ и $G_k(x)$. Рассмотрим сначала функцию $G_k(x)$. Если использовать следующее интегральное представление для квадрата функций Бесселя [214]

$$J_k^2(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\varphi\, J_0(2z\sin\varphi)\cos 2k\varphi \qquad (5.144)$$

и теорему сложения, то нетрудно найти, что

$$G_k(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} d\beta\cos\beta\int_0^{\pi} d\varphi\, J_0^2(x\cos\beta\sin\varphi)\cos 2k\varphi \qquad (5.145)$$

Входящий в (5.145) квадрат функции Бесселя можно еще раз представить в виде интеграла (5.144) от переменной γ. Вводя потом вместо нее новую переменную $z = \cos\beta\sin\gamma$, получим

$$G_k(x) = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi} d\varphi \cos 2k\varphi \int_0^{\pi/2} d\alpha \sin^3\alpha \cdot$$

$$\cdot \int_0^{\sin\alpha} dz\, J_0(2x\sin\varphi)\,(\sin^2\alpha - z^2)^{-1/2}$$

(5.146)

Здесь вместо переменной β введена $\alpha = \pi/2 - \beta$. Перемена порядка интегрирования в двойном интеграле по α и z приводит к легко вычисляемому интегралу по α. В результате использования формулы (5.144) придем к следующему окончательному выражению

$$G_k(x) = 2\int_0^1 dz\, J_k^2(xz). \tag{5.147}$$

Аналогично может быть найдено, что

$$F_k(x) = \int_0^1 dz\,(1/3 + z^2)\, J_k^2(xz). \tag{5.148}$$

При малых x удобно вычислять функции $G_k(x)$ и $F_k(x)$ с помощью ряда, полученного разложением квадрата функции Бесселя в ряд и последующим интегрированием. Эти ряды имеют вид

$$G_k(x) = 2\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2k+2m)!\,(x/2)^{2k+2m}}{m!\,[(k+m)!]^2(2k+m)!\,(2k+2m+1)}, \tag{5.149}$$

$$F_k(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2k+2m)!\,(x/2)^{2k+2m}}{m!\,[(k+m)!]^2(2k+m)!}\left[\frac{1}{3(2k+2m+1)} + \frac{1}{2k+2m+3}\right] \tag{5.150}$$

При больших x для $G_k(x)$ и $F_k(x)$ можно найти асимптотические представления. Для этого введем вместо z переменную $u = xz$ и представим интеграл (5.147) следующим образом:

$$G_k(x) = 2\int_0^{\infty} \frac{du}{x} e^{-pu} J_k^2(u) - 2\int_x^{\infty} \frac{du}{x} e^{-pu} J_k^2(u) \tag{5.151}$$

Экспоненциальный множитель введен здесь для обеспечения сходимости интегралов. Первый интеграл в (5.151) вычисляется в явном виде [214], а во втором вместо функции Бесселя можно подставить ее асимптотическое выражение при больших u. Последующее интегрирование и устремление ρ к нулю приводит к следующему асимптотическому выражению для $G_k(x)$, справедливому при больших x $(x \gg |k|)$:

$$G_k(x) = \frac{2}{\pi x}\left[\ln 2x - \psi(|k| + 1/2) - (-1)^k \frac{\cos 2x}{2x} + O(x^{-2})\right] \tag{5.152}$$

где $\psi(z)$ – пси- функция [214]. Аналогичный вид имеет функция $F_k(x)$ при больших x:

$$F_k(x) = \frac{1}{3\pi x}\left[\ln 2x - \psi(|k| + 1/2) + 3/2 - (-1)^k \frac{2\cos 2x}{x} + O(x^{-2})\right] \tag{5.153}$$

Поведение функций $F_k(x)$ следующее. Во-первых, они симметричны относительно изменения знака k и x, как это следует из (5.148). На основании представления (5.150) можно заключить, что при малых x и $|k|>0$ функции $F_k(x)$ возрастают пропорционально $x^{2|k|}$. При некотором $x_{max}(k)$ они достигают максимума, затем спадают. Асимптотическое представление (5.153) показывает, что при больших x этот спад становится очень медленным. Чем больше $|k|$, тем дальше от нуля отстоит максимум соответствующей функции $F_k(x)$. Численный расчет показывает, что $F_k(x)$ достигают своего максимума при $x_{max}(k)$, равном 2,38; 3,9; 5,1; 6,3; 7,5; 8,7; 9,9 соответственно при k = 1,2 ..., 7. Хотя за максимумом функции $F_k(x)$ осциллируют, как это видно и из (5.153), эти осцилляции сравнительно невелики. Аналогично ведут себя функции $G_k(x)$.

Функции $F_k(x)$ и $G_k(x)$ зависят от напряженности и частоты низкочастотного поля и главных квантовых чисел n_i и n_f только через одну безразмерную величину x. Эта величина пропорциональна напряженности поля F_0, но, как следует из (5.136) и

(5.129) - (5.131), ее зависимость от ω, n_i и n_f довольно сложная. Если $n_f^2 \gg n_i^2$, то приближенно

$$X = C_f \, ctg \, \pi \omega n_f^3 - d_f \qquad (5.154)$$

где C_f и d_f определены интегралами (5.130) и (5.131) или выражениями (5.133) и (5.134).

Если $\omega n_f^3 \ll 1$, то интегралы (5.130) и (5.131) легко вычисляются, и приближенно

$$X = \frac{3F_0(n_f^2 - n_i^2)}{2\omega}\left[1 + \frac{35}{72}\omega^2 n_f^6\right]. \qquad (5.155)$$

Как видно, перед квадратной скобкой в этом выражении стоит разность отношений энергий крайних штарковских компонент для конечного и начального состояний к энергии фотона. Второй член в квадратных скобках есть первая поправка по ωn_f^3.

В этом предельном случае малых ωn_f^3 можно установить связь с теорией Блохинцева. Как отмечалось, вычисления с помощью функции (5.118) приводят к интенсивности k-того сателлита, пропорциональной квадрату функции Бесселя с индексом k и аргументом, равным разности отношений штарковских энергий начального и конечного состояний к энергии фотона. Взяв сумму по всем значениям $n_1 - n_2$, которую при больших n можно заменить интегралом по $z = |n_1 - n_2|/n$ от нуля до единицы, придем к выражению типа (5.148). Для нахождения множителя перед квадратом функции Бесселя необходимо, однако, вычислить дипольные матричные элементы от параболических волновых функций в квазиклассическом приближении для далеко отстоящих по энергии состояний. В случае сферических координат они выражаются через функции Эйри и ее производную и вычислены при выводе (5.135) и (5.25), а также в работах [165,166]. Такая квазиклассическая оценка дипольных матричных элементов в параболических координатах пока не сделана. Если не выполняется условие $\omega n_f^3 \ll 1$, то волновой функцией Блохинцева и также приближенным выражением (5.155) пользоваться нельзя, а необходимо величину x вычислять из (5.136) и (5.129) - (5.131).

Сравним теперь предсказания вышеизложенной теории с экспериментом. В эксперименте [153] $n_i = 10$ и n_f около 50, т.е. начальное и конечное состояния далеко отстоят друг от друга. Поэтому оправданы те приближения, на которых основывались вычисления радиальных матричных элементов. Так как в эксперименте ωn_f^3 не превышает одной пятой, то для величины x можно пользоваться выражением (5.155) и даже пренебречь в нем поправкой в квадратных скобках. В эксперименте поляризации обоих полей линейные и их направления совпадают, т.е. $\vartheta_\Omega = 0$. В таком случае из (5.140) следует, что интенсивность k-того сателлита пропорциональна функции $F_k(x)$.

Представление (5.148) для функции $F_k(x)$ получено в предположении, что начальные состояния заселены равновероятно. Как отмечено авторами работы [153], это предположение в их эксперименте, по-видимому, не выполняется. Интенсивность k-того сателлитов можно рассчитать по вышеизложенной схеме и при другом распределении, отличном от равновероятного. Но так как истинное распределение не известно, то все же имеет смысл сравнить полученное в этом предположении $F_k(x)$ с экспериментально измеренными интенсивностями перехода.

Прежде всего заметим, что из (5.148) следует одинаковая интенсивность сателлитов с поглощением и излучением к фотонов, что и наблюдается на эксперименте. В работе [153] кривые приведены не в зависимости от F_0, а в зависимости от мощности микроволнового источника. При этом отмечается, что мощности 0,12 Вт соответствует пиковая напряженность поля около 6 в/см.

Хотя удовлетворительное согласие с экспериментом наблюдается и при этом соотношении, несколько лучшее согласие получается, если последнее число выбрать немного меньшим. Мы выберем его в дальнейшем равным 5,23 в/см.

На рис. 5.3 сравнивается экспериментально измеренная интенсивность резонанса при $K = -1$ и $n_f = 44$ с функцией $F_1(x)$, нормированной на экспериментальную кривую в максимуме. Прежде всего следует отметить, что максимум функции $F_1(x)$ находится приблизительно при тех же мощностях P, что и в эксперименте. Спад интенсивности резонанса по обе стороны от максимума достаточно хорошо описывается функцией $F_1(x)$. При больших мощностях экспериментальная и теоретическая кривые расходятся, так как на эксперименте наблюдается замедление спада интенсивности с ростом P, а свыше 7,5 Вт даже ее рост. Пока не ясно, чем обусловлено это расхождение. Хотя теоретическая кривая проявляет осцилляции за максимумом, она все-таки не воспроизводит найденные на эксперименте мелкие осцилляции интенсивностей резонансов с изменением P. Асимптотическое выражение (5.153) является достаточно точным уже сразу за максимумом функции $F_K(x)$.

Зная $x_{max}(K)$ можно найти ту мощность $P_{max}(K)$, которая соответствует максимуму вероятности возбуждения K-того сателлита:

$$P_{max}(K) = 1{,}18 \cdot 10^{3} \omega^2 x^2_{max}(K) / (n_f^2 - n_i^2)^2 \qquad (5.156)$$

Здесь P выражено в Вт, а ω в Ггц. На основе (5.156) и приведенных выше значений $x_{max}(K)$ построены кривые на рис. 5.4. Как видно, они хорошо воспроизводят экспериментальную зависимость $P_{max}(K)$ от K, n_f и ω. Исключение, может быть, составляет зависимость $P_{max}(1)$ от ω, так как эксперимент указывает на то, что $P_{max}(1)$ пропорциональна $\omega^{3 \pm 0{,}5}$, а не ω^2, как следует

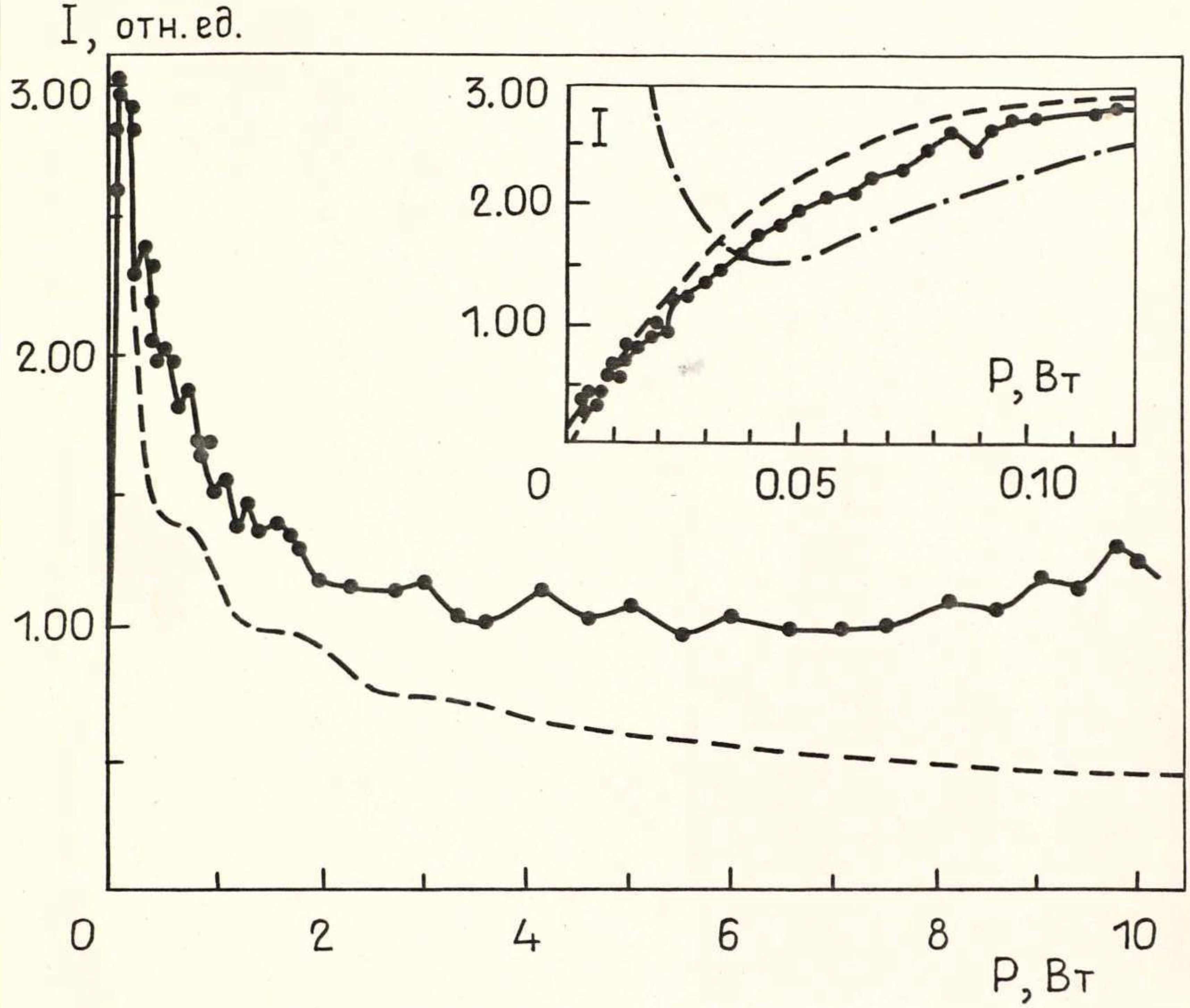

Рис. 5.3. Относительная интенсивность I сателлита при $k = -1$ и $h_f = 44$ как функция мощности микроволнового источника, частота которого $\omega = 7{,}829$ Ггц. Вставка показывает эту зависимость при малых мощностях. Точки и сплошная кривая – эксперимент [153]; штриховая кривая – функция (5.148), нормированная на экспериментальную кривую в максимуме; штрихпунктирная кривая – асимптотика (5.153) для функции (5.148) при больших мощностях микроволнового источника.

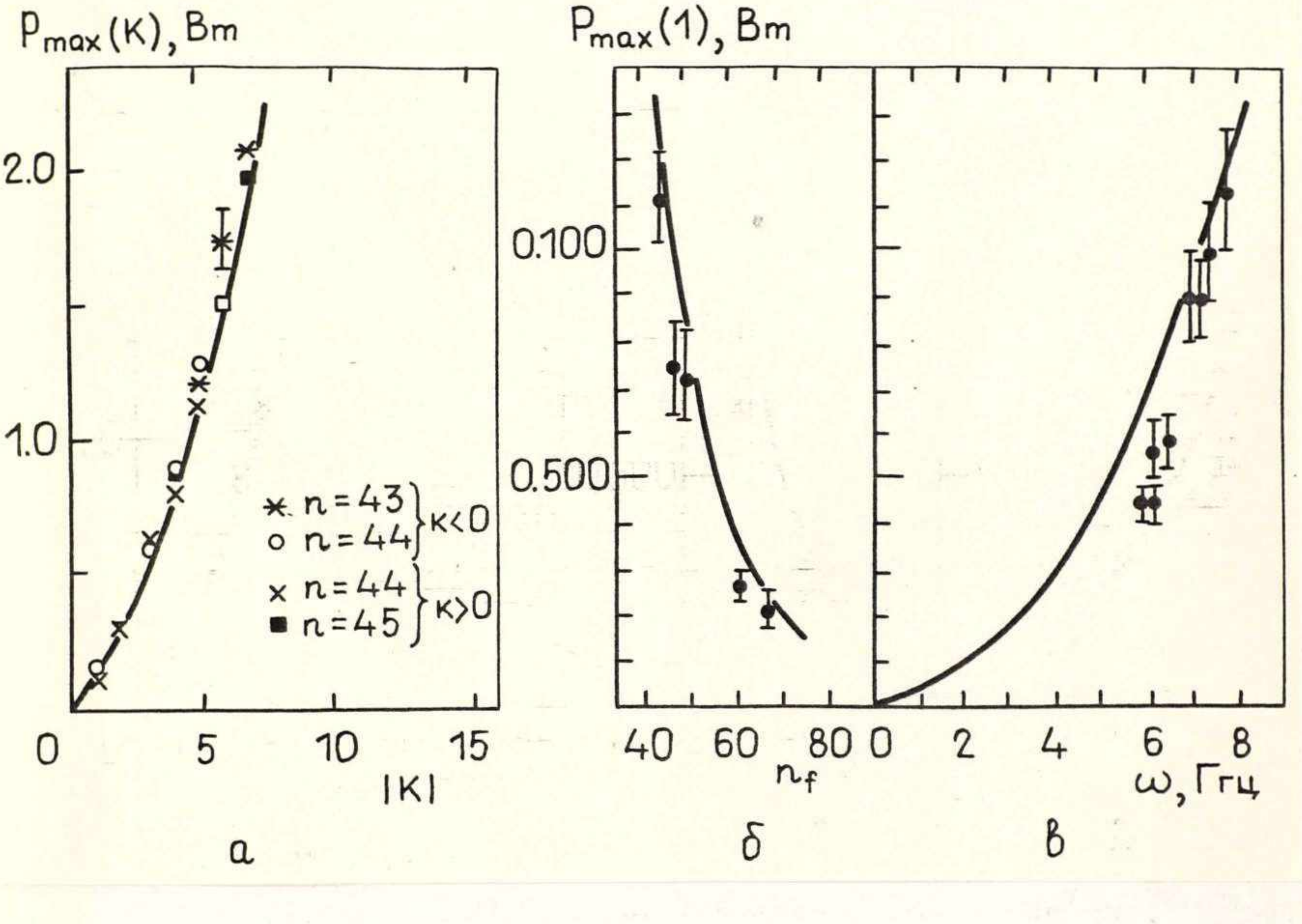

Рис. 5.4. а) Мощность микроволнового источника $P_{max}(K)$, соответствующая максимуму возбуждения K-того сателлита, как функция K. б) Зависимость $P_{max}(1)$ от главного квантового числа n_f. в) Зависимость $P_{max}(1)$ от частоты микроволнового источника. Точки - эксперимент [153], сплошные кривые - формула (5.156).

из (5.156). Хотя найденная выше поправка по ωn_f^3 и может увеличить степень ω для зависимости $P_{mox}(1)$ от ω, в данном эксперименте эта поправка слишком мала, чтобы ее надо было учитывать. При увеличении частоты зависимость $P_{mox}(1)$ от ω уже не будет квадратичной, а станет более сложной, как это следует из (5.154), (5.133) и (5.134). Несомненный интерес представили бы экспериментальные исследования при частотах ω, приближающихся к резонансу.

Из проведенного сравнения функции $F_K(x)$ с экспериментально измеренными интенсивностями сателлитов, по-видимому, следует, что в эксперименте [153] скорее реализуется предположение о равновероятности заселения начальных состояний, чем предположение о заселении одного изолированного уровня. При последнем предположении интенсивность K-того сателлита пропорциональна [247] $J_K^2(3F_0 n(n_1-n_2)/2\omega)$ и, следовательно, сильно осциллирует с изменением интенсивности поля, тогда как в эксперименте наблюдается всего один пик, за которым следует плато.

5.4.3. Оценка вероятности многофотонной ионизации высоковозбужденных состояний атомов низкочастотным полем

Как отмечалось в параграфе 5.4.1, найденная там квазиклассическая волновая функция электрона, движущегося в кулоновском поле и поле излучения, будет достаточно точна при $\omega n^3 \leq 1$, когда излучение и поглощение фотонов вызывает переходы в небольшой области спектра около невозмущенного состояния. Так как при выводе волновой функции использовалось приближение эквидистантности уровней, то квазиэнергия оказалась действительной и совпадающей с невозмущенным значением. Строго говоря, вероятность ионизации в этом приближении равна нулю. Но из найденной волновой функции можно получить грубую оценку для вероятности ионизации на основе следующих соображений. Волновая функция представляет ряд по квазиэнергетическим компонентам, т.е. по числу поглощенных (испущенных) фотонов. Основная часть волновой функции расположена в области эквидистантности спектра, и она должна достаточно точно воспроизводиться рассматриваемым приближением. Далекие члены ряда по квазиэнергетическим компонентам расположены вне области эквидистантности уровней и в рассматриваемом приближении, видимо, будут отличаться от их точных значений. Мы все же используем эти члены для грубой оценки вероятности ионизации.

Найденные в параграфе 5.4.I амплитуды $a_{Ns}(u)$ имеют смысл амплитуд вероятности поглощения электроном N фотонов и перехода его в состояние с орбитальным моментом ℓ под действием поля излучения при движении электрона по эллипсу в кулоновском поле. Переменная u описывает движение по эллипсу и связана с r сообшением (5.I6). Квадрат модуля $a_{N\ell}(u)$ при $u=\pi$ дает вероятность возбуждения данного состояния за один период. Поделив его на период обращения по орбите $T=2\pi n^3$ и просуммировав по всем состояниям, расположенным выше порога ионизации, получим вероятность ионизации в единицу времени [I89]

$$W=\frac{1}{2\pi n^3}\sum_{N=N_0+1}^{\infty}\sum_{s=-\infty}^{\infty}|a_{Ns}(\pi)|^2, \tag{5.I57}$$

$$N_0=(2n^2\omega)^{-1}\ ,\quad s=(\ell-L-N)/2 \tag{5.I58}$$

Здесь L -орбитальное квантовое число невозмущенного состояния.

Из (5.II3) - (5.II6) и (5.82) - (5.84) следует, что

$$h_\pm(\pi) = C_\pm(\pi)\ ,\ \gamma_\pm(\pi/2) = \pi/2,$$

$$\psi_\pm(\pi) = \pi/2 - \pi\omega n^3,\ \ w_\pm(\pi) = g_\pm \tag{5.159}$$

и амплитуды $a_{NS}(\pi)$ принимают вид

$$a_{NS}(\pi) = J_{N+S}\left(\frac{C_+(\pi)}{2\sin\pi\omega n^3}\right) J_S\left(\frac{C_-(\pi)}{2\sin\pi\omega n^3}\right)\cdot$$

$$\exp\{iN\pi(1-\omega n^3) + iS\pi\}, \tag{5.160}$$

$$C_\pm(\pi) = \frac{F_0\nu^5}{2}\left(1 - \frac{M^2}{L^2}\right)^{1/2}\int_{-\pi}^{\pi} du\,(1-\varepsilon\cos u)\cdot$$

$$\left[(\cos u - \varepsilon)\cos\omega\tau \mp \sqrt{1-\varepsilon^2}\sin u\sin\omega\tau\right], \tag{5.161}$$

$$\tau = \nu^3(u - \varepsilon\sin u)\ \ ,\ \ \varepsilon = (1 - L^2/\nu^2)^{1/2} \tag{5.162}$$

где M -магнитное квантовое число, ν -некое среднее значение главного квантового числа для всех каналов. Интегралы (5.161) могут быть выражены через функции Ангера-Вебера [214]

$$C_\pm(\pi) = \frac{\pi F_0\nu^2}{\omega}\left(1 - \frac{M^2}{L^2}\right)^{1/2}\left[J'_\xi(\xi\varepsilon) \pm \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}J_\xi(\xi\varepsilon) - \right.$$

$$\left. - \frac{1+\varepsilon}{\pi}\sin\pi\xi \mp \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\frac{\sin\pi\xi}{\pi\xi}\right], \tag{5.163}$$

$$\xi = \omega\nu^3 \tag{5.164}$$

При $\varepsilon = 1$ (5.163) переходит с точностью до множителя $1 - M^2/L^2$ в (5.133).

При $\omega\nu^3 \ll 1$

$$C_\pm(\pi) = -\frac{3\pi\nu^5\varepsilon F_0}{2}\left(1 - M^2/L^2\right)^{1/2} \tag{5.165}$$

При $\omega\nu^3 \gg 1$ и $L \ll \nu$

$$C_\pm(\pi) = \frac{2^{2/3}\pi F_0}{\omega^{5/3}}\left(1-\frac{M^2}{L^2}\right)^{1/2}\left[-Ai'(y) \mp y^{1/2}Ai(y)\right], \tag{5.166}$$

$$y = (\omega L^3/2)^{2/3} \tag{5.167}$$

и $C_\pm(\pi)$ только множителем $2i$ отличается от выражения (5.25). Отметим, что $C_\pm(\pi)$ вовсе не зависят от главного квантового числа, т.е. энергии электрона.

Так как в экспериментах [148-151] $\omega n^3 < 1$, то для оценки будем впредь пользоваться выражением (5.165), в котором заменим γ на n. Ограничимся рассмотрением состояний с $M=L=0$. Если подставить (5.160) в (5.157), представить квадрат функции Бесселя в виде интеграла (5.144), использовать теорему сложения и формулу [232]

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} J_k^2(z) = \int_0^z dt\, J_n(t) J_{n+1}(t), \tag{5.168}$$

то после интегрирования по частям по переменной φ представления (5.144) получим следующее выражение для вероятности ионизации

$$W = \frac{x}{\pi^2 n^3}\int_0^{\pi/2} d\vartheta\, \vartheta \cdot \sin\vartheta\, J_{N_0}(x\cos\vartheta) J_{N_0+1}(x\cos\vartheta), \tag{5.169}$$

$$x = \frac{3n^2 F_0}{2\omega} \tag{5.170}$$

Параметр x есть отношение максимальной штарковской энергии к энергии фотона.

В экспериментах [148-151] минимальное число необходимых для ионизации фотонов N_0 достигает даже нескольких сотен. Так как индекс функции Бесселя в интеграле (5.169) является большой величиной, то вероятность ионизации W будет заметной только при аргументе функции Бесселя, приблизительно равном индексу. Учитывая это и представив произведение функций Бесселя в виде интеграла, найдем

$$W = \frac{x}{\pi^2 n^3} \int_0^1 dz \cdot z \, J_{2N_0+1}[2x(1-z)]. \tag{5.171}$$

Используя асимптотическое представление [232] для функции Бесселя в случае большого аргумента, близкого индексу, найдем окончательно [169] :

$$W = (4\pi^2 n^3 N_0^{2/3})^{-1} \int_0^\infty dz \cdot z \, Ai(a+z) =$$

$$= (4\pi^2 n^3 N_0^{2/3})^{-1} \Big[-Ai'(a) - a \int_a^\infty dv \, Ai(v) \Big], \tag{5.172}$$

$$a = \frac{2(N_0 - x)}{N_0^{1/3}} = \frac{2}{(2n^2\omega)^{2/3}} (1 - 3n^4 F_0). \tag{5.173}$$

Для производной и интеграла от функции Эйри имеются таблицы [232] . При $a \gg 1$

$$W = (8\pi^{5/2} n^3 N_0^{2/3} a^{5/4})^{-1} \exp\left(-\frac{2}{3} a^{3/2}\right) \tag{5.174}$$

Если возмущение действует на атом в течение времени t , то вероятность его ионизации

$$R(t) = 1 - \exp(-wt). \tag{5.175}$$

Сравним предсказания формул (5.172) - (5.175) с экспериментом. Так как N_0 в эксперименте достигает нескольких сотен, то величина a очень большая и вероятность ионизации W мала, если только поле F_0 не приближается к величине $1/3n^4$, при которой должно наблюдаться резкое возрастание вероятности ионизации. В работе [151] для атома водорода такое резкое возрастание W (порог) наблюдается при полях F_0 в 2,6 раза меньших величины

$1/3n^4$, а в работе [150] – в 3,5 – 4,5 раза меньших этой величины. То, что на эксперименте порог ионизации наблюдается при полях в несколько раз меньших, чем следует из (5.173), отчасти ясно, потому что в формуле (5.165) мы заменили среднее квантовое число ν меньшей величиной n. Фактически в выражении (5.173) вместо n^4 должно быть ν^5/n , где ν можно найти из определения средней энергии

$$(-1/2n^2 + E_f)/2 = -1/2\nu^2. \qquad (5.176)$$

Так как конечное состояние расположено около порога ионизации, то соответствующую ему энергию E_f можно положить равной нулю. Тогда $\nu = 2^{1/2}n$ и в выражении (5.173) множитель 3 заменится на $3\cdot 2^{5/2} \simeq 17$.

На рис. 5.5. сравниваются экспериментальные результаты по ионизации атома водорода из уровня $n = 29$ с расчетами по формулам (5.172) – (5.175). Как видно, экспериментальная кривая расположена между теоретическими кривыми, для которых среднее значение главного квантового числа ν равно n и $2^{1/2}n$. Выражение (5.172) предсказывает приблизительно в 10 раз более быстрый рост W от F_0 в области порога, чем наблюдается в случае эксперимента [151] . Сглаживанию роста W от F_0 на эксперименте способствует неоднородность поля и, особенно, присутствие целого набора начальных состояний с разными L и M , для которых пороги различны. Для состояний с отличными от нуля значениями L и M перед n^4 в формуле (5.173) появится множитель $[(1 - L^2/\nu^2)(1 - M^2/L^2)]^{1/2}$, меньший единицы. Очень резкий, почти вертикальный рост кривой $\ln W$ от $\ln I$ в области порога наблюдался в работе [247] в случае ионизации атомов Kr и Xe интенсивным полем CO_2 лазера. В их эксперименте $N_0 > 100$.

Следует сказать, что выражение (5.172) получено при таких ин-

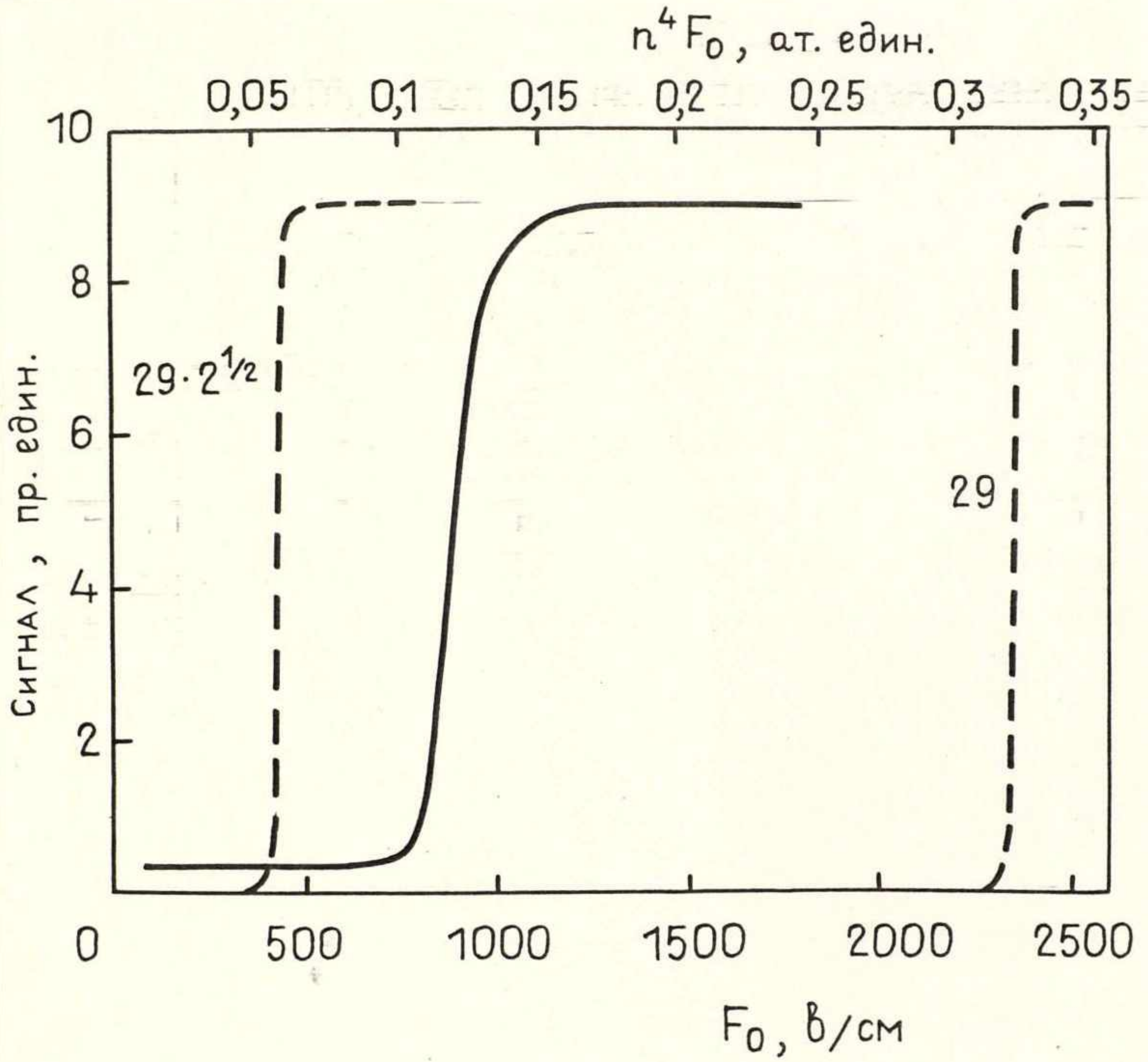

Рис. 5.5. Вероятность ионизации атома водорода из уровня $n = 29$ в зависимости от напряженности микроволнового источника. Сплошная кривая - эксперимент [151]. Пунктирные кривые - расчет по формулам (5.172) - (5.175). Числа у кривых - среднее значение главного квантового числа.

тенсивностях поля, когда вероятность ионизации становится заметной. При меньших интенсивностях нужно использовать выражение (5.169) и учесть только первый член разложения функции Бесселя в ряд. Тогда придем к характерной для многофотонных процессов зависимости w от напряженности поля

$$w \sim F_0^{2(N_0+1)} \tag{5.177}$$

Полученное выше выражение (5.172) представляет собой грубую оценку вероятности ионизации высоковозбужденных состояний атома водорода сильным полем, частота которого меньше кеплеровой частоты n^{-3}. Обсудим теперь те приближения, на основе которых получено выражение (5.172). В применимости квазиклассики едва ли можно сомневаться, так как начальное, промежуточные и конечные состояния расположены при энергиях, значительно меньших по абсолютной величине энергии на первой боровской орбите. Первая неточность в нашем рассмотрении появляется при выделении общего классического движения электрона во всех каналах, т.е. при переходе от уравнений (5.5) к уравнениям (5.18). Так как последние имеют точные решения, то для вывода уравнений (5.93) или (5.95) не требуются никаких дополнительных приближений. В случае ионизации уравнения (5.18), (5.93) и (5.95) должны быть достаточно точными при частотах ω, больших n^{-3}, когда во всех каналах - закрытых и открытых - имеется общее классическое движение электрона по параболе. В случае $\omega \leq n^{-3}$ таким классическим движением является движение по эллипсу. Но набирая энергию в процессе ионизации электрон в конце концов выйдет из области эллиптичности своего движения и перейдет в область параболического движения.

Но основная неточность, конечно, связана с использованием приближения эквидистантности уровней при нахождении решения уравнения (5.95). Полученное выше решение (5.114) в случае $\omega \leq n^{-3}$ должно хорошо воспроизводить основную часть волновой функции, сосредоточенную в области эквидистантности спектра и эллиптичности движения электрона. Но далекий "хвост" волновой функции при $N \gg 1$, которым и определяется вероятность ионизации, расположен уже вне области эквидистантности спектра и в рассматриваемом приближении не может корректно воспроизводиться. Приближение, связанное с использованием выражения (5.165) вместо (5.161) и разложением резонансного множителя в аргументе функции Бесселя для амплитуд (5.160), не является принципиальным и использовано только в целях простоты.

Точное решение уравнений (5.93) или (5.95) должно проявлять резонансы при частотах ω, характерных для водородного спектра, а не при ω, кратных n^{-3}, как это имеет место в приближении эквидистантности уровеей. Резонансная структура должна проявиться и в вероятности ионизации, что и было экспериментально обнаружено в работе [149].

Согласно (5.172) и (5.173) зависимость w от F_0 в области порога определяется квантовой величиной N_0, в то время как положение порога зависит от классической величины $n^4 F_0$. Хотя более точное решение уравнений (5.93) или (5.95) может привести к другой зависимости w от F_0 в области порога, все же полученное выше выражение (5.172) для вероятности ионизации высоковозбужденных состояний атомов низкочастотным полем указывает на то, что этот процесс не может быть полностью описан только на основе классической механики. Нужны, по крайней мере, дополнительные исследования для выяснения области применимости классической механики для этой задачи.

5.5. Расчет сечений свободно-свободных переходов в квазиклассическом приближении

Как было установлено в параграфе 5.3, задача о рассеянии электрона на кулоновском потенциале в присутствии сильной электромагнитной волны сводится в квазиклассическом приближении к решению уравнений (5.97) или (5.99). Движение электрона в кулоновском поле следует описывать гиперболой, а при малых энергиях - параболой. Уравнения (5.97) и (5.99) учитывают влияние дискретного спектра на рассеяние и должны приводить к резонансам в сечениях рассеяния. Если энергия электрона, частота и напряженность поля таковы, что можно пренебречь влиянием дискретного спектра на рассеяние, то амплитуды $a_{ns}(\infty)$ определяются одним первым членом в (5.100). В этом приближении проще, однако, исходить не из уравнений (5.18), а из соответствующих уравнений параметра удара, которые мы сейчас и получим.

Применив квазиклассическое приближение к системе (4.10), придем к уравнениям, аналогичным (5.18)

$$i\frac{da_{nm}(\tau)}{d\tau} = \frac{r(\tau)}{4}\left(1-\frac{M^2}{L^2}\right)^{1/2}\sum G_{n'}a_{n'm'}(\tau)\cdot$$
$$\cdot\exp[i(n'-n)\omega\tau + i(m-m')\varphi(\tau)] \tag{5.178}$$

Если ввести функции

$$C_n(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{nm}(\tau)e^{-im\varphi} \tag{5.179}$$

и определить угол ϑ наклона плоскости траектории к оси z согласно уравнению $\sin\vartheta = M/L$, то для $C_n(\tau)$ можно получить следующую систему

$$i\frac{dC_n(\tau)}{d\tau} = \frac{r(\tau)}{2}\cos\vartheta\cos(\varphi(\tau)-\varphi)\cdot$$
$$\sum_{n'} G_{n'}C_{n'}(\tau)\exp[i(n-n')\omega\tau] \tag{5.180}$$

Величину φ можно отождествить с начальным углом отсчета $\varphi(\tau)$ и положить равным нулю. Учитывая (4.II) и то, что ось z совпадает с направлением поляризации поля, уравнения (5.I80) представим в виде

$$i\frac{dC_n(\tau)}{d\tau} = i\sqrt{\frac{2\pi\omega}{V}}\left(\vec{e}\vec{\tau}(\tau)\right)\left[n^{1/2}C_{n-1}(\tau)\exp(i\omega\tau) - \right.$$

$$\left. - (n+1)^{1/2}C_{n+1}(\tau)\exp(-i\omega\tau)\right], \tag{5.I81}$$

где $\vec{e}$ - единичный вектор поляризации поля. Уравнения (5.I81) совпадают с уравнениями параметра удара. В данном случае $C_n(\tau)$ есть коэффициенты разложения волновой функции поля монохроматической волны по ее собственным состояниям, т.е. по состояниям осциллятора $|n\rangle$. Эти состояния возбуждаются частицей, пролетающей по некоторой траектории в поле $V(r)$.

Если ввести функцию

$$X(\tau) = \sum_n C_n(\tau)\,|n\rangle \tag{5.I82}$$

то легко установить, что она удовлетворяет уравнению

$$i\frac{dX}{d\tau} = -\left(\vec{F}(\tau)\,\vec{\tau}(\tau)\right)X, \tag{5.I83}$$

где оператор напряженности электромагнитного поля

$$\vec{F} = i\vec{e}\left(\frac{2\pi\omega}{V}\right)^{1/2}\left(b e^{-i\omega\tau} - b^{+}e^{i\omega\tau}\right) \tag{5.I84}$$

а b^+ и b - операторы рождения и уничтожения.

Решение уравнения (5.I83) есть задача о возбуждении состояний осциллятора. Это хорошо известная задача [70] и ее решение имеет вид

$$X = \exp\{i b\,\nu(\tau) + i b^{+}\nu^{+}(\tau) + i g(\tau)\}, \tag{5.I85}$$

$$\gamma(\tau)=i\left(\frac{2\pi\omega}{V}\right)^{1/2}\int_{\tau_0}^{\tau}d\tau\,(\vec{e}\,\vec{\tau}(t))\,e^{-i\omega\tau}=$$

$$=\left(\frac{2\pi}{\omega V}\right)^{1/2}\int_{\tau_0}^{\tau}d\tau\,(\vec{e}\,\vec{v}(\tau)\,e^{-i\omega\tau}, \tag{5.186}$$

где $\vec{v}(\tau)$- скорость электрона, а функция $g(\tau)$ не содержит операторов b и b^+ и несущественная для дальнейшего.

Зная χ, можно найти амплитуду вероятности возбуждения A_{ls} состояния поля $|l\rangle$ в момент τ, если в момент τ_0 оно находилось в состоянии $|s\rangle$. Эта амплитуда выражается через полиномы Лагерра [70] :

$$A_{ls}=\langle l\,|\,\chi\,|\,s\rangle=$$

$$=(i\gamma)^{s-l}\left(\frac{l!}{s!}\right)^{1/2}L_l^{s-l}(\gamma\gamma^+)\exp\left\{-\frac{\gamma\gamma^+}{2}+ig\right\},\ s\geq l \tag{5.187}$$

При $s<l$ в выражении (5.187) s и l следует поменять местами.

Нас интересует такое поле излучения, когда в начальном и конечном состояниях присутствуют много фотонов. Введем число $N=s-l$, равное числу поглощенных $(N>0)$ и испущенных $(N<0)$ фотонов, и используем асимптотическое представление [214] для полиномов Лагерра при $s,l\gg1$. Тогда [248]

$$A_N=J_N(\sqrt{4s\gamma\gamma^+})\exp(ig+iN\beta+\tfrac{i}{2}\pi N),\ \gamma/\gamma^+=e^{2i\beta} \tag{5.188}$$

Следовательно, вероятность поглощения N фотонов равна

$$W_N=J_N^2(|B|), \tag{5.189}$$

$$B=\frac{1}{\omega}\int_{\tau_0}^{\tau}d\tau\,(\vec{F}_0\,\vec{v}(\tau))\,e^{-i\omega\tau} \tag{5.190}$$

$$F_0=(8\pi\omega s/V)^{1/2}. \tag{5.191}$$

При $s, V \to \infty$, но постоянном их отношении F_0 переходит в классическую амплитуду напряженности электромагнитной волны.

Если число фотонов n в поле излучения велико, то к классическому пределу можно переходить уже в уравнении (5.181), которое примет вид

$$i\frac{dC_n(\tau)}{d\tau} = i\frac{(\vec{F}_0\vec{\tau}(\tau))}{2}\left[C_{n-1}(\tau)e^{i\omega\tau} - C_{n+1}e^{-i\omega\tau}\right] \tag{5.192}$$

Осцилляторные функции $|n\rangle$ в ряду (5.182) тогда можно заменить более простыми функциями ряда Фурье $exp(in\alpha)$, где α изменяется от 0 до 2π. Функция $\chi(\tau,\alpha)$ в этом случае равна

$$\chi(\tau,\alpha) = exp\{i\int d\tau(F_0\vec{\tau}(\tau))\sin(\omega\tau+\alpha)\}. \tag{5.193}$$

Разложив $\chi(\tau,\alpha)$ в ряд Фурье по α, найдем, что амплитуда перехода от состояния $exp(is\alpha)$ к состоянию $exp(il\alpha)$ с поглощением N фотонов $(N=s-l)$ равна тому же выражению (5.189).

Отметим, что хотя поле излучения в уравнениях (5.192) рассматривается классически и движение электрона в поле $V(r)$ тоже описывается классически, сам процесс излучения и поглощения фотонов электроном является квантовым, так как соответствует переходу между близко лежащими высоковозбужденными осцилляторными состояниями. Функция вида (5.193) (но, конечно, с другим потенциалом взаимодействия) встречалась в квазиклассической теории, предложенной для расчета вероятностей переходов между высоковозбужденными состояниями атомов при рассеянии на них электронов [190,191] и возбуждении вращательных и колебательных состояний молекул электронами [192]. В этих работах использовалось приближение эквидистантности для высоковозбужденных уровней атомов и молекул. В нашем случае наблюдаются переходы между эквидистантными состояниями поля излучения.

Если вероятность (5.189) помножим на классическое дифференциальное сечение рассеяния электрона в кулоновском поле, т.е. резерфордовское сечение, то получим дифференциальное сечение с поглощением N фотонов

$$d\sigma_N = J_N^2(|B|)\,d\sigma_R \tag{5.194}$$

$$d\sigma_R = \varepsilon^4 (4v^4)^{-1}\, d\Omega \tag{5.195}$$

$$\varepsilon = \sin^{-1}\vartheta/2 \tag{5.196}$$

где v - скорость падающего электрона, ϑ - угол рассеяния. Траектория электрона задается параметрически уравнениями (5.17). Величина B определяется интегралом (5.190) с верхним и нижним пределами, равными соответственно ∞ и $-\infty$. Этот интеграл тогда равен классическому интегралу, определяющему компоненту Фурье с частотой ω для дипольного излучения при столкновениях [235]. В случае прямолинейного равномерного движения интеграл (5.190) равен нулю. Наибольший вклад в интеграл (5.190) дает область траектории электрона, где его скорость меняется наиболее сильно.

Если электрон до и после рассеяния, происходящего в момент $t=0$, был свободен и двигался со скоростями соответственно $\vec{v}_i$ и $\vec{v}_f$, то легко найти, что

$$B = F_0\left[(\vec{v}_i\vec{e}) - (\vec{v}_f\vec{e})\right]/\omega^2. \tag{5.197}$$

Выразив v_f из квантовомеханического закона сохранения энергии

$$v_f^2/2 = v_i^2/2 + N\omega, \tag{5.198}$$

который не следует из классического рассмотрения, придем к такому же аргументу функции Бесселя, как и в случае борновского приближения [114].

При рассеянии электрона на кулоновском потенциале вычисление интеграла (5.190) полностью аналогично вычислению интегралов в случае спонтанного тормозного излучения при рассеянии в кулоновском поле [235] или в случае дипольного кулоновского возбуждения ядер [249]. В результате получим

$$B = \gamma S \tag{5.199}$$

$$S = 2\xi e^{\pi\xi/2}\left[e_x^2 K_{i\xi}'^2(\xi\varepsilon) + e_y^2\left(1-\frac{1}{\varepsilon^2}\right)K_{i\xi}^2(\xi\varepsilon)\right]^{1/2}, \tag{5.200}$$

$$\gamma = vF_0/\omega^2, \quad \xi = \omega/v^3. \tag{5.201}$$

Здесь $K_{i\xi}$-функция Макдональда мнимого индекса, а штрих означает производную по аргументу. e_x и e_y равны проекциям $\vec{e}$ на фокальные оси координат. Для дальнейшего удобно выразить e_x и e_y через проекции $\vec{e}$ на направления падающего и рассеянного электрона. Для этого введем систему координат, в которой $\vec{e}$ и единичные векторы $\vec{n}_i$ и $\vec{n}_f$ в направлении падающего и рассеянного электрона имеют следующие координаты:

$$\vec{e} = (\sin\alpha, 0, \cos\alpha), \quad \vec{n}_i = (0,0,1),$$
$$\vec{n}_f = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta). \tag{5.202}$$

Тогда

$$(\vec{n}_i\vec{e}) = \cos\alpha, \quad (\vec{n}_f\vec{e}) = \cos\alpha\cos\vartheta + \sin\alpha\sin\vartheta\cos\varphi$$

$$e_x = \frac{(\vec{n}_i\vec{e}) - (\vec{n}_f\vec{e})}{2\sin\vartheta/2}, \quad e_y = \frac{(\vec{n}_i\vec{e}) + (\vec{n}_f\vec{e})}{2\cos\vartheta/2} \tag{5.203}$$

Учитывая (5.194) и (5.199) – (5.203), получим окончательно следующее выражение для дифференциального сечения N-фотонного поглощения

$$\frac{d\sigma_N}{d\Omega} = \frac{\varepsilon^4}{4v^4} J_N^2(\gamma S), \tag{5.204}$$

$$S = \xi e^{\pi\xi/2}\left[\varepsilon^2\left((\vec{n}_i\vec{e})-(\vec{n}_f\vec{e})\right)^2 K'^2_{i\xi}(\xi\varepsilon)+\left((\vec{n}_i\vec{e})+(\vec{n}_f\vec{e})\right)^2 K^2_{i\xi}(\xi\varepsilon)\right]^{1/2}$$

(5.205)

В случае рассеяния в поле отталкивания имеем те же выражения (5.204) и (5.205), но знак показателя экспоненты в (5.205) отрицателен.

Сечения (5.204) содержат два безразмерных параметра γ и ξ. Параметр γ связан с интенсивностью перемееного поля, а ξ определяет степень адиабатичности процесса, поскольку $\xi\varepsilon$ есть отношение времени столкновения к периоду колебания поля. Параметр специфичен для кулоновского поля и борновском приближении равен нулю. Действительно, при малых ξ и $\varepsilon \sim 1$, так чтобы $\xi\varepsilon \ll 1$, функцию $K'_{i\xi}$ в выражении (5.205) можем приближенно заменить на $(\xi\varepsilon)^{-1}$, а функцию $K_{i\xi}$ приравнять нулю [214]. В результате для величины S получим борновское значение, равное $(\vec{n}_i\vec{e})-(\vec{n}_f\vec{e})$. При малых углах рассеяния, когда $\varepsilon \gg 1$, такой перевод невозможен из-за дальнодействующего характера кулоновского поля. Отметим, что при больших значениях ξ сечения для поля притяжения и отталкивания будут существенно различны (в борновском приближении они совпадают). Если ξ велик, то для поля отталкивания S будет экспоненциально мало и фактически никакого излучения и поглощения не происходит.

Из выражения (5.204) следует, что в рассматриваемом приближении сечения симметричны относительно знака N, т.е. сечения поглощения и испускания N фотонов равны. Это есть отражение того факта, что в классическом рассмотрении пренебрегается влиянием потерь энергии на движение падающей частицы. В первом приближении эти потери можно учесть следующим феноменологическим образом. Естественно в выражении (5.205) перед вектором $\vec{n}_f$ ввести множитель v_f/v_i, где v_f определяется из закона сохранения энергии (5.198), а также симметризовать v и ξ описанным в [249] способом. Расчеты показали, что в случае кулоновского возбуждения ядер симметризованные сечения заметно лучше несимметризованных. Однако в нашем случае неупругих каналов много и процедура симметризации становится не вполне однозначной. Для проверки ее эффективности нужны квантовомеханические расчеты. Поскольку таких расчетов в настоящее время не имеется, то будем пользоваться просто выражениями (5.204) и (5.205) без феноменологических поправок.

Далее исследуем подробнее случай слабого поля излучения, когда $\gamma \ll 1$ и можно ограничиться первым членом разложения функции Бесселя в ряд. Так как сечения излучения и поглощения равны, то для краткости будем говорить только об излучении. Используя вышеотмеченное разложение и интегрируя по угловым переменным рассеянного электррна, можно представить сечение N-фотонного излучения в следующем виде:

$$\sigma_N(\alpha) = \frac{a^2(\gamma\xi)^{2N}}{(N!)^2}\int_1^\infty d\varepsilon\, \varepsilon^{-2N+1}\int_0^{2\pi} d\varphi \Big\{\big[\cos\alpha - (\varepsilon^2-1)^{1/2}\cdot$$

$$\cdot \sin\alpha\cos\varphi\big]^2 K_{i\xi}'^{\,2}(\xi\varepsilon) + (1-\varepsilon^{-2})\big[(\varepsilon^2-1)^{1/2}\cos\alpha + \sin\alpha\cos\varphi\big]^2 K_{i\xi}^2(\xi\varepsilon)\Big\}^N \tag{5.206}$$

Рассмотрим сначала подробнее однофотонное излучение. В этом случае интеграл по ε может быть вычислен в явном виде на основе формул для неопределенных интегралов от произведения двух модифицированных функций Бесселя [214]. В результате

$$\sigma_1(\alpha) = \frac{\pi F_0^2}{v^8} e^{\pi\xi}\big[R_1 \sin^2\alpha + R_2(3\cos^2\alpha - 1)\big], \tag{5.207}$$

$$R_1 = \int_1^\infty d\varepsilon\,\varepsilon\Big[K_{i\xi}'^{\,2}(\xi\varepsilon) + \Big(1-\frac{1}{\varepsilon^2}\Big)K_{i\xi}^2(\xi\varepsilon)\Big] = -\frac{1}{\xi}K_{i\xi}(\xi)K_{i\xi}'(\xi), \tag{5.208}$$

$$R_2=\int\limits_1^\infty d\varepsilon\,\varepsilon\left[\frac{1}{\varepsilon^2}K'^2_{i\xi}(\xi\varepsilon)+\left(1-\frac{1}{\varepsilon^2}\right)^2 K^2_{i\xi}(\xi\varepsilon)\right]=$$

$$=K'^2_{i\xi}(\xi)+\frac{1}{2i}\left[K_\mu(\xi)\frac{\partial^2 K_\mu(\xi)}{\partial\mu\,\partial\xi}-\frac{\partial K_\mu(\xi)}{\partial\xi}\frac{\partial K_\mu(\xi)}{\partial\mu}\right]_{\mu=i\xi} \qquad (5.209)$$

Отметим, что имеется прямое соответствие между сечением (5.207) и классическим сечением тормозного излучения при рассеянии частицы в кулоновском поле. Если в выражении (5.207) вместо классической величины F_0 подставить (5.191) с $s=1$, соответствующей спонтанному излучению, умножить (5.207) на число состояний электромагнитного поля $Vd\vec{k}(2\pi)^{-3}$ и проинтегрировать по угловым переменным испущенного фотона, то придем к классическому сечению тормозного излучения [235,249].

В случае малых частот ω из поведения функции Макдональда [214] при $\xi\ll 1$ следует, что сечение σ_1 содержит классический логарифм:

$$\sigma_1(\alpha)=\frac{\pi F_0^2}{v^2\omega^4}\left[\sin^2\alpha\,\ln(2/\gamma'\xi)+3\cos^2\alpha-1\right] \qquad (5.210)$$

где $\gamma'=1,781...$

При больших частотах $\xi\gg 1$ можно использовать асимптотические разложения [214,232] для функций Макдональда. В результате

$$R_1=\frac{\pi}{3^{1/2}\xi^2}e^{-\pi\xi}, \quad R_2=\frac{2\pi}{3^{1/2}\xi^2}e^{-\pi\xi} \qquad (5.211)$$

и сечение $\sigma_1(\alpha)$ также приобретает простой вид

$$\sigma_1(\alpha)=\frac{\pi^2 F_0^2}{3^{3/2}v^2\omega^4}(3\cos^2\alpha+1) \qquad (5.212)$$

Сечение $\sigma_1(0)$ при совпадающих направлениях падающего электрона и поляризации поля в четыре раза больше сечения $\sigma_1(\pi/2)$ при их перпендикулярных направлениях.

Рассмотрим теперь сечения σ_N излучения N фотонов ($N\ll 1$) в предельных случаях малых и больших частот. При малых частотах функции Макдональда $K'_{i\xi}(\xi\varepsilon)$ и $K_{i\xi}(\xi\varepsilon)$ можно заменить на $K'_0(\xi\varepsilon)$ и $K_0(\xi\varepsilon)$. Далее в интеграле по ε сделаем замену переменных $z=\xi\varepsilon$ и разобьем интеграл по z от ξ до ∞ на два интеграла: от ξ до единицы и от единицы до бесконечности. Последний интеграл есть полином по ξ^2 . В первом интеграле функции $K'_0(z)$ и $K_0(z)$ можно представить в виде ряда [2I4] . Нетрудно видеть, что основной вклад в этот интеграл дает член z^{-1} ряда для функции $K'_0(z)$. Сохраняя только его, найдем, что (5.206) принимает вид

$$\sigma_N(\alpha)=\frac{(\gamma\xi)^{2N}}{V 4\xi^2(N!)^2}\int_{\xi}^{1} dz\, z^{-4N+1}\int_0^{2\pi} d\varphi\,[\xi\cos\alpha -$$

$$-(z^2-\xi^2)^{1/2}\sin\alpha\cos\varphi]^{2N}. \qquad (5.2I3)$$

Интегралы по z и φ лекко вычислить, если подинтегральный полином представить в виде суммы. Сохраняя только главный по ξ член, получим, что при малых частотах

$$\sigma_N(\alpha)=\frac{\pi F_0^{2N} v^{2N-2}}{(N!)^2\,\omega^{4N}}P_N(\alpha), \qquad (5.2I4)$$

где $P_N(\alpha)$ есть полином и выражается через гипергеометрическую функцию следующим образом

$$P_N(\alpha)=\frac{\cos^{2N}\alpha}{2N-1}F(-N,-N+1/2;-2N+2;-\operatorname{tg}^2\alpha), \qquad (5.2I5)$$

$$P_N(0)=1/(2N-1)\,,\ P_N(\pi/2)=1/2^{2N-1}(N-1). \qquad (5.2I6)$$

Как видно, сам параметр адиабатичности ξ вовсе отсутствует в (5.2I4), а сечение пропорционально ω^{-4N} . Сечение $\sigma_N(\alpha)$ заметно больше при $\alpha=0$, чем при $\alpha=\pi/2$, особенно для больших N.

Чтобы найти сечения σ_N в пределе больших частот, заметим, что в интегральном представлении функции Макдональда [214]

$$K_{i\xi}(\xi\varepsilon)=\frac{e^{-\pi\xi/2}}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dv\,\exp(i\xi\varepsilon\,\mathrm{sh}\,v-i\xi v) \qquad (5.217)$$

при больших ξ существенна область малых v. Заменив поэтому $\mathrm{sh}\,v$ на $v+v^3/3$ и используя интегральное представление [232] функций Эйри, найдем:

$$K_{i\xi}(\xi\varepsilon)\simeq\pi e^{-\pi\xi/2}\left(\frac{2}{\xi\varepsilon}\right)^{1/3}Ai\left[\left(\frac{2\xi^2}{\varepsilon}\right)^{1/3}(\varepsilon-1)\right], \qquad (5.218)$$

$$K'_{i\xi}(\xi\varepsilon)\simeq\pi e^{-\pi\xi/2}\left(\frac{2}{\xi\varepsilon}\right)^{2/3}\frac{2\varepsilon+1}{3\varepsilon}Ai'\left[\left(\frac{2\xi^2}{\varepsilon}\right)^{1/3}(\varepsilon-1)\right]. \qquad (5.219)$$

Фактически переход от функций Макдональда к функциям Эйри соответствует переходу от гиперболических траекторий к параболическим.

Если подставить (5.218) и (5.219) в (5.206), ввести вместо переменной ε переменную $x=2^{1/3}\xi^{2/3}(\varepsilon-1)$ и всюду в (5.206) сохранить только главный член асимптотического разложения по обратным степеням ξ, то получим следующее выражение для в пределе больших частот

$$\sigma_N(\alpha)=\frac{F_0^{2N}G_N(\alpha)}{(N!)^2v^2\omega^{(10N+2)/3}}, \qquad (5.220)$$

$$G_N(\alpha)=\pi^{2N}2^{(4N-1)/3}\int\limits_0^{\infty}dx\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\left[Ai'^2(x)\cos^2\alpha+\right.$$
$$\left.+xAi^2(x)\sin^2\alpha\cos^2\varphi\right]^N \qquad (5.221)$$

Интеграл по φ может быть представлен в виде гипергеометрической функции, и поэтому имеется большое сходство в интегральном представлении полиномов $G_N(\alpha)$ и чисел T_N^l и T_N^c в случае многофотонной ионизации, задаваемых выражениями (5.40) и (5.41).

Сечения (5.220) слабо (пропорционально E^{-1} и одинаково при всех N зависит от энергии электрона. Зависимость сечений от частоты очень сильная, хотя и несколько слабее, чем в случае малых частот. В таблице 5.5 представлены значения полинома $G_N(\alpha)$ при $\alpha=0$ и $\pi/2$. Из таблицы видно, что также как и в ранее исследованных случаях сечения $\sigma_N(\alpha)$ в случае поляризации поля вдоль падающего пучка заметно превосходят, особенно при больших N, соответствующие сечения при поляризации поля, перпендикулярной падающему пучку. Это связано с тем, что излучение максимально при рассеянии назад, когда частица ближе всего подходит к рассеивающему центру. Если вектор $\vec{F}_0$ направлен вдоль падающего пучка, то при рассеянии назад траектория частицы все время параллельна вектору $\vec{F}_0$. Но как следует из (5.190), именно произведение $\vec{F}\vec{v}(\tau)$ определяет сечение $\sigma_N(\alpha)$.

Выражение (5.220) аналогично классической формуле Крамерса для спонтанного излучения [236]. В последнем случае классическая теория, и в частности простая формула Крамерса, дала хорошие результаты в очень широком интервале частот [236]. Для проверки точности формулы (5.220), как и более общего выражения (5.206), необходимо провести соответствующие квантовомеханические расчеты. Таких расчетов пока нет. Нет пока и экспериментов по определению сечений $\sigma_N(\alpha)$ при рассеянии электрона на кулоновском центре в присутствии сильной электромагнитной волны, хотя в случае рассеяния электрона на нейтральных атомах аналогичные сечения измерены в ряде недавних экспериментов [116-118]. Они находятся в хорошем согласии с теоретическими сечениями, полученными в борновском приближении [114].

Таблица 5.5.

Значения полиномов $G_N(\alpha)$, определяющих сечения (5.220), при $\alpha = 0$ и $\pi/2$.

N	$G_N(0)$	$G_N(\pi/2)$
I	7,59	I,898
2	8,53	0,675
3	II,3	0,307
4	I6,I	0,I56
5	23,8	0,084
6	35,9	0,047
7	55,I	0,027
8	85,4	0,0I9

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации исследовано взаимодействие свободного и связанного в атоме электрона с сильным полем излучения. Для ряда многофотонных задач найдены их точные решения, а в случае взаимодействия атомного электрона с полем электромагнитной волны развита квазиклассическая теория.

Получены следующие основные результаты:

I. Разработаны основы квазиклассической теории многофотонных процессов в высоковозбужденных атомах. Эта теория имеет следующие положительные стороны:

а) как показывает сравнение с имеющимися квантовомеханическими расчетами по теории возмущений, она обладает высокой точностью для ридберговских состояний атомов, а в случае водорода достаточно точна даже для основного состояния;

б) она проста, так как ее основные уравнения имеют точные аналитические решения и расчет различных многофотонных процессов сводится к решению сравнительно простых алгебраических уравнений или интегрального уравнения, следующих из проблемы удовлетворения граничных условий для волновой функции;

в) она достаточно универсальна, поскольку с ее помощью можно решать как задачи на собственные значения, так и рассматривать ионизацию, переходы в дискретном спектре и рассеяние в присутствии поля излучения;

г) она учитывает дискретный спектр атома;

д) она не основана на теории возмущений и поэтому позволяет выйти за рамки последней.

2. На основе квазиклассической теории рассчитаны следующие многофотонные процессы.

Получено простое и достаточно точное (как следует из сравнения с квантовомеханическими расчетами) выражение для сечений N-фотонной ионизации высоковозбужденных состояний атомов. Это выражение пригодно и для описания надпороговой ионизации. При $N=1$ полученное сечение совпадает с формулой Крамерса для обычного фотоэффекта.

На основе приближения эквидистантности уровней найдена квазиклассическая волновая функция высоковозбужденных состояний атомов в присутствии сильного низкочастотного поля. С помощью ее вычислены вероятности радиационных переходов между высоковозбужденными состояниями атомов в присутствии микроволнового поля. В таком процессе возникают сателлиты в спектре поглощения. Рассчитаны интенсивности сателлитов в зависимости от частоты и напряженности поля, главного квантового числа атома и номера сателлита. Они находятся в хорошем согласии с экспериментально измеренными интенсивностями.

Оценена вероятность ионизации высоковозбужденных состояний атома водорода микроволновым полем, которая удовлетворительно воспроизводит экспериментально измеренную зависимость вероятности ионизации от напряженности поля.

Найдены вне рамок теории возмущений сечения свободно-свободных переходов при рассеянии электрона на кулоновском потенциале в присутствии сильной электромагнитной волны. Показано, что известные сечения борновского приближения соотвествуют предположению, что процесс рассеяния является мгновенным.

3. Найдено решение уравнения Дирака для электрона в квантованном поле монохроматической волны, плоской волны, двух волн и монохроматической волны плюс постоянное магнитное поле, направленное вдоль распространения волны. Показано, что решения Волкова и Редмонда, описывающие электрон в классических полях, следуют из специальных комбинаций полученных решений в пределе больших чисел фотонов.

4. Найдено точное решение задачи об ионизации системы, связанной короткодействующими силами, под действием циркулярно поляризованной электромагнитной волны. Исследована зависимость сдвига и ширины уровня от напряженности и частоты поля волны.

Получены точные выражения для сечений рассеяния частицы на короткодействующем потенциале в присутствии циркулярно поляризованной электромагнитной волны. Найдено, что в сечениях рассеяния появляется серия резонансов, расстояние между которыми равно энергии фотона. Высота и ширина резонансов сильно зависит от напряженности поля. В борновском приближении резонансы отсутствуют.

Кроме того, в работе получены ещё следующие частные результаты:

1. Выведены уравнения метода сильной связи для описания многофотонных процессов в атомах как в неподвижной, так и в колеблющейся системе координат. Проведен анализ проблемы удовлетворения граничных условий.

2. Обобщено понятие квазиэнергии на задачи ионизации переменным полем и рассеяния в присутствии такого поля.

3. Поставлена и решена задача об отражении электрона от стенки в присутствии электромагнитной волны. Найдены особенности в вероятностях поглощения (испускания) фотонов, которые возникают на пороге открывающегося нового канала.

4. Построены полиномиальные решения вырожденных уравнений Гойна, описывающих взаимодействие электрона с полем двух монохроматических волн.

5. Найдено обобщение рядов Неймана для специальных функций Бесселя, встречающихся при теоретическом исследовании много - фотонных процессов.

В диссертации выведены основные уравнения и разработаны основные положения квазиклассической теории многофотонных процессов в атомах, а также решен ряд ее задач. Автору представляется, что решенные задачи охватывают только часть проблем, которые можно решить методом квазиклассики. Наиболее важными с практической точки зрения представляются следующие пока нерешенные задачи:

а) нахождение более точных (аналитических или численных), чем в приближении эквидистантности уровней, решений уравнений (5.93) или (5.95) с целью исследования влияния спектра атома на вероятность многофотонной ионизации;

б) использование метода квантового дефекта для выяснения отличий протекания многофотонных процессов в сложных атомах и в атоме водорода;

в) расчет динамической поляризуемости высоковозбужденных уровней атомов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Volkov D.M. Über eine Klasse von Lösungen der Diracschen Gleichung. - Z.Phys., 1935, Bd.94, Hf.3, S.250-254.
2. Волков Д.М. Электрон в поле плоских неполяризованных электромагнитных волн с точки зрения уравнения Дирака. - ЖЭТФ, 1937, т.7, вып.II, с.I286-I289.
3. Fried Z., Baker A., Korff D. Comments on intensity-dependent frequency shift in Compton scattering and its possible detection. - Phys.Rev., 1966, v.151, No.4, p.1040-1048.
4. Sen Gupta N.D. Interaction of a high intensity light beam with free electron. - Z.Phys., 1967, Bd.201, Hf.3, S.222-231.
5. Schwinger J. On gauge invariance and vacuum polarization. - Phys.Rev., 1957, v.82, No.5, p.664-679.
6. Brown L.S., Kibble T.W.B. Interaction of intense laser beams with electrons. - Phys.Rev.A, 1964, v.133, No.3, p.705-719.
7. Reiss H.R., Eberly J.H. Gren's function in intense-field electrodynamics. - Phys.Rev., 1966, v.151, No.4, p.1058-1066.
8. Sen Gupta N.D. On the solution of the Dirac equation in the field of two beams of electromagnetics radiation. - Z. Phys., 1967, Bd.200, Hf.1, S.13-19.
9. Федоров М.В. Эффект Капицы-Дирака в сильном поле излучения. - ЖЭТФ, 1967, т.52, вып.5, с.I434-I445.
10. Ezawa H., Namaizawa H. Theory of the Kapitza-Dirac effect. - J.Phys.Soc.Japan, 1969, v.26, No.2, p.458-468.

11. Bartell L.S., Roskos R.R., Tompson H.B. Reflection of electron by standing light waves: experimental study. - Phys.Rev., 1968, v.166, No.5, p.1494-1504.

12. Redmond P.J. Solution of the Klein-Gordon and Dirac equations for a particle with a plane electromagnetic wave and a parallel magnetic field. - J.Math.Phys., 1965, v.6, No.7, p.1163-1169.

13. Багров В.Г., Гитман Д.М., Лавров П.М. Электрон в постоянных скрещенных электромагнитных полях и поле плоской волны. - Изв.вузов СССР, Физика, 1974, №,6, с.68-74.

14. Кролль Н. Квантовая теория излучения. - В сб.: Квантовая оптика и квантовая радиофизика. М.:Мир, 1966, с.11-89.

15. Глаубер Р. Когерентность и детектирование квантов. - В сб.: Когерентные состояния в квантовой теории. М.: Мир, 1972, с.26-70.

16. Клаудер Дж., Сударшан Э. Основы квантовой оптики. - М.: Мир, 1970. - 427 с.

17. Хакен Г., Вайдлих В. Квантовая теория лазера. - В кн.: Квантовые флуктуации излучения лазера. М.: Мир, 1974, с.143-205.

18. Frantz L.M. Compton scattering of an intense photon field. - Phys.Rev.B, 1965, v.139, No.5, p.1326-1336.

19. Eberly J.H., Reiss H.R. Electron self-energy in intense plane-wave field. - Phys.Rev., 1966, v.145, No.4, p.1035-1040.

20. Ehlotzky F. Theory of renormalization and Compton scattering in quantum electrodynamics of coherent light of high intensity. - Z.Phys., 1967, Bd.203, Hf.2, S.119-140.

21. Берсон И.Я. Электрон в квантованном поле монохроматической электромагнитной волны. - ЖЭТФ, 1969, т.56, вып.5, с.1627-1633.

22. Берсон И.Я. Электрон в квантованном поле плоской электромагнитной волны. - Изв. АН ЛатвССР, сер.физ.и техн.наук, 1970, № 3, с.3-8.

23. Berson I., Valdmanis J. Electron in the field of two monochromatic electromagnetic waves. - J.Math.Phys., 1973, v.14, No.10, p.1481-1484.

24. Берсон И., Валдманис Я. Электрон в поле двух монохроматических электромагнитных волн. - В кн.: Конференция по взаимодействию электрона с сильным электромагнитным полем излучения: Аннотации докл. Балатонфюред, 1972, с.15.

25. Берсон И.Я. Движение электрона в электромагнитной волне и параллельном ей магнитном поле. - Изв.АН ЛатвССР, сер. физ. и техн.наук, 1969, № 5, с.3-8.

26. Багров В.Г., Бозриков П.В., Гитман Д.М. Заряд в квантованном поле плоской волны. - Изв. вузов СССР, Радиофизика, 1973, т.16, № 1, с.129-140.

27. Багров В.Г., Бозриков П.В., Гитман Д.М. Электрон в поле плоской квантованной электромагнитной волны. - ТМФ, 1973, т.14, № 2, с.202-210.

28. Абакаров Д.И., Олейник В.П. Электрон в поле квантованной электромагнитной волны и в однородном магнитном поле. - ТМФ, 1972, т.12, № 1, с.78-87.

29. Bergou J., Ehlotzky F. Relativistic quantum states of a particle in an electromagnetic plane wave and homogeneous magnetic field. - Phys.Rev.A, 1983, v.27, No.5, p.2291-2296.

30. Казаков А.Е., Федоров М.В. К теории движения электрона в постоянном магнитном поле и в поле квантованной электромагнитной волны. - Краткие сообщения по физике, ФИАН, 1972, № 11, с.42-46.

31. Казаков А.Е., Федоров М.В. Частица в поле квантованной электромагнитной волны, распространяющейся вдоль постоянного магнитного поля. - Краткие сообщения по физике, ФИАН, 1973, № 6, с.3-8.

32. Fedorov M.V., Kazakov A.E. An electron in a quantized plane wave and in a constant magnetic field. - Z.Phys., 1973, Bd.261, Hf.2, s.191-202.

33. Багров В.Г., Гитман Д.М., Лавров П.М. Электрон в квантованном поле плоской волны и классическом поле редмондовской конфигурации. - Изв.вузов СССР, Физика, 1974, № 6, с.47-51.

34. Багров В.Г., Гитман Д.М., Шварцман Ш.М. Электрон в квантованном поле плоской волны и классическом поле продольной электрической волны. - Изв.вузов СССР, Физика, 1975, № 3, с.67-71.

35. Багров В.Г., Бозриков П.В., Гитман Д.М. Фермион с аномальным моментом в поле квантованной плоской волны. - Изв.вузов СССР, физика, 1974, № 6, с.129-132.

36. Газазян А.Д. Рассеяние света на квантовом гармоническом осцилляторе. - ТМФ, 1972, т.10, № 3, с.388-398.

37. Багров В.Г., Гитман Д.М., Кучин В.А. Электрон в поле классической и квантованной плоских волн, направленных в одну сторону. - Изв. вузов СССР, Физика, 1974, № 7, с.60-64.

38. Багров В.Г., Гитман Д.М., Кучин В.А., Лавров П.М. Вопросы обоснования электродинамики электронов, взаимодействующих с квантованным полем плоской волны. I. - Изв.вузов СССР, Физика, 1974, № 12, с.89-94.

39. Багров В.Г., Гитман Д.М., Кучин В.А., Лавров П.М. Вопросы обоснования электродинамики электронов, взаимодействующих с квантованным полем плоской волны. II. - Изв.вузов, СССР, Физика, 1975, № 7, с.11-15.

40. Багров В.Г., Гитман Д.М., Задорожный В.Н., Лавров П.М. Особенности точных решений задачи об электроне в квантованном поле плоской волны. - Изв.вузов СССР, Физика,1977, № 3, с.7-14,

41. Багров В.Г., Гитман Д.М., Шаповалов А.В. Интегралы движения в задаче об электроне в квантованной плоской электромагнитной волне. - Изв.вузов СССР, Физика, 1977, №2, с.116 -121.

42. Van Kampen N.G. Contribution to the quantum theory of light scattering. - Mat.Fys.Medd.Dan.Vid. Selsk., 1951, v.26, No.15, p.1-77.

43. Еганова И.А., Широков М.И. Электрон, дипольно взаимодействующий с фотонами. Физические операторы рождения-уничтожения. - Ядерная физика, 1969, т.9, № 5, с.1097-1109.

44. Аппель Дж. Поляроны. - В кн.: Поляроны. М.: Наука, 1975, с.13-204.

45. Никишов А.И., Ритус В.И. Квантовые процессы в поле плоской электромагнитной волны и в постоянном поле. - ЖЭТФ, 1964, т.46, вып.2, с.776-795.

46. Гольдман И.И. Эффекты интенсивности в комптоновском рассеянии. - ЖЭТФ, 1964, т.46, вып.4, с.1412-1417.

47. Никишов А.И., Ритус В.И. Квантовые процессы в поле плоской электромагнитной волны и в постоянном поле. II. -ЖЭТФ, 1964, т.46, вып.5, с.1768-1781.

48. Ритус В.И. Воздействие электромагнитного поля на распады элементарных частиц. - ЖЭТФ, 1969, т.56, вып.3, с.986 -1005.

49. Никишов А.И., Ритус В.И. О влиянии лазерного поля на распады ядер. - ЖЭТФ, 1983, т.85, вып.1, с.24-40.

50. Dalgarno A., Victor G.A. The time-dependent coupled Hartree-Fock approximation. - Proc. Roy.Soc. A., 1965, v.291, p.291-295.

51. Kelly H.P. Frequency dependent polarizability of atomic oxygen calculated by many-body theory. - Phys.Rev., 1969, v.182, no.1, p.84-89.

52. Epstein I. Optical properties of atoms and molecules calculated by a time-dependent coupled Hartree-Fock method. - J.Chem.Phys., 1970, v.53, No.5, p.1881-1890.

53. Амусья М.Я., Черепков Н.А., Шапиро С.Г. Расчет мульти - польных поляризуемостей и констант Ван-дер-Ваальса благородных газов. - ЖЭТФ, 1972, т.63, вып.3, с.889-898.

54. Братцев В.Ф., Ходырева Н.В. Метод "связанной" теории возмущений для атомов с открытыми оболочками и его применение к расчету дипольной поляризуемости. - Опт. и спектр.,1981, т.50, вып.2, с.222-230.

55. Петрашень А.Г., Ребане Т.К. Вариационные расчеты атомных динамических поляризуемостей с модельным потенциалом. - Вестн. Ленингр.ун-та, 1977, № 10, с.16-22.

56. Pindzola M.S., Chen A.B., Ritchie B. Two-photon ionization of a potassium atom. - J.Phys.B,1981,v.14,No.2,p.209 -220.

57. Суран В.В., Запесочный И.П. Наблюдение при многофотонной ионизации атомов стронция. - Письма в ЖЭТФ, 1975, т.I, вып.2I, с.973-974.

58. Алексахин И.С., Делоне Н.Б., Запесочный И.П., Суран В.В. Наблюдение и исследование процесса двухэлектронной многофотонной ионизации атомов. - ЖЭТФ, 1979, т.76, вып.3, с.887-895.

59. L'Huillier A., Lompre L.A., Mainfray G., Manus C. Multiply charged ions by multiphoton absorption in rare gases at 0.53 μm. - Phys.Rev.A,1983, v.27,No.5,p.2503-2512.

60. L'Huillier A., Lompre L.A., Mainfray G., Manus C. Multiply charged ions induced by multiphoton absorbtion processes in rare-gas atoms at 1.064 μm. - J.Phys. B, 1983, v.16, No.8, p.1363-1381.

6I. Келдыш Л.В. Ионизация в поле сильной электромагнитной волны. - ЖЭТФ, 1964, т.47, вып.5, с.1945-1957.

62. Переломов А.М., Попов В.С., Терентьев М.В. Ионизация атомов в переменном электрическом поле. I. - ЖЭТФ, 1966, т.50, вып.5, с.I393-I409.

63. Никишов А.И., Ритус В.И. Ионизация систем, связанных короткодействующими силами, полем электромагнитной волны. - ЖЭТФ, 1966, т.50, вып.I, с.255-270.

64. Бункин Ф.В., Федоров М.В. Холодная эмиссия электронов с поверхности металла в сильном поле излучения. - ЖЭТФ, 1965, т.48, вып.5, с.I34I-I346.

65. Силин А.П. Многоквантовый поверхностный фотоэффект в металлах. - ФТТ, 1970, т.I2, вып.I2, с.3553-3558.

66. Берсон И.Я., Бондарс Х.Я. Отражение электрона от стенки в присутствии электромагнитной волны. - Квантовая электроника, 1974, т.I, № 7, с.1612-1616.

67. Островский В.Н. Многофотонная ионизация, резонансное рассеяние на нестационарном потенциале и комплексные полюса S-матрицы. - ТМФ, 1977, т.33, № I, с.126-135.

68. Казанский А.К., Островский В.Н., Соловьев Е.А. Прохождение низкоэнергетических частиц через нестационарный потенциальный барьер и спектр квазиэнергий. - ЖЭТФ, 1976, т.70, вып.2, с.493-502.

69. Демков Ю.Н., Островский В.Н. Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике. - Л.: Изд-во ЛГУ, 1975. - 240с.

70. Базь А.И., Зельдович Я.Б., Переломов А.М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. - М.: Наука, 1971. - 544 с.

71. Berson I.J. Multiphoton ionization and stimulated bremsstrahlung radiation in the case of short-range potencials. - J.Phys. B, 1975, v.8, No.18, p.3078-3088.

72. Манаков Н.Л., Рапопорт Л.П. Частица с малой энергией связи в циркулярно поляризованном поле. - ЖЭТФ, 1975, т.69, вып.3, с.842-852.

73. Манаков Н.Л., Файнштейн А.Г. Ионизация слабосвязанной частицы и сходимость рядов теории возмущений в переменном поле. - ДАН СССР, 1979, т.224, № 3, с.567-569.

74. Манаков Н.Л., Файнштейн А.Г. Распад слабосвязанного уровня в монохроматическом поле. - ЖЭТФ, 1980, т.79, вып.3, с.751-762.

75. Geltman S. Ionization of a model atom by a pulse of coherent radiation. - J.Phys.B, 1977, v.10, No.5, p.831-840.

76. Austin E.J. Ionization of model atoms by intense electromagnetic fields. - J.Phys. B., 1979, v.12, No.24, p.4045 -4055.

77. Берсон И.Я. Одно обобщение рядов Неймана. - Латв.матем. ежегодник, Рига:Зинатне, I976, № 20, с.33-38.

78. Переломов А.М., Попов В.С. Ионизация атомов в перемен - ном электрическом поле. Ш. - ЖЭТФ, I967, т.52, вып.2, с.5I4-526.

79. Попов В.С., Кузнецов В.П., Переломов А.М. Квазиклассическое приближение для нестационарных задач. - ЖЭТФ, I967, т.53, вып.I, с.33I-347.

80. Никишов А.И., Ритус В.И. Ионизация атомов полем электромагнитной волны. - ЖЭТФ, I967, т.52, вып.I, с.223-24I.

81. Bebb H.B., Gold A. Multiphoton ionization of hydrogen and rare-gas atoms. - Phys.Rev., 1966, v.143, No.1,p.1-24.

82. Bebb H.B. Quantitative theory of the two-photon ioniza - tion of the alkali atoms. - Phys.Rev., 1966, v.149, No.1, p.25-32.

83. Zernik W. Two-photon ionization of atomic hydrogen. - Phys.Rev. A, 1964, v.135, No.1, p.51-57.

84. Zernik W., Klopfenstein R.W. Two-photon ionization of atomic hydrogen. II. - J.Math.Phys., 1965, v.6, No.2, p.262-270.

85. Gavrila M. Elastic scattering of photons by a hydrogen atom. - Phys.Rev., 1967, v.163, No.1, p.147-155.

86. Зон Б.А., Манаков Н.Л., Рапопорт Л.П. Двухфотонные связанно-связанные переходы в кулоновском поле. - ЖЭТФ, I968, т.55, вып.3, с.924-930.

87. Ветчинкин С.И., Христенко С.В. Применение кулоновской функции Грина к расчету взаимодействия атома водорода с полем световой волны во втором порядке теории возмущений. - Опт. и спектр., 1968, т.25, вып.5, с.650-654.

88. Gontier Y., Trahin M. Multiphoton ionization of atomic hydrogen in the ground state. - Phys.Rev., 1968, v.172, No.1, p.83-87.

89. Karule E. On the evolution on transition matrix elements for multiphoton processes in atomic hydrogen. - J.Phys.B, 1971, v.4, No.9, p.L67-L70.

90. Gontier Y., Trahin M. Multiphoton processes in a hydrogen atom. - Phys.Rev. A, 1971, v.4, No.5, p.1896-1906.

91. Рапопорт Л.П., Зон Б.А., Манаков Н.Л. Двухфотонная ионизация атома водорода. - ЖЭТФ, 1969, т.56, вып.I, с.400-40I.

92. Arnous E., Klarsfeld S., Wane S. Angular distribution in the two-quantum atomic photoeffect. - Phys.Rev. A, 1973, v.7, No.5, p.1559-1568.

93. Христенко С.В., Ветчинкин С.И. Многофотонная ионизация атома водорода. - Опт. и спектр., 1976, т.40, вып.3, с.4I7-422.

94. Arnous E., Bastion J., Maquet A. Stimulated radiative corrections in hydrogen in the presence of a strong laser field. - Phys.Rev. A, 1983, v.27, No.2, p.977-995.

95. Каруле Э.М. Сечение многофотонной ионизации атома водорода для $n \leq$ I6. - В сб.: Атомные процессы. Рига: Зинатне, 1975, с.5-24.

96. Karule E. Multiphoton ionization of atomic hydrogen. - In: Multiphoton processes: Proc. of an Intern.Conf. Rochester, 1977, p.159-169.

97. Зон Б.А., Манаков Н.Л., Рапопорт Л.П. Полуфеноменологическая функция Грина оптического электрона в атоме. - ДАН СССР, 1969, т.188, № 3, с.560-561.

98. Зон Б.А., Манаков Н.Л., Рапопорт Л.П. Теория возмущений для многофотонной ионизации атомов. - ЖЭТФ, 1971, т.61, вып.3, с.968-975.

99. Давыдкин В.А., Зон Б.А., Манаков Н.Л., Рапопорт Л.П. Квадратичный эффект Штарка на атомах. - ЖЭТФ, 1971, т.60, вып.1, с.124-131.

100. Манаков Н.Л., Овсянников В.Д., Рапопорт Л.П. Атомные расчеты по теории возмущений с модельным потенциалом. - Опт. и спектр., 1975, т.38, вып.2, с.206-214.

101. Manakov N.L., Ovsannikov V.D. Use of the model potencial in calculation of dynamic polarizabilities, dispersion forces and light shifts atoms. - J.Phys. B, 1976, v.10, No.4, p.569-581.

102. Manakov N.L., Ovsiannikov V.D., Preobragenskii M.A., Rapoport L.P. The use of a model potential for the calculation of atomic multiphoton ionization probabilities. - J.Phys. B., 1978, v.11, No.2, p.245-256.

103. Mc Guire E.J. Green's-function approach to nonresonance multiphoton absorption in the alkali-metal atoms. - Phys. Rev. A, 1980, v.23, No.1, p.186-200.

104. Воронов Г.С., Делоне Н.Б. Ионизация атома ксенона электрическим полем излучения рубинового лазера. - Письма в ЖЭТФ, 1965, т.1, вып.2, с.42-45.

105. Воронов Г.С., Делоне Н.Б. Многофотонная ионизация атома ксенона излучением рубинового лазера. - ЖЭТФ, 1966, т.50, вып.1, с.78-84.

106. Делоне Н.Б. Многофотонная ионизация атомов. - УФН,1975, т.115, вып.3, с.361-401.

107. Рапопорт Л.П., Зон Б.А., Манаков Н.Л. Теория многофотонных процессов в атомах. - М.: Атомиздат, 1978. - 182 с.

108. Делоне Г.А., Манаков Н.Л., Пискова Г.К., Рапопорт Л.П. Нерезонансная многофотонная ионизация атомов. - В сб.: Многофотонная ионизация атомов: Тр. ФИАН/ Ред. Н.Г.Басов. М.: Наука, 1980, № 115, с.6-41.

109. Dalgarno A., Lewis J.T. The exact calculation of long-range forces between atoms by perturbation theory. - Proc.Roy.Soc.A., 1955, v.233, No.1192, p.70-74.

110. Делоне Н.Б., Крайнов В.П. Резонансное взаимодействие интенсивного света с атомами. - УФН, 1978, т.124, вып.4, с.619-650.

111. Делоне Н.Б., Крайнов В.П. Атом в сильном световом поле. - М.: Атомиздат, 1978. - 288 с.

112. Делоне Н.Б., Федоров М.В. Резонансный процесс многофотонной ионизации атомов. - В сб .: Многофотонная ионизация атомов: Тр.ФИАН/ Ред. Н.Г.Басов. М., 1980, № 115, с.42-95.

113. Делоне Г.А., Делоне Н.Б., Пискова Г.К. Многофотонная резонансная ионизация атома. - ЖЭТФ, 1972, т.62, вып.4, с.1272-1282.

114. Бункин Ф.В., Федоров М.В. Тормозной эффект в сильном поле излучения. - ЖЭТФ, 1965, т.49, вып.4, с.1215-1221.

115. Kroll N.M., Watson K.M. Charged-particle scattering in the presence of a strong electromagnetic wave. - Phys. Rev. A, 1973, v.8, No.2, p.804-809.

116. Weingartshofer A., Holmes J.K., Coudle G., Clarke E.M., Krüger H. Direct observation of multiphoton processes in laser-induced free-free transitions. - Phys.Rev.Lett., 1977, v.39, No.5, p.269-270.

117. Weingartshofer A., Clarke E.M., Holmes J.K., Jung C. Experiments on multiphoton free-free transitions. - Phys.Rev. A, 1979, v.19, No.6, p.2371-2376.

118. Weingartshofer A., Holmes J.K., Sabbagh J., Chin S.L. Electron scattering in intense laser fields. - J.Phys. B, 1983, v.16, No.10, p.1805-1817.

119. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. - М.: Наука, 1963. - 702с.

120. Делоне Н.Б., Крайнов В.П., Ходовой В.А. Двухуровневая система в сильном световом поле. - УФН, 1975, т.117, вып.2, с.189-197.

121. Dhar A.K., Nagarajan M.A., Izrailev F.M., Whitehead R.R. Persistence of two-state resonances in a hydrogen atom under the influence of a periodic impulsive field. - J. Phys. B, 1983, v.16, No. 2 , p.L17-L22.

122. Шепелянский Д.Л. Квантовое ограничение диффузии при возбуждении ридберговского атома в переменном поле. - Новосибирск, 1983. - 35с.(Препринт/ Ин-т ядер.физ. СО АН СССР : 83-61).

123. Chu Shih-I, Reinhardt W.P. Intense field multiphoton ionization via complex dressed states: application to the H atom. - Phys.Rev.Lett., 1977, v.39, No.19, p.1195 -1198.

124. Maquet A., Chu Shih-I, Reinhardt W. Stark ionization in dc and ac fields: an L^2 complex-coordinate approach. - Phys.Rev. A, 1983, v.27, No.6, p.2946-2970.

125. Holt C.R., Raymer M.G., Reinhardt W. Time dependences of two-, three- and four-photon ionization of atom hydrogen in the ground 1^2S and metastable 2^2S states. - Phys.Rev. A, 1983, v.27, No.6, p.2971-2988.

126. Преображенский М.А., Рапопорт Л.П. Квазистационарные состояния атома водорода в поле сильной монохроматической волны. - ЖЭТФ, 1980, т.78, вып.3, с.929-935.

127. Broad J.T. A basis set approach to multiphoton ionization including free-free transitions. - In: XIII ICPEAC: Abstracts of contributed papers. Berlin, 1983, p.60.

128. Shirley J.H. Solution of the Schrödinger equation with a Hamiltonian periodic in time. - Phys.Rev. B, v.138, No.4, p.979-987.

129. Ритус В.И. Сдвиг и расщепление атомных уровней полем электромагнитной волны. - ЖЭТФ,1966,т.51, вып.5, с.1544 -1549.

130. Зельдович Я.Б. Рассеяние и излучение квантовой системой в сильной электромагнитной волне. - УФН, 1973, т.110, вып.1, с.139-151.

131. Sambe H. Steady state and quasienergies of a quantum mechanical system in a oscillating field. - Phys.Rev.A, 1973, v.7, No.6, p.2203-2213.

132. Зон Б.А., Манаков Н.Л., Рапопорт Л.П. Спектр водородоподобного атома в поле лазерного излучения. - Опт. и спектр., 1975, т.38, вып.1, с.13-19.

133. Зон Б.А., Кацнельсон Б.Г. Перестройка атомного мультиплета в сильном световом поле. - ЖЭТФ, 1973, т.65, вып.3, с.947-959.

134. Fedorov M.V., Makarov V.P. On a thin structure of atomic spectra in a intense resonance electromagnetic field. - Opt.Comm., 1975, v.14, No.4, p.421-425.

135. Зон Б.А., Шолохов Е.И. Квазиэнергетические спектры дипольной молекулы и атома водорода. - ЖЭТФ, 1976, т.70, вып.3, с.887-898.

136. Манаков Н.Л., Овсянников В.Д., Рапопорт Л.П. Теория возмущений для квазиэнергетического спектра атомов в интенсивном монохроматическом поле. - ЖЭТФ, 1976, т.70, вып.5, с.1697-1712.

137. Демков Ю.Н., Островский В.Н., Монозон Б.С. Уровни энергии атома водорода в скрещенных электрическом и магнитном полях. - ЖЭТФ, 1969, т.57, вып.4, с.1431-1434.

138. Лисица В.С. Атом водорода во вращающемся электрическом поле. - Опт. и спектр., 1971, т.31, вып.6, с.862-865.

139. Blochinzew D. Zur Theorie des Starkeffektes im zeitveränderlichen Feld. - Phys.Z. der Sowjetunion, 1933, Bd.4, Hf.3, S.501-515.

140. Коварский В.А., Перельман Н.Ф. Роль спектра атома в процессах многофотонной ионизации. - ЖЭТФ, 1971, т.61, вып.4, с.1389-1398.

141. Коварский В.А. Многоквантовые переходы. - Кишинев: Штиинца, 1974. - 228 с.

142. Fainstein A.G., Manakov N.L., Rapoport L.P. Some general properties of quasi-energetic spectra of quantum systems in classical monochromatic fields. - J.Phys. B, 1978, v.11, No.14, p.2561-2577.

143. Берсон И.Я. Рассеяние частиц в присутствии сильной электромагнитной волны. - Изв. АН ЛатвССР, сер.физ. и техн. наук, 1975, № 6, с.9-17.

144. Берсон И.Я. Рассеяние частиц в присутствии сильной электромагнитной волны. - В кн.: УI Всесоюз. конф. по физике электр. и атомн.столкн.: Тез.докл. Тбилиси, 1975, с.38.

145. Берсон И.Я. Квазиклассическое приближение для вынужденного тормозного излучения. - ЖЭТФ, 1981, т.80, вып.5, с.1727-1736.

146. Бэрк П., Ситон М. Численные решения интегро-дифференциальных уравнений теории столкновения электрона с атомом. - В кн.: Вычислительные методы в физике атомных и молекулярных столкновений. М., 1974, с.9-81.

147. Манаков Н.Л., Преображенский М.А., Рапопорт Л.П., Файнштейн А.Г. Эффекты высших порядков теории возмущений для сдвига и ширины атомных уровней в световом поле. - ЖЭТФ, 1978, т.75, вып.4, с.1243-1259.

148. Bayfield J., Koch P. Multiphoton ionization of highly excited hydrogen atoms. - Phys.Rev.Lett., 1974, v.33, No.5, p.258-261.

149. Bayfield J.E., Gardner L.D., Koch P.M. Observation of resonances in the microwave-stimulated multiphoton excitation and ionization of highly excited hydrogen atoms. - Phys.Rev.Lett., 1977, v.39, No.2, p.76-79.

150. Koch P.M., Gardner L.D., Bayfield J.E. Dependence on principal quantum number of the microwave multiphoton ionization of highly excited hydrogen atoms. - In: IX ICPEAC: Abstracts /Ed. J.S.Risley, R.Geballe. Seatle-London, 1975, p.473-474.

151. Mariani D.R., Van der Water W., Koch P.M., Bergeman T. Observation and quasistatic analysis of structure in microware ionization of highly excited helium atoms. - Phys. Rev.Lett., 1983, v.50, No.17, p.1261-1264.

152. Pillet P., Smith W.W., Kachru R., Trau N.H., Callagher T.F. Microwave ionization of Na Rydberg levels. - Phys.Rev.Lett. 1983, v.50, No.14, p.1042-1045.

153. Bayfield J., Gardner L., Gulkok Y., Sharma D. Spectroscopic study of nonresonant photon absorption by highly excited hydrogen atoms in a strong microwave field. - Phys. Rev.A, 1981, v.24, No.1, p.138-143.

154. Liberman S., Pinard J., Taleb A. Experimental study of stimulated radiative corrections on an atomic Rydberg state. -Phys.Rev.Lett., 1983, v.50, No.12, p.888-891.

155. Dewhurst R.J., Pert G.J., Scott A.M. Quenching of high Rydberg states of sodium in strong 1.06 μm laser fields. - J.Phys. B, 1980, v.13, No.14, p.2759-2766.

156. Moi L., Goy P., Gross M., Raimond J.M., Fabre C., Haroche S. Rydberg-atom masers. I. A theoretical and experimental study of super-radiant systems in the millimeter-wave domain. - Phys.Rev. A, 1983, v.27, No.4,p.2043-2064.

157. Goy P., Moi L., Gross M., Raimond J.M., Fabre C., Horoche S. Rydberg-atom masers. II. Triggering by external radiation and application to millimeter-wave detectors. - Phys.Rev. A, 1983, v.27, No.4, p.2065-2081.

158. Gallagher T.F. Interaction of Rydberg atoms with black-body radiation. - In: Rydberg states of atoms and molecules /Ed. R.F.Stebbings, F.B.Dunning. - Cambr., London, N-Y., 1983, p.165-186.

159. Смирнов Б. Высоковозбужденные состояния атомов. - УФН, 1980, т.131, вып.4, с.577-616.

160. Rydberg states of atoms and molecules /Ed. R.F.Stebbings, F.B.Dunning. - Cambr., Lond., N-Y.: Cambr. Un.Press, 1983. - 515 p.

161. Буреева Л.А. О квазиклассическом приближении для сил осцилляторов и эффективных сечений радиационных переходов. - Астрон.журн., 1968, т.45, № 6, с.1215-1221.

162. Бете Г., Солпитер Э. Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. - М.: Физматиздат, 1960. - 562 с.

163. Naccache P.F. Matrix elements and correspondence principles. - J.Phys. B, 1972, v.5, No.7, p.1308-1319.

164. Давыдкин В.А., Зон Б.А. Радиационные и поляризационные характеристики рудберговских состояний атомов. I. - Опт. и спектр., 1981, т.51, вып.1, с.25-30.

165. Гореславский С.П., Делоне Н.Б., Крайнов В.П. Вероятности радиационных переходов между высоковозбужденными атомными состояниями. - ЖЭТФ, 1982, вып.82, вып.6, с.1789-1797.

166. Гореславский С.П., Делоне Н.Б., Крайнов В.П. Радиационные переходы между квазиклассическими атомными состояниями. - М., 1982. - 45 с. (Препринт/ ФИАН : № 33).

167. Quattropani A., Bassani F., Carillo S. Two-photon transitions to excited states in atomic hydrogen. - Phys.Rev. A, 1982, v.25, No.6, p.3079-3089.

168. Justum Y., Maquet A. Multiphoton ionization of highly excited hydrogen atoms. - J.Phys. B, 1977, v.10, No.8, p.L287-L290.

169. Делоне Н.Б., Крайнов В.П. Динамическая поляризуемость высоковозбужденных водородоподобных состояний. - ЖЭТФ, 1982, т.83, вып.6, с.2021-2026.

170. Farley J.W., Wing W.H. Accurate calculation of dynamic Stark shifts and depopulation rates of Rydberg energy levels induced by blackdody radiation. Hydrogen, helium and alkali-metal atoms. - Phys.Rev. A, 1981, v.23, No.5, p.2397-2424.

171. Делоне Н.Б., Крайнов В.П. Туннельная ионизация высоковозбужденных атомов в переменном поле. - Изв. АН СССР, сер.физ., 1981, т.45, № 12, с.2331-2335.

172. Leopold J.G., Percival I.C. Microwave ionization and excitation of Rydberg atoms. - Phys.Rev.Lett., 1978, v.41, No.14, p.944-947.

173. Leopold J.G., Percival I.C. Ionization of highly excited atoms by electric fields. III. Microwave ionization and excitation. - J.Phys. B, 1979, v.12, No.5, p.709-721.

174. Jones D.A., Leopold J.G., Percival I.C. Ionisation of highly excited atoms by electric fields. IV. Frequency and amplitude dependence for linearly polarized fields. – J.Phys. B, 1980, v.13, No.1, p.31-40.

175. Mostowski J., Sanchez-Mondragon J.J. Interaction of highly excited hydrogen atoms with a resonant oscillating field. – Opt.Comm., 1979, v.29, No.3, p.293-296.

176. Меерсон Б.И., Окс Е.А., Сасоров П.В. Стохастическая неустойчивость осциллятора и ионизация высоковозбужденных атомов под действием электромагнитного излучения. – Письма в ЖЭТФ, 1979, т.29, вып.1, с.79-82.

177. Меерсон Б.И. Высоковозбужденный атом под действием интенсивного циркулярно поляризованного электромагнитного излучения. – Опт. и спектр., 1981, т.51, вып.4, с.582-588.

178. Meerson B.I., Oks E.A., Sasorov P.V. A highly excited atom in a field of intense resonant electromagnetic radiation. I. Classical motion. – J.Phys. B., 1982, v.15, No.20, p.3599-3614.

179. Шепелянский Д.Л. Стохастизация высоковозбужденного атома в поле низкочастотной электромагнитной волны. – Опт. и спектр., 1982, т.52, вып.6, с.1102-1105.

180. Делоне Н.Б., Зон Б.А., Крайнов В.П. Диффузионный механизм ионизации высоковозбужденных атомов в переменном электромагнитном поле. – ЖЭТФ, 1978, т.75, вып.2, с.445-453.

181. Делоне Н.Б., Крайнов В.П., Шепелянский Д.Л. Высоковозбужденный атом в электромагнитном поле. – УФН, 1983, т.140, вып.3, с.355-392.

182. Берсон И.Я. Квазиклассическое приближение для многоканальных задач рассеяния. - Изв. АН ЛатвССР, сер. физ. и техн.наук, 1968, № 4, с.47-54.

183. Berson I. Multiphoton ionization of high Rydberg states. - Phys.Lett. A, 1981, v.84, No.7, p.364-366.

184. Берсон И.Я. Многофотонная ионизация ридберговских состояний и вынужденное тормозное излучение в кулоновском поле. - Изв. АН СССР, сер. физ., 1981, т.45, № 12, с. 2289-2292.

185. Берсон И.Я. Квазиклассическое приближение для многоканальных задач в резонансном случае. Приложение к многофотонной ионизации. - В кн.: УШ Всесоюз. конф. по физике электр. и атомн. столкн.: Тез.докл. Л., 1981, с.252.

186. Берсонс И.Я. Многофотонная ионизация высоковозбужденных состояний атомов. - ЖЭТФ, 1982, т.83, вып.4, с.1276-1286.

187. Берсонс И.Я. Радиационные переходы между высоковозбужденными состояниями атомов в присутствии сильного микроволнового поля. - ЖЭТФ, 1983, т.85, вып.1, с.70-79.

188. Берсонс И.Я. Радиационные переходы между высоковозбужденными состояниями атомов в присутствии сильного микроволнового поля. - В кн.: Всесоюз. конф. по теории ат. и атомн. спектр.: Тез.докл. Минск, 1983, с.81.

189. Берсонс И.Я. Ионизация высоковозбужденных состояний атома водорода сильным низкочастстным полем. - ЖЭТФ, 1984, т.86, вып.3, с.

190. Бейгман И.Л., Вайнштейн Л.А., Собельман И.И. О классическом приближении в теории неупругих столкновений высоковозбужденных атомов с заряженными частицами. - ЖЭТФ, 1969, т.57, вып.5, с.1703-1709.

191. Вайнштейн Л.А., Собельман И.И., Юков Е.А. Возбуждение атомов и уширение спектральных линий. - М.: Наука, 1979. - 319 с.

192. Miller W.H., Smith F.T. Semiclassical perturbation theory of electron-molecule collisions. - Phys.Rev. A, 1977, v.17, No.3, p.939-953.

193. Karule E. Two-photon ionization of atomic hydrogen simultaneously with one-photon ionization. - J.Phys. B, 1978, v.11, No.3, p.441-447.

194. Klarsfeld S., Maquet A. Analytic continuation of Sturmian expensions to two-photon ionization. - Phys.Lett.A, 1979, v.73, No.2, p.100-102.

195. Klarsfeld S., Maquet A. Pade approximants and multiphoton ionization of atomic hydrogen. - J.Phys. B, 1979, v.12, No.18, p.L553-L556.

196. Klarsfeld S., Maquet A. Pade-Sturmian approach to multiphoton ionization on hydrogenlike atoms. - Phys.Lett.A, 1980, v.78, No.1, p.40-42.

197. Gontier Y., Poirer M., Trahin M.J. Multiphoton absorption above the ionization threshold. - J.Phys. B, 1980, v.13, No.7, p.1381-1387.

198. Gontier Y., Trahin M. Energetic electron generation by multiphoton absorption. - J.Phys. B, 1980, v.13, No.22, p.4383-4390.

199. Crance M., Aymar M. Dinamics of multiphoton ionization to multiple continua. - J.Phys. B, 1980, v.13, No.13, p.L421-L426.

200. Aymar M., Crance M. Two-photon ionization of atomic hydrogen in the presence of one-photon ionization. - J.Phys. B, 1980, v.13, No.9, p.L287-L292.

201. Aymar M., Crance M. Multiphoton ionization probabilities of multiple continua in alkali atoms. - J.Phys. B, 1981, v.14, No.19, p.3585-3607.

202. Agostini P., Fabre F., Manfray G., Petite G., Rahman N.K. Free-free transitions following six-photon ionization of xenon atoms. - Phys.Rev.Lett., 1979, v.42, No.17, p.1127-1130.

203. Agostini P., Clement M., Fabre F., Petite G. Multiphoton ionization involving multiphoton continuum-continuum transitions. - J.Phys. B, 1981, v.14, No.15, p.L491-L495.

204. Kruit P., Kimman J., Van der Wiel M.J. Absorption of additional photons in the multiphoton ionization continuum of xenon at 1064, 532 and 440 nm. - J.Phys. B, 1981, v.14, No.19, p.L597-L602.

205. Fabre F., Petite G., Agostini P., Clement M. Multiphoton above-threshold ionization of xenon at 0.53 and 1.06 . - J.Phys. B, 1982, v.15, No.9, p.1353-1369.

206. Kruit P., Kimman J., Muller H.G., Van der Wiel M.J. Electron spectra from multiphoton ionization of xenon at 1064, 532 and 355 nm. - Phys.Rev. A, 1983, v.28, No.1, p.248-255.

207. Делоне Н.Б., Коварский В.А., Масалов А.В., Перельман Н.Ф. Ионизация атомов сильным немонохроматическим полем лазерного излучения. - В сб.: Многофотонная ионизация атомов: Тр. ФИАН/ Ред. Н.Г.Басов. М., 1980, № 115, с.617-652.

208. Делоне Н.Б., Коварский В.А., Масалов А.В., Перельман Н.Ф. Атом в поле излучения многочастотного лазера. - УФН,1980, т.131, вып.4, с.617-652.

209. Крайнов В.П., Тодирашку С.С. Нерезонансная многофотонная ионизация атомов в сильном стохастическом поле. - ЖЭТФ, 1980, т.79, вып.1, с.69-74.

210. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика. - М.: Наука, 1969. - 623с.

211. Давыдов А.С. Квантовая механика. - М.: Физматгиз, 1963. - 748 с.

212. Гайтлер В. Квантовая теория излучения. - М.: ИЛ, 1956. -491с.

213. Шифф Л. Квантовая механика. - М.: ИЛ., 1957. - 475с.

214. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.1-3. - М.: Наука, 1966-1967.

215. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. - М.: Физматгиз, 1958. - 206с.

216. Берестецкий В.Г., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Релятивистская квантовая теория. Ч.1. - М.: Наука, 1968.-480с.

217. Pham Ngoc Dinh. Sur une classe de polynomes orthogonaux associes a une forme confluente de l'equation de Heun. - Comp.Rend.Acad.Sc.Paris, ser. A, 1970, t.270, No.10, p.650-652.

218. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Ч.1. - М.: ИЛ, 1958. - 930с.

219. Mitter H. Intense fields and quantum electrodynamics. - In: Multiphoton processes: Proc. of an Intern.Conf. N.-Y.: John Wiley a. Sons, 1977, p.47-59.

220. Бункин Ф.В., Казаков А.Е., Федоров М.В. Взаимодействие интенсивного оптического излучения со свободными электронами. - УФН, 1972, т.107, вып.4, с.559-593.

221. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций . - М.: ИЛ, 1949. - 798 с.

222. Жигунов В.П., Захарьев Б.Н. Методы сильной связи каналов в квантовой теории рассеяния. - М.: Атомиздат, 1974. - 223 с.

223. Hennenberger W.C. Perturbation method for atoms in intense light beams. - Phys.Rev.Lett., 1968, v.21, No.12, p.838-841.

224. Эдмондс А. Угловые моменты в квантовой механике. - В кн.: Деформация атомных ядер. М., 1958, с.305-351.

225. Мотт Н., Месси Г. Теория атомных столкновений. - М.: Мир, 1969. - 756 с.

226. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: ИЛ, 1958. - 474 с.

227. Stueckelberg E.C.G. Unelastische Stösse zwischen Atomen. - Helv.Phys.Acta, 1932, v.5, fasc.3, p.369-419.

228. Bates D.R., Holt A.R. Impact parameter and semi-classical treatments of atomic collisions. - Proc.Roy.Soc. A, 1966, v.292, No.1429, p.168-179.

229. Bykhovsky V.K. Contribution to the calculation of atomic reaction rates: the many-channel semiclassical approach. - In: V ICPEAC: Abstracts of papers. Leningrad, 1967, p.195-196.

230. Bierter W. Multiple excitation of collective nuclear states by inelastic scattering. - Helv.Phys.Acta, 1965, v.38, fasc.7, p.736-752.

231. Бейтс Д. Теория атомных столкновений. - В кн.: Атомные и молекулярные процессы /Под ред. Д.Бейтса. М, 1964, с.478-539.

232. Справочник по специальным функциям /Под ред. М.Абрамовица, И.Стигана. - М.: Наука, 1979. - 830 с.

233. Делоне Н.Б., Иванов М.Ю., Крайнов В.П. Многофотонная ионизация высоковозбужденных состояний атомов. - М.,1983. - 16с. (Препринт/ ФИАН: № 42).

234. Klarsfeld S., Maquet A. Circular versus linear polarization in multiphoton ionization. - Phys.Rev.Lett.,1972, v.29, No.2, p.79-81.

235. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. - М.: Физматгиз, 1960. - 400 с.

236. Собельман И.И. Введение в теорию атомных спектров. - М.: Наука, 1977. - 319 с.

237. Делоне Н.Б., Крайнов В.П. Двухфотонная ионизация высоковозбужденных атомов. - М., 1983. - 12с.(Препринт/ ФИАН: № 15).

238. Бахрах В.Л., Ветчинкин С.И., Уманский И.М. Квазиклассические функции Грина. - ТМФ, 1983, т.56, № 1, с.103-113.

239. Каруле Э.М. Двухфотонная ионизация возбужденных состояний атома водорода. - Докл. на заседании секции по фотопроцессам Совета по физике электр. и ат.столкн. АН СССР(Ужгород, май, 1983).

240. Гореславский С.П., Делоне Н.Б., Крайнов В.П. Квазиклассическая теория надпороговой многофотонной ионизации атомов. - М., 1982. - 15с. (Препринт/ ФИАН: № 263).

241. Delone N.B., Goreslavsky S.P., Krainov V.P. The WKB theory of multiphoton above-threshold ionization of atoms. – J.Phys. B, 1983, v.16, No.13, p.2369–2376.

242. Presnyakov L.P., Urnov A.M. Quntum transitions between highly excited atomic levels induced by external time-dependent forces. – J.Phys. B, 1970, v.3, No.10, p.1267–1271.

243. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. – М.: ИЛ, 1962. – 279с.

244. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. – М.: Наука, 1978. – 295с.

245. Kuczma M. Functional equations in a single variable. – Warszawa: Polish Sc.publ., 1968. – 383 p.

246. Делоне Н.Б., Крайнов В.П. Туннельная ионизация высоковозбужденных атомов в переменном поле. – Изв. АН СССР, сер.физ., 1981, т.45, № 12, с.2331–2335.

247. Chin S.L., Farkas Gy., Yergeau F. Observation of Kr and Xe ions created by intense nanosecond CO_2 laser pulses. – J.Phys. B, 1983, v.16, No.8, p.L223–L226.

248. Osborn R.K. Nonlinear bremsstrahlung. – Phys.Rev. A, 1972, v.5, No.4, p.1660–1662.

249. Альдер К., Бор О., Хус Т., Моттельсон Б., Винтер А. Изучение структуры ядра при кулоновском возбуждении ядер. – В кн.: Деформация атомных ядер. М., 1958, с.9–231.