Pedagoģijas, psiholoģijas un mākslas fakultāte

Aleksandrs Vorobjovs

PUSAUDŽU MATEMĀTISKĀS KOMPETENCES VEIDOŠANĀS

Promocijas darbs

doktora grāda iegūšanai izglītības zinātņu nozares
skolas pedagoģijas apakšnozarē

Darba zinātniskā vadītāja:

Dr. paed., prof. ***Rudīte Andersone***

Rīga, 2021

Anotācija

Aleksandra Vorobjova promocijas darbs izglītības zinātņu pedagoģijas nozares skolas pedagoģijas apakšnozarē "**Pusaudžu matemātiskās kompetences veidošanās**" izstrādāts Latvijas Universitātes Pedagoģijas, psiholoģijas un mākslas fakultātes Izglītības zinātņu un pedagoģisko inovāciju nodaļā. Darba zinātniskā vadītāja *Dr. paed.*, profesore emeritus Rudīte Andersone.

Pētījuma mērķis ir izpētīt pusaudžu matemātiskās kompetences būtību un izstrādāt teorētiski pamatotu pusaudžu matemātiskās kompetences veidošanās didaktisko modeli un vērtēšanas kritērijus.

Promocijas darba saturu veido piecas savstarpēji saistītas nodaļas.

1. nodaļā veikta kompetences jēdziena attīstības teorētiska analīze vēsturiskā un pedagoģiskā kontekstā. Nodaļa rezumēta ar atziņu, ka atrauti no konteksta kompetenci definēt nav iespējams vai nav lietderīgi.

2. nodaļā analizēta pusaudžu matemātiskā kompetence. Nodaļā sniegts pusaudžu raksturojums un salīdzināti biežāk lietotie matemātiskās kompetences skaidrojumi.

3. nodaļā veikta matemātikas mācību teorētiskā analīze: analizēti matemātikas mācību mērķi, saturs, plānotie rezultāti, metodes un mācību organizācija, kā arī vērtēšana matemātiskās kompetences veidošanās aspektā.

4. nodaļā raksturots pusaudžu matemātiskās kompetences veidošanās didaktiskais modelis un vērtēšanas kritēriji.

5. nodaļā veikta pusaudžu matemātiskās kompetences izpēte un analizēti izpētes rezultāti.

Promocijas darba apjoms – 221 lapaspuse, darbā analizēti 344 avoti latviešu, angļu, vācu un krievu valodā. Darbam pievienoti 17 pielikumi.

Atslēgas vārdi: matemātiskā kompetence, pusaudži, matemātikas mācības.

Abstract

Aleksandrs Vorobjovs’ doctoral thesis in pedagogy, a subdiscipline if school pedagogy “**Development of adolescent mathematical competence**” has been worked out in the Department of Pedagogy of the Faculty of Pedagogy, Psychology and Art of the University of Latvia under the supervision of *Dr. paed.*, Professor emeritus Rudīte Andersone.

The aim of the research is to explore the essence of adolescents' mathematical competence and to develop a theoretically grounded didactic model of adolescent mathematical competence development and evaluation criteria.

The doctoral thesis consists of five interconnected chapters.

Chapter 1 analyses the concept of competence in the theory of development in historical, pedagogical and many other aspects. The chapter is summarized with the recognition that it is not possible or useful to define competence out of context.

Chapter 2 includes a theoretical analysis of mathematics studies: describes the aims, content, planned results, methods, and organization of mathematics studies, as well as assessment.

Chapter 3 analyses adolescents' mathematical competence. The chapter provides a description of adolescents and compares the most frequently cited explanations of mathematical competence.

Chapter 4 presents the didactic model of development of adolescents' mathematical competence and evaluation criteria.

Chapter 5 researches the mathematical competence of adolescents and presents the research results.

The doctoral thesis is 221 pages in length. 344 literature sources in Latvian, English, German, and Russian are analysed. The doctoral thesis has 17 appendices.

Key words: competence, mathematical competence, adolescence, mathematics learning.

Saturs

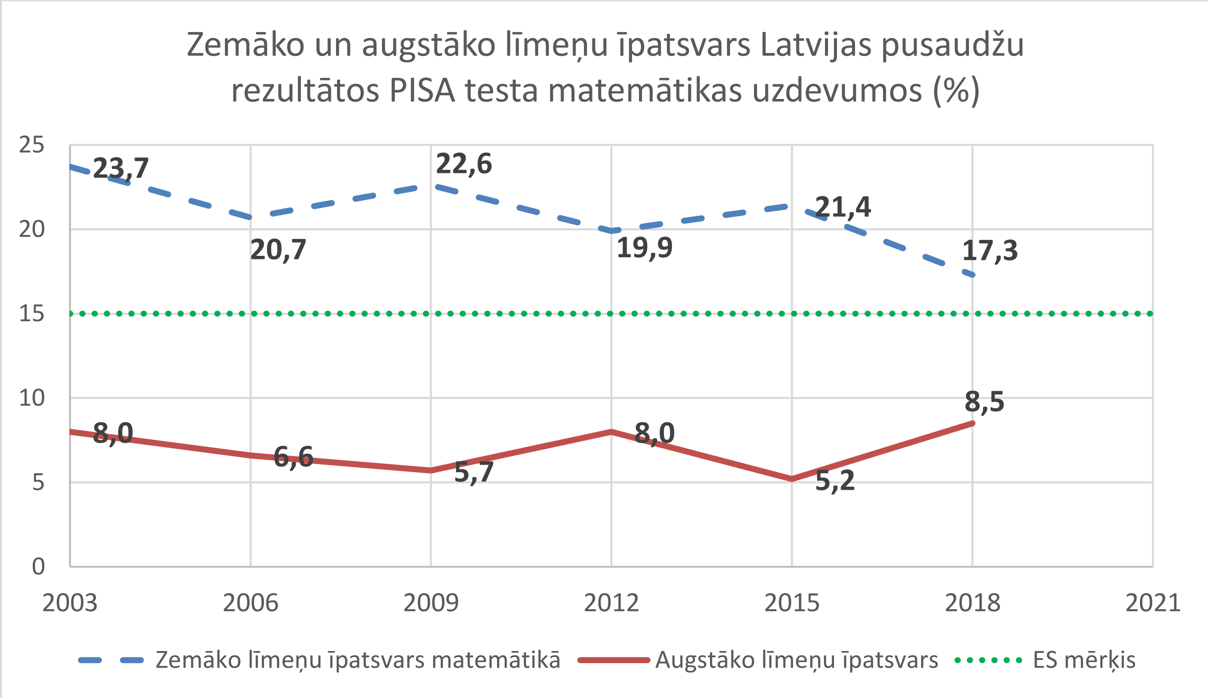
Ievads

Viens no pedagoģijas lielākajiem izaicinājumiem visos laikmetos, bet jo īpaši šajā aktīvo pārmaiņu laikā, ir neziņa par to, kāda būs pasaule, kurā dzīvos, pierādīs sevi darba tirgū un turpinās pilnveidoties šodienas skolēni. Nākotnes scenāriju prognozētāji – futurologi – sniedz aplēses, ka pēc desmit gadiem astoņas no desmit populārākajām profesijām būs tādas, kuras patlaban vēl neeksistē. Sanāk, ka skolotājiem jādod skolēniem ievirze tādās profesijās, kuras vēl nepastāv. Strādājot šajās profesijās, šodienas skolēni izmantos tehnoloģijas, kuras vēl nav radušās. Lai skolēni būtu gatavi šādiem pārbaudījumiem, viņiem ir vajadzīgas ne tikai zināšanas un teorija, bet arī prasmes šīs zināšanas pielietot, risinot jebkādu jaunu problēmu, un spēja uzņemties atbildību, pieņemt lēmumu.

Skolēnu panākumi viņu nākotnes karjerā ir lielā mērā atkarīgi no zināšanām, prasmēm, spējām, motivācijas un attieksmēm – tā, ko vienā vārdā var nosaukt par **kompetenci**. Pētījumi par darba devēju gaidām no potenciālajiem darbiniekiem rāda, ka matemātiskā kompetence izteikti korelē ar karjeras izaugsmes iespējām, jo 94 % no visiem strādājošajiem savā darbā kādā līmenī lieto matemātikas zināšanas, bet 5 % lieto augstākās matemātikas elementus (Handel, 2016). Tas nozīmē, ka labi apgūta matemātika ļauj cerēt uz iespēju veiksmīgāk konkurēt darba tirgū un otrādi – nepietiekama kompetence matemātikā var kavēt profesionālo izaugsmi, neatkarīgi no izvēlētās darba sfēras (Casserly, 2012; Silverstein, 2016).

Matemātiskā kompetence ir viena no Apvienoto Nāciju Izglītības, zinātnes un kultūras organizācijas (UNESCO) pamata kompetencēm (Keevy, Chakroune, 2015). Arī Eiropas Savienībā (ES) matemātiskā kompetence ir atzīta par vienu no svarīgām kompetencēm (European Commission, 2007). Daļēji arī tādēļ, ka Ekonomiskās sadarbības un attīstības organizācijas (OECD, *Organisation for Economic Co-operation and Development*) Starptautiskās skolēnu novērtēšanas programmas (PISA, *Programme for International Student Assessment*) zināšanu un prasmju testi rāda neiepriecinošus datus tieši par matemātisko kompetenci – skolēnu rezultāti ir viduvēji (OECD, 2019a). Šī iemesla dēļ ES dalībvalstis 2009. gadā izvirzīja mērķi – līdz 2020. gadam panākt, lai tādu 15 gadus vecu jauniešu īpatsvars, kam ir nepietiekama (nulles, 1. vai 2. līmenis pēc PISA lietotā izziņas līmeņu iedalījuma) lasītprasme un zināšanas matemātikā un dabaszinātnēs, būtu mazāks par 15 % (Eiropas Savienības Padome, 2009).

2018. gadā Latvijā vidēji 17,3 % 15-gadīgo pusaudžu bija nepietiekamas zināšanas matemātikā. Latvijā šim rādītājam ir tendence samazināties (*skat. 1. att.*). Tikmēr augstāko līmeņu īpatsvars Latvijas pusaudžu matemātikas darbos svārstās ap vidējo rezultātu 7,0 %, bet jaunākajā pētījumā sasniedza rekordu – 8,5 % (OECD, 2018a).



1. att. **Skolēnu ar zemiem un augstiem sasniegumiem matemātikā īpatsvars Latvijā 2003. – 2018. gadā un 2020. gada ES mērķis zemāko līmeņu īpatsvaram** (OECD, 2019a)

Salīdzinot ar Eiropas un OECD valstu vidējiem rādītājiem, Latvijas pusaudžu panākumi matemātikā ir virs vidējā. 2018. gadā vidēji 22,2 % Eiropas pusaudžu bija ar zemu kompetenci matemātikā, vidēji OECD valstīs – 24,0 % (*skat. 1. tab.*). Divu zemāko līmeņu īpatsvars kopš pirmā PISA testa 2000. gadā ne reizi nebija zemāks par 20 %. Viszemākais tas bija 2009. gadā – 20,8 %. Arī šis rekordzemais rezultāts par gandrīz 6 % pārsniedza ES 2020. gada mērķi, ka mazāk nekā 15 % pusaudžu uzrādīs zemākos līmeņus PISA testā. 2018. gadā tikai trīs Eiropas valstis izpildīja 15 % mērķi: Igaunija (10,2 %), Dānija (14,6 %) un Polija (14,7 %). Augstākais rādītājs Eiropā bija Kosovā – 76,6 % (OECD, 2019a).

1. tabula. Skolēnu īpatsvars %, kuri spēj atrisināt dotā un zemāku līmeņu uzdevumus (OECD, 2019a)

Līmenis	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**
Vidēji OECD	90,0 %	76,0 %	53,8 %	29,5 %	10,9 %	2,4 %
Latvijā	95,6 %	82,7 %	56,9 %	27,5 %	8,5 %	1,4 %

Matemātikas izglītībai Eiropā veltīta pētījuma priekšvārdā Eiropas Komisijas (EK) izglītības, kultūras, daudzvalodības un jaunatnes lietu komisāre A. Vasiliu (*Androulla Vassiliou*) uzsver, ka ES 15 % mērķi var sasniegt, ja izglītības jomā strādājošie kopā noteiks gan esošos šķēršļus un problemātiskās jomas, gan efektīvas pieejas šo šķēršļu pārvarēšanai (Eurydice, 2011). Matemātiskās kompetences jautājums aizvadītajā desmitgadē ES politikas līmenī ir kļuvis par vienu no izglītības svarīgākajām prioritātēm. Atbilstoši Eurydice pētījumam, pēdējos gados, bet jo īpaši kopš 2007. gada, pārliecinošs vairākums Eiropas valstu pārskatīja matemātikas mācību programmas, ieviešot uz rezultātu balstītu pieeju, kur fokuss ir uz skolēnu kompetences un prasmju attīstību, nevis uz teorētiskām zināšanām.

2018. gadā 30 % darba piedāvājumu kā minimālās prasības izglītībai bija norādīta pamata vai vidējā izglītība. Šim īpatsvaram ir tendence samazināties, ko izraisa automatizācija. Turklāt, pieprasījums pēc augstākās izglītības pieaug straujāk, nekā prognozēts vēl 2010. gadā (Blumenstyk, 2020). Augstskolas apzinās matemātiskās kompetences trūkumu skolēniem kā problēmu, kas apgrūtina sekmīgu augstākās matemātikas kursu apguvi augstskolā un palielina studijas pametušo pirmkursnieku skaitu. J. Lanmere apgalvo, ka mūsdienās matemātika skolās un universitātēs neveido stabilu pamatu tālākajai karjerai. Turklāt matemātika, ko māca skolās un augstskolās, un matemātika, kas nepieciešama un var tikt pielietota dažādās dzīves situācijās, savā starpā nav saistītas (Lanmere, 2014).

Par nepietiekamu skolēnu matemātisko kompetenci satraucas ne tikai izglītības politikas veidotāji un augstskolas, bet arī darba devēji, kuri šodienas skolēnos saredz potenciālos kolēģus nākotnē. 2012. gada oktobrī viens no atpazītākajiem un autoritatīvajiem preses izdevumiem par ekonomiku pasaulē - *Forbes* publicēja pētījumu par 2013. gadā darba devēju desmit visaugstāk novērtētām kompetencēm (Casserly, 2012). Starp šīm kompetencēm sešas vistiešākajā mērā var saistīti tieši matemātikas un dabas zinātņu priekšmetu mācību stundās. Šīs kompetences ir:

- ✓ kritiskā domāšana;
- ✓ prasmes analizēt un secināt;
- ✓ informācijas un komunikācijas tehnoloģijas pārzināšana;
- ✓ matemātikas zināšanas;
- ✓ spēja analizēt procesus un sistēmas, sadarboties;
- ✓ programmēšanas pamati.

Turklāt matemātikas zināšanas, ar kurām pētījuma autori saprot zināšanas aritmētikā, algebrā, ģeometrijā, vienkāršākos galvas rēķinus un statistiku, ir atrodamas sešās no desmit visvairāk pieprasītu darbavietu vakancēm. 2020. gadā *Forbes* publicētajā darba devēju visaugstāk novērtēto kompetenču sarakstā kritiskā domāšana atradās augstajā 3. vietā, piekāpjoties vienīgi izaugsmes domāšanai un mūžizglītībai (Forbes, 2020).

Faktiski skolēni, kuriem vidusskolas laikā neizveidojas pienācīga matemātiskā kompetence, nākotnē nevarēs līdzvērtīgi konkurēt uz lielāko daļu darbavietu, kas šiem skolēniem ilgtermiņā apgrūtinātu karjeras veidošanu. Turklāt ne visi skolēni pat sāk iegūt vidējo izglītību. Latvijas Centrālās statistikas pārvaldes dati rāda, ka pēdējos gados strauji pieauga to pamatskolas beidzēju īpatsvars, kuri neturpina mācības. 2017. gadā šādu pusaudžu bija 3,2 %, savukārt 2019. gadā – jau 6,6 %, kas ir augstākais rādītājs pēdējos 12 gados (CSP, 2020).

Dati par 9. klases matemātikas eksāmenu rezultātiem ir pieejami katrā Latvijas skolā, taču netiek konsekventi apkopoti un analizēti valsts mērogā. Tikmēr 12. klases matemātikas centralizētā eksāmena (CE) rezultāti ierasti ir viszemākie vai otrie zemākie valstī starp visiem mācību priekšmetiem. No 2014. gada līdz 2019. gadam matemātikas CE rezultāts ir nemitīgi kritis, no vidēji 43,6 % nokrītot līdz 32,7 %, kas bija zemākais rezultāts pēdējos 11 gados. 2020. gadā eksāmena rezultāts pakāpies līdz 35 % (LETA, 2019).

Skaidrojot zemos skolēnu rezultātus, Latvijas Matemātikas skolotāju apvienības viceprezidents Arnis Rudiņš akcentēja zemās prasības – lai iegūtu sertifikātu par eksāmena nokārtošanu, nepieciešams pārvarēt 5 % barjeru. Šis skaidrojums izraisīja neizpratni sabiedrībā, jo tāds pats zināšanu minimums noteikts visos eksāmenos, arī, piemēram, krievu valodas eksāmenā, kur vidējais rezultāts katru gadu ir ap 70 % (LETA, 2014b). Par eksamināciju atbildīgais Valsts izglītības satura centrs (VISC) skaidroja, ka vidējos rezultātus valsts līmenī pasliktina profesionālo izglītības iestāžu un vakarskolu, kas mācās pēc cita mācību stundu plāna, audzēkņu sniegums (LETA, 2019).

Pusaudžu matemātiskās kompetences pētīšanas pamatojums ir arī Latvijas skolēnu zināšanu kritums, salīdzinot 4. klašu un 8. – 9. klašu skolēnu rezultātus PISA testos. Ja Latvijas 4. klašu skolēnu rezultāti matemātikā 2018. gadā bija vieni no augstākajiem Eiropā, tad devītklasnieku panākumi ir krietni pieticīgāki – tie ir Eiropas vidējā līmenī, turklāt izcilnieku īpatsvars ir divtik mazāks nekā vidēji Eiropā. PISA testā uzdevumi sastādīti tā, lai pārbaudītu, kā skolēni izmanto skolā iegūtās zināšanas, risinot konkrētas situācijas, ar kādām var nākties saskarties arī dzīvē. Pētījumā secināts: daļa skolēnu neprot atrisināt pat elementārus uzdevumus ar reālās dzīves kontekstu, proti, uzrāda nulles līmeni matemātikā. Latvijā šo skolēnu īpatsvars ir 4,4 %, Igaunijā - vairāk nekā divas reizes zemāks – 2,1 % (OECD, 2019a).

Apzinoties, ka pamatizglītības loma vairs nav dot tikai zināšanas un izpratni, kā tas formulēts līdz šim spēkā esošajā izglītības standartā, un lai nodrošinātu izglītības kvalitātes paaugstināšanu, Latvijas Izglītības un zinātnes ministrija (IZM) 2014. gadā bija uzsākusi sākumā diskusijas, pēc tam – darbu pie jauna, kompetenču pieejā balstīta vispārējās izglītības satura izstrādes. Jaunā pamatskolas mācību satura izstrāde, aprobācija un uzlabošana tika pabeigta 2019. gada maijā, kad visā Latvijā notika VISC īstenotā projekta “Kompetenču pieeja mācību saturā” jeb projekta *Skola2030* rīkoti labās prakses piemēru un pieredzes apmaiņas semināri. Uzlabotā satura izstrādi pabeidza, publicējot jauno pamatizglītības standartu un programmas paraugus, kas tika skaidroti semināros. Pilnveidoto mācību saturu un pieejas pakāpeniski ievieš visās Latvijas skolās no 2020. gada 1. septembra (Klūga, Krieviņš, 2018).

To, ka Latvijas matemātikas skolotāji vairākumā gadījumu patlaban nestrādā atbilstoši kompetenču pieejai, bet gan māca faktus un pielietojumu standarta situācijās, apliecina vismaz četri neatkarīgi avoti.

1) OECD skolēnu sasniegumu starpvalstu salīdzinošais pētījums (Geske, Grīnfelds, Kangro, Kiseļova, 2016).
2) VISC pilotprojekts ar kompetencēs balstītu diagnosticējošu darbu matemātikā 8. klasei. Skolēniem ir zināšanas, taču trūkst kompetences, piemēram, pielietot šīs zināšanas vai skaidrot savu domu gaitu (Vilciņš, 2015). Tam ir izskaidrojums – lai gan teorijā aprakstīts, ka uzdevumiem algoritma trenēšanai vajadzētu veidot aptuveni trešdaļu satura, kas tiek risināts stundā, bet pārējiem uzdevumiem jāveido izpratne, tomēr Latvijas pamatskolu matemātikas skolotāji algoritma apguvei velta divas trešdaļas uzdevumu (Lāce, 2010; Namsone, 2015). Rezultātā skolotājiem rodas subjektīvs, taču maldīgs priekšstats, ka skolēni ir labi sapratuši apgūstamo mācību saturu, taču ilgākā laika posmā skolēniem bez pietiekama akcenta uz izpratni apgūto algoritmu ir grūtāk atcerēties un lietot.
3) Matemātikas centralizētā eksāmena rezultāti, kas dažādos griezumos (pēc skolu tipa, urbanizācijas, skolēnu dzimuma u. c.) tiek publicēti VISC mājaslapā internetā www.visc.gov.lv
4) Dabaszinību un matemātikas projekta (DZM) pētījums par skolotāju darba metodēm (Namsone, 2015).

Lai risinātu šo situāciju, 2020. gadā Latvijā ieviesti jauni pamatizglītības un vidējās izglītības standarti. Šo standartu un programmu paraugu izstrādē akcentēta paradigmas maiņa pedagoģijā, akcentu pedagoģiskajā pieejā liekot uz skolēnu zināšanu konstruēšanu, pētniecību, radošumu un produktīvu darbību pretstatā gatavu zināšanu nodošanai un atprasīšanai.

Ministru kabineta (MK) noteikumos Nr. 747 par valsts pamatizglītības standartu un pamatizglītības programmu paraugiem, kas stājās spēkā 2020. gada 1. septembrī, matemātiskā kompetence ir nodēvēta par matemātikas mācību jomas pratību (MK, 2018). Matemātikas mācību jomas pratības aprakstā var saskatīt norādes uz matemātisko kompetenci: problēmu risināšanu, modelēšanu, matemātiskās valodas lietošanu un citas. Detalizēti aprakstītie sasniedzamie rezultāti atspoguļo daļu no matemātiskās kompetences.

Pusaudžu matemātiskās kompetences izpētes aktualitāti pamato arī tas, ka gan Latvijā, gan pasaulē nav vienprātības par to, kas ir kompetence un matemātiskā kompetence. Jēdzienu **kompetence** pētījuši D. Vuds (*David Wood*), D. Dubois (*David Dubois*), H. Gārdners (*Howard Gardner*), P. Tafs (*Paul Tough*), A. Rauhvargers, T. Koķe, I. Maslo, R. Meltons (*R. Melton*), R. Vaits (*Robert W. White*), T. Armstrongs (*Thomas Armstrong*), N. Čomskis (*Noam Chomsky*), V. Bariss, I. Riemere, I. Tiļļa, R. Krika (*Ruth Deakin Crick*), D. Maklelands (*David McClelland*), R. Boiatzis (*Richard Eleftherios Boyatzis*), H. D. Kublers (*Hans-Dieter Kübler*) un daudzi citi (Armstrong, 2017; Bariss, 2009; Boyatzis, 2006; Chomsky, 1965; Crick, 2008; Dubois, 2004; Gardner, 1993; Koķe, 2003; Kübler, 1996; Maslo, 2005; McClelland, 1973; Melton, 1997; Rauhvargers, 2008; Riemere, 2013; Tiļļa, 2005; Tough, 2014; White, 1959; Wood, 1998). Minētie zinātnieki pētījuši kompetences jēdzienu dažādos kontekstos un ar dažādiem mērķiem, tādēļ likumsakarīgi nonāca pie atšķirīgiem kompetences traktējumiem. Rezumējot, Latvijā un pasaulē šobrīd nav vienotas izpratnes par matemātisko kompetenci. Dažādos avotos atšķiras uzskaitījumi, kas skolēnam jāzina, jāprot un jādara.

Dž. Hatī (*John Hattie*) pētījumā, kurā analizēti 25 gados dažādās pasaules valstīs publicēti pētījumi par skolēnu izglītošanās pieredzi ietekmējošiem faktoriem, ir secināts, ka tieši skolotājam (līdzās skolēna sociālajiem apstākļiem un iepriekšējām zināšanām) ir lielākā ietekme uz skolēna sasniegumiem (Hattie, 2012), tādēļ šajā promocijas darbā līdzās pusaudžiem, daļa uzmanības veltīta arī skolotāju uzskatiem un darbībai.

Rezumējot, visi pusaudžu izglītības procesā iesaistītie pauž vienprātību par to, ka ir ļoti svarīgi kopīgi strādāt pie pusaudžu matemātiskās kompetences stiprināšanas, taču konkrētu iniciatīvu ieviešana norit samērā gausi. No tā izriet **pētījuma problēma** – kā veidojas pusaudžu matemātiskā kompetence un kā vērtēt pusaudžu matemātisko kompetenci daudzstrauji mainīgajā pasaulē, kad mainās vide, it sevišķi - digitalizācijas ietekmē, mainās skolēni, darba tirgus prasības u. c. faktori. Matemātiskās kompetences veidošanās vienmēr ir bijusi aktuāla problēma, taču joprojām ir maz pētīts, kas ir pusaudžu matemātiskā kompetence un kā to vērtēt.

No iepriekš minētā seko darba **pedagoģiskā aktualitāte**:

pedagoģiskajā vidē nav vienprātības par matemātiskās kompetences saturu, lai arī tā ir vairākos Eiropas izglītības dokumentos noteikta kā viena no pamatkompetencēm; līdz ar to ir nepieciešamība izpētīt pusaudžu matemātiskās kompetences saturu, ņemot vērā kompetenču pieejas ieviešanu Latvijas vispārizglītojošās skolās.

Pētījuma **praktiskā aktualitāte:**

skolu praksē notiek pāreja uz skolēncentrētām mācībām, zināšanu konstruēšanu, radošuma attīstību, kas veicinās skolu beidzēju konkurētspēju tālākās dzīves gaitās, bet starptautiskie pētījumi un centralizēto eksāmenu rezultāti uzrāda samērā viduvēju pusaudžu matemātiskās kompetences līmeni; tādēļ ir nepieciešams izpētīt pusaudžu matemātiskās kompetences veidošanos un kritērijus pusaudžu matemātiskās kompetences vērtēšanai.

Promocijas darba zinātniskās kategorijas

Pētījuma objekts

Mācību process matemātikā pamatskolas klasēs.

Pētījuma priekšmets

Pusaudžu matemātiskā kompetence.

Pētījuma mērķis

Izpētīt pusaudžu matemātiskās kompetences būtību un izstrādāt teorētiski pamatotu pusaudžu matemātiskās kompetences veidošanās didaktisko modeli un vērtēšanas kritērijus.

Pētījuma jautājumi

Lai pilnveidotu pusaudžu matemātiskās kompetences veidošanos, veicot teorētiskās literatūras un avotu analīzi un matemātikas mācību procesa izpēti, ir formulēti šādi pētījuma jautājumi:

1) Kāds ir pusaudžu matemātiskās kompetences saturs?
2) Kas ietekmē pusaudžu matemātiskās kompetences veidošanos pedagoģiskajā procesā?

Pētījuma uzdevumi

1) Teorētiski analizēt pedagoģisko un psiholoģisko literatūru par kompetencēm, matemātisko kompetenci, pusaudžu mācīšanos un matemātikas mācību procesu.
2) Izstrādāt pusaudžu matemātiskās kompetences veidošanās didaktisko modeli un noteikt kritērijus kompetences vērtēšanai.
3) Veikt empīrisko pētījumu par pusaudžu matemātiskās kompetences veidošanos pedagoģiskajā procesā.
4) Izstrādāt rekomendācijas pusaudžu matemātiskās kompetences veidošanās sekmēšanai pedagoģiskajā procesā.

Pētījuma metodes

1) Teorētiskās metodes
   - Pedagoģiskās un psiholoģiskās literatūras analīze.
   - Dokumentu analīze (Latvijas un Eiropas Savienības izglītības jomu reglamentējoši likumi un noteikumi, Eiropas Komisijas rekomendācijas un vadlīnijas).
2) Empīriskās metodes
   - Datu ieguves metodes:
     - Pusaudžu un skolotāju anektēšanas.
     - Pedagoģiskā novērošana.
     - Daļēji strukturētas fokusgrupu diskusijas ar pusaudžiem un skolotājiem.
     - Ekspertu intervijas.
   - Datu apstrādes un analīzes metodes:
     - Aprakstošās statistikas un grafiskās metodes, secinošās statistikas metodes (mainīgo vērtību sadalījums, centrālās tendences un variācijas rādītāji, šķērstabulas, Spīrmena pāru korelācijas tests).
     - Datu ticamības pārbaude (Kronbaha alfa koeficients u. c.).
     - Kvalitatīvo datu tematiskā analīze (datu reducēšana, atspoguļošana un aprakstošā analīze).

Pētījuma teorētiskais un metodoloģiskais pamats

Pētījuma metodoloģiskie pamati balstīti humānisma koncepcijā, kas tiek īstenota konstruktīvisma un kompetenču teorijas pieejā, izmantojot pusaudžu psiholoģijas un fizioloģijas atziņas (Amonašvili, 2014; Barrett, 2015; Piaget, Inhelder, 1999).

- Konstruktīvisma atziņa, ka pusaudzis organizē savu individuālo pieredzi atskaites sistēmās, kuras palīdz iepazīt apkārtējo pasauli (Armstrong, 2017; Bariss, 2009; Boyatzis, 2006; Bruner, 1968; Chomsky, 1965; Crick, 2008; Dubois, 2004; Kluge, Seebold, 2002; Koķe, 2003; Kübler, 1996; Lāce, 2010; Maslo, 2005; McClelland, 1973; Melton, 1997; Rauhvargers, 2008; Riemere, 2013; Tiļļa, 2005; Tough, 2014; Upīte, 2013; White, 1959), kā arī princips, ka skolotājs nevar iemācīt skolēnu – tikai skolēns var pats iemācīties, jo zināšanas nevar nodot no viena cilvēka otram, bet skolēns vienīgi pats var tās radīt vai konstruēt (Kahneman, 2011; Piaget, 1928; Wood, 1998). Darbā izmantota konstruktīvisma skolotājam ierādītā loma – radīt skolēnam tādu mācību vidi un situācijas, kurās skolēns pats varētu veidot zināšanas (Gardner, 2014; Hattie, 2012; Vigotskis, 1934).

- Humānās pedagoģijas atziņas par pusaudža un skolotāja sadarbību mācību procesā. Pētījumam izvēlēta pozitīvisma interpretatīvā pētīšanas paradigma, kas atbilst humānās pedagoģijas būtībai, jo pauž interesi par ikvienu indivīdu un palīdz katram patstāvīgi attīstīt kompetenci (Amonašvili, 2014; Montessori, 1914; Tawil, Harley, 2004; Ушинский, 1867).
- Kritiskās pedagoģijas atziņas par virzību uz pusaudžu pašattīstību, neatkarību mācību procesā, respektējot citu viedokļus (Giroux, Freire, McLaren, 1988; Freire, 1997; Hattie, 2012; Hooks, 2010; Kincheloe, 2008; Freire, Macedo, 1987; Shor, 1996; Steinberg, Cannella, 2014).
- Kompetenču teorijas atziņas par kompetences un, precīzāk, matemātiskās kompetences būtību, struktūru, komponentēm un iespējām tās mērīt (Casserly, 2014; Gardner, 1993; Geske, Grīnfelds, Kangro, Kiseļova, 2013; Kangro, 2010; Laursen, 2010; Niss, 2011; Niss, Højgaard, 2019; Turner, 2011; Zeidmane, Vintere, 2013; Wood, 1998).

Pētījuma bāze

193 pusaudži no 3 Rīgas un Pierīgas skolām.

3 matemātikas skolotāji no Mārupes Valsts ģimnāzijas.

2 eksperti, kuri pārstāv Latvijas Universitātes (LU) Fizikas, matemātikas un optometrijas fakultāti, LU Starpnozaru izglītības inovāciju centru un VISC īstenoto projektu “Kompetenču pieeja mācību saturā” jeb *Skola2030*.

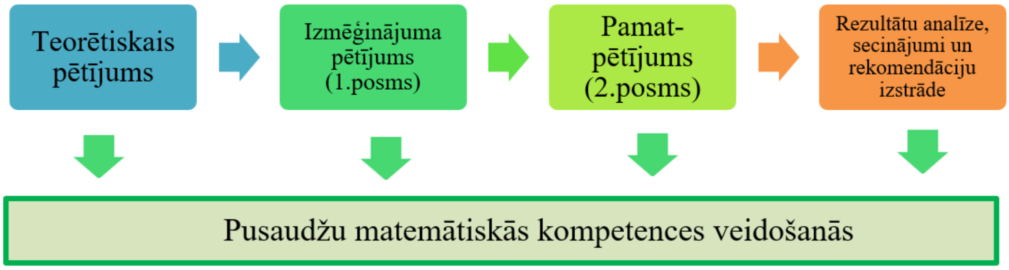
Pētījuma robežas

Pusaudži vecumā 14 – 16 gadi, kas atbilst vispārizglītojošo skolu 8. un 9. klašu skolēniem. Vecums izvēlēts galvenokārt divu iemeslu dēļ. Pirmkārt, lai empīriskajā daļā iegūtie dati būtu salīdzināmi ar PISA testa rezultātiem, jo tajā piedalās tieši 15 gadīgi pusaudži. Otrkārt, tas ir vecums, kad pusaudži sāk apzināties savu iespējamo inženierzinātņu vai humanitāro izglītības virzienu un karjeras iespējas, tādēļ ir svarīgi tieši šajā vecumā pētīt, vai pusaudžiem ir pietiekama matemātiskā kompetence, lai viņi varētu izvēlēties turpmāko karjeras ceļu.

Pētījuma posmi

2014. – 2016. gads. Matemātikas mācību teorētiskā analīze, pusaudžu raksturojuma izpēte teorijā, matemātiskās kompetences skaidrojumi. Izstrādāta pusaudžu matemātiskās kompetences definīcija, matemātiskās kompetences veidošanās didaktiskais modelis un vērtēšanas kritēriji (*skat. 2. tab.*).

2. tabula. Pētījuma shematisks attēlojums

Kas				
Kad	2014. – 2016. gads	2016. un 2017. gads	2017. – 2019. gads	2019. – 2021. gads
Pētījuma izlase		41 astoto un devīto klašu skolēns, 14 stundu vērošana, 3 skolotāji	193 astoto un devīto klašu skolēni, 3 skolotāji, 2 eksperti.	
Pētījuma metodes	Teorētiska analīze	Anketēšana, fokusgrupas diskusija ar pusaudžiem, pedagoģiskā novērošana.	Anketēšana, fokusgrupas diskusijas, daļēji strukturētas intervijas.	Pamatpētījuma datu apstrāde un analīze ar programmu *IBM SPSS Statistics 22*: aprakstošās statistikas un grafiskās metodes, secinošās statistikas metodes, datu ticamības pārbaude, kvalitatīvo datu tematiskā analīze.
Rezultāts	Pusaudžu matemātiskās kompetences definīcija, pusaudžu matemātiskās kompetences veidošanās didaktiskais modelis un pusaudžu matemātiskās kompetences vērtēšanas kritēriji.	Skolēnu viedoklis par matemātikas mācīšanu un mācīšanos. Pedagoģiskās novērošanas pieraksti, kas ļauj labāk saprast skolēnu atbildes. Pārbaudīts pusaudžu matemātiskās kompetences veidošanās didaktiskais modelis un precizēti pusaudžu matemātiskās kompetences vērtēšanas kritēriji.	Novērtē pēc kritērijiem pusaudžu matemātisko kompetenci. Fokusgrupas diskusijā ar skolotājiem un intervijās ar ekspertiem: refleksija par pusaudžu matemātiskās kompetences veidošanās metodiskajiem, satura, vērtēšanas u. c. aspektiem.	Pamatpētījuma rezultātu analīzē balstīti secinājumi par pusaudžu matemātiskās kompetences veidošanos un rekomendācijas pusaudžu matemātiskās kompetences sekmēšanai.

2016. un 2017. gads. Veikta fokusgrupas diskusija pusaudžiem, pusaudžu anketēšana par matemātisko kompetenci un pedagoģiskā novērošana. Apzināts pusaudžu viedoklis par matemātikas mācīšanu, mācīšanos, iespējām veidot matemātisko kompetenci un motivāciju mācīties matemātiku.

2017. – 2019. gads. 193 astoto un devīto klašu skolēnu anektēšana, fokusgrupas diskusija ar skolotājiem un daļēji strukturētas intervijas ar ekspertiem ļāva iegūt daudzpusīgu un visaptverošu informāciju par pusaudžu matemātiskās kompetences veidošanās metodiskajiem, satura, vērtēšanas u. c. aspektiem, novērtēt pusaudžu matemātisko kompetenci.

2019. – 2021. gads. Pamatpētījuma datu apstrāde un analīze ar *IBM* programmu *SPSS Statistics 22*: aprakstošā statistika, korelācijas analīze ar Spīrmena testu, Kronbaha alfa tests u. c. Balstoties uz šiem rezultātiem formulēti secinājumi un izstrādātas rekomendācijas pusaudžu matemātiskās kompetences sekmēšanai.

Pētījuma zinātniskā novitāte

1. Veikta pusaudžu matemātiskās kompetences satura izpēte un izstrādāta pusaudžu matemātiskās kompetences definīcija.
2. Izstrādāts pusaudžu matemātiskās kompetences veidošanās didaktiskais modelis.
3. Izstrādāti pusaudžu matemātiskās kompetences vērtēšanas kritēriji un to līmeņi.

Pētījuma praktiskā novitāte

1. Veikta pusaudžu matemātiskās kompetences novērtēšana atbilstoši darbā izstrādātajam pusaudžu matemātiskās kompetences veidošanās didaktiskajam modelim un matemātiskās kompetences vērtēšanas kritērijiem.
2. Izstrādātas pētījuma datos balstītas rekomendācijas pusaudžu matemātiskās kompetences veidošanās veicināšanai.

Pētījuma rezultātu aprobācija

Zinātniskās publikācijas

1. **Vorobjovs, A.** (2020). *How to Measure Adolescents' Mathematical Competence*. // Rural Environment. Education. Personality. (REEP), Latvijas Lauksaimniecības Universitāte, Jelgavā 2020., 185. – 190. p.: Thomson Reuters Web of Science, Scopus, EBSCO, CABI, AGRIS. Available at: https://www.researchgate.net/publication/341275085_How_to_Measure_Adolescents%27_Mathematical_Competence
2. **Vorobjovs, A.** (2019). *Factors Affecting the Result of a Secondary School Math Exam*. // Rural Environment. Education. Personality. (REEP), Latvijas Lauksaimniecības

Universitāte, Jelgava, 2019., 203. – 209. p. Thomson Reuters Web of Science, Scopus, EBSCO, CABI, AGRIS. Available at: https://www.researchgate.net/publication/334541998_Factors_Affecting_the_Result_of_a_Secondary_School_Math_Exam

3. **Vorobjovs, A.** (2017). *Adolescents' Mathematical Competence Formation Influencing Factors*. // Rural Environment. Education. Personality. (REEP), Latvijas Lauksaimniecības Universitāte, Jelgava, 2017., 315. – 320.p. Thomson Reuters Web of Science, Scopus, EBSCO, CABI, AGRIS. Available at: https://llufb.llu.lv/conference/REEP/2017/Latvia-Univ-Agricult-REEP-2017_proceedings-315-320.pdf

4. **Ķestere, I., Vorobjovs, A.** (2016). Džons Djuī un Latvija vai izglītības reformatori un politiskā vara. *The exile of John Dewey from Latvian pedagogy discourse in the Soviet years*. In honor of the 100th anniversary of John Deweys' book *Democracy and Education: An Introduction to the Philosophy of Education*. "Il mio Dewey. Riflessioni sull'eredità deweyana." Editor Luciana Bellatalla. Anicia (Roma).

Zinātniskās konferences

1. 2020. gada 8. – 9. maijā Latvijas Lauksaimniecības universitātes starptautiskā zinātniskā konference "Rural environment. Education. Personality" (REEP). Referāts: "How to Measure Adolescents' Mathematical Competence" (Jelgava, Latvija).
2. 2019. gada 10. – 11. maijā Latvijas Lauksaimniecības universitātes starptautiskā zinātniskā konference "Rural environment. Education. Personality" (REEP). Referāts: "Factors Affecting the Result of a Secondary School Math Exam" (Jelgava, Latvija).
3. 2017. gada 12. – 13. maijā Latvijas Lauksaimniecības universitātes starptautiskā zinātniskā konference "Rural environment. Education. Personality" (REEP). Referāts: "Adolescents' Mathematical Competence Formation Influencing Factors" (Jelgava, Latvija).

1. Kompetences jēdziena attīstība

Kompetences jēdzienam ir sena vēsture. Kalifornijas Universitātes profesori, brāļi Huberts un Stjuarts Dreifusi (*Hubert L. Dreyfus, Stuart E. Dreyfus*) izpētīja, ka mūsdienu izpratnē jēdziena "kompetence" lietojums sakrīt ar Rietumu kultūras pirmsākumiem, kad sengrieķu filozofs Sokrāts centās aprakstīt kādas jomas eksperta prātā izveidojušos zināšanu un noteikumu kopumu, lai varētu pamatot mākslīgā intelekta izveides iespējamību (Dreyfus, Dreyfus, 1997).

Svešvārdu vārdnīcās figurē divas versijas par šī jēdziena rašanos. Vārds varētu būt darināts no latīņu valodas vārda *competentia* – piekritība, atbilstība, sagadīšanās. Šajā kontekstā mūsdienās jēdziens tiek interpretēts divējādi: juridiski – iestādes vai amatpersonas pilnvaru apjoms; savukārt zināšanu un prasmju kontekstā – lietpratība, plašas zināšanas, izpratne kādā jomā, jautājumā vai jautājumu kopā (Svešvārdu vārdnīca, 1999). Otrs skaidrojums saista šā vārda izcelsmi ar latīņu vārdu *competere* – atbilst, derēt, censties pēc kaut kā (Kübler, 1996). Tātad Senajā Grieķijā kompetence bija saistīta tieši ar profesionālo darbību un apzīmēja darbinieka atbilstību viņam uzticēta darba veikšanai. Šāds skaidrojums saglabājās daudzus gadsimtus.

Laika gaitā šo jēdzienu sāka pārņemt dažādās nozarēs. Vispirms – 18. gadsimtā – tiesību zinātnē, vēlāk bioloģijā, ģeoloģijā, valodniecībā, motivācijas psiholoģijā, ekonomikā, personālvadībā, socioloģijā, komunikācijas zinātnēs un daudzās citās. Piemēram, Bleka juridisko terminu vārdnīca, kas ir visplašāk lietotā juridiskā vārdnīca ASV, kompetenci jurisprudencē skaidro kā tiesisku pazīmi (piemēram, likumīgi atļautais vecums), pilnvaras vai spējas; garīgo spēju apzināties savas rīcības būtību un sekas (Garner, 2019). Tikmēr Vācijā izdotā etimoloģijas vārdnīcā ir iekļauts atšķirīgs skaidrojums – kompetence jurisprudencē ir valsts iestādes vai amatpersonas skaidri norobežojamu pilnvaru, tiesību un pienākumu apjoms (Kluge, Seebold, 2002). ES terminu vārdnīcā kompetence ir konkrēts izpildei paredzēts uzdevums vai darbības, izziņas joma (Valsts valodas aģentūra, 2014).

Bioloģijā kompetence ir apslēpta, piemītoša spēja, kuras attīstību veicina ārēja iedarbība (Avery, Macleod, McCarty, 1944). Šis skaidrojums saskan ar lietojumu pedagoģijā, jo arī tur pieņemts uzskatīt, ka kompetence ir apslēpta katrā indivīdā, tikai to jāprot attīstīt ar pareiziem pedagoģiskiem paņēmieniem. Savukārt, bioloģijas nozarē imunoloģijā kompetence ir embrija šūnu spēja reaģēt uz iedarbību, uzsākot imunitātes spējas attīstību (McCarthy et al., 1987).

Ekonomikā kompetence ir jautājumu loks, kurā kādam cilvēkam ir plašas zināšanas, pieredze (Grēviņa, 2000). Kompetence kā tikai zināšanas un pieredze pedagoģijā ir novecojis skatījums, kas vairs neatbilst mūsdienu strauji mainīgai pasaulei – par kompetenci pedagoģijā liecina arī prasmes savas zināšanas un pieredzi pielietot daudzveidīgās, arī nestandarta un nepazīstamās situācijās, kā arī pozitīva attieksme, pārliecība par savām spējām un daudzas citas pazīmes.

Personālvadībā kompetencei ir daudz skaidrojumu. Dažiem autoriem tās ir prasmes un īpašības, kas nodrošina izcilu darba izpildi (Albanese, 1989; Collin, 1989; Dubois, 2004). Nereti arī izglītībā vienkāršības un ērtības labad kompetences līmeņa novērtēšanu aizstāj ar skolēna mācību rezultātu testēšanu, kas faktiski ir tikai neliela daļa no skolēna kompetences. Šāda testēšana parasti neiekļauj, piemēram, tādas prasmes kā sadarbība, darbības plānošana ilgtermiņā, radoši problēmas risinājumi u. tml.

Izglītības līderības pētniece R. Krika (*Ruth Deakin Crick*) kompetenci skaidro kā sarežģītu zināšanu, prasmju, izpratnes, vērtību, attieksmju un vēlmju kombināciju, kas sekmē efektīvu cilvēka rīcību konkrētā nozarē vai sabiedrībā kopumā (Crick, 2008). Organizāciju teorētiķis R. Boiatzis (*Richard Eleftherios Boyatzis*) kompetenci saprot kā spēju kopumu, kas ir saistītu, taču atšķirīgu rīcību kopums, kura mērķis ir īstenot kādu konkrētu darbību vai nodomu (Boyatzis, 2006). Tā kā arī skola ir organizācija, diezgan sagaidāmi tieši pēdējie divi skaidrojumi visvairāk saskan ar aktuālāko kompetences izpratni pedagoģijā.

Kā redzams, kompetence ieguva ļoti dažādas, brīžam arī nesaistītas nozīmes. Rezultātā mainījās kompetences izpratne, sarunvalodā tā ieguva ļoti dažādas interpretācijas. Tas varētu izskaidrot, kādēļ mūsdienās cilvēki mēdz nodarboties ar jaunradi, piešķirot šim vārdam arvien jaunas nozīmes, atkarībā no situācijas: profesionālā kompetence, mediju kompetence, digitālā kompetence, sistēmas kompetence, kompetence darba pieredzes vietā u. tml.

1959. gadā vārds kompetence kā cilvēka snieguma motivēšanas koncepts pirmo reizi lietots amerikāņu psihologa R. Vaita (*Robert W. White*) publikācijā. Pretstatā tolaik angliski runājošās valstīs dominējošai Zigmunda Freida teorijai, ka cilvēka rīcību nosaka visvairāk tieši seksuālās dziņas un agresija, R. Vaits uzsvēra, ka cilvēkus motivē arī vēlme kļūt kompetentiem un ietekmīgiem. Vaits rakstīja, ka iepriekš izstrādātās motivācijas teorijas neizskaidro patiku pret izziņas darbību, tādēļ viņš ieviesa jēdzienu kompetence, lai uzsvērtu šīs darbības bioloģisko nozīmīgumu. Viņa darbā liela uzmanība pievērsta mācību procesa efektīvai saiknei ar vidi. Vaits konstatēja, ka bērns, pat nezinot mācību mērķi, jūt instinktīvu vajadzību iesaistīties mijdarbībā ar apkārtējo vidi un vajadzību pēc gandarījuma par šo procesu. Vaits šo emociju sauc par efektivitātes sajūtu (*the feeling of efficacy*) (White, 1959).

20. gadsimta septiņdesmitajos gados pedagoģija bija viena no pēdējām zinātnēm, kuras zinātniskajā literatūrā parādījās kompetences jēdziens. Līdz 20. gadsimta septiņdesmitajiem

gadiem izglītībā kompetence tika interpretēta šauri – kā sinonīms **prasmēm** (*skills*). Tā kā sabiedrība tolaik sagaidīja taustāmākas pārmaiņas izglītībā nekā prasmju nodēvēšanu citā, skanīgākā vārdā – kompetences, tad šis vārds ieguva negatīvu nokrāsu kā simbols formālismam (Maslo, Tiļļa, 2005).

Zīmīgi, ka arī salīdzinoši nesen Latvijas Terminoloģijas komisija ieteica angļu valodas vārdu *competences*, ja ar to tiek raksturots izglītības procesā iegūstamais mācību rezultāts, latviskot kā prasmes (Skujiņa, 2009). Pedagoģijā un psiholoģijā kompetence mūsdienās jau tiek skaidrota plašāk – šajās zinātnēs kompetence iekļauj zināšanas, prasmes un attieksmes.

Plašu atpazīstamību un lietojamību vārds kompetence ieguva 1973. gadā pēc D. Maklelanda (*David McClelland*) raksta, kurā viņš iesaka pārbaudīt cilvēka kompetenci, nevis inteliģenci (McClelland, 1973). Pirms šī raksta kompetences jēdziens plaši tika lietots galvenokārt sarunvalodā saistībā ar gatavību profesionālai darbībai, savukārt, izglītības jomā ar kompetenci tolaik saprata to pašu, ko šodien ar skolēnam sasniedzamajiem rezultātiem – prasmes, kas jāsasniedz mācību procesa beigās, tādēļ Maklelenda kompetenču modelis, ar kura palīdzību izvērtēja darbinieka atbilstību noteiktam amatam, bija novatorisks. D. Maklelands un N. Čomskis (Chomsky, 1965) līdzās kompetencei lietoja jēdzienu sniegums (*performance*) kā kompetences lietošanu konkrētā situācijā.

Būtisks pavērsiens kompetences jēdziena izpratnē izglītībā Eiropā notika 20. gadsimta astoņdesmitajos gados, kad ES valstis vienojās par Eiropas vienotā tirgus izveidi 1992. gada 31. decembrī. Atšķirībā no septiņdesmitajiem gadiem, kad kompetence lietota vien kā labskanīgāks un progresīvāks sinonīms vārdam "prasmes", lai radītu novitātes ilūziju, astoņdesmitajos gados kompetences pārdefinēšana sakņojās praktiskā, laikā ierobežotā un neizbēgamā vajadzībā noturēt ES dalībvalstu industriju panākumus vienotajā Eiropas tirgū. Priekšplānā izvirzījās kompetenta cilvēka attīstība kā svarīgākais starpvalstu konkurences nosacījums. Piemēram, Lielbritānijā tolaik gaidāmās pārmaiņas popularizēja ideju par kompetencēs balstītu izglītību. Uzdevums bija identificēt un definēt uz kompetencēm balstītus mācību standartus. Kompetences identificē, kas indivīdiem ir jāmāk izdarīt, lai parādītu, ka viņi ir sasnieguši nospraustos standartus. R. Meltons uzskata, ka kompetence iegūstama tikai darbībā – mācoties vai strādājot (Melton, 1997).

Kompetences būtību mēģinājuši formulēt arī vairāki Latvijas izglītības pētnieki. Viens no biežāk citētiem latviešu autora kompetences skaidrojumiem ir A. Rauhvargera definīcija, kas tapa, aprakstot ES kvalifikāciju ietvarstruktūras. A. Rauhvargers definēja kompetenci (*competence, competency*), lai varētu konkretizēt mācīšanās rezultātus (*learning outcomes*), uzskaitot, kas studējošajam jāzina, jāprot un jāspēj programmas vai tās daļas noslēgumā.

A. Rauhvargers kompetenci skaidro kā zināšanu, prasmju un attieksmju kopumu, kas kvalificē noteikta veida vai līmeņa uzdevumu veikšanai (Rauhvargers, 2008).

Otrs zināmākais kompetences skaidrojums ir profesores T. Koķes pētījumiem par mūžizglītības pedagoģiskajiem aspektiem formulētais, ka kompetence ir spēja, pamatojoties uz zināšanām, izvēlēties situācijai vai darbībai atbilstošākos līdzekļus un adekvāti rīkoties (Koķe, 2003).

Definīcijas saturiski ir saskanīgas, taču tajās ir viegli saskatīt kompetences definēšanas mērķi. A. Rauhvargers kompetenci definēja, lai identificētu kopīgo un atšķirīgo studiju rezultāta aprakstīšanā, tādēļ viņa skaidrojums ir izteikti fokusēts uz kompetences sniegto kvalifikāciju veikt noteiktus uzdevumus. Tikmēr T. Koķes definīcijā ir citi akcenti – tā ir krietni plašāka un vispārīgāka, kā jau pienāktos definīcijai, kas ir formulēta pētījumiem par nepārtraukto izglītību, kurai ir ārkārtīgi liela daudzveidība.

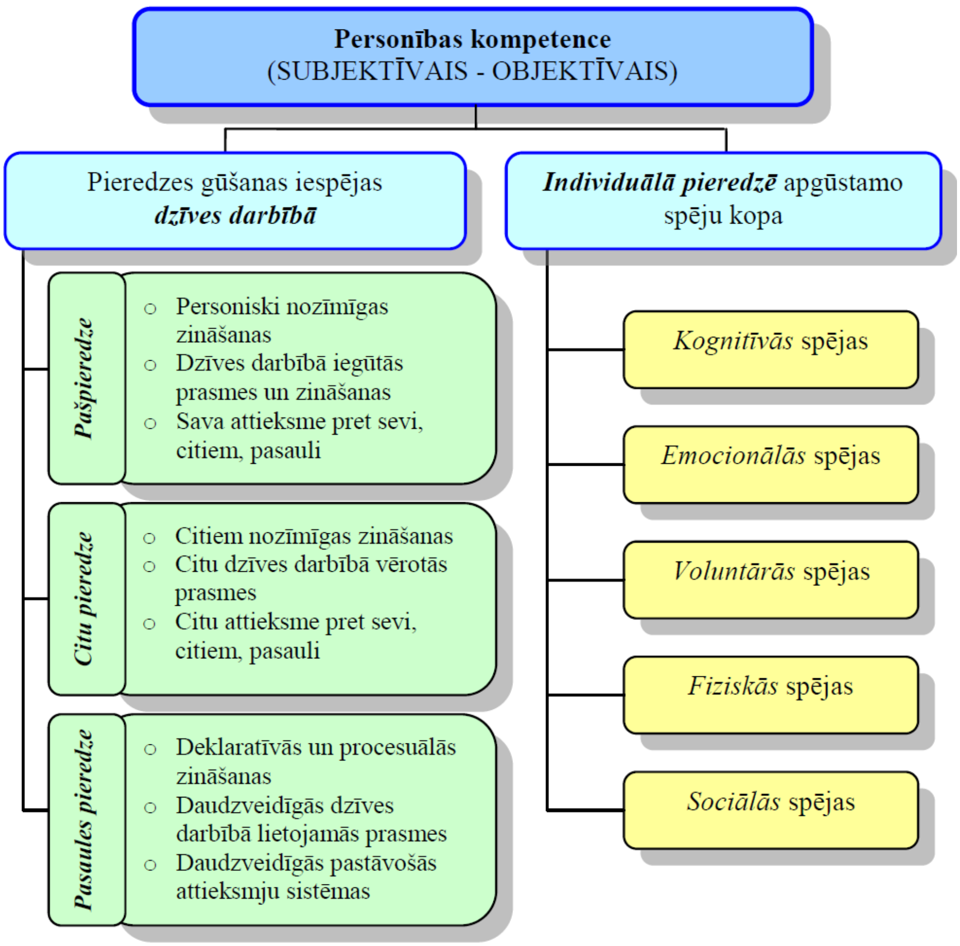
1.1. att. **Kompetences veidošanās process** (OECD, 2018b)

R. Andersone, pētot skolotāju profesionālo kompetenci, izšķir trīs kompetences saturu veidojošās komponentes. Šo pieeju skolēnu kompetenču pētīšanai izmanto arī Ekonomiskās sadarbības un attīstības organizācijas (OECD, *Organisation for Economic Co-operation and Development*) Starptautiskās skolēnu novērtēšanas programmas (PISA, *Programme for International Student Assessment*) pētījumā, kā arī skolēnu sasniegumu vērtēšanai patlaban šo pieeju cenšas ieviest Latvijas skolās arī kompetenču pieejā balstīta vispārējās izglītības satura projektā (*skat. 1.1. att.*):

- ✓ zināšanas, kā lietot teorijas;
- ✓ prasmes risināt problēmas;
- ✓ attieksmes, kas izpaužas kā atbildīga spēja pieņemt lēmumus, vadīt un veidot saskarsmi ar citiem cilvēkiem (Andersone, 2010).

Analizējot 2015. gada PISA testa rezultātus dabaszinātņu jomā, A. Kangro izvērsa šo pieeju kompetences skaidrojumam, papildinot to ar privāto, lokālo jeb nacionālo un globālo kontekstu gan šodienas, gan vēsturiskajā skatījumā, kam nepieciešama zināma izpratne par mācību priekšmetu un tehnoloģijām. Autors skaidro, ka skolēns lieto kontekstu, savukārt, attieksmes un zināšanas ietekmē skolēna darbību, jo viens no četriem faktoriem, kas nosaka attieksmi, ir interese par mācību priekšmetu (Kangro, 2016). Analīzes autors nošķir matemātisko kompetenci no skolēna prasmēm izvērtēt savu mācīšanās veidu, mācīšanās motivāciju, paņēmienus un attieksmi, kaut gan citi autori visas nosauktās prasmes uzskata par neatņemamu matemātiskās kompetences komponenti – pašrefleksiju (Hahele, 2005; Mencis, 2010).

V. Bariss kompetenci skaidro kā spēju demonstrēt zināšanu un prasmes pielietošanu, lai sasniegtu nepieciešamos darba rezultātus. Tā ir spēja atbilst prasībām nevis teorētiski, bet spēja darboties reālā darba vidē ar visām tai piemītošajām variācijām, attiecībām, konfliktiem u. c. Tātad kompetence jāsaprot kā demonstrēta spēja pielietot zināšanas un prasmi (Bariss, 2009).



1.2. att. **Personības individuālo kompetenci veidojošie elementi** (Kulberga, 2013)

Pētot uzņēmējdarbības vadītāja profesionālās kompetences pilnveidi, I. Kulberga ir formulējusi personības kompetenci, ar to saprotot katra cilvēka individuālo potenciālu jeb pieredzē iegūtās un pamatotās unikālās spējas (*skat. 1.2. att.*). Šī modeļa autore uzsver, ka šajā kontekstā kompetence ir saistīta ar darbību personiski nozīmīgu mērķu sasniegšanai.

I. Riemere secina, ka kompetence ir indivīda motivācija, spēja un prasme lietot viņa personas īpašības, spējas, apgūtās zināšanas un prasmes, attieksmes, lai sasniegtu izvirzīto mērķi vai veiktu noteiktus uzdevumu (Riemere, 2013).

Rezumējot iepriekš analizētos kompetences jēdziena skaidrojumus, visbiežāk kā galvenās kompetences komponentes ir izceltas tieši **prasmes un zināšanas**. Vienprātība gan beidzas, kad jāatbild uz jautājumu – kas tieši jāprot un jāzina cilvēkam, lai viņu uzskatītu kādā jomā par kompetentu.

Atsevišķi autori gūst ievērību ar to, ka savos darbos izceļ kādu vienu kompetences komponenti un konsekventi pamato, ka tieši tā ir primāra (Borba, 2009; Crawford, 2014; Dubois, 2018; Hahele, 2005; Kolmogorovs, 1988; Peterson, Seligman, 2004; Pólya, 1945; Tough, 2014). Piemēram, R. Hahele savā disertācijā izpētīja skolēnu **pašnovērtējumu** jeb **pašrefleksiju** mācību procesā (Hahele, 2005).

Latvijas Zinātņu akadēmijas Terminoloģijas komisija 2009. gadā lēma, ka termins *kompetence* latviešu valodā lietojams vienskaitļa formā un saturiski lietojams divās nozīmēs, kā tas atspoguļots „Pedagoģijas terminu skaidrojošajā vārdnīcā” (Pedagoģijas terminu skaidrojošā vārdnīca, 2000):

1) nepieciešamās zināšanas, profesionālā pieredze, izpratne kādā noteiktā jomā, jautājumā un prasme zināšanas un pieredzi izmantot konkrētā darbībā; personas (darbinieka) kompetenci vērtē apkārtējie cilvēki, sadarbības partneri, sabiedrība;
2) piekritība, tiesīgums (kādā jautājumā), pilnvaru kopums; sfēra, par ko ir uzdota atbildība, ņemot vērā personas izglītību, spējas, zināšanas un pieredzi attiecīgajā jomā.

Šī darba kontekstā atbilstošāks ir pirmais skaidrojums, jo tas pilnībā vai daļēji ietver visas trīs kompetences komponentes, par kurām pētnieku vidū ir vienprātība: zināšanas, prasmes un attieksmes. Šī skaidrojuma trūkums ir fokusēšanās uz zināšanu un pieredzes pielietojumu konkrētā darbībā, jo šāds šaurāks skatījums uz kompetenci raksturīgs 20. gadsimta beigām, bet pašreizējo izglītības aktualitāšu kontekstā svarīga ir prasme zināšanas un pieredzi pielietot daudzveidīgās dzīves situācijās. Otrais skaidrojums ir juridiskāks, tas vairāk der darbinieku atlasē vai darba efektivitātes izvērtēšanā, taču pusaudžu gadījumā vērtēt pilnvaru kopumu vai pieredzi attiecīgajā jomā visbiežāk ir pāragri.

Teorētiķu vidū nav vienprātības ne tikai par jēdziena *kompetence* skaidrojumu, bet arī par to, kā un kādēļ cilvēkam attīstās kompetences. 20. gadsimta sešdesmitajos gados Ž. Piažē (*Jean Piaget*) nāca klajā ar tolaik revolucionāru, tādēļ vairākus gadu desmitus nepieņemtu ideju, ka aktivitātes un pieredze, nevis valoda ir centrālais intelekta attīstībā (Piaget, Inhelder, 1999).

Ļ. Vigotskis (*Лев Выготский*) kompetenču attīstību saistīja ar valodu, tikmēr domāšana un valodas attīstība ir nošķirtas. Vigotskis piekrita Piažē izteiktam akcentam uz darbības nozīmīgumu (Vigotskis, 1934). A. Einšteins (*Albert Einstein*) uzskatīja, ka valodas prasmēm, visticamāk, nav ietekmes uz domāšanas mehānismu (Einstein, 1941).

Ž. Piažē intelektuālās attīstības teorija apgalvo, ka skolēns nevar aptvert konceptuālo sakarību starp praktisko aktivitāti un abstraktāku domāšanas līmeni, pirms nav sasniedzis noteiktu attīstības stadiju. Pēc Piažē teorijas cilvēka intelektuālai attīstībai ir šādas četras stadijas:

- ✓ sensomotorā stadija (no piedzimšanas līdz 2 gadu vecumam) – bērns pasauli izzina caur sajūtām un kustībām;
- ✓ pirmsoperacionālā stadija (no 2 līdz 7 gadu vecumam) – spēja domāt, reaģēt uz simboliem, atdarināšana, iztēle u. c.;
- ✓ konkrēto operāciju stadija (no 7 līdz apmēram 12 gadu vecumam) – var veikt loģisku darību ar objektiem, kas ir redzami un konkrēti;
- ✓ formālo operāciju stadija (sākot no apmēram 12 gadu vecuma) – var veikt loģiskas darbības ar abstraktiem jēdzieniem (Piaget, Inhelder, 1999).

Dž. Brūners (*Jeremy Bruner*) nepiekrita Piažē priekšstatam, ka bērnam jāsasniedz augstākā intelektuālās attīstības stadija, lai viņš varētu operēt ar abstraktiem jēdzieniem un mācētu vispārināt, aprakstīt ar modeli savā pieredzē novērotu situāciju. Viņš apgalvoja, ka skolas veltīgi izšķiež laiku, cenšoties saskaņot bērnu kognitīvās attīstības stadiju ar mācību priekšmetu satura sarežģītību. Tādējādi skolotāji kavē skolēnu mācīšanos, jo noteiktas tēmas tiek uzskatītas par pārāk sarežģītām un tiek mācītas, kad skolotājs uzskata, ka skolēni ir sasnieguši atbilstošu kognitīvo briedumu. Brūnera viedoklis bija, ka bērni jebkurā vecumā spēj saprast sarežģītu informāciju. Brūners arī atzīmēja, ka bērniem ir vajadzīgas veiksmīgi formulētas instrukcijas, lai viņi spētu savas aktivitātes transformēt par racionālo domāšanu (Bruner, 1960).

Kā piemēru tam, ka bērns var darboties abstraktās stadijas līmenī, kaut gan vecuma ziņā vēl ir konkrēto operāciju vai par pirmsoperacionālajā stadijā, liecina daudzi eksperimenti. Piemēram, eksperiments, kurā pirmsskolas vecuma bērns novēro, kā maisiņā pamīšus tiek pievienotas zaļas un sarkanas krāsas bumbiņas. Pēc Piažē teorijas bērnam šajā vecumā vajadzētu mācēt tikai atdarināt un reaģēt uz pazīstamu kontekstu, taču veiksmīgi piemeklēts, vizuāli vieglu uztverams demonstrējums un vajadzības gadījumā instrukcijas ļauj šim bērnam atrisināt kaut arī zemas grūtības pakāpes, tomēr formālo operāciju stadijai atbilstošu varbūtību vai kāda cita temata uzdevumu. Secinot, ka maisā ir vienāds skaits zaļo un sarkano bumbu, bērns faktiski demonstrē izpratni par lineāru funkciju (Wood, 1998).

Šajā darbā pētītas kompetences pusaudžiem, kuru vecums ir aptuveni 15 gadi. Atbilstoši Piažē teorijai, varētu domāt, ka šie skolēni ir formālo operāciju stadijā, taču daudzi pētījumi (Bruner, 1960; Fuson, 1992; Nunes, Schlieman, Carraher, 1993; Wolters, 1986) liek apšaubīt, vai šāds secinājums patiešām ir viennozīmīgs.

Matemātikā talantīgo bērnu pētījumi rāda, ka bērni arī jaunākā vecumā var sasniegt formālo operāciju stadiju kopumā, nevis tikai kādā specifiskā, apzināti radītā situācijā. Pētot 4. – 12. klašu skolēnu prasmes risināt verbālus uzdevumus, kuru risinājumā jāizdara loģiski spriedumi, 2016. gadā tika atklāts lineārs to skolēnu īpatsvara pieaugums, kuri risina šādus uzdevumus atbilstoši formālo operāciju stadijas kritērijiem no aptuveni 10 – 15 % 4. klasē līdz 80 % 12. klasē. Šis pētījums vienlaikus arī atklāja, ka arī pēc 12 gadu vecuma daļa jauniešu un pieaugušo dažādu iemeslu dēļ nesasniedz formālo operāciju stadiju (Singer, Sheffield, Freiman, Brandl, 2016).

Pāreja uz augstāku intelektuālās attīstības stadiju nav strikti izšķirama un visiem cilvēkiem universāla, taču pāreja uz formālo operāciju stadiju ir skaidrāka tajās zināšanu jomās, kurās pusaudzis ir īpaši kompetents. Vienu no šādiem kavējošiem iemesliem atklāja 2015. gada PISA pētījums par vienlīdzību izglītībā. Tajā pētīta formālo operāciju stadijas sasniegšana bērniem ar piederību dažādiem sociālajiem slāņiem. Pētījumā atklājies, ka pusaudži no turīgākām ģimenēm šo augstāko kognitīvās attīstības stadiju pēc Piažē sasniedz vidēji par pusotru gadu agrākā vecumā nekā pusaudži no nabadzīgām ģimenēm. Šī samērā krasā nobīde laikā pamatā tiek skaidrota ar atšķirīgo pieredzi lasīšanā, lasītprasmi un vārdu krājumu (OECD, 2016a). Šis pētījums apstiprina Vigotska uzskatu, ka valodai un videi ir būtiskākā loma skolēna intelekta attīstībā.

Vēl citā pētījumā analizēta korelācija starp cilvēka spēju atrisināt formālo operāciju stadijas uzdevumu un viņu emocionālo stāvokli. Pat cilvēki ar augstu intelektu ne vienmēr varēja atrisināt viņu spējām atbilstošu uzdevumu, ja tas viņiem šķitis pārāk atrauts no realitātes, ja cilvēks bija pārguris, garlaikots, satraukts vai noskumis (Kahneman, 2011).

A. Dahins (*А. Дахин*) kompetenci skaidro kā summatīvu rezultātu, kas piemīt visiem izglītības procesa dalībniekiem, kā arī vērtību, kas bagātina pedagoģisko kultūru. Dahins saista kompetenci ar indivīda spēju kopumu, kas tai ļauj adaptēties ātri mainīgajā pasaulē un ietekmēt nākotni ar profesionalitāti, efektīvu pašrealizāciju (Дахин, 2009). Šis skaidrojums saskan ar VISC īstenotā projekta "Kompetenču pieeja mācību saturā" jeb *Skola2030* autoru izpratni, ka kompetence ir indivīda gatavība dzīves darbībai mūsdienu mainīgajā pasaulē, spēja izmantot zināšanas, prasmes un paust attieksmi, risinot problēmas mainīgās, reālās dzīves situācijās, un spēja adekvāti lietot mācīšanās rezultātu noteiktā kontekstā.

Dahins uzsver globalizācijas lomu, kas aktualizē kompetences pieeju izglītībā, jo atsevišķām izglītības sistēmām nākas sekot līdzi pedagoģiskās domas maiņai pasaulē, ar atvērtību reaģējot uz pārmaiņām, pārņemot labo praksi un operatīvi veicot nepieciešamos uzlabojumus (Дахин, 2009).

Lai gan jēdzienam „kompetence" nav vienota skaidrojuma, tomēr ir precīzi definēts, kas ir mūžizglītības pamata kompetences, kuras 2005. gadā formulēja ES Padome. Zīmīgi, ka ES Padomes mājaslapas sadaļā latviešu valodā pamata kompetences (*key competencies*) latviskotas kā mūžizglītības pamatprasmes, kaut gan pamatprasmes angļu valodā ir *basic skills*, nevis *competencies*. Ar tām saprot vispārējas prasmes un iemaņas, kas ļauj cilvēkam saprast situāciju, sasniegt rezultātus personīgās un profesionālās dzīves vides kontekstā un kas nodrošina efektīvu indivīda mijiedarbību, veicot profesionālo darbību un starppersonu saskarsmē. Kopumā ir noteiktas astoņas galvenās kompetences:

- ✓ komunikācija dzimtajā valodā;
- ✓ komunikācija svešvalodās;
- ✓ matemātiskā kompetence un pamata kompetence zinātnē un tehnoloģijās;
- ✓ digitālā (datoru, multimediju, IKT) kompetence;
- ✓ mācīties mācīties prasme;
- ✓ starppersonu, starpkultūru, sociālā un pilsoniskā kompetence;
- ✓ uzņēmība;
- ✓ kulturālā izpausme (European Commission, 2007).

Rezumējot, šajā nodaļā hronoloģiski izklāstītā kompetences jēdziena ienākšana dažādu zinātņu terminoloģijā izskaidro ļoti atšķirīgās interpretācijas, arī dažādo attieksmi un ekspektācijas, dzirdot šo vārdu. Kā minēts, vairāki mūsdienu autori nonāk pie atziņas, ka vispārīgi, atrauti no konteksta kompetenci definēt nav iespējams vai nav lietderīgi to darīt. Tā vietā kompetence tiek definēta atsevišķās zinātnēs un nozarēs, piemēram, pedagoģijā vai izglītībā, un vēl sīkāk – apakšnozarēs vai atsevišķos kontekstos. Kā piemēru var minēt ES Padomes izstrādāto astoņu pamata kompetenču modeli (European Commission, 2007), starp kurām iekļauta arī matemātiskā kompetence, par kuru plašāk aprakstīts 2. nodaļā.

2. Pusaudžu matemātiskā kompetence

Eiropā publicētajos pētījumos (Laursen, 2010; OECD, 2016; Niss, Højgaard, 2019; Turner, 2011 u. c.) ir sastopami daudzi, atšķirīgi matemātiskās kompetences (dažos avotos – matemātisko kompetenču) skaidrojumi. Visbiežāk sastopams ir skaidrojums, kurā matemātiskā kompetence interpretēta, uzskaitot konkrētas iemaņas, prasmes un rīcību (Lee, 2016). Respektablā Ekonomiskās sadarbības un attīstības organizācijas (OECD, *Organisation for Economic Co-operation and Development*) Starptautiskās skolēnu novērtēšanas programmas (PISA, *Programme for International Student Assessment*) pētījuma autori (Geske, Grīnfelds, Kangro, Kiseļova, 2016) un pamatskolu beidzēju analītiskās kompetences pētniece A. Fernāte (Fernāte, 2011) matemātisko kompetenci definē vispārīgi – kā spēju izmantot zināšanas un prasmes darba un mācību situācijās un profesionālajā un personīgajā attīstībā.

2.1. Pusaudžu raksturojums

Gan šī promocijas darba, gan PISA pētījuma bāze ir 15 gadus veci pusaudži. PISA pētījuma mājaslapā tā autori izvēlēto vecumu skaidro primāri ar to, ka lielākajā daļā pasaules valstu 15 gadu vecumā skolēni pabeidz obligāto izglītības pakāpi, tādēļ šo pusaudžu rezultātus 78 valstīs, kurās šis tests tika veikts 2018. gadā, ir objektīvi salīdzināt.

Otrkārt, 15 gadus veciem pusaudžiem ir jāpieņem lēmums, vai un kur turpināt izglītību. Eiropā vidēji katrs desmitais pusaudzis un Latvijā 6,6 % pamatskolas beidzēju izvēlas neturpināt izglītību (CSP, 2020), tādēļ pēc PISA pētījuma autoru domām pusaudžiem šajā vecumā jāiegūst svarīgākās pieaugušo dzīvē nepieciešamās kompetences, un PISA kompetenču tests parāda, vai šīs kompetences ir iegūtas (OECD, 2016b).

Trešais arguments, kādēļ izvēlēties tieši šo vecumu skolēnu kompetenču izpētei – tas ir vecums, kad lielākā daļa pusaudžu sāk apzināties savu iespējamo inženierzinātņu vai humanitāro izglītības virzienu un karjeras iespējas, tādēļ ir jo īpaši svarīgi tieši šajā vecumā pētīt, vai pusaudžiem ir pietiekama matemātiskā kompetence, lai viņi varētu izvēlēties tālāko karjeras ceļu (Croll, Attwood, Fuller, 2011).

Jēdziens “pusaudži” kā apzīmējums cilvēkiem, kuriem ir piederības sajūta grupai, kurai ir kopīgas rūpes un centieni, Eiropā parādījās 19. un 20. gadsimta mijā, kad sabiedrības sociālā un tehnoloģiskā organizācija bija kļuvusi tik sarežģīta, ka radās nepieciešamība pēc atsevišķa, jauna sagatavošanās vecumposma, kurā bērns varētu veiksmīgi iekļauties pieaugušo pasaulē. Jēdziens nostiprinājās kā izpētes objekts Pirmā pasaules kara laikā, kad jaunie karavīri pretnostatīja sevi iepriekšējām paaudzēm. Pirms tam, 17. un 18. gadsimtā bērnus šajā vecumā dēvēja par jaunajiem cilvēkiem, kas neatbilst mūsdienu izpratnei par pusaudžiem, kuri vairs netiek uztverti kā jauni pieauguši cilvēki, jo pusaudžu emocionālās vajadzības ir līdzīgas kā bērniem. Kaut gan salīdzinājumā ar jaunākiem bērniem pusaudzis ir augumā lielāks, stiprāks, ar labākām kognitīvajām spējām, labāk izvērtē savu rīcību un arī mācīšanos, tomēr emocionāli pusaudzim ir vajadzīga vecāku mīlestība un labvēlība, kuru pusaudži nereti pieprasa ar savu uzvedību. 19. gadsimtā netika izdalīts atsevišķs pusaudžu vecums, to ieskaitot viengabalainā bērnībā (Aries, 1960).

Pusaudžu periods veido pāreju no bērnības uz jauniešu periodu. Pusaudžu vecumu ir pieņemts skaitīt no pubertātes iestāšanās līdz brīdim, kad nostiprinās pusaudža identitāte. Mūsdienās bērniem pubertāte sākas agrāk, un vecākiem ir tendence ilgāk uzņemties atbildību par saviem bērniem jeb realizēt pāraprūpi, kas bērnus noved pie "iemācītās bezpalīdzības", tādēļ pusaudžu vecuma intervāls pēdējās desmitgadēs ievērojami audzis. Pirms 30 gadiem par pusaudžu vecumu visbiežāk sauca intervālu no 12 līdz 17 gadiem. Mūsdienās atbilstoši Apvienoto Nāciju Organizācijas (ANO) Iedzīvotāju fonda (angļu valodā *United Nations Fund for Population Activities* jeb UNFPA) terminoloģijai pusaudži ir personas vecumā no 10 līdz 19 gadiem (UNFPA, 2013).

M. Debesse vēl 20. gadsimta vidū prognozēja, ka vecuma kategoriju robežas mainīsies līdzi laikam, dzīvesstilam, sociālajām izmaiņām, sabiedrības vērtībām, taču savā darbā "Pusaudzība" vienlaikus precizēja: "Būtu kļūdaini domāt, ka jaunība mainās līdzi laikmetam. Protams, tajā atspoguļojas tā laika tendences, taču aiz mainīgiem jaunības tēliem slēpjas mūžīgā jaunība, kas vienmēr ir patiesa pret sevi savās tendencēs, attīstības likumos, savos priekšstatos par lietu pasauli cilvēku pasaulē. Tieši šīs likumsakarības ir jāatklāj un jādefinē." (Debesse, 1947, 9. lpp.) Slavenais pusaudzības pētnieks tādējādi piekrita laikmeta ietekmei, taču akcentēja vispārīga, universāla, pāri laikam stāvoša pusaudžu raksturojuma nozīmīgumu.

G. S. Hols ar vairāk nekā 1300 lappuses biezo publikāciju "Pusaudžu gadi" lika pamatus pusaudžu gadiem kā zinātniskās izpētes jomai. Savā darbā Hols pētīja, komentēja un formulēja pieņēmumus par gandrīz katru jautājumu, kas attiecas uz pusaudžu attīstību: no ekstremitāšu augšanas līdz seksualitātei, no kognitīvās attīstības līdz psihopatoloģijai un vēl. Hols plaši aprakstīja depresīva garastāvokļa izplatību pusaudžiem, lielāku noslieci uz noziedzību nekā citos cilvēka dzīves posmos, sensāciju kāri, vieglāku ietekmējamību ar masu medijiem un citus aspektus. Hols apgalvoja, ka pusaudžu bezcerības līkne sākas 11 gadu vecumā, tā vienmērīgi kāpj un savu maksimālo vērtību sasniedz 15 gadu vecumā, tad lēnām atgriežas sākotnējā līmenī līdz 23 gadu vecumam (Hall, 1904). Šie dati apstiprinājās arī gandrīz 100 gadus vēlāk veiktā pētījumā (Petersen et al., 1993).

Pēc Hola novērojumiem pusaudžu nomākto garastāvokli visbiežāk izraisa aizdomas par to, ka pusaudzis nepatīk viņa draugiem, bezcerīga mīlestība, pārlieku paškritiska attieksme pret sevi un savu raksturu (Hall, 1904). Tajā pašā laikā, kritisks skatījums uz pasauli pusaudžiem nodrošina labākas spriešanas prasmes, ļauj viņiem situāciju izvērtēt nevis virspusēji, bet gan padziļināti, atklājot apslēptus vai ilgtermiņa draudus (Larson, Richards, 1994). Formulējot pusaudžu matemātisko kompetenci, jāņem vērā šīs salīdzinoši jaunās prasmes, piemēram, iekļaujot metožu, atbilžu un citu risinājuma soļu kritisku izvērtējumu, piedāvājot pusaudzim atklāt nepilnības uzdevuma risinājumā, definīcijā vai algoritmā.

Hols uzsvēra, ka pusaudžiem ir īpaši svarīga novitāte, jauninājumu un sensāciju kāre kā pretstats viņu nīstajai monotonitātei un rutīnai. Šo atziņu apstiprina psihologu pētījumi arī mūsdienās – sensāciju meklēšana visvairāk ir raksturīga pusaudžiem un divdesmitgadniekiem (Zuckerman, 1995). Šis raksturojums nosaka efektīvu mācību metožu un mācību procesa dinamikas izvēli, taču to var integrēt arī pusaudžu matemātiskās kompetences definīcijā, paredzot iespēju atklāt jaunas sakarības, idejas, skaidrot tās citiem un meklēt tām pielietojumu.

Visplašāk citētais apgalvojums no Hola darba ir tāds, ka garastāvokļu vētras un stress jeb, kā to reizēm dēvē, pusaudžu krīze ir universāla un neizbēgama pusaudžu attīstības sastāvdaļa (Hall, 1904). Vēlāk veiktajos pētījumos pierādījās, ka Holam nebija taisnība par pusaudžu krīzes neizbēgamību. Piemēram, 1928. gadā publicētajā M. Midas (*Margaret Mead*) pētījumā ir salīdzināti Samoa un ASV pusaudžu attīstības aspekti. ASV pusaudži raksturoja savu pieaugšanu kā konfliktu un stresa pilnu laiku. Turpretī neviens pētījumā uzrunātais Samoa pusaudzis neaprakstīja šo laiku kā sarežģītu dzīves posmu, bet gluži otrādi – bezrūpīgas laimes periodu, kurā viņiem nav pazīstamas trauksmes un stress. Šīs kardinālās atšķirības Mida skaidroja ar to, ka Samoa sabiedrībā kopumā valda bezrūpīga atmosfēra, nav ekonomiskā un sociālā spiediena (Mead, 1961).

Pusaudžu vecumā vispārīgo intelektuālo spēju attīstībā ir vērojamas pretrunas. No vienas puses, pusaudžus raksturo viegla uzbudināmība, strauja daba un afekta tipa reakcijas, no otras puses – vērojama strauja kognitīvā attīstība. Viens no visvairāk citētajiem darbiem kognitīvās attīstības jomā ir H. Gārdnera (*Howard Gardner*) daudzpusīgā intelekta teorija. Teorijas autors nosauc deviņus spēju veidus un apgalvo, ka starp tiem nav izteiktas korelācijas. Viens no šiem spēju veidiem ir loģiski-matemātiskais intelekts. H. Gārdners skaidro intelektu kā indivīda intelektuālās spējas, kas nodrošina problēmas risināšanas prasmi un radošu darbību, kuru atzīst un novērtē noteiktā kultūrā. Faktiski šis intelekta jeb spēju skaidrojums saturiski saskan ar to, kā šodien interpretē kompetenci.

Pēc Gārdnera loģiski-matemātiskais intelekts ir spēja izmantot abstraktus simbolus kā, piemēram, skaitļus (matemātiskie aprēķini, statistika) un veikt loģiskas operācijas ar tiem (veidot datorprogrammas, veikt zinātniskus pētījumus). Šis intelekts ietver loģisku, abstraktu domāšanu, slēdzienu veidošanu, cēloņu-seku likumsakarību izpratni (Gardner, 1993). Cilvēki, kuri ir apveltīti ar loģiski-matemātiskajām spējām:

- ✓ aizraujas ar loģisku mīklu, atjautības uzdevumu risināšanu, šifru atklāšanu;
- ✓ loģiski, secīgi spriež, veido modeļus un izvirza hipotēzes;
- ✓ pierādījumus balsta uz faktiem;
- ✓ iegūto informāciju cenšas sakārtot, klasificēt, sagrupēt;
- ✓ prot darboties ar abstraktiem simboliem, zīmēm;
- ✓ labprāt darbojas ar skaitļiem, veic aprēķinus un mērījumus;
- ✓ cenšas uzturēt kārtību ap sevi (Gardner, 1999).

Lai gan parasti cilvēkam viens vai divi intelekta veidi ir dominējoši, H. Gārdners uzskata, ka ikviens var sev atbilstošā līmenī attīstīt visus intelekta veidus, ja vien viņu atbalsta un māca. Tādējādi pēc H. Gārdnera domām matemātiski-loģisko intelektu var attīstīt, skolēniem trenējot tieši tās prasmes un iemaņas, kas ir raksturīgas cilvēkiem ar dominējošu šo intelekta veidu.

Ar loģiski-matemātisko intelektu apveltītiem cilvēkiem piemīt jēdzieniskā domāšana. Viņiem patīk eksperimenti, izpēte, problēmuzdevumi, aprēķini. labi padodas matemātika, loģiskie uzdevumi un sakarību atklāšana. Šie cilvēki iegaumē klasificējot, vispārinot, darbojoties ar cēloņu un seku noskaidrošanu (Armstrong, 2017).

Tā kā dažādie intelekta veidi nevar pastāvēt atrauti cits no cita un tie vienmēr darbojas saistīti kā vienots komplekss, H. Gārdners uzsver, ka ne tikai skolēniem, bet arī skolotājiem ir svarīgi zināt savus dominējošos intelekta veidus, jo no tiem lielā mērā ir atkarīgs mācīšanās stils.

Jāpiebilst, ka citi autori apšaubīja H. Gārdnera ideju, ka ir vajadzīgas kādas īpašas spējas vai apdāvinātība, lai varētu pētīt un saprast matemātiku. Piemēram, Kolmogorovs rakstīja, ka matemātisko spēju loma bieži tiek pārspīlēta. Viņaprāt, iespaids, ka matemātika ir ārkārtēji sarežģīta, rodas slikta, ļoti formāla izklāsta dēļ. Slavenais matemātiķis izvirzīja tēzi, ka jebkurš cilvēks laba skolotāja vadībā vai pēc kvalitatīvi uzrakstītām mācību grāmatām spēj ne tikai apgūt matemātikas vidusskolas saturu, bet arī izprast, piemēram, diferenciālrēķinus. Tajā pašā laikā, Kolmogorovs atzina, ka dažādi cilvēki ar dažādu ātrumu un panākumiem uztver matemātiskos spriedumus un risina matemātiskos uzdevumus (Kolmogorovs, 1988).

Kolmogorova ideju apstiprina pusaudžu fiziskā, emocionālā un sociālā līdzsvara attīstībai veltīts pētījums, kurā secināts, ka pusaudžu vecumā parādās hipotētiski deduktīvās spriešanas elementi, attīstās metakognīcija jeb spēja domāt par savu mācīšanos, reflektēt par savu veikumu (Bethere et al., 2016). Tas paver plašas iespējas pusaudžiem iegūt jaunas prasmes: formulēt hipotēzi, veidot loģiskus spriedumus, atlasīt vajadzīgo informāciju, lietot iztēli.

Šo vecumposmu raksturo būtiska pretruna: pusaudži tiecas pārņemt un atdarināt pieaugušo uzvedības normas un attiecības, taču nav gatavi uzņemties atbildību. Pusaudzis nevēlas tikt uztverts kā bērns, tādēļ zemapziņā rodas vēlme nostāties pret pieaugušajiem, kuri ar padomiem, aizrādījumiem, kritiku un izsmiekliem neļauj pusaudzim patiesi justies pieaugušam. Rezultātā pieaugušie vairs nav pusaudžu autoritāte. Par jauno autoritāti kļūst vienaudži vai pusaudzim autoritātes nav vispār. Šajā posmā, izvērtējot citu cilvēku uzvedības, morāles un ētikas standartus, notiek intensīva savas identitātes apzināšanās (Eriksons, 1998).

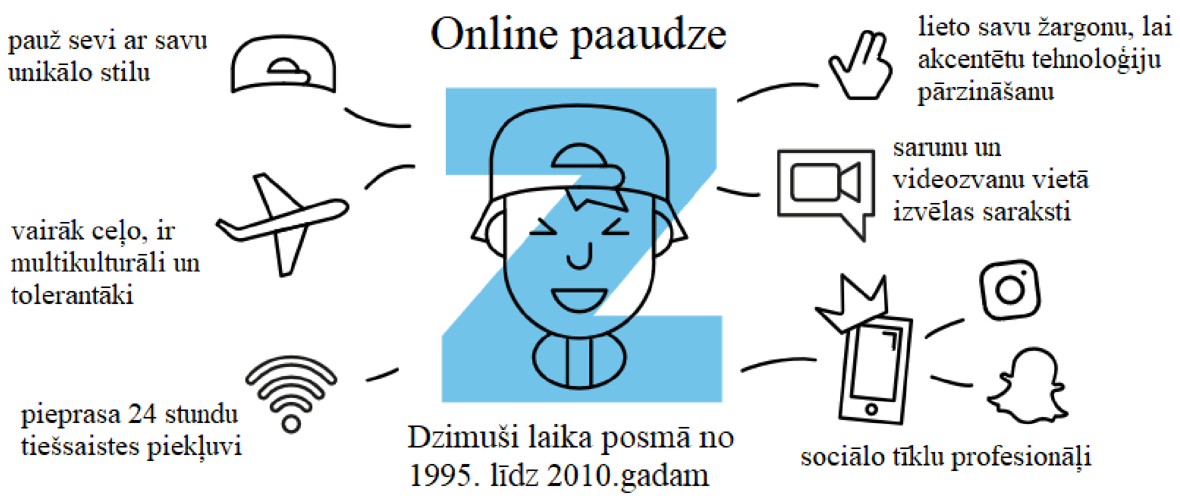
Būtisku informāciju par mūsdienu pusaudžiem var atrast paaudžu pētījumos. V. Štrauss (*William Strauss*) un N. Hovs (*Neil Howe*) paaudžu pētniecībā ir pazīstami ar to, ka piedāvāja Y paaudzi dēvēt par mileniāļiem. Pēc šo autoru piedāvātā vecuma iedalījuma līdz pat 2025. gadam 15 gadus veci pusaudži būs piederīgi Z paaudzei, jeb, lietojot Štrausa un Hova tēlaino apzīmējumu, “mājās sēdētāju paaudze” (Howe, Strauss, 2008). Pēc Štrausa-Hova paaudžu teorijas Z paaudzes pusaudžus 2025. gadā uz turpmākajiem 15 gadiem nomainīs alfa (α) paaudze jeb “digitālie mazuļi” (*skat. 2.1. tab.*).

Pagarinoties vidējam cilvēku dzīves ilgumam, pašlaik pasaulē sadzīvo vismaz sešas dažādas paaudzes, kas arī rada lielu daudzveidību pedagoģiskajās pieejās, kuras tiek paralēli īstenotas izglītības iestādēs. Piemēram, B jeb *baby boomers* paaudzes skolotāji, jaunākajiem no kuriem līdz pensijai vēl jāstrādā neilgu laiku, uzauga bērncentrētā vidē, jo kara radītās demogrāfiskās krīzes apstākļos bērni bija svarīgākā vērtība. Savukārt X paaudzes bērni uzauga laikā, kad tika fiksēts vēsturiski lielākais šķiršanās īpatsvars, jo sabiedrība par prioritāti izvirzīja pieaugušo tiesības baudīt dzīvi un nepakārtot to pienākumam vecākiem kopā audzināt bērnus. Dažādā audzināšanas, sabiedrības prioritāšu un ideoloģiju pieredze var būtiski ietekmēt veidu, kā šo paaudžu pārstāvji reaģē noteiktās mācību procesa situācijās, tādēļ ir svarīgi apzināt ne tikai skolēnu, bet arī pieaugušo piederību dažādām paaudzēm, ņemot vērā to raksturīgās īpašības (Howe, Strauss, Williams, 1993).

2.1. tabula. B, X, Y, Z un α paaudžu salīdzinājums (autora veidots pēc Strauss, Howe, 2008)

Paaudzes / Pazīmes	**B jeb pēckara paaudze**	**X jeb vērtību maiņas paaudze**	**Y jeb mileniāļi**	**Z jeb online paaudze**	**α jeb digitālie mazuļi**
Dzimuši	1946. – 1964.	1965. – 1981.	1982. – 1994.	1995. – 2010.	2011. – 2025.
Kad bija/ir/ būs 15-gadīgi	1961. – 1979.	1680. – 1996.	1997. – 2009.	2010. – 2025.	2026. – 2040.
Būtiskie paaudzi veidojošie notikumi	Pēckara depresija, Vjetnama, kosmosa apgūšana	Berlīnes mūra krišana, Irānas krīze, MTV, šķiršanās bums, hipiji	11. septembra terorakts, sociālie tīkli, videospēles	Ekonomiskā krīze, populisms, ISIS	Ukrainas krīze un sankcijas, VW izmešu skandāls, Covid-19 pandēmija, sociālā distancēšanās un attālinātās mācības
Raksturīgās īpašības	Dumpinieki, rūpes par vidi, vienlīdzību, mieru. Optimisti. Lielu ģimeņu, *baby boomers* laiks.	Apātiski, anarhiski, drosmīgi, dumpinieki, visbiežāk auga nepilnās ģimenēs.	Atvērti pārmaiņām, pastāv par savām tiesībām, vērsti uz sevi. Globālisti.	Mobili, dzīvo vairākās realitātēs, nenoteikta identitāte, vērsti uz komunikāciju.	Nezina dzīvi pirms interneta. Jauna, digitālā civilizācija.

Patlaban visi pirmsskolas izglītības iestāžu bērni un sākumskolēni pieder α paaudzei, savukārt pamatskolēni un vidusskolēni ir piederīgi Z paaudzei (*skat. 2.1. att.*), kas ir salīdzinoši jauns un mazāk izpētīts fenomens, tādēļ raksturojumi un rekomendācijas turpmākajos gados varētu tikt precizētas (Jörg, 2017).



2.1. att. **Z paaudzes raksturojums** (Jörg, 2017)

Z paaudzes bērni un pusaudži tiek raksturoti kā nenoturīgāki pret stresu, depresīvāki, labāk audzināti, vientuļāki, viņi mazāk iesaistās konfrontācijās, bet vairāk risina problēmas dialoga ceļā. Pragmatiski patiesības meklētāji, kuri ir neatkarīgi savos spriedumos. Zinošāki tehnoloģijās, tādēļ tiek dēvēti arī par digitālajiem iezemiešiem (*digital natives*). Biežāk cieš no uzmanības deficīta sindroma, izjūt grūtības koncentrēties vienam darbam. Visbeidzot, Z paaudzei pieaugušo izpratnē nav autoritāšu, viņiem ir vienaldzīgi tituli (Dolot, 2018; The Economist, 2019; Francis, Hoefel, 2018; Turner, 2015). Precīzāk sakot, šīs paaudzes autoritāte ir internets (Graham, 2018).

Līdz ar to mūsdienu pusaudži nav gatavi sekot skolotāja piemēram, it sevišķi, ja tas tiek pozicionēts kā neapšaubāmi pareizs. "Mēs nevaram prasīt no mūsdienu bērniem paklausību, jo viņi no pirmās dzīves dienas ar mātes pienu ir uzņēmuši priekšstatu, ka viņu vajadzības ir pašas galvenās," intervijā raidījumam "Māmiņu klubs" skaidroja mileniāļu un digitālo mazuļu īpašību pētniece, Latvijas Universitātes profesore Z. Rubene. Pēc profesores domām, tas izskaidro to, kādēļ Z paaudzes pusaudži tik bieži jautā: kāpēc mēs to darām; kur man tas noderēs; kā tas ir saistīts ar manu karjeras izvēli; cik es varēšu nopelnīt, ja man būs šīs prasmes? Ar šiem jautājumiem izpaužas šo pusaudžu karjeras un profesionālā domāšana, kas ilgtermiņā varētu viņus padarīt neatkarīgākus un nopietnākus (Dolot, 2018; Māmiņu klubs, 2018).

Lai saturīgi atbildētu uz šiem jautājumiem, pašreizējai pusaudžu paaudzei domāto informāciju ieteicams vizualizēt, runāt īsi un par būtiskāko, piemēram, vadoties pēc 5K (kas? kur? kad? ko? kāpēc?) formulas. Z paaudzes pusaudžiem lieti noder skaidrojumi par to, kā tieši dzīvē noder konkrētajā mācību priekšmetā apgūtais. Piemēram, matemātikā un citās stundās apgūtā kritiskā domāšana, spēja analizēt situācijas neapšaubāmi noder gandrīz katrā dzīves situācijā (Dolot, 2018).

Latvijā vecumā no 12 līdz 17 gadiem internetu lieto 100 % pusaudžu. Tikai 12 % pusaudžu vecumā no 13 līdz 15 gadiem nav sava telefona. 24 % pusaudžu atzina, ka ir tiešsaistē jeb *online* gandrīz visu laiku, no kā arī ir cēlies Z paaudzes alternatīvais nosaukums – *online* paaudze (Lenhart, 2015). Tajā pašā laikā, nav pierādījies, ka skolā izmantotie digitālie mediji uzlabo mācību rezultātus. Ir veikts pētījums, kas parādīja, ka interaktīvās tāfeles nerada būtisku vai izmērāmu ietekmi uz skolēnu sasniegumiem mācībās. Pētījuma autori gan uzsvēra, ka tādi skolotāji, kuri ir ieinteresēti attīstīt savu skolēnu radošumu, domāšanu un patstāvību, jebkuru rīku prot izmantot šim mērķim (Higgins, Beauchamp, Miller, 2007).

Lai padarītu mācības daudzveidīgas, daudzi skolotāji ikdienā izmanto tiešsaistes testus. Par šo testu lietderību ir veikti daudzi pētījumi. Daži no tiem atklāj, ka skolēni, kuri regulāri pildīja šādus testus, labāk nokārto eksāmenu (Mwapea, 2015). Citi pētnieki nonāca pie secinājuma, ka šādi testi neietekmē skolēnu rezultātus. Pētnieki iesaka kritiski izvērtēt, vai centieni padarīt mācības daudzveidīgākas, izmantojot kādu aktuālu tiešsaistes rīku vai tehnoloģiju, nekļūst par pašmērķi – vai tas patiešām dod kādu labumu skolēniem, neskaitot iespēju mazliet izklaidēties (Steenhuis, Grinder, de Bruijn, 2009).

Jāņem vērā, ka Z paaudzei raksturīgās īpašības ievērojami maina veidu, kā mācās šīs paaudzes skolēni. Šīs paaudzes pusaudžiem ir svarīga zināšanu pieejamība, nevis to apguve. Mācībām, tāpat kā jebkurai citai darbībai, jāizceļ šīs paaudzes skolēnu individualitāte un jākalpo kā identitātes izpausmei, proti, skolēniem ir svarīgi, lai mācības viņiem nodrošinātu pašizziņu, ne tikai kompetences kādos mācību priekšmetos. Mācību saturam jābūt ar acīmredzamu vai labi izskaidrotu pievienoto vērtību, ko, visticamāk, var panākt, iespēju robežās nodrošinot individualizāciju. Pētnieki lieto apzīmējumu "radikāli iekļaujoši" (*radically inclusive*), kam vajadzētu atspoguļoties mācību metožu izvēlē un mācību organizācijā kā tādā (Francis, Hoefel, 2018). Domājot par mācību organizāciju Z paaudzei, zīmīgs pētījuma rezultāts ir tāds, ka 72 % šīs paaudzes pusaudžu ir svarīga atgriezeniskā saite no cilvēka, kurš viņiem ir deleģējis darāmo. Tā ir īpašība, kuru aptaujātie pusaudži atzīmēja visbiežāk, dalītajā otrajā un trešajā vietā ar 56 % atstājot patiku iepazīt un lietot jaunās tehnoloģijas un gatavību doties ārzemju mācību vai darba braucienos (Dolot, 2018).

2.2. Matemātiskās kompetences skaidrojumi

Šajā apakšnodaļā ir izmantoti astoņi biežāk citētie matemātiskās kompetences skaidrojumi, kuros var saskatīt atbilstību pusaudžu vecumposma īpatnībām. Matemātiskā kompetence ir:

1. Indivīda prasme formulēt, lietot, interpretēt matemātikas problēmas dažādos dzīves kontekstos (OECD, 2019a).
2. Pierādīta spēja izmantot zināšanas, prasmes un personiskās, sociālās un/vai metodiskās spējas darba un mācību situācijās un profesionālajā un personīgajā attīstībā (Eiropas Parlaments, 2008).
3. Spēja attīstīt un pielietot matemātisko domāšanu ar mērķi atrisināt virkni problēmu ikdienas situācijās (European Commission, 2007).
4. Skolēna spēja uztvert, izprast un izteikt daudzveidīgās izzināmās lietas kvantitatīvi, telpiski un vispārinātu modeļu veidā (Oliņa, 2015).

5. Cilvēka zināšanas, izpratne, prasmes rīkoties un pielietot matemātiku un pamatot viedokli par to dažādās situācijās un kontekstos, kuros matemātikai ir vai varētu būt svarīga loma (Niss, 2011).
6. Matemātisko kompetenci veido komponentes, kas ir saistītas ar spēju uzdot un atbildēt uz jautājumiem, izmantojot matemātiku, un lietot matemātisko valodu un tās rīkus (Laursen, 2010).
7. Pamatprasmju un darbību apguve, matemātikas jēdzienu un principu izpratne, matemātikas pielietošana reālās dzīves situācijās, diskusijas par matemātiku un matemātiskā spriestspēja (Casserly, 2014).
8. Komunikācija, matemātisko modeļu veidošana, attēlošana, spriešana un pamatošana, stratēģiskā domāšana, simbolu valodas lietojums (Turner, 2011).

2.2. tabula. Matemātiskās kompetences saturs dažādās matemātiskās kompetences definīcijās (autora veidots)

	Matemātiskā kompetence							
Matemātiskās kompetences saturs	OECD, 2019a	EP, 2008	EC, 2007	Oliņa, 2015	Niss, 2011	Laursen, 2010	Casserly, 2014	Turner, 2011
Komunikācija	x	x	x	x	x	x	x	x
Spriešana			x	x	x	x	x	x
Problēmu risināšana	x		x		x	x	x	x
Modelēšana				x		x		x
Personības īpašības		x						

Apkopojot šos astoņus matemātiskās kompetences skaidrojumus, var secināt, ka visās astoņās definīcijās tiek pieminēta kāda veida komunikācija, sešās definīcijās ir ietverta spriešana un problēmu risināšana, trīs definīcijās – modelēšana, un vienā definīcijā ir akcentētas skolēna personības īpašības (*skat. 2.2. tab.*).

Viens no visbiežāk citētiem un pielietotiem matemātiskās kompetences modeļiem ir izstrādāts Dānijā. Dāņu pētnieks K. B. Laursen sadarbībā ar Matemātisko zinātņu institūtu (*Institute of Mathematical Sciences*), Zinātniskās izglītības centru (*Centre for Science Education*) un Kopenhāgenas universitāti (*University of Copenhagen*) izstrādāja **astoņu** prasmju grupu modeli, kas raksturo matemātisko kompetenci (*skat. 2.3. tab.*), definēja katrai grupai, kas skolēnam ir jāspēj, lai uzskatītu, ka viņam piemīt šī kompetence, un klasificēja šīs kompetences divās grupās – matemātisko kompetenci, kas ir saistīta ar spēju uzdot un atbildēt uz jautājumiem, izmantojot matemātiku, un matemātisko kompetenci, kas ir saistīta ar spēju lietot matemātisko valodu un tās rīkus (Laursen, 2010).

2.3. tabula. Matemātiskās kompetences saturs pēc K. Laursena

Matemātiskās kompetences saturs, kas ir saistīts ar prasmi:	
uzdot un atbildēt uz jautājumiem, izmantojot matemātiku	lietot matemātisko valodu un tās rīkus
✓ Matemātiskā domāšana ✓ Problēmu risināšana ✓ Spriešana ✓ Modelēšana	✓ Attēlošana ✓ Sazināšanās ✓ Palīglīdzekļi un rīki ✓ Simboli un formālisms

R. Tērners (*Ross Turner*) matemātiskai kompetencei izšķir šādas **sešas** komponentes (Turner, 2011):

1. komunikāciju, jo pusaudžiem tā pilda ne tikai informācijas apmaiņas, bet arī socializēšanās, pašapliecināšanās un citas funkcijas (uz iekšu: lasīšana, apgalvojumu un matemātiskās informācijas interpretēšana; uz āru: skaidrošana, prezentēšana, argumentēšana);
2. matemātisko modeļu veidošanu, kas padara matemātikas apguvi aizraujošu un pietuvinātu reālai dzīvei (pārveido reālās dzīves problēmu par matemātisku uzdevumu vai otrādi – interpretē matemātisko objektu vai informāciju attiecībā uz aprakstīto reālās dzīves situāciju);
3. attēlošanu, jo pusaudžu vecumā strauji attīstās iztēle, fantāzija (iztēlojas vai lieto ģeometriskās figūras vai sakarības: vienādojumus, formulas, grafikus, diagrammas u. tml.);
4. spriešanu un pamatošanu, kas sasaucas ar pusaudžu izteiktās kritiskās domāšanas radīto potenciālu un vajadzību kritiski izvērtēt, spriest, argumentēt (loģiski sasaista procesus un uzdevuma objektus, izdarot secinājumus; spēj pārbaudīt vai piedāvāt pierādījumu);
5. stratēģisko domāšanu, kas ļauj pusaudzim justies pieaugušam (atlasa vai izmanto informāciju, lai varētu atrisināt uzdevumu);

6. simbolu valodas lietojumu (izprot un pielieto simbolisko pierakstu; izmanto abstraktas konstrukcijas, kas balstās uz definīcijām, likumiem un metodēm).

Eurydice pētījumā par matemātikas izglītību Eiropā izdalītas **piecas** matemātiskās kompetences komponentes (Eurydice, 2011):

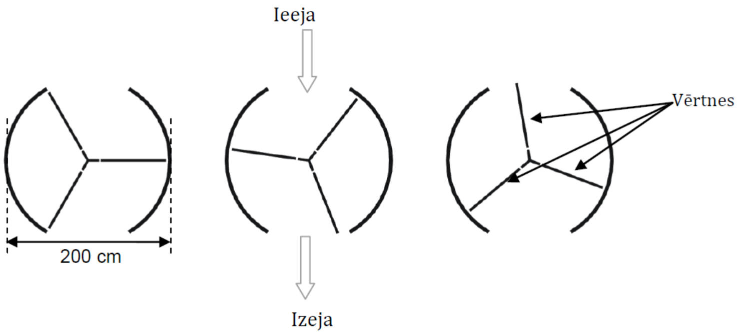
- ✓ pamatprasmju apguve;
- ✓ matemātikas jēdzienu un principu izpratne, kas sasaucas par pusaudžu vēlmi pašiem izprast, izdarīt savus secinājumus;
- ✓ matemātikas pielietošana reālās dzīves situācijās;
- ✓ diskusijas par matemātiku, jo Z paaudzes pusaudži tiek raksturoti kā "radikāli iekļaujoši", proti, viņiem ir ļoti svarīgi uzklausīt citu domas, paust savu ideju, tādējādi izceļot savu unikalitāti, un beigās rast kompromisu;
- ✓ matemātiskā spriestspēja, kas strauji attīstās tieši pusaudžu gados.

Laursena skaidrojums vēlāk tika adaptēts OECD ik pēc trīs gadiem rīkotajā PISA pētījumā (OECD, 2016a). Būtiskākā šī pētījuma atšķirība – tajā tiek lietota "aritmētiskā vidējā" kompetence, kuru aprēķina pēc pusaudžu snieguma uzdevumos par dažādām kompetences komponentēm. PISA pētījumā matemātiskā kompetence iekļauj cilvēka zināšanas, izpratni, prasmes rīkoties un pielietot matemātiku un pamatotu viedokli par to dažādās situācijās un kontekstos, kuros matemātikai ir vai varētu būt svarīga loma (Niss, 2011).

PISA testam gan ir atšķirības no Laursena skaidrojuma, tostarp pētnieki matemātiskajā kompetencē iekļauj arī indivīda prasmi formulēt, lietot, interpretēt matemātikas problēmas dažādos dzīves kontekstos. Matemātiskā kompetence ietver spēju matemātiski atklāt cēloņsakarības; matemātikas jēdzienu, darbību, faktu lietošanu, lai aprakstītu, izskaidrotu un prognozētu parādības un to norisi. Matemātiskā kompetence palīdz cilvēkam redzēt matemātikas lomu pasaulē un pieņemt labi pamatotus lēmumus, kuri nepieciešami konstruktīva, ieinteresēta un atbildīga pilsoņa dzīvē. PISA pētījumā tiek izdalītas četras satura jomas, kurās tiek mērīta skolēnu matemātiskā kompetence:

- ✓ skaitļi un mērījumi – skaitliskas izteiksmes, kvantitatīvas attiecības un modeļi;
- ✓ telpa un forma – telpiskas, ģeometriskas parādības un sakarības, kas balstītas uz ģeometriju kā mācību priekšmetu;
- ✓ mainīgā jēdziens un funkcionālās sakarības – funkcionālo sakarību matemātiskās izpausmes un savstarpēji mainīgo lielumu atkarība;
- ✓ varbūtības un statistika – saistīta ar varbūtīgām parādībām un attiecībām, to vērtēšanu.

Skolēnu matemātiskā kompetence OECD pētījumā tiek grupēta sešos līmeņos. Matemātikas kompetences līmeņi atbilst uzdevumu grupām pieaugošā grūtību pakāpē, kur 1. līmenis ir viszemākais, bet 6. līmenis – visaugstākais. Piemēram, 4. līmenī skolēnam jāprot strādāt ar precīzi formulētiem modeļiem, lai risinātu konkrētas kompleksas situācijas (*skat. 2.2. att.*). Šo uzdevumu pareizi atrisināja 43 % Latvijas skolēnu, OECD valstu vidējais rezultāts ir 46 %.



Durvis veic četrus pilnus apgriezienus minūtē. Katrā no durvju trim daļām pietiek vietas ne vairāk kā diviem cilvēkiem. Kāds ir lielākais cilvēku skaits, kas pa šīm durvīm var ieiet ēkā 30 minūšu laikā?

A 60 B 180 C 240 D 720

2.2. att. **2012. gada PISA testa matemātikas 4. līmeņa uzdevuma piemērs** (Geske, Grīnfelds, Kangro, Kiseļova, 2013)

Ja pēc PISA testa skolēnam ir noteikta līmeņa matemātiskā kompetence, tad tas nozīmē, ka viņš spēj atrisināt arī lielāko daļu zemāku līmeņu uzdevumu. Par pamatlīmeni ir noteikts matemātiskās kompetences 2. līmenis, kurā skolēni demonstrē tādu matemātisko kompetenci, kas ļauj veiksmīgi pielietot matemātikas zināšanas un prasmes, lai sasniegtu jebkuru mērķi un nākotnē varētu ieļauties sabiedrības dzīvē un konkurēt darba tirgū.

OECD pētījumā skolēnu matemātiskā kompetence tiek izteikta kā spēja pareizi atrisināt noteiktu īpatsvaru dažādu matemātisko uzdevumu ar dažādām izziņas un grūtības pakāpēm. Katram līmenim ir sniegts detalizēts apraksts (*skat. 2.4. tab.*).

To 15 gadus veco Latvijas skolēnu, kuru matemātiskās kompetence bija 2. līmenī vai zemāk, īpatsvars ar katru gadu samazinās, un 2018. gada pētījumā bija 17,3 %, kas ir labāk nekā vidēji OECD valstīs, kur šis rādītājs ir 24,0 %. Tāpat Latvijā ir par 5,6 % mazāk nekā vidēji OECD tādu pusaudžu, kuru matemātiskā kompetence tika novērtēta ar “zem 1. līmeņa”. Tas gan nenozīmē, ka šie skolēni nespēj veikt nevienu matemātisku darbību. Parasti viņi nespēja izmantot savas matemātikas prasmes attiecīgajā situācijā tā, kā to prasa visvieglākie testa uzdevumi.

2.4. tabula. Matemātiskās kompetences līmeņi pēc OECD pētījuma un Latvijas skolēnu īpatsvars (%), kuri spēj atrisināt dotā un zemāka līmeņa uzdevumus (OECD, 2019a).

Līmenis	**Ko skolēns var paveikt**
6. *1,4 %*	Skolēni spēj konceptualizēt, vispārināt un izmantot informāciju, balstoties uz saviem pētījumiem un kompleksu problēmsituāciju modelēšanu, pielietot savas zināšanas nestandarta situācijās. Spēj saistīt dažādus informācijas avotus un skaidrojumus un elastīgi darboties ar tiem. Ir labi attīstīta matemātiskā domāšana un loģiskā spriešana. Prot veikt formālas matemātiskās darbības ar simboliem, sastādīt attiecības, lai radītu jaunu pieeju un paņēmienus, kā risināt nezināmus uzdevumus. Skolēni spēj formulēt viedokli, precīzi atainot savu darbību, izstāstīt savas domas par iegūtajiem rezultātiem, interpretāciju, argumentiem un to piemērotību oriģinālām situācijām.
5. *8,5 %*	Skolēni spēj izstrādāt kompleksu situāciju modeļus un darboties ar tiem, paredzēt grūtības un precizēt pieņēmumus. Prot atlasīt, salīdzināt un novērtēt šiem modeļiem piemērotas problēmu risināšanas stratēģijas. Izmanto labi attīstītas domāšanas un spriešanas spējas, savstarpēji saistītus skaidrojumus, simbolus un formālu raksturojumu, kā arī atziņas, kas attiecas uz šīm situācijām. Reflektē par savu darbību, izklāsta savu interpretācijas, spriedumu gaitu.
4. *27,5 %*	Skolēni spēj prasmīgi strādāt ar precīzi formulētiem modeļiem, lai risinātu konkrētas kompleksas situācijas, kurās var rasties kādas grūtības vai ir nepieciešams izteikt pieņēmumus. Prot atlasīt un integrēt dažādus skaidrojumus, izmantot simbolus, saistot tos ar reālās dzīves situācijas aspektiem. Spēj izmantot prasmes piedāvātajā kontekstā, spēj elastīgi spriest, balstoties uz savu interpretāciju, argumentiem un darbībām.
3. *56,9 %*	Skolēni spēj veikt skaidri aprakstītas darbības, to skaitā tādas, kuras prasa secīgus lēmumus. Viņi prot atlasīt un izmantot vienkāršas problēmu risināšanas stratēģijas. Skolēni prot interpretēt un izmantot skaidrojumus, balstoties uz dažādiem informācijas avotiem, un spriest tiešā saistībā ar tiem. Šajā līmenī skolēni parasti prot rīkoties ar procentiem, daļām, decimāldaļskaitļiem un proporcionālām attiecībām. Skolēni spēj īsi pastāstīt par savu interpretāciju, rezultātiem un domāšana gaitu.
2. *82,7 %*	Skolēni prot interpretēt un atpazīt situācijas kontekstā, kurā nepieciešami tikai precīzi secinājumi. Viņi spēj iegūt nepieciešamo informāciju no viena avota un izmantot vienu skaidrojuma veidu. Šajā līmenī skolēni spēj izmantot pamata algoritmus, formulas un vispārpieņemtās pieejas, atrisināt uzdevumus, izmantojot veselus skaitļus. Viņi spēj spriest tieši un burtiski interpretē iegūtos rezultātus.
1. *95,6 %*	Skolēni var atbildēt uz skaidri formulētiem jautājumiem par pazīstamu kontekstu, kurā ietverta attiecīgā informācija. Viņi spēj identificēt informāciju un veikt rutīnas darbības saskaņā ar skaidri izteiktām norādēm precīzi formulētās situācijās. Viņi spēj veikt pašsaprotamas darbības un uzreiz sekot dotajam norādījumam.

Skolēni, kuru matemātiskā kompetence atbilst nulles līmenim, spēj strādāt tikai ar ļoti strukturētiem un skaidriem nosacījumiem, izmantojot tiešos novērojumos vai no ļoti vienkāršiem slēdzieniem iegūtu informāciju. Vēl viena pozitīva iezīme – 74,2 % Latvijas pusaudžu PISA matemātikas testā uzrādīja optimālu rezultātu (2., 3. vai 4. līmeni). Vidēji OECD valstīs šis rādītājs ir 65,1 %.

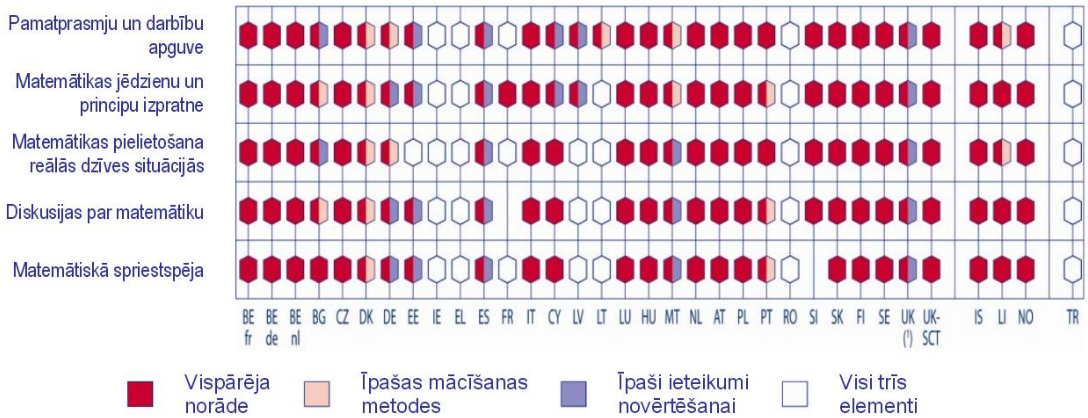
2018. gada pētījumā Latvijā 4,4 % skolēnu 15 gadu vecumā matemātiskā kompetence bija zem 1. līmeņa. Igaunijā šo skolēnu īpatsvars ir divas reizes mazāks (2,1 %), bet Lietuvā – divas reizes lielāks (9,3 %) nekā Latvijā (*skat. 2.5. tab.*). Tikmēr augstākais matemātiskās kompetences līmenis Latvijas un Lietuvas skolēniem ir ar līdzīgu īpatsvaru (attiecīgi, 1,4 % un

1,7 %), bet Igaunijas vienaudžu vidū 6. līmenis ir 2,6 reizes biežāk sastopams (3,7 %), kas būtiski pārsniedz vidējo rādītāju OECD valstīs – 2,4 % (OECD, 2019a). Šie dati rāda, ka Latvijas pusaudžiem ir iegūtas stabilas zināšanas un prasmes, taču matemātiskajā kompetencē (5. un 6. līmenī pēc PISA testa) sasniegumi ir salīdzinoši vāji.

2.5. tabula. Skolēnu sadalījums pēc matemātiskās kompetences līmeņiem (OECD, 2019a).

Valsts/ Līmenis	**0.**	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**
Igaunija	2,1 %	8,1 %	20,8 %	29,0 %	24,6 %	11,8 %	3,7 %
Latvija	**4,4 %**	**12,9 %**	**25,8 %**	**29,4 %**	**19,0 %**	**7,1 %**	**1,4 %**
Lietuva	9,3 %	16,4 %	24,2 %	25,2 %	16,5 %	6,8 %	1,7 %
Somija	3,8 %	11,1 %	22,3 %	28,9 %	22,7 %	9,3 %	1,8 %
Vidēji OECD	10,0 %	14,0 %	22,2 %	24,4 %	18,6 %	8,5 %	2,4 %

Kā rāda *Eurydice* ziņojums par matemātikas izglītību Eiropā, kas tika publicēts brīdī, kad lielākajā daļā Eiropas valstu stājās spēkā jauni pamatizglītības standarti, gandrīz visās Eiropas valstīs izglītības satura norādēs vai citos matemātikas stratēģiskajos dokumentos vismaz vispārīgi ir formulētas matemātikas pamatprasmes (*skat. 2.3. att.*).



2.3. att. **Prasmes un kompetences matemātikas izglītības satura vadlīnijās un/vai citos matemātikas mācīšanas stratēģiskajos dokumentos, 2010./11. m. g.** (Eurydice, 2011)

Dānijā, Portugālē un Lihtenšteinā ir dotas ne tikai vispārīgas atsauces, bet arī ieteikumi par noteiktām metodēm, kas izmantojamas šo prasmju mācīšanā. Grieķijā, Rumānijā un Turcijā visām piecām prasmju jomām ir norādītas gan izmantojamās mācīšanas metodes, gan rekomendācijas skolēnu vērtēšanai. Latvijā visi trīs elementi doti matemātikas pielietošanai reālās dzīves situācijās, diskusijām par matemātiku un matemātiskai spriestspējai, savukārt, pamatprasmju un darbību apguvei un matemātikas jēdzienu un principu izpratnei pieejamas vispārīgas norādes un ieteikumi novērtēšanai, taču ne mācīšanas metodikas (Eurydice, 2011).

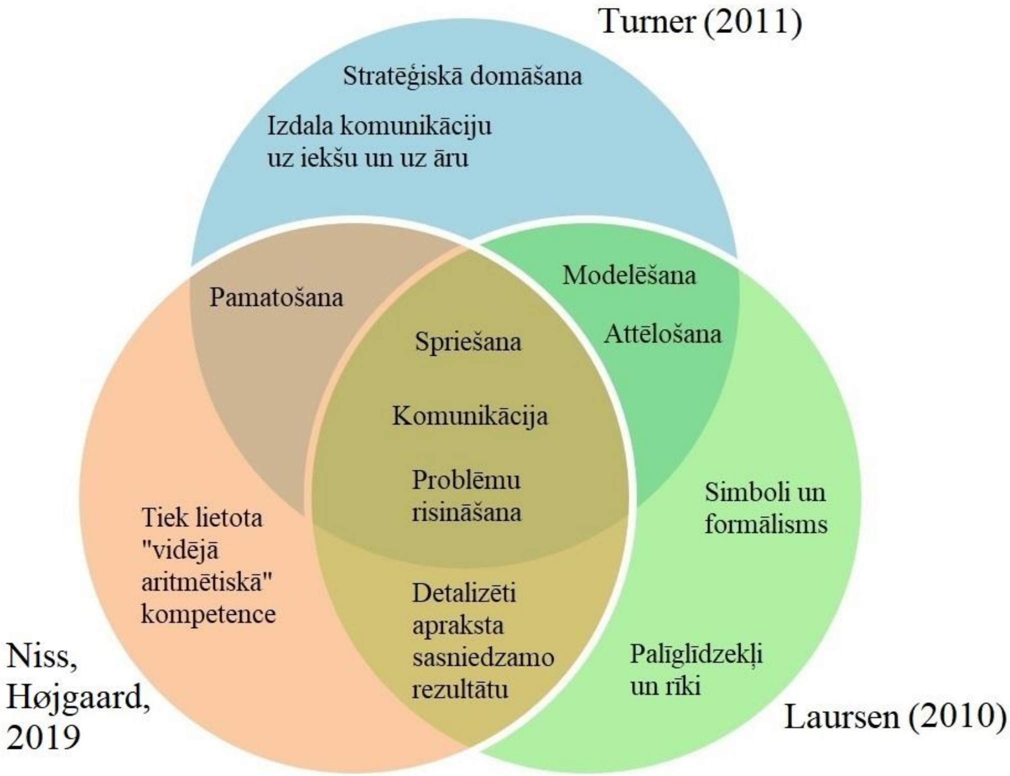
ES uzstādījumos par Eiropas izglītības telpas mūžilgās mācīšanās galvenajām kompetencēm matemātiskā kompetence tiek skaidrota kā spēja attīstīt un pielietot matemātisko domāšanu ar mērķi atrisināt virkni problēmu ikdienas situācijās. Balstoties uz stabilām rēķināšanas iemaņām, uzsvars ir uz procesu un darbību, kā arī zināšanām. Matemātiskā kompetence dažādos līmeņos iesaista spēju un vēlmi lietot matemātiskās domāšanas veidus (loģisko un telpisko domāšanu) un matemātiskas izpausmes: formulas, modeļus, konstrukcijas, grafikus un diagrammas (European Commission, 2007).

Kompetencēs balstītā pamatizglītības standartā, kas stājies spēkā 2020. gada 1. septembrī, ļoti līdzīgā veidā ir definēts matemātikas sasniedzamais rezultāts skolēnam: uztver, izprot un izsaka daudzveidīgās izzināmās lietas kvantitatīvi, telpiski un vispārinātu modeļu veidā – skaita, rēķina, aprēķina, shematizē, modelē, mēra, prognozē; piemēro matemātikas valodu, simbolus un metodes, to skaitā – loģisko un telpisko domāšanu, un izteiksmes veidus (formulas, modeļus, grafikus, u. tml.) datu analīzei, problēmu risināšanai un pamatotu lēmumu sagatavošanai (Ministru kabinets, 2018).

Matemātiskā kompetence ir daudzu disciplīnu, profesiju un dzīves jomu neatņemama daļa. ES līmenī tā ir atzīta par vienu no svarīgākajām kompetencēm personiskai izaugsmei, aktīvai pilsonībai, sociālai iekļaušanai un nodarbinātībai 21. gadsimta zināšanu sabiedrībā (Eurydice, 2011).

Darba devēji matemātisko kompetenci interpretē šaurāk – kā zināšanas aritmētikā, algebrā, ģeometrijā, rēķināšanā, statistikā un minēto zināšanu pielietošanu rakstos un galvā (Casserly, 2012). Citi autori matemātiku interpretē kā inženiertehniskās vai kādas citas eksakta virziena izglītības neatņemamu sastāvdaļu, kas tiek lietota kā aprakstoša vai analīzes valoda (Zeidmane, 2013).

Trīs biežāk citētās matemātiskās kompetences definīcijas formulēja Tērners (2011), Laursens (2010) un Niss, Højgaard (2019). Rezumējot apakšnodaļu par matemātisko kompetenci, kaut gan šīm definīcijām ir daudz kopīgu vai līdzīgu atziņu, tomēr katrai definīcijai ir arī vismaz viens tikai tai raksturīgs aspekts. Kopīgais un atšķirīgais definīciju saturs ir parādīts Venna diagrammā (*skat. 2.4. att.*).



2.4. att. **Matemātiskās kompetences definīciju saturs** (autora veidots)

Apkopojot pusaudžu raksturojumu un matemātiskās kompetences skaidrojumus, var redzēt, ka matemātikas mācībām jāļauj pusaudzim:

- ✓ intuitīvi vai deduktīvi atklāt jaunas sakarības, idejas, skaidrot tās citiem un meklēt tām pielietojumu;
- ✓ ar problēmu risināšanu veicināt un nostiprināt kognitīvo attīstību (formulēt hipotēzi, veidot loģiskus spriedumus, atlasīt vajadzīgo informāciju, lietot iztēli);
- ✓ patstāvīgi atlasīt un izmantot zināšanas pašvadītā darbībā;
- ✓ patstāvīgi pieņemt lēmumus, piemēram, izvēlēties, kuru problēmusituāciju pētīt un cik detalizēti to darīt;
- ✓ kritiski izvērtēt uzdevuma risināšanas metodes, iegūto atbildi, atklāt nepilnības un piedāvāt uzlabojumus, korekti lietojot matemātisko valodu;
- ✓ sadarboties ar citiem, pieliekot kopīgas pūles, lai atrisinātu kompleksas reālās dzīves problēmas;
- ✓ reaģēt uz saņemto atgriezenisko saiti, lai varētu uzlabot savu sniegumu;
- ✓ piedzīvot gandarījumu par padarīto, no tā iegūt motivāciju darīt vēl un pārliecību par saviem spēkiem paveikt jebkuru atbilstošu uzdevumu, pieliekot adekvātu piepūli;
- ✓ attīstīt metakognīciju un tā rezultātā pašrefleksijas prasmi un autonomiju.

Rezumējot šo nodaļu, ievērojot pusaudžu raksturojumu un matemātiskās kompetences definīciju teorētisko analīzi, ir definēta pusaudžu matemātiskā kompetence:

Pusaudžu matemātiskā kompetence ir zināšanu, prasmju un attieksmju kopums, kas ļauj izprast un risināt daudzveidīgas problēmsituācijas, darboties vispārinātu modeļu veidā, kritiski izvērtēt un pamatot rezultātu, izmantot matemātiski korektu valodu.

Pēc šīs definīcijas veidotas matemātiskās kompetences septiņas komponentes, kas ir sīkāk analizētas 4. nodaļā.

3. Matemātikas mācību analīze kompetenču pieejas aspektā

Matemātikas mācības ir komplekss, daudzu gadsimtu laikā precizēts un pilnveidots process, kas jau kopš antīkajiem laikiem pats par sevi tiek uzskatīts par vērtīgu rīku domāšanas operāciju attīstīšanai, nodrošina vajadzīgās zināšanas, prasmes, attieksmes, lai varētu turpmāk veiksmīgi apgūt citas eksaktās zinātnes, kā arī rada vērtīgus ieradumus tādus kā precizitāte, kārtīgums, neatlaidība un radoša pieeja jaunām, iepriekš nezināmām problēmām.

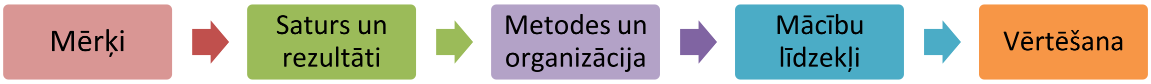
Mūsdienu matemātika ir abstrakta, kas apgrūtina tās apguvi. L. Rodžers rakstīja, ka standarta pieejas matemātikas satura izklāstam nereti rada skolēnos pilnīgas bezjēdzības iespaidu, jo viņiem nekas nav zināms ne par iemesliem, kuru dēļ skolotājs ir izvēlējies tieši šo paņēmienu, ne par to, kā matemātiķi formulēja problēmas (Rogers, 1995). Turpretī J. Mencis apgalvoja, ka matemātikas skaistums slēpjas tās vienkāršībā un ka matemātiku vajag mācīt vienkārši, J. Menča biogrāfijā “Dzīves svinētājs Jānis Mencis” rakstīja I. Imbovica (Imbovica, 2014).

Te varētu saskatīt zināmu pretrunu – matemātikas skolotāji un pētnieki savu mācību priekšmetu vērtē kā skaistu un piemeklē šai zinātnei atbilstošus epitetus. Piemēram, A. Einšteins tīru matemātiku uzskatīja par loģisku ideju dzeju (Einstein, 1935). Savukārt, skolēniem un viņu vecākiem visbiežāk ir cits viedoklis. Piemēram, ASV vairāk nekā trešdaļa aptaujāto 8. klašu skolēnu (37 %) uzskata, ka matemātika ir sarežģītākais mācību priekšmets. 2. vietā ir angļu valoda ar 18 % (Saad, 2005). Puse Lielbritānijas un Īrijas skolēnu uzskata, ka matemātika ir pārāk sarežģīta un garlaicīga (Bowater, 2012; Humphreys, 2015). Savukārt Indijā veiktā vecāku aptaujā noskaidrojās, ka 89 % skolēnu vecāku uzskata matemātiku par viņu bērniem sarežģītāko mācību priekšmetu (Cuemath, 2018). Līdzīgās domās ir arī vecāki ASV, Lielbritānijā un citās valstīs (Belkin, 2009; Phillips, 2016).

Matemātikas metodikā pamatskolai Mencis skaidroja, ka pretrunas šeit nav. Viena no daudzām psiholoģiski loģiskām operācijām matemātikas apguvē ir analīze un sintēze. Šīs operācijas nemitīgi jāpilnveido ne tikai skolēniem, bet arī matemātikas skolotājiem, jo tikai tad ir iespējams izplānot tādu mācību stundu, kurā skolēns var maksimāli patstāvīgi konstruēt savas zināšanas. Ja skolotājs automatizē iemaņas analizēt, no kādām iepriekš apgūtām zināšanām un prasmēm veidosies konkrētās stundas sasniedzamais rezultāts, un sintezēt tās loģiskā, vienotā stundas struktūrā, apgūt matemātiku būs viegli (Mencis, 1984).

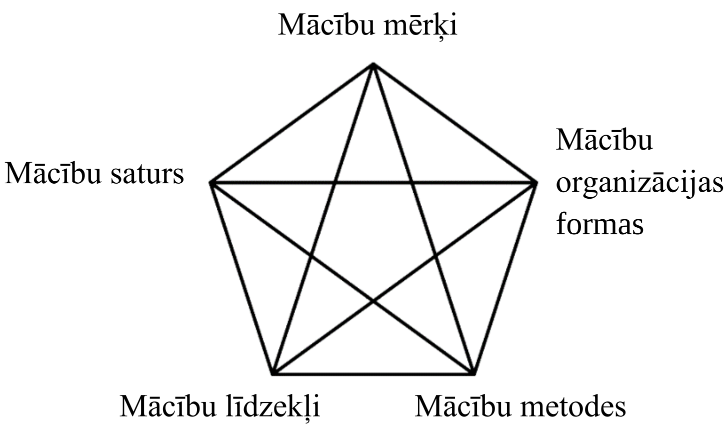
20. gadsimta laikā notika daudzi mēģinājumi atrisināt problēmu, ka daudzus skolēnus nesasniedz atziņa, ka mācīties matemātiku ir viegli. Viens no visvairāk citētajiem ir 20. gadsimta astoņdesmitajos gados izstrādātais V. Klafki kritiski-konstruktīvais didaktiskais

modelis, kas savu aktualitāti nav zaudējis arī šodien. Šajā modelī ir akcentēta radošuma nozīme mācību satura apguvē, kā arī saikne ar reālo dzīvi, praktiskais pielietojums un iespēja skolēnam pašam izpētīt, atklāt un pierādīt jeb konstruēt jaunas zināšanas, izmantojot loģisku paņēmienu sistēmu (Klafki, 1991).



3.1. att. **Mācību organizatoriskā shēma** (adaptēts no Klafki, 1991; Mencis, 1984; Моро, Пышкало, 1978)

Klafki uzskatīja, ka mācību procesā noteicošā loma ir mācību **saturam** un **rezultātiem**, kas pēc viņa domām nosaka arī mācību **mērķus**, skolēna mērķus, plānošanu, mācību darba organizāciju, mācību **metodes**, paņēmienus un **organizāciju** (*skat. 3.1. att.*). Visiem iepriekšējiem mācību metodiskās sistēmas elementiem seko piemēroti mācību līdzekļi. Klafki izstrādātā kritiski-konstruktīvā didaktiskā modeļa mācību mērķis ir izpratne par sabiedrībai būtiskām problēmām, kā arī līdzatbildība un līdzdalība šo problēmu risināšanā, kas saskan ar matemātikas kompetencē tik būtisko problēmu risināšanas prasmi. Visbeidzot, Klafki uzsvēra, ka ir lietderīgi skolēnus iesaistīt mācību procesa plānošanā, analīzē un **vērtēšanā**. Šai iesaistei vajadzētu veidot pusaudžos virzību uz demokrātiju, solidaritāti un humānismu (Klafki, 1991). Klafki idejas par skolēna pašvadītu mācīšanos, skolēna līdzdalību sasniedzamo rezultātu formulēšanā un citas ir iekļautas projekta *Skola2030* vadlīnijās (Kakse, 2017), kas veidotas, akcentējot kompetenču pieeju.



3.2. att. **Mācību organizatoriskā shēma** (Моро, Пышкало, 1978)

Matemātikas mācību teorētisko struktūru dažādi autori (Klafki, 1991; Mencis, 1984; Моро, Пышкало, 1978) apraksta līdzīgi, taču ar niansētām atšķirībām. Piemēram, Klafki kā vienu no elementiem savā mācību organizatoriskajā shēmā neizceļ mācību līdzekļus un mācību organizācijas formas, kamēr citi autori tiem pievērš līdzvērtīgu uzmanību kā mērķiem un saturam. Tai pat laikā, Klafki uzsvēra, ka no heiristiskās pieejas izrietošās pamatojuma kopsakarības, tematiskā un metodiskā strukturēšana atrodas nemitīgā mijiedarbībā ar dažādu mācību līdzekļu pieejamību un izmantošanas iespējām (Klafki, 1991).

Atšķiras arī autoru viedokļi par to, kā šie matemātikas mācību pamatjautājumi ir savā starpā saistīti. Mencis un Klafki uzskatīja, ka tie veido procesuālu shēmu, kur katram struktūras elementam seko nākošais elements (*skat. 3.1. att.*). Savukārt M. Moro un A. Piškalo izveidoja shēmu, kurā visi shēmas elementi ir savstarpējā mijdarbībā (*skat. 3.2. att.*).

3.1. Matemātikas mācību mērķi

Matemātikas mācību mērķi gadsimtu gaitā ir ievērojami mainījušies – ja kādreiz primārais mērķis bija aritmētisko darbību veikšana un tamlīdzīgas mūsdienu izpratnē primitīvas darbības, tad šodien atsevišķās valstīs šo mērķu uzskaitījums aizņem vairākas lappuses. Visbiežākā prakse gan ir no trīs līdz pieciem izvērstiem mērķiem. Katrā valstī mērķu formulējumos ir nojaušama kopīgā izglītības filozofija. Piemēram, Somijā liels akcents ir likts uz skolēnu labizjūtu un prieku mācīties (Finnish National Board of Education, 2014), postpadomju valstīs, tostarp Krievijā, ir raksturīga aizraušanās ar gariem mērķu uzskaitījumiem (Министерство образования и науки, 2014), bet Šveicē vispār nav kopīga valsts mērķa matemātikas mācībām – lēmums par mērķa formulējumu ir atstāts reģionu (kantonu) ziņā (Gertsch, 2011). Samērā saskanīgi ar Somijas pieeju, Japānā un Slovākijā kā viens no mērķiem ierakstīts "izbaudīt matemātiku" (The Elementary and Secondary Education Bureau, 2011; Krajcovicova, 2011). Turpmāk šajā apakšnodaļā iztirzāta pieeja matemātikas mācību mērķim dažādās valstīs.

2018. gadā Ķīnas skolēni uzrādīja labākos rezultātus pasaulē Starptautiskās skolēnu novērtēšanas programmas (angļu valodā – *The Programme for International Student Assessment*) jeb PISA testā, kas 79 valstīs pārbauda 15 gadus vecu skolēnu spējas pielietot savas zināšanas un prasmes reālās dzīves problēmu risināšanā matemātikā, lasīšanā un dabaszinātnēs. Ķīnas skolēni uzrādīja augstākos rezultātus visās trijās disciplīnās (OECD, 2019a).

Ķīnā pašlaik spēkā esošais izglītības standarts par vienu no galvenajiem matemātikas mācību mērķiem izvirza skolēnu inovāciju prasmi un atziņu, ka visi skolēni var apgūt matemātiku, iegūt no tās vērtīgas atziņas un atšķirīgu labumu, kas ir pilnīgs pretstats iepriekšējā standarta pamatidejai. Ķīnas jaunais standarts ir balstīts uz skolēnu vecumposmu psiholoģijas īpatnībām matemātikas apguvē un izmanto skolēnu reālās dzīves pieredzi. Pēc ekspertu un skolotāju domām abi minētie aspekti netiek pienācīgi ņemti vērā, kas ir būtiskākais trūkums matemātikas mācībām Latvijā un skolēnu matemātiskās kompetences veidošanās veicināšanai (*skat. 10., 11. un 12. pielikumu*). Skolēni Ķīnā praktiski piedzīvo matemātiskās modelēšanas procesu, kas ļauj veiksmīgāk interpretēt un pielietot gūtās atziņas problēmu risināšanā. Lai gan jaunais standarts balstās uz Ķīnas izglītības sistēmas tradicionāliem diviem pamatiem – pamatzināšanām un pamatprasmēm – , tajā ir uzsvērtas arī matemātiskās domāšanas spējas, problēmu risināšanas prasmes un attieksme pret matemātiku. Matemātiskās kompetences latiņu paaugstina arī sociālā un ekonomiskā attīstība Ķīnā, jo īpaši informācijas tehnoloģiju, digitālo tehnoloģiju, mūžizglītības un demokratizācijas attīstība (Wang et al., 2018).

2015. gadā augstākos rezultātus pasaulē PISA testā matemātikā, lasīšanā un dabaszinātnēs uzrādīja Singapūras skolēni, tādēļ ir noderīgi izpētīt šīs valsts pieeju matemātikas mācībām. Zīmīgi, ka Singapūrā kopš 2006. gada nav mainīts pamatizglītības standarts, tomēr šīs valsts skolēnu panākumi PISA matemātikas testā ar katru gadu pieauga: 2009. gadā 4. vieta, 2012. gadā 2. vieta, 2015. gadā pasaules līdervalsts gods un 2018. gadā atkal 2. vieta (OECD, 2019a). Singapūras matemātikas standarts no pirmsskolas līdz vidusskolai uzsver skolēnu matemātisko spēju attīstību, koncentrējoties uz problēmrisināšanas prasmēm, kuru veidošanos veicina piecas savstarpēji saistītas standarta komponentes: prasmes, jēdzieni, procesi, attieksmes un metakognīcija jeb skolēna spēja domāt par savu mācīšanos. Matemātikas standartam ir spirālveida struktūra, kur katrā satura daļā, tostarp aritmētikā, algebrā, mērīšanā, jau apgūtie jēdzieni un prasmes tiek pārskatītas un pilnveidotas, lai panāktu lielāku izpratni (Ministry of Education, Singapore, 2006; 2012).

2018. gadā PISA matemātikas testā aiz septiņām Āzijas valstīm un teritorijām seko Igaunija, Nīderlande, Polija, Šveice un Kanāda (OECD, 2018a). Igaunijā (PISA matemātikas testā 2018. gadā bija 1. vietā Eiropā) pamatizglītības standarts ietver daudzus matemātikas mācību mērķus, tostarp spēju izmantot matemātikai raksturīgo valodu, simbolus un metodes, lai atrisinātu dažādas situācijas visās dzīves jomās; spēju risināt problēmas, kurās nepieciešamas matemātiskās domāšanas metodes (loģiskā un telpiskā domāšana) un prasmes lietot dažādus informācijas attēlošanas veidus: formulas, modeļu, diagrammas, grafikus. Igaunijas skolas ir ļoti autonomas, lai varētu nodrošināt iekļaujošu, individualizētu pieeju. Līdzīgi kā Somijā, visiem igauņu skolotājiem ir maģistra grāds pedagoģijā; eksaktos mācību priekšmetus māca skolotāji-speciālisti (Riigi Teataja, 2011).

Nīderlandē (2. vieta Eiropā PISA matemātikas testā 2018. gadā) izglītības sistēmas vienotais mērķis ir patstāvība, saturīgas diskusijas un praktiskā pieredze. Nīderlandē gadu desmitiem ir iedibinājusies tradīcija nedot norādījumus par saturu un didaktisko pieeju, tādēļ liela nozīme mācību mērķu un satura noteikšanā joprojām ir mācību grāmatām. Liela nozīme ir praktiskajiem darbiem un darbam grupās pie dažādiem projektiem (Wijers, van den Heuvel-Panhuizen, 2005).

Polijā (3. vieta Eiropā PISA matemātikas testā 2018. gadā) vecākajās pamatskolas klasēs matemātika tiek uzskatīta par instrumentu citu mācību priekšmetu veiksmīgai apguvei, ikdienas problēmu risināšanai un telpiskās izpratnes veidošanai (Mullis et al., 2016). 21. gadsimta divās desmitgadēs Polijā veiktas divas apjomīgas izglītības reformas. Jaunā mācību programma nodrošina ietvarus, kas skolām un skolotājiem ļāva elastīgi pielāgot mācību programmu saviem skolēniem, ja vien tā bija saskaņota ar nacionālo standartu. Līdzīgi kā Igaunijā, otra reforma fokusējās uz pirmsskolas, sākumskolas un skolotāju izglītības kvalitāti (OECD, 2019c).

Šveicē (4. vieta Eiropā PISA matemātikas testā 2018. gadā) vienojošais pamatizglītības mērķis ir katra bērna personības attīstība un viņa intereses atmodināšana pret apkārtējā pasaulē notiekošo. Līdzīgi kā Nīderlandē, arī Šveicē nav vienota pamatizglītības standarta un līdz ar to arī vienota matemātikas mācību mērķa. Katrā no 26 Šveices kantoniem ir spēkā savs standarts. Saturiski tie ir tik ļoti atšķirīgi, ka izglītības sistēmas harmonizācija tiek saukta par Šveices izglītības sistēmas reformas galveno uzdevumu, jo standartu atšķirības ierobežo skolēnu mobilitāti (Gertsch, 2011). Tajā pašā laikā, Šveices skolēni 2015. gadā uzrādīja labākos rezultātus PISA matemātikas testā Eiropā (OECD, 2018a). U. Moser kā ticamāko skaidrojumu šai situācijai min Šveices finanšu pakalpojumu sektoru – tā kā tas ir svarīgs valsts ieņēmumu avots, viens no izglītības sistēmas mērķiem ir izcilība matemātikā (Squires, 2013).

Dānijā (5. vieta Eiropā PISA matemātikas testā 2018. gadā) 2015. gadā pieņemtais pamatizglītības standarts nosaka, ka matemātikas mācību mērķis ir attīstīt matemātiskās prasmes un zināšanas un pielietot tās reālās dzīves situācijās. Skolēni patstāvīgi un sadarbojoties atklāj, ka matemātika pieprasa un veicina radošumu un ka tā ietver rīkus problēmu risināšanai, sava viedokļa pamatošanai un rezultātu skaidrošanai. Skolēniem jāattīsta matemātiskā kompetence un jāiegūst zināšanas un prasmes, lai varētu pienācīgā veidā atrisināt matemātiskās problēmas savā pašreizējā un nākotnes ikdienas dzīvē, atpūtā, izglītībā, darbā un sabiedriskajā dzīvē. Atšķirībā no citām Eiropas valstīm, Dānijā mērķu uzskaitījumā ir akcentēta skolēnu prasme atpazīt matemātikas nozīmi vēsturiskajā, kultūras un sociālajā kontekstā (Ministeriet for Børn, 2015).

Iepriekšējos gados Somijā (1. vieta Eiropā PISA matemātikas testā 2000., 2003., 2006. un 2009. gadā, 4. vieta – 2012. gadā, 5. vieta – 2015. gadā un 8. vieta – 2018. gadā) tika reformēts pamatizglītības standarts, nosakot jaunus mērķus un ieviešot jauno saturu 7. klasēs 2017. gadā un pārējās pamatskolas klasēs līdz 2019. gadam. Centrālais mērķis ir nodrošināt vajadzīgās zināšanas un prasmes, kā arī veicināt mācīšanos un skolēnu līdzdalību, palielināt mācīšanās jēgpilnumu un katram skolēnam ļaut justies veiksmīgam. Skolēnu labizjūtai jaunajā standartā ir veltīta atsevišķa sadaļa par motivāciju un mācīšanās prieku (Finnish National Board of Education, 2014).

Vēl viena valsts, kas pasaules mērogā izceļas PISA testā, ir Kanāda, jo tā ir vienīgā Ziemeļamerikas un Dienvidamerikas valsts, kas ir iekļuvusi PISA reitinga Top-10 pasaulē. Otrs labākais rezultāts šajā pasaules daļā ir ASV, kas atrodas 40. vietā pasaulē. Kanādas pamatizglītības standarts nosaka, ka līdz 8. klases pabeigšanai skolēniem jāiemācās lietot augstākā līmeņa domāšanas prasmes, lai veidotu saistības starp matemātikas jēdzieniem, citiem mācību priekšmetiem un reālo pasauli (Council of Ministers of Education, Canada, 2010).

Latvijas kontekstā ir noderīgi iepazīties arī ar Lielbritānijā formulēto matemātikas mācību mērķi, jo *Skola2030* projekta tapšanas gaitā bija pieaicināti eksperti arī no Lielbritānijas. Turklāt Latvijas un Lielbritānijas izglītības sistēmai ir kopīgs izaicinājums – abām vēsturiski ir raksturīga izteikta fokusēšanās uz mācībām ar mērķi sagatavoties summatīvajiem kontroldarbiem un eksāmeniem. Lielbritānijas Izglītības kvalitātes valsts dienesta analogs Ofsted atzina, ka Lielbritānijā mācīšanās kontroldarbiem ir kļuvusi par daļu no mentalitātes un ka skolas uzraugošie inspektori radījuši situāciju, kad kontroldarbu rezultāti ir svarīgāki par visu pārējo (Sellgren, 2018).

Lielbritānijas pamatizglītības standarts par mērķi matemātikas mācībām nosaka to, ka visi skolēni brīvi apgūst matemātikas pamatzināšanas, spēj matemātiski pamatot savas domas un, pielietojot savas matemātikas zināšanas, prot atrisināt standarta un nestandarta uzdevumus. No 7. – 9. klašu skolēniem (*Key Stage 3*) tiek sagaidīts, ka laika gaitā viņi izveidos konceptuālu izpratni par matemātikas jēdzieniem, kā arī spēju ātri un precīzi atsaukt atmiņā un pielietot zināšanas. Skolēniem jāmācās saskatīt likumsakarības un jāprot tās vispārināt. Skolēniem jābūt gataviem, ka uzdevumi kļūst arvien sarežģītāki, tādēļ to risināšana paredz prasmi sadalīt uzdevumu vairākos vienkāršākos soļos. Lielbritānijas matemātikas mācību mērķis iekļauj arī audzināšanas vai ieradumu dimensiju: skolēniem jāmācās būt neatlaidīgiem, risinot matemātikas uzdevumus (Department for Education, 2013).

No autora izpētītajiem dažādu valstu pamatizglītības standartiem pats detalizētākais matemātikas mācību mērķu uzskaitījums ar to skaidrojumiem uz divām lappusēm ir Krievijā.

Papildus jau iepriekš citu valstu standartos minētajiem mērķiem Krievijas pamatizglītības standarts izvirza mērķi apgūt loģikas pamatus, kā arī attīstīt algoritmisko un telpisko domāšanu. Mācību mērķos ir izceltas prasmes galvā un rakstiski veikt aritmētiskās darbības. Kopumā matemātikas mācībām Krievijā ir izvirzīti 14 dažādi mērķi (Министерство образования и науки, 2014).

Latvijā pamatizglītības standarts tiek atjaunots vidēji ik pēc pieciem gadiem. Pēc Latvijas neatkarības atjaunošanas pirmais pamatizglītības standarts, kas aptvēra veselu izglītības pakāpi, bija 1998. gadā Izglītības un zinātnes ministrijas izdotais dokuments, kura tapšana aizņēma divus gadus. No mūsdienu prasību viedokļa matemātikas mācību mērķi šajā standartā ir samērā pieticīgi, lielākoties, uzskaitītas reproduktīvas prasmes. Matemātikas stundās skolēnam jāgūst pieredze domāt skaitļos, simbolos, modeļos. Nozīmīgākās prasmes ir aprēķinu un mērījumu veikšana; informācijas ieguve no grafikiem, tabulām, kartēm; matemātisko simbolu izpratne un lietošana un citas (Izglītības un zinātnes ministrija, 1998). 2000. gadā izdotajā pamatizglītības standartā matemātikas mācību mērķi palikuši nemainīgi (Ministru kabinets, 2000).

Saturiski būtiskākās izmaiņas mērķa formulējumā notika, pieņemot 2006. gada pamatizglītības standartu, kad pirmo reizi mērķos iekļautas prasmes pētīt un risināt praktiskus uzdevumus, izmantojot matemātiskos modeļus, iegūstot, sakārtojot, analizējot datus un prognozējot iegūstamo rezultātu, prasme izteikt matemātiski pamatotus spriedumus, un problēmrisināšanas pieredze. Savā ziņā ar šo formulējumu ir izteiktas tās pašas caurvijas, kuras joprojām mēģina iedzīvināt visu Latvijas skolēnu ikdienas mācīšanās pieredzē: radošums, analītiski kritiskā domāšana, sadarbība un citas (Ministru kabinets, 2006). 2013. un 2014. gadā izdotie pamatizglītības standarti vārds vārdā atkārto iepriekšējā standartā ietverto matemātikas mācību mērķi (Ministru kabinets 2013; Ministru kabinets 2014).

2020. gada 1. septembrī Latvijā stājās spēkā Ministru kabineta (MK) noteikumi Nr. 747 "Noteikumi par valsts pamatizglītības standartu un pamatizglītības programmu paraugiem", kas nosaka šādu kopīgu pamatizglītības satura īstenošanas mērķi: "Vispusīgi attīstīts un lietpratīgs skolēns, kurš ir ieinteresēts savā intelektuālajā, sociāli emocionālajā un fiziskajā attīstībā, dzīvo veselīgi un droši, mācās ar prieku un interesi, sociāli atbildīgi līdzdarbojas sabiedrības norisēs un uzņemas iniciatīvu, ir Latvijas patriots." (MK, 2018). Vispārīgā mērķa formulējumā var saskatīt atsauces uzreiz uz vairākām caurviju prasmēm, kas turpmāk veidos obligāto pamatizglītības saturu, tostarp pašvadītu mācīšanos un pilsonisko līdzdalību. Šāds mērķa formulējums ir krietni detalizētāks un saturiski labi saskan ar iepriekšējām trim pamatizglītības standarta redakcijām.

MK noteikumos Nr. 747 matemātikas mācību jomai mērķis ir formulēts kā matemātiskā pratība – noteiktu zināšanu, vispārīgu un specifisku prasmju un iemaņu kopums, kas skolēnam jāapgūst mācību jomā. Konkrēti matemātikas jomā tas nozīmē, ka skolēns situācijās ar matemātisku, citu mācību jomu un reālu kontekstu, jēgpilni lietojot matemātikas instrumentus:

- ✓ veic aprēķinus;
- ✓ apstrādā datus;
- ✓ lieto figūru īpašības;
- ✓ saskata sakarības starp lielumiem;
- ✓ spriež vispārīgi un matemātiski modelē;
- ✓ problēmsituācijās izvēlas atbilstošu pieeju vai paņēmienu;
- ✓ apzinās pierādījuma nepieciešamību un veido pamatotus spriedumus (MK, 2018).

3.1. tabula. Matemātikas mācību mērķi valstīs ar PISA matemātikas testā Eiropā augstākajiem rezultātiem 2018. gadā (autora veidots no attiecīgo valstu pamatizglītības standartiem)

Valsts Vieta Eiropā	**Igaunija 1. vieta**	**Nīderlande 2. vieta**	**Polija 3. vieta**	**Šveice 4. vieta**	**Dānija 5. vieta**
Mācību mērķis	Ļoti detalizēts: precīzi nosaka vēlamās prasmes un iemaņas.	Patstāvīga, praktiskā pieredze. Ir standarts, taču tajā nav pateikts saturs un metodes – skolotāji ir autonomi savā izvēlē.	Matemātika kā instruments citu mācību priekšmetu problēmu risināšanai.	Nav vienota izglītības standarta, mērķi ir reģionu ziņā. Piemēram, Bernes kantonā: paplašināt un padziļināt iepriekšējās zināšanās un izvēlēties turpmāko izglītību.	Apgūt matemātiskās prasmes un zināšanas un pielietot tās reālās dzīves situācijās
Saistība ar matemātisko kompetenci	Spēja pārnest matemātikas saturu uz dažādām situācijām.	Fokusējas uz pētnieciskām prasmēm, jaunu ideju sintēzi.	Akcentē problēmu risināšanu un praktisko pielietojumu.	Liela vērība reālās dzīves piemēriem matemātikā.	Matemātiskā kompetence nosaukta par galveno prioritāti.

Apkopojot 2018. gadā Eiropas Top-5 valstis pēc PISA matemātikas testa, var secināt, ka visām šīm valstīm ir ļoti atšķirīga pieeja pamatskolas standartam, dažādi mērķi matemātikas mācībām, kā arī it īpaši lielas atšķirības ir standarta saistībā ar matemātisko kompetenci (*skat. 3.1. tab.*), tādēļ līdzības varētu meklēt citos mācību organizatoriskās shēmas posmos, kuriem ir veltītas turpmākās apakšnodaļas.

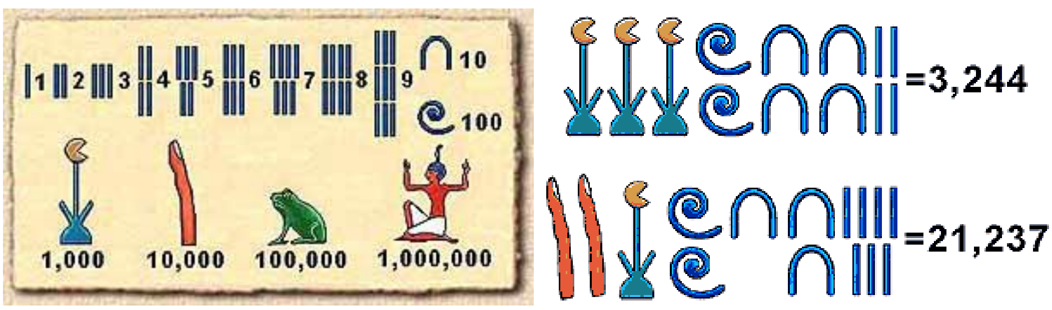
Rezumējot, var secināt, ka matemātikas mācību mērķim dažādās pasaules valstīs ir niansētas atšķirības, taču šim mērķim parasti var izšķirt trīs vienojošus apakšmērķus:

1) izglītojošo – saistītu ar matemātikas pamatzināšanu apguvi, kas veido pamatu citu mērķu sasniegšanai;
2) audzinošo – svarīgāko rakstura īpašību veidošana (ar tām dažādās valstīs saprot neatlaidību, iztēli, prasmi sadarboties, iniciatīvu u. c.);
3) attīstošo – matemātiskās intuīcijas un iztēles attīstība, spēja domāt abstrakti, vispārināt, izdarīt secinājumus u. tml.

3.2. Matemātikas mācību saturs un plānotie rezultāti

Nosacīti par pirmā matemātikas mācību satura rašanās brīdi var uzskatīt seno akmens laikmetu jeb paleolītu, kad pirmatnējie cilvēki uzkrāja pietiekami daudz zināšanu, lai mācētu novērtēt priekšmetu skaitu (Taimiņa, 1990). Mūsdienās priekšmetu skaitu “viens, divi, daudz” un divi kā sinonīmu vārdam “pāris” bērni iemācās jau pirmsskolas izglītības jaunākajā grupiņā līdz trīs gadu vecumam (Miesniece, 2012). Vēsturnieki uzskata, ka skaitļa jēdziens radās 50 tūkstošus gadu pirms mūsu ēras (p.m.ē.), savukārt, pirmo skaitļu pierakstu ar simboliem 3. tūkstošgadē p.m.ē. ieviesa ēģiptieši (Chrisomalis, 2003).

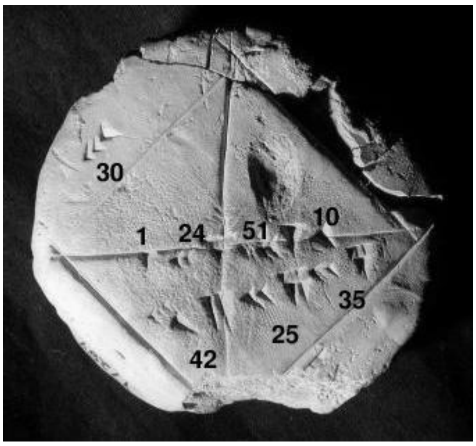
Jaunajā akmens laikmetā jeb neolītā, attīstoties zemkopībai un veidojoties kolektīvām apmetnēm, radās vajadzība pēc maiņas tirdzniecības, komunikācijas. Valodas attīstība sekmēja arī skaitļa jēdziena paplašināšanos, parādījās skaitļu grupēšana pa pieci un pa desmit. Radās nepieciešamība pēc garuma un tilpuma mērvienībām. Lai gan ģeometriskie ornamenti bija pazīstami jau 25 tūkstošus gadu p.m.ē., tieši neolīta laikmetā 4. tūkstošgadē p.m.ē. cilvēkiem attīstījās ģeometriskās formas izjūta. To veicināja jaunu arodu rašanās – podniekiem, grozu pinējiem, audējiem, vēlāk arī metālapstrādē bija vajadzīgs priekšstats par plakanu un telpisku priekšmetu attiecībām, figūru vienādību, simetriju un līdzību (Taimiņa, 1990).



3.3. att. **Senajā Ēģiptē lietotā decimālā skaitīšanas sistēma** (Burton, 2005)

Senajā Ēģiptē bija pazīstama decimālā skaitīšanas sistēma (*skat. 3.3. att.*), attapīgā skaitļu reizināšana un dalīšana, teksta uzdevumu risināšana ar lineāro vienādojumu, binoma kvadrāta formula $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, trijstūra un riņķa laukuma formulas (skaitļa π vērtība ņemta kā 256/81 jeb aptuveni 3,16), kā arī kuba, paralēlskaldņa, cilindra un nošķeltas piramīdas tilpuma formulas. Ēģiptiešu matemātikai raksturīgs tas, ka atziņas, formulas un likumi tika iegūti ne tikai empīriskā ceļā, bet arī ar teorētiskiem spriedumiem (Taimiņa, 1990). Senās Ēģiptes matemātikas saturs un metodes visvairāk atbilst Laursena skaidrojumam par matemātisko kompetenci, jo šajā definīcijā ir uzsvērta spēja uzdot jautājumus un atbildēt uz tiem, izmantojot matemātiskās metodes un rīkus (Laursen, 2010).

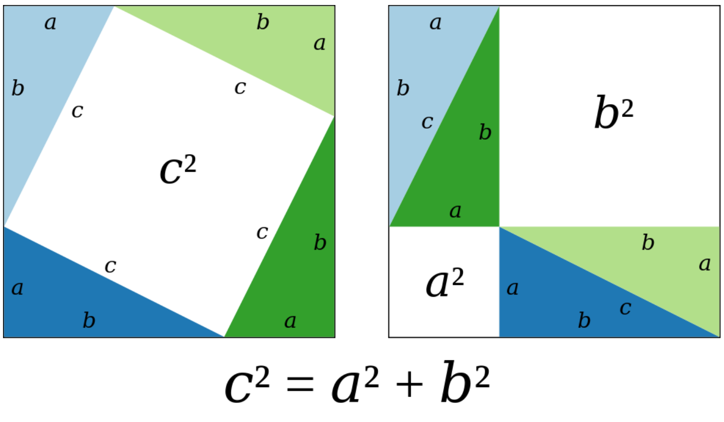
Senās Babilonijas matemātikā ap 1800. gadu p.m.ē. zināja heksadecimālo skaitīšanas sistēma, kuras bāze ir skaitlis 60, pazina skaitli $\sqrt{2}$, prata atrisināt kvadrātvienādojumus un dažu veidu kubiskos vienādojumus, piemēram, $ax^3 + bx^2 = c$, saliktos procentus, Pitagora teorēmu un Pitagora trijniekus (aptuveni 1000 gadu pirms Pitagora), skaitļa π novērtējumu kā 25/8 jeb 3,125. Babilonieši reizināšanu veica saistītajā pierakstā, gluži kā mūsdienās, vienīgi mūsu reizrēķina tabulā jāiegaumē 45 reizinājumi, tikmēr Senajā Babilonijā lietotajā heksadecimālajā sistēmā šādu reizinājumu bija 1770, tādēļ tika lietotas reizināšanas tabulas. Vienā no plāksnītēm var redzēt skaitļa $\sqrt{2}$ pierakstu heksadecimālajā sistēmā: 1 24 51 10, kas decimālajā sistēmā atbilst $1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$, kas ir aptuveni 1,41421296, kas atšķiras no precīzās skaitļa $\sqrt{2}$ vērtības 1,41421356… mazāk nekā par vienu miljono daļu (*skat. 3.4. att.*). Dalīšana tika aizstāta ar reizināšanu ar apgrieztu skaitli, piemēram, $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$ (Berriman, 1956). Senās Babilonijas matemātikas saturā vērojama sabalansētības starp praktisko pielietojumu un abstraktiem piemēriem un pierādījumiem, kas saskan ar Nissa matemātiskās kompetences definīciju (Niss, 2011).



3.4. att. **Babilonijas plāksnīte ar skaitļa $\sqrt{2}$ novērtējumu** (Casselman, 2007)

Svarīgs pavērsiens matemātikas mācību saturā notika 6. – 5. gadsimtā p.m.ē., kad Senajā Grieķijā matemātika nostiprinājās kā zinātne, kuras pamatā ir stingri pierādījumi. Matemātikas izpēte pati par sevi un vispārējo matemātisko teoriju un pierādījumu izmantošana ir galvenā atšķirība starp seno grieķu matemātiku un iepriekšējo civilizāciju matemātikas saturu. Senās Grieķijas skolās, tostarp Pitagora skolā un Platona filozofiskajā skolā matemātikas praktiskais lietojums tika uzskatīts par "zemāku" nodarbošanos, bet pierādījumi – par ceļu uz "tīro ideju" pasauli (Taimiņa, 1990). Senās Grieķijas matemātikas saturs cieši saskan ar Tērnera matemātiskās kompetences formulējumu, jo iekļauj spriešanu, pamatošanu, stratēģisko domāšanu, bet neizvirza praktisko pielietojumu par primāro mērķi (Turner, 2011).

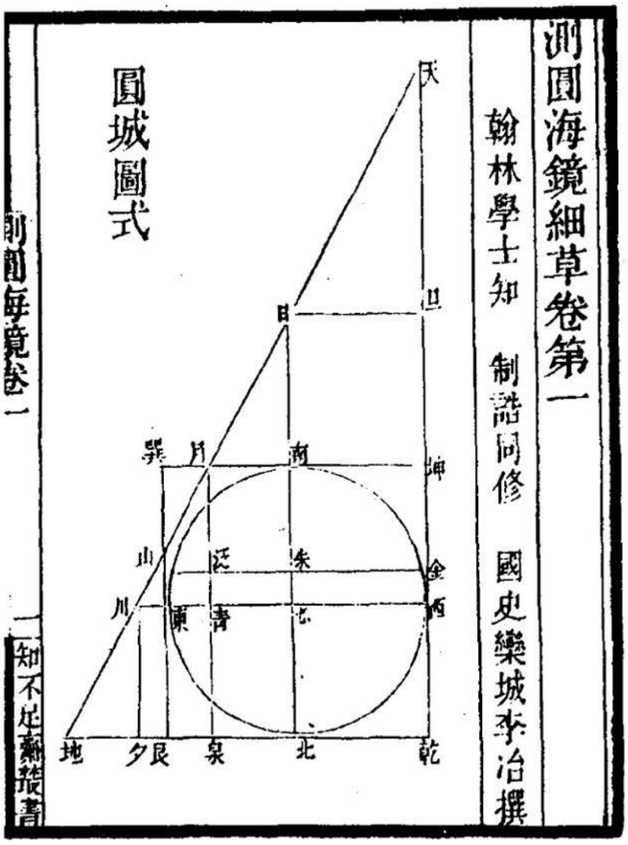
Tai pat laikā, hipotēzes daudziem tā laika pierādījumiem tika izvirzītas empīriski, un tikai tad tās pierādītas ar formāliem paņēmieniem. Piemēram, Eiklīds ar pierādījumu no pretējā pamatoja, ka skaitlis $\sqrt{2}$ ir iracionāls, proti, to nevar izteikt kā vesela un naturāla skaitļa dalījumu. Tiek uzskatīts, ka Pitagors pierādīja leģendāro Pitagora teorēmu, kaut gan līdz mūsdienām ir saglabājušies tikai nostāsti, ka viņš izmantoja algebrisku pierādījumu. Mūsdienās ir pazīstami vairāk kā 400 dažādi Pitagora teorēmas pierādījumi, taču joprojām viens no populārākajiem un arī vienkāršākajiem pierādījumiem ir Eiklīda piedāvātais taisnleņķa trijstūru pārkārtošanas pierādījums, kurā vizuāli uzskatāmā veidā tiek parādīts, ka uz taisnleņķa trijstūra katešu malām konstruēto kvadrātu laukumu summa $a^2 + b^2$ ir tāda pati kā laukums kvadrātam, kura malas garums ir šī taisnleņķa trijstūra hipotenūza c (Benson, 1999; *skat. 3.5. att.*).



3.5. att. **Viens no Eiklīda piedāvātajiem Pitagora teorēmas pierādījumiem** (Benson, 1999)

Eudokss pamatoja piramīdas tilpuma formulu. Taless pierādīja daudzas teorēmas par tādiem planimetrijas elementiem kā taisne, leņķis, trijstūris. Iespējams, slavenākā no Talesa pierādītajām teorēmām ir par nogriežņa sadalīšanu patvaļīgā skaitā vienādu nogriežņu. Eiklīds savā darbā "Elementi" konstruēja ģeometrijas loģisko uzbūvi, izmantojot aksiomātiku. Šis darbs ietekmēja matemātikas attīstību līdz pat mūsdienām. No šiem un daudziem citiem piemēriem ne tikai ģeometrijā, bet arī skaitļu teorijā, trigonometrijā un algebrā var izdarīt secinājumus par to, kāds bija matemātikas mācību saturs Senajā Grieķijā, jo līdz mūsdienām diemžēl ir saglabājušies tikai nedaudzi mācību materiāli (Boyer, Merzbach, 1991).

Senās Romas matemātika visbiežāk asociējas tieši ar romiešu cipariem, jo tos joprojām lieto, piemēram, lai pierakstītu *Grammy* balvu pasniegšanas vai citu pasākumu numurus, numurētu Dziesmu un deju svētkus, gadsimtu un monarhu pierakstā un daudz kur citur. Tomēr šīs nav vienīgais matemātikas saturs, kas ir saglabājies līdz pat mūsdienām. Piemēram, Hērona formula patvaļīga trijstūra laukuma aprēķināšanai $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, kur S ir trijstūra laukums, p – trijstūra pusperimetrs un a, b, c – trijstūra malu garumi. Turpinot babiloniešu un grieķu paveikto ģeometrijā, Ptolemajs pierādīja vienādību $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, kuru mūsdienām pazīstam kā trigonometrisko pamatidentitāti, kā arī vēl daudzas citas, krietni komplicētākas trigonometriskās identitātes, tostarp $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$. Arī Senajā Romā pastāvēja skaitļa π novērtējums – to tuvināti aizstāja ar 22/7 jeb aptuveni 3,143. Ir vēl daudzi citi piemēri (Gullberg, 1997). No šiem piemēriem var secināt, ka Senajā Romā līdzīgi kā Senajā Grieķijā matemātikas saturā fokuss bija uz teorētisko matemātiku (Turner, 2011).

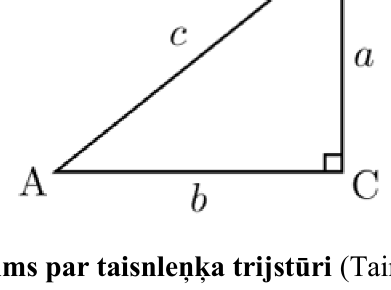


3.6. att. **Taisnleņķa trijstūrī ievilkta riņķa līnija** (Boyer, Merzbach, 1991)

Ķīnā matemātika radās 11. gadsimtā p.m.ē. Vēsturnieki uzskata, ka valodas un ģeogrāfisko barjeru dēļ Ķīnas matemātika attīstījās neatkarīgi no tā laika Vidusjūras civilizāciju darbiem. Uz to norāda arī tas, ka ķīnieši pazina negatīvos skaitļus, tikmēr Eiropā no teorētiska koncepta par plaši lietotu matemātisku ideju tie kļuva tikai mūsu ēras 17. gadsimtā. Ķīnā pazina arī daļas, decimāldaļas, decimālo skaitīšanas sistēmu, bināro skaitīšanas sistēmu, algebru, ģeometriju un trigonometriju. Šo zināšanu lietojums arhitektūrā un citās nozarēs norāda uz to, ka Ķīnā bija plašāka matemātiskā kompetence. Senajā Ķīnā bija zināšanas par kvadrātvienādojumu risināšanu un vienādojumu sistēmu atrisināšanu ar izslēgšanas metodi. Tāpat kā Senajā Babilonijā, arī Ķīnā zināja Pitagora teorēmu piecus gadsimtus pirms Pitagora piedzimšanas. Ķīnieši noteica skaitli π kā 3,1415926, proti, ar precizitāti līdz procenta miljonai daļai. Tas ir pats precīzākais no šī skaitļa novērtējumiem, kas ir izteikts p.m.ē. Mūsu ēras 13. gadsimta ķīniešu matemātiķis L. Je (*Li Ye*) ir apkopojis 692 formulas, kas ir saistītas ar trijstūrī ievilktu riņķa līniju. Ģeometrijā līdz mūsdienām saglabājās un plašu atpazīstamību ir ieguvusi taisnleņķa trijstūrī ievilktās riņķa līnijas rādiusa formula $r = \frac{ab}{a+b+c}$, kur a un b ir taisnleņķa trijstūra katetes un c – hipotenūza (*skat. 3.6. att.*), kas faktiski ir jebkura ap riņķa līniju apvilkta daudzstūra laukuma formulas $S = pr$, kur p ir šī daudzstūra pusperimetrs, speciālgadījums (Needham, 1986).

Decimālā skaitīšanas sistēma un ciparu pieraksts, kuru lietojam mūsdienās, pirmo reizi rakstiski tika fiksēts Indijas matemātikā. Viduslaikos eiropieši pārņēma no Indijas arī izpratni par skaitli nulle, negatīvajiem skaitļiem. Trigonometrisko funkciju definīcijas un nosaukumi sinuss un kosinuss, kā arī redukcijas formulas un argumentu saskaitīšanas formulas radās tieši Indijā. Indieši izdomāja vairākus mūsdienās lietotus paņēmienus, kā atjautīgi kāpināt skaitli kvadrātā un kubā, tostarp $n^3 = (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Protams, bija prātīgi jāizvēlas saskaitāmie a un b. Indijā jau 2. tūkstošgadē p.m.ē. izgudrots paņēmiens rakstīt daļas ar skaitītāju un saucēju. Indieši lietoja tādas daļas kā ½, ¼, ¾ un citas (Plofker, 2009).

$$\begin{cases} ab = 2S \\ a + b + c = P \\ a^2 + b^2 = c^2 \end{cases}$$



3.7. att. **Bāskara formulētais uzdevums par taisnleņķa trijstūri** (Taimiņa, 1990)

Mūsu ēras 7. gadsimtā Indijā mācēja aprēķināt taisnleņķa trijstūra malas a, b un c, ja bija dots šī trijstūra laukums S un perimetrs P, kas ir komplicēta trīs vienādojumu sistēma (*skat. 3.7. att.*). Indijā bija augstu attīstīta kombinatorika, kuru mūsdienās apgūst vidusskolēni: bija ne tikai zināma kombināciju C_n^k formula, bet arī sakarība $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$, kas ievērojami samazina veicamo aprēķinu skaitu tādiem kombinatorikas uzdevumiem, kuros jāaplūko elementu kombinācijas dažāda apjoma grupās. Stereometrijā bija zināma ne tikai prizmas un konusa, bet arī nošķelta konusa un lodes tilpuma formula. Bija pazīstama aritmētiskā un ģeometriskā progresija, parciālsummas (Singh, 1936). Senās Ķīnas un Indijas matemātikas saturs atbilst OECD matemātiskās kompetences definīcijai, jo iekļāva ne tikai matemātisko problēmu formulēšanu un matemātikas zināšanu un prasmju pielietošanu šo problēmu risināšanai, bet arī iegūto rezultātu interpretāciju un pārnesi uz dažādiem reālās dzīves kontekstiem (OECD, 2019a).

Islāma zelta laikmetā no 8. līdz 13. gadsimtam radās daudzi matemātiski jēdzieni un metodes: decimālā pozicionālā skaitīšanas sistēma, ciparu pieraksts, n-tās pakāpes sakne, vārds "algebra", intuitīva integrāļa izpratne, matemātiskā indukcija, skaitlis π ar precīzi aprēķinātiem 17 decimālcipariem, sinusa divkāršā argumenta formula $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, sinusa teorēma $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$, kur a, b un c ir patvaļīga trijstūra malas, α, β, γ – šo malu pretleņķi un R – trijstūrim apvilktās riņķa līnijas rādiuss. Islāma matemātiķiem bija raksturīga aizraušanās ar dažādām skaitliskām likumsakarībām, kuras tika uzskatītas par maģiskām (*skat. 3.8. att.*). Islāma matemātika ietvēra daudzas hellēnisma laika un Indijas zināšanas, jo musulmaņu impērija sniedzās no mūsdienu Spānijas līdz Indijai (Sesiano, Helaine, D'Ambrosio, 2000).

$$
\begin{aligned}
1 \times 8 + 1 &= 9\\
12 \times 8 + 2 &= 98\\
123 \times 8 + 3 &= 987\\
1234 \times 8 + 4 &= 9876\\
12345 \times 8 + 5 &= 98765\\
123456 \times 8 + 6 &= 987654\\
1234567 \times 8 + 7 &= 9876543\\
12345678 \times 8 + 8 &= 98765432\\
123456789 \times 8 + 9 &= 987654321
\end{aligned}
$$

3.8. att. **Maģisko sakarību piemērs Islāma matemātikā** (autora veidots)

Viduslaiku matemātikas mācību saturam raksturīga aprobežošanās ar sadzīvē nepieciešamām matemātikas zināšanām, tādām kā darbības ar veseliem skaitļiem un daļām un vienkāršāko figūru mēri. Nostiprinājās izteikta sociālā noslāņošanās, kad bagātu vecāku bērni apguva plašāku matemātikas kursu, taču no mūsdienu skatupunkta tas tāpat bija visai primitīvs. Tas ietvēra vienkāršāko skaitļu īpašību izklāstu bez pierādījumiem, īsas ziņas par ģeometrijas pamatobjektiem un mēriem, teksta uzdevumus par kustību. Šis zināšanu un prasmju apjoms neatbilst mūsdienu matemātiskās kompetences izpratnei. Vēlīnajos viduslaikos Eiropā iztulkoti daudzi Islāma matemātikas darbi un sākās tajos ietverto atziņu popularizēšana (Clagett, 1961).

15. un 16. gadsimts jeb Renesanse Eiropā ir pazīstama kā atdzimšana, kad zinātne un kultūra atguva tādu prestižu un attīstības līmeni kā antīkajā pasaulē. Attīstoties tirdzniecībai un finanšu jomai, arī matemātikas saturs mainījās – tika izdotas matemātikas mācību grāmatas ar teksta uzdevumiem par grāmatvedības darbībām, kredītu un noguldījumu salikto procentu aprēķiniem. 15. gadsimta beigās saskaitīšanas un atņemšanas darbības sāka apzīmēt ar + un – zīmēm. 16. gadsimta vidū radās izpratne par imagināro vienību $i = \sqrt{-1}$. Tajā pašā laikā radās Vjeta teorēma reducēta kvadrātvienādojuma sakņu aprēķināšanai un Kordano formula kubiskā vienādojuma saknēm. Renesanses gadsimti sakrīt ar lielo ģeogrāfisko atklājumu laiku, tādēļ trigonometrija kļuva par noteicošo matemātikas jomu (Grattan-Guinness, 1997). Renesanses laika matemātikas lietojums atbilst matemātiskai kompetencei Eiropas Komisijas izpratnē, jo fokusējās uz matemātiskās domāšanas lietojumu ar mērķi atrisināt problēmas ikdienas situācijās (European Commission, 2007).

Zinātniskās revolūcijas laikā 17. un 18. gadsimtā atklāts logaritms, ar matemātiskām formulām aprakstīti planētu kustības likumi, R. Dekarta piedāvātā koordinātu sistēma deva pamatu analītiskās ģeometrijas attīstībai un ļāva aprakstīt debess ķermeņu orbītas. I. Ņūtons atklāja daudzus fizikas likumus un pierakstīja tos ar matemātiskām formulām. G. Leibnics attīstīja diferenciālrēķinus un ieviesa lielāko daļu šīs matemātikas nozares līdz pat mūsdienām lietoto apzīmējumu. P. Fermā un B. Paskāls sāka pētījumus kombinatorikā un varbūtību teorijā. L. Eilera formulētā grafu teorija tiek uzskatīta par nozīmīgāko atklājumu matemātikā 18. gadsimtā (Struik, 1987).

Pēc 1. nodaļā jau minētās R. Krikas kompetences definīcijas, ka kompetence ir zināšanu, prasmju, izpratnes, vērtību, attieksmju un vēlmju kombinācija, kas sekmē efektīvu cilvēka rīcību konkrētā nozarē vai sabiedrībā kopumā (Crick, 2008), vismaz daži matemātikas mācību satura elementi jau pirms mūsu ēras atbilst kompetences pazīmēm, it sevišķi Senajā Ķīnā, Indijā un Islāma matemātikā. Jāsecina, ka Senās Grieķijas un vēlāk Senās Romas matemātiķus vairāk piesaistīja abstraktas problēmas, kas nav tieši saistītas ar tā laika sabiedrības pieprasījumu pēc noteiktām zināšanām, toties ļoti labi atbilst tādām kompetences pazīmēm kā nestandarta un nepazīstamu situāciju pētīšana un kritiskā domāšana. Vistiešāk matemātikas saturs atbilst kompetences pazīmēm, sākot ar mūsu ēras 15. gadsimtu, kad slavenākie matemātikas atklājumi izrietēja no praktiskām vajadzībām, proti, tiešā veidā ietekmēja efektīvu cilvēka un sabiedrības darbību. Piemēram, intuitīvi ideja par polārajām koordinātām, kuras varētu lietot, lai precīzi aprēķinātu attālumus starp punktiem uz spirāles vai sfēras, tostarp Zemeslodes, bija pazīstama vēl Senajā Grieķijā (King, 2005), taču formāli precīzs polāro koordinātu lietojums datējams jau ar mūsu ēras 17. gadsimtu (Coolidge, 1952).

17. gadsimts iezīmē brīdi, kad matemātikas zinātne attīstījās tik strauji, ka tās jaunākie atklājumi kļuva pārāk specifiski un sarežģīti, lai ietekmētu matemātikas mācību saturu. Modernajā matemātikā (laikā kopš 19. gadsimta) šī tendence tikai arvien vairāk nostiprinājās. Piemēram, cariskajā Krievijā 19. gadsimta beigās lielākā daļa bērnu mācījās trīs gadus, un matemātikas mācību saturu veidoja vien četras aritmētiskās darbības līdz 1000, vienkāršākie mēri un prasme risināt elementārākos teksta uzdevumus (Mencis, 1984).

Visās pasaules valstīs periodiski tiek reformēts matemātikas mācību saturs, mēģinot atrast labāko līdzsvaru starp akadēmiskajām zināšanām, abstrakto un reālajā dzīvē pielietojamo saturu. Matemātikas mācību programmas un saturs 21. gadsimtā globalizācijas ietekmē visā pasaulē kļūst līdzīgāks (Namukasa, 2004). Tajā pašā laikā pētnieki uzsver, ka jāņem vērā atšķirīgās izpratnes, pieminot programmu – tā var būt paredzētā mācību programma, praksē ieviestā programma, mācību grāmatu programma. Lai objektīvi salīdzinātu vairāku valstu matemātikas programmu, tiek pētītas visas nupat pieminētās mācību programmas izpratnes, kā arī, iespējams, vēl citas (Silver, 2009).

Kā jau minēts, dažās valstīs, tostarp Šveicē un Nīderlandē, nemaz nav vienota pamatizglītības standarta. 21. gadsimtā Nīderlandē veikto izglītības reformu virzošais spēks matemātikas mācīšanā bija spēcīgā matemātikas skolotāju kopiena, pētnieki, mācību grāmatu autori un zinātnisko konferenču un žurnālu publicētie materiāli. Matemātikas mācību uzlabošanu lielā mērā veicināja jauno mācību grāmatu izdošana (Wijers, van den Heuvel-Panhuizen, 2005).

Jaunajā pamatizglītības standartā Latvijā matemātikas saturs ir strukturēts sešos tematiskajos blokos jeb "lielajās idejās", paredzot lielāku skolotāju autonomiju. R. Charles skaidro šos tematiskos blokus kā formulējumu tādai idejai, kas ir svarīga matemātikas apguvē, saista vairākas matemātikas atziņas vienotā veselumā. Ja skolēns tās saprot, tad matemātika vairs netiek uztverta kā nošķirti jēdzieni, fakti, koncepti un prasmes, bet gan kā saistītu ideju kopums (Charles, 2005).

Īsumā matemātikas lielos tematiskos blokus Latvijā var formulēt šādi: matemātikas valoda; matemātikai raksturīgās stratēģijas un spriešana; skaitļi, darbības ar tiem; algebras elementi un sakarības; figūras; dati un statistikas elementi. Pamatizglītības standartā ir lietoti mazliet detalizētāki tematisko bloku skaidrojumi (*skat. 3.2. tab.*). Šis uzskaitījums kombinē Laursena un Tērnera matemātiskās kompetences skaidrojumus (Laursen, 2010; Turner, 2011).

3.2. tabula. Latvijas matemātikas mācību satura tematiskie bloki un to saistība ar starptautiski pieņemto matemātikas mācību satura struktūru (autora veidots)

Latvijas matemātikas mācību satura tematiskie bloki (MK, 2018)	**Atbilstošie starptautiski pieņemtie tematiskie bloki matemātikas mācību saturā** (Charles, 2005)
1. Matemātikas valodu izmanto saziņai un zinātniskai jēdzienu, ideju, problēmu risinājumu aprakstīšanai.	Mainīgais – matemātiskās situācijas un struktūras var attēlot abstrakti, izmantojot mainīgos, izteiksmes un vienādojumus.
2. Risināt problēmu matemātikai raksturīgi nozīmē saskatīt struktūras, sistēmas, sakarības, veidot vispārinājumus un tos pierādīt.	Pierādījumi – matemātiskos apgalvojumus var pierādīt vai atspēkot, izmantojot iepriekš pierādītus apgalvojumus, aksiomas un pieņēmumus. To var darīt, lietojot fiziskus objektus, diagrammas vai algebru. Klasifikācija – abstraktus un konkrētus matemātiskus jēdzienus var grupēt pēc to īpašībām
3. Skaitļus izmanto konkrētu, arī praktisku uzdevumu atrisināšanai. Katrai darbībai ar skaitļiem ir noteikta jēga, un to izpildei ir noteikti likumi/algoritmi.	Skaitļi – reālo skaitļu kopa ir bezgalīga, katru reālu skaitli var interpretēt kā unikālu punktu uz skaitļu ass. Decimālā skaitīšanas sistēma – naturālu skaitļu pieraksts, cipara vērtība atkarībā no tā atrašanās vietas skaitlī. Vienādība – jebkuru skaitli, mērījumu, skaitlisku un algebrisku izteiksmi, vienādojumu var izteikt bezgalīgi daudzos veidos. Salīdzināšana – skaitļus, izteiksmes un mērījumus var salīdzināt pēc to vērtībām. Aritmētisko darbību jēga – viena un tā pati skaitliska izteiksme var tikt saistīta ar dažādām reālās dzīves situācijām, bet dažādas skaitliskas izteiksmes – ar vienu un to pašu situāciju. Īpašības – dotai skaitļu kopai pastāv sakarības, kas vienmēr ir patiesas; aritmētika un algebra balstās uz noteiktiem likumiem un sakarībām. Pamata fakti un algoritmi – lieto ekvivalences ideju, lai vienkāršotu aprēķinus. Novērtējumi – skaitliskus aprēķinus var tuvināti novērtēt, aizstājot skaitļus ar citiem skaitļiem, kuri ir tuvi un ir vienkāršāki par galvas rēķiniem. Mērījumus var tuvināti novērtēt, izmantojot pazīstamas, parocīgas mērīšanas vienības.

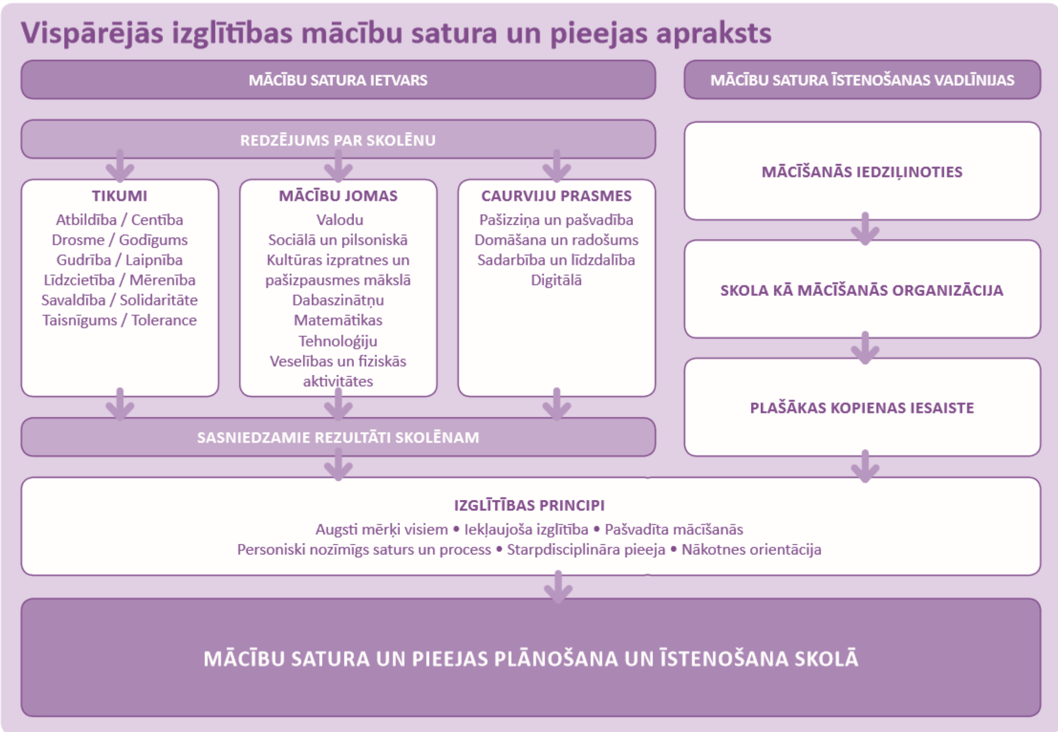
4. Sakarības starp lielumiem apraksta algebriskie modeļi un funkcijas. Izmantojot šos modeļus problēmu risināšanai, tos pārveido, nodrošinot ekvivalenci	Likumsakarības – matemātiskās situācijas, kurās ir skaitļi vai objekti, kas atkārtojas paredzamā veidā, var aprakstīt un vispārināt. Proporcionalitāte – ja divi lielumi mainās proporcionāli, tad attiecību starp tiem var aprakstīt kā lineāru funkciju. Sakarības un funkcijas – matemātiskus likumus (sakarības) var lietot, lai piekārtotu vienas kopas elementus citai kopai. Īpašs likums (funkcija) piekārto katram elementam tikai vienu citas kopas elementu.
5. Datus par objektiem, situācijām, notikumiem, procesiem var matemātiski apstrādāt, analizēt, lai pieņemtu pamatotus lēmumus.	Datu ieguve – jautājumi, kurus uzdot aptaujas dalībniekiem, nosaka tas, kādus datus vajag iegūt. Datu attēlošana – datus var attēlot vizuāli, lietojot tabulas, diagrammas un grafikus. Datu veids nosaka vislabākā vizuālā attēlojuma izvēli. Datu izkliede – ir īpaši skaitliski rādītāji, kuri raksturo skaitlisko datu kopas izkliedi. Varbūtība – notikuma iespējamību var raksturot skaitliski ar vērtību no 0 līdz 1 ieskaitot. To izmanto, lai izdarītu prognozes par citiem notikumiem.
6. Figūru īpašību, novietojuma, to raksturojošo lielumu izpēte ļauj risināt konkrētas, arī praktiskas, problēmas, formulēt vispārīgus secinājumus par objektiem, telpu, formu	Vienādojumi un nevienādības – aritmētikas un algebras likumus var lietot, lai pārveidotu vienādojumus un nevienādības un atrastu atrisinājumus. Figūras un telpiski ķermeņi – divdimensionālas un trīsdimensionālas figūras ar vai bez izliektām virsmām var aprakstīt, klasificēt un analizēt pēc to īpašībām. Novietojums – telpā esošās figūras var būt novietotas bezgalīgi daudz veidos, objekta atrašanos telpā var raksturot kvantitatīvi. Transformācijas – figūras telpā var transformēt bezgalīgi daudz veidos, un šīs transformācijas var aprakstīt un analizēt matemātiski. Mērījumi – dažas figūru īpašības ir izmērāmas, tās var pierakstīt ar skaitļiem, lietojot mērvienības.

Sākotnēji bija iecerēts, ka tematisko bloku būs divtik vairāk, taču satura publiskās apspriešanas, aprobācijas un uzlabošanas gaitā tos apvienoja. Doma strukturēt matemātikas saturu šādos blokos jeb "lielajās idejās" radās 20. gadsimta astoņdesmitajos gados ASV. Atšķirība no Latvijas piedāvājuma – pasaules pieredzē parasti to skaits ir krietni lielāks (*skat. 2.2. tab.*). Bieži citēts ir R. Charles 2005. gadā izstrādātais 21 tematiskā bloka saraksts, kuru Kembridžas Universitāte papildināja vēl ar diviem punktiem, rezultātā iegūstot 23 tematiskos blokus (Charles, 2005).

Latvijā izstrādātie seši tematiskie bloki veido labu līdzsvaru starp visām kompetences pazīmēm: tajos ir pieminētas svarīgākās matemātikas zināšanas un prasmes, tai skaitā –

sarežģītākās kā vispārināšana un pierādīšana; vairākkārt ir pieminēta izpratne; netiešā veidā skolēna attieksme ir pieminēta piektajā tematiskajā blokā, jo, pateicoties matemātikas zināšanām un prasmēm, no skolēna tiek sagaidīti pamatoti lēmumi.

Ir arī citi pētījumi un piedāvājumi par to, kā strukturēt matemātikas saturu pa tematiskajiem blokiem. Piemēram, D. Siemon 2006. gadā iedalīja algebras saturu sešos tematiskajos blokos jeb, kā viņa tās sauc, līmeņos, kuri pusaudzim jāapgūst līdz 8. klases beigām. Tie ir skaitļu izjūta, skaitļu šķiru un decimālās skaitīšanas sistēmas izpratne, efektīvas stratēģijas skaitļu reizināšanai un dalīšanai (skolēns vairs neuztver reizināšanu kā tikai atkārtotu saskaitīšanu), darbības ar plašākām skaitļu kopām (lielākiem veseliem skaitļiem, racionāliem skaitļiem, attiecībām, procentiem), uzdevumi par daļām, procentiem, attiecībām, kuros netiek lietoti standarta algoritmi un vispārināšana: skolēni atpazīst, apraksta un attēlo likumsakarības, modeļus un funkcijas; algebriskās izteiksmes un likumsakarības, risinot plaša spektra matemātiskās problēmas (Siemon, 2016).



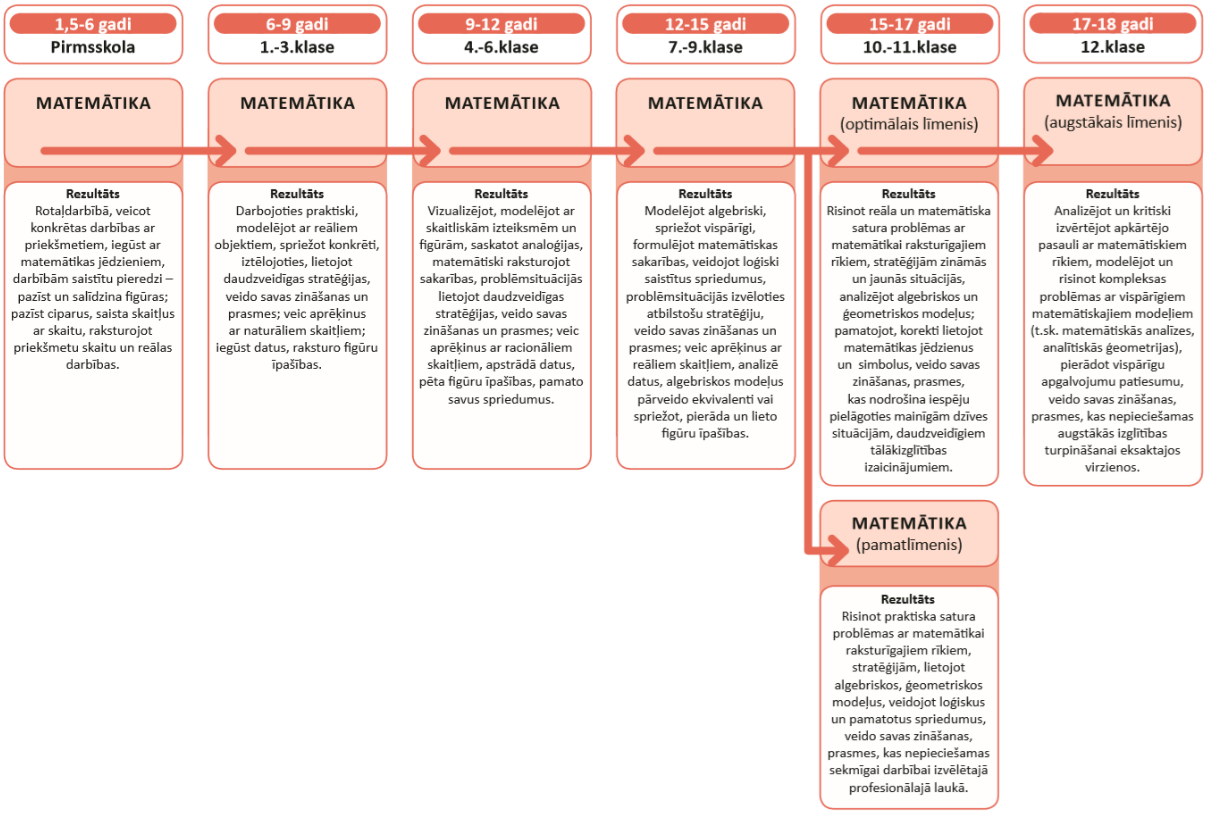
3.9. att. **Vispārējās izglītības mācību satura un pieejas apraksts** (Kakse, 2017)

Skaidrojot pārmaiņas matemātikas mācīšanā, J. Vilciņš kā piemēru min radošos uzdevumus – skolotājiem jāpiedāvā skolēniem tādi uzdevumi, kuriem ir vairāki risinājumi un kuriem ir iespējama dažāda formalizācijas pakāpe. Runājot par saturu, *Skola2030* matemātikas mācību satura vecākais eksperts dod arī tādu visumā dažādi traktējamu padomu: veidot skolēniem ieradumu domāt (Vilciņš, 2018).

Jaunā izglītības standarta mācību satura struktūru veido projekta autoru redzējums par skolēnu. No šī redzējuma izriet 12 tikumi, mācību jomas, caurviju prasmes, sasniedzamie rezultāti skolēnam, izglītības principi un mācību satura un pieejas plānošana un īstenošana skolā (*skat. 3.9. att.*). Mācību satura un pieejas apraksts sākas ar mācību satura ietvaru un redzējumu par skolēnu. Jaunajam saturam un pieejai jāattīsta tādi skolēnu tikumi, kurus sākotnējā šī dokumenta versijā dēvēja par ieradumiem, kā atbildība, centība, gudrība, savaldība u. c. Skolēnam jāapgūst četras caurviju prasmes: pašizziņa un pašvadība, domāšana un radošums, sadarbība un līdzdalība un digitālās prasmes. Sākotnēji projekta materiālos bija atrodamas sešas caurvijas, kas tika dēvētas par caurviju kompetencēm. Caurviju prasmes skolēni apgūst visās septiņās mācību jomās. Caurviju prasmes ir svarīgas pašas par sevi, taču tās arī nodrošina mācību kontekstu caurviju kompetenču attīstībai un izmantošanai (Kakse, 2017). Galīgajā variantā kā patstāvīgas caurvijas neiekļuva mediju kompetence, problēmu risināšana, kritiskā domāšana, jaunrade, pašiniciatīva un uzņēmējspēja, mācīšanās mācīties un saziņas – tās visas ir pakārtotas kādai no četrām caurvijām. Vairākas no šīm pakārtotajām caurvijām ir minētas matemātiskās kompetences skaidrojumos (Laursen, 2010; Niss, 2011).

Metodiski galvenā atšķirība kompetenču pieejā mācību saturam ir tāda, ka skolēnam matemātikas stundās jāprot ne tikai piemērot doto formulu konkrētam uzdevumam, bet arī atpazīt un nodefinēt problēmu, izvēlēties piemērotāko risināšanas paņēmienu, pielietot šo paņēmienu jaunā, nepazīstamā situācijā, izvērtēt problēmas risināšanas nozīmību un savu motivāciju, atrast nepieciešamos papildus resursus tās risināšanai, izstāstīt citiem par situāciju, sadarboties ar citiem, ja tas nepieciešams u. tml. Piedāvātā caurviju kompetenču komplekta mērķis ir kalpot par pamatu šādai paplašinātai un padziļinātai izpratnei par zināšanu, prasmju un attieksmju kopu, kas nepieciešama kompetentai rīcībai jebkurā jomā (VISC, 2015).

Vēl viens būtisks pārmaiņu akcents ir pēctecība. Lai nodrošinātu organiskāku skolēnu pāreju no viena izglītības posma uz nākamo, rezultāti savā ziņā tiek "pārmantoti" (*skat. 3.10. att.*), vecākiem skolēniem formulētie mācību rezultāti izriet no iepriekšējos izglītības gados sasniegtajiem rezultātiem. 3.1. apakšnodaļā minēts, ka pēctecība tiek minēta kā viens no svarīgākajiem Singapūras matemātikas izglītības panākumu iemesliem. B. Kaur un pētnieku grupa, M. T. Tatto un pētnieku grupa, J. Badger un A. R. Setiawan akcentē, ka pēctecība matemātikas standartā no 1. līdz pat 12. klasei, kaut arī ir nozīmīgs faktors Singapūras skolēnu panākumos PISA testā, tomēr noteikti ne vienīgais (Badger, 2013; Kaur et al., 2015; Setiawan, 2019; Tatto et al., 2012).



3.10. att. **Mācību rezultāti matemātikas mācību jomā** (Kakse, 2017)

Septiņas augstākās vietas PISA matemātikas testā 2015. gadā ieguva Āzijas valstis, kurām visām vēsturiski ir raksturīga fokusēšanās uz problēmrisināšanas prasmēm un mācīšanos ar izpratni. Piemēram, Ķīnā autonoma un tikai šim reģionam autentiska matemātikas apguves metodika izveidojās jau 11. gadsimtā p.m.ē. (Calinger, 1999). Salīdzinājumam – Senajā Grieķijā tajā pašā laikā bija tā dēvētie "tumšie gadsimti", kad Mikēnās iebruka dorieši, kas iezīmēja ahaju civilizācijas bojāeju. Līdz Pitagoriešu skolai vēl bija jāpaiet 500 gadiem.

Kā rāda matemātikas satura attīstības vēsturiskais pārskats, matemātika nemitīgi papildinās ar aizvien jaunām atziņām, jēdzieniem, teorēmām, kā rezultātā mūsdienās matemātika pamatskolā apvieno aritmētiku, algebru, ģeometriju un vēl daudzus citus tematus, kuri nav tieši attiecināmi uz kādu no šīm matemātikas pamatnozarēm: lielumi un to mērīšana, teksta uzdevumi u. c. Paviršam vērotājam varētu rasties maldīgs iespaids, ka mūsdienu pamatskolas matemātikas saturs ir kā savdabīgs daudzu atziņu, faktu un metožu apkopojums, kura apguvei pamatskolēni tērē aptuveni piektdaļu skolā pavadītā laika. Patiesībā matemātikā visi minētie temati un nozares ir saistītas mērķtiecīgā sistēmā, kurā gandrīz visas zināšanas un prasmes tiek apgūtas pakāpeniski – uz jau esošajām zināšanām konstruējot arvien jaunas. Pie viena un tā paša jēdziena un metodes skolēni atgriežas vairākkārt, katru reizi nedaudz papildinot zināšanas par to. Matemātikas saturam raksturīga teorētisko un praktisko jautājumu organiska saistība, kad no konkrētiem piemēriem induktīvi tiek secināti attiecīgie vispārinājumi (Mencis, 1984).

Rezumējot, lielākoties matemātikā un līdz ar to arī ar nelielu nobīdi laikā matemātikas mācību saturā jauninājumi vēsturiski ienāca atbilstoši mūsdienu izpratnei par kompetenci izglītībā – balstoties uz reālās dzīves radītām problēmsituācijām un vajadzības cilvēkiem rīkoties iepriekš nezināmā situācijā. 2019. gadā noslēdzās kompetenču pieejā balstīta pamatizglītības mācību satura aprobācija. Šī projekta kontekstā kompetenci saprot kā indivīda spēju kompleksi lietot zināšanas, prasmes un attieksmes, risinot problēmas mainīgās dzīves situācijās, kas ir nebūtiski pārfrāzēts R. Andersones kompetences skaidrojums (Andersone, 2010).

Kā tipiskāko piemēru var minēt Pitagora trijniekus jeb tādu trīs naturālu skaitļu kopu, kas der par taisnleņķa trijstūra malu garumiem. Slavenākie Pitagora trijnieki ir 3, 4, 5 un no tiem ar trijstūru līdzību darinātie trijnieki, kā arī 5, 12, 13. Ir saglabājušās vēsturiskas liecības, ka Pitagora trijnieku 3, 4, 5 praktiski pielietoja, lai celtniecībā konstruētu taisnu leņķi. Šis vienkāršais piemērs parāda, ka matemātikas zināšanas tika lietotas starpdisciplināri ar tādām nozarēm kā arhitektūra, būvniecība, zemes mērīšana, šīm zināšanām ir praktisks pielietojums, šo zināšanu lietojums jaunā, nestandarta situācijā ir uzdevums ar augstu kognitīvo slodzi. Tādējādi, ja Pitagora trijniekus apskata tieši šādā starpdisciplinārā kontekstā, aktivizējot skolēnu domāšanu par tādām vērtībām kā precizitāte, tad šo piemēru var uzskatīt par kompetenču pieeju mācību saturā.

Vēl viens klasisks piemērs: kvadrāta diagonāles aprēķināšana, ja ir zināma kvadrāta mala. Mūsdienās zināms, ka diagonāle izsakāma kā $d = a\sqrt{2}$, taču vēsturiski šī problēma radīja apvērsumu matemātikā, jo atklājās, ka ne visus skaitļus var pierakstīt kā racionālu daļu, tādēļ radās koncepts par iracionāliem skaitļiem. Vienīgais izņēmums, kad matemātikas attīstība neizrietēja no praktiskas nepieciešamības, ir seno grieķu nodarbošanās ar matemātiskiem pierādījumiem mūsdienu hobija izpratnē, kas savukārt atbilst tādai kompetences sastāvdaļai kā kognitīvas un meta-kognitīvas prasmes.

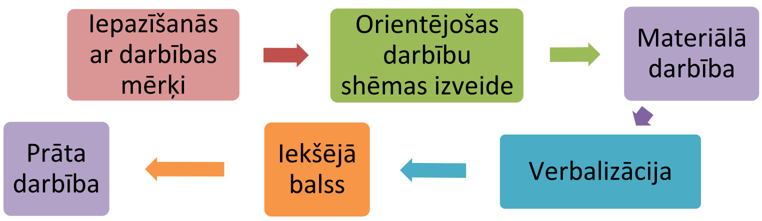
3.3. Matemātikas mācību metodes un mācību organizācija

A. Kolmogorovs uzskatīja, ka matemātikas mācību procesā primārā ir uzskatāmība. Viņš rakstīja, ka pat vienkāršākās matemātikas atziņas var iemācīt pielietot prasmīgi un ar jēgu vienīgi tad, ja tās apgūst radoši, tā, ka skolēns redz, kā pie šīm atziņām varēja nonākt patstāvīgi.

Pēc Kolmogorova domām labi mācīt matemātiku var vienīgi tāds cilvēks, kurš pats ar to ir aizrāvies un uztver to kā dzīvu zinātni, kas nemitīgi attīstās. Pēc Kolmogorova domām, šādu skolotāju vadībā apgūt matemātiku ir viegli un pieejami (Kolmogorovs, 1988).

J. Mencis uzsvēra, ka pamatskolā matemātikā ir svarīgi apgūt domāšanas operācijas: analīzi un sintēzi, salīdzināšanu, abstrahēšanu un konkretizēšanu, vispārināšanu, klasificēšanu, indukciju un dedukciju, analoģiju. Matemātikas mācībās jāievēro zinātniskuma princips, lai skolēnu apziņā neveidotos tādi jēdzieni un spriedumi, kas nebūtu pretrunīgi matemātikai kā zinātnei. Ņemot vērā matemātikas iekšējo stingro loģisko sistēmu, matemātikas mācībām jābūt sistemātiskām un pieejamām. Lai apgūtās zināšanas un prasmes būtu noturīgas un veidotos kompetence, skolēniem ir labi jāizprot mācību saturs, tematā jāizceļ galvenais materiāls, saturs vairākkārt jāizmanto praksē un vingrinājumos. Mencis pieminēja arī individualizācijas, skaidras, korektas valodas un vēlamo īpašību (apzinīgums, aktivitāte) veidošanas nozīmi. No konkrētām metodēm viņš izcēla skolotāja stāstījumu, sarunu, skolēnu patstāvīgo darbu, jēdzienu definēšanu (Mencis, 1984).

Lai skolēnam vienlīdz veidotos zināšanas, prasmes un iemaņas, ir izstrādāta metode, kura apvieno vairākas nupat minētās metodes vienkopus (*skat. 3.11. att.*). Pamatojot, kādēļ šajā shēmā ir ietverta verbalizācija, N. Istomina (*Наталия Истомина*) apraksta tādu piemēru: dalot 8463 ar 7, skolēns rezultātā iegūst nevis 1209, bet 129, kas ir visumā tipiska kļūda. Ja skolēnam palūdz izstāstīt visas darbības, kuras viņš ir veicis, lai izpildītu šo dalīšanas darbību, skolēns nereti pats pamanīs kļūdu vai arī skolotājs iegūs informāciju par to, kādēļ skolēna uztvertais dalīšanas algoritms strādā nepareizi. Iekšējā balss šajā metodē ir domāta kā automatizēts verbalizācijas nākamais pašvadības līmenis, kad skolēnam nav vajadzīga skolotāja palīdzība, un skolēns patstāvīgi izpilda veikto darbību kritisku izvērtējumu (Истомина, 2001).



3.11. att. **Prāta darbības veidošanas sešu etapu shēma** (Истомина, 2001)

I. Žogla grāmatā par didaktikas teorētiskajiem pamatiem akcentēja skolēna aktivitāti mācībās, darbību kā attīstības pamatu, vispusīgu un saskaņotu attīstību un individualitāti (Žogla, 2001). Nesenākā publikācijā I. Žogla raksta, ka Latvijas skolotājiem transformēt konceptuālas pieejas didaktikā traucē kopš neatkarības atgūšanas nemitīgi notiekošās daudzās pārmaiņas nepieredzētā tempā, kas skolotājus padara dezorientētus (Žogla, 2018).

Kā jau minēts iepriekš 2.1. un 2.2. apakšnodaļā, matemātikas mācību mērķi un saturs visā pasaulē kļūst arvien līdzīgāki, bet skolēnu rezultāti var pasaules mērogā atšķirties pat par 72 %. To var skaidrot ar ievērojami atšķirīgo pieeju matemātikas mācībām, dažādību skolotāju lietotajās metodēs, kā arī ar nupat attīstību bremzējošo pārmaiņu steigu un nesagatavotību pārmaiņām, kas neļauj skolotājiem ieraudzīt visu izglītības sistēmas elementu izmaiņas kopveselumā (Eurydice, 2011; Žogla, 2018).

Ķīnā, valstī ar labākajiem pusaudžu sasniegumiem matemātikā PISA testā, līdz 1999. gadam bija spēkā iepriekšējais izglītības standarts, kurš tika raksturots kā saturiski sarežģīts, sadrumstalots, nepilnīgs un novecojis, ar lielu iegaumēšanas un atkārtošanas īpatsvaru. Skolotāju darbs tika raksturots kā skolēnu "pārpludināšana" ar dažādām matemātiskām problēmām. Reformējot izglītības standartu, centrālais mērķis bija mainīt tradicionālās matemātikas mācīšanas un mācīšanās metodes uz mūsdienīgākām metodēm, taču skolotāji pieturējās pie ierastā darba stila, tādēļ jaunais matemātikas standarts ir daudz detalizētāks. Tas ietver izglītības programmu, norādījumus tās ieviešanai, ieskaitot padomus mācību grāmatu izstrādei, ieteikumus vērtēšanai, mācību procesa norisei utt. Tādējādi Ķīnas modelis izglītības satura un organizācijas reformēšanai ir lielāka skolotāju darbu kontrole, cenšoties panākt pārmaiņas uz modernāku pieeju mācībām (Lai, Murray, 2012; Wang et al., 2018).

Piemēram, Eiropā valstis ar sešiem augstākajiem rezultātiem PISA matemātikas testā 2018. gadā bija Igaunija (523 punkti), Nīderlande (519), Polija (516), Šveice (515), Dānija un Slovēnija (509). Visās nosauktajās valstīs matemātikas mācīšanas pieejas 20. gadsimta pirmajā pusē tika pārņemtas no Vācijas (Crouch, 2015), kas šajās reitingā atrodas samērā augstu – 12. vietā Eiropā. Vācijā matemātikas mācīšanas tradīcijas balstās idejā, ka matemātika ir precīza, askētiska, loģiska formāla valoda, kuras apguvei nav jābūt tieši saistītai ar ikdienas dzīvi – skolēniem jāiemācās domāt abstrakti, pierādot teorēmas un iedziļinoties teorijā. Vācijā matemātikas mācīšanas pieejai ir īpaši raksturīgas konservatīvisma un konstruktīvisma idejas, kur skolotājs darbojas kā lektors, kurš, visbiežāk, ar frontālām mācīšanas metodēm nodod savas zināšanas skolēniem (Kaiser, Vollstedt, 2007).

Šveicē, Nīderlandē, Dānijā, arī Polijā un Austrijā kā Vācijas kaimiņvalstīm noteicošais faktors, kādēļ pārņemt Vācijas tradīcijas matemātikas mācīšanā, bija līdzīga kultūra un pedagoģiskā doma; Šveicei, Austrijai un daļēji arī Beļģijai piedevām arī kopīga valoda. Baltijas valstīs un Somijā Vācijas matemātikas metodika pārmantota 20. gadsimta vēsturisko norišu dēļ.

Tomēr visas nupat minētās valstu izglītības sistēmas, pārņemot kādas idejas matemātikas mācīšanā no Vācijas, atsevišķās niansēs pielāgoja matemātikas mācības savai situācijai. Piemēram, Šveicē un Somijā liela vērība tiek pievērsta visu skolēnu iekļaušanai mācību procesā. Katrā valstī mērķis par iekļaujošo izglītību tiek īstenots atšķirīgi (Manzano-García., Fernández, 2016). Poļu matemātiķis A. Pardala, pētot Polijas matemātikas metodikas attīstību vairāku gadsimtu garumā, nonāca pie secinājuma, ka atvērtība dažādām metodoloģiskām idejām ir bijusi ārkārtīgi izdevīga Polijas matemātikas izglītībai, vienlaikus dažādi vēsturiski pārbaudījumi tikai vēl vairāk stiprināja poļu rūpes par savām pedagoģiskajām tradīcijām (Pardala, 2010).

Analizējot Igaunijas pārliecinošo rezultātu, 2018. gada PISA testā iegūstot 1. vietu matemātikā, lasītprasmē un dabaszinībās, vairākums izglītības pētnieku to saista ar pieejamu, kvalitatīvu pirmsskolas izglītību, kurā prioritāte ir mācībām labvēlīga fiziskā un emocionālā vide. Līdzīgi kā Somijā, Igaunijā tiek īstenota iekļaujošā izglītība, kur dažādu spēju skolēni mācās vienā klasē, nevis tiek dalīti pa grupām. Vēl pētnieki izceļ skolotāju brīvību, plānojot stundas. Igauņu skolēni ir raduši daudz mācīties, kas Igauniju padara nedaudz līdzīgu PISA testa globālajiem līderiem – Āzijas valstīm. Igaunijas skolās netiek plaši praktizēti testi ar atbilžu variantiem; visi vērtēšanas darbi (noslēguma un diagnostikas darbi, eksāmeni u. c.) vienmēr sastāv no atvērtā tipa jautājumiem (Jeffreys, 2019).

Šveicē skolēniem tiek piedāvāti pārsvarā uzdevumi ar zemu grūtības pakāpi un zemu izziņas līmeni. Lai atrisinātu šos uzdevumus, skolēniem jāpielieto pazīstami algoritmi, proti, mācības lielākoties ir reproduktīvas. Uzdevumi ir īsi, to veikšanai pietiek vien ar dažām minūtēm. Līdzīgi kā Vācijā, arī Šveicē izdotajiem matemātikas vingrināšanās uzdevumiem pārsvarā nav pārneses uz skolēnu ikdienas dzīvi, uzdevumi ir abstrakti. Tomēr ir būtiska atšķirība no abstrakti-formālās pieejas, jo Šveicē nav bieži sastopami tādi uzdevumi kā pierādījumi, modelēšana, apspriešanās par dažādām risināšanas metodēm. Šveices matemātikas stundām ir raksturīga lielāka didaktiskā daudzveidība – skolotāji nemitīgi maina mācīšanās metodes, tādējādi noturot uzmanību iespējami lielākam skolēnu skaitam. Vēl viena Šveicei raksturīga iezīme: mācību darbs pēc formulas "ievadstunda + turpinājuma stunda" (*follow-up lesson*), kur skolotāja centrētā ievadstundā skolēni konstruē zināšanas skolotāja vadībā, savukārt, otrajā stundā vairāk strādā patstāvīgi (Pauli, Reusser, 2011).

No Vācijas salīdzinoši attālākai Somijai un Igaunijai noteicošie faktori, kādēļ pārņemt Vācijā lietotās metodes matemātikas mācīšanā, bija tā laika vēstures notikumi, visvairāk – Otrais Pasaules karš, kura beigās vairākumā Somijas skolu mācības notika pēc vācu modeļa ar akcentu uz akadēmiskumu un abstrakto domāšanu. 20. un 21. gadsimta mijā neatkarīgi viens no otra veikti pētījumi parādīja, ka matemātikas skolotāji Somijā ir drīzāk tradicionāli, pedagoģiski konservatīvi un stundas vada samērā līdzīgi, lielākoties, izmantojot skolotājcentrētas mācīšanas metodes (Andrews, 2013; Savola, 2010).

Turcijā veikts pētījums par skolotāju visbiežāk pielietotajām metodēm, kurā piedalījās 40 skolotāji, rāda, ka populārākā metode ir jautājumi un atbildes (36 no 40 skolotājiem varēja nosaukt iemeslus, kādēļ lietot šo metodi), pētniecība (36), skolotāja stāstījums (33), matemātiskās spēles (33), uzdevumu risināšana (31) un kooperatīvā mācīšanās (31). Visretāk skolotāji varēja nosaukt iemeslus, lai lietotu tādu metodi, ka skolotājs iemāca skolēniem matemātisku likumu. Balstoties uz šiem datiem, pētījuma autors M. Unal (*Menderes Ünal*) izdarīja secinājumu, ka matemātikas skolotāji labprātāk izvēlas tādas mācību metodes, kuras prasa mazāk sagatavošanās un piepūles. Tādas metodes kā gadījuma izpēte, kas prasa vairāk gatavošanās, bija mazāk populāras. Unal izteica pieņēmumu, ka likumu mācīšana ir vismazāk populārā metode tādēļ, ka tā acīmredzami nesaskan ar mūsdienu mācīšanās pieeju (Ünal, 2017).

Visā Eiropā patlaban notiek mēģinājumi pārorientēt matemātikas mācību procesu no zināšanu un faktu nodošanas skolēniem uz skolēna pašvadītu zināšanu konstruēšanu, kurā svarīga loma ir skolēna emocijām, attieksmēm, uzskatiem, gatavībai mācīties (Briede, 2015). Divas Eiropas valstis šo pāreju uzsāka krietni agrāk: Somijā vēl 20. gadsimta septiņdesmitajos gados un Igaunijā – 20. gadsimta beigās. Igaunijā valsts pamatizglītības standartā jau kopš 1996. gada ir uzskaitītas kompetences, kuras skolēnam jāiegūst, pabeidzot katru skolas posmu, un metodiskās norādes par to, kā skolā organizēt skolēncentrētu izglītību (Lees, 2016).

21. gadsimta pētnieki un metodiķi akcentē nepieciešamību ieviest jaunas metodes, lai sagatavotu skolēnus mūsdienu pasaules izaicinājumiem. Labi organizētām matemātikas mācībām jāattīsta skolēnu loģisko domāšanu, darba organizācijas un sadarbības prasmes, kā arī atbildību. Kā viena no svarīgākajām metodes pamatfunkcijām tiek uzsvērta skolēnu motivēšana apgūt jauno mācību saturu. Lai sasniegtu minētos mērķus, metodiķi piedāvā tādas metodes kā situācijās balstītā mācīšanās, problēmbalstītā mācīšanās, mācīšanās darot, mācīšanās no pieredzes, mācīšanās ar atklājumiem, projekta darbs, mācīšanās jautājot, kooperatīvā mācīšanās un citas aktīvās, skolēnu pieredzē balstītas mācību metodes (Podolak, Młynarska, Kawałek, Śnieżek, Napiórkowska, 2013).

Aktīvo mācību metožu ietekmi uz skolēnu motivāciju un mācību vides kvalitāti Somijā pētīja jau 20. gadsimta deviņdesmitajos gados. Aktīvo mācīšanos praksē raksturo vēlēšanās risināt reālas, nesamākslotas problēmas, fokuss uz mācību procesu, nevis rezultātu, kā arī uz skolēnu vērsts mācību process. Pētījums apliecināja, ka mācību metožu dažādība raisīja skolēnu interesi un noturīgu motivāciju. Skolēni ieguva ne tikai zināšanas, bet arī sabiedriskumu, iemācījās paust un saprast emocijas. Mainījās arī izpratne par mācību procesa mērķi – nevis nodot gatavas zināšanas, bet gan radīt vidi un apstākļus, kuros skolēni paši konstruē zināšanas, kas tādējādi kļūst par viņu ieradumu arī pēc skolas absolvēšanas (Salomäki, 2015).

Virzoties uz skolēncentrētu mācību procesu, daudzās valstīs izvēlas tādu saturu, kas paredz vairāk izvēles iespēju skolotājam: skolēni risina reālās dzīves problēmas pētniecības ceļā, savukārt skolotājs kļūst par padomdevēju, kas radoši koriģē procesu, izvēloties brīdi, veidu un saturu, kurā ievirzīt skolēnu domāšanu (Crouch, 2015).

Lai nodrošinātu pētniecību un veicinātu skolēnu patstāvību, atsevišķas Somijas skolas aprobēja tādu metodi, ka skolēni nedēļas sākumā saņēma problēmu, kura viņiem bija patstāvīgi vai, sadarbojoties grupā, jāizpēta nedēļas laikā un jāuzraksta atskaite. Tomēr šī pedagoģiskā eksperimenta rezultāti nebija viennozīmīgi – kaut gan skolēni patiešām kļuva patstāvīgāki, iemācījās labāk argumentēt savu viedokli un reflektēt, viņu matemātiskās zināšanas un prasmes pasliktinājās, tādēļ šo pieredzi nolēma neieviest visā valstī (Sahlgren, 2015).

Pēc Blūma taksonomijas Somijas vispārizglītojošo skolu matemātikas stundām raksturīgs akcents uz augstāko, radošuma līmeni. 2009. gada PISA testā matemātikā Somija ieņēma 1. vietu Eiropā, taču 2012. gadā noslīdēja uz 5. vietu, kur atradās arī pēc 2015. gada pētījuma rezultātiem. K. Dickinson un G. H. Sahlgren saista kādreizējos spožos Somijas izglītības sistēmas panākumus ar vēsturisko izglītības modeli, kas ietver lielu skolu autonomiju, obligātu prasību vispārizglītojošo skolu skolotājiem iegūt maģistra grādu pedagoģijā, lielu respektu pret skolotāju profesiju sabiedrībā un skolēncentrētu pieeju, nevis 21. gadsimtā īstenotajām pārmaiņām: vēlāku skolas dienas sākumu, atteikšanos no mājasdarbiem un noslēguma darbiem (Dickinson, 2019; Sahlgren, 2015).

Papildus jau nosauktajām metodēm C. Adams akcentē augstas gaidas par skolēnu sasniegumiem, kad skolotājs konsekventi, metodiski iedrošina un motivē skolēnu uzstādīt augstākus mērķus un tos sasniegt. Lai šo iedrošināšanu varētu uzskatīt par atsevišķu mācību metodi, tai jākļūst par skolotāja pārliecību, kura izpaužas jebkurā rīcībā, it sevišķi, verbāli (Adams, 2019). Pārliecība par labiem rezultātiem ir saistīta ar akadēmisko rezultātu uzlabošanos, apliecina arī Nīderlandē veikts pētījums (Magnus, Peresetsky, 2018). Vēl viena vairāk motivējoša metode ir piedāvāt skolēniem izvēles iespējas vai ilūziju par to, piemēram, piedāvājot izvēlēties starp divu dažādu izziņas līmeņu uzdevumiem vai starp pāru un grupu darbu. Lai veicinātu labāku jēdzienu izpratni un uzdevumu risināšanu ar izpratni, klasē jāveicina matemātiskās sarunas – dialogi starp skolēniem un ar skolotāju, lietojot korektu terminoloģiju. Pareizas atbildes atprasīšanu var aizstāt ar sarunu par to, ko skolēns ir sapratis un iemācījies, pildot šo uzdevumu (Adams, 2019). Komunikācija ir svarīga matemātiskās kompetences veidošanā.

Ideja par paradigmas maiņu, kuru Latvijā plānots visās klasēs pakāpeniski ieviest līdz 2023. gada maijam, tiek diskutēta zinātniskajās publikācijās, konferencēs un valstu valdību līmenī jau vairākas desmitgades, tomēr ikreiz atduras pret dažādiem šķēršļiem. Piemēram, kā liecina Dabaszinību un matemātikas (DZM) projekta 2015. gadā veiktais vairāk nekā tūkstotis eksakto mācību priekšmetu stundu vērošanas pētījums pēc divu gadu DZM rīkotām mācībām par produktīvu mācību darbu, pētniecības metodēm un aktīvu skolēna lomu mācību stundās, lielākoties mācību process ir reproduktīvs un frontāls, skolēniem ir ierobežotas augsta līmeņa kognitīvās darbības iespējas, kā arī tiek darbināta "gatavu zināšanu" nodošanas paradigma, nevis zināšanu konstruēšanas paradigma (France, Namsone, Čakāne, 2015). Savukārt 2011. gadā Igaunijā mācību satura reformu bremzēja skolotāju skeptiskā attieksme. Vairākās citās Eiropas valstīs (lielākā kritika tieši Lielbritānijā) un ASV līdzīga reforma nonāca strupceļā sabiedrības noraidošas attieksmes dēļ, to neizprotot un baidoties no matemātikas satura vienkāršošanas, vai ir nodota turpmākai pilnveidei (Young, 2018).

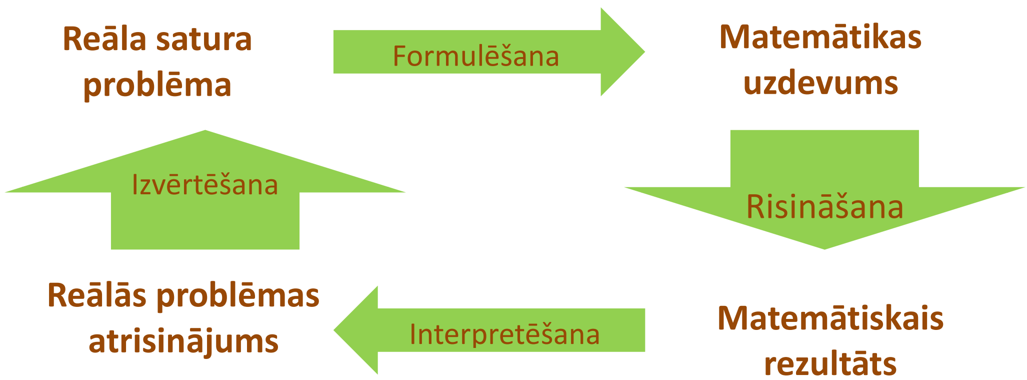
Kā jau minēts 1. nodaļā, dažādās nozarēs jēdzienam "kompetence" ir atšķirīgi skaidrojumi. Arī izglītībā tā tiek skaidrota ar dažādiem akcentiem, kas laika gaitā mainās, līdz ar to mainās arī pieprasījums pēc dažādām metodēm. 2003. gadā noslēdzās Izglītības un zinātnes ministrijas (IZM) iniciēts izmēģinājums 27 Latvijas skolās ieviest mācības, kas ir vērstas uz praktiskai dzīvei noderīgu atziņu un prasmju apgūšanu, proti, kompetenču veidošanu Eksperimenta galvenās atziņas bija divas: skolēniem patīk jaunais saturs, un skolotājiem pārmaiņas rada grūtības (Grīnuma, 2003). Šī pieeja toreiz netika ieviesta visā valstī, kā bija iecerēts.

2014. gadā IZM atjaunoja diskusiju par pētniecību un informācijas analīzi kā galvenajām izglītības prioritātēm, samazinot faktu iegaumēšanu un fokusējoties uz skolēnu mācīšanos domāt pašiem, radīt, analizēt un pielietot informāciju jaunā kontekstā. Par visbiežāk pieminēto prasmi tobrīd kļuva kritiska informācijas izvērtēšana un medijpratība, no kā izrietēja piedāvātā metode – diskusija (LETA, 2014a).

Tā kā viena no būtiskām kompetences sastāvdaļām ir zināšanas, izglītības jomā strādājošie nevilcinājās paust neizpratni, ko var analizēt un radīt skolēns, kuram nav stabilu zināšanu. Piemēram, lai skolēns varētu izvērtēt, kurš uzdevuma risināšanas paņēmiens ir izdevīgākais, pirms sākt to analizēt, skolēnam jāiegūst zināšanas par dažādajiem paņēmieniem un prasmes tos lietot. Ņemot vērā skolotāju kritiku un konstruktīvos ieteikumus, neilgi pēc ierosinājuma atcelt faktu iegaumēšanu, IZM precizēja, ka skolēniem arī turpmāk būs jāatceras noteikti fakti, taču jauninājums ir tāds, ka skolēni vairāk mācīsies paši, savukārt skolotājs vairāk norādīs ceļu, kā iegūt zināšanas (Kuzmina, 2015).

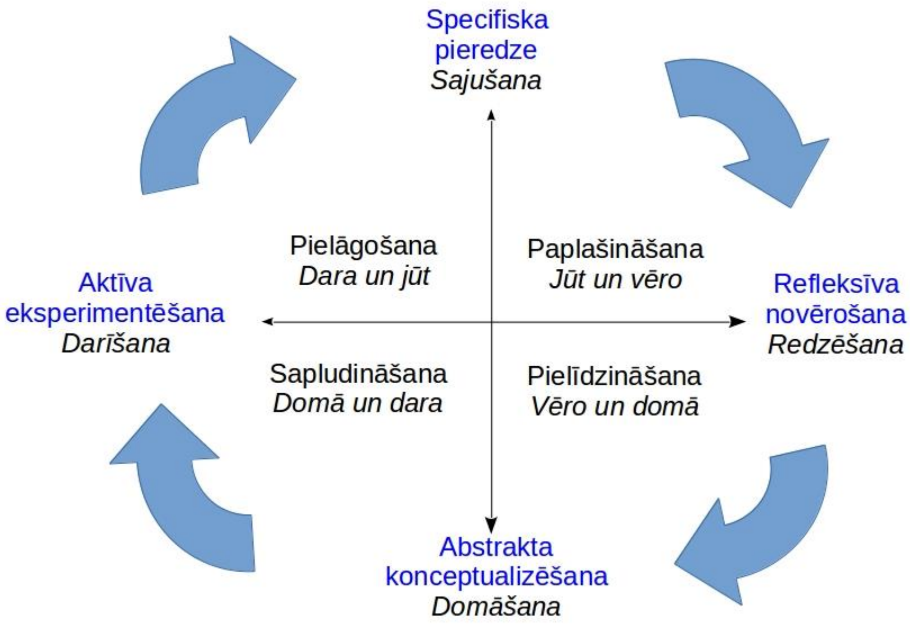
Pirms apstiprināšanas Ministru kabinetā 2018. gadā Latvijas izglītības reformas mērķis ir būtiski mainījies, jo projekts *Skola2030* kā savu galveno mērķi izvirza lietpratīgu izglītību, kuras rezultāts ir patiesa izpratne, zināšanu pārnese un lietpratība (Kakse, 2017). Saturiski šajā rezultātā var saklausīt atsauces uz matemātikas mācīšanas pieejām dažādos kontinentos: Ķīnā raksturīgo mācīšanos ar izpratni, kad "mazāk ir vairāk", Somijas pētniecisko un zināšanu pielietošanas praksi, kā arī daudzu valstu akcentēto sasaisti ar reālās dzīves problēmām. Tas lielā mērā ir izskaidrojams ar procesu, kādā tapa šī projekta idejas – darba grupas meklēja labās prakses piemērus Igaunijā, Somijā un Lielbritānijā. Zīmīgi, ka pēdējā izteikti apsteidz Latviju vienīgi dabaszinību rezultātos. Šādai labo prakšu sintēzes pieejai ir viens būtisks trūkums – labajām idejām mēģina pārņemt tikai sekas, ignorējot nosacījumus un vidi (finansējums izglītībai, sabiedrības atbalsts, skolotāju izglītība u. c.), kādā šīs idejas ir izveidojušās un kādā tās tiek pārņemtas (Lavonen, 2019). Otrs trūkums – tādējādi Latvijā īstenotajām pārmaiņām zūd fokuss, tiek vienlaikus risinātas vairākas fundamentālas problēmas.

Pētot matemātikas mācīšanas un mācīšanās pieredzi Latvijas skolās, VISC 2014. gadā nonāca pie secinājuma, ka nereti matemātikas saturs Latvijas skolās tiek mācīts pēc šāda modeļa: matemātikas uzdevums → risināšana → matemātiskais rezultāts → nākamais uzdevums.



3.12. att. **Matemātiskās kompetences veidošanās praksē** (Geske, Grīnfelds, Kangro, Kiseļova, 2013)

Pasaules pieredze rāda, ka kvalitatīvai, vispusīgai un skolēnu lielajai dažādībai piemērotai matemātisko kompetenču pilnveidei šāds modelis ir nepietiekams (Niss, 2007). PISA pētnieki matemātikas mācīšanas modeli ierosina papildināt vēl ar trīs aktivitātēm: uzdevuma formulēšanu, rezultāta interpretēšanu un izvērtēšanu (*skat. 3.12. att.*). Lai sasniegtu šo mērķi, IZM plāno līdz 2023. gadam visās klasēs ieviest kompetenču pieejā balstītu izglītības saturu. Ministrija uzskata, ka kompetenču pieejā balstīta izglītība jeb projekts *Skola2030* ir atslēga skolēnu panākumiem gan mācībās, gan profesijas apguvē. Šī pieeja ļautu atteikties no iepriekšējos gados piekoptās tradīcijas ik pēc diviem vai trīs gadiem ieviest nebūtiskas, nereti formālas, starp dažādiem mācību priekšmetiem nesaistītas pārmaiņas. Matemātikas skolotāju apvienības prezidente, profesore R. Andersone intervijā LTV atzina, ka mācību satura reformai, kura aizsākās 90. gados, vajadzētu nevis evolucionēt, bet revolucionēt (Kinca, 2015).

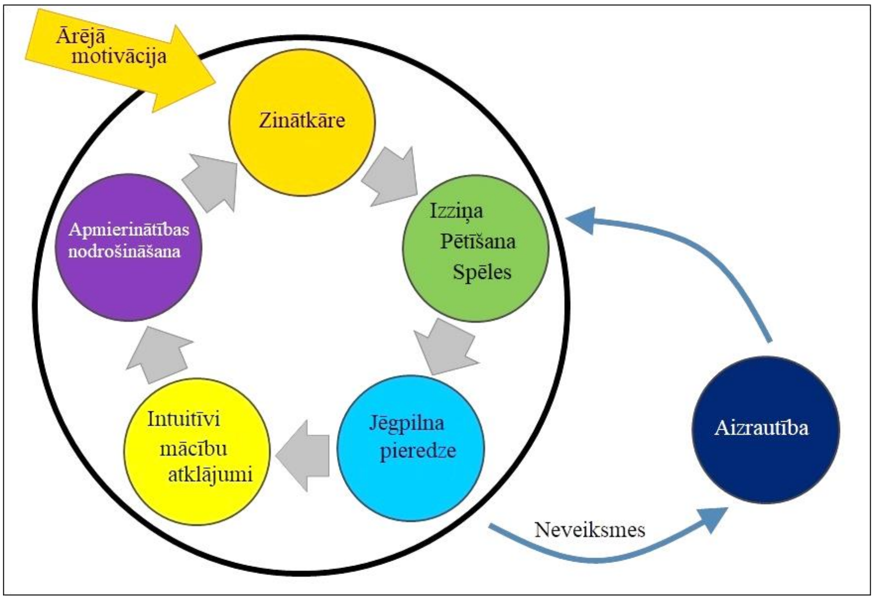


3.13. att. **Kolba empīriskās mācīšanās cikls** (Kolb, 1984)

Pedagoģijā ir aprakstīti arī daudzi citi mācīšanās modeļi: gan klasiski, tādēļ plaši pazīstami, gan jaunāki, mazāku popularitāti guvuši, tomēr arī pieminēšanas vērti mācīšanās modeļi. Klasiskiem mācīšanās modeļiem ar zināmām atkāpēm un variācijām ir raksturīgs šāds cikls: izpēte → koncepta izveide → pielietošana → refleksija → jauna pētnieciskā jautājuma formulēšana. Arī D. Kolba empīriskās mācīšanās teorija balstās uz atziņu, ka mācīšanās ir ciklisks, nepārtraukts process, kurā skolēns pielieto dažādas maņas, izjūtas, uztveri, no tām izrietošās darbības un domāšanu, konstruējot savas zināšanas un radot izpratni vai definējot jaunus jēdzienus, vairāk balstoties uz skolēna iekšējiem izziņas procesiem. Kolba teorija darbojas divos līmeņos, apvienojot četrus mācīšanās cikla posmus un četrus atsevišķus mācīšanās stilus (*skat. 3.13. att.*). No tā izriet, ka Kolba teorijā mācīšanās pamatu veido skolēna personīgā pieredze, kas Latvijā ne tik veiksmīgi tiek iekļauta mācību procesā (*skat. 11. un*

12. pielikumu). Līdzīgi kā Klafki savā kritiski-konstruktīvā didaktiskā modelī, arī Kolbs uzsvēra mijdarbības nozīmi, skaidrojot mācīšanos kā procesu, kurā skolēna un vides mijdarbībā skolēna pieredze tiek pārveidota jaunās zināšanās. Šajā transformācijā būtiska loma ir skolēna spējai vērot, reflektēt par novēroto, analizēt, formulēt savas domas un iesaistīties pētīšanā, lai gūtu jaunu pieredzi, kas ļauj šim ciklam turpināties (Kolb, 1984).

Vienā no salīdzinoši jaunākiem mācīšanās modeļiem izglītības procesu un sadarbību starp skolēnu un skolotāju salīdzina ar jebkuru komerciālu produktu, jo arī skolotāji cenšas sniegt jēgpilnu pieredzi saviem "klientiem" – skolēniem. Šo modeli 2017. gadā aprakstīja e-risinājumu un IT eksperti S. Oz un L. Levi, integrējot tajā vairākos IT nozares uzņēmumos izmantoto darbības modeli (*skat. 3.14. att.*). Šajā modelī akcentēts, ka mācīšanās sākas ar zinātkāri, skolēnu intrigu un interesi apgūt jauno saturu, tādēļ ir būtiski ņemt vērā skolēnu intereses. Lai skolēnam neatņemtu atklāšanas prieku, šī modeļa autori piedāvā ļaut skolēniem patstāvīgi izzināt, izmēģināt, modelēt, pētīt. Tas ļauj skolēnam pašam veidot savu jēgpilnas mācīšanās pieredzi, kas pēc modeļa autoru domām ir pats iedarbīgākais mācīšanās posms. Ja šajā posmā skolēns piedzīvo neveiksmi, ļoti būtiska kļūst iekšējā motivācija, kura ir daudz ilgtspējīgāka un spēcīgāka, jo balstās uz skolēna iekšējo apbalvojumu sistēmu. Levi un Oz iekšējo motivāciju dēvē par aizrautību (Levi, Oz, 2017).



3.14. att. **Jēgpilns mācību cikls, kurā izglītību salīdzina ar komercpraksi** (Levi, Oz, 2017)

Projekta *Skola2030* aprobācijas ilgums bija divi gadi – no 2017. gada septembra līdz 2019. gada jūnijam. Tā laikā notika intensīvas mācības, kurās tika izglītoti 6000 pedagogu, projektā iesaistītās skolas sistemātiski skolas līmenī plānoja un īstenoja mācīšanas pieejas maiņu. Skolas tika rosinātas meklēt jaunu pieeju un dažādot metodes, lai skolēniem palīdzētu efektīvāk apgūt attiecīgās prasmes un mācību procesā integrēt caurvijas. Praktiski tas izpaudās tā, ka pilotskolu vadība un atsevišķi skolotāji piedalījās mācībās, tikās savstarpēji skolā, lai kopīgi plānotu un īstenotu mācību darbu attiecīgās klašu grupas skolēniem, izmēģinot jaunas sadarbības, mācību darba organizācijas, skolēnu snieguma vērtēšanas formas. Reizi pusgadā skolas saņēma individualizētu atbalstu no skolas kuratora. Skolotāju uzdevums bija sniegt atgriezenisko saiti projekta komandai un autoriem par mācību satura dokumentiem, metodiskajiem un mācību līdzekļiem, profesionālās pilnveides programmu kvalitāti.

Pārmaiņas plānotas pakāpeniski gan pirmsskolas izglītības, gan pamatizglītības, gan vidējās izglītības mācību saturā un pedagogu profesionālo kompetenču pilnveidē, tai skaitā, iekļaujošās izglītības nodrošināšanas kontekstā (IZM, 2015). 2020. gada septembrī mācības pēc kompetencēs balstīta mācību satura sāka 1., 4., 7. un 10. klašu skolēni. Gadu vēlāk, 2021. gada septembrī jauno pieeju ieviesīs 2., 5., 8. un 11. klasē. 2022. gadā pārmaiņas skars 3., 6., 9. un 12. klases. Izlaiduma eksāmeni šīs pārmaiņas piedzīvotu 2023. gada pavasarī (MK, 2018).

Pirmsskolas izglītības vadlīnijas, pamatizglītības un vidējās izglītības standarti tiek veidoti ar mērķi attīstīt skolēnu kompetences sekmīgai dzīvei pastāvīgi mainīgos apstākļos, darbam un mācībām mūža garumā, lai skolu absolventiem būtu iespēja pilnībā piepildīt savu potenciālu (VISC, 2016). Lai sasniegtu šo mērķi, *Skola2030* autori kolektīvajā monogrāfijā min problēmu risināšanas pieeju un grupu metodi (Oliņa et al., 2018). Dažādās projekta publikācijās var atrast atsauces uz starppriekšmetu saikni, ar kuru iecerēts panākt skolēnu iedziļināšanos un iesaistīšanos. Vēl samērā izplatīta ir atsaukšanās uz vērtību un attieksmes maiņu kā galveno akcentu – gan skolēniem pret skolotājiem, gan skolotājiem pret skolēniem (Simanoviča, Znotiņa, 2017; Ozola, 2019).

Saturs un mācīšanas pieeja ir savstarpēji saistīti un īstenojami kombinācijā. Vispārējās izglītības obligātā mācību satura aprakstā detalizētāk izklāstīta tikai mācību satura struktūra, kas skolotājiem dod lielāku profesionālo autonomiju mācību mērķu sasniegšanā, mācību metožu izvēlē un paredz ciešu, regulāru skolotāju sadarbību (MK, 2018).

Kā jau minēts 1. nodaļā, mūsdienās izglītībā ar kompetenci saprot nevis tikai zināšanas un prasmes, bet gan komplicētu zināšanu, prasmju, izpratnes, attieksmju un vēlmju kombināciju (Crick, 2008), kas iekļauj arī tādas prasmes kā sadarbību, darbības plānošanu, radošumu utt. Lai matemātikas mācības atbilstu visām šīm un vēl daudzām citām prasībām, skolotājiem jālieto pēc iespējas dažādākas mācību metodes un tās racionāli jākombinē. Piemēram, lai attīstītu skolēnu spēju rīkoties nestandarta un nepazīstamās situācijās, noderīga varētu būt gadījuma izpēte, problēmbalstītā mācīšanās un citas līdzvērtīgas aktīvās mācību metodes. Skolēnu sadarbību, darbības plānošanu, iniciatīvu un pozitīvu attieksmi pret mācībām var stimulēt ar veiksmīgi organizētu grupu darbu. Iedziļināšanos un izpratni var sagaidīt no mācību stundām, kurās notiek arī mācīšanās jautājot un kooperatīvā mācīšanās. Veiksmīgi kombinējot šīs un vēl citas mācību metodes, var sagaidīt, ka skolēns iegūs ne tikai zināšanas, bet vairāk – matemātisko kompetenci.

3.4. Vērtēšana matemātikas mācībās

Vērtēšana ir viens no svarīgākajiem mācīšanās elementiem, ja vērtē arī pats skolēns. C. Rust skaidro vērtēšanu kā spriedumu izdarīšanu, identificējot stiprās un vājās puses, labo un slikto, pareizo un nepareizo kādā mācību situācijā (Rust, 2002). Vērtēšana ir process, kurā tiek apkopota, interpretēta un sintezēta informācija. Vērtēšanai ir vairāki nolūki jeb mērķi:

- ✓ atgriezeniskā saite skolēniem par viņu progresu, stiprajām un vājajām pusēm, kas ir jo sevišķi svarīgi matemātikas mācībās, kur dominējošā mācīšanās pieeja ir konstruktīvisms;
- ✓ atgriezeniskā saite no skolēniem skolotājam par mācību procesu, lai varētu spriest par tā efektivitāti un nodrošināt atbilstošu kognitīvo slodzi un mācību vidi pusaudža matemātiskās kompetences veidošanai;
- ✓ pašrefleksija, apzināta savas uzvedības un darbības analīze;
- ✓ dot informāciju izglītības politikas veidošanai;
- ✓ izdarīt secinājumus par skolēniem (Geidžs, Berliners, 1999).

Kā tiks pamatots tālāk šajā apakšnodaļā, pastiprināta uzmanība pašlaik tiek pievērsta pirmajiem diviem vērtēšanas nolūkiem.

J. Mencis uzskatīja, ka pamatskolas klasēs vērtēšana nepieciešama visos mācību procesa posmos, jo sekmīga mācību procesa vadīšana ir iespējama tikai tad, ja skolotājam nemitīgi ir priekšstats par to, kā mācību materiālu uztver un saprot skolēni. Mencis vērtēšanu saistīja arī ar mācīšanu un papildus konsultācijām, jo vērtēšana atklāj “robus” visu skolēnu un atsevišķu skolēnu zināšanās un dod iespēju tos “aizlāpīt” (Mencis, 1984).

Atkarībā no mācību posma Mencis iedalīja vērtēšanu četros veidos: priekškontrolē, kārtējā, tematiskā un rezumējošā kontrolē. Viņš arī uzskaitīja sešus biežāk lietotus vērtēšanas paņēmienus: frontālā, individuālā, patsāvīgais darbs, kontroldarbs, īsais darbs un matemātiskais diktāts. Mencis uzsvēra, ka bez jau minētajām skolēnu zināšanu vērtēšanas formām skolotājs var izdomāt arī citus kontroles paņēmienus, jo dažādība šajā jomā nāk skolēniem par labu (Mencis, 1984).

Kaut gan 20. gadsimta matemātikas metodikā pamatskolā minēti dažādi skolēnu darba novērtēšanas veidi, ar vērtēšanu līdz šim, lielākoties, saprata atzīmju likšanu, kas ir vispārpieņemts veids, kā informēt skolēnu par viņa darbu vai mācīšanos. 20. un 21. gadsimta mijā tradicionālās vērtēšanas formas, ar kurām parasti tiek saprasta summatīvā, konstatējošā vērtēšana, tika pretnostatīta formatīvai vērtēšanai, kas dod nepieciešamo informāciju, lai varētu uzlabot mācīšanu un mācīšanos. Šīm pārmaiņām ir vairāki iemesli: mainās pieprasītās prasmes un zināšanas – kompetences; paplašinās izpratne par to, kā skolēni mācās; saistība starp vērtēšanu un jauno mācību saturu rada nepieciešamību mainīt vērtēšanas stratēģijas (Quansah, 2018).

Abiem vērtēšanas veidiem (summatīvai un formatīvai) ir gan savi trūkumi, gan ieguvumi. Summatīvā vērtēšana ir objektīva un viegli labojama, taču rada minēšanas risku. Formatīvā vērtēšana tiek uzskatīta par labāku izvēli, lai novērtētu kompleksas prasmes, toties tās pielietojums no skolotājiem prasa specifiskas zināšanas un patērē vairāk resursu: gan materiālo, gan laika resursu šādas vērtēšanas veikšanai un apstrādei (Palm, 2008).

Summatīvo vērtēšanu dažādi uztver skolēni ar atšķirīgiem akadēmiskajiem sasniegumiem. Skolēniem ar labiem un augstiem rezultātiem summatīvos vērtēšanas darbos šāda vērtēšana paaugstina motivāciju censties vēl vairāk, tādējādi rezultāti turpina uzlaboties. Skolēniem ar zemākiem sasniegumiem atkārtoti summatīvie vērtēšanas darbi samazina pašapziņu un mācībām pieliktās pūles, kas vēl vairāk palielina atšķirības skolēnu panākumos. Skolēni ar zemiem sasniegumiem nokļūst tādā ciklā, kur zemie summatīvo kontroldarbu rezultāti pazemina pašvērtējumu un neatlaidību, kas savukārt negatīvi ietekmē turpmākās sekmes. Vienīgi ar lielu atbalstu no skolas vai ģimenes puses, kad skolēnam tiek parādīts, ko un kā var uzlabot mācību paradumos, daži skolēni spēj izkļūt no šī cikla (Black et al., 2002).

Summatīvās vērtēšanas radītā izaugsme tiek kritizēta par to, ka tā rada motivāciju sasniegt kvantitatīvus, nevis mācīšanās mērķus. Perry, Pollard un citu pētnieku darbi apstiprina, ka klasēs, kurās summatīvie vērtēšanas darbi kļūst par rutīnu, skolēni novērtē panākumus testos augstāk nekā to, ko viņi ir iemācījušies (Perry, 1998; Pollard et al., 2000). Neskatoties uz visiem minētajiem trūkumiem, izglītības iestādes panākumi sabiedrībā joprojām tiek vērtēti pēc spējas uzrādīt nepārtrauktu izaugsmi summatīvajos vērtēšanas darbos.

Ja summatīvās vērtēšanas primārais mērķis ir salikt skolēna sniegumu kategorijās pareizi vai nepareizi, tad formatīvā vērtēšana ne tikai sniedz skolēnam informāciju par stiprām un vājām pusēm, bet arī sniedz izsmeļošu informāciju par to, kā uzlabot mācīšanos, tādēļ nereti formatīvo vērtēšanu dēvē arī par vērtēšanu, lai mācītos (*assessment for learning*), pretstatā mācīšanās vērtēšanai (*assessment of learning*), kas ir summatīvā vērtēšana.

Pretstatā summatīvās vērtēšanas dažādai ietekmei uz skolēnu motivāciju mācīties, formatīvā vērtēšana un konkrētāk skolotāja atgriezeniskā saite (*feedback*), kas fokusējas uz to, kā uzlabot sniegumu un kādas turpmākās zināšanas var konstruēt uz tā, kas jau ir izdarīts, rada lielāku skolēnu interesi un piepūli iedziļināties, lai mācītos ar izpratni, nevis koncentrēšanos uz to, kā iegūt augstāku atzīmi (Pollard et al., 2000). Arī O. I. Gavotto-Nogales (*Omar Iván Gavotto-Nogales*) vadītā pētnieku grupa ziņoja par saistību starp formatīvās vērtēšanas īpatsvaru un izglītības procesa kvalitāti, kas ļauj ātrāk ieviest kompetencēs balstītu izglītību, stiprināt skolēnu kompetenču veidošanos (Gavotto-Nogales, Glasserman, Pierra, 2015).

Viens no formatīvās vērtēšanas galvenajiem nolūkiem ir atgriezeniskā saite (*skat. 3.15. att.*). Hattie, Kluger, DeNisi, Crooks un citi zinātnieki uzsver, ka skolotājiem joprojām ir daudz maldīgu priekšstatu par atgriezenisko saiti, tā nereti tiek lietota kļūdaini vai nemākulīgi, tādēļ šim vērtēšanas paņēmienam ir veltīti daudzi pētījumi (Crooks, 2001; Hattie, 1999; Hattie, Timperley, 2007; Kluger, DeNisi, 1996).

3.15. att. **Efektīva atgriezeniskā saite** (Hattie, Clarke, 2018)

Atgriezeniskā saite kā formatīva, mutiska, tūlītēja vērtēšana, ko skolēniem sniedz skolotājs un skolotājam pretī sniedz arī skolēni, ir salīdzinoši jauns koncepts (Hattie, Clarke, 2018). R. Butler veica pētījumu, kurā skolēnus vērtēja ar atzīmēm; tikai ar komentāriem; ar atzīmēm un komentāriem. Pētījumā atklājies, ka skolēni, kurus vērtēja tikai ar komentāriem, noslēguma testā uzrādīja lielāko progresu. Ja atzīmi papildināja komentāri, skolēni intervijās atzina, ka ignorēja skolotāja rakstīto un pievērsa uzmanību tikai skaitliskai atzīmei. Butler secināja, ka atzīmes attīsta ar ego saistītu domāšanas veidu, kamēr ar teikumiem izteiktā atgriezeniskā saite – ar darbu saistītu domāšanas veidu (Butler, 1988).

Pēc šī pētījuma atgriezeniskā saite, kas sastāv tikai no komentāriem un neiekļauj skaitlisku vērtējumu ballēs, kļuva izplatītāka, taču radās jauna problēma: šie komentāri nebija pietiekami konkrēti, lai palīdzētu skolēniem. Šāda vērtēšana ir pretrunā konstruktīvisma teorijas atziņai, ka zināšanas nevar nodot no viena cilvēka otram, bet skolēns vienīgi pats var tās radīt vai konstruēt. Nesaņemot pietiekami konkrēti un uz izaugsmi vērstu atgriezenisko saiti, šāda savu zināšanu konstruēšana ir apgrūtināta vai neiespējama. Lielbritānijas skolu inspekcija Ofsted 1996. gadā vērsās pie skolotājiem ar kritiku, ka vērtēšana nereti ir subjektīva un bieži nesniedz norādījums par to, kā skolēns darbu varētu uzlabot. Inspekcija vērsa uzmanību uz to, ka tikai ļoti retos gadījumos vērtēšana palīdzēja skolēniem ar nepietiekamiem sasniegumiem mācībās, jo vērtēšana bija nepamatoti dāsna un nefokusēta (Hattie, Clarke, 2018).

J. Hattie un H. Timperley definēja atgriezenisko saiti kā skolotāja, klasesbiedra, mācību grāmatas, vecāku, interneta resursu vai skolēna paša pieredzē balstītu informāciju un darbības, kas sniedz informāciju par snieguma vai izpratnes aspektiem. Līdzīgi kā to skaidroja Mencis, arī Hattie definē atgriezenisko saiti kā informāciju par uzdevumu, kas aizpilda plaisu starp to, kas ir saprasts un izvirzīto mērķi. Atgriezeniskā saite var:

- ✓ veicināt skolēna piepūli, iesaistīšanos un motivāciju samazināt neatbilstību starp pašreizējo stāvokli un mērķi;
- ✓ mudināt skolēnu atrast alternatīvus risināšanas paņēmienus, lai izprastu mācību saturu;
- ✓ apstiprināt, vai skolēns domā pareizi vai nepareizi, un cik tālu ir ticis virzībā uz mērķi;
- ✓ norādīt virzienu, kurā skolēns var turpināt;
- ✓ raisīt izpratnes pārstrukturēšanu.

Hattie brīdina, ka atgriezeniskās saites ietekme uz skolēnu mācīšanos var būt pozitīva vai negatīva, kā arī identificē īpašības un apstākļus, kas šo vērtēšanu padara efektīvu (Hattie, Timperley, 2007).

To, ka atgriezeniskai saitei ir liela ietekme uz mācībām, Hattie parādīja vēl 1999. gadā publicētā pētījumā. Izpētot vairāk nekā 100 faktorus, kuri ietekmē skolēnu mācību sasniegumus, vidējais korelācijas koeficients bija 0,40. Dažādām atgriezeniskās saites formām tas vidēji bija 0,79. Lai būtu vieglāk uztvert, cik stipra ir korelācija starp atgriezenisko saiti un skolēnu sasniegumiem, var pieminēt, ka tiešo skolotāja instrukciju ietekme bija 0,93. Norādes un koriģējošā atgriezeniskā saite (0,81), motivēšana un pastiprināšana (0,74) ievērojami vairāk ietekmēja skolēnu sasniegumus nekā skolotāja uzslava (0,12), apbalvojumu un sodu sistēma (0,14), kā arī novēlota atgriezeniskā saite (0,28). Hattie izdarīja secinājumu, ka veiksmīgi izvēlēta un organizēta atgriezeniskā saite var radīt lielu ietekmi (Hattie, 1999).

Labākā atgriezeniskā saite ir tik skaidra, ka jebkurš, kam ir zināms mērķis, var to saprast un no tās mācīties. Tā ir reāla, rūpīgi un izvērsti formulēta, lietotājam draudzīga, savlaicīga, nepārtraukta, konsekventa un uz mērķi vērsta. Wiggins raksta, ka skolotāji iebilst, ka šāda veida atgriezeniskajai saitei nav laika, taču viņš uzsver, ka patiesībā šis apgalvojums nozīmē to, ka skolotājam nav laika rosināt mācīšanos (Wiggins, 2012). Šie ieteikumi atgriezeniskās saites formulēšanai saskan ar humānās pedagoģijas būtību, jo pauž interesi par katru skolēnu un palīdz patstāvīgi attīstīt kompetenci (Amonašvili, 2014; Tawil, Harley, 2004). Amonašvili apraksta humānās pedagoģijas skatījumu uz skolotāja komunikāciju ar skolēniem kā tiešu, patiesu, sirsnīgu, laipnu dialogu, kurā nav vietas liekvārdībai. Šādi formulēta atgriezeniskā saite mācību procesā iekļaut ne vien zināšanas un prasmes, bet arī attieksmes, cilvēcīgās vērtības, pieklājību, kas harmoniskāk palīdz skolēnam attīstīt spriestspēju (Amonašvili, 2014).

Amonašvili uzsver skolēna iesaistes un iniciatīvas lomu veiksmīga vērtēšanas procesa organizācijā, kā praktisku risinājumu piedāvājot skolotāju un skolēnu diskusijas par vērtēšanas paņēmieniem, kas iedrošina un motivē skolēnus (Амонашвили, 1998). Skolēna līdzdalības nozīmi mācību procesa plānošanā un vērtēšanā uzsvēruši arī citi humānās pedagoģijas pētnieki (Mascolo, 2009; Rogers, Lyon, Tausch, 2014; Roth, Jornet, 2014).

T. Krūkss (*Terry Crooks*) izpētījis, ka tipiskākā skolotāju kļūda ir attiecināt uz atgriezenisko saiti vispārīgus, nenozīmīgus vai pat bezjēdzīgus komentārus, tādus kā “Pacenties vairāk!”. Viņš formulēja trīs nosacījumus efektīvai atgriezeniskai saitei, kas sekmē arī skolēnu kompetences veidošanos. Atgriezeniskai saitei jākoncentrējas uz:

- ✓ skolēna darba kvalitāti, nevis uz salīdzinājumiem ar citiem bērniem;
- ✓ konkrētiem veidiem, kā skolēns var uzlabot savu sniegumu un kompetenci;
- ✓ uzlabojumiem, kurus skolēns jau ir paveicis, salīdzinājumā ar viņa iepriekšējo darbu.

Tam visam jānotiek augstas uzticēšanās un samazināta satraukuma vidē (Crooks, 2001).

A. N. Kluger un A. S. DeNisi izpētīja, ka atgriezeniskā saite ir visefektīvākā, ja mācību mērķi ir specifiski un izaicinoši, bet uzdevumu grūtības pakāpe ir zema. Atgriezeniskās saites efektivitāte samazinās, ja uzmanība no uzdevuma tiek pārfokusēta uz skolēna īpašībām. Trešdaļai skolēnu šādā gadījumā samazinājās akadēmiskie sasniegumi (Kluger, DeNisi, 1996).

Arī projekts *Skola2030* Latvijā mudina mainīt vērtēšanas paradigmu, skolēnu ikdienā ieviešot vērtēšanu mācīšanās uzlabošanai (*assessment for learning*). Šāda vērtēšana ietver skolotāju un skolēnu kopīgi izvirzītus, skolēniem saprotamus sasniedzamos rezultātus, regulāru pašvērtējumu un rakstisku atgriezenisko saiti, kas sniedz skolēnam informāciju par patreizējo situāciju attiecībā pret izvirzītajiem mērķiem un turpmākajām darbībām (Stiggins, 2017). Šo pārmaiņu ieviešanai ne tikai Latvijā, bet arī citur pasaulē traucē skolotāju dziļi iesakņojušies pedagoģiskie uzskati par vērtēšanu kā skolotāja rīku un atbildību, nevis kā par iespēju iesaistīt skolēnus, veidojot konstruktīvu vērtējošu vidi (Bernholt et al., 2013).

Lai varētu novērtēt skolēna matemātisko kompetenci, jānovērtē komplekss sniegums, kas ietver zināšanas, prasmes un attieksmes. V. E. Daro un K. Kokka formulēja kritērijus matemātikas uzdevumam, kas ir skolēncentrēti, matemātiski precīzi, viegli uztverami, fokusējas uz svarīgākajām matemātikas zināšanām un ļauj pārbaudīt skolēnu izpratni. Šie seši kritēriji ir šādi: fokusēšanās uz matemātikas pamatidejām un procesiem; vairāki veidi, kā iesākt uzdevuma risināšanu; uzdevumu var atrisināt ar vairākām stratēģijām; saturiski un matemātiski skaidrs, lakonisks formulējums; rada produktīvu pamatu skolēna spriešanai; iesaistošs saturs (Daro, Kokka, 2016).

Divi populārākie starptautiskie pētījumi, kuros tiek kompleksi mērīta skolēnu matemātiskā kompetence un kuros tiek ievēroti Daro un Kokkas piedāvātie kritēriji, ir jau pieminētais PISA tests 15 gadus veciem pusaudžiem un TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study* jeb Starptautiskais matemātikas un dabaszinātņu izglītības attīstības tendenču pētījums) tests 4. un 8. klašu skolēniem. Lai novērtētu skolēnu spēju domāt matemātiski, meklēt savus radošus risinājumus, gandrīz 70 % PISA testa uzdevumu atrisināšana neprasa teorēmu un formulu zināšanas un tikai nepilni 12 % uzdevumu balstās uz teorēmu zināšanām. Tā vietā tiek pārbaudītas skolēnu prasmes veidot skices, veikt visu gadījumu pārlasi, pareizi lietot matemātisko valodu. Savukārt TIMSS 8. klases testa pieeja ir atšķirīga – aptuveni pusi tā satura veido formālās matemātikas zināšanas. Vienīgi Āzijas austrumu reģiona valstīs (Singapūrā, Japānā un Honkongā) skolēnu rezultāti ir vienlīdz augsti abos testos. Citās valstīs skolēni uzrāda labākus rezultātus vairāk formālajā TIMSS testā vai neformālajā PISA testā (Hole, Grønmo, Onstad, 2018).

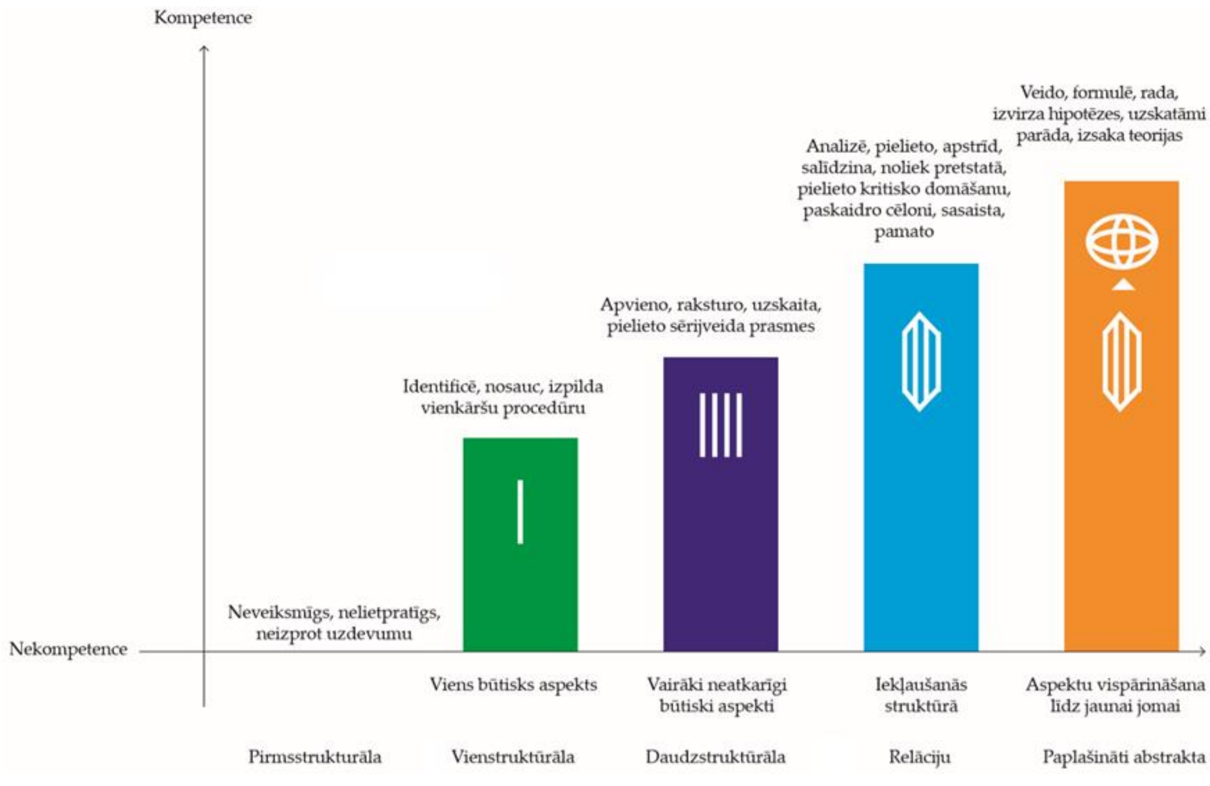
M. Fullan un M. Langworthy atgādina, ka 21. gadsimtā izglītības mērķis ir uzlabot rezultātus daudzās jomās, sākot ar satura apguvi un beidzot ar mācīšanos ar izpratni.

Skolotājiem jāspēj izmērīt visus šos rādītājus kopējā un integrētā vērtēšanas sistēmā. Kā vienu no iespējām pētnieki min snieguma līmeņu aprakstus jeb matricas (Fullan, Langworthy, 2014).

3.3. tabula. Zināšanu un izpratnes līmeņi IB programmā (autora veidots)

Uzdevuma grūtības pakāpe / Uzdevuma konteksts	Vienkārši	Sarežģītāki	Sarežģīti
Pazīstamas situācijas	1. un 2.	3. un 4.	5. un 6.
Pazīstamas un nepazīstamas situācijas			7. un 8.

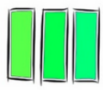
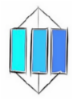
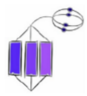
Mācību sasniegumu vērtēšanu ar snieguma līmeņu aprakstiem daudzus gadus izmanto starptautiskā bakalaurāta (IB) programmā, kura patlaban ir akreditēta 135 pasaules valstīs. Skolēna sniegums astoņos līmeņos tiek vērtēts četros kritērijos: zināšanas un izpratne, likumsakarību pētīšana, komunikācija un matemātikas pielietojums reālās dzīves uzdevumos. Līmeņu apraksti ir līdzīgi un tos atšķir skolēna patstāvība un kognitīvā slodze. Piemēram, zināšanu un izpratnes līmenis ir atkarīgs no tā, vai skolēns prot izvēlēties piemērotus matemātikas paņēmienus, lai risinātu dažādus uzdevumus (*skat. 3.3. tab.*). Kā var redzēt no šī piemēra, IB programmā lietotie snieguma līmeņu apraksti ir samērā lakoniski, kas rada subjektivitātes risku.



3.16. att. **SOLO taksonomijas līmeņu apraksti** (Keevy, Chakroun, 2015)

Arī Latvijā ir plānots pakāpeniski pāriet uz vērtēšanu ar snieguma līmeņu aprakstiem. *Skola2030* izstrādātajos paraugos tiek izmantota J. B. Biggs un K. F. Collis 1982. gadā izstrādātā SOLO taksonomija ar iedalījumu piecos līmeņos (Biggs, Collis, 1982). SOLO taksonomija sastāv no tā dēvētā pirmsstrukturālā līmeņa, kas PISA testā atbilst nulles līmenim jeb situācijai, kad skolēns nespēj uzdevumā izdarīt nevienu soli, tai skaitā, uztvert, kas no viņa ir prasīts, un četriem līmeņiem, kuros skolēnam var identificēt kādu sniegumu (*skat. 3.16. att.*).

Snieguma līmeņu aprakstu (SLA) plaši aprakstīts trūkums ir sarežģītais pielietojums. Šī iemesla dēļ pat tādās turīgās valstīs kā ASV šāds vērtēšanas formāts tiek lietots galvenokārt gada noslēguma darbu vērtēšanā (Kim, 2013). Arī *Skola2030* materiālos nav doti vispārīgi matemātikas snieguma līmeņu apraksti, kā tas ir darīts IB programmā, bet gan līmeņi pēc SOLO taksonomijas ir aprakstīti, piemēram, 8. klases grupu darbam par maketa veidošanu, kas ir temata "Laukumi, tilpumi" noslēguma darbs (*skat. 3.17. att.*).

				
Formulas un aprēķini	Kādai maketa daļai ir izveidota formula virsmas laukuma vai tilpuma aprēķināšanai. Kādai maketa daļai ir noteikts virsmas laukums vai tilpums.	Izveidotas virsmas laukuma vai tilpuma aprēķināšanas formulas atsevišķām maketa daļām. Atsevišķām maketa daļām novērtēts to virsmas laukums vai tilpums.	Racionāli veidotas formulas – aprakstīts brīvas formas figūras virsmas laukums un tilpums, izmantojot pēc iespējas mazāku lineāro izmēru skaitu. Ir aprēķināts maketa pilnas virsmas laukums un tilpums.	Rēķinlapās izveidotas atbilstošas formulas ar parametriem, kas ļauj pētīt kā mainās izveidotā maketa virsmas laukums un tilpums.
Sadarbība un atbildība	Sadalījums pa lomām ir formāls: pārsvarā darbs tiek veikt pēc skolotāja norādēm.	Skolēni pilda savas lomas nošķirti viens no otra pēc kāda grupas dalībnieka norādes.	Grupas dalībniekus vieno kopīgi izvirzīts mērķis (ideja), katrs grupas dalībnieks brīvi izsakās par savu lomu kopīgajā darbā, kā arī sadarbojas ar citiem grupas dalībniekiem, pārvarot šķēršļus.	

3.17. att. **Maketa veidošanas skolēnu snieguma līmeņu apraksti** (VISC, 2019)

Rezumējot, matemātikas mācībām dažādās pasaules valstīs ir daudz kopīgu iezīmju, piemēram, līdzīgs vēsturiskais konteksts un nākotnes izaicinājumi, taču niansēs ir atšķirības, kas ir skaidrojamas ar valstu specifiskajām iezīmēm izglītībā.

Visos matemātikas mācību posmos var saskatīt matemātiskās kompetences klātesamību. Matemātikas mācību mērķa formulējumos dažādās valstīs ir izvēlēti savi akcenti, taču katras valsts pamatizglītības standartā, ja tāds ir publicēts, var saskatīt tiešu atsauci vismaz uz dažiem matemātiskās kompetences aspektiem, visbiežāk, uz pētnieciskajām prasmēm un rīcību nestandarta situācijās. Matemātikas saturs vēsturiski ir veidojies atbilstoši mūsdienu kompetences izpratnei – no starppriekšmetu, reālās dzīves, kompleksām situācijām. Visbeidzot, vērtēšanā kompetenci kā kompleksu prasmi ieteicams identificēt ar snieguma līmeņu aprakstiem, taču to lietošana ir sarežģīta, kā arī ir pieejami tikai daži paraugi temata noslēguma darbu vērtēšanai ar šo metodi, nevis ikdienas vērtējumiem.

4. Pusaudžu matemātiskās kompetences veidošanās didaktiskais modelis un vērtēšanas kritēriji

4.1. Pusaudžu matemātiskās kompetences veidošanās didaktiskais modelis

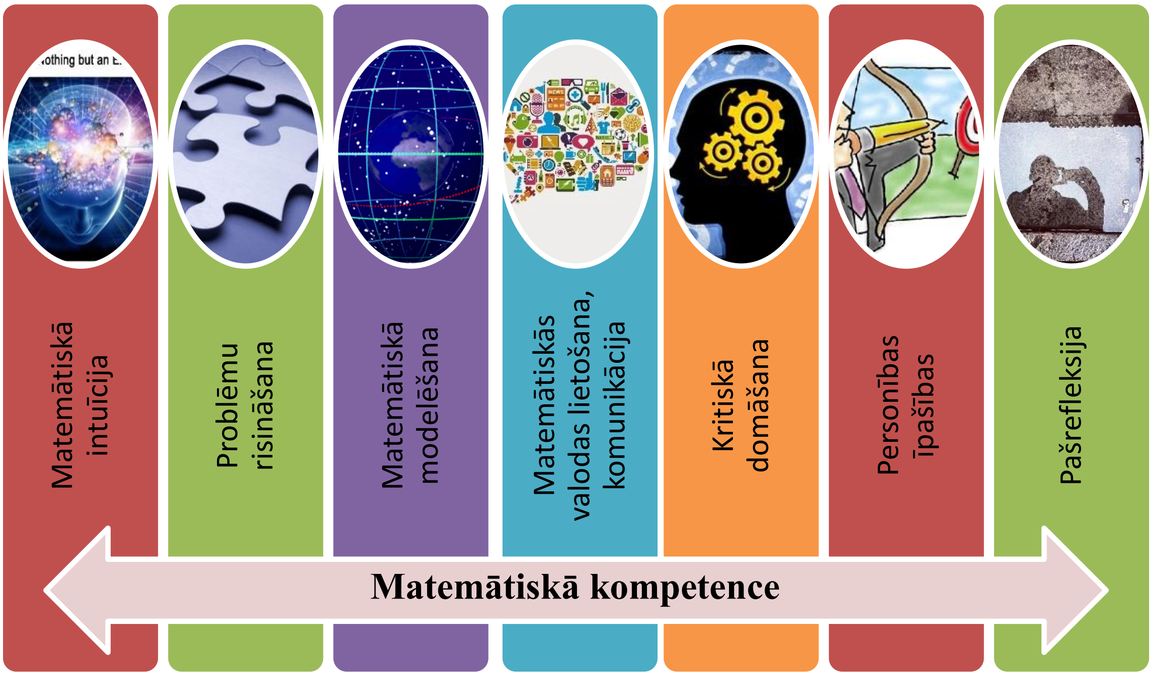
Balstoties uz 2. nodaļā analizētām dažādām pieejām matemātiskās kompetences izpratnē, izvērtējot dažādu autoru piedāvāto skaidrojumu priekšrocības un trūkumus, kā arī respektējot Latvijas un Eiropas izglītības telpas specifiku, tālāk ir aprakstīts, kas tiks saprasts ar pusaudžu matemātisko kompetenci un tās veidošanos šajā pētījumā. 4. nodaļā ir aprakstīta pusaudžu matemātiskā kompetence, kas ir sadalīta septiņās komponentēs. Vispirms ir sniegts konspektīvs matemātiskās kompetences veidošanās didaktiskā modeļa apraksts, bet tālāk ir skaidroti vērtēšanas kritēriji un to līmeņi.

Veicot matemātiskās kompetences astoņu biežāk lietoto definīciju (*skat. 2.2. apakšnodaļu*) kartēšanu, iegūti dati, kas uzskatāmi parāda, ka līdz šim autori ir visvairāk fokusējušies uz spriešanu un problēmu risināšanu kā būtiskākajām matemātiskās kompetences komponentēm, nedaudz retāk – uz komunikāciju, modelēšanu un personības īpašībām. Jau minētās komponentes ir papildinātas ar matemātisko intuīciju un pašrefleksiju, jo vairāku gadsimtu laikā tās minētas starp kritiski svarīgām matemātiskās kompetences veidošanā (Casselman, 1897; Dieudonné, 1975; Puankare, 1990; Kolmogovors, 1988).

Matemātiskās intuīcijas iekļaušana pusaudžu matemātiskās kompetences komponentēs ir plašāk pamatota 4.2.5. apakšnodaļā. Īsumā, tas ir saistīts ar pusaudžu biežāk impulsīvo, nevis strukturēto domāšanas veidu, tādējādi intuīcija ir piemeklēta kā tuvākais jēdziens, lai aprakstītu pusaudžiem raksturīgo domāšanas un mācīšanās stilu. Pašrefleksija kā matemātiskās kompetences komponente ir pamatota un sīkāk skaidrota 4.2.7. apakšnodaļā. Galvenokārt pašrefleksija ir iekļauta kā indikators pusaudžu gatavībai turpmākajā izglītības pieredzē darboties pašvadīti.

Pusaudžu matemātiskās kompetences saturu veido šādas komponentes (*skat. 4.1. att.*):

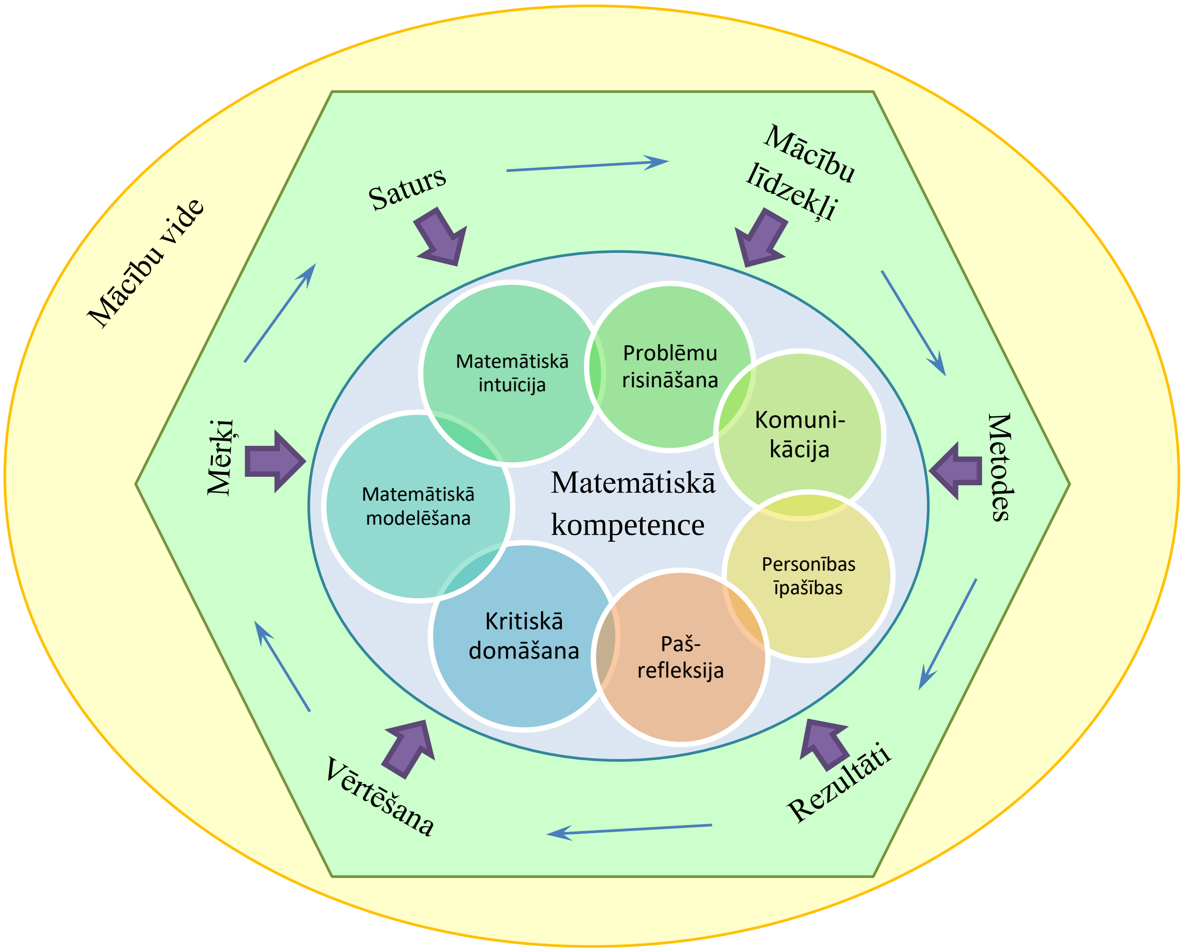
- ✓ personības īpašības;
- ✓ matemātiskā modelēšana;
- ✓ matemātiskās valodas lietošana, komunikācija;
- ✓ problēmu risināšana;
- ✓ matemātiskā intuīcija;
- ✓ kritiskā domāšana;
- ✓ pašrefleksija.



4.1. att. **Pusaudžu matemātiskās kompetences komponentes** (autora veidots)

Mācību procesa elementi, tādi kā mācību mērķi, no tiem izrietošais saturs un izmantotie mācību līdzekļi, ir ļoti cieši saistīti ar matemātiskās kompetences komponentēm, tādēļ tos var uzskatīt par šo kompetenci ietekmējošajiem faktoriem (*skat. 4.2. att.*). Matemātikas mācību mērķi ietekmē visas septiņas matemātiskās kompetences komponentes, taču visvairāk tieši personības īpašības un pašrefleksija. No programmas mērķiem ir atkarīgas prioritātes, piemēram, Somijā par tādu ir pasludināta kompleksu problēmu risināšana un tādas personības īpašības kā patstāvība, neatlaidība un zinātkāre (Sahlgren, 2015). Āzijas valstīs mērķis visbiežāk ir skolēna spēja spriest un modelēt, kā arī izvirzīt hipotēzes, balstoties uz intuīciju (Setiawan, 2019), taču ar citām komponentēm mērķi ir mazāk saistīti.

Savukārt, Latvijā matemātikas mācību mērķis līdz šim visvairāk bija saistīts ar izpratni un zināšanu pielietojumu. Matemātikas programmas paraugos jau kopš 2005. gada pie matemātikas mācību priekšmeta mērķiem ir minētas prasmes lietot matemātiskās metodes pasaules izzināšanā, citos mācību priekšmetos un daudzveidīgā darbībā, kas nozīmē mērķu saistību ar problēmu risināšanu un kritisko domāšanu, taču starptautisko salīdzinošo pētījumu dati rāda, ka realitātē vairākums Latvijas pusaudžu šos mērķus nesasniedz, jo darbojas reproduktīvā līmenī (France, 2010; OECD, 2018a).



4.2. att. **Pusaudžu matemātiskās kompetences veidošanās didaktiskais modelis** (autora veidots)

Ministru kabineta noteikumi Nr. 747 par valsts pamatizglītības standartu un pamatizglītības programmu paraugiem, kas stājās spēkā 2020. gada 1. septembrī, paredz, ka matemātikas mācību mērķi ir vairāk saistīti ar skolēnu personības īpašībām, turklāt, jo vecāki skolēni, jo vairāk ir izteikta šī saistība. Piemēram, vidusskolas klasēs par vienu no mērķiem izvirzīta iepriekš iegūto zināšanu padziļināšana, šajā procesā prioritizējot pusaudžu personības īpašības jeb, kā tās ir dēvētas noteikumos, ieradumus un tikumus, kuri iekļauj atbildību, drosmi, uzņēmību, mērķtiecību, savaldību, mērenību, toleranci, laipnību, līdzcietību, taisnīgumu un solidaritāti (MK, 2018). Kā otra prioritāte ir formulēta pašvadība, kad skolēni paši plāno, uzrauga un izvērtē savu mācīšanos, apzinās un regulē savas emocijas un uzvedību (Zimmerman, Schunk, 2011). Lai iegūtu pašvadītas mācīšanās pieredzi un prasmes, skolēniem jābūt iespējai reflektēt par savu mācīšanos jeb apzināti spriest par savas mācīšanās darbībām, kas autonomā līmenī nozīmē pašrefleksiju. Tādējādi matemātikas mācību mērķi ir vairāk saistīti ar pusaudžu personības īpašībām un pašrefleksiju.

Lai sasniegtu šos mērķus, ir vajadzīgs jauns mācību saturs, plānotie rezultāti, mācību metodes, mācību organizācija un vērtēšana. 3. nodaļā ir plašāk izklāstīts, kā tieši un kādēļ

Latvijā mainās šie mācību procesa elementi. Īsumā, mācību saturu vairāk integrējot ar citu jomu saturu, kā arī izvēloties atbilstošas mācību metodes, neapšaubāmi palielināsies matemātiskās modelēšanas, problēmu risināšanas un citu matemātiskās kompetences komponentu nozīme (Kakse, 2017). Vienota pieeja saturam no pirmsskolas izglītības līdz pat augstākajai izglītībai nodrošina pamatu tādu uzdevumu izstrādei un pielietošanai pedagoģiskajā praksē, kas jau no pirmsskolas vecuma attīsta pusaudžu matemātisko intuīciju, kas katrā nākamajā vecumposmā tiek nostiprināta un pilnveidota. Mācību metodes ar akcentu uz skolēnu sadarbību, savstarpējo komunikāciju, savstarpējo mācīšanos palīdz attīstīt pilnvērtīgu un korektu matemātisko valodu. Pusaudžu matemātiskās kompetences veidošanos ietekmē ne tikai mācību procesa elementi, bet arī citi faktori, tostarp sabiedrība, kurai ir gaidas, ka pusaudži skolā iemācīsies prasmi kritiski izvērtēt informāciju un citas (Handel, 2016).

4.2. Pusaudžu matemātiskās kompetences vērtēšanas kritēriji

Tālāk sīkāk iztirzāti septiņi pusaudžu matemātiskās kompetences vērtēšanas kritēriji (*skat. 4.1. tab.*). Katram kritērijam dots īss raksturojums un norādīti autori, kuri to ir pētījuši, kritērija loma, vēsturiskais konteksts, saikne ar citiem kritērijiem, iespējas tos attīstīt.

4.1. tabula. Matemātiskās kompetences kritēriji

Kritērijs	Raksturojums	Autori
Personības īpašības	Prasme izvirzīt ilgtermiņa mērķus (*long-term goals*) un konsekventi pārbaudīt virzību uz šiem mērķiem. Spēja nepadoties, saskaroties ar jauna veida problēmsituāciju. Neatlaidība (*persistence*). Virzīta darbība (*directed action*), neskatoties uz šķēršļiem, grūtībām un bailēm.	Tough, 2014. Crawford, 2014. Borba, 2009. Peterson, Seligman, 2004. Lufi, Cohen 1987. Duckworth, 2007. Duckworth, Quinn 2009.
Matemātiskā modelēšana	Spēja reālās dzīves saturu vai procesu aprakstīt ar piemērotiem un pareizi lietotiem matemātiskās valodas elementiem, izvēlēties efektīvu risinājuma veidu un pareizi interpretēt iegūto atbildi. Prasme saskatīt matemātikas rīku pielietojumu citās jomās. Spēja kritiski izvērtēt paša veidotus vai jau gatavus reālās dzīves situāciju modeļus, to īpašības, daudzveidību un ticamību (derīgumu). Paredz tēlainu, dziļu, asociatīvu, izvērstu domāšanu. Prasme aprakstīt doto kontekstu ar modeli un pielietot ar vārdiem aprakstītu modeli.	Laursen, 2010. Lai, Murray, 2012. Cha, Rosenberg, Dym, 2000. Dym, Ivey, 1980. Carson, Cobelli, 2001.
	Spēja saprast (atšifrēt, interpretēt, atšķirt) un izmantot dažādos veidos uzdotus matemātiskos objektus, parādības, problēmas vai situācijas,	Laursen, 2010. Alpers, 2011.

Matemātiskās valodas lietošana, komunikācija (*representing mathematical entities*)	ieskaitot simbolisko, algebrisko, vizuālo, ģeometrisko, grafisko vai mutisko attēlojumu, diagrammas un tabulas. Zina matemātiskās informācijas attēlošanas veidu priekšrocības un ierobežojumus, sakarības starp tiem. Pamatojoties uz šīm zināšanām, spēj izvēlēties un pārslēgties starp dažādiem informācijas uzdošanas veidiem. Komunikācija uz iekšu: lasīšana, apgalvojumu un matemātiskās informācijas interpretēšana; uz āru: sava risinājuma un rezultātu skaidrošana, prezentēšana, argumentēšana. Spēja atrast un uztvert vajadzīgo informāciju dažādos izziņas resursos, lietot elektroniskos materiālus (*use of e-learning*) un informācijas tehnoloģijas (IT).	Blomhoj, Jensen, 2007. Niss, 2003. Mustoe, Lawson, 2002. Turner, 2011. Wichelt, 2009. Pimm, 1987. Zeidmane, 2013.
Problēmu risināšana	Spēja formulēt un risināt dažādu veidu matemātiskos uzdevumus: atvērta tipa un ar vienu pareizu atbildi; abstraktus un praktiskus; paša un citu formulētus. Ja nepieciešams vai vēlams, šie uzdevumi jāspēj atrisināt ar dažādiem paņēmieniem.	Laursen, 2010. Kajander, Mason, 2007. Boaler, 2010. Buschman, 2004. Bay-Williams, Meyer, 2005. Van de Walle, Lovin, 2006. Rubinstein, 1975
Matemātiskā intuīcija	Spēja domās paredzēt matemātiska uzdevuma risinājuma gaitu, domās vizualizēt ar uzdevumu saistītu grafisko informāciju: risinājuma shēmu, funkcijas grafiku u. tml. Matemātiskā intuīcija tiek saistīta ar matemātisko radošumu – jaunu, efektīvāku risināšanas veidu vai pierādījumu atklāšanu. Lai attīstītu matemātisko intuīciju, jāapgūst dažādi matemātiskās domāšanas, jautāšanas veidi, matemātiskās izteiksmes, loģiskie operatori un virknes, kā arī jāstiprina spēja sniegt piemērus tādiem jautājumiem un izpratni par sagaidāmo atbilžu tipiem.	Andrejs Kolmogorovs, 1988. Kjeld Laursen, 2010. Keith Devlin, 2012. Barbara Ball, 2007. David Tall, 1991. Dehaene, Spelke, Pinel, Stanescu, Tsivkin, 1999.
Kritiskā domāšana	Spēja matemātiski pamatot (spriest). Spēja sekot un novērtēt citu rakstiski vai mutiski izveidotas argumentu ķēdes. Spēja radīt un veikt neformālus (balstītus uz intuīciju) un formālus spriedumus, tai skaitā, heiristisku argumentu pārveidošana par formālu, matemātiski pareizu pierādījumu. Būt par darītāju matemātikā skolas un ārpusskolas kontekstā. Pierādīšana no pretējā un induktīvi.	Laursen, 2010. Cobb, Gressalfi, Hodge 2009. Schoenfeld, 1994. Goldin, 2002. Perrenet, Taconis, 2009. Callejo, Vila, 2009. Jurjans, Pukite, Babajeva, Fernandez, Andersone, Maslo, Fernate, Lindenskov, 2010.
Pašrefleksija (*self-reflection*)	Izvērtē savu rīcību un spriedumus. Balstoties uz šo izvērtējumu, formulē jaunus mērķus un problēmas, kas nodrošina iespēju mācīties pašvadīti, autonomi. Ir pārliecība, ka viņš spēj efektīvi veikt dažādus mācību uzdevumus, jo ietekmē pūles, kuras tiek pieliktas akadēmiskajam darbam, kā arī turpmāko neatlaidību, saskaroties ar izaicinājumiem.	Zimmerman, 1989. Liew, McTigue, 2008. Usher, Pajares, 2008. Hattie, Timperley, 2007.

Detalizēts katras komponentes apraksts, kā arī īss, konspektīvs un pārskatāms katras matemātiskās kompetences komponentes snieguma jeb kritēriju līmeņu (izteikti, labi, vāji, nav) apraksts ir atrodams tālākajās apakšnodaļās.

4.2.1. Personības īpašības

Analizējot pētījumus par personības īpašību ietekmi uz panākumiem matemātikā, Dž. Heds (*John Head*) secināja, ka šī saistība nav sistemātiski un pietiekami pētīta, kaut gan būtu saprātīgi pieņemt, ka personības īpašības varētu ietekmēt pusaudža motivāciju, attieksmes un mācīšanās stilu. Pat tad, ja personības aspektiem intuitīvi ir vistiešākais sakars ar pētāmo matemātiskās kompetences aspektu, tie bieži tiek ignorēti, piemēram, pētījumi par attieksmēm pret matemātiku bieži koncentrējas tikai uz mācību saturu, kas skolēnam ir jāapgūst, taču nepēta paša skolēna personības attīstību un psiholoģiskos aspektus (Head, 1981).

A. Kolmogorovs uzsvēra tādas personības īpašības matemātikas apguvē kā patstāvība un spēja ar jaunu skatījumu paraudzīties uz matemātiskās problēmas formulējumu. Pēc Kolmogorova domām labam skolēnam jābūt ambiciozam un strādīgam, jo šīs īpašības ļaujot noticēt saviem spēkiem un sasniegt augstākus mērķus, nekā varētu prognozēt. Pēc Kolmogorova domām skolotāja loma ir palīdzēt, piedāvāt tādu sistēmu un skolotāja un skolēna kopīga darba organizāciju, kura ir optimāla labākā rezultāta sasniegšanai, kas ļauj mācīties un attīstīt radošumu, pusaudzim intensīvi strādājot patstāvīgi. Katrai skolotāja un skolēna kombinācijai vārds "optimāla" ir izprotams citādāk (Kolmogorovs, 1988).

Virkne izglītības pētnieku (Borba, 2009; Crawford, 2014; Peterson, Seligman, 2004; Tough, 2014) kā vienu no svarīgām komponentēm augstu mācību panākumu sasniegšanā izceļ **neatlaidību** (*persistence*). Kanādiešu-amerikāņu rakstnieks, izglītības pētnieks P. Tafs (*Paul Tough*) apgalvo, ka neatlaidība ir noteicošais faktors mācību sasniegumiem, pat svarīgāks par talantu. Viņš skaidro, ka neatlaidība rodas no neveiksmēm, taču problēma ir tāda, ka skolēnus no neveiksmēm un kļūdām ļoti sargā vecāki, skolas, skolotāji, kultūra, vide – tie visi neļauj skolēniem kļūdīties. Tafs izpētīja, ka septiņas īpašības, kuras uzskata par iedzimtām, fiksētām rakstura īpašībām – drosmi, stresa noturību, apzinīgumu, kārtīgumu, rūpīgumu, neatlaidību un zinātkāri (*curiosity*) – var mainīt, apgūt un uztrenēt. Tafs arī atklāja, ka šīs septiņas personības īpašības trīs reizes precīzāk prognozēja, kā pusaudžiem turpmāk veiksies studijās, nekā kognitīvie reitingi, ieskaitot eksāmenus un kritiskās domāšanas vai citu veidu testus, kā arī klases rangu pēc vidējās atzīmes (Tough, 2014).

Uzstājoties elitārajā *World Innovation Summit for Education* (WISE) konferencē 2014. gadā, P. Tafs skaidroja, ka, saskaroties ar grūtībām vai neveiksmēm, skolēniem ir raksturīgas divas reakcijas: noliegt pašu nodarbi, piemēram, matemātikas apguvi kā viņiem nesaistošu un nevajadzīgu vai arī ieslīgt sevis šaustīšanā par zemo sniegumu. Viņaprāt, skolotāja uzdevums šajā situācijā ir vienlīdz gan izrādīt augstas gaidas par izcilu skolēnu sniegumu, gan skolēniem nodrošināt vajadzīgo atbalstu. Lai palīdzētu skolēniem attīstīt tādu rakstura īpašību kā neatlaidība, Tafs iesaka ar skolēniem izvirzīt ilgtermiņa mērķus un konsekventi pārbaudīt virzību uz šiem mērķiem. Pozitīvs piemērs ir jēgpilni organizēti ilgtermiņa projektu darbi, kuri nav ierobežoti vienā mēnesī vai pat mācību gadā (Tough, 2014).

Ungāru matemātiķis G. Polja (*George Pólya*) 20. gadsimta vidū grāmatā *How to Solve It* par matemātisko problēmu risināšanas metodēm akcentēja **zinātkāres** (*curiosity*) nozīmi. Grāmatā ir aplūkoti dažādi algoritmi, problēmu risināšanas tehnikas, ļoti detalizēti izklāstīta uzdevuma risināšanas plāna veidošana un doti daudzi citi padomi, taču pirms tiem grāmatas autors atgādina, ka panākumi nav atkarīgi no kvantitātes, bet motivācijas. Ja matemātikas stundā skolēni visu atvēlēto laiku pavada, risinot vienveidīgus vingrināšanās uzdevumus un monotoni atkārtojot skolotāja darbības, pēc G. Poljas domām, tiek mazināta pusaudžu interese un kavēta viņa intelektuālā attīstība. Turpretī, skolotāji, kuri izaicina pusaudžu zinātkāri, izvirzot viņu zināšanām atbilstošas, taču netriviālas problēmas, un palīdz šīs problēmas atrisināt, uzdodot uzvedinošus jautājumus, dod pusaudžiem iespēju piedzīvot, izmantot un izbaudīt neatkarīgas domāšanas procesu, kas zinātkāri nostiprina kā ieradumu (Pólya, 1945).

Kompetents cilvēks nebaidās kļūdīties, bet kļūdas uztver kā neizbēgamu aktīvas darbības sastāvdaļu un kā iespēju uzlabot savu sniegumu, mācoties no kļūdām. Izglītības un psiholoģijas pētnieks no Irānas H. Deizadejs (*Hossein Daeezadeh*) un viņa kolēģi atklāja spēcīgu negatīvu korelāciju starp akadēmiskajiem sasniegumiem matemātikā un neirotismu, kas izpaužas kā emocionāla nestabilitāte, satraukums un zems pašvērtējums un kas rodas kā cilvēka negatīva reakcija uz pieņēmumu, ka viņam neveicas ar nosprausto mērķu sasniegšanu (Carver, Scheier, 1990; Daeezadeh, Homayouni, Hosseinzadeh, Fakorihajiyar, 2014). Cits pētījums rāda, ka skolēni ar fiksētu domāšanu (*fixed mindset*) matemātiku uztver kā dabas dotu, iedzimtu talantu. Saskaroties ar grūtībām, šie skolēni tikai gūst apstiprinājumu pieņēmumam, ka matemātika ir pārāk sarežģīta. Savukārt, pusaudži ar izaugsmes domāšanu (*growth mindset*) ir pārliecināti, ka, cītīgi mācoties, var sasniegt jebkuru mērķi. Pētījumi rāda, ka skolēni ar šādu domāšanu neizdošanos vai grūtības uztver kā izaicinājumu, tādēļ pieliek vēl lielākas pūles un tādēļ parasti tiek galā ar uzdevumu. Pozitīvā pieredze ar grūtību pārvarēšanu vairo šo skolēnu zinātkāri, pacietību, motivāciju un produktivitāti (Boaler, 2016; Dweck, 2006). Proti, labāki rezultāti matemātikā ir pusaudžiem, kuri ir pārliecināti par sevi, saviem panākumiem un kuriem ir uz attīstību vērsts domāšanas veids. Personības īpašību līmeņu apraksts ir dots 4.2. tabulā.

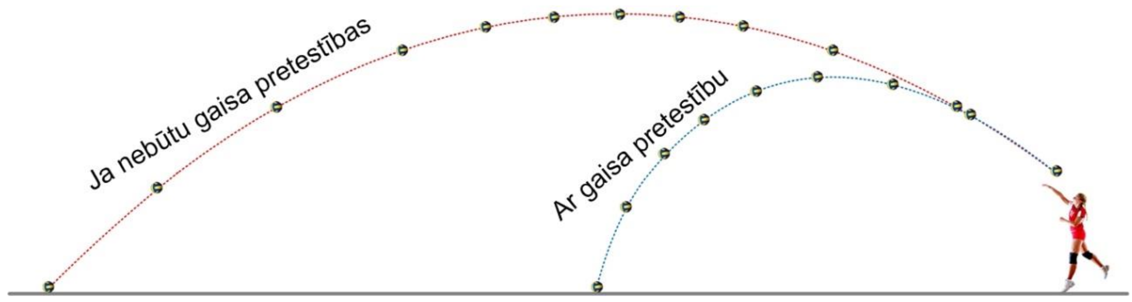
4.2. tabula. Personības īpašību kritērija līmeņu apraksti

Līmenis	**Līmeņa apraksts**
Izteikti	Vienmēr vai gandrīz vienmēr izrāda neatlaidību un iniciatīvu mācībās. Ierosina idejas un piedalās to īstenošanā, jebkuru darbu veic pamatīgi, uzcītīgi, pēc iespējas kvalitatīvāk un produktīvāk. Ir zinātkārs – iztēlojas un attīsta jaunus, inovatīvus risinājumus, izmantojot, sintezējot vai pārveidojot zināšanas. Uzņemas iniciatīvu, praktiski ieviešot šīs idejas dzīvē, demonstrējot uzņēmējspēju.
Labi	Gandrīz vienmēr darbojas neatlaidīgi, mācībās uzrāda patstāvību, mērķtiecību un atbildību, aktīvi seko līdzi notiekošajam. Neskatoties uz grūtībām un šķēršļiem, patstāvīgi plāno un uzrauga savu darbību.
Vāji	Tikai reizēm ir neatlaidīgs problēmu risinājumos. Darbojas pēc norādēm, bez iniciatīvas, pieliekot nelielas pūles.
Nav	Neprot izvirzīt mērķus, trūkst neatlaidības problēmu risinājumos.

4.2.2. Matemātiskā modelēšana

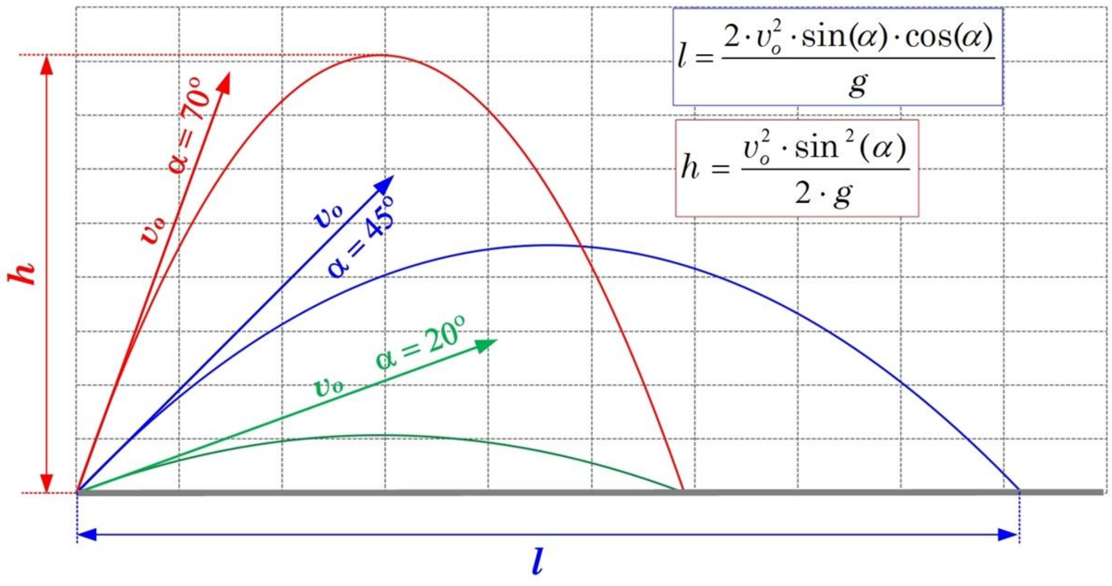
Matemātiskā modelēšana plašā izpratnē ir kāda reāla objekta, procesa vai parādības iedvesmots, radoši veidots attēls, apraksts, analoģija, shēma, rasējums, domu karte u. c., ko izmanto, lai to matemātiski ilustrētu. Pētot kādu komplicētu reālu procesu, modelēšanā to aizstāj ar kādā ziņā vienkāršotu analoģiju. Modelēšana atvieglo fizikas, bioloģijas, ģeogrāfijas, ķīmijas, datorzinātņu, elektroniskās inženierijas, ekonomikas, politisko zinību un citu jomu procesu pētīšanu, ļauj identificēt kādas tā īpašās iezīmes un pat dod iespēju paredzēt procesa turpmāko attīstību. Ņemot vērā daudzējādo pielietojumu, G. Dubois matemātiskai modelēšanai veltītā grāmatā *Modeling and Simulation: Challenges and Best Practices for Industry* raksta, ka pēdējos 60 gados modelēšana ir nepārtraukti attīstījusies un ir radījusi revolūciju rūpniecības nozarē. Viņš prognozē, ka modelēšanas nepārtrauktajai attīstībai būs būtiska ietekme uz ekonomisko augšupeju arī nākotnē, jo dažādu nozaru un lielumu uzņēmumiem modelēšana kalpos kā rīks, kas sniedz tehniskus uzlabojumus un palielina rentabilitāti (Dubois, 2018).

Izpratne par matemātisko modelēšanu ir attīstījusies daudzu gadsimtu laikā, un līdz ar šo izpratni ir mainījušās prasības pret modeļiem. Vēl 21. gadsimta sākumā šo prasību vai modeļu īpašību vietā autori piedāvāja tikai modelēšanas veidu uzskaitījumu: skaitļošanas, testēšanas, idealizētie un daudzi citi modeļi (Frigg, Hartmann, 2006). Amerikāņu filozofs R. Giere pat ir apgalvojis, ka nevar būt vienotas modeļu ontoloģijas, jo gandrīz jebko var izmantot, lai aprakstītu jebko citu (Giere, 2010). Savukārt datorzinātnēs modelis tika skaidri definēts vēl 1965. gadā, kad M. Minskis piedāvāja par dotā objekta modeli uzskatīt citu objektu, kuru pētnieks var izmantot, lai atbildētu uz viņu interesējošiem jautājumiem par sākotnējo objektu (Minsky, 1965). Vēlāk šis skaidrojums tika vairākkārt papildināts un precizēts, tādēļ mūsdienās ar modeli visbiežāk saprot kāda objekta modeli noteiktam lietotājam konkrētā laika periodā un ar iepriekš formulētu vai neparedzamu nolūku. Piemēram, ja modelis tiek veidots kādam šobrīd neeksistējošam objektam, tad arī šī modeļa nolūks, visbiežāk, var noskaidroties tikai modeļa tapšanas procesā (Thomas, 2006).



4.3. att. **Slīpa sviediena modelēšana ar parabolu** (Fizmix.lv)

No iepriekš minētā izriet, ka matemātiskais modelis var palīdzēt izskaidrot sistēmu un izpētīt dažādu sastāvdaļu iedarbību, kā arī izteikt prognozes, taču ir jāņem vērā, ka modelim var būt arī tādas īpašības, kuras nepiemīt reālajam objektam vai parādībai. Piemēram, ja matemātiski modelē kāda objekta slīpu sviedienu, tad tā lidojuma trajektoriju var aprakstīt ar kvadrātfunkcijas grafika – parabolas fragmentu, taču šāds modelis ir spēkā vienīgi tad, ja objekts ir masas punkts, kas pārvietojas, neņemot vērā gaisa pretestību. Reālajā dzīvē slīps sviediens notiek pa trajektoriju, kas ir deformēta parabola (*skat. 4.3. att.*).



4.4. att. **Slīpa sviediena īpašību atklāšana, izmantojot modelēšanu** (Fizmix.lv)

Kā var redzēt 4.3. attēlā, reālai trajektorijai piemīt citas īpašības nekā modelim: tā nav simetriska, lidojuma tālums ir mazāks un lidojuma maksimālais augstums nav tik liels. Neskatoties uz šiem trūkumiem, parabolu kā modeli slīpam sviedienam var lietot, ja nolūks ir izpētīt lidojuma tāluma atkarību no sviediena slīpuma pret horizontu – šis modelis ļauj atklāt, ka vienādi objekti, kurus ar vienādu ātrumu izmet α un ($90^{\circ} - \alpha$) lielos leņķos pret horizontu, aizlidot vienādi tālu (*skat. 4.4. att.*).

Matemātiskajam modelim jāatbilst noteiktām prasībām. Tam jābūt universālam, proti, iespējami pilnīgi jāatspoguļo reālais objekts. Tajā pašā laikā, modelim jāatbilst noteiktai precizitātei – to novērtē pēc tā, cik bieži reālā objekta parametru vērtības sakrīt ar vērtībām, kuras iegūst ar modeli. Visbeidzot, modelim jābūt laika un cilvēkresursu ekonomiskam. Piemēram, R. Peierls publikācijā par matemātiskās modelēšanas pielietojumu fizikā skaidro, ka skolēns, kurš paveic eksperimentu domās, nevis praktiski, modelē teorētisko fiziku, kas ļauj labāk sagatavoties īstajam eksperimentam, tādējādi izpildās visas matemātiskajam modelim izvirzītās prasības (Peierls, 1980). Teorētiskajā modelī skolēns atmet daļu no modelējamā objekta vai parādības īpašībām, visbiežāk, ignorējot kādus mainīgus fizikālos lielumus, kuru ietekmi uz eksperimentu rezultātu ir sarežģīti vai neiespējami aprakstīt ar skolēnam zināmām likumsakarībām, formulām un funkcijām, tomēr no modeļa tiek sagaidīta zināma precizitāte (parasti ne vairāk kā 10 % atkāpe no patiesās vērtības), aprakstot reālo objektu.

Ar matemātiskās modelēšanas uzdevumiem var pārbaudīt skolēna spēju pielietot starppriekšmetu saikni un secināt, cik veiksmīgi skolēns spēj pāriet no matemātiskā modeļa uz reālas dzīves kontekstu un novērtē rezultāta ticamību. Skolēnam jāprot uzdevumā iekļauto reālās dzīves saturu vai procesu aprakstīt ar piemērotu un pareizi lietotu matemātiskās valodas elementu, izvēlēties efektīvu risinājuma veidu un beigās pareizi interpretēt iegūto atbildi, piemēram, noraidīt daļveida atbildes, ja konteksts ir cilvēku skaits, vai negatīvas saknes, kas reprezentē figūras malas garumu. Vēl matemātiskā modelēšana pieprasa tēlainu, dziļu un izvērstu domāšanu. Publikācijā par matemātiskās modelēšanas pielietojamības efektivitāti un ierobežojumiem, N. Geršenfelds (*Neil Gershenfeld*) min šādu piemēru: lai izpētītu auto virsbūves deformācijas avārijas brīdī, visatbilstošāk šo procesu ir modelēt ar minimālo deformācijas enerģiju atkarībā no virsbūves formas, nevis censties piemeklēt kādu vienādojumu (Gershenfeld, 1998).

2.2. apakšnodaļā aprakstītā sešu prasmju matemātiskās kompetences modeļa autors, Austrālijas Izglītības pētījumu padomes (*Australian Council for Educational Research* jeb ACER) pētnieks un matemātikas skolotājs R. Tērners rīko ikgadējas Starptautiskās matemātiskās modelēšanas sacensības, kuru mērķis ir attīstīt un uzlabot pusaudžu spēju vizualizēt, izprast un pielietot matemātiku oriģināla matemātiskā modeļa izstrādē kopīgas problēmas risināšanai. Šis mērķis ļoti precīzi apraksta pieeju matemātiskās modelēšanas izpratnei un veidošanai Austrālijas skolās. Piemēram, 2016. gadā sacensību uzdevums bija izpētīt, kā vieglatlētikas sacensību rīkotāji varētu samazināt savus finanšu riskus, apsverot iespēju piedāvāt prēmijas, lai piesaistītu augstākā līmeņa vieglatlētus. Publikācijā par šīm sacensībām, Tērners raksta, ka no matemātiskās modelēšanas aspektiem šīs sacensības pusaudžiem dod iespēju izmantot matemātiskās idejas reālās situācijās, strādāt komandā, izpētīt interesantu un izaicinošu matemātisko problēmu, kontrolēt savu mācīšanos un patstāvīgi izvēlēties dažus noderīgus matemātiskos rīkus (Turner, 2016).

Iepriekš minētie teorētiskie avoti un praktiskie piemēri norāda uz to, ka matemātiskās modelēšanas mērķis ir matemātiskā valodā aprakstīt reālu situāciju vai objektu, iespēju robežās nezaudējot to īpašības un neradot jaunas, kas nepiemīt reālajam objektam. Lai izveidotu šādu modeli, pusaudzim jāprot kritiski izvērtēt dažādu faktoru ietekmi uz modeļa precizitāti. Pēc modeļa izveides, pusaudzim jāsaskata cēloņsakarības un jāprot tās interpretēt, kā arī pārnest iegūto informāciju atpakaļ uz reālās dzīves situācijām, piemēram, izmantojot modeli prognozēt iznākumu ar dotajām parametru vērtībām. Sīkāk zināšanas, prasmes un attieksmes, kurām jāpiemīt pusaudzim, lai varētu veiksmīgi izveidot matemātisko modeli un prasmīgi darboties ar to, ir aprakstītas 4.3. tabulā.

4.3. tabula. Matemātiskās modelēšanas kritērija līmeņu apraksti

Līmenis	Līmeņa apraksts
Izteikti	Kompleksās situācijas risina radoši, izmantojot savu pieredzi, konceptualizējot, vispārinot, analizējot informāciju. Spēj izveidot ērtu modeli nestandarta problēmsituāciju risināšanai, saskatot algoritmu un piemērotu risinājuma gaitu, piemēram, ja ir jānosaka, cik reizes diennaktī pulksteņa rādītāji ir perpendikulāri viens otram, spēj piedāvāt vispārīgāku risinājumu nekā visu gadījumu apskatīšanu.
Labi	Izprot, formulē un izmanto sakarības un analītiskas metodes. Risina kompleksas situācijas ar tipveida modeļiem, kurās var rasties kādas grūtības vai ir nepieciešams izteikt pieņēmumus. Spēj patstāvīgi modelēt vienkāršu doto kontekstu, aprakstīt to matemātiski.
Vāji	Spēj analizēt tipveida modeļa pamatus un vienkāršākās īpašības, atsevišķos gadījumos izvērtē modeļa ticamību.
Nav	Nespēj veidot vai analizēt matemātiskos modeļus.

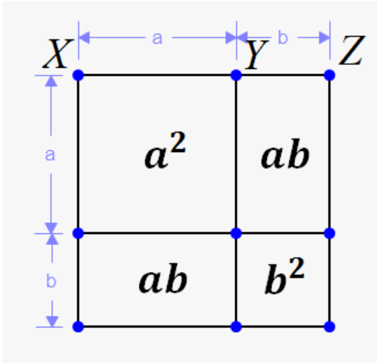
4.2.3. Matemātiskās valodas lietošana, komunikācija

Matemātiķu vidū ir liela vienprātība, ka matemātika ir valoda vai zīmju sistēma, kuru izmanto, lai apspriestu matemātiskās idejas. Matemātiskā valoda ir dažu valodu klasiskajā izpratnē, visvairāk, angļu un latīņu, sajaukums ar matemātikas specifiskajiem terminiem un gramatiskajām konstrukcijām, kas ir raksturīgas matemātiskajam diskursam, ko dēvē par matemātisko žargonu, un simboliskajiem apzīmējumiem, kurus lieto matemātiskajās formulās (Bogomolny, 2018).

Matemātiķis A. Adlers dēvēja matemātiku par zinātnes valodu, kas ir unikāla ar spēju precīzi aprakstīt jebkuru domu vai koncepciju. Adlers arī uzskatīja, ka matemātiskā valoda ir māksla – intelektuāli bagātākā un klasiskākā (Adler, 1972). Matemātiķis Švarcenbergers (*Rolph Ludwig Edward Schwarzenberger*) uzskatīja, ka matemātika ir tāda pati pilntiesīga valoda kā angļu vai ķīniešu, taču uzsvēra, ka atsevišķos kontekstos matemātika kā valoda ir īpaši piemērota un citos – nav. Kā piemēru Švarcenbergers minēja to, ka būtu tikpat muļķīgi mēģināt uzrakstīt dzejoli par mīlestību matemātiskajā valodā, kā pierādīt algebras pamatteorēmu jebkurā citā valodā (Schwarzenberger, 2000).

Matemātika ir simbolu valoda, kas nodrošina verbālu izteikumu un speciālu zīmju un likumu valodas pastāvīgu vienotību. Reālās dzīves problēmas parasti ir definētas valodā, kurā netiek lietoti matemātiskie koncepti, simboli, aksiomas, teorēmas, formulas u. c. Analizējot problēmu un pārvēršot to algebrisko zīmju, burtu un citu matemātisko simbolu valodā, problēmu ir iespējams pierakstīt īsāk un, kas ir vēl svarīgāk, problēmai atbilstošu matemātisko modeli var modificēt, transformēt, veikt substitūciju uz vienkāršāku modeli. Kad šis darbs ir pabeigts, jāmāk matemātisko simbolu valodā uzrakstīto rezultātu pārvērst ierastajā saziņas valodā un formulēt secinājumus (Zeidmane, 2013).

Matemātiskās valodas lietošana ļauj īsāk un pārskatāmāk pierakstīt idejas. Piemēram, 300. gadā p.m.ē. leģendārajā matemātikas enciklopēdijā "Elementi" Eiklīds (*Euclid*) aprakstīja šādu teorēmu (*skat. 4.5. att.*): ja uz nogriežņa *XZ* atliek patvaļīgu punktu *Y*, iegūstot nogriežņus *XY* un *YZ*, tad laukums kvadrātam, kura mala ir sākotnējais nogrieznis *XZ*, ir tikpat liels kā kopā laukumi kvadrātiem, kas ir konstruēti uz nogriežņiem *XY* un *YZ,* un laukums diviem taisnstūriem, kuru malu garumi ir *XY* un *YZ* (Euclid, 300 p.m.ē.). Neapšaubāmi, šāds matemātiskās valodas piemērs ir grūti uztverams. Kopš Eiklīda darba matemātiskā valoda ir nemitīgi attīstījusies: 16. gadsimtā Vjets papildināja algebru ar aritmētisko darbību apzīmējumiem + un – , kā arī ieviesa jēdzienu "koeficients". Vjeta laikabiedrs Rekords ieviesa vienādības zīmi "="; Dekarts 17. gadsimtā ierosināja nezināmos apzīmēt ar alfabēta burtiem, atkārtotu reizināšanu aizstāt ar kāpināšanu un to pierakstīt mūsdienās ierastajā veidā x^2, x^3. Šie un citi jauninājumi ļauj Eiklīda teorēmu pierakstīt ievērojami īsāk: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Turklāt, Eiklīda interpretācijā šī teorēma ir spēkā tikai pozitīviem skaitļiem, bet algebriskais pieraksts ļauj teorēmu pielietot visiem reāliem skaitļiem (Bogomolny, 2018).



$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

4.5. att. **Matemātiskās valodas lietošanas piemērs** (Euclid, 300. p.m.ē.)

Atbilstoši kompetenču pieejai mācību saturā, matemātiskā valoda ir izcelta kā viens no sešiem skolēnam sasniedzamajiem rezultātiem pamatizglītībā (*skat. 4.4. tab.*). Tas nozīmē, ka turpmāk Latvijas skolās lielāka vērība tiks pievērsta izpratnes veidošanai par atsevišķu matemātisko simbolu un apzīmējumu nozīmi.

4.4. tabula. Sasniedzamie rezultāti matemātiskās valodas lietošanai saziņai un jēdzienu, ideju, problēmu risinājumu aprakstīšanai, beidzot 9. klasi (MK, 2018)

Satura komponentes	**Skolēna sasniedzamie rezultāti**
Matemātisks teksts, pieņemtie simboli un apzīmējumi	1. Lieto pieņemtos simbolus, tai skaitā kopu, to elementu un darbību ar kopām attēlošanai, lasot un veidojot matemātisku komunikāciju. 2. Pieraksta algebriskas izteiksmes, sakarības, izvēloties un lietojot burtu simbolus atbilstoši kontekstam. 3. Lasa, pieraksta šaurā leņķa trigonometriskās sakarības, demonstrējot izpratni par simbolu lietojumu. 4. Lasa, veido zīmējumus (tai skaitā, telpisku ķermeņu attēlus), ievērojot, ka ne vienmēr ir mērķtiecīgi vai ne vienmēr ir iespējams ievērot figūru patiesos izmērus, īpašības un/vai savstarpējo novietojumu. 5. Izveidojies ieradums ģeometriskā zīmējumā lietot burtu simbolus, parādīt/apzīmēt vienāda garuma nogriežņus, vienādus leņķus, taisnu leņķi, lietojot pieņemtos apzīmējumus.
Dažādi attēlojumi (reprezentācijas)	6. Veido situācijai atbilstošu, noderīgu attēlojumu, piemēram, skice vai precīzs zīmējums, visa figūra vai kāda tās daļa, izmanto grafiskos organizatorus risinājuma strukturēšanai. 7. Saista algebrisku un ģeometrisku objektu attēlojumus, piemēram, ģeometriski modelē matemātiskas izteiksmes, iracionālus skaitļus, kas pierakstīti kā kvadrātsakne no naturāla skaitļa. 8. Ar piemēriem skaidro, kā jebkuru skaitli, skaitlisku un algebrisku izteiksmi, vienādojumu, nevienādību, funkciju var attēlot dažādos veidos, saglabājot vienu un to pašu vērtību/saturu.

Piemēram, skolēns saprot, ka zīme “–” (mīnuss) matemātikā tiek lietota vismaz trīs nozīmēs (MK, 2018). Jāpiebilst, ka 2010. gadā izdotajā matemātikas mācību priekšmeta paraugā matemātiskā valoda tika pieminēta tikai vienreiz pie temata “Ģeometrijas pamatelementu definīcijas un īpašības”, kur skolotājiem ieteikts vērtēt skolēnu prasmi lietot precīzu matemātisko valodu (France, 2010).

Šīs izmaiņas ir saistītas ar to, ka, analizējot 12. klases matemātikas eksāmena rezultātus Latvijā, VISC pētnieku grupa J. Vilciņa vadībā nonāca pie secinājuma, ka Latvijas skolēni nepietiekamā līmenī saprot matemātikas jēdzienus, tādēļ skolēnu rezultāti uzdevumos, kas prasa jēdzienu izpratni, ir zemi. Piemēram, 46 % vidusskolas absolventu neizprot jēdzienu “skaitļu intervāls”, 50 % neizprot, kas domāts ar “funkcijas vērtību”, 48 % jauc jēdzienus “paralēls” un “perpendikulārs”, 10 % jauc jēdzienus “rādiuss” un “diametrs” utt. J. Vilciņa pētījumā secināts, ka aptuveni 15 līdz 30 % skolēnu sniegumu raksturo tipiski maldīgi priekšstati par matemātikas jēdzieniem, un iesaka mācību procesā iekļaut mācību aktivitātes ar mērķi novērst nupat pieminētos un vēl citus maldīgos priekšstatus: skolēni raksturo jēdzienu saviem vārdiem, to saikni ar citiem jēdzieniem, meklē analoģijas, prognozē iespējamos maldīgos priekšstatus u. tml. (Vilciņš, 2016).

Pamatizglītības matemātikas standarta mērķis ir panākt, lai pusaudži mācētu atšifrēt, interpretēt, atšķirt un izmantot dažādos veidos uzdotas parādības, problēmas un situācijas, simbolisko, algebrisko, vizuālo, ģeometrisko, grafisko vai mutisko attēlojumu, diagrammas un tabulas. Otrs mērķis ir prasme izvērtēt nupat pieminēto dažādo attēlojumu veidu priekšrocības un ierobežojumus, sakarības starp tiem. To iecerēts panākt, mācot skolēniem dažādas pieejas un risināšanas paņēmienus. Balstoties uz pusaudža veikto izvērtējumu, viņam jāspēj izvēlēties efektīvāko un pārslēgties starp dažādiem informācijas uzdošanas veidiem (MK, 2018).

Pētot pusaudžu komunikāciju matemātikas stundās, var novērot tendenci, ka skolēniem vieglāk veicas ar komunikāciju uz iekšu: lasīšanu, apgalvojumu un matemātiskās informācijas uztveri un interpretēšanu, turpretī sarežģījumi rodas ar komunikāciju uz āru: sava risinājuma un rezultātu skaidrošanu, prezentēšanu un argumentēšanu, tādēļ stundās jāvelta adekvāts apjoms laika, lai attīstītu arī komunikāciju uz āru. Verbālā un rakstiskā domu skaidrošana uzlabo skolēnu izpratni (Kardamis, 2019).

4.5. tabula. Matemātiskās valodas lietošanas un komunikācijas kritērija līmeņu apraksti

Līmenis	Līmeņa apraksts
Izteikti	Prot interpretēt un izmantot skaidrojumus, balstoties uz dažādiem informācijas avotiem (teksta, tabulas, diagrammas, infografikas u. tml.), un spriest tiešā saistībā ar tiem. Spēj formulēt viedokli, precīzi atainot savu darbību, izstāstīt savas domas par iegūtajiem rezultātiem, interpretāciju, argumentiem un to piemērotību oriģinālām situācijām.
Labi	Prot iegūt informāciju no vairākiem informācijas avotiem (teksta, tabulas, diagrammas, infografikas u. tml.), veido spriedumus, balstoties uz tiem. Analizē un izskaidro standartrisinājumus.
Vāji	Var atbildēt uz skaidri formulētiem jautājumiem par pazīstamu kontekstu, kurā ietverta attiecīgā informācija. Spēj iegūt nepieciešamo informāciju no viena informācijas avota (teksta, tabulas, diagrammas, infografikas u. tml.) un izmantot vienu skaidrojuma veidu.
Nav	Bez papildus uzvedinošiem jautājumiem nespēj nolasīt dažādos veidos uzdotu matemātisku informāciju, ieskaitot simbolisko, algebrisko, vizuālo, ģeometrisko, grafisko vai mutisko attēlojumu, diagrammas un tabulas.

4.2.4. Problēmu risināšana

Problēmu risināšana nav jauns koncepts ne vispārīgi, ne konkrēti matemātikā, taču pēdējās desmitgadēs ir būtiski mainījušies akcenti. A. Šenfelds (*Alan Schoenfeld*) izpētīja, ka 20. gadsimta 70. gados problēmu risināšana matemātikā visbiežāk noveda pie vienas pareizās atbildes, pildot uzdevumu par diagrammas veidošanu, pētot vienādojuma speciālgadījumus, veidojot vispārinājumus un tamlīdzīgi. Laika gaitā prasības un izpratne mainījās, un šodien ar problēmu risināšanu saprot drīzāk uzdevumus, ar kuriem tiek radīta skolēnu izpratne par kādu jēdzienu, risināšanas paņēmienu vai kādu citu fundamentālu ideju. Problēmu risināšanā šajās desmitgadēs pieauga matemātiskās spriešanas, pierādījumu un ilgtermiņa matemātisko pētījumu loma. Šajos matemātiskajos pētījumos problēmu risināšana ir pamats turpmākai izpētei, kas ļoti saskan ar konstruktīvisma ideju matemātikā, nevis virkne uzdevumu, kas ir jāizpilda. Problēmu risināšana ir svarīga matemātikas izglītības sastāvdaļa, jo tas ir viens no retajiem līdzekļiem, kas jau pamatizglītības līmenī spēj aptvert visas trīs fundamentālās matemātikas vērtības: funkcionalitāti, loģiku un estētiskumu (Schoenfeld, 1994).

20. gadsimta beigās problēmu risināšanā uzsvars novirzījās no mācīšanas risināt problēmuzdevumus uz mācīšanos, izmantojot problēmu risināšanu. Galvenā uzmanība tiek pievērsta matemātikas mācīšanai caur problēmu risināšanas kontekstu un uz pētnieciskumu orientētu mācību vidi, kurai raksturīgs skolotājs, kurš palīdz skolēniem konstruēt dziļu izpratni par matemātikas idejām un procesiem, iesaistot viņus praktiskās aktivitātēs. Skolēni šādās stundās veido, izvirza pieņēmumus, pēta, testē un pārbauda (Lester, Masingila, Mau, Lambdin, dos Santon, Raymond, 1994).

Mūsdienās par laba problēmu risināšanas uzdevuma pazīmi uzskata iespēju šo uzdevumu paplašināt, lai no tā varētu izdarīt matemātiskus atklājumus vai vispārinājumus. Problēmu risināšanas mērķis nav tikai atrisināt kādu noteiktu uzdevumu, bet arī, kā rakstīja matemātiķis P. Kobs (Cobb), aktivitātes rezultātā veicināt iesaistīto shēmu interiorizāciju un reorganizāciju (Cobb, 1991).

Problēmu risināšana ietver šādas pazīmes:

- ✓ mijiedarbība starp skolēniem un skolotāju un skolēnu (Van Zoest, Jones, Thornton, 1994);
- ✓ matemātiskie dialogi un produktīva skolēnu sadarbība (Van Zoest, Jones, Thornton, 1994);
- ✓ skolēns saņem tikai tik daudz informācijas, lai izprastu problēmas ideju, pēc tam skolēni precizē, interpretē, mēģina konstruēt vienu vai vairākus problēmas risinājumus (Cobb, Wood, Yackel, 1991);
- ✓ skolotājs pieņem gan pareizas, gan nepareizas atbildes nevis novērtējošā veidā, bet gan ievirzot jaunā potenciālā problēmā (Cobb, Wood, Yackel, 1991);
- ✓ problēmas risinājuma laikā skolotājs virza, dod padomus, uzdod mērķtiecīgus jautājumus (Lester, Masingila, Mau, Lambdin, dos Santon, Raymond, 1994);
- ✓ skolotājs zina, kad ir lietderīgi iejaukties un kad – atkāpties un ļaut skolēniem iet savu risinājuma ceļu (Lester, Masingila, Mau, Lambdin, dos Santon, Raymond, 1994);
- ✓ skolēnus iedrošina izdarīt vispārinājumus par likumiem un konceptiem, kas ir centrālais process matemātikā (Evan, Lappin, 1994).

Šenfelds aprakstīja trīs laba problēmu risināšanas uzdevuma pazīmes. Pirmkārt, šāda uzdevuma risinājumu vai rezultātu ir iespējams pierakstīt abstrakti, vispārināti, un uzdevumā pusaudzis tiek mudināts pielietot šīs pieejas. Piemēram, ja uzdevumā tiek pielietota kāda formula, viens no soļiem būtu izteikt no tās vajadzīgo nezināmo, pretstatā nezināmo aizstāšanai ar dotajām skaitliskajām vērtībām, kas uzdevumu padara par aritmētisku un pazemina tā abstrakcijas pakāpi. Otrkārt, lai apjēgtu matemātiskās likumsakarības, pēc Šenfelda domām, labam problēmu risināšanas uzdevumam jābūt ar starppriekšmetu kontekstu. Visbeidzot, šādam uzdevumam jāļauj pusaudzim pašam veidot, kritiski izvērtēt un precizēt savas teorijas par matemātiku, pievēršot lielu uzmanību niansēm (Schoenfeld, 1994).

Skolotājs vai skolēns formulē problēmu vai jautājumu, uz kuru jārod atbilde. Skolēni precizē problēmjautājumu, izdomā risinājuma plānu, īsteno to, izvērtē rezultātu, vai tas ir uzdotās problēmas atrisinājums un vai problēmu varētu risināt citādāk. Problēmu risināšana kā mācību metode attīsta prasmi iegūt nepieciešamo informāciju, kritiski un analītiski domāt, pieņemt lēmumu. Piemēram, apgūstot tematu "Vienādojumi", skolēnu uzdevums ir izveidot pētījumu par transporta izdevumiem, ja ir jāievēro dažādi nosacījumi; izstrādāt lētāko pakalpojumu modeli. Piemērs no ģeometrijas: skolēniem tiek iedots kāda daudzstūra modelis, uzdevums – veicot nepieciešamos mērījumus, aprēķināt figūras laukumu. Pusaudžiem jādomā, kā sadalīt šo figūru tādās daļās, kurām viņi prot aprēķināt laukumu – trijstūros vai četrstūros (France, 2010).

OECD matemātiskās kompetences definīcijā kā viena no trim sastāvdaļām minēta prasme izmantot matemātiku, lai apmierinātu indivīda kā konstruktīva, ieinteresēta un domājoša pilsoņa dzīves vajadzības. Šī definīcija uzsver matemātikas kā tāda mācību priekšmeta lomu, kurā spēcīgi tiek akcentēti procesi, kas saistās ar problēmu risināšanu reālās dzīves kontekstā, pakļaujot tās matemātiskai apstrādei, izmantojot atbilstīgas matemātikas zināšanas un izvērtējot risinājumu sākotnējās problēmas kontekstā (Geske, Grīnfelds, Kangro, Kiseļova, Mihno, 2013). Pēc PISA pētnieku domām, matemātisko problēmu risināšana, kas ir ceļš no matemātiskās problēmas līdz matemātiskam rezultātam, ietver virkni zināšanu un prasmju: modelēšanu, interpretēšanu, spēju formulēt spriedumus, risinājuma gaitas izvēli u. c.

4.6. tabula. Problēmu risināšanas kritērija līmeņu apraksti

Līmenis	Līmeņa apraksts
Izteikti	Prot risināt problēmas, pētīt un interpretēt to risinājumus. Spēj patstāvīgi izvēlēties daudzveidīgus atsevišķos gadījumus, ar kuriem pārbaudīt problēmas atrisinājuma derīgumu. Ja ir vajadzība, pēc šīs pārbaudes precizē atbildi.
Labi	Risina problēmas. Spēj veikt skaidri aprakstītas darbības, to skaitā tādas, kuras prasa secīgus lēmumus. Saņemot norādes, izvērtē, vai iegūtā problēmas risinājuma atbilde ir derīga visos gadījumos.
Vāji	Spēj identificēt informāciju un veikt rutīnas darbības saskaņā ar skaidri izteiktām norādēm precīzi formulētās problēmās. Spēj izmantot zināmos algoritmus un formulas.
Nav	Nespēj izveidot problēmas vai problēmuzdevuma risinājuma plānu. Ir grūtības izvēlēties problēmuzdevuma risinājuma algoritmu. Neprot noskaidrot vai precizēt trūkstošo informāciju.

4.2.5. Matemātiskā intuīcija

Matemātiķu vidū ir samērā liela vienprātība par intuīcijas būtisko lomu matemātiskajā radošumā (Puankare, 1990; Kolmogovors, 1988). Piemēram, Puankare iedalīja cilvēkus loģikas un intuīcijas piekritējos. Bez intuīcijas matemātikā nav iespējams radošums, it kā nejauši atklājumi. Tajā pašā laikā, intuitīvi izteiktas atziņas un atklātas likumsakarības jāpārbauda ar īpašu rūpību, meklējot iespējamos pretpiemērus vai iemeslus, kādēļ likums varētu nedarboties. Matemātikas vēsturē ir zināmi daudzi gadījumi, kad būtiskas teorēmas un formulas ir atklātas, vispirms intuitīvi izvirzot hipotēzi un tikai tad piemeklējot formālu pierādījumu, kas to apstiprina. Kā piemēru var minēt slavenu gadījumu, kā Arhimēds nonāca pie parabolas segmenta laukuma formulas, vispirms sverot no kāda materiāla izgrieztus parabolas segmentus un pēc masas izmaiņām izdarot secinājumus par laukumu (Casselman, 1897; Puankare, 1990).

A. Kolmogorovs matemātisko intuīciju pielīdzināja matemātiskai apdāvinātībai. Viņš arī uzskatīja, ka ģeometriskai intuīcijai ir liela loma darbam gandrīz jebkurā matemātikas nozarē, pat visattālākajā no ģeometrijas. Kā uzskatāmu piemēru matemātiķis min prasmi iztēloties funkcijas grafiku un šīs prasmes saistību ar intuitīvu nojausmu par atbilstoša vienādojuma atrisinājumu skaitu. Cits piemērs, kur ļoti noder intuitīva iztēlošanās, ir uzdevuma risinājuma shēmas izveide domās. It sevišķi tas noder tādos uzdevumos, kuros ir daudz sazarojumu, apakšgadījumu, izņēmumu, piemēram, vienādojumos un nevienādībās ar parametriem. Īsumā, matemātiskā intuīcija ir spēja paredzēt domās matemātiskā uzdevuma risinājuma gaitu (Kolmogorovs, 1988).

Matemātisko intuīciju raksturo spēja izvirzīt ticamas hipotēzes, lai vēlāk tās pierādītu. Ja matemātikā šķietami nejauši ir atrasts pareizs risināšanas ceļš, tad saka, ka risinātāju ir virzījusi matemātiskā intuīcija (Dieudonné, 1975). Nobela prēmijas ieguvējs, psihologs D. Kānemans oponē, ka nekas cilvēka prātā nav nejaušs – tas tikai kombinē reiz iegūtas, taču varbūt piemirstas zināšanas, atziņas, faktus. Matemātisko intuīciju var attīstīt, labāk iepazīstot pētāmo objektu. Kānemans ir apkopojis daudzus 20. gadsimtā veiktus pētījumus psiholoģijā un secinājis, ka ilgu laiku intuīcija tika uzskatīta par iracionālu un neuzticamu, bet intuitīvi spriedumi – par neprecīziem un sistemātiski neobjektīviem (Kahneman, 2011). Tomēr gadsimtu mijā tika izpētīti apstākļi, pie kuriem intuīcija ir ne tikai precīza, bet faktiski pat vēl ticamāka nekā spriedumi, kas ir iegūti analīzes rezultātā. Viens no šiem apstākļiem – pētījuma dalībnieki pieņēma efektīvāko lēmumu, balstoties uz intuīciju, ja vadījās pēc pirmās domas, kas ienāca viņiem prātā, nevis to apdomāja (Dijksterhuis, 2004).

Būtisks pretarguments matemātiskās intuīcijas nenozīmīgumam vai pat pastāvēšanai ir 19. gadsimta beigu franču matemātiķa A. Puankarē atziņa, ka matemātiķi izvēlas aksiomas samērā patvaļīgi: reizēm estētisku apsvērumu dēļ, citkārt – ērtības labad. Viņaprāt, tas liecina par to, ka nav iespējams radīt tādu mākslīgu intelektu, kurš varētu apgūt pilnīgi visu matemātiku, jo "sintētiskā intuīcija", kā to dēvēja A. Puankarē, nevarētu aizstāt cilvēka intuīciju. A. Puankarē vēl ir teicis, ka pierādījumu veikšanai izmantojam zinātni, savukārt, pie atklājumiem nonākam, pateicoties intuīcijai. Darbā par matemātiskās spriešanas dabu

A. Punakrē skaidroja, ka spriešana var sniegt tikai acīmredzamas patiesības, kuras ir aizgūtas no tiešas intuīcijas (Poincare, 1894).

Arī citi matemātiķi un filozofi ir mēģinājuši kādā veidā klasificēt un iedalīt matemātisko intuīciju. Piemēram, filozofs I. Kants iedalīja tiešo un empīrisko intuīciju, un pētīja saistību starp tām. Kants lietoja jēdzienu "intuīcija" gan aprakstot noteiktu prāta stāvokli, gan kā apzīmējumu šāda prāta stāvokļa radītiem objektiem. Pēc Kanta domām, intuīcija ir neatkarīga no objektīvās realitātes. Pēc viņa domām, prāts nevarētu darboties kā tukšs rezervuārs, kurš tikai saņem no ārpasaules datus – jābūt kaut kam, kas sakārto ienākošo informāciju (Kant, 1781).

Psihiatrs un filozofs K. G. Jungs apgalvoja, ka eksistē četras fundamentālas psiholoģiskās funkcijas: domāšana, jūtas, sajūtas un intuīcija, un tās, līdzās nostādnei uz ekstraversiju vai introversiju, nosaka cilvēka personības tipu, jo, pēc Junga domām, kaut gan jebkurš cilvēks ir apveltīts ar visām četrām psiholoģiskām funkcijām, viena no tām ir dominējošā, tā determinē personības tipu, tikmēr pārējās funkcijas izpaužas, ja ar dominējošās funkcijas palīdzību neizdodas pieņemt lēmumu vai atrisināt problēmu. Zīmīgi, ka cilvēkiem, kuriem dominē domāšana, gadījumos, ja tā nevar normāli darboties, vadošā loma ir intuīcijai (Jungs, 1993).

Vēl viens skatījums ir izdalīt trīs intuīcijas veidus: empīrisko, konstruktīvo un afektīvo. Empīriskā jeb holistiskā intuīcija rodas, laika gaitā uzkrājot dažādus informācijas avotus un ievērojamu matemātikas uzdevumu risināšanas pieredzi, kas ļauj vieglāk, it kā intuitīvi iedomāties līdzīga uzdevuma risinājuma ideju. Šis intuīcijas veids ir dinamisks, mainīgs, jo ir atkarīgs no konkrētā periodā pieliktās piepūles. No tā izriet vēl viena empīriskās intuīcijas īpašība – tā nav universāla, proti, ja kāda atziņa ir intuitīvi nojaušama vienam cilvēkam, tad tas tā ne obligāti ir citam cilvēkam. Konstruktīvā intuīcija, kuru mēdz dēvēt arī par intelektuālo un loģisko intuīciju, ir jauna objekta konstruēšana kontekstā ar dažādām tam izvirzītām prasībām vai īpašībām. Šis intuīcijas veids balstās uz iepriekš notikušiem analītiskiem procesiem, kas ir kļuvuši automātiski. Šo procesu nevajadzētu jaukt ar pareizā objekta atrašanu starp piedāvātajiem, jau pazīstamajiem variantiem, jo ir svarīgs jaunrades elements, proti, ka pusaudzis pats iedomājas kaut ko jaunu. Afektīvā jeb emocionālā, apgaismības intuīcija balstās uz jūtām. Kad emocija tiek piedzīvota, reaģējot uz problēmsituāciju, informāciju, ko šī sajūta sniedz, ne vienmēr ir viegli verbalizēt. Tādējādi emocijas bieži tiek izteiktas kā uzskati, kurus ne vienmēr var racionāli pamatot, tādēļ ne visi afektīvajā intuīcijā balstīti spriedumi raisa noteiktības izjūtu (Pretz, 2011).

Matemātiķus nodarbina jautājums, ko iesākt ar secinājumiem un atziņām, kas rodas, izvirzot vai pierādot hipotēzi, kas neiekļaujas mūsu intuīcijā un tādēļ šķiet dīvaina, piemēram, taisnes bezgalība, bezgalību hierarhija u. tml. (Dieudonné, 1975). 20. gadsimta sākumā kā kopu teorijas paradokss secināts, ka pilnīgi nekļūdīga matemātiskā intuīcija nav iespējama (Podnieks, 2015). Pusaudzim matemātiskā intuīcija var būt izteikta, taču pilnībā paļauties tikai uz to nebūtu prātīgi – tādēļ šī ir tikai viena no septiņām matemātiskās kompetences komponentēm, un tās visas jāskata kopsakarībā.

Pēc 20. gadsimta matemātiķa un zinātnes filozofa K. Gēdela (*Kurt Gödel*) domām, matemātiskā intuīcija ir analogs percepcijai – tiešam realitātes atspoguļojumam maņu orgānos, uztveres un sapratnes procesam. Gēdela lielākais sasniegums ir nepilnības teorēmas, no kurām izriet, ka nemainīga, universālu uzskatu sistēma principiāli nevar būt nepretrunīga. Saskaroties ar pretrunām, cilvēka prātam ir tendence sarežģīto aizstāt ar vienkāršo, arī tad, ja tas noved pie kļūdām, tādēļ matemātiskās intuīcijas viena no prasmēm ir intuitīvi iegūtas atbildes izvērtēšana (Godel, 1931).

Lai varētu novērtēt pusaudža matemātisko intuīciju, liela daļa testu piedāvā jautājumus, kuros ir jāpaturpina skaitļu virkne, kas ir skaidrojams ar to, ka šādā veidā iegūtās atbildes ir viegli apstrādāt un interpretēt. Tajā pašā laikā, šādi uzdevumi neļauj izdarīt vispārīgus, plašus secinājumus par matemātiskās intuīcijas līmeni. Lai varētu objektīvāk izvērtēt šo kritēriju, jāpārliecinās par pusaudža darbību domās (vai spēj paredzēt visu uzdevuma risinājumu, tikai atsevišķus soļus vai pavisam nespēj to izdarīt), praktiskā rīcībā (atlasot darbam vajadzīgās atziņas, aksiomas, teorēmas no nevajadzīgajām) un komunikācijā (piemēram, prot precīzi formulēt pētījuma jautājumu).

4.7. tabula. Matemātiskās intuīcijas kritērija līmeņu apraksti

Līmenis	**Līmeņa apraksts**
Izteikti	Domās paredz visu risinājumu. Prot pierādīt: atlasa pierādījumam noderīgus faktus, tēzes, aksiomas. Pārvalda vairākus matemātiskās domāšanas veidus. Apjēdz matemātikai raksturīgus pētniecisko jautājumu veidus, spēj formulēt šādus jautājumus un nojauš, kāda ir sagaidāmā atbilde.
Labi	Domās paredz nākamo risinājuma soli. Uzdevuma vai pierādījuma veikšanā atlasa gan noderīgus, gan liekus faktus. Pārzina matemātiskās izteiksmes un korekti lieto loģiskos operatorus, lai veidotu saliktus izteikumus tādus kā “ja, tad”, “tad un tikai tad, ja” u. c.
Vāji	Spēj veikt pašsaprotamas darbības un uzreiz sekot dotajam ierosinājumam. Atpazīst matemātiskās izteiksmes. Prot interpretēt un atpazīt situācijas kontekstā, kurā nepieciešami tikai precīzi secinājumi. Plānojot pierādījumu, nekritiski atlasa arī tādus faktus un aksiomas, kas nav noderīgas.
Nav	Neredz risinājuma gaitu. Neuztver matemātiskās izteiksmes. Nespēj izplānot uzdevuma risinājumu. Nespēj izprast pierādāmo teorēmu.

4.2.6. Kritiskā domāšana

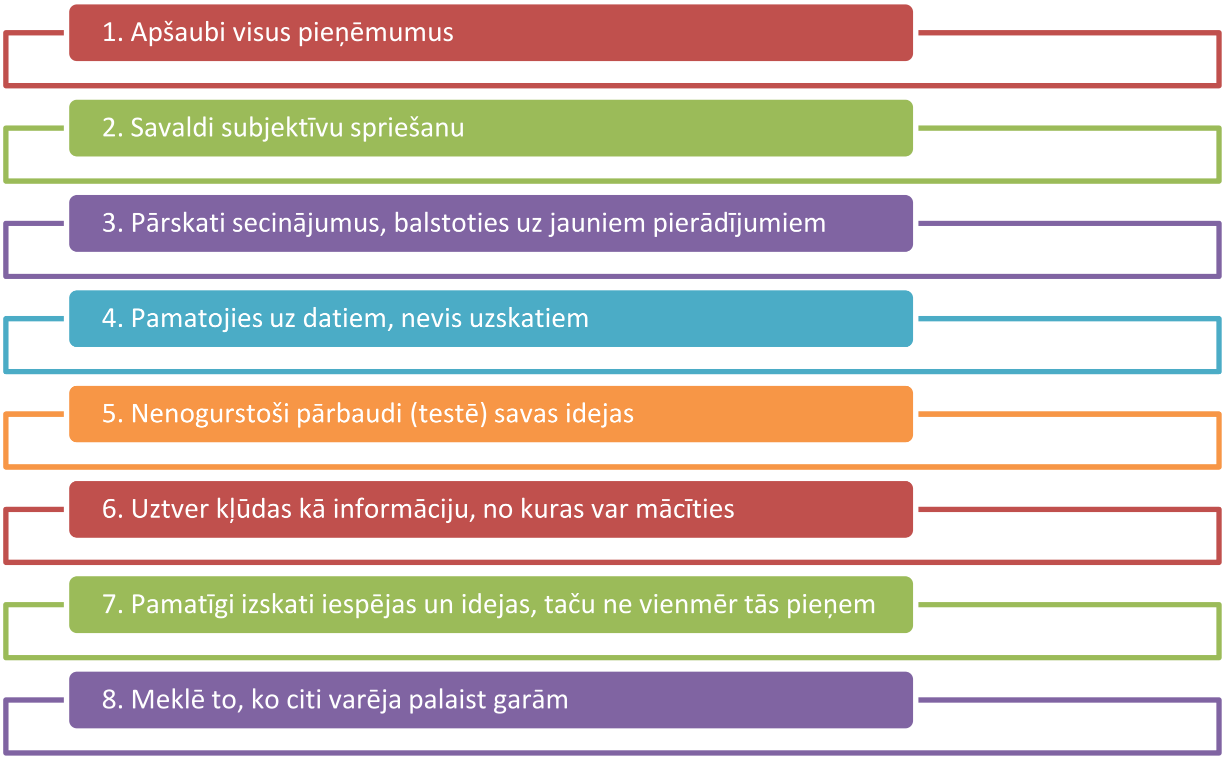
Vairāki autori kritisko domāšanu attiecina uz aktīvu iesaisti – kritiski domājošs pusaudzis ir matemātikas darītājs skolas un ārpusskolas kontekstā, viņam piemīt prasme un vēlēšanās iesaistīties darbībā, demonstrējot refleksivitāti un veselīgu skepticismu (Facione, 2011; McPeck, 1981). Citi autori kritisko domāšanu skaidro kā domāšanas metodi, kas nepieņem apgalvojumus bez pierādījumiem un kuras mērķis ir pēc iespējas argumentēti, izvērtējoši un neatkarīgi no citu uzskatiem izzināt patiesību, kad jāpieņem atbildīgs lēmums, kādai informācijai ticēt un kā rīkoties tālāk. Šādā interpretācijā kritiskās domāšanas mērķis ir veicināt patstāvīgu domāšanu, kas ir pretstats mehāniskai iegaumēšanai, atkārtošanai un gatavu modeļu izmantošanai (Cobb, Gressalfi & Hodge 2009; Fasko, 2003; Halpern, 1995; Jurjans, 2010; Rubene, Svece, 2018; Vēgners, 2018).

Kritiskā domāšana ir intelektuāli sakārtots aktīvas un prasmīgas analīzes, konceptualizācijas, kā arī novērojumos, pieredzē, pārdomās vai saziņā iegūtās informācijas pielietošanas, sintēzes un izvērtēšanas process, kas ļauj pieņemt labākos lēmumus, jo palielina objektivitāti situācijas izvērtējumā un mazina manipulācijas iespējas (Scriven, Paul, 1987).

Kritisko domāšanu var interpretēt ļoti dažādi. Psiholoģijā, ētikā un filozofijā to aplūko kā domāšanas ideālu, kas ietver argumentētu, izvērtējošu un patstāvīgu domāšanu. Didaktikā kritisko domāšanu var saprast kā mācību metodi, kurā skolotājs veicina skolēna spēju spriest par mācību priekšmeta aktuāliem jautājumiem, iemācot kritisko domāšanu netieši. Mācību priekšmeta standartā un saturā kritiskā domāšana var izpausties kā sasniedzamais rezultāts (Vēgners, 2018).

Kritiskajai domāšanai nepieciešamās pamatprasmes ietver novērošanu, spēju interpretēt, analizēt, izdarīt secinājumus un spēju sniegt novērtējumus. Tā balstās uz loģiku, metakognīciju (domāšanu par domāšanu) un intelekta kritērijiem, tostarp skaidrību, ticamību, precizitāti, nozīmīgumu, redzesloku un taisnīgumu. Radoša iztēle, stabila vērtību sistēma un mazāk izteikta emocionalitāte arī ir kritiskās domāšanas resursi (Halpern, 1995).

Nereti kritiskā domāšana tiek aprakstīta kā dažādu prasmju un īpašību kopums. Viens no tādiem sarakstiem iekļauj zinātkāri un ziņkārību, atvērtību dažādiem viedokļiem, spēju domāt sistemātiski, analītisku pieeju, neatlaidīgu patiesības meklēšanu, pārliecību par savas kritiskās domāšanas līmeni un, visbeidzot, domāšanas briedumu (Facione, Facione, 1993). Tomēr pieeja interpretēt kritisko domāšanu kā izolētu kognitīvo prasmju treniņu tiek kritizēta, jo tā ignorē kritiskās domāšanas veseluma ideju – skolēni fragmentāri un atrauti apgūst dažādas stratēģijas un tehnikas, taču tās nekļūst par viņu ieradumu ikdienas dzīvē (Rubene, Svence, 2018). Pastāv daudz zinātniski pamatotu stratēģiju, kā attīstīt pusaudžu kritisko domāšanu. Vienu apkopojuma piemēru var redzēt 4.6. attēlā (Carroll, Heick, 2019).



4.6. att. **Astoņi ieteikumi kritiskās domāšanas attīstīšanai** (Carroll, Heick, 2019)

Mūsdienās ir pieaugusi interese par kritisko domāšanu, jo informācijas pārbagātība rada nepieciešamību to kritiski izvērtēt, lai nepieļautu iespējas manipulēt ar informāciju. Kritiskā domāšana kā līdzeklis patstāvīgas domāšanas attīstībai tiek piedāvāts kā minētās problēmas risinājums. Lai nodrošinātu skolēniem iespēju analizēt un vērtēt daudzveidīgos un mainīgos procesus, aktualizējas jautājums par mācību procesā lietotām metodēm (Rubene, Svece, 2018).

Ja skolēns nav pietiekami praktizējies veidot loģisku spriedumu-seku virknējumus, kas prasa ne vien labi pārzināt teorijas materiālu, bet arī no visa apjoma atlasīt dotajā brīdī iederīgāko, tad šie skolēni ne fiziski, ne mentāli var nebūt gatavi apjēgt lielus informācijas apjomus, kas potenciāli var nākotnē apgrūtināt vai pat padarīt par neiespējamām studiju gaitas (Zeidmane, 2013). Viena no kritiskās domāšanas sastāvdaļām ir prasme atmest lieko informāciju, samazinot kognitīvo slodzi. Otra pieeja, kā samazināt informācijas pārslodzi, izdarot spriedumus, ir komplicētākas informācijas daļas apzīmēšana ar jaunu simbolu, ko sauc par substitūciju.

Pētnieku grupa P. Jurjāna vadībā veica pētījumu, kurā atklāja, ka Latvijas devītklasnieki biežāk sevi pozicionē kā radošus domātājus, darītājus matemātikā, kuriem ir savs individuālais veids, kā izprast vai tikt galā ar matemātiku, jo biežāk saista matemātiku ar darbībām formālās sistēmās un procesos vai modelēšanu un retāk min matemātiku kā skolas mācību priekšmetu. Šajā pētījumā arī secināts, ka divas trešdaļas skolēnu, kuri matemātiku uztver kā darbības ar formālām sistēmām, uzrāda matemātikā augstus sasniegumus (Jurjāns et al., 2010).

Pusaudži ar labi attīstītu kritisko domāšanu spēj labāk identificēt loģikas kļūdas, tostarp viltus dilemmas (viens otru it kā izslēdzoši gadījumi), apļveida argumentus, kuros pārfrāzēts pierādāmais fakts izmantots pierādījumā, vispārinājumus, kā arī retāk pieņem, ka apgalvojums ir aplams sliktas argumentācijas dēļ (Lapiņš, 2015).

4.8. tabula. Kritiskās domāšanas kritērija līmeņu apraksti

Līmenis	Līmeņa apraksts
Izteikti	Novērošanu, interpretāciju, analīzi, secinājumu veikšanu un novērtēšanu skolēns demonstrē ikdienas darbībā, pildot jebkuru uzdotu darbu vai uzdevumu. Prot konceptualizējot iegūtos rezultātus, formulējot atbilstošus spriedumus un sekmīgi tos pielietojot. Objektīvi, ar veselīgu skepticismu izvērtē starprezultātus, kas palielina risinājuma precizitāti.
Labi	Demonstrē novērošanu, interpretāciju, analīzi, secinājumu veikšanu un novērtēšanu, ja uzdevumā ir prasīts to darīt, taču bez atgādinājuma neuzņemas iniciatīvu novērtēt, interpretēt, secināt u. tml.
Vāji	Spēj novērtēt, analizēt un burtiski interpretē iegūtos rezultātus. Analizējot prot no problēmas izdalīt dažus faktus. Secina virspusēji.
Nav	Nepilnvērtīgi vai nekritiski spriež, analizē, novērtē, interpretē un izdara secinājumus, ko izraisa zināšanu trūkums vai apzināta selektīva izvēle.

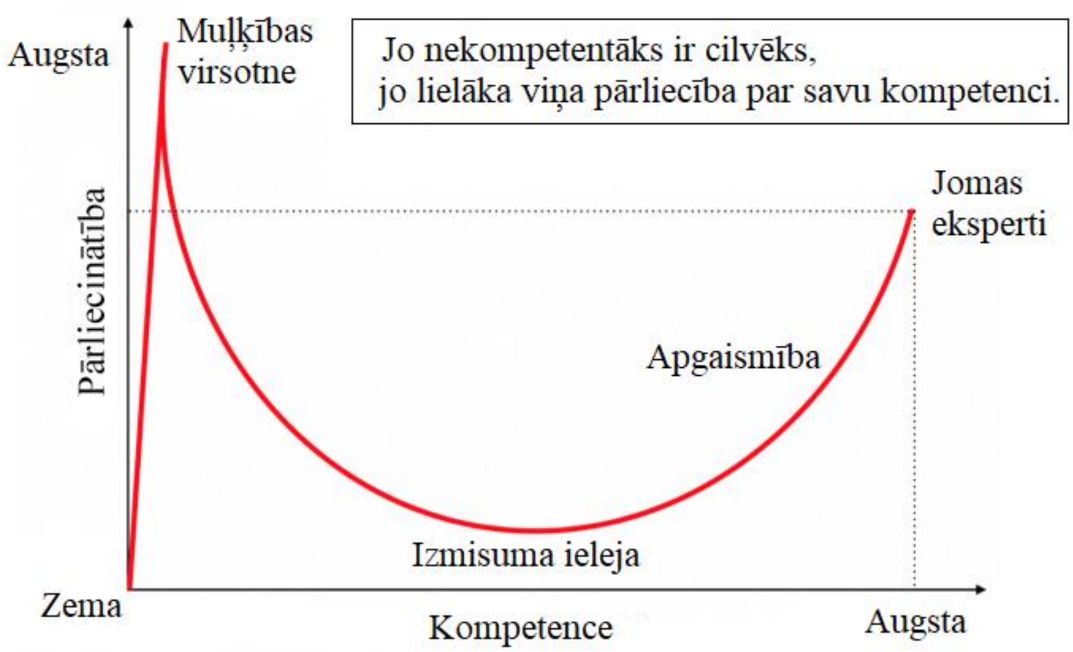
4.2.7. Pašrefleksija

Pašrefleksija ir subjekta pievēršanās pašam sev, savai apziņai, darbības rezultātiem un to apdomāšana un izvērtēšana ar mērķi panākt stāvokļa uzlabošanos. Dž. Djūijs (*John Dewey*) grāmatā *How We Think* par pašrefleksiju izteicās, ka tas ir vienīgais domāšanas veids, kas noved pie mācīšanās. Djūijs uzsvēra, ka pašrefleksija ietver ne tikai ideju un pārdomu virkni, bet gan sekas – katra doma nosaka nākamo atziņu, tādēļ pašrefleksijā jaunas atziņas ir sekas iepriekšējām pārdomām (Dewey, 1910).

Franču filozofs, biologs un daudzu citu jomu pārstāvis P. Teijārs de Šardēns (*Pierre Teilhard de Chardin*), filozofs I. Kants (*Immanuel Kant*) un citi domātāji apgalvoja, ka cilvēks no zvēriem atšķiras ar to, ka spēj ne tikai kaut ko zināt, bet arī apzināties savas zināšanas. Teijārs de Šardēns pašrefleksiju skaidroja kā apziņas iegūtu spēju koncentrēties uz sevi un iepazīt sevi kā objektu. Pēc viņa domām, tieši pašrefleksija pavēra plašas iespējas atklāt un pētīt jaunas jomas un prasmes, tostarp abstrakciju, loģiku, pārdomātu izvēli un atjautību (Teilhard de Chardin, 1959; Kant, 1781).

Pēc vācu-zviedru filozofa E. Kasīrera (*Ernst Cassirer*) domām, pašrefleksija ir spēja no visas nedalītas maņu fenomenu plūsmas izdalīt stabilus elementus, lai, izolējot tos, varētu koncentrēt uz tiem savu uzmanību (Cassirer, 1962). Kā redzams no šiem skaidrojumiem, filozofu, psihologu un izglītības pētnieku vidū ir samērā liela vienprātība par to, ka pašrefleksija ir cilvēkam piemītoša unikāla pamatīpašība, ar kuras palīdzību ir iespējams apzināties un racionāli regulēt savu domāšanas procesu, apziņu un darbību, tai skaitā, mācīšanos, novēršot sarežģījumus šo procesu funkcionēšanā.

Pašrefleksija ir vērsta uz apzinātu darbību, kuras pamatā ir refleksīvā domāšana. Attīstības psiholoģijas un izglītības psiholoģijas profesors A. Helmke (*Andreas Helmke*) izpētīja, ka tikai aptuveni ceturtdaļa (27 %) skolotāju pašrefleksijā atzīst, ka stundas laikā runā vairāk nekā pusi no mācību stundas laika, kaut gan stundu vērojumi parādīja, ka tā dara 77 % skolotāji. Šis piemērs parāda, ka pašrefleksijā jābalstās uz faktiem, izmērāmiem rādītājiem. Ja pašrefleksiju veic pēc mācībām, atmiņas selektīvā daba ietekmē to, cik objektīvi atceramies mācību procesu. Tas apgrūtina refleksiju par sava snieguma niansēm, tādēļ skolēni jāradina pie pašrefleksijas tūdaļ pēc paveiktas darbības, kam jākļūst par ieradumu (Helmke, 2009).



4.7. att. **Danninga-Krīgera līkne** (Kruger, Dunning, 1999)

Runājot par pašrefleksijas subjektivitāti, noteikti jāpiemin 20. gadsimta izskaņā atklāto Danninga-Krīgera efektu (*Dunning-Kruger Effect*). Amerikāņu psihologi Dannings un Krīgers izvirzīja hipotēzi, ka cilvēki ar zemu kompetenci kādā jomā pārvērtē savas zināšanas un prasmes, turpretī cilvēki ar augstu kompetences līmeni kļūdaini uzskata, ka viņu zināšanas un prasmes ir nepietiekamas, tādēļ biežāk izvēlas neizpaust savas domas (Kruger, Dunning, 1999). Veicot vairākus eksperimentus ar saviem studentiem, pētnieki apstiprināja šo hipotēzi (*skat. 4.7. att.*).

Šis metakognitīvais paradokss padara pašrefleksiju subjektīvu, jo īpaši, ja to veic pusaudži, kuriem ir raksturīgi pārspīlēt notiekošo. Cilvēks ar nepietiekamām zināšanām novērtē sevi neadekvāti augstu, jo neapzinās savas nezināšanas robežas. Pieaugot kompetencei un aptverot, cik daudz dotajā jomā vēl nav zināms, pārliecība par sevi samazinās, līdz ar to pašrefleksija kļūst situācijai neatbilstoši pesimistiska, ko tēlaini raksturo šī Danninga-Krīgera līknes fāzes nosaukums – izmisuma ieleja. Pieminētais efekts kalpo arī par atgādinājumu, ka izkļūt no šīs fāzes var vienīgi neatlaidīgi strādājot, papildinot savas zināšanas un kļūstot par ekspertu kādā jomā. Zīmīgi, ka arī eksperta stadijā, kad cilvēks sasniedz augstāko kompetences latiņu, pārliecinātība par sevi nav tik augsta kā brīdī, kad cilvēks ir ieguvis pirmo informāciju par kādu jautājumu un ir ļoti pārliecināts par savu kompetenci.

Pusaudzis, kuram piemīt labas pašrefleksijas prasmes, izvērtē savu rīcību un spriedumus un, balstoties uz šo izvērtējumu, formulē jaunus mērķus un problēmas, kas nodrošina iespēju mācīties pašvadīti, autonomi. Pašrefleksijas prasmes var pilnveidot, regulāri tai pievēršot uzmanību, atgādinot skolēniem veikt pašrefleksiju, sniedzot pusaudzim objektīvu, izsmeļošu un arī regulāru atgriezenisko saiti un uzdodot būtiskus atvērtā tipa jautājumus pašrefleksijai, piemēram, kā manis iegūtie problēmas atrisinājumi saskan ar reālās dzīves kontekstu vai kādas rakstura īpašības man vēl būtu nepieciešamas, lai kļūtu par labu problēmu risinātāju (Holand, 2017).

Pašrefleksija ir cieši saistīta ar skolēna pārliecību, ka viņš spēj efektīvi veikt dažādus mācību uzdevumus. Pašrefleksiju ietekmē pūles, kuras tiek veltītas mācību darbam, kā arī turpmākā neatlaidība, saskaroties ar izaicinājumiem. Pašrefleksijas biežumu un kvalitāti ietekmē arī domāšanas veids, mācīšanās stratēģijas un panākumi mācībās.

4.9. tabula. Pašrefleksijas kritērija līmeņu apraksti

Līmenis	**Līmeņa apraksts**
Izteikti	Gandrīz visās mācību situācijās izvērtē savu sniegumu, atbildot vismaz uz jautājumiem, kas jau izdodas labi, ko vajag uzlabot un ko darīt tālāk. Apzinās sevi, savas vēlmes un intereses. Prot un ir motivēts pastāvīgi un patstāvīgi mācīties un pilnveidot sevi, ir intelektuāli atvērts, apzināti meklējot intelektuālus, radošus un personīgus izaicinājumus. Apzinās efektīvākos mācīšanās paņēmienus, plāno izziņas procesu un uzņemas atbildību, lai plānotais tiktu sasniegts.
Labi	Izvērsti, objektīvi un racionāli atbild uz pašrefleksijas jautājumiem, ja par tiem īpaši atgādina. Spēj saprast un sekot līdzi savai domāšanai un mācīšanās procesam.
Vāji	Uz pašrefleksijas jautājumiem atbild nelabprāt, apšauba šī procesa nozīmi un jēgu. Atbildes ir lakoniskas, vispārīgas, neatbilstošas reālai situācijai. Pēc paša iniciatīvas neizvērtē savu domu gaitu, mācību rezultātus un/vai turpmākos soļus.
Nav	Nespēj izprast un sekot līdzi savai domāšanai un mācīšanās procesam. Ir grūtības atbildēt uz jebkuru pašrefleksijas jautājumu.

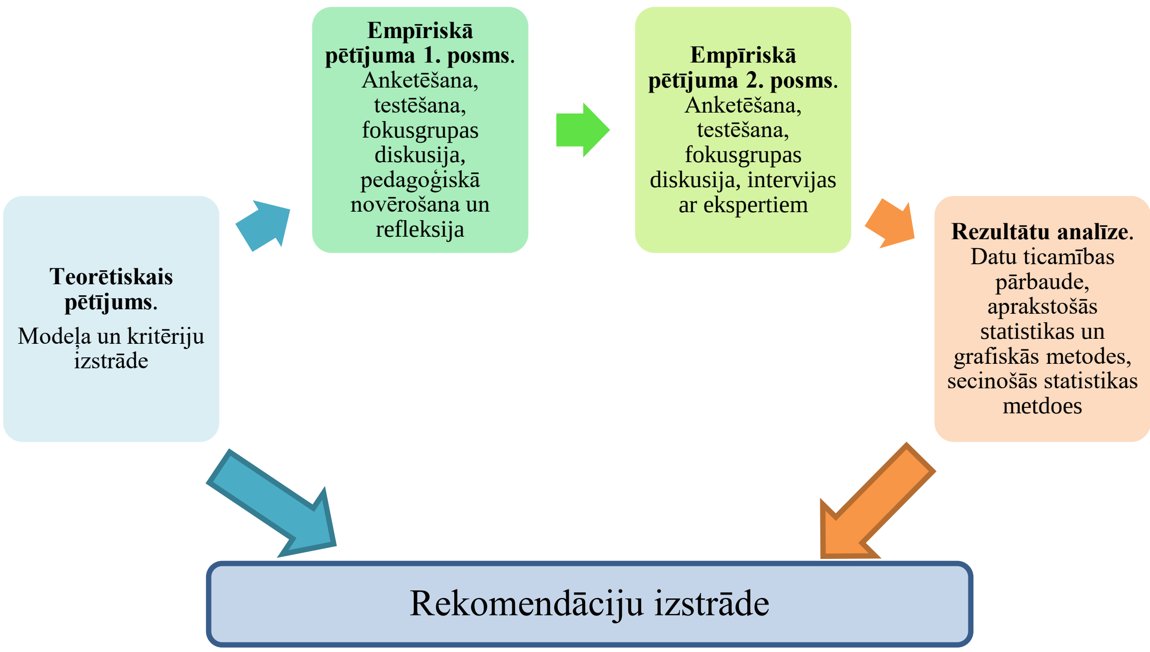
Rezumējot šīs septiņas apakšnodaļas, ir sniegts konspektīvs un pārskatāms matemātisko kompetenču komponentu snieguma kriteriālo līmeņu apraksts (*skat. 4.10. tab.*), kas vienlaikus var kalpot matemātiskās kompetences izvērtējumam pēc atbilstošajiem kritērijiem.

4.10. tabula. Matemātiskās kompetences vērtēšanas kritēriju līmeņi

Kritērijs	Līmenis			
	Izteikti	**Labi**	**Vāji**	**Nav**
Personības īpašības	Izteikta mērķtiecība, efektivitāte, kā arī iniciatīva, atbildība un zinātkāre	Mērķtiecība, efektivitāte, tiek ieguldītas apzinātas pūles	Nelielas pūles problēmsituācijā	Nepauž neatlaidību, zinātkāri, mērķtiecību; grūtībās padodas
Matemātiskā modelēšana	Pēta un veido modeļus	Pēta un pielieto gatavus modeļus	Pielieto gatavu modeli, bet neanalizē	Neizprot un/vai nespēj pielietot modeli
Matemātiskās valodas lietošana, komunikācija	Izmanto dažādus informācijas avotus. Dažādas situācijas un problēmas interpretē matemātiskajā valodā	Prot izmantot vairākus informācijas avotus, tekoši izmanto matemātisko valodu	Izmanto vienu informācijas avotu (tekstu, diagrammu, skaidrojumu), izmanto matemātisko valodu	Neprot pāriet no daudzveidīgām situācijām uz matemātisko terminoloģiju, vāji izmanto matemātisko valodu
Problēmu risināšana	Formulē, atrisina reāla satura problēmas, izvēlas piemērotāko risinājuma gaitu; interpretē	Atrisina problēmu pēc instrukcijām vai parauga. Risinājumā pieļauj nebūtiskas, piemēram, aritmētiskas neprecizitātes	Spēj piemērot standarta risinājumu atsevišķos gadījumos	Nespēj plānot risinājumu
Matemātiskā intuīcija	Domās paredz visu risinājumu, prot pierādīt, izskaidrot un argumentēt savu atbildi	Domās paredz nākamo risinājuma soli	Veic standarta risinājumus	Neredz risinājuma gaitu
Kritiskā domāšana	Pamato, spriež, argumentē, pierāda	Izsaka spriedumus, argumentē	Izsaka vienkāršus spriedumus, argumentē nepilnīgi	Nespēj izteikt spriedumu, nelieto argumentus
Pašrefleksija	Izvērtē savu sniegumu, mācīšanās darbību	Reflektē par savu mācīšanās darbību	Identificē rezultātus, bet neizvērtē tos	Nespēj analizēt savu mācīšanās darbību

5. Pusaudžu matemātiskās kompetences izpēte

Balstoties uz matemātikas mācību teorētisko analīzi, pusaudžu raksturojumu, matemātiskās kompetences skaidrojumiem, modeli un kritērijiem, šajā nodaļā analizēti empīriskā pētījuma rezultāti. Pētījumā izmantotas gan kvantitatīvas, gan kvalitatīvas pētījuma metodes, kuras izmantotas secīgi – kvantitatīvie dati aprakstīti, izmantojot aprakstošo statistiku un atziņas no kvalitatīviem datiem. Kvantitatīvo datu ieguvei izmantotas 193 pusaudžu un trīs matemātikas skolotāju aptaujas, savukārt, šo datu apstrādei izmantota programma *IBM SPSS Statistics 22*. Kvalitatīvie dati iegūti organizētā fokusgrupas diskusijā ar trīs matemātikas skolotājiem un astoņiem astotklasniekiem, kā arī daļēji strukturētās intervijās ar diviem ekspertiem.



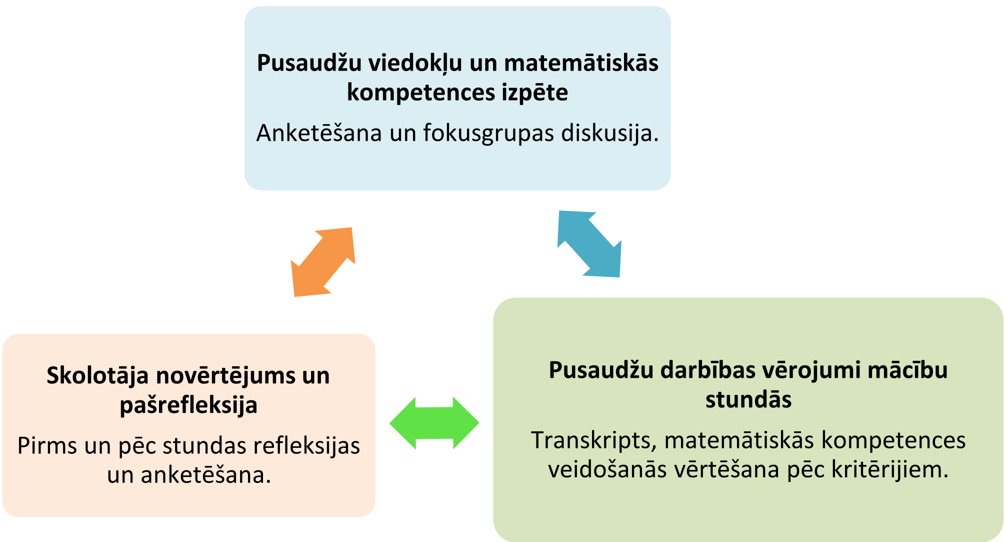
5.1. att. **Pētījuma shematisks attēlojums**

Ar **mērķi** izpētīt pusaudžu matemātiskās kompetences veidošanos, laikā no 2016. līdz 2020. gadam Mārupes Valsts ģimnāzijā (līdz 2019. gada 1. septembrim – Mārupes vidusskolā) tika veikts neeksperimentāls, secīgi veikts jauktu metožu konverģenta dizaina konstatējošs pētījums. Empīriskais pētījums tika paveikts divos posmos. Empīriskais pētījums balstījās uz teorētiskā izpētē gūtajām atziņām. Pusaudžu matemātiskā kompetence tika identificēta un vērtēta atbilstoši izstrādātajiem kritērijiem. Pētījuma posmi ir parādīti attēlā (*skat. 5.1. att.*).

5.1. Empīriskā pētījuma metodoloģija

Empīriskā pētījuma 1. posms jeb izmēģinājuma pētījums veikts ar mērķi precizēt un papildināt teorētiskās izpētes gaitā formulēto pusaudžu matemātiskās kompetences modeli un vērtēšanas kritērijus, precizēt uzdevumu formulējumus, identificēt jautājumus un uzdevumus ar zemu izšķirtspēju un piedāvāt tiem alternatīvas, lai pamatpētījumā iegūto datu analīze ļautu izdarīt pamatotus secinājumus par pusaudžu matemātisko kompetenci. Lai sasniegtu šos mērķus, tika izmantota kvantitatīva pētījuma metode – aptauja, kuras datus palīdzēja interpretēt ar kvalitatīva pētījuma metodēm (fokusgrupas diskusija ar pusaudžiem, daļēji strukturētas intervijas ar ekspertiem un anketa pusaudžiem ar kvalitatīviem jautājumiem) iegūtie dati (*skat. 5.1. tab.*).

Izmēģinājuma pētījuma bāzi veido 77 skolēni (29 astotās klases un 48 devīto klašu skolēni), kuru mācību process tika vērots 14 matemātikas mācību stundās. Izmēģinājuma pētījuma gaitā 41 pusaudzis (8 astotās klases un 33 devīto klašu skolēni) aizpildīja anketu par matemātisko kompetenci, kas sastāv no 21 matemātiska, pašrefleksijas un vispārīga jautājuma (*skat. 1. pielikumu*). Analizējot anketēšanas rezultātus, anketa tika precizēta un papildināta, lai tā kalpotu par precīzāku matemātiskās kompetences veidošanās vērtēšanas mērinstrumentu.



5.2. att. **Empīriskā pētījuma 1. posma datu triangulācija** (autora veidots)

Lai nodrošinātu datu ticamību, empīriskā pētījuma izmēģinājuma pētījumā izmantota datu triangulācija (*skat. 5.2. att.*). Pusaudžu un skolotāju viedokļu izpēte veikta ar mērķi noskaidrot pusaudžu matemātiskās kompetence veidošanās apstākļus. Pusaudži atbildēja uz konkrētiem izvērtējuma jautājumiem par to, vai mācību process palīdz viņiem veidot matemātisko kompetenci, veica savas matemātiskās kompetences pašvērtējumu, kā arī tika noteikts līmenis, kādā pusaudži atrisināja uzdevumus, kas atbilst konkrētam matemātiskās kompetences kritērijam. Matemātikas skolotāji analizēja pusaudžu matemātiskās kompetences veidošanos refleksijās par matemātikas mācību stundām.

Ja skolotāju un pusaudžu viedokļu izpētē radās nesakritības, tās padziļināti tika analizētas, izmantojot datus, kas ievākti, vērojot stundas. Vērošana šī izmēģinājuma pētījuma kontekstā ir komplekss pasākumu kopums. Tas iekļauj ne tikai stundas transkripciju, bet arī interviju ar skolotāju pirms stundas par stundas mērķiem un skolēniem sasniedzamajiem rezultātiem, refleksiju pēc stundas par to, kas ir izdevies un ko skolotājs nākamreiz darītu citādāk, kā arī novēroto mācību situāciju, dialogu, stundā risināto uzdevumu un skolēnu panākumu klasifikāciju atbilstoši matemātiskās kompetences kritērijiem.

5.1. tabula. Izmēģinājuma pētījuma metodes

Metode	Pētījuma izlase	Mērķis	Laiks
Stundu vērošana	14 matemātikas mācību stundas, kurās piedalījās 77 skolēni (29 – 8. klase, 48 – 9. klase)	Analizēt skolēnu darbību	2016./2017. mācību gads
Anketēšana	41 skolēns (8 – 8. klase, 33 – 9. klase), 3 skolotāji	Pārbaudīt izstrādātās anketas piemērotību pusaudžu matemātiskās kompetences vērtēšanai	2017. gada janvāris
Fokusgrupas diskusija ar skolēniem	8 skolēni (8. klase)	Iegūt kontekstu aptaujas datu objektīvai interpretēšanai	2017. gada 4. jūnijs

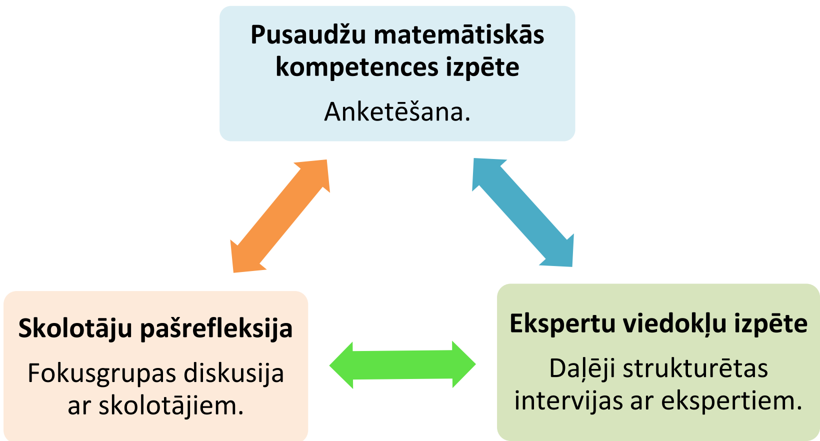
Empīriskā pētījuma 2. posms jeb pamatpētījums veikts ar mērķi novērtēt pusaudžu matemātisko kompetenci atbilstoši izstrādātajam matemātiskās kompetences veidošanās didaktiskajam modelim un vērtēšanas kritērijiem pēc konverģenta pētījuma dizaina, izmantojot kvantitatīvās un kvalitatīvās pētījuma metodes. Pamatpētījuma bāzi veidoja 193 Mārupes Valsts ģimnāzijas astoto un devīto klašu skolēni, trīs matemātikas skolotāji un divi eksperti.

Pamatpētījumu veido trīs secīgas aktivitātes un datu apstrāde un analīze (*skat. 5.2. tab.*). 8. un 9. klases skolēnu pilnveidotajā aptaujā analizētas 193 anketas (*skat. 9. pielikumu*). Pamatpētījuma fokusgrupas diskusijā piedalījās trīs matemātikas skolotāji (*skat. 10. pielikumu*). Analizētas divas ekspertu intervijas (*skat. 11. un 12. pielikumu*).

5.2. tabula. Pamatpētījuma metodes

Metode	Pētījuma izlase	Mērķis	Laiks
Anketēšana	193 skolēni	Novērtēt atbilstoši kritērijiem pusaudžu matemātisko kompetenci	2019. gada janvāris
Fokusgrupas diskusija ar skolotājiem	3 matemātikas skolotāji	Interpretēt un padziļināti skaidrot pamatpētījuma aptaujā iegūtos datus	2017. gada 13. jūnijs
Ekspertu intervijas	2 eksperti		2018. gada 7. un 8. februāris
Pamatpētījuma datu apstrāde un analīze		Izdarīt datu analīzē balstītus secinājumus par pusaudžu matemātiskās kompetences veidošanos un izstrādāt rekomendācijas pusaudžu matemātiskās kompetences veidošanās sekmēšanai	2019. – 2021. gads

Lai nodrošinātu datu ticamību, arī empīriskā pētījuma pamatpētījumā izmantota datu triangulācija (*skat. 5.3. att.*). Pusaudžu anketēšana veikta ar mērķi konstatēt pusaudžu matemātisko kompetenci, savukārt, skolotāju un ekspertu viedokļu izpēte diskusijā un intervijās veikta ar mērķi interpretēt un padziļināti skaidrot pamatpētījuma aptaujā iegūtos datus.



5.3. att. **Pamatpētījuma datu triangulācija** (autora veidots)

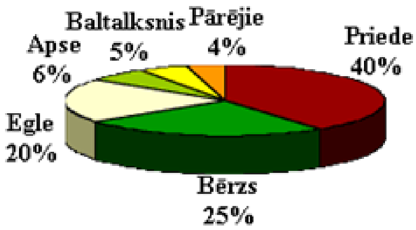
Kvantitatīvo datu apstrādei izmantota programma *IBM SPSS Statistics 22*: Iegūto datu analīzē izmantota aprakstošā statistika, grafiskās metodes un secinošās statistikas metodes:

- datu ticamības pārbaude (Kronbaha alfa tests),
- mainīgo vērtības sadalījums (Kolmogorova-Smirnova tests),
- centrālās tendences rādītāji (aritmētiskais vidējais, mediāna un moda),

- variācijas rādītāji (standartnovirze),
- pāru korelācijas analīze (Spīrmena korelācija),
- šķērstabulas.

Kvalitatīvo datu analīzei izmantota datu reducēšana (transkripti), datu atspoguļojums, tēmu definēšana (reducēto datu kodēšana) un datu aprakstošā analīze.

Tālāk ir pamatots empīriskā pētījuma 1. posmā izmantotais **instrumentārijs** – uzdevumi pusaudžu matemātiskās kompetences vērtēšanai (*skat. 5.3. tab.*).



5.4. att. **Vizuālais materiāls uzdevumā, kur skolēnam jāizmanto divi informācijas avoti**

5.3. tabula. Uzdevumi matemātiskās kompetences vērtēšanai

Kritērijs	Uzdevums	Komentārs
Personības īpašības	Iedomājies, ka, risinot ģeometrijas uzdevumu, Tu ieguvi atbildi, ka malas garums ir negatīvs skaitlis. Kā Tu rīkotos?	Šajā un pārējos divos pašvērtējuma jautājumos par skolēnu neatlaidību galvenokārt uzmanība tika pievērsta sekojošam atbilžu iedalījumam: pusaudzis ignorētu situāciju (vai censtos nomaskēt kļūdu) vai rīkotos aktīvi (atrisinātu no jauna, pūlētos atrast citu risināšanas paņēmienu).
Matemātiskā modelēšana	Kādus procesus var aprakstīt ar funkciju? Vienādsānu trijstūra viena mala ir 8 cm un cita mala ir 5 cm gara. Aprēķini trijstūra perimetru!	8. klases skolēni pazīst lineāru funkciju, apgrieztās proporcijas, kvadrātsaknes un vispārīgās funkcijas. 9. klases skolēni papildus jau minētajām funkcijām anketas pildīšanas brīdī bija mācījušies arī kvadrātfunkciju. Uzdevums ir par trijstūra nevienādību, ko apgūst 7. klasē. Augstākajam līmenim tika sagaidīts, ka skolēni pamanīs, ka uzdevumam ir iespējamas divas pareizās atbildes.
Matemātiskās valodas lietošana, komunikācija	Puse Latvijas teritorijas ir klāta ar mežiem. Diagrammā ir redzams Latvijas mežu sadalījums pa koku sugām. Cik procentus no Latvijas teritorijas klāj skujkoku meži? (*skat. 5.4. att.*)	Uzdevums (līdzīgi kā PISA testā) pārbauda prasmes iegūt un pielietot informāciju no vairākiem informācijas avotiem. Viens no tiem ir teksts, otrs – sektoru diagramma. Ja skolēns to neprot izdarīt, tas ir vājš sniegums komunikācijā; ja prot – labs; ja turklāt skolēnam ir izteiktas lasītprasmes, kas ļauj pamanīt uzdevumā ietvertu starppriekšmetu saikni ar bioloģiju, tas ir izteikts komunikācijas līmenis

Problēmu risināšana	2015. gadā Mārupes vidusskolā mācījās 910 skolēni, 2016. gadā – 1000 skolēnu un 2017. gadā – 1100 skolēni. Sastādi matemātisku uzdevumu un atrisini to!	Šim uzdevumam nav vienas pareizās atbildes, tas pārbauda skolēnu domāšanas dziļumu – vai apstājas pie sākumskolas skolēnam atbilstoša teksta uzdevuma par skaitļu atņemšanu vai saskaitīšanu, vai arī izdomā vecumam atbilstošāku, komplicētāku problēmuzdevumu.
Matemātiskā intuīcija	Paturpini skaitļu virkni 2, 8, 18, …	Uzdevuma atrisinājumi tika vērtēti četros līmeņos: 0 – nav risināts; 1 – centieni uzminēt skaitļus bez skaidrojuma; 2 – pamana likumsakarību; 3 – apraksta to vispārīgi.
Kritiskā domāšana	Kāds būtu pirmais solis, lai ar pierādījumu no pretējā pamatotu, ka $\sqrt{2}$ ir iracionāls skaitlis? Četrstūra diagonāles ir reizē arī četrstūra leņķu bisektrises. Kā Tu pamatotu, ka šis četrstūris ir rombs?	Abos uzdevumos izmantota šāda skala: nerisina uzdevumu vai balstās uz aplamiem apgalvojumiem; atsaucas uz neeksistējošu pazīmi; daļēji pareizi pamato uzdevumā prasīto; pilnīgi pareizi pamato uzdevumā prasīto.
Pašrefleksija	$9^2 > 9$, bet $0{,}9^2 < 0{,}9$. Ko Tu secināji no šīm divām skaitliskām nevienādībām?	Pusaudžu veikums kodēts pēc sekojošas skalas: uzdevums nav risināts vai secina, ka viena no nevienādībām ir aplama; izdara secinājumus tikai par dotajām divām nevienādībām; mēģina vispārināt, taču hipotēze neizpildās visos gadījumos (ir iespējami pretpiemēri); pareizi vispārina uzdevumā ietverto matemātisko ideju.

5.2. Empīriskā pētījuma rezultāti

5.2.1. Empīriskā pētījuma 1. posma (izmēģinājuma pētījuma) rezultāti

Ar mērķi novērtēt pusaudžu matemātisko kompetenci un noskaidrot viņu pašvērtējumu savai matemātiskai kompetencei, tika veikta anketēšana, kurā piedalījās 41 skolēns no 8. un 9. klases. Anketēšanā skolēni ne tikai sniedza pašvērtējumu savai matemātiskajai kompetencei, bet arī risināja dažādus uzdevumus (*skat. 1. pielikumu*). Līdzīgu anketu aizpildīja arī šo skolēnu matemātikas skolotāji, prognozējot skolēnu atbildes uz izvērtējuma jautājumiem un pamatojot savas atbildes, kā arī atrisinot tos pašus uzdevumus (*skat. 2. pielikumu*). Anketa sastāv no 21 jautājuma, no tiem 13 ir refleksijas jautājumi par pusaudžu pieredzi matemātiskās kompetences veidošanā (attīstībā) matemātikas stundās un 8 matemātiski uzdevumi, kuri mēra matemātiskās kompetences līmeni pēc atbilstošajiem kritērijiem. Kritēriju līmeņi noteikti atbilstoši Likerta skalai.

Šīs anketēšanas Kronbaha alfa koeficienta vērtība ir 0,68 (*skat 5.5. att.*). Ja šis koeficients ir robežās no 0,6 līdz 0,7, tā tiek uzskatīta par pietiekamu skalas saskaņotības vērtību.

Reliability Statistics

Cronbach's Alpha	N of Items
,681	22

5.5. att. **Skalas saskaņotības koeficienta vērtības (Kronbaha alfa) anketēšanā iekļautajām skalām**

Anketēšanā par matemātiskās kompetences jēdziena izpratni 8. klases skolēni visbiežāk norādīja, ka nezina, kas ir matemātiskā kompetence. Otra izplatītākā atbilde bija, ka matemātiskā kompetence ir izpratne par matemātiku vai konkrētām tēmām. Piemēram, dažu skolēnu atbildes bija šādas: “Manuprāt, tas norāda uz to, vai Tu zini un saproti šo priekšmetu, vai tas ir Tavā kompetencē,” “To, ka cilvēks visu saprot un izprot tēmu,” “Matemātiski kompetents cilvēks ir cilvēks, kuram padodas un patīk matemātika un liekas viegli saprotama.” (*skat. 3. pielikumu un 5.4. tab.*).

Skolēnu atbildēs parādījās arī izpratne, ka matemātiskā kompetence ir saistīta ar modelēšanu, skolēna pieredzi un izpratni: “Cilvēks matemātiski var saprast, kā kāda darbība vai uzdevums ir izpildāms.” Vēl daži skolēni kompetenci novērtē pēc tā, vai iegūtās zināšanas un prasmes būs pielietojamas turpmāk dzīvē, arī kā patiku pret matemātiku un vēlmi to mācīties. “Ja skolēnam ir viedoklis par matemātikas tēmām, izpratne, matemātiskā domāšana.” (*skat. 3. pielikumu*).

Pēc pusaudžu viedokļa izzināšanas, anketas turpinājumā respondenti varēja izlasīt, ko saprot ar matemātisko kompetenci šī pētījuma kontekstā, un pusaudžiem uzdots otrs jautājums – vai viņi piekrīt šim formulējumam, vai tajā būtu vajadzīgi labojumi, kā arī, vai, viņuprāt, matemātikas stundās ir radīti nosacījumi matemātiskās kompetences veidošanai šādā izpratnē? 85 % skolēnu (35 no 41) atzina, ka matemātiskā kompetence jau ir pietiekami izsmeļoši izskaidrota un labojumi nav vajadzīgi. Daži skolēni ierakstīja savus komentārus. “Es piekrītu, ka skolēniem ir jāmācās daudzpusīgāk, lai zinātu vairākas pieejas vienam atrisinājumam un lai trenētu loģisko domāšanu un veicinātu uzdevumu veiktspēju.” “Manuprāt, spēja risināt lietas ar iniciatīvu un atbildību ir ļoti noderīga.” “Skolēniem ir jāiesaistās aktīvi, jāmēģina visu izprast.” (*skat. 3. pielikumu*).

5.4. tabula. Pusaudžu viedokļi par matemātisko kompetenci

Zināšanas	Darbības	Sekmes, novērtējums, attieksme
✓ Apgūts matemātikas saturs. ✓ Zināšanu daudzuma noteikšana. ✓ Visu saprast un izprast. ✓ Zināšanas, kuras noderēs (palīdzēs) nākotnē. ✓ Matemātikas pieredze. ✓ Potenciāls vai viedoklis par matemātikas tēmām, izpratne, matemātiska domāšana.	✓ Mācību stundās runā tikai par matemātiku. ✓ Spēja pielietot matemātikā iegūtās zināšanas un prasmes dažādu uzdevumu veikšanai, arī ikdienas dzīvē. ✓ Izvērtēt rezultātus domājot matemātiski, ievērojot matemātikas likumus un rezultātus balstīt uz tiem. ✓ Zina, kādas darbības ir jāveic, lai atrisinātu uzdevumu. ✓ Matemātikas apguve pēc iespējas augstākā un kvalitatīvākā līmenī.	✓ Zināšanu līmeņa vērtējums. ✓ Padodas un patīk matemātika. ✓ Matemātikas sasniegumi vai panākumi. ✓ Atbildīga attieksme pret matemātikas apguvi. ✓ Apziņa (vēlme) matemātiku izmantot dzīvē. ✓ Matemātikas nepieciešamība un lietderīgums ikdienā un dzīves pieredzē, kā arī tas, cik ļoti cilvēks saprot to, kas viņam ir jāzina un jāprot.

Pēc anketēšanas par matemātiskās kompetences jēdziena izpratni, tika veikta 14 matemātikas stundu vērošana 8. un 9. klasēs, strukturējot stundas transkripciju atbilstoši izstrādātajiem matemātiskās kompetences kritērijiem (*skat. 4.1. un 4.10. tab.*). Pirms vērotajām stundām ar matemātikas skolotājiem pārspriesti vērošanas mērķi, skolēnu attieksme, panākumi mācībās, kā arī izvirzīta hipotēze par skolēnu iespējamiem rezultātiem, pildot uzdevumus, kas pārbaudītu matemātiskās kompetences līmeni.

Vēroto stundu pierakstu analīze ļauj secināt, ka stundas bijušas lielākoties frontālas, skolotāji pārsvarā izmantoja gatavu zināšanu nodošanas pieeju. Visiem skolēniem klasē piedāvāti vienādi uzdevumi, kuri visbiežāk atbilst diviem zemākajiem līmeņiem visās matemātiskās kompetences komponentēs (*skat. 4. pielikumu un 5.5. tab.*).

5.5. tabula. 14 matemātikas mācību stundu vērojumu analīze 8. un 9. klasēs

Kritērijs	Vērojums
Matemātiskā intuīcija	Vairākums skolēnu nespēja demonstrēt matemātisko intuīciju vai uzrādīja vāju līmeni (pabeidza skolotāja iesāktos teikumus u. tml.)
Problēmu risināšana	Stundā ir identificējami visi līmeņi, izņemot augstāko. Daudzi skolēni neprata plānot risinājumu un nesaprata skolotāja dotos mājienus. Daži skolēni pēc dotajām instrukcijām sasniedz stundai izvirzīto sasniedzamo rezultātu.
Matemātiskā modelēšana	Atsevišķi skolēni sasniedza arī augstāko līmeni, piemēram, viens skolēns pareizi mācēja nosaukt pretpiemērus, vispārināt likumu. Bija skolēni, kuri neizprata stundā aplūkoto modeli.
Komunikācija	Komunikācija zemākajos divos līmeņos, jo skolēniem netika dota iespēja pārvaldīt informāciju, to interpretēt un skaidrot. Visas šīs augstākā līmeņa darbības veica skolotājs.
Kritiskā domāšana	Daļa skolēnu neizsekoja skolotājas domu gaitai. Daži skolēni sprieda pārāk tieši, piemēram, paļāvās uz atsevišķu gadījumu pārbaudi. Pēc diskusijas ar skolotāju skolēni nenonāca pie stundas plānā iecerētajiem secinājumiem. Skolēni nemācēja vispārināt un pārnest zināšanas uz citu piemēru vai citu kontekstu.
Personības īpašības	Vairāki skolēni grūtībās padevās. Skolēni pielika nelielas pūles un tad gaidīja turpmākos frontālos skaidrojumus no skolotājas. Mērķtiecīgi un efektīvi strādāja daži skolēni.
Pašrefleksija	Stundas gaitā tika radītas dažas situācijas, kurās skolēni varēja izvērtēt savu veikumu un pieņēmumus. Vairākumam skolēnu refleksija ir ļoti īsa vai triviāla, tai trūkst vecumam atbilstoša matemātiskā dziļuma. Daži skolēni spēja reflektēt saturīgi un prata argumentēt savu risinājumu.

Skolotāji pamatā sazinās ar skolēniem, uzdodot jautājumus, taču nedod pietiekamu laiku skolēniem tos apdomāt, un paši atbild uz jautājumiem. Daži skolēni ik pa brīdim mēģina atbildēt uz uzdotajiem jautājumiem. Biežāk atbildes ir daļēji pareizas (ir iespējami pretpiemēri) vai aplamas. 4. pielikumā stundu transkripcijās redzams, ka skolotāji neizmanto skolēnu aplamās atbildes nepareizu konceptu novēršanai un izpratnes veidošanai – šīs atbildes tiek ignorētas. Pēc transkripcijām redzams, ka parasti stundu laikā skolēniem nebija iespējas pārliecināties, vai viņi domā pareizi.

Pēc stundu vērošanas transkripcija izmantota, lai novērtētu, vai mācību stundā skolēniem bija iespēja attīstīt matemātisko kompetenci. Visvairāk noderīgi ir stundā saklausītie dialogi –

tie atklāj skolēnu dažādās pieejas problēmu risināšanai, izpratni par aplūkoto modeli, arī personības īpašības un prasmi reflektēt. Uzdevumu izpilde ļāva spriest par matemātiskās intuīcijas līmeni. Saskaroties ar grūtībām, pusaudži, visbiežāk, nespēja izplānot uzdevuma risinājumu vai atpazīt matemātiskās izteiksmes, taču pēc skolotāja instrukcijām spēja izpildīt vienkāršākās darbības, kas liecina par vāju matemātisko intuīciju. Neprasme atpazīt matemātiskos rīkus un veidot darbības plānu mudināja pusaudžus sadarboties, sazināties savā starpā un apspriest dažādas idejas, kas ļāva fiksēt komunikācijas līmeni, kas arī bija vājš. Lielākoties, skolēni nespēja atbildēt uz savu matemātikas skolotāju skaidri formulētiem jautājumiem par pazīstamu kontekstu un centās uzminēt pareizo atbildi.

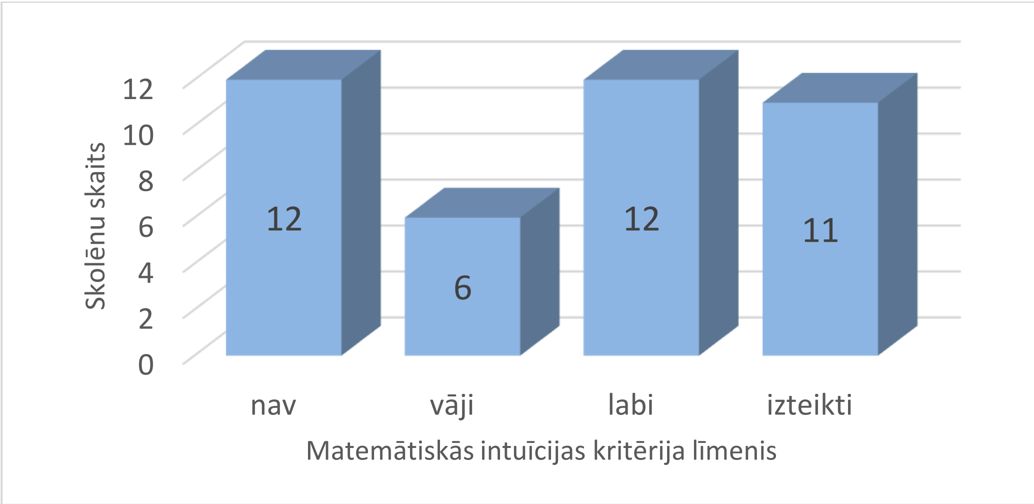
Pēc 14 stundu vērošanas trīs matemātikas skolotāji un 41 skolēns aizpildīja anketu (*skat. 1. un 2. pielikumus*), kurā ir 10 pašvērtējuma jautājumi ar atbilžu variantiem, astoņi matemātikas uzdevumi par visiem matemātiskās kompetences kritērijiem un trīs izvērsto atbilžu jautājumi.

Piemēram, vispirms pusaudzis veic pašvērtējumu savai matemātiskajai intuīcija, atbildot uz jautājumu, cik bieži viņam gadās uzminēt nākamo uzdevuma atrisinājuma soli. Pēc šī jautājuma seko praktisks uzdevums, pēc kura var spriest par intuīciju – skolēnam jāpaturpina skaitļu virkne. Tādējādi var izdarīt secinājumu arī par to, cik objektīvi skolēni izvērtē savas prasmes. Dati analizēti atbilstoši matemātiskās kompetences kritērijiem.

Matemātiskā intuīcija

Jautājumā "Cik bieži Tev gadās uzminēt nākamo uzdevuma atrisinājuma soli?" atbilžu moda bija "reizēm" – šādi atbildēja 42 % respondentu jeb 17 no 41 skolēniem (*skat. 6. pielikumu*), otra populārākā atbilde bija "bieži" (15 skolēni jeb 37 %), 9 skolēniem tas negadās nekad un neviens pusaudzis neatbildēja "vienmēr". Puse aptaujāto skolēnu norādīja, ka, risinot uzdevumu, reizēm novērtē rezultātu, pirms aprēķinu veikšanas. Vienmēr to dara katrs desmitais aptaujātais pusaudzis (4 no 41). Bieži rezultātu novērtē 9 skolēni un nekad – 5. Abos jautājumos standartnovirze ir relatīvi neliela (0,76 un 0,82), jo attiecīgi 78 % un 76 % respondentu uz tiem atbildēja "bieži" vai "reizēm" (*skat. 7. pielikumu*).

Pēc pašrefleksijas jautājumiem par aspektiem, kas varētu norādīt uz skolēnu matemātiskās intuīcijas līmeni, skolēniem tika lūgts paturpināt skaitļu virkni 2, 8, 18, … . Viena no iespējām, kā var atbildēt uz šo jautājumu, ir 32, 50, 72 utt., proti, virknes vispārīgā locekļa formula ir $a_n = 2n^2$. Šo formulu vai vismaz dažus ar to iegūtos virknes locekļus skolēni varētu atcerēties no 8. klases ķīmijas satura – tur šī virkne norāda uz maksimālo elektronu skaitu atoma enerģētiskajos līmeņos. Visbiežāk (20 no 41 jeb 49 %) skolēni paturpināja virkni tikai ar vienu skaitli, kas ļauj izdarīt secinājumu arī par pusaudžu neatlaidību. Pats cītīgākais skolēns virkni paturpināja ar vēl pieciem skaitļiem.



5.6. att. **Skolēnu matemātiskās intuīcijas līmeņi izmēģinājuma pētījumā**

Analizējot skolēnu atbildes saturiski, atklājās, ka šī uzdevuma kontekstā skolēni gandrīz vienlīdz uzrādīja visus četrus matemātiskās intuīcijas līmeņus (*skat. 5.6. att.*). 12 skolēni nemēģināja risināt šo uzdevumu, kas netieši norāda uz matemātiskās intuīcijas neesamību, jo skolēns nespēj paredzēt, kā virkne varētu turpināties. Seši skolēni sniedza matemātiski triviālas atbildes, demonstrējot vāju matemātisko intuīciju, piemēram, 2, 8, 18, 8, 2 vai 2, 8, 18, 08 un tamlīdzīgi. 12 skolēniem ir laba matemātiskā intuīcija – viņi norādīja tādu skaitļu virknes turpinājumu, kurā ir nojaušama kāda likumsakarība. Visbiežāk (6 gadījumos) skolēni turpināja virkni ar skaitļiem 32 un 50.

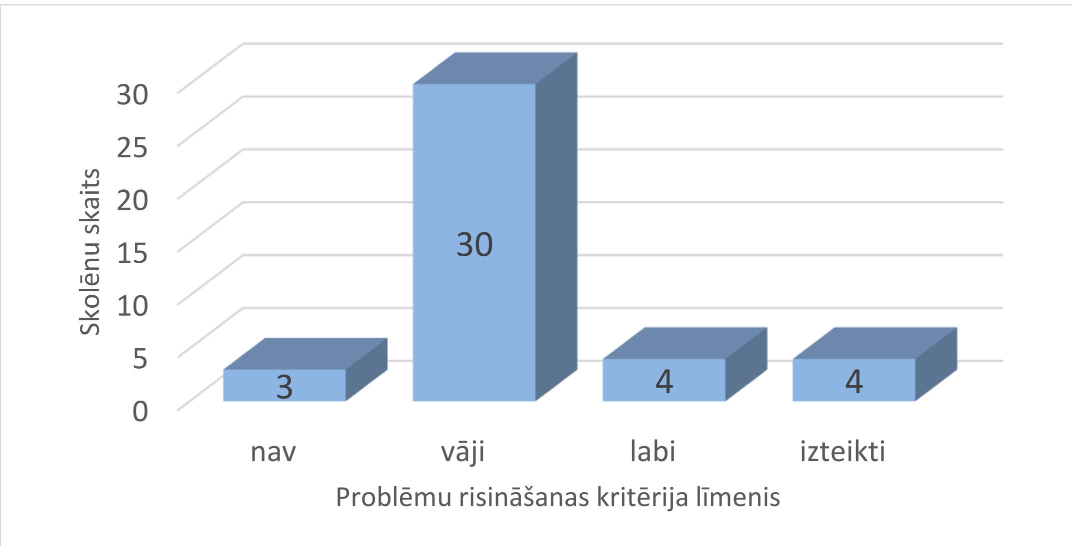
Vēl 11 skolēniem ir izteikta matemātiskā intuīcija, jo viņi mācēja ne tikai iedomāties nākamos skaitļus, bet arī vārdiem aprakstīt vispārīgo likumsakarību, pēc kuras virkne ir veidota, kaut arī tas uzdevumā netika prasīts. Vairāki skolēni aprakstīja virkni kā progresiju, kurā diference katrā solī palielinās par 4, prot, 1. solī diference ir 6 (2 + 6 = 8), 2. solī tā palielinās līdz 10 (8 + 10 = 18), tad tā ir jau 14 (18 + 14 = 32) utt. Tās pašas skaitliskās vērtības sanāk arī tiem skolēniem, kuri pamanīja formulu $a_n = 2n^2$. Dažiem skolēniem bija arī neparastākas idejas. Piemēram, kāds pusaudzis aprakstīja šādu algoritmu: virknes locekli reizina ar tam sekojošo virknes locekli, kuram ir pieskaitīts 1, piemēram, ja pirmie divi virknes locekļi ir 2 un 8, tad trešais skaitlis ir 2·(8 + 1) = 18, vēl nākamais tad ir 8·(18 + 1) = 152 utt. Vēl kāds skolēns šo virkni uztvēra kā ciklisku: pamīšus diference ir **6** un 10, tādējādi 18 + **6** = 24, 24 + 10 = 34, 34 + **6** = 40, 40 + 10 = 50 utt.

Problēmu risināšana

Pārliecinošs vairākums pusaudžu (35 no 41) uz jautājumu “Cik bieži Tev ir problēmas uztvert, kas ir prasīts uzdevumā?” atbildēja, ka tā gadās reti, 5 skolēniem šādas grūtības ir bieži un vienam – nekad. Standartnovirze ir tikai 0,37, jo atbilžu moda veido 85 % no visām atbildēm. Zīmīgi, ka skolotāju vērtējumā šādas problēmas pusaudžiem rodas katru stundu, turpretī neviens pusaudzis neizvēlējās šo atbildes variantu. No stundu vērojumiem tam ir divi iespējami skaidrojumi: tā kā skolotāji paši atbildēja uz saviem jautājumiem, neļaujot skolēniem padomāt, viņiem varētu rasties priekšstats, ka skolēniem ir grūtības katru stundu; vai arī pretēji – skolēni tikai reizēm saskaras ar problēmām, jo stundā pamatā darbojas pēc skolotāju ļoti detalizēti dotām instrukcijām, proti, viņiem nerodas situācijas, kurās varētu kaut ko nesaprast.

Arī jautājumā, cik bieži matemātikas stundās jāpamato savs viedoklis, skolotāju un skolēnu skatījumi ir atšķirīgi. Skolotāji vērtē, ka skolēni pamato viedokli bieži, tikmēr skolēni uzskata, ka to dara reizēm. 38 no 41 respondenta atbildēja, ka tā notiek reizēm (24) vai bieži (14). Divi skolēni atbildēja, ka viņiem vienmēr jāpamato savs viedoklis un viens – ka nekad. Modas relatīvais biežums šajā jautājumā bija 59 % un standartnovirze 0,63, kas liecina par lielu pusaudžu vienprātību arī šajā jautājumā.

Pēc pašrefleksijas jautājumiem par matemātisko problēmu risināšanu skolēniem tika piedāvāti dati par Mārupes vidusskolas skolēnu skaitu: 2015. gadā skolā mācījās 910 skolēni, 2016. gadā – 1000 skolēnu un 2017. gadā – 1100 skolēni. Lai noteiktu skolēnu problēmu risināšanas līmeni, pusaudži tika aicināti pēc šiem datiem izveidot matemātisku uzdevumu un atrisināt to.

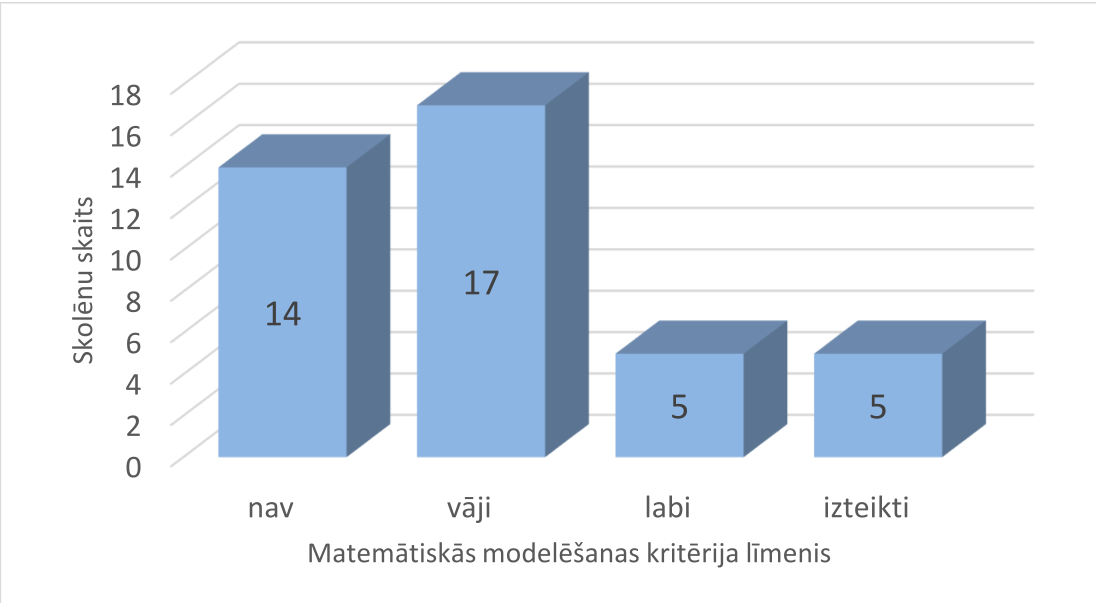


5.7. att. **Skolēnu problēmu risināšanas līmeņi izmēģinājuma pētījumā**

Trīs skolēni (7 %) nemēģināja uzrakstīt savu uzdevumu, konkrētajā situācijā nespējot parādīt problēmu risināšanas prasmes (*skat. 5.7. att.*). 30 skolēni no 41 jeb 73 % uzrādīja vāju problēmu risināšanas līmeni, jo piedāvāja uzdevumu, kuru varētu iedomāties arī sākumskolas skolēns, piemēram, "Kāds ir skolēnu skaita pieaugums pa gadiem?" vai "Cik skolēnu jaunpienācēju Mārupes vidusskolā bija 2017. gadā?". Četri skolēni uzrakstīja uzdevumu par procentu aprēķiniem, ko var interpretēt kā labu problēmu risināšanas līmeni. Vēl četri skolēni uzrakstīja uzdevumu par skolēnu skaita prognozēšanu nākotnē un datu pārbaudi par to, vai tā ir kāda no skolēnam zināmajām progresijām, apliecinot izteiktu problēmu risināšanas līmeni.

Matemātiskā modelēšana

Jautājumā, cik bieži pusaudži matemātikas stundās veido matemātisku modeli reālas dzīves problēmai, atbilžu moda ir "reizēm". Šādi atbildēja 30 no 41 jeb 73 % respondentu, tādēļ atbilžu standartnovirze ir tikai 0,47. Viens skolēns atbildēja, ka tas netiek darīts nekad, 10 – ka tas notiek bieži. Skolotāji vērtē, ka tas tiek darīts "ļoti reti", jo stundās tam neatliekot laika. Arī stundas transkripcijā redzams, ka stunda sākas uzreiz ar abstraktu modeli un arī stundas gaitā skolēni risina piemērus, kuriem nav piesaistes reālās dzīves situācijām.



5.8. att. **Skolēnu matemātiskās modelēšanas līmeņi izmēģinājuma pētījumā**

Pirmajā uzdevumā 14 skolēni neuzrādīja matemātiskās modelēšanas prasmes, jo nespēja nosaukt nevienu piemēru funkcionālai sakarībai (*skat. 5.8. att.*). Vēl astoņi skolēni atsaucās uz lineāru funkciju un deviņi skolēni minēja kvadrātfunkciju – vai nu nosaucot to vārdā, vai minot šīs funkcijas grafika nosaukumu (parabola), vai arī minot piemēru ("kvadrāta laukums atkarībā no malas garuma”). Atsauce uz lineāru vai kvadrātfunkciju atbilst vājam līmenim, jo skolēns analizē gatavu modeli – lineāru funkciju intuitīvi apgūst vēl sākumskolā un formalizē 7. klasē, savukārt, kvadrātfunkciju apgūst 9. klasē. Ņemot vērā, ka bez šīm divām funkcijām pusaudži pamatskolā apgūst vēl trīs citus funkciju veidus, par labu līmeni var vērtēt gadījumu, kad skolēns pats aprakstoši modelē kādu reālu dzīves situāciju, nevis atsaucas uz stundā apspriestiem piemēriem. To spēja izdarīt pieci skolēni.

Visbeidzot, izteikts līmenis modelēšanā bija pieciem skolēniem, kuri, tāpat kā viņu skolotāji, atbildēja, ka ar funkciju var aprakstīt gandrīz jebkuru dzīves procesu. Oriģinālākās skolēnu atbildes par procesiem, kurus var aprakstīt ar funkciju, ir, piemēram, “mana noguruma pakāpe, risinot šos uzdevumus”, “Zemes iedzīvotāju skaita izmaiņas”.

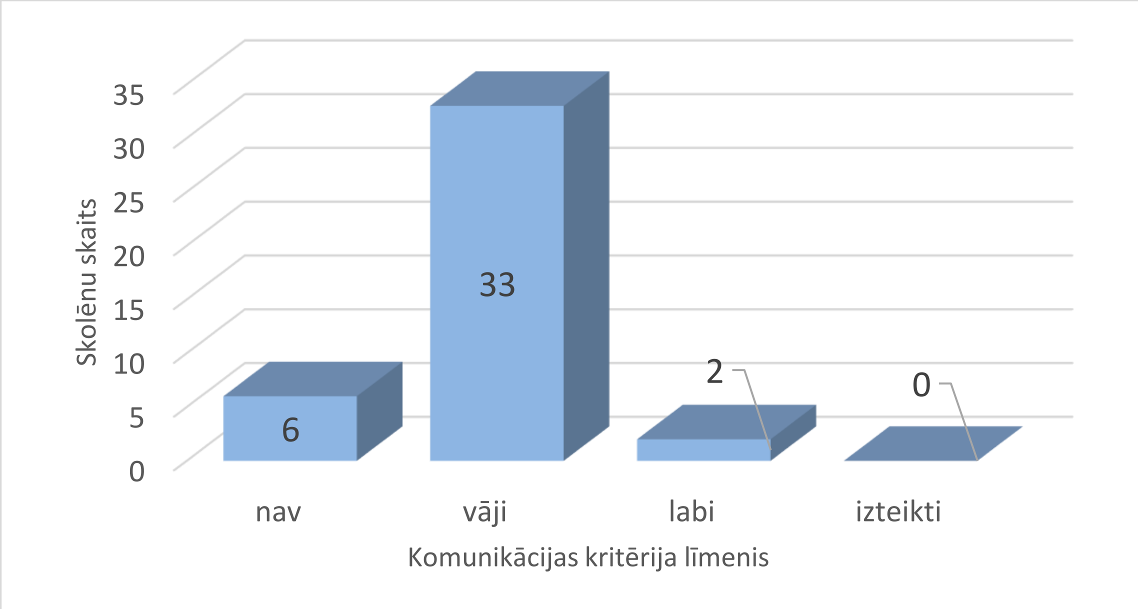
Otrs modelēšanas uzdevums par vienādsānu trijstūri (*skat. 9. uzd. 1. pielikumā*) pārbaudīja arī skolēnu mērķtiecību pārbaudīt, vai iegūtā atbilde ir vienīgā iespējamā. Uzdevumam bija divas pareizas atbildes. Skolēnu rezultāti šajā uzdevumā ir līdzīgi uzdevumam par funkcijām: trīs skolēni nemēģināja risināt šo uzdevumu, 27 skolēni jeb 66 % atklāja tikai vienu iespējamo atbildi, un 11 skolēni jeb 27 % kritiski izvērtēja situāciju un atrada abas atbildes.

Fokusgrupas diskusijā (*skat. 5. pielikumu*) skolēni mācēja nosaukt piemērus tam, kā matemātika var noderēt, modelējot reālās dzīves problēmas: matemātikas zināšanas var pielietot citās nozarēs, piemēram, strādājot par programmētāju.

Komunikācija

Uz abiem pašvērtējuma jautājumiem par komunikāciju skolēni un skolotāji atbildēja līdzīgi. Risinot uzdevumus, skolēni neizmanto vai reti izmanto enciklopēdijas, rokasgrāmatas vai citus informācijas avotus. Atbilžu moda ir “nekad” (27 no 41), otra populārākā atbilde ir “reti” (13 no 41). Abām atbildēm kopējais relatīvais biežums ir 98 %. Vēl viens skolēns atbildēja “bieži” un neviens neizvēlējās atbildi “vienmēr”. Atbilžu standartnovirze ir 0,54. Pateikt uzdevumu saviem vārdiem un to interpretēt prot reizēm (24 no 41) un bieži (9 no 41). Pieci skolēni to neprot un trīs – prot vienmēr. Atbilžu standartnovirze ir 0,77.

Izpētot sektoru diagrammu, kurā ir redzams Latvijas mežu sadalījums pa koku sugām, skolēniem bija jāizsecina, cik procentus no Latvijas teritorijas klāj skujkoku meži. Šis uzdevums paredz uzreiz vairākas komunikācijas prasmes: nolasīt datus no diagrammas, atlasīt vajadzīgos datus, kritiski izvērtēt, ka daļa vajadzīgo datu nav pieejami (*skat. 12. uzd. 1. pielikumā*).



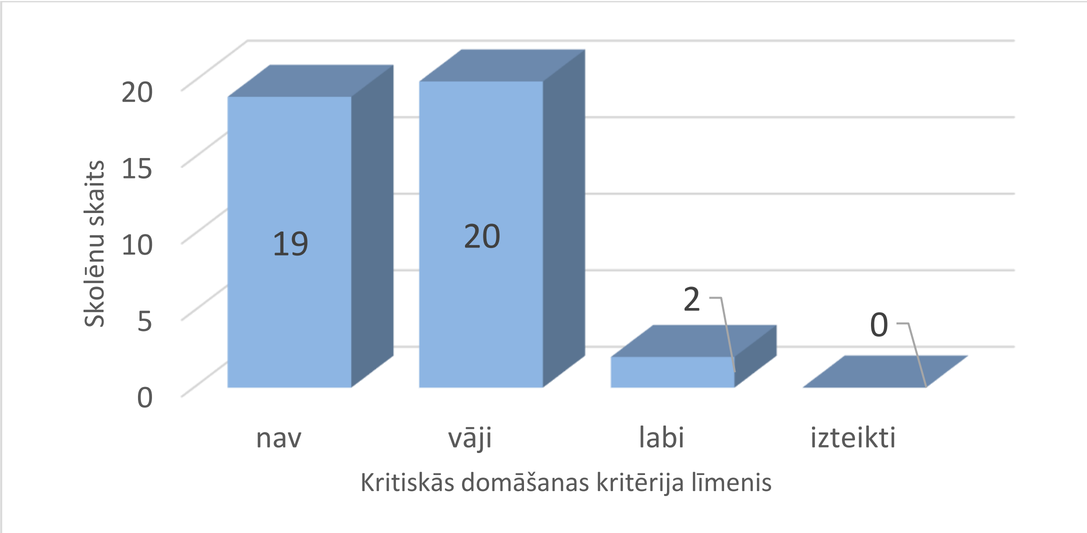
5.9. att. **Skolēnu komunikācijas līmeņi izmēģinājuma pētījumā**

Seši skolēni nemēģināja risināt šo uzdevumu (*skat. 5.9. att.*). 22 skolēni atbildēja “60 %”, vēl 11 skolēni pamanīja sektoru “pārējie” un atbildēja “60 % un vēl nedaudz”. Abas atbildes, kas kādā kontekstā ietver 60 %, ietilpst vāja komunikācijas snieguma līmenī, jo abos gadījumos, lai arī ar dažādiem panākumiem un atšķirīgu iedziļināšanos, skolēni parāda prasmes izmantot tikai vienu informācijas avotu – sektoru diagrammu, bet neapvieno to kontekstā ar uzdevuma tekstu. Vājš sniegums ir moda šajā jautājumā ar vislielāko relatīvo biežumu (80 %) starp visām matemātiskās kompetences komponentēm. Tas izskaidro vienu no zemākajām standartnovirzēm – šajā jautājumā tā ir tikai 0,44. Labu komunikācijas līmeni uzrādīja divi skolēni – pa vienam no 8. klases un 9. klases. Izteiktu līmeni neuzrādīja neviens skolēns. Zīmīgi, ka arī skolotāji parādīja vāju komunikācijas līmeni. Viena no skolotāju atbildēm bija: “Kas ir sadaļā pārējie? Nevar pateikt. 60 % + ?”

Kritiskā domāšana

Augstākais kritiskās domāšanas līmenis ir skolēna spēja pamatot, spriest un patstāvīgi veikt pierādījumu, tādēļ anketā iekļauts jautājums, cik bieži skolēns spēj argumentēt savu risinājumu vai viedokli. Tas ir vienīgais jautājums, kurā moda nebija “reizēm”, bet gan “bieži”, kaut gan abas atbildes bija gandrīz vienlīdz populāras. Vairākums skolēnu atbildēja, ka to var izdarīt bieži (19) vai reizēm (17); vēl trīs skolēni uzskata, ka to nespēj izdarīt, un divi skolēni, ka spēj pamatot vienmēr. Ironiskā kārtā abi šie skolēni nemēģināja risināt abus uzdevumus, kas pārbauda kritisko domāšanu. Grūtas radās arī pārējiem klasesbiedriem. Šī jautājuma atbilžu moda ir “bieži” – tā atbildēja 46 % pusaudžu. Atbilžu standartnovirze ir 0,71.

Turpinājumā skolēniem lūgts aprakstīt, ar ko viņi sāktu, lai ar pierādījumu no pretējā pamatotu, ka $\sqrt{2}$ ir iracionāls skaitlis. Lai gan uzdevums varētu izklausīties sarežģīts, tomēr tas prasa vien zināt divus faktus: antonīms iracionāliem skaitļiem ir racionāls skaitlis un jebkuru racionālu skaitli var pierakstīt nesaīsināmas daļas formā $\frac{m}{n}$, kur m ir vesels skaitlis un n ir naturāls skaitlis. Pēc iepriekšējās un jaunās pamatizglītības paraugprogrammas matemātikā abām atziņām skolēniem būtu jābūt zināmām jau kopš 7. klases (MK noteikumi Nr. 468, 2014; MK noteikumi Nr. 747, 2018), tomēr neviens skolēns nespēja pareizi formulēt pieņēmumu no pretējā. 14 skolēni mēģināja formulēt, pārējie 27 skolēni nerisināja šo uzdevumu.



5.10. att. **Skolēnu kritiskās domāšanas līmeņi izmēģinājuma pētījumā**

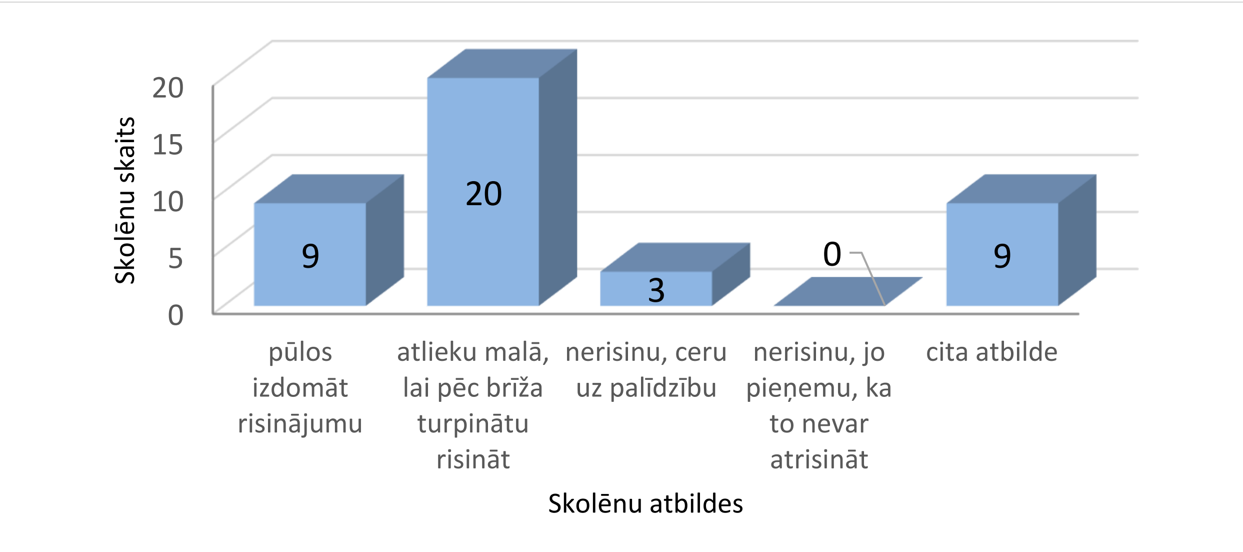
Otrs uzdevums, kas pārbauda skolēnu kritiskās domāšanas līmeni, ir no ģeometrijas: "Četrstūra diagonāles ir reizē arī četrstūra leņķu bisektrises. Kā Tu pamatotu, ka šis četrstūris ir rombs?" Deviņi skolēni nemēģināja risināt uzdevumu, vēl 10 skolēni uzrakstīja apgalvojumus, kas ir ģeometriski aplami vai no kuriem neizriet prasītais, tostarp "Romba visi leņķi ir vienādi" vai "Tāpēc ka diagonāles ir paralēlas" (acīmredzot, bija domāts perpendikulāras, kas gan tāpat nebūtu pilnvērtīgs pierādījums, jo perpendikulāras diagonāles ir arī deltoīdam jeb "pūķim"). Tādējādi kopumā 19 skolēniem jeb 46 % šajā uzdevumā neizdevās demonstrēt kritisko domāšanu (*skat. 5.10. att.*). Vēl 20 skolēni uzrādīja vāju līmeni, proti, sprieda pārāk tieši. Pieci no šiem skolēniem, tāpat kā skolotāji, atsaucas uz neeksistējošu īpašību vai pazīmi. Pārējo 15 skolēnu mēģinājumā pierādīt prasīto trūkst kādas būtiskas daļas, piemēram, ka ne tikai pretējie leņķi pa pāriem ir vienādi, bet arī divas blakus malas ir vienāda garuma. Labs līmenis ir diviem skolēniem. Vienam skolēnam izdevās pierādīt, ka četrstūra diagonāles ir perpendikulāras, taču no tā skolēns pārsteidzīgi secina, ka dotais četrstūris ir rombs. Otrs skolēns izmantoja trijstūra nevienādību, taču neprecīzi secināja, ka šis četrstūris noteikti ir kvadrāts, kas ir reizē arī rombs. Izteiktu sniegumu arī šajā kritiskās domāšanas uzdevumā neuzrādīja neviens skolēns.

Arī fokusgrupas diskusijā (*skat. 5. pielikumu*) vairāki pusaudži atzina, ka viņiem ir grūtības atrisināt augstāko izziņas līmeņu uzdevumus: "Kontroldarbā bija teksta uzdevumi, kuri bija nedaudz citādāki, un es tos nekad nevarēju izpildīt."

Personības īpašības

Anketā iekļauti trīs jautājumi, kuru mērķis bija izvērtēt skolēnu neatlaidību, atbildību, motivāciju mācīties un zinātkāri. Vispirms skolēni izvērtēja savu rīcības stratēģiju gadījumā, ja kādu uzdevumu neizdodas atrisināt uzreiz. Skolēniem tika piedāvāti četri atbilžu varianti vai iespēja ierakstīt citu atbildi. Atbilžu moda ir „atliktu šādu uzdevumu malā, pēc brīža turpinātu to risināt" (*skat. 5.11. att.*). Tā atbildēja 20 skolēni. Šāda apņemšanās parāda skolēna atbildīgumu, iniciatīvu un neatlaidību. Vēl deviņi skolēni turpinātu pielikt pūles, lai izdomātu atrisinājumu – tā ir izteikta mērķtiecība. Tikai trīs skolēns atzina, ka nerisinātu uzdevumu un gaidītu skolotāja palīdzību, un neviens neatbildēja, ka nerisinātu, jo uzskatītu uzdevumu par nepaveicamu. No piedāvātajiem četriem rīcības scenārijiem aptuveni puse pusaudžu izvēlējās vienu variantu, tādēļ atbilžu standartnovirze ir salīdzinoši neliela (0,75).

Turpretī vērotajās stundās aptuveni ceturtdaļa skolēnu patstāvīgā darba laikā gaidīja uz skolotāja papildu skaidrojumiem, turklāt atsevišķi skolēni arī pēc tiem nepielika pūles uzdevuma atrisināšanai.

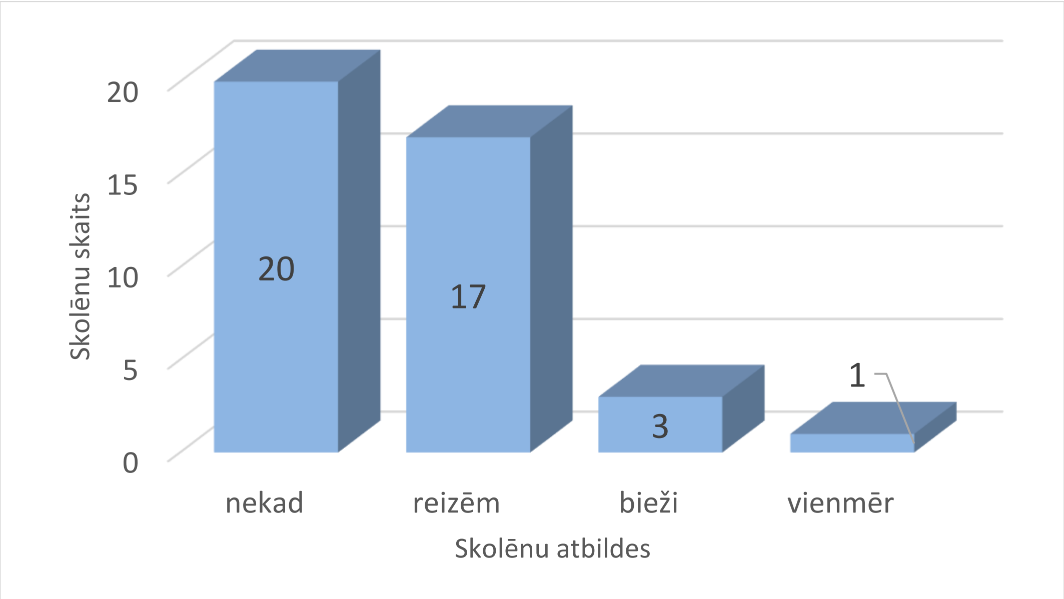


5.11. att. **Skolēnu pašvērtējums par rīcību, ja neizdodas uzdevumu atrisināt uzreiz**

Deviņi skolēni izvēlējās ierakstīt citu atbildi, tostarp “Nozodz pareizās atbildes”, “Pajautātu skolotājai, vai šāds uzdevums būs kontroldarbā”, “Noliktu malā, bet beigās aizmirstu vai saprastu, ka nevaru to atrisināt”, “Norakstu no klasesbiedra” un citi. Kā var redzēt, skolēni izmantoja humoru un labvēlīgu ironiju, kas liecina par to, ka viņi matemātikas stundās jūtas labi. Vērotajās stundās skolotāji arī daudz izmantoja humoru, taču ne visi joki skolēniem bija saprotami valodas barjeras vai konteksta nezināšanas dēļ. Zīmīgi, ka skolotāji sarindoja atbilžu variantus precīzi tādā pašā secībā kā skolēni.

Fokusgrupas diskusijā (*skat. 5. pielikumu*) skolēni norādīja, ka matemātika viņiem palīdz attīstīt tādas rakstura īpašības kā pacietība, pašpārliecinātība, apņēmība un neatlaidība.

Lai novērtētu skolēnu zinātkāri, iniciatīvu un atbildību, jautāts, cik bieži, risinot uzdevumu, rodas interese noskaidrot vai aprēķināt vēl kaut ko, kas nav prasīts uzdevumā. Skolotāji uzskata, ka skolēniem tāda interese rodas reizēm. 20 skolēni atbildēja “nekad” un 17 – “reizēm” (*skat. 5.12. att.*). Viens skolēns atbildēja “vienmēr” un trīs skolēni – „bieži”.



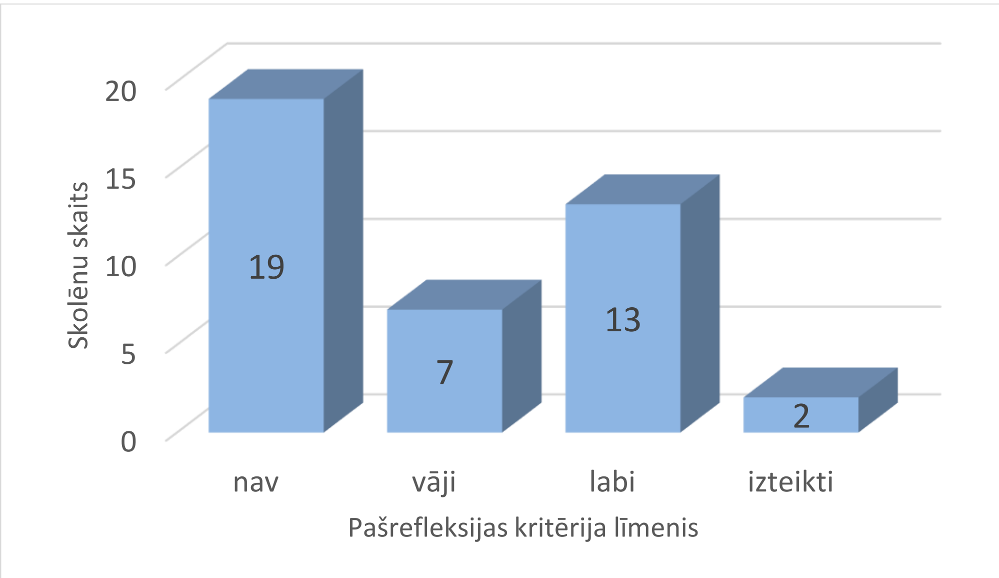
5.12. att. **Skolēnu atbildes uz jautājumu “Cik bieži, risinot uzdevumu, Tev rodas interese noskaidrot vai aprēķināt vēl kaut ko, kas nav prasīts uzdevumā?”**

Visbeidzot, skolēniem jautāts, kā viņi rīkotos, ja, risinot ģeometrijas uzdevumu, iegūtu atbildi, ka malas garums ir negatīvs skaitlis. 32 skolēni no 41 rīkotos, piemēram, “Pārbaudītu vēlreiz”, “Risinātu uzdevumu no jauna”, “Mēģinātu pārrisināt. Ja neizdotos atrast kļūdu, jautātu klasesbiedriem, kuri šajā jomā ir gudrāki vai jautātu skolotājai”, “Pārbaudītu vai risinājumā neesmu pieļāvis sev raksturīgās kļūdas” un “Es saprastu, ka tā neder par atbildi, un skatītos vai kaut kur ir kļūda, bet varbūt tajā uzdevumā, tas nebūtu nepieciešams, piemēram, ja ir divas saknes un viena no tām ir pozitīva". Pārējie deviņi skolēni atbildēja, ka neko nedarītu – atstātu atbildi, kāda tā ir sanākusi, "pa kluso nosvītrotu mīnusiņu" u. tml.

Pašrefleksija

Pašrefleksija mērīta ar trīs jautājumiem. Vispirms skolēni vērtēja, vai viņi var atrisināt jebkuru viņu vecumam domātu matemātikas uzdevumu. Atbilžu moda ir "nē" – 35 skolēni no 41 jeb 85 % uzskata, ka nevar atrisināt jebkuru uzdevumu. Seši skolēni domā, ka var. Viens no viņiem paskaidroja "Ja ļoti grib, tad var atrisināt", vēl kāds "Jā, tikai nezinu kā". Vēl viens skolēns ierakstīja, ka "viss atkarīgs, cik grūts uzdevums". Ņemot vērā izteikto pusaudžu vienprātību šajā jautājumā, atbilžu standartnovirze ir 0,42 – dati nav izkliedēti. Skolotāju vērtējumā viņu skolēni var atrisināt jebkuru uzdevumu.

Pēc tam skolēniem lūgts izvērtēt, kā viņi rīkotos, ja risinājuma gaitā atklātos, ka viņu izvēlētais risināšanas paņēmiens noved strupceļā un neļauj tikt pie atbildes. Pieci skolēni atzina, ka rīkotos emocionāli, taču neieguldītu laiku un enerģiju vēl vienam mēģinājumam atrisināt uzdevumu, piemēram, "Dusmotos, iegrimtu depresijā, brauktu mājās" vai "Neko, gals klāt". Vēl pieci skolēni reaģētu pasīvi, tomēr censtos kļūdu novērst, piemēram, "Norakstītu no klasesbiedra". Pārējie 31 jeb 76 % atbildēja, ka aktīvi rīkotos, tostarp "Turpinātu meklēt citu risinājumu", "Meklētu citu veidu, kā nonāk pie atbildes, vai pārbaudītu, kā aprēķināju un iespējams atrastu kļūdu". Arī skolotāji vērtēja, ka vairākums skolēnu izdarītu secinājumu, ka jāmeklē cits risināšanas paņēmiens.



5.13. att. **Skolēnu pašrefleksijas līmeņi izmēģinājuma pētījumā**

Uzdevumā par skaitliskām nevienādībām 19 skolēni neuzrādīja spēju izdarīt secinājumus, no tiem trīs skolēni uzskatīja, ka otrā nevienādība ir aplama (*skat. 5.13. att.*). Vēl septiņi skolēni izdarīja secinājumus, balstoties tikai uz dotajām nevienādībām. 13 skolēni šajā uzdevumā uzrādīja labu pašrefleksiju, proti, mēģināja vispārināt, bet formulētā hipotēze nav pareiza visos gadījumos, tostarp "Kāpinot decimāldaļu kvadrātā, tā paliek mazāka", kaut gan, piemēram, arī 1,5 ir decimāldaļa, un, kāpinot to kvadrātā, tā nepaliek mazāka. Visbeidzot, divi skolēni uzrādīja izteiktu pašrefleksijas līmeni, jo atbildēja "x^2 ne vienmēr ir lielāks par x" un "Ja pozitīvs skaitlis ir mazāks par 1, tad šī skaitļa kvadrāts ir mazāks nekā pats skaitlis."

Pusaudžu atbildes fokusgrupas diskusijā (*skat. 5. pielikumu*) norāda uz augstu pašrefleksijas līmeni. Skolēni izvērtē savu sniegumu mācībās, apzinās savas stiprās puses un vajadzības pēc uzlabojumiem, kā arī apzinās savu iesaisti mācībās kā vienu no noteicošajiem priekšnoteikumiem, lai sasniegtu panākumus matemātikā. Skolēni reflektē par savām interesēm un saista tās ar matemātikas zināšanām.

Atbildēs uz pašrefleksijas jautājumiem anketā parādās pretruna – no vienas puses vairākums skolēnu uzskata, ka nevar atrisināt jebkuru viņu vecumam atbilstošu matemātikas uzdevumu, taču no otras puses, gandrīz tikpat liels īpatsvars skolēnu pauda, ka, nonākot strupceļā, turpinātu meklēt citus veidus, kā atrisināt uzdevumu. Tam ir vairāki iespējamie skaidrojumi.

Pirmkārt, uz jautājumu, vai vari atrisināt jebkuru savam vecumam domātu matemātikas uzdevumu, skolēni lielākoties reaģē emocionāli. Uz to norāda arī fokusgrupas diskusijā ar skolēniem (*skat. 5. pielikumu*). Izdzirdot jautājumu, visi skolēni to uztvēra kā joku un smejoties vienprātīgi atbildēja, ka nevarētu vis. Interesantas ir skolēnu atbildes pēc tam, kad viņi bija izsmējušies. "Ja tu ilgāk pasēdi un padomā, tad jau jā" vai "Ar Google var visu atrisināt. Gandrīz visu" u. tml. Proti, kad skolēni nedaudz ilgāk apdomāja savu atbildi, vienbalsīgā "nē" vietā skolēnu viedokļa polarizējās. Iespējams, arī pildot aptauju, skolēni atbildēja ar pirmo, intuitīvo atbildi bez rūpīgas apdomāšanas.

Otrkārt, skolēni ne vienmēr prot objektīvi un precīzi izvērtēt savu darbību. Anketēšanā starp skolēnu pašvērtējumu par matemātiskās kompetences komponentes līmeni un viņu panākumiem atbilstošo uzdevumu risināšanā nepastāv korelācija vai arī tā ir vāja. Piemēram, starp pusaudžu pašvērtējumu par problēmu risināšanas līmeni un sniegumu problēmu risināšanā tika novērota vāja pozitīva korelācija, korelācijas koeficients Spīrmena testā ir aptuveni 0,23 (*skat. 8. pielikumu*). Korelācija starp pusaudžu neatlaidības pašvērtējumu un rezultātu uzdevumu risināšanā $r = 0$. Tāds pats korelācijas koeficients ir arī komunikācijai, proti, skolēnu pašvērtējums spējai uzdevumu pateikt saviem vārdiem un interpretēt, brīvi strādāt ar dažādās formās dotu informāciju pilnībā nekorelē ar panākumiem aptaujas 12. jautājumā, kur skolēnam jāparāda prasmes strādāt vienlaikus ar diviem informācijas avotiem – tekstu un sektoru diagrammu (*skat. 8. pielikumu*). Ļoti vāja sakarība ir skolēnu pašvērtējumam spējai argumentēt savu risinājumu vai viedokli (13. jautājums) ar veikumu pierādījuma uzdevumā par četrstūra diagonālēm (15. jautājums). Korelācijas koeficients šai sakarībai ir 0,08. Pašvērtējums ļoti vāji vai vāji korelē ar veikumu uzdevumā arī pārējās komponentēs: matemātiskajā intuīcijā (0,19), matemātiskajā modelēšanā (–0,12) un pašrefleksijā (0,09).

Šie dati apstiprina citos pētījumos atklātu atziņu, ka skolēniem, visbiežāk, ir grūtības novērtēt savu sniegumu: skolēni ar labiem panākumiem matemātikā sevi novērtē pārāk kritiski, bet skolēni ar zemu matemātisko kompetenci vērtē sevi neobjektīvi augstu, jo nespēj novērtēt, cik daudz vēl nezina. Arī 2015. gadā OECD veikts pētījums atklāj, ka skolēniem ar labiem panākumiem PISA testa matemātikas uzdevumos ir zems pašvērtējums matemātikā un otrādi. Pētnieki to saista ar zemām vecāku un skolotāju gaidām pret skolēniem (OECD, 2016a).

Gandrīz visas pāru korelācijas koeficientu vērtības (97 %) ir mazākas par 0,4, proti, korelācijas nav, tā ir ļoti vāja vai vāja (*skat. 8. pielikumu*). Atsevišķos gadījumos korelācijas neesamība arī ir sīkākas izpētes vērts fakts. Piemēram, pusaudžu pašvērtējums personības īpašībām – neatlaidībai un iniciatīvai izdarīt vairāk nekā prasīts – nekorelē ar sniegumu anketas jautājumā par skaitļu virknēm, kas praktiski, skolēniem to nenojaušot, pārbauda viņu neatlaidību ($r \approx 0{,}0$).

Tā kā pusaudžu pašvērtējums nekorelē ar panākumiem atbilstošos matemātikas uzdevumos, viņu pašvērtējums nevar būt vienīgais informācijas ieguves avots arī tādai salīdzinoši subjektīvākai matemātiskās kompetences komponentei kā personības īpašības. Lielākai datu ticamībai ir būtiski ne vien papildus novērtēt pusaudžu neatlaidību, iniciatīvu un izpausmes citās matemātiskās kompetences komponentēs aptaujā, bet arī novērot viņu darbību ikdienas mācību procesā, fiksējot situācijas, kas norāda uz attiecīgajiem matemātiskās kompetences kritēriju līmeņiem.

Vidēji cieša korelācija ir sešām sakarībām. Izteiktākā korelācija ir atbildēm uz 3a. un 3b. jautājumu, proti, cik loģiski skolēns paturpināja skaitļu virkni 2, 8, 18, … un ar cik skaitļiem šo virkni paturpināja. Korelācijas koeficients starp šīm atbildēm ir 0,69. Skolēni, kuri mācēja paturpināt šo virkni un paskaidrot savu ideju, visbiežāk paturpināja virkni ar vēl vismaz trīs skaitļiem, savukārt, skolēni, kuriem, bija grūtības pamanīt likumsakarību, izteica minējumu tikai par vienu nākamo virknes locekli.

Otra izteiktākā korelācija ir atbildēm uz anketas 1. un 4. jautājumu. Korelācijas koeficients ir 0,49. Ja skolēns atbildēja, ka viņam gadās uzminēt nākamo uzdevuma atrisinājuma soli, tad viņam retāk ir problēmas uztvert uzdevumā prasīto un otrādi. Šī sakarība ir samērā sagaidāma. Zīmīgi, ka atbildes uz jautājumu par grūtībām uztvert uzdevumu vidēji cieši (0,41) korelē ar skolēnu veikumu 8. jautājumā. Proti, skolēni, kuriem retāk ir grūtības uztvert uzdevumā prasīto, spēja saturīgāk atbildēt uz jautājumu, kādus procesus var aprakstīt ar funkciju, minot ne tikai lineāru vai kvadrātfunkciju, bet arī citas vai secinot, ka ar funkciju var aprakstīt jebkuru procesu, kurā ir iesaistīts mainīgais un atkarīgais lielums.

No pārējām četrām izteiktākajām korelācijām divas ir saistītas ar nupat minēto 8. jautājumu par procesu aprakstīšanu ar funkciju. Skolēni, kuri šajā jautājumā sniedza netriviālas atbildes, veiksmīgāk tika galā ar matemātikas uzdevuma formulēšanu (korelācijas koeficients 0,45) un bija labāki spējā argumentēt (0,40). Trešā spēcīgākā izmēģinājuma pētījuma korelācija (0,46) ir skolēnu pašvērtējumam prasmei uzdevumu pateikt saviem vārdiem un argumentēt savu risinājumu. Visbeidzot, skolēni, kuri prata uzrakstīt ģeometrijas uzdevuma pierādījumu, mācēja paturpināt skaitļu virkni, kā arī biežāk paskaidroja savu domu, kaut arī tas nebija prasīts (korelācijas koeficients 0,40).

Trīs no sešām izteiktākām korelācijām saista skolēnu rezultātus uzdevumos, kuros no viņiem prasīta radoša domāšana un kuros nav vienas pareizās atbildes. Turklāt, divās korelācijās iesaistīti trīs uzdevumi, kuros skolēnam bija jāparāda prasme uzrakstīt atbildi pilnos teikumos, piemēram, sacerēt matemātikas uzdevumu par doto kontekstu vai uzrakstīt pierādījumu. Šis secinājums saskan ar H. Gārdnera daudzpusīgā intelekta teoriju, jo skolēni ar izteiktāku verbāli-lingvistisko intelektu veiksmīgāk tika galā ar uzdevumiem, kuros atbilde bija jāskaidro izvērsti, neatkarīgi no šo uzdevumu matemātiskā konteksta (Gardner, 1999).

Standartnovirze vairākumā jautājumu bija 0,7, kas norāda uz nebūtisku datu izkliedi jeb lielu skolēnu vienprātību. Gandrīz visos jautājumos, kuri sākās ar “Cik bieži”, moda bija “reizēm”, turklāt, ar lielu relatīvo biežumu. Vislielākais modas relatīvais biežums bija jautājumā “Cik bieži Tu spēj uzdevumu pateikt saviem vārdiem, interpretēt?”, uz kuru “reizēm” atbildēja 24 no 41 respondenta jeb aptuveni 59 % aptaujāto.

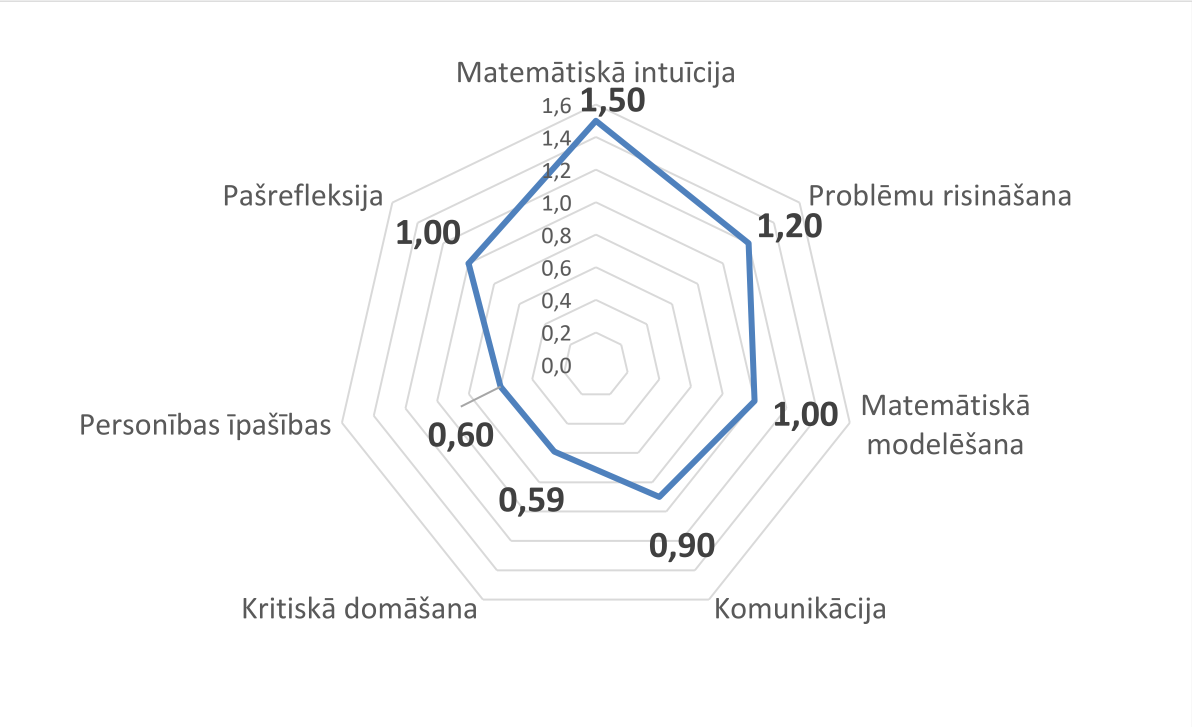
Standartnoviržu vērtības un korelāciju neesamība varētu norādīt uz to, ka biežumu skala “nekad, reizēm, bieži, vienmēr” ir pārāk vispārīga, tādēļ aptaujas jautājumiem nav pietiekamas izšķirtspējas. Pamata pētījumā jāizvēlas atbilžu varianti, kas ļauj objektīvāk novērtēt biežumu, jo vārds “reizēm” ir gana vispārīgs un katrs pusaudzis to var interpretēt atšķirīgi. Piemēram, atbildes uz jautājumiem “Cik bieži” pamata pētījumā varētu piesaistīt konkrētam skaitam vienas matemātikas stundas vai mācību nedēļas laikā vai arī pusaudžiem jādod iespēja paskaidrot viņu izvēlēto atbildi.

Rezumējot izmēģinājuma pētījumā iegūtos datus, matemātiskās kompetences kritērijiem noteikts vidējais rādītājs, vārdisko vērtēšanas skalu pārveidojot par skaitlisku ar šādu punktu sadalījumu: 0 punkti par "nav", 1 – "vāji", 2 – "labi" un 3 par "izteikti" (*skat. 5.6. tab.*).

5.6. tabula. Pusaudžu vidējie rezultāti pēc matemātiskās kompetences kritērijiem izmēģinājuma pētījumā

Matemātiskās kompetences kritērijs	**Vidējais rezultāts (mean) (min=0, max=3)**
Matemātiskā intuīcija	1,54
Problēmu risināšana	1,22
Matemātiskā modelēšana	1,02
Pašrefleksija	0,95
Komunikācija	0,90
Personības īpašības	0,63
Kritiskā domāšana	0,59

Lai šie rezultāti būtu vizuāli vieglāk uztverami un salīdzināmi, piemērotākais attēlošanas veids ir radara tipa diagramma (zvaigzne), kurā katram kritērijam ir sava ass (*skat. 5.14. att.*).



5.14. att. **Pusaudžu matemātiskās kompetences vērtēšanas rezultāti** (autora veidots)

Stundas vērojumu analīze rāda līdzīgu ainu par šo pusaudžu matemātisko kompetenci (*skat. 4. pielikumu*). Empīriskā pētījuma 1. posma-izmēģinājuma pētījuma abās anketēšanās, intervijā ar skolēniem un stundu vērošanā iegūtās liecības par matemātiskās kompetences veidošanos vai esamību ir apkopotas tabulā (*skat. 5.7. tab.*).

5.7. tabula. Empīriskā pētījuma 1. posma-izmēģinājuma pētījumā iegūtās liecības par matemātiskās kompetences veidošanos/esamību

Kritērijs	**Skolēnu anketēšana**	**Skolotāju anketēšana**	**Fokusgrupas diskusija ar skolēniem**	**Stundu vērojumi**
Personības īpašības	Atbildība, attieksme, sadarbība, patika pret mācīšanos.	Neatlaidība, atbildība, motivācija mācīties.	Pacietība, pašpārliecinātība, neatlaidība	Zinātkāre, aktīva iesaistījušies mācībās.
Matemātiskā modelēšana	Pielieto matemātikas zināšanas un prasmes arī ikdienas dzīvē.	Ir stratēģijas modelēšanai, taču biežāk apskata tikai 1 gadījumu.	Saprot, ka matemātikas formulas var pielietot citās jomās.	Mēģina veidot hipotēzi, taču pamana tikai vienu gadījumu.
Matemātiskās valodas lietošana, komunikācija	Lielākoties, izmanto tikai vienu informācijas avotu (piem., diagrammu vai tekstu).			Lieto žargonu: “skaitlis ir plusā” nevis pozitīvs; uztver monomu – *a* kā negatīvu skaitli.
Problēmu risināšana	Ievēro matemātikas likumus.	Cenšas risināt problēmas, taču dara to triviāli.	Lieto matemātiku programmējot dažādus uzdevumus.	Labprātāk sagaida skolotāja skaidrojumu.
Matemātiskā intuīcija	Ja zina vai jūt atbildi, mēģina piemeklēt risinājumu.	Laba izdoma. Radoša pieeja. Reizēm prot skaidrot savu domu.	Ir pārliecība, ka var atrisināt visu, ja izvēlas īstos resursus.	Reizēm nostrādā un kompensē zināšanu trūkumu.
Kritiskā domāšana	Ir izpratne. Izvērtē rezultātus. Prot dažādi atrisināt uzdevumu.	Nespēj izvērtēt, vai pamatojums ir loģisks un pietiekams.	Atzīst, ka ir grūtības ar augstāko izziņas līmeņu uzdevumiem.	Vairākums nespēja izsekot jau gatavai stratēģijai.
Pašrefleksija	Izvērtē savu sniegumu, pamana atšķirības mācībās.	Grūtību gadījumā rīkotos aktīvi.	Objektīvi, izvērsti, daudzpusīgi izvērtēt mācības.	

Secinājumi pēc izmēģinājuma pētījuma veikšanas

- ✓ Analizētajās stundās visaugstākais rezultāts ir, vērtējot matemātisko kompetenci pēc kritērija – matemātiskā intuīcija. Stundu vērojumi rāda, ka skolēni ar minēšanu un mēģinājumiem cenšas kompensēt pamata zināšanu iztrūkumus.
- ✓ Otrs augstākais rezultāts ir kritērijā problēmu risināšana. Kā rāda Latvijā veikti pētījumi (Lāce, 2010; Vilciņš, 2015; Namsone, 2015), tas ir saistīts ar skolotāju fokusēšanos uz algoritmu mācīšanu un gatavās informācijas nodošanas metodes lietojumu.
- ✓ Visvājāk attīstīta pusaudžiem ir kritiskā domāšana, personības īpašības un komunikācija. Vērojumi stundās rāda, ka šāds rezultāts atspoguļo to, ka skolotājiem tīkamāka ir eksperimentālā matemātika, tādēļ skolēni labāk izpaužas matemātiskajā modelēšanā, nekā kritiskajā domāšanā.
- ✓ Standartnoviržu zemās vērtības jeb neliela datu izkliede un korelāciju neesamība starp matemātiskās kompetences kritērijiem pusaudžu anketēšanā varētu norādīt uz to, ka biežumu skala "nekad, reizēm, bieži, vienmēr" ir pārāk vispārīga, tādēļ aptaujas jautājumiem nav pietiekamas izšķirtspējas. Pamatpētījumā šāda tipa jautājumos skolēniem ir jādod iespēja paskaidrot viņu izvēlēto atbildi, jo šos atbilžu variantus pusaudži var interpretēt dažādi.
- ✓ Uzdevumu formulējumi skolēnu aptaujā jāprecizē tā, lai iegūtu nepārprotamu un objektīvi interpretējamu informāciju. Piemēram, uzdevums par skaitļu virknes paturpināšanu (*skat. 3. uzd. 1. pielikumā*) jāpapildina ar prasību savu virkni izskaidrot vārdiem.
- ✓ Lai komunikācijas kritērijā pārbaudītu skolēna spējas izmantot vairāk nekā vienu informācijas avotu, vajadzīgs uzdevums, kurā šo informācijas avotu pielietojums neradītu samākslotības izjūtu, kā tas ir ar uzdevumu par skujkoku mežiem. Piemēram, tas var būt uzdevums par elektroenerģijas izmaksām, kur viens informācijas avots ir elektroenerģijas skaitītāju rādījumi un otrs – skolēna paša secināta vajadzība internetā atrast īsto tarifu plānu.

Viens uzdevums katrā matemātiskās kompetences kritērijā nav pietiekami. Kā rāda izmēģinājuma pētījuma dati, atkarībā no skolēnu zināšanu un prasmju līmeņa, vienam uzdevumam var būt nepietiekama izšķirtspēja, proti, gandrīz visi skolēni (virs 80 %) izpilda uzdevumu nepareizi vai uzrāda vāju līmeni. Šādus datus ir grūti izmantot tālākai analīzei, jo tie sagaidāmi nekorelē ne ar skolēnu pašvērtējumu, ne aktivitāti stundā, ne vēl kādiem citiem parametriem.

5.2.2. Empīriskā pētījuma 2. posma (pamatpētījuma) rezultāti

Ar mērķi novērtēt pusaudžu matemātisko kompetenci, izmantojot izmēģinājuma pētījumā precizēto un papildināto anketu, tika veikta anketēšana, kurā piedalījās 193 skolēni no 8. un 9. klases. Datu interpretēšanā izmantoti dati, kuri iegūti 3 matemātikas skolotāju fokusgrupas diskusijā un 2 ekspertu intervijās.

Salīdzinot ar izmēģinājuma pētījuma aptaujas anketu, pamatpētījuma anketā veikti vairāki uzlabojumi, ņemot vērā pieredzi, apkopojot datus izmēģinājuma pētījumā. Katram matemātiskās kompetences kritērijam anketā veltīti divi matemātikas uzdevumi. Piemēram, matemātiskās intuīcijas jautājumu blokā skolēniem ne tikai jautāts: “Cik bieži, risinot uzdevumu, novērtē rezultātu, pirms aprēķinu veikšanas?” bet arī praktiski tiek pārbaudīta skolēna spēja novērtēt atbildi ar jautājumu – cik sakņu ir vienādojumam $x^3 - 4x = 0$. Tādējādi tiek pārbaudīts, vai skolēns praktiski pielieto stratēģiju vispirms novērtēt rezultātu un vai spēj to izdarīt pareizi. Tāpat kā izmēģinājuma pētījumā, pusaudžu pašvērtējums par matemātiskās kompetences veidošanos tika izvērtēts četros līmeņos pēc Likerta skalas, kur rādītājs 3 nozīmē lietojumu vienmēr vai katrā stundā, 2 – bieži, 1 – reizēm un 0 – nekad. Papildus skolēniem dota iespēja komentēt izvēlēto atbildes variantu.

Pamatpētījuma kvalitatīvie rezultāti apkopoti 10., 11. un 12. pielikumā. Kvantitatīvo rezultātu skaitliskie rezultāti un procentuālais sadalījums atspoguļots frekvenču tabulās 13. un 14. pielikumā. Aprakstošās statistikas dati apkopoti 15. pielikumā.

Pamatpētījuma kvantitatīvo datu mainīgo vērtību sadalījums analizēts, izmantojot Kolmogorova – Smirnova testu (*skat. 16. pielikumu*). Testa analīzes rezultāti liecina, ka signifikances rādītāji (p = 0,05 robeža) visos kritērijos ir 0,000, tādēļ turpmākajā rezultātu analīzes gaitā izmantojamas neparametriskās statistikas metodes (Kristapsone, 2020).

Pamatpētījuma anketēšanas Kronbaha alfa koeficienta vērtība ir 0,88 (*skat 5.15. att.*). Ja šis piemērotības koeficients ir robežās no 0,8 līdz 0,9, tā tiek uzskatīta par labu skalas saskaņotības vērtību, tādēļ dati ir izmantojami tālākai analīzei.

Reliability Statistics

Cronbach's Alpha	N of Items
,876	40

5.15. att. **Skalas saskaņotības koeficienta vērtība (Kronbaha alfa) anketēšanā iekļautajām skalām**

Lai veiktu pilnīgāku analīzi, radās nepieciešamība ievākt datus arī par skolēnu pašvērtējumu matemātikas zināšanām, darbu stundā un citiem vispārīgiem jautājumiem, tādēļ anketas beigās pievienots piecu jautājumu bloks, kur skolēniem piedāvāta iespēja reflektēt par saviem sasniegumiem matemātikā.

Tādējādi jautājumu skaits anketā no 21 jautājuma izmēģinājuma pētījumā pieauga līdz 33 jautājumiem pamata pētījumā. Tas tika ņemts vērā gan laika patēriņa ziņā, organizējot šīs anketas lietojumu – tagad tā aizņēma pilnu mācību stundu, gan dodot skolēniem instrukcijas, pirms anketas mudinot pacensties cītīgi pildīt anketā ietvertos uzdevumus, lai gan par šo darbu netiek likts summatīvs vērtējums.

Turpmākā analīze notika atbilstoši matemātiskās kompetences vērtēšanas kritērijiem (*skat. 4. nodaļu*). Tika aprēķināti centrālās tendences un variācijas rādītāji pusaudžu pašvērtējumam un uzdevumu risinājumiem, atbilstoši visiem septiņiem matemātiskās kompetences kritērijiem. Par katru kritēriju apkopoti sekojoši statistiskie rādītāji: mediāna (*median*), aritmētiskais vidējais (*mean*), moda (*mode*), standartnovirze (*standard deviation*), dispersija (*variance*) un asimetrijas koeficients (*skewness*) (Kristapsone, 2014).

5.2.2.1. Matemātiskā intuīcija

Atbildēm uz matemātiskās intuīcijas kritērijam atbilstošajiem jautājumiem Kronbaha alfa koeficienta vērtība ir 0,72 (*skat 5.16. att.*). Ja šis koeficients ir robežās no 0,7 līdz 0,8, tā tiek uzskatīta par pietiekamu skalas saskaņotības vērtību.

Reliability Statistics

Cronbach's Alpha	N of Items
,722	6

5.16. att. **Skalas saskaņotības koeficienta vērtība (Kronbaha alfa) matemātiskās intuīcijas jautājumu skalām**

Gandrīz divas trešdaļas aptaujāto skolēnu atbildēja, ka reizēm uzmin nākamo uzdevuma atrisinājuma soli, tādēļ gan atbilžu moda, gan mediāna bija "reizēm" (*skat. 5.8. tab.*). Šādi atbildēja 123 respondenti jeb 63,7 % no aptaujātajiem pusaudžiem. Otra populārākā atbilde bija "bieži" – šādi atbildēja vairāk nekā katrs ceturtais skolēns (26,4 %). 7,8 % aptaujāto skolēnu norādīja, ka viņiem nekad neizdodas uzminēt nākamo atrisinājuma soli, savukārt, 2,1 % tas izdodas vienmēr. Šie rezultāti visumā sakrīt ar PISA pētījuma datiem par matemātiskajām prasmēm, jo tajā norādīts, ka augstāko, 6. līmeni matemātikā uzrāda 2,3 % OECD dalībvalstu 8. – 9. klašu skolēnu (OECD, 2016a). Datu izkliede ir salīdzinoši neliela (standartnovirze 0,61, dispersija 0,38). Dati ir būtiski nobīdīti pa kreisi (asimetrijas koeficients 0,38), jo pa kreisi no aritmētiskā vidējā atrodas 71,5 % datu (138 respondenti), bet pa labi – tikai 28,5 % (55).

5.8. tabula. Skolēnu atbilžu centrālās tendences un variācijas rādītāji jautājumos par matemātisko intuīciju

Jautājums	Mediāna (*median*)	Aritmē–tiskais vidējais (*mean*)	Moda (*mode*)	Standart-novirze (*std. deviation*)	Dispersija (*variance*)	Asimetrijas koeficients (*skewness*)
1. Cik bieži Tev gadās uzminēt nākamo uzdevuma atrisinājuma soli?	Reizēm 1	1,23	Reizēm 1	0,61	0,38	0,38
2. Cik bieži, risinot uzdevumu, novērtē rezultātu, pirms veikt aprēķinus?	Reizēm 1	1,39	Reizēm 1	0,75	0,56	0,18
3. Nerisinot vienādojumu, cik atrisinājumu (sakņu) ir šim vienādojumam?	Viens vai neviena atrisinā-juma	1,36	Viens vai neviena atrisinā-juma	1,03	1,06	0,19
4a. Paturpini skaitļu virkni 2, 8, 18, ... un paskaidro savu ideju!	Minējums bez skaidrojuma	1,47	Minējums bez skaidrojuma	1,11	1,24	0,21
4b. Ar cik skaitļiem paturpināja virkni?	1	1,17	1	1,05	1,10	1,13

Tabulā izmantotā Likerta skala: 3 – vienmēr/ katru stundu; 2 – bieži; 1 – reizēm; 0 – nekad. 3. uzdevumā: 3 – 3 saknes; 2 – 2 saknes; 1 – viena vai nevienas saknes; 0 – nezinu. 4a. uzdevumā: 3 – korekts skaidrojums; 2 – mēģina skaidrot savu ideju; 1 – tikai minējums; 0 – nav darīts vai nezina.

Aptuveni puse aptaujāto skolēnu apgalvo, ka, risinot uzdevumu, reizēm novērtē rezultātu pirms veic aprēķinus (94 respondenti jeb 48,7 %). Arī šajā jautājumā moda un mediāna bija "reizēm". Vairāk nekā trešdaļa (35,2 %) to dara bieži, katrs vienpadsmitais (9,3 %) – nekad, un 6,8 % veic novērtēšanu, sākot katru uzdevumu. Abos šajos pašvērtējuma jautājumos ir nelielas standartnovirzes (attiecīgi, 0,61 un 0,75) un asimetrijas koeficienti (0,38 un 0,18), jo pusaudžiem bija izteikta vienprātība: 89,6 % un 83,9 % uz šiem jautājumiem atbildēja "bieži" vai "reizēm".

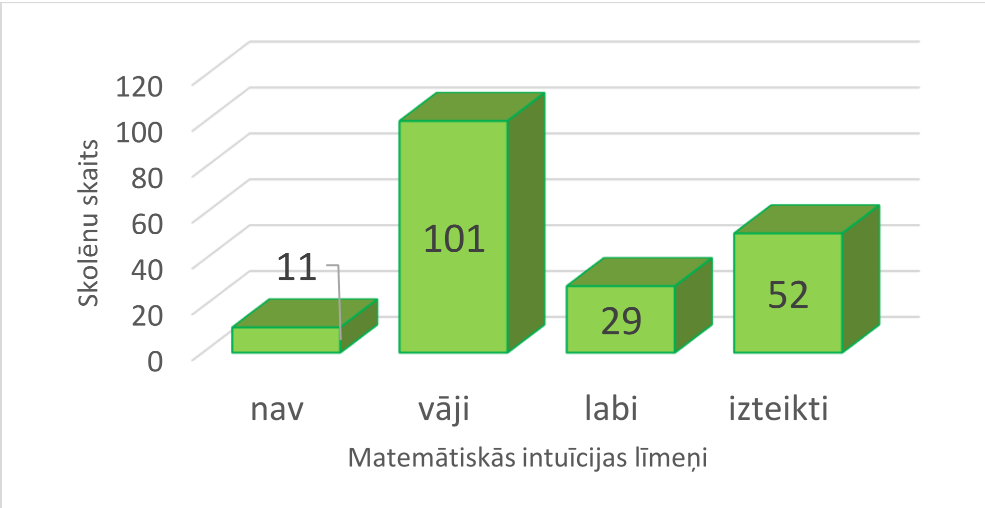
Lai novērtētu, cik šie dati ir ticami, skolēniem piedāvāta situācija, kurā jānovērtē rezultāts, nerisinot uzdevumu. Tika jautāts, cik sakņu ir vienādojumam $x^3 - 4x = 0$. Datu analīzei ir būtiski zināt, ka šim vienādojumam ir trīs saknes. Kaut arī tas ir trešās pakāpes vienādojums, sagaidāms, ka 8. klases skolēni pamanīs, ka monomiem x^3 un $-4x$ ir kopīgs reizinātājs x, kuru var iznest pirms iekavām, iegūstot izteiksmi $x^2 - 4$. Skolēnam šajā brīdī jāsaprot, ka katrs no reizinātājiem x un $x^2 - 4$ jāpielīdzina 0, kas dod trīs saknes: 0 un ± 2.

Ceturtdaļa aptaujāto skolēnu (24,4 %) atbildēja, ka nezina, cik sakņu ir vienādojumam, proti, viņi nevarētu novērtēt rezultātu, neveicot aprēķinus. Pārējie skolēni centās novērtēt sakņu skaitu, un pareizi to izdarīja katrs sestais skolēns (17,1 %). Zīmīgi, ka no 13 skolēniem, kuri atbildēja, ka vienmēr novērtē rezultātu pirms veic aprēķinus, pieci skolēni nemēģināja novērtēt sakņu skaitu un tikai divi skolēni to izdarīja pareizi. Atbilžu moda un mediāna ir nepareizs minējums par sakņu skaitu. Šādi atbildēja 113 skolēni jeb 58,5 % respondentu, no kuriem 50 atbildēja, ka vienādojumam ir divas saknes, 40 izteica minējumu, ka ir viena sakne, un 23 – ka vienādojumam nav sakņu. Šajā jautājumā atbilžu standartnovirze (1,03) un datu izkliede (1,06) ir samērā liela, kaut gan 82,9 % pusaudžu nezināja atbildi vai izteica aplamu minējumu.

Matemātisko intuīciju var pārbaudīt arī ar uzdevumiem, kuros skolēnam piedāvā paturpināt vecumposmam atbilstošu skaitļu, simbolu vai zīmējumu virkni. Izmēģinājuma pētījumā izmantots uzdevums, kur skolēniem jāturpina skaitļu virkne 2, 8, 18, ... Šai virknei nav viennozīmīgi pareiza atrisinājuma. Izmēģinājuma pētījumā skolēni nereti atbildē norādīja, kā varētu domāt, nejauši izvēlētus skaitļus, tādēļ pamatpētījumā respondentiem lūgts paskaidrot savu atbildi.

Rezultātā vairāk nekā ceturtdaļa skolēnu (27,5 %) varēja gan paturpināt skaitļu virkni, gan paskaidrot savu ideju. Šī jautājuma atbilžu moda un mediāna bija skaitļu virkne bez skaidrojuma (72 respondenti jeb 37,3 %). Visbiežāk, respondenti turpināja skaitļu virkni ar vienu skaitli (103 aptaujātie jeb 53,4 %), otra biežākā izvēle – trīs skaitļi (24 pusaudži jeb 12,4 %). Pats neatlaidīgākais skolēns uzrakstīja vēl piecus virknes locekļus. Starp skolēna veikumu šajā uzdevumā un neatlaidību, rakstot nākamos virknes locekļus, izveidojās cieša, pozitīva korelācija ($r \approx 0{,}71$), proti, jo labāk skolēnam veicās ar savas idejas skaidrošanu, jo vairāk skaitļu uzrakstīja virknes turpinājumā, un otrādi – ja skolēnam neveicās ar savas idejas skaidrošanu vai nemēģināja skaidrot algoritmu, tad virkni turpināja visbiežāk ar vienu virknes locekli. Piemēram, 42 skolēni (21,8 %) nemēģināja aprakstīt algoritmu, pēc kāda varētu veidoties šī virkne, un visi 42 nenorādīja nevienu nākamo virknes locekli.

Katrs septītais pusaudzis (13,5 %) centās skaidrot savu atbildi, taču skaidrojums bija nepilnīgs vai daļēji kļūdains, piemēram, pēc skolēna aprakstītā algoritma virknē būtu citi nākamie skaitļi nekā norādīti skolēna atbildē. Viena no šādām atbildēm: “Skaitli vajag reizināt ar 2 un pieskaitīt 2.” Kā piemēru skolēns uzraksta $8 \cdot 2 + 2 = 18$ un prognozē, ka tālāk virkne turpināsies ar skaitļiem 38, 78, 158 utt. Šajā skaidrojumā ir neliela neprecizitāte: aprakstītais algoritms neder pirmajiem diviem virknes locekļiem, jo $2 \cdot 2 + 2$ ir 6, nevis 8. Vēl viens piemērs – skolēns aprakstīja rekurentu virkni, taču arī kļūdījās aprēķinos. Piedāvātais algoritms bija saskaitīt visus iepriekšējos virknes locekļus un pieskaitīt 6, tādējādi ceturtais virknes loceklis būtu $2 + 8 + 18 + 6 = 34$, taču $2 + 8 + 6$ nav 18, tādēļ aprakstītā likumsakarība nedarbojas dotajiem trīs skaitļiem. Atbilžu standartnovirze (1,11) un dispersija jeb atbilžu izkliede (1,24) ir salīdzinoši lielākas nekā citos jautājumos par matemātisko intuīciju, jo visi matemātiskās intuīcijas līmeņi ir pārstāvēti salīdzinoši vienmērīgi. Iespējams, daļa skolēnu atcerējās šo skaitļu virkni no ķīmijas stundām. Daži skolēni komentēja, ka ir redzējuši šo virkni iepriekš atjautības testos. Citi uzdevumi bija radīti īpaši šai aptaujai.



5.17. att. **Skolēnu matemātiskās intuīcijas līmeņi**

Ņemot vērā skolēnu panākumus abos uzdevumos matemātiskās intuīcijas diagnostikai, tika noteikts matemātiskās intuīcijas līmenis (*skat. 5.17. att.*). Ja skolēns abos uzdevumos uzrādīja augstāko sagaidāmo rezultātu vai arī vienā uzdevumā augstāko sniegumu un otrā pieļāva nebūtisku kļūdu, šāda atbilde raksturoja izteiktu matemātiskās intuīcijas līmeni; ja skolēns nemēģināja atbildēt uz abiem uzdevumiem – ka nav matemātiskās intuīcijas. Arī šajā sadalījumā standartnovirze (1,34) un dispersija (1,80) ir salīdzinoši lielas. Kā liecina novērojumi praksē pusaudži matemātikas apguvē cenšas ar matemātisko intuīciju kompensēt iztrūkumus faktu un algoritmu pārzināšanā un kritiskajā domāšanā. Vērojumi stundās un intervijas ar matemātikas skolotājiem apliecina, ka pusaudži nereti cenšas spontāni piedāvāt dažādas atbildes, kamēr visbiežāk nejauši uztrāpa pareizai atbildei vai skolotājs pasaka atbildi priekšā. Pusaudži, kuri pārzina dažādus algoritmus un metodes, augstā līmenī pielieto matemātisko intuīciju, izvirzot hipotēzi par to, kurš risināšanas paņēmiens būs efektīvākais.

Šajos uzdevumos pusaudži uzrādīja otro labāko rezultātu starp uzdevumiem, kas atbilst visiem septiņiem matemātiskās kompetences kritērijiem, turklāt pusaudži demonstrēja matemātisko intuīciju izteiktā līmenī visbiežāk. Kā redzams diagrammā, šāds līmenis ir 52 pusaudžiem jeb vairāk nekā ceturtdaļai (26,9 %) respondentu (*skat. 5.17. att.*). Uzdevumi ar otru lielāko pusaudžu skaitu, kuri uzrādīja izteiktu līmeni, ir atbilstoši kritērijam personības īpašības, kurā šo augstāko līmeni uzrādīja gandrīz katrs desmitais aptaujātais (19 respondenti jeb 9,8 %). Tas ir 2,7 reizes mazāks absolūtais biežums nekā matemātiskās intuīcijas kritērijā.

Salīdzinot pusaudžu matemātiskās intuīcijas pašvērtējumu ar panākumiem uzdevumos matemātiskās intuīcijas diagnostikai, var novērot, ka pusaudži, kuriem piemīt izteikta matemātiskā intuīcija, ļoti reti pašvērtējumā izvēlas augstāko novērtējumu. No 52 pusaudžiem ar izteiktu matemātisko intuīciju tikai divos abos pašvērtējuma jautājumos atbildēja, ka var paļauties uz matemātisko intuīciju katru mācību stundu. Lielas neatbilstības ir arī pie vērtējuma "labi", jo uzdevumu risinājumos to uzrāda 29 pusaudži, bet pašvērtējumā – divtik vairāk jeb 60 respondenti.

Eksperte A. Kumerdanka intervijā intuīciju raksturo kā dabas dāvanu. Līdzīgās domās bija A. Kolmogorovs, kurš matemātisko intuīciju pielīdzināja apdāvinātībai (*skat. 4.2.5. apakšnodaļu*). "Protams, mēs varam mācīties, varam intuīciju izkopt analizējot, jo intuīcija, manuprāt, ir ļoti saistīta ar prognozēšanu. Intuīcija ir vairāk uz buršanos, bet bērniem var iemācīt novērtēt," intervijā spriež A. Kumerdanka (*skat. 12. pielikumu*). Pamatpētījuma dati neapstiprina šo pieņēmumu, jo starp pusaudžu panākumiem matemātiskās intuīcijas uzdevumos un kritiskās domāšanas uzdevumos, kas iekļauj analīzi, tika novērota vāja, pozitīva korelācija ($r \approx 0{,}31$).

A. Kumerdanka iesaka skolēniem jau sākumskolā vairāk mācīt novērtēt lielumus un attīstīt acumēru, piemēram, lai noteiktu, cik tālu atrodas koks vai cik spainīšu būs vajadzīgi, lai piepildītu tvertni, kuras tilpums ir viens kubikmetrs. "Iemācīt stratēģijas, kā tu vari novērtēt. Pēc šādas mācīšanās, ja es pārbaudītu skolēnu panākumus, es pieņemu, ka rezultāti intuīcijas jautājumos būtu citi, bet ne jau tāpēc, ka viņam intuīcija ir dabiski mainījusies, bet ka viņam ir kaut kādi instrumenti, kā viņš var kaut ko izvērtēt tīri ar prātu," intervijā iesaka A. Kumerdanka, kura ir novērojusi, ka sākumskolā tas netiek pietiekami darīts, tādēļ pusaudžiem trūkst ieraduma novērtēt atbildi, izvirzīt pieņēmumus, kas formē intuīciju.

Aptaujā skolēni atzīst, ka bieži paļaujas uz intuīciju, taču visbiežāk tā ir tieši afektīvā intuīcija – skolēni seko kādai tūlītējai emocijai, nojausmai, kuru izraisa kāds atslēgvārds, tādēļ mācību stundā šīs intuīcijas izpausmes var izskatīties pēc minēšanas. Tikai ļoti retos gadījumos skolēnu sniegumu var kvalificēt kā empīrisko vai konstruktīvo intuīciju. Matemātikas skolotāji diskusijā atzina, ka paši samērā bieži paļaujas uz intuīciju, piemēram, kad mēģina pārskatīt tematu secību, akcentus, metodes, jo pēc skolotāju domām matemātikas mācībās Latvijā iztrūkst kopveseluma un vienprātības par matemātikas saturu, secību, tematiskajām prioritātēm, apguves laiku un citiem būtiskiem aspektiem (*skat. 10. pielikumu*).

J. Vilciņš intervijā uzsver, ka Latvijas skolēnu matemātiskā intuīcija būtu daudz labāka, ja skolotāji mērķtiecīgāk sasaistītu skolēnu reālās dzīves pieredzi ar matemātikas saturu. Kā piemēru viņš minēja intuitīvo izpratni par ātrumu – pēc PISA testa rezultātiem, Latvijas pusaudži ātrumu interpretē tieši kā vidējo, nevis momentāno ātrumu, kas varētu norādīt uz to, ka netiek pienācīgi izmantotas empīriskās intuīcijas iespējas no reālās dzīves situācijām uzkrāt pietiekamu informāciju un pieredzi, kas ļautu organiskāk, intuitīvi iedomāties saistību ar matemātisko uzdevumu. “PISA pētnieku skaidrojums par nupat minēto piemēru bija tāds: kuram gan bērnam nav pieredzes sēdēt blakus tētim un skatīties spidometru. Ir tāda pieredze, bet viņam neienāk prātā to salikt kopā ar skolas matemātiku, kas viņu ir pieradinājusi nedomāt par realitāti,” intervijā skaidro J. Vilciņš. Stiprināt pusaudžu matemātisko intuīciju ir iecerēts arī, sadalot tematu “Skaitļi” divās daļās ar atslēgas vārdiem “darbības ar skaitļiem” un “skaitļu izjūta”, kuras apguvē noteicošā varētu būt afektīvā intuīcija (*skat. 11. pielikumu*).

5.2.2.2. Problēmu risināšana

Atbildēm uz problēmu risināšanas kritērijam atbilstošajiem jautājumiem Kronbaha alfa koeficienta vērtība ir 0,67 (*skat. 5.18. att.*). Ja šis koeficients ir robežās no 0,6 līdz 0,7, tā tiek uzskatīta par pietiekamu skalas saskaņotības vērtību.

Reliability Statistics

Cronbach's Alpha	N of Items
,667	5

5.18. att. **Skalas saskaņotības koeficienta vērtība (Kronbaha alfa) problēmu risināšanas jautājumu skalām**

Jautājumā par prasmi problēmās uztvert, kas ir prasīts uzdevumā, pusaudžu atbilžu moda un mediāna ir tāda, ka viņiem reizēm ir grūtības uztver, kas ir prasīts uzdevumā (*skat. 5.9. tab.*). Šādi atbildēja 135 respondenti jeb 69,9 % aptaujāto pusaudžu. 17,6 % aptaujāto pusaudžu atbildēja “bieži”, 7,3 % – “nekad” un 5,2 % jeb vidēji viens vai divi skolēni klasē atzina, ka šādas problēmas viņiem ir katrā stundā. Šajā jautājumā atbilžu kodēšanas Likerta skala ir inversa (3 – nekad, 2 – reizēm; 1 – bieži; 0 – vienmēr/ katru stundu), lai tā būtu saturiski saskaņota ar atbilžu jēgu: tā kā atbilde “vienmēr” šoreiz identificē nevēlamo situāciju un atbilde “nekad” apliecina augstāko problēmu risināšanas līmeni. Tā kā 87,0 % atbilžu ir sadalījuma centrālās izvēles “reizēm” un “bieži”, šajā jautājumā standartnovirze (0,64) un dispersija (0,42) ir salīdzinoši nelielas.

5.9. tabula. Skolēnu atbilžu centrālās tendences un variācijas rādītāji jautājumos par problēmu risināšanu

Jautājums	Mediāna (*median*)	Aritmē-tiskais vidējais (*mean*)	Moda (*mode*)	Standart-novirze (*standard deviation*)	Dispersija (*variance*)	Asimetrijas koeficients (*skewness*)
1. Cik bieži Tev ir problēmas uztvert, kas ir prasīts uzdevumā?	Reizēm 2	1,79	Reizēm 2	0,64	0,42	–0,959
2. Cik bieži Tev matemātikas stundās jāpamato savs viedoklis?	Reizēm 1	1,29	Reizēm 1	0,72	0,52	0,26
3. Sastādi matemātisku uzdevumu un atrisini to!	Zema līmeņa atbilde	0,96	Zema līmeņa atbilde	0,70	0,49	0,96
4. Uzraksti īsu plānu, kā Tu noteiktu neregulāras formas četrstūra laukumu!	Nav risināts	0,75	Nav risināts	0,95	0,91	1,14

Tabulā izmantotā Likerta skala: 3 – vienmēr/ katru stundu; 2 – bieži; 1 – reizēm; 0 – nekad; izņemot 1. jautājumu: 3 – nekad; 2 – reizēm; 1 – bieži; 0 – vienmēr/ katru stundu.

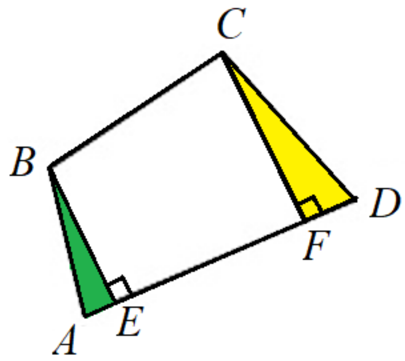
Asimetrijas koeficients ir negatīvs, pēc moduļa salīdzinoši liels skaitlis (–0,959), jo dati ir ievērojami nobīdīti pa labi – moda un mediāna ir lielāka nekā vidējais aritmētiskais, skolēni biežāk izvēlas atbildes “reizēm” un “nekad”. Pa labi no mediānas atrodas 77,2 % atbilžu, bet pa kreisi – tikai 22,8 %.

Jautājumā “Cik bieži Tev matemātikas stundās jāpamato savs viedoklis?” atbilžu moda bija “reizēm” (104 respondenti jeb 53,9 %), otra populārākās atbilde bija “bieži” (30,6 %). 10,9 % respondentu atbildēja, ka viņiem nekad nav jāpamato savs viedoklis matemātikas stundās. Jautājumu, kuri sākas ar “Cik bieži”, atbilžu varianti pamatpētījumā tika papildināti ar iespēju skolēnam ierakstīt izvērstāku komentāru. Viens skolēns savu atbildi “nekad” komentēja sīkāk: “Es matemātikas stundās norakstu un mēģinu saprast, kas notiek, un neko lieku.” Atbildot uz šiem jautājumiem, skolēniem bija iela vienprātība, tādēļ standartnovirzes nav lielas (attiecīgi, 0,64 un 0,72).

Uzdevumā par skolēnu skaita dinamikas teksta uzdevuma veidošanu un atrisināšanu vairākums respondentu (66,3 %) uzrādīja vāju problēmu risināšanas līmeni, formulējot teksta uzdevumu par skolēnu skaita izmaiņu, kopējo skolēnu skaitu visos trijos gados un pat par informācijas nolasīšanu no teksta (“Cik skolēnu mācījās Mārupes vidusskolā 2016. gadā?”). 7,3 % skolēnu šajā uzdevumā parādīja labu līmeni, jo aprēķināja skolēnu skaita procentuālo pieaugumu, prognozēja paralēlklašu skaitu nākamajos gados u. tml. Izteikts līmenis bija 10 skolēniem (5,2 %), kuri aprakstīja skolēnu skaitu kā kvadrātisku virkni, uzrakstīja virknes rekurento formulu, prognozēja skolēnu skaitu vēl trīs gadus uz priekšu u. c. 41 pusaudzis jeb 21,2 % aptaujāto nemēģināja uzrakstīt savu uzdevumu.

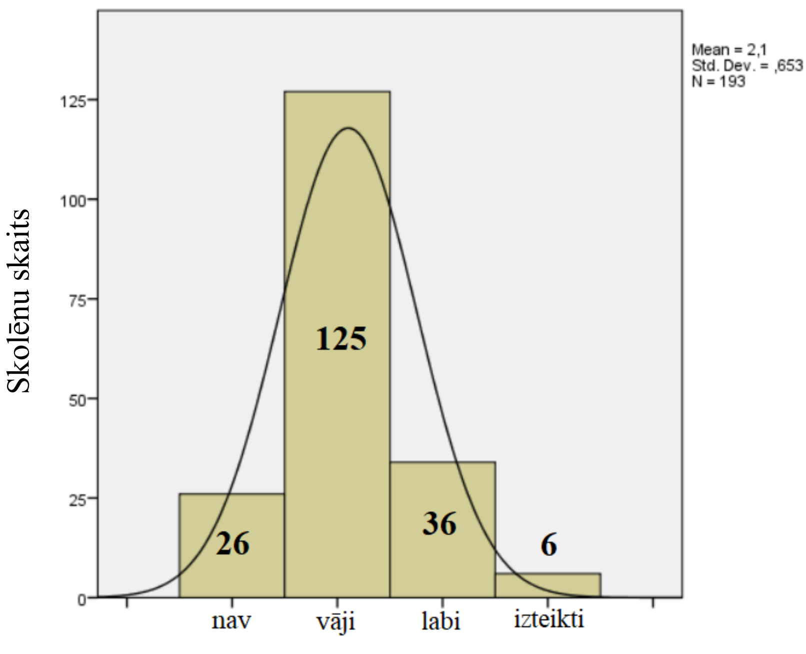
Otrs uzdevums, ar kuru pārbaudīt pusaudžu problēmu risināšanas prasmi, bija šāds: attēlā bija parādīts neregulāras formas četrstūra veida zemesgabals, un skolēniem vajadzēja pateikt, kādus mērījumus viņi veiktu, lai varētu noteikt šī zemesgabala laukumu, kā arī uzrakstīt īsu plānu, kā noteikt laukumu. Atbilžu moda un mediāna (100 respondenti jeb 51,8 %) bija vārds “nezinu” vai aplama stratēģija, piemēram, piedāvājums izmērīt zemesgabala visu četru malu garumus un tos saskaitīt, kas ļauj noskaidrot perimetru, nevis laukumu. Vēl 58 skolēniem ir zināms algoritms, kā aprēķina laukumu dažādām figūrām, taču viņi nezināja, kā šīs zināšanas pielietot šajā nestandarta situācijā, kad četrstūris nav kāda veida paralelograms vai trapece. 18 skolēni uzrakstīja vispārīgu plānu, kā noteiktu laukumu, piemēram, “pārdalītu uz pusēm un rēķinātu kā divus trijstūrus”, taču šajos risinājumos trūka konkrētības vai atbildes uz pirmo jautājumu – ko vajadzētu mērīt?

Visbeidzot, 17 pusaudži parādīja augstāko problēmu risināšanas līmeni, jo detalizēti aprakstīja plānu un konkrēti norādīja, ko mērītu. Tipiskākā stratēģija bija novilkt diagonāli: “No sākuma vajadzētu sadalīt laukumu divos trijstūros, nomērīt vienu no tā malām un pret šo malu vilkto augstumu. Tad sareizināt tos un dalīt ar divi. Trijstūru laukumus saskaitīt.” Viens skolēns izdomāja citu pieeju: “Es uzvilktu apkārt taisnstūri, kas iet cauri visiem četriem zemesgabala stūriem, izmērītu taisnstūrim laukumu, pēc tam izrēķinātu (*ārpus zemesgabala esošo* – piebilde) taisnleņķa trijstūru laukumus, saskaitītu tos un atņemtu no taisnstūra laukuma.” Vēl viens skolēns aprakstīja šādu plānu: “No virsotnes B un C novelk divus augstumus pret malu AD. Rodas taisnleņķa trapece un divi taisnleņķa trijstūri, kuriem ir zināmas laukuma formulas.” (*skat. 5.19. att.*).



5.19. att. **Kāda skolēna piedāvātā stratēģija neregulāras formas četrstūra laukuma noteikšanai**

Apkopojot skolēnu sasniegumus abos problēmu risināšanas uzdevumos, iegūtais līmeņu sadalījums atgādina normālo sadalījumu, kas ir nobīdīts pa kreisi, par ko liecina arī pozitīva asimetrijas koeficienta vērtība (*skat. 5.20. att.*). 6 skolēni uzrādīja augstu problēmu risināšanas līmeni abos uzdevumos, 26 pusaudži nemēģināja risināt abus uzdevumus un pārējie 161 respondenti tika galā ar uzdevumiem daļēji. Sadalījuma standartnovirze (1,27) ir samērā liela, kaut gan dati ir izteikti fokusējušies ap rezultātu mediānu "vāji" (125 respondenti jeb 64,8 %). Problēmu risināšanas kritērijā ir arī pats lielākais līmeņu "vāji" un "nav" absolūtais biežums.



5.20. att. **Skolēnu problēmu risināšanas līmeņi**

Pusaudži ar izteiktu līmeni problēmu risināšanā samērā objektīvi veica pašvērtējumu – tikai trīs skolēni, kuri uzdevumu risināšanā neparādīja šo līmeni, sev to piedēvēja pašvērtējuma jautājumos. Tas pats attiecas uz datiem par vāju līmeni, tomēr no pusaudžiem, kuri uzdevumu risināšanā nevarēja demonstrēt pat vāju līmeni, tikai piektdaļa to spēja prognozēt pašvērtējuma jautājumos. Savukārt, pašvērtējumā labu līmeni sev piedēvēja 135 pusaudži, tikmēr uzdevumu risināšanā šo līmeni varēja apliecināt tikai 36. Šādi rezultāti ir samērā sagaidāmi – skolēniem, kuriem pavisam nav attīstītas problēmu risināšanas prasmes, trūkst pieredzes un zināšanu, tai skaitā, objektīvi izvērtēt savu līmeni; līdzīgi pusaudži ar vāju līmeni, nepareizi interpretējot savu limitēto zināšanu apjomu un nespējot novērtēt, cik daudz prasmju matemātikā viņiem vēl jāapgūst, labprātāk pašvērtējumā novērtē sevi augstāk.

Skolotāju fokusgrupas diskusijā iezīmējas vairākas versijas par to, kādēļ vairākums pusaudžu praktiska satura uzdevumā par skolēnu skaita pieaugumu izvēlējās formulēt viņu vecumam neatbilstoši primitīvu jautājumu; viena no populārākajām – matemātikas mācības saturiski, it sevišķi, 6. – 9. klasēs notiek haotiski, fragmentāri, tādēļ skolēniem nereti ir grūtības izprast vienu aktuālo tematu, tikmēr problēmu risināšana paredz, ka skolēns veic darbības, kas prasa secīgus lēmumus un sasaistīt informāciju no dažādiem tematiem. Piemēram, daudzi skolēni 8. klasē nespēj apgūt saīsinātās reizināšanas formulas vai arī atceras tās tikai formulas lietošanas brīdī, bet nepamana šo formulu pielietojumu, piemēram, vienādojumu risināšanā (*skat. 10. pielikumu*).

Otrs arguments, kādēļ pusaudžiem lielākoties ir vāja problēmu risināšanas prasme, ir matemātikas apguvei atvēlētajam laikam nesamērīgais pamatskolā apgūstamo tematu skaits, kā rezultātā skolēniem ir virspusējs priekšstats par tiem. Skolotāji iesaka pamatskolā izvirzīt prioritārās tēmas, tās apgūt ilgāk, bet pamatīgāk, veidojot noturīgu pamatzināšanu bāzi un tad veltot saprātīgu laiku daudzveidīgām situācijām, lai rezultātā skolēni iegūtu zināšanas, prasmes un pieredzi patstāvīgi risināt problēmas matemātikā. Treškārt, pusaudži un viņu vecāki ir vairāk fokusēti uz rezultātu 9. klases matemātikas eksāmenā, nekā uz skolēnu prasmi mācīties un izpratni, kas ietekmē skolotāju izvēlētās mācību metodes un saturu (*skat. 10. pielikumu*).

Ar problēmu risināšanu mūsdienās saprot uzdevumus, ar kuriem tiek radīta skolēnu izpratne par kādu jēdzienu (*skat. 4.2.4. apakšnodaļu*). Uzdevuma par zemesgabala laukumu mērķis bija pārbaudīt pusaudžu izpratni par jēdzienu “laukums” un prasmes pielietot dažādas jau kopš 4. klases matemātikā apgūtās stratēģijas laukuma noteikšanai. Arī šajā uzdevumā izpaudās D. Kānemana aprakstītā domāšanas īpatnība nezināmo vai neskaidro aizstāt ar līdzīgu, bet labāk zināmo, jo vairāk nekā puse skolēnu, nezinot, kā noteikt patvaļīga četrstūra laukumu, aizstāja šo problēmu ar citu – pieņēma, ka zīmējumā ir attēlots taisnstūris (Kahneman, 2011). Iespējams, ar to pašu domāšanas fenomenu var skaidrot to skolēnu rīcību, kuri šajā uzdevumā sarežģīto jautājumu par laukumu aizstāja ar salīdzinoši daudz vienkāršāku jautājumu par perimetru. No otras puses, tas varētu liecināt par pusaudžu nepietiekamo lasītprasmi, ar ko varētu skaidrot to, ka vairākums skolēnu no diviem uzdevuma jautājumiem atbildēja tikai uz vienu. Runājot par satura izmaiņām jaunajā matemātikas standartā, J. Vilciņš akcentēja, ka "jēdzienu skaits ģeometrijā ir samazināts, lai atlikušos padarbinātu vairāk, dziļāk, jēdzīgāk" (*skat. 11. pielikumu*).

J. Vilciņš uzsver arī skolotāju sadarbības būtisko lomu skolēnu problēmu risināšanas prasmju veidošanā. "Jau tiražētais piemērs par ķīmiju un procentu lietošanu, kur klasiski ķīmijas skolotājs iedod savas receptes, kā jārēķina šķīdumu masas attiecības, un nedod iespēju skolēniem pašiem pārnest matemātikas zināšanas uz ķīmijas uzdevumu," intervijā saka J. Vilciņš (*skat. 11. pielikumu*).

Vēl viens būtisks aspekts, kas pasliktina pusaudžu problēmu risināšanas prasmes, ir tradīcija matemātikas mācīšanā fokusēties uz konkrētām prasmēm. Kaut gan matemātikas standarts iekļauj trīs sadaļas – matemātiskās prasmes, pētnieciskā darbība un mijiedarbība ar reālo dzīvi – , 8. klases diagnosticējošais darbs matemātikā parāda, ka daļa skolotāju māca tikai standarta sadaļu "matemātiskās prasmes", par savu uzdevumu uzskata šauru matemātisko prasmju iemācīšanu. Vienlaikus J. Vilciņš uzver, ka ir ļoti daudz talantīgu skolotāju, kuri individuāli savā praksē jau izmanto projekta *Skola2030* idejas. "Vienlaikus tā ir arī ziņa, ka viena lieta ir uzrakstīt standartu, otra lieta – pārliecināt un ar to aizraut skolotājus," secina eksperts (*skat. 11. pielikumu*).

"Mācām plānot, rakstām pa punktiņiem, vingrināmies ieraudzīt situācijas, ģenerējam idejas, ko mēs šeit varam pētīt, ko ar to var darīt. Ka mēs apzināti radām situācijas, kurās viņam tas ir jādara," padomos, kā iemācīt skolēniem risināt problēmas, dalās A. Kumerdanka (*skat. 12. pielikumu*).

5.2.2.3. Matemātiskā modelēšana

Atbildēm uz matemātiskās modelēšanas kritērijam atbilstošajiem jautājumiem Kronbaha alfa koeficienta vērtība ir 0,73 (*skat 5.21. att.*). Ja šis koeficients ir robežās no 0,7 līdz 0,8, tā tiek uzskatīta par pietiekamu skalas saskaņotības vērtību.

Reliability Statistics

Cronbach's Alpha	N of Items
,728	5

5.21. att. **Skalas saskaņotības koeficienta vērtība (Kronbaha alfa) matemātiskās modelēšanas jautājumu skalām**

5.10. tabula. Skolēnu atbilžu centrālās tendences un variācijas rādītāji jautājumos par matemātisko modelēšanu

Jautājums	Mediāna (*median*)	Aritmē-tiskais vidējais (*mean*)	Moda (*mode*)	Standart-novirze (*standard deviation*)	Dispersija (*variance*)	Asimetrijas koeficients (*skewness*)
1. Cik bieži matemātikas stundās veidojat matemātisku modeli reālas dzīves problēmai?	Reizēm 1	0,93	Reizēm 1	0,74	0,55	0,19
2. Kādus procesus var aprakstīt ar funkciju?	Nav vai nekonkrēti	0,62	Nav vai nekonkrēti	0,83	0,69	1,38
3. Vienādsānu trijstūra viena mala ir 8 cm un cita mala ir 5 cm gara. Aprēķini trijstūra perimetru.	1 pareizā atbilde	0,89	1 pareizā atbilde	0,66	0,44	0,13
4. Pēc dotā istabas plāna mērogā nosaki galda izmēru.	Nosaka aptuvenu galda izmēru	1,17	Nav risināts	1,14	1,30	0,38

Tabulā izmantotā Likerta skala: 3 – vienmēr/ katru stundu; 2 – bieži; 1 – reizēm; 0 – nekad; 4. jautājumā: 3 – precīzi aprēķina galda izmēru; 2 – viens izmērs pareizs; sajauc istabas plānā garumu un platumu; 1 – nosaka galda izmēru aptuveni; 0 – nav risināts.

Jautājumā "Cik bieži matemātikas stundās veidojat matemātisku modeli reālas dzīves problēmai?" atbilžu moda bija "reizēm" (42,0 %), standartnovirze ir 0,74 (*skat. 5.10. tab.*). Otra populārākā atbilde ar līdzīgu biežumu bija "nekad" (29 %). Pārējie pusaudži atbildēja, ka bieži vai katru stundu modelē reālās dzīves problēmas (22,3 % un 0,5 %). Pieci skolēni izmantoja iespēju paskaidrot savu atbildi. Trīs skolēni ir novērojuši, ka matemātikas stundās modelēšanai tiek atvēlēts laiks dažu tematu beigās, ja pirms noslēguma darba paliek laiks. Viens skolēns varēja atsaukt atmiņā tikai vienu reizi, kad matemātikas stundā vajadzēja modelēt. Atbilžu izkliede nav liela (standartnovirze 0,74, dispersija 0,55), jo 77,2 % pusaudžu atbildēja "nekad" vai "reizēm".

107 respondenti jeb 55,4 % nespēja nosaukt nevienu procesu, kuru var aprakstīt ar funkciju. 32,7 % nosauca piemērus procesiem, kurus var aprakstīt ar lineāru vai kvadrātfunkciju, tostarp spēka atkarība no ķermeņa masas ($F = mg$), veiktā ceļa atkarība no laika vienmērīgā kustībā ($s = vt$), izdevumi atkarībā no iegādāto preču daudzuma, bumbas lidojuma trajektorija gravitācijas laukā, iedzīvotāju skaita izmaiņas kādā valstī pa gadiem utt. Vairākums skolēnu nosaukto piemēru ir aizgūti no fizikas. Vēl 13 skolēni (6,7 %) atbildēja, ka

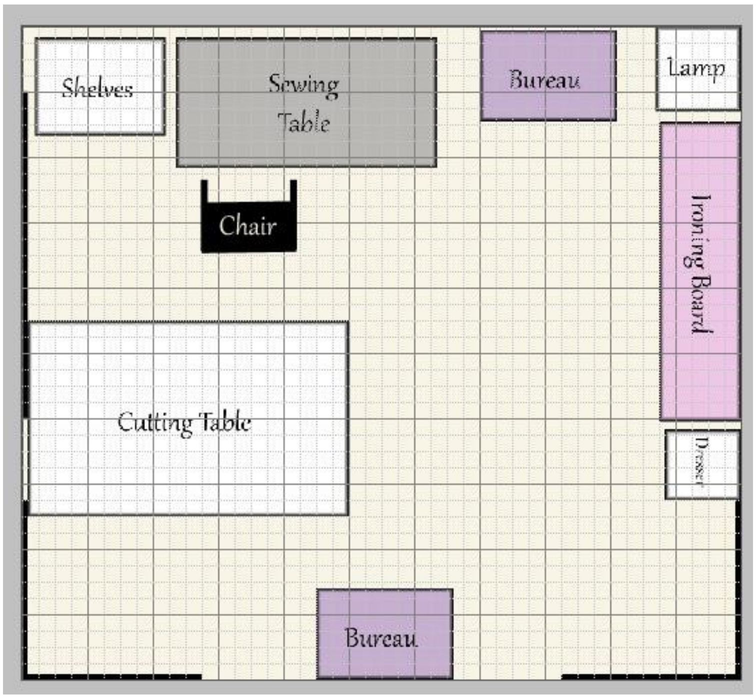
ar funkcijām var aprakstīt dažādus procesus, un kā piemērus minēja vairākas gan lineāras, gan nelineāras funkcijas: peļņa kā starpība starp nelineārām ienākumu un izdevumu funkcijām, dažādas situācijas sportā, kur mainīgais lielums parasti ir laiks vai koordināta un funkcija var būt jebkas, atkarībā no sporta veida (leņķis, augstums, atlēcienu skaits u. tml.). 10 skolēni (5,2 %) atbildēja, ka ar funkciju var aprakstīt gandrīz visus procesus. Atbilžu standartnovirze ir 0,83, jo 88,1 % atbilžu atbilst zemam modelēšanas līmenim – respondenti nezināja atbildi vai minēja savam vecumposmam samērā triviālu piemēru, kurš tika analizēts mācību stundās. Arī šajā jautājumā atbilžu izkliede nav liela (0,69).

Pamatskolā pusaudži modelē reālās dzīves situācijas ar lineāru funkciju un kvadrātfunkciju. Skolotāji un eksperti ir vienisprātis, ka abu šo funkciju pielietojums modelēšanā ir nepilnīgs, skolēni pagūst apskatīt tikai tipiskākos pielietojumus. Jaunajā matemātikas standartā ir paredzēts tematu par daļveida racionāliem vienādojumiem pārcelt no 9. klases uz 10. klasi, kas nozīmē to, ka pamatskolā nevarēs līdzšinējā līmenī modelēt tādas problēmas kā kustība un kopīgi veiktais darbs. “Es to saredzu kā problēmu, kas, varbūt, nebūs problēma, ja mēs atradīsim citus kontekstus, kurus pamatskolēni var modelēt matemātiski bez racionālām daļām. Ir jautājums, vai mēs esam izsmēluši visus lineāros un kvadrātiskos modeļus,” intervijā spriež J. Vilciņš (*skat. 11. pielikumu*).

Skolotāji ir novērojuši, ka skolēni var atsevišķi pārzināt tādus jautājumus kā nevienādības, funkcijas, parabola, taču, visbiežāk, nespēj starp tiem saskatīt kopsakarības, pat ar skolotāja iedotu darbības plānu. Arī mācību grāmatu autoru piedāvātā tematu secība pēc skolotāju domām neveido izpratni par matemātiku, jo šai secībai trūkst loģikas – tematu ir pārāk daudz un tie nav savstarpēji sasaistīti. Lai skolēni izprastu, kas ir funkcijas un kā tās var pielietot, modelējot reālās dzīves situācijas, skolotāji ierosina pamatskolas klasēs izvēlēties dažas funkcijas un tās apgūt padziļināti, piemēram, apgūstot funkcijas, skolēni apskatītu arī funkciju grafiku pielietojumu nevienādību grafiskajai atrisināšanai, pētītu dažādas formas telpisko ķermeņu piepildīšanās funkcijas, veidojot izpratni par to tilpumu, analizētu, ko praktiska satura uzdevumā nozīmē divu funkciju grafiku krustpunkti, pētītu funkcijas ekstrēmus (*skat. 10. pielikumu*).

“Mums ir ļoti grūti jēgpilni iemācīt, kas ir funkcija,” intervijā atzīst J. Vilciņš. Lai risinātu šo problēmu, jaunajā matemātikas saturā 7. klasē ir paredzēts apgūt atsevišķu tematu “Sakarības”, tajā nepieminot jēdzienu “funkcijas”. J. Vilciņš kā piemēru jaunā temata pētnieciskajam darbam min mājasdarbu, kurā skolēni apdomās un formulēs divus lielumus, kas skaitliski raksturo viņu ikdienu, starp kuriem ir sakarība. “Mana pārliecība ir, ka pirms jēdziena “funkcija” skolēnam vajag izdzīvot šādu uzdevumu un atrast savā dzīvē divus lielumus, starp kuriem ir sakarība,” saka J. Vilciņš (*skat. 11. pielikumu*).

Uzdevumam par vienādsānu trijstūra perimetru ir divas pareizās atbildes. Lai to pamanītu, skolēnam ir ļoti rūpīgi jāizlasa uzdevuma teksts un jāiedomājas, ka 8 cm var būt pamata vai sānu mala; tas pats sakāms arī par 5 cm garo malu. Kaut gan tas nebija prasīts uzdevuma nosacījumos, daži skolēni iedomājās precizēt, ka abi trijstūri eksistē, jo tiem izpildās trijstūra nevienādība, proti, ka jebkuru divu trijstūra malu garumu summa ir lielāka nekā trešā mala, piemēram, $5 + 5 > 8$. Atbilžu moda bija viens no diviem iespējamajiem perimetriem – vienu pareizo atbildi atrada vairāk nekā puse respondentu (107 respondenti jeb 55,4 %). Vēl 54 pusaudži (28,0 %) nespēja aprēķināt nevienu no abiem perimetriem, savukārt, 32 skolēni (16,6 %) spēja saskatīt un pareizi noteikt abas atbildes. Tā kā 83,4 % pusaudžu nespēja atrisināt šo uzdevumu vai atrisināja to daļēji un tikai katrs sestais respondents (16,6 %) šo uzdevumu atrisināja pilnīgi pareizi, atbilžu izkliede ir samērā neliela (standartnovirze 0,66, dispersija 0,44).

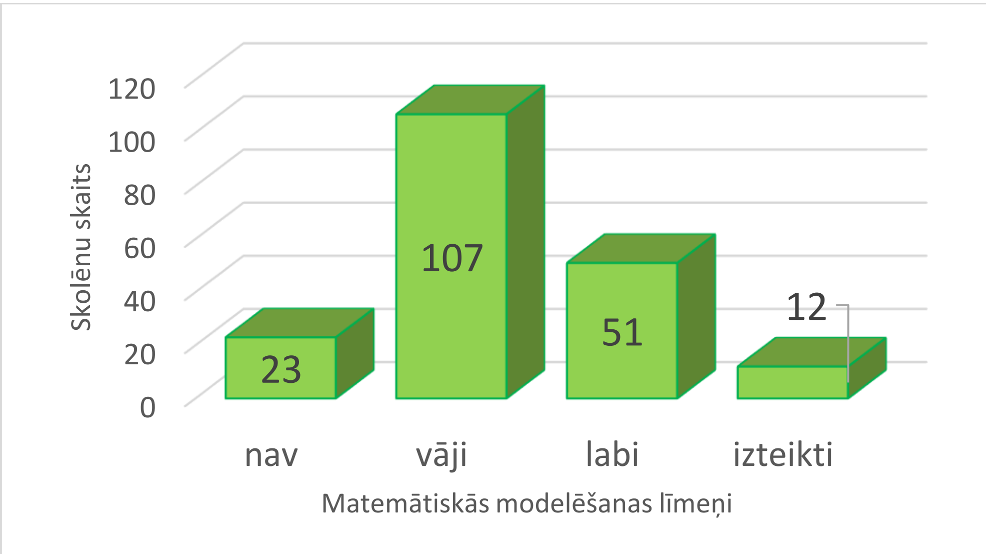


5.22. att. **Attēls no uzdevuma par matemātisko modelēšanu**

Visbeidzot, pēdējais modelēšanas uzdevums bija pēc attēlā parādītā istabas plāna noteikt lielākā galda izmērus, zinot, ka istabas platums ir 5 metri (*skat. 5.22. att.*). Atbilžu moda bija “nezinu” – tā atbildēja 77 respondenti jeb 39,9 %. Vēl 40 skolēni (20,7 %) noteica atbildi aptuveni, mēģinot uzminēt, noapaļot vai saskatīt vismaz aptuvenu proporciju. 42 skolēni

(21,8 %) parādīja aprēķinu gaitu, taču pieļāva kādu nebūtisku kļūdu. Visbiežākā kļūda bija aplams pieņēmums, ka istabas platums attēlā ir horizontālais virziens, kaut gan horizontālā virzienā šī istaba ir garāka nekā vertikālā. Tādā gadījumā lielākā galda izmēri sanāca 1,42 m un 2,27 m. Visbeidzot, 34 pusaudži (17,6 %) pilnībā pareizi atrisināja šo uzdevumu un nonāca pie pareizās atbildes 1,5 m uz 2,5 m, kā arī atbildē norādīja abus galda izmērus, kā bija prasīts uzdevumā. Daži skolēni izpildīja papilduzdevumu, aprēķinot galda laukumu $S = 3{,}75\ m^2$.

Pusaudžu atbilžu sadalījums ir izteikti izkliedēts (atbilžu standartnovirze (1,14) un dispersija (1,30) ir samērā lielas) un samērā simetrisks (asimetrijas koeficients ir 0,38), jo bija salīdzinoši vienmērīgāk pārstāvētas visas atbildes un tās bija vairāk izkliedētas ap mediānu. Skolotāji šo rezultātu saista ar pārblīvētu 5. un 6. klases matemātikas saturu, kad skolēniem pirmo reizi ir jāiepazīst proporcijas jēdziens. Skolotāju pieredze un arī šī uzdevuma rezultāti rāda, ka skolēniem neizveidojas patiesa izpratne par proporcijām, tādēļ viņi nespēj pārnest šīs zināšanas uz tādām praktiskām dzīves situācijām kā kartes mērogs ģeogrāfijā, šķīduma koncentrācija ķīmijā, nodokļu politika ekonomikā vai istabas mērogs (*skat. 10. pielikumu*).



5.23. att. **Skolēnu matemātiskās modelēšanas līmeņi**

Apkopojot datus par visiem matemātiskās modelēšanas uzdevumiem, var secināt, ka 12 pusaudžiem (6,2 %) ir izteikts līmenis, savukārt, 23 skolēni (11,9 %) nevarēja formulēt kaut jebkādu domu nevienā no trim modelēšanas uzdevumiem (*skat. 5.23. att.*). Dati ir ievērojami vairāk izkliedēti, tādēļ standartnovirze ir 1,84 un dispersija 3,38. Pateicoties iepriekšējā desmitgadē veiktām pārmaiņām matemātikas saturā, modelēšana ir kļuvusi par organisku matemātikas mācīšanas sastāvdaļu, taču skolotāji un eksperti intervijās atzīst, ka modelēšanai netiek veltīts pienācīgi ilgs laiks, lai visi skolēni varētu saistīt modeli ar savām iepriekšējām zināšanām un pielietot modeli uzdevumu risināšanā. Daudziem pusaudžiem matemātiskais modelis ir atrauts no pielietojuma, piemēram, skolēns piekrīt skolotāja stāstījumam par zīmju likumu kā modeli (divu negatīvu skaitļu reizinājums ir pozitīvs u. tml.), taču nesaskata tā pielietojumu nevienādību risināšanā, jo nav patstāvīgi formulējis un līdz galam izpratis konkrētā modeļa ideju.

Kopumā pusaudži samērā precīzi veica sava matemātiskās modelēšanas līmeņa pašnovērtējumu. Vienīgais izņēmums ir zemākais līmenis. Uzdevumu risināšana parādīja, ka pavisam sevi apliecināt matemātiskajā modelēšanā neizdevās 23 respondentiem, tikmēr pašvērtējumā 2,6 reizes vairāk pusaudžu (59) norādīja, ka neprot modelēt. Zemais pašvērtējums varētu būt saistīts ar to, ka skolēni apzinās, ka viņu zināšanas un prasmes modelēšanā ir samērā sadrumstalotas, kas rada grūtības tās pielietot, saistīt un sintezēt kaut ko jaunu. Kā novēroja skolotāji un eksperti, skolēniem ar vājiem rezultātiem matemātikā nav izveidojies ieradums apdomāt dažādus variantus, reflektēt par paveikto, domāt radoši un elastīgi; tā vietā šie pusaudži labprātāk mācās reproduktīvi (*skat. 10. un 12. pielikumu*).

A. Kumerdanka skaidro, ka darbs pie matemātiskās modelēšanas prasmēm ir ļoti skrupulozs un prasa ilgu laiku, visbiežāk, vairākus gadus mērķtiecīga skolotāja darba un pozitīvas komunikācijas ar pusaudžiem, veidojot pārliecību, ka pieliktās pūles ir lietderīgas. Konsultējot topošos matemātikas skolotājus par pedagoģiskās prakses gaitu, viņa ir novērojusi, ka skolēni paši nereti skubina skolotāju pieturēties pie gatavu zināšanu nodošanas paradigmas: skolotājs pastāstīs, uzrakstīs uz tāfeles un skolēni to pārrakstīs. Skolēniem jāļauj ieraudzīt jēgu no tā, ka “viņi kopā dara kaut kādas lietas, ka viņi var tik galā ar problēmām, uztaisīt kādu modeli pēc aprēķinātiem parametriem, var izskaitļot, izdomāt, uztaisīt”, lai skolēns iegūst izjūtu, ka matemātika viņam noderēja, pārdomās par pāreju uz aktīvu skolēna iesaisti dalās A. Kumerdanka (*skat. 12. pielikumu*).

Definējot matemātisko kompetenci, A. Kumerdanka kā vienu no priekšnosacījumiem min prasmi lietot matemātiskos modeļus darbībā, arī tad, ja šim modelim ir no fizikas, sociālajām zinībām vai citas jomas aizgūts konteksts (*skat. 12. pielikumu*). Arī citi eksperti akcentē saikni starp matemātisko modelēšanu un starppriekšmetu saikni, pat saucot modelēšanu par šīs saiknes prototipu. Tādējādi skolēnu panākumi matemātiskajā modelēšanā ir atkarīgi no starppriekšmetu sadarbības. Pētnieki norāda, ka šī saistība var darboties arī otrādi – matemātiskās modelēšanas prioritizēšana un popularizēšana skolēniem var radīt pieprasījumu un vēlēšanos matemātiku apgūt ar starpdisciplināru, turklāt, ne tikai eksaktu kontekstu. Lai to panāktu, pētnieki min trīs stratēģijas: konceptualizāciju, kontekstualizāciju un fokusēšanos uz problēmām (Ferri, Mousoulides, 2017; Gershenfeld, 1998; Nikitina, 2006).

Matemātikas skolotāji ir novērojuši, ka pamazām notiek pāreja no matemātikas kā abstraktas zinātnes uz matemātiku kā lietišķo zinātni (*applied science*), proti, tās galvenā funkcija ir pielietojums praktisku problēmu risināšanā, analīzē, skaidrošanā, prognozēšanā, kas visas ir arī matemātiskās modelēšanas izpausmes, tādēļ nākotnē Latvijas pusaudžu matemātiskās modelēšanas prasmes varētu uzlaboties. "Arī matemātikā ir sava mode. Kādreiz modē bija uzkonstruēt parabolu un noteikt, ka tā aug vai dilst un kur krusto asis. Tagad parabolu savieno ar dzīvi un pēta parabolu kā izmesta akmens lidojuma trajektoriju," vēl vienu pārmaiņu virzībā uz matemātisko modelēšanu min skolotāja Z. Romanovska. Viņa ir novērojusi, ka līdz pat 12. klasei daļa skolēnu ½ reizinot vai dalot ar 2 abos gadījumos iegūst 1. Viņasprāt, tas notiek tādēļ, ka skolēni nav iemācījušies kritiski izvērtēt rezultātu un modelēt, jo nesaista šīs darbības ar reālo dzīvi, jo, piemēram, puse no 0,5 kg iepakojuma noteikti nav 1 kg (*skat. 10. pielikumu*).

Pusaudžu matemātiskās modelēšanas prasmes ietekmē jau no sākumskolas piekopta tradīcija, ka matemātikas uzdevumam var būt tikai viena pareizā atbilde. Eksperti novērojuši, ka matemātikas mācību līdzekļos trūkst piemērotu uzdevumu, taču, ja tādi arī parādās, sākumskolas skolotāji bieži pieņem tikai vienu atbildi un neiedziļinās skolēnu piedāvātajās alternatīvās, tādējādi skolēni netiek radināti apskatīt visus gadījumus, kas ir modelēšanas viens no būtiskiem priekšnoteikumiem. Matemātiskās modelēšanas lietojumu kavē arī skolotāju nepietiekamās prasmes lietot tehnoloģijas. Uzklausot skolotāju izteiktās bažas jaunā izglītības standarta sabiedriskajā apspriešanā, J. Vilciņš ir ievērojis, ka skolotājus mulsina standartā pieminētās digitālās iespējas, aplikācijas vai ierīces, jo "daudzi skolotāji paši ne visai tās lieto, un viņiem uzreiz nav skaidrs, kas tur ir iecerēts matemātiskajā kontekstā" (*skat. 11. pielikumu*).

5.2.2.4. Komunikācija

Atbildēm uz komunikācijas kritērijam atbilstošajiem jautājumiem Kronbaha alfa koeficienta vērtība ir 0,62 (*skat 5.24. att.*). Ja šis koeficients ir robežās no 0,6 līdz 0,7, tā tiek uzskatīta par pietiekamu skalas saskaņotības vērtību.

Reliability Statistics

Cronbach's Alpha	N of Items
,615	5

5.24. att. **Skalas saskaņotības koeficienta vērtība (Kronbaha alfa) komunikācijas prasmju uzdevumiem**

Risinot uzdevumus, gandrīz puse skolēnu apgalvo, ka reizēm izmanto dažādus informācijas avotus (47,7 %), otra populārākā atbilde ir "nekad" (40,4 %), bieži šos avotus izmanto katrs desmitais skolēns (10,4 %) un katru stundu – 1,6 % aptaujāto (*skat. 5.11. tab.*). Standartnovirze (0,71) un dispersija (0,50) ir nelielas, jo 88,1 % skolēnu atbildēja "reizēm" vai "nekad". Komentējot savas atbildes, skolēni rakstīja, ka viņu vienīgais informācijas avots matemātikā ir pašu veidotie pieraksti un ka biežāk daudzveidīgāku informācijas avotu klāstu izmanto, pildot mājasdarbus, jo tad tam pietiek laika. Jautājumā "Cik bieži Tu spēj uzdevumu pateikt saviem vārdiem, interpretēt?" atbilžu moda ir "reizēm" (108 respondenti jeb 56,0 %); otra populārākā atbilde ir "bieži" (56 respondenti jeb 29,0 %). Pārējie skolēni atbildēja "nekad" (13,5 %) un "katru stundu" (1,5 %). Viens skolēns precizēja, ka tas ir atkarīgs no uzdevuma grūtības pakāpes. Šajā jautājumā skolēniem ir vēl lielāka vienprātība: standartnovirze ir 0,67 un dispersija ir 0,45.

5.11. tabula. Skolēnu atbilžu centrālās tendences un variācijas rādītāji jautājumos par komunikācijas prasmēm

Jautājums	Mediāna (*median*)	Aritmē-tiskais vidējais (*mean*)	Moda (*mode*)	Standart-novirze (*standard deviation*)	Dispersija (*variance*)	Asimetrijas koeficients (*skewness*)
1. Cik bieži, risinot uzdevumus, izmanto dažādus informācijas avotus?	Reizēm 1	0,73	Reizēm 1	0,71	0,50	0,71
2. Cik bieži Tu spēj uzdevumu pateikt saviem vārdiem, interpretēt?	Reizēm 1	1,19	Reizēm 1	0,67	0,45	0,07
3. Teksta uzdevums, kurā jālieto divi informācijas avoti: teksts un diagramma	Lieto vienu informācijas avotu	0,92	Lieto vienu informācijas avotu	0,50	0,25	0,10
4. Cik Instagram lietotāju ir Latvijā, ja katrs devītais lieto šo aplikāciju?	Tuvu precīzajam	1,13	Tuvu precīzajam	0,93	0,86	–0,26

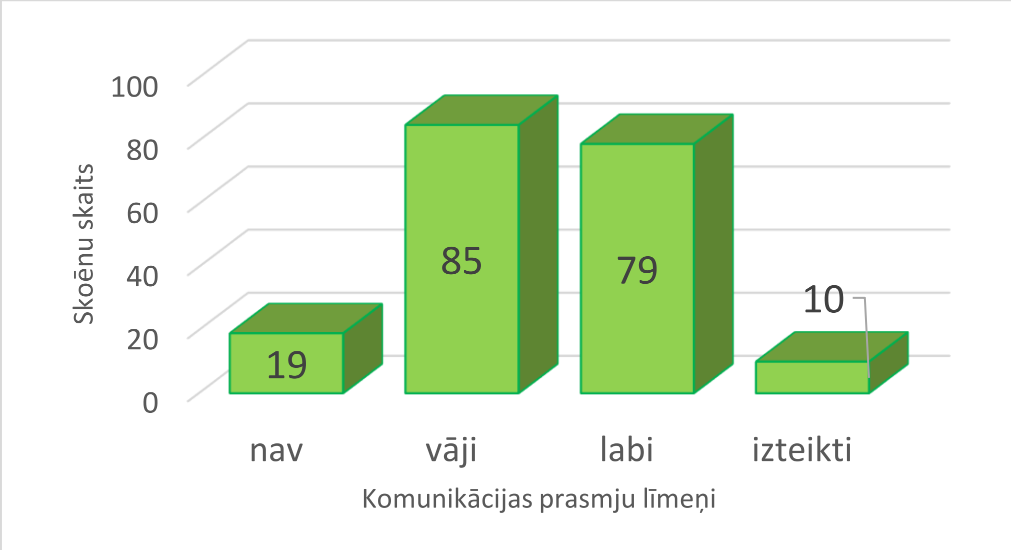
Tabulā izmantotā Likerta skala: 3 – vienmēr/ katru stundu; 2 – bieži; 1 – reizēm; 0 – nekad.

Kā viens no uzdevumiem, kurā jāizmanto prasme nolasīt informāciju, pusaudžiem tika piedāvāts tāds uzdevums, kurā ir apvienoti vismaz divi informācijas ieguves avoti: uzdevuma teksts un diagramma (*skat. 5.4. att.*). Tekstā skolēnam bija jāpamana, ka puse Latvijas teritorijas ir klāta ar mežiem un ka skujkoku mežu īpatsvars procentos tiek prasīts no visas Latvijas teritorijas, turpretī diagrammā procenti ir norādīti no visiem Latvijas mežiem.

Skolēnu atbilžu moda bija “60 %”. Šādi atbildēja 147 respondenti jeb 76,2 %. Šī atbilde atbilst vājam komunikācijas līmenim, jo liecina par prasmi darboties tikai ar vienu informācijas avotu (sektoru diagrammu) un neprasmi vienlaicīgi atrast vajadzīgo informāciju uzdevuma tekstā. 31 skolēns (16,1 %) nemēģināja risināt šo uzdevumu vai sniedza aplamu atbildi, visbiežāk, 20 %. 14 skolēni (7,2 %) ņēma vērā gan tekstā, gan diagrammā iekļauto informāciju, taču nepievērsa uzmanību sektoram “pārējie”, kas arī iekļauj tādus skujkokus kā kadiķi, tūjas, īves u. c. Viens skolēns šajā uzdevumā uzrādīja izteiktu komunikācijas līmeni, jo pievērsa uzmanību visai uzdevumā iekļautai un arī neiekļautai informācijai. No visiem jautājumiem par komunikāciju šajā skolēniem bija lielākā skolēnu vienprātība: standartnovirze ir tikai 0,50 un dispersija ir 0,25.

Pēdējais uzdevums par prasmi strādāt ar dažiem informācijas avotiem iekļāva tikai daļu uzdevuma atrisināšanai vajadzīgās informācijas: “Aptuveni katram devītajam Latvijas iedzīvotājam ir *Instagram* profils. Cik *Instagram* lietotāju ir Latvijā?” Atbilžu moda bija skaitlis 217 tūkstoši, kas liecina par to, ka šie skolēni zināja, ka Latvijā testa pildīšanas brīdī bija 1,95 miljoni iedzīvotāju. Šādu atbildi sniedza 97 respondenti jeb 50,3 %. 72 skolēni (37,3 %) nemēģināja risināt šo uzdevumu vai arī norādīja, ka šo uzdevumu nav iespējams atrisināt, jo viņiem nav zināms iedzīvotāju skaits Latvijā. Pārējie 24 skolēni atbildē ierakstīja nepabeigtu risinājumu, piemēram, “devītdaļa no 2 miljoniem”. Zīmīgi, ka šajā uzdevumā skolēnu rezultātu asimetrijas koeficients ir negatīvs (–0,26), kas varētu norādīt uz to, ka skolēniem pazīstamais un interesējošais sociālo tīklu konteksts pamudināja viņus vairāk papūlēties pie uzdevuma risinājuma (*skat. 5.9. tab.*).

Skolēnu panākumi abos komunikācijas prasmju uzdevumos parāda, ka 10 respondentiem (5,2 %) ir izteikts komunikācijas prasmju līmenis, bet 19 skolēni (9,8 %) nespēja parādīt matemātisko komunikāciju (*skat. 5.25. att.*). Pārējo 164 respondentu (85,0 %) panākumi līdzvērtīgi sadalījās starp labu un vāju līmeni. Dati ir mēreni izkliedēti, tādēļ standartnovirze ir 1,1. Tajā pašā laikā komunikācijas prasmju līmeņu sadalījumā visu līmeņu absolūtie biežumi nav krasi atšķirīgi; šiem biežumiem nav raksturīgas radikāli atšķirīgas vērtības, kā tas ir, piemēram, problēmu risināšanai, kur ir rekordliels abu zemāko līmeņu īpatsvars. Arī pašvērtējumā par komunikācijas prasmēm pusaudži būtiski pārvērtē savas spējas, jo gandrīz katrs astotais pusaudzis (12,0 %) uzskata, ka labi vai ļoti labi prot izmantot dažādus informācijas avotus, taču uzdevumā, kur jādemonstrē šīs prasmes, to nekļūdīgi spēja izdarīt tikai viens skolēns (0,5 % no visiem respondentiem).



5.25. att. **Skolēnu komunikācijas prasmju līmeņi**

Komunikācija ir viens no diviem vienīgajiem kritērijiem (otrs ir personības īpašības), kuram līmeņu sadalījumam ir negatīvs asimetrijas koeficients (–0,23), jo sadalījums pa līmeņiem ir gandrīz simetrisks, taču moda pārsniedz vidējo aritmētisko un mediānu, proti, dati ir nedaudz novirzīti pa kreisi, kas ir vērtējams kā labs panākums. Kaut gan komunikācijā ir otrs lielākais to pusaudžu īpatsvars, kuriem ir labs līmenis, skolotāji ir piesardzīgi, jo "arvien lielāks īpatsvars skolēnu kļūst noslēgti vai pāriet uz elektronisko saziņu, nelabprāt komunicējot verbāli" (*skat. 10. pielikumu*), kas ilgtermiņā rada bažas par pusaudžu spēju komunicēt ar citiem: formulēt viedokli, izstāstīt savas domas par iegūtajiem rezultātiem u. tml.

Iespējams, šīs pārmaiņas komunikācijas stilā nosaka to, ka pusaudži izteikti kritiski vērtēja savu komunikācijas līmeni. Tikai trīs pusaudži pašvērtējumā sev piedēvēja augstāko līmeni komunikācijā, kaut gan uzdevumu risināšanā šo līmeni uzrādīja 10 pusaudži. Līdzīgi dati ir arī par labu komunikācijas līmeni (56 pašvērtējumā pret 79 uzdevumu risināšanā). Vienīgi līmeņa "nav" gadījumā dati ir otrādi: uzdevumu risināšanā 19 pusaudžiem bija šis līmenis, bet pašvērtējuma jautājumos – 26 pusaudžiem.

Lai stiprinātu skolēnu matemātisko valodu, pēc skolotāju domām ir būtiski ļaut viņiem runāt par matemātiku savā starpā vai ar skolotāju, kas ir pretēja pieeja tam, ka skolas vidē parasti tiek sagaidīts klusums. Arī A. Kumerdanka dod padomu matemātikas skolotājiem ļaut skolēniem ieraudzīt pievienoto vērtību no tā, ka viņi sarunājas; tik ilgi runāt par matemātiku, kamēr skolēni paši nonāk pie labām idejām (*skat. 12. pielikumu*). Skolēnu izveidotie uzskates līdzekļi un plakāti veido klases telpā matemātisko gaisotni un attīsta gan komunikāciju ar citiem šo materiālu veidošanas procesā, gan reflektējošu komunikāciju ar sevi, kad skolēni ikdienā aplūko šos materiālus, taču ne visās skolās ir atļauts pie kabinetu sienām izvietot skolēnu darbus (*skat. 10. pielikumu*).

Skolotāji ir novērojuši, ka matemātikas mācību līdzekļos izmantotais komunikācijas veids nav piemērots pusaudžiem: skaidrojumi ir pārāk sarežģīti. "Latviešu valodā izdotajās matemātikas grāmatās lietotā valoda, skaidrojumi un uzskates materiāls ir ļoti sarežģīts; vācu valodā izdotajās grāmatās ir izvēlēta skolēniem saprotamāka valoda, it sevišķi, rūpējoties par to, lai skolēni ar zemu matemātikas līmeni varētu temata pašā sākumā uztvert pašu būtiskāko," skolotāju diskusijā teica matemātikas skolotāja G. Dzene. Otra būtiska atšķirība starp Latvijas un PISA testā vadošajām valstīm matemātikas mācību līdzekļos – Latvijā tie mērķtiecīgi neizkopj prasmi strādāt ar tekstu. "8. klašu diagnostikas darbā matemātikā atklājās, ka mūsu skolēniem ir lielas problēmas ar lasītprasmi, tādēļ atpakaļ no 10 kvadrātvienādojumu risināšanas pāriet uz tekstu, kurā, varbūt, ir jāizdara tikai divas darbības, bet skolēns nezina – kādas," situāciju raksturo skolotāja Z. Romanovska (*skat. 10. pielikumu*).

J. Vilciņš intervijā uzsver, ka skolēnu matemātiskās valodas lietošanas un plašākā izpratnē komunikācijas izkopšanā svarīga loma ir tam, kā ar viņiem komunicē skolotāji. Piemēram, cik atvērti vai konkrēti, pat ierobežojoši ir uzdevumu formulējumi, kādu informāciju saņem skolēns, ja ir daļēji pareizi atrisinājis uzdevumu utt. Otro aspektu varētu vērst par labu, mainot snieguma vērtēšanu. "Ikdienas vērtēšanā ceram jaunā līmenī pacelt formatīvo vērtēšanu. Attiecībā uz konkrētām prasmēm skolotājiem būs pieejami skolēnu darbības apraksti četros līmeņos," intervijā sola J. Vilciņš (*skat. 11. pielikumu*).

5.2.2.5. Kritiskā domāšana

Atbildēm uz kritiskās domāšanas kritērijam atbilstošajiem jautājumiem Kronbaha alfa koeficienta vērtība ir 0,66 (*skat 5.26. att.*). Ja šis koeficients ir robežās no 0,6 līdz 0,7, tā tiek uzskatīta par pietiekamu skalas saskaņotības vērtību.

Reliability Statistics

Cronbach's Alpha	N of Items
,661	5

5.26. att. **Skalas saskaņotības koeficienta vērtība (Kronbaha alfa) pamatpētījuma kritiskās domāšanas uzdevumiem**

Jautājumā "Cik bieži Tu spēj argumentēt savu risinājumu vai viedokli?" skolēnu atbilžu moda ir "reizēm" (89 respondenti jeb 46,1 %), otra populārākā atbilde ir "bieži" (75 respondenti jeb 38,9 %). Atbildes "nekad" un "katru stundu" bija gandrīz vienādi biežas (attiecīgi, 15 un 14 respondenti). Ņemot vērā lielo skolēnu vienprātību, standartnovirze ir 0,74 un dispersija ir 0,55 (*skat. 5.12. tab.*). Asimetrijas koeficients (0,11) norāda uz gandrīz simetrisku sadalījumu. Viens skolēns komentēja savu atbildi, rakstot, ka viņam ir grūtības argumentēt savu risinājumu vai viedokli skolā, taču tas veiksmīgi izdodas mājās.

5.12. tabula. Skolēnu atbilžu centrālās tendences un variācijas rādītāji jautājumos par kritisko domāšanu

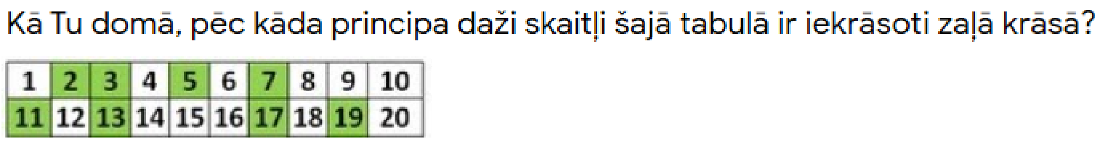
Jautājums	Mediāna (*median*)	Aritmē-tiskais vidējais (*mean*)	Moda (*mode*)	Standart-novirze (*standard deviation*)	Dispersija (*variance*)	Asimetrijas koeficients (*skewness*)
1. Cik bieži Tu spēj argumentēt savu risinājumu vai viedokli?	Reizēm 1	1,46	Reizēm 1	0,74	0,55	0,11
2. Pierādījuma uzdevums par rombu	Nav risināts	0,36	Nav risināts	0,57	0,32	1,66
3. Uzdevums par pirmskaitļu atpazīšanu	Nav risināts	0,81	Nav risināts	0,89	0,79	0,38
4. Uzdevums par pretpiemēru	Aplama atbilde	1,04	Aplama atbilde	0,67	0,45	0,27

1. jautājumā izmantotā Likerta skala: 3 – vienmēr/ katru stundu; 2 – bieži; 1 – reizēm; 0 – nekad. 2. līdz 4. uzdevumā: 3 – korekts pamatojums; 2 – daļēji pareizs; 1 – aplams mēģinājums; 0 – nav.

Tā kā tikai divi pusaudži (nepilni 5 %) izmēģinājuma pētījumā uzrādīja labu līmeni, un nevienam nebija izteikts līmenis, risinot kritiskās domāšanas uzdevumu par to, kādēļ $\sqrt{2}$ ir iracionāls skaitlis, pamatpētījumā šis uzdevums ir aizstāts ar grūtības ziņā vienkāršākiem trīs uzdevumiem, kuriem tādējādi varētu būt lielāka izšķirtspēja. Pirmais uzdevums skanēja šādi: “Četrstūra diagonāles ir vienlaikus arī četrstūra leņķu bisektrises. Kā Tu pamatotu, ka šis četrstūris ir rombs?” Uzdevums tika vērtēts četros līmeņos: nav risināts vai izteikts aplams apgalvojums; ir kļūdains vai būtiski nepilnīgs mēģinājums pamatot; ir korekts pamatojums, kurā ir nebūtiskas neprecizitātes; pareizs pamatojums.

Pierādījuma uzdevumam par rombu nav lielāka izšķirtspēja nekā izmēģinājuma pētījuma uzdevumam, jo 130 respondenti (67,4 %) nemēģināja to risināt vai uzrakstīja atbildi, kas neizriet no dotajiem apgalvojumiem vai arī nepierāda prasīto, piemēram, “Tam ir vairākas malas un stūri”, “Tam ir 90º leņķi”, “Jo diagonāles nav vienādas”, “Pēc leņķu līdzības”, “Jo tā diagonāles ir vienādas”, “Malu sadala uz pusēm” (acīmredzot, skolēns ir sajaucis leņķa bisektrisi un trijstūra mediānu). 58 respondenti mēģināja rakstīt pamatojumu, taču tajā iztrūka daudz svarīgas informācijas, piemēram, vairāki skolēni uzrakstīja, ka vajadzētu pierādīt, ka šī četrstūra diagonāles ir perpendikulāras vai ka visas tā malas ir vienāda garuma, taču neparādīja, kā to var izdarīt. Trīs skolēni uzrakstīja korektu pamatojumu, kurā bija nelieli trūkumi, piemēram, pamatojumā izmantoja vienādsānu trijstūrus, taču nepamatoja, ka tie ir savā starpā vienādi, kas ir būtiski, jo no diviem vienādsānu trijstūriem ir veidots arī deltoīds jeb "pūķis" (*skat. 5.18. att.*), kas var nebūt rombs. Divi skolēni uzrakstīja pilnīgi korektu pamatojumu: izmantojot pierādījumu ar četriem vienādiem taisnleņķa trijstūriem (ar četrstūra leņķu summu, krustleņķiem un trijstūru vienādības pazīmi *lml*) un ar leņķiem pie paralēlām taisnēm, kuras krusto trešā taisne.

Otrs uzdevums bija par skaitļu kopām – no skolēna tika sagaidīta prasme pēc astoņiem izceltiem skaitļiem atpazīt, ka tie ir pirmskaitļi (*skat. 5.27. att.*). Pareizi atbildēja 62 no 193 pusaudžiem jeb aptuveni katrs trešais aptaujātais. No tiem 37 skolēni atbildēja, ka iekrāsoti ir pirmskaitļi, viens skolēns uzrakstīja: "Šie ir *prime numbers*, es nezinu, kā pārtulkot latviski," savukārt, pārējie 24 pusaudži uzrakstīja pirmskaitļu skaidrojumu, nenosaucot tos vārdā, kas gan arī nebija prasīts. Visbiežāk lietotais skaidrojums bija oficiālā definīcija, proti, "tie visi skaitļi dalās tikai ar 1 un paši ar sevi", taču gadījās arī pa kādam radošam un matemātiski korektam skaidrojumam: "Tie ir skaitļi, kuru nevar iegūt kā divu naturālu skaitļu reizinājumu, neviens no kuriem nav skaitlis viens."

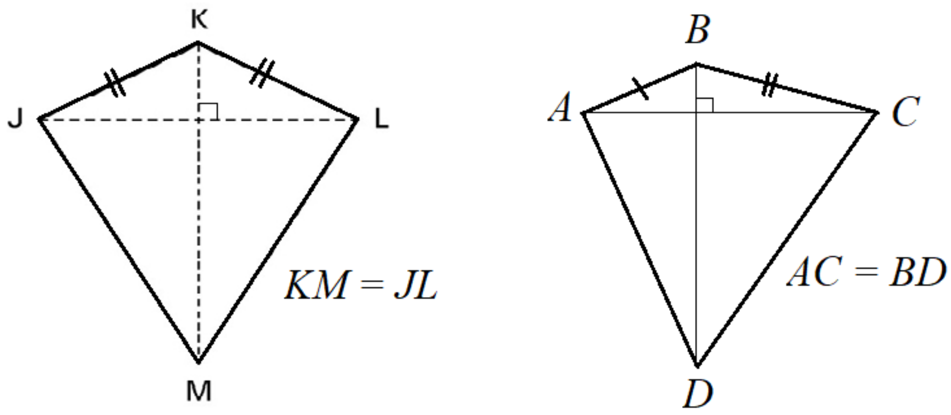


5.27. att. **Pusaudžu matemātiskās kompetences testa kritiskās domāšanas uzdevums**

Viens skolēns atbildēja: "Visi, izņemot 2, ir pirmskaitļi," kas dod vērtīgu informāciju matemātikas skolotājam par to, cik precīzi skolēni pārvalda terminoloģiju. Daži respondenti atzīmēja, ka izcelti ir nepāra skaitļi, kur rodas divi jautājumi: kādēļ šie skolēni uzskata 2 par nepāra skaitli un kādēļ viņus nemulsina tas, ka ir atzīmēti ne visi nepāra skaitļi, piemēram, 1, 9, 15 utt. ir nepāra, taču nav iekrāsoti. Viens pusaudzis atbildēja, ka iekrāsoti ir racionāli skaitļi. Ja šo vai līdzīgu atvērtā tipa jautājumu uzdotu skolēnam neanonīmi, tas būtu labs pamats reflektēt par kļūdas rašanos – vai tā ir nezināšana, neuzmanība?

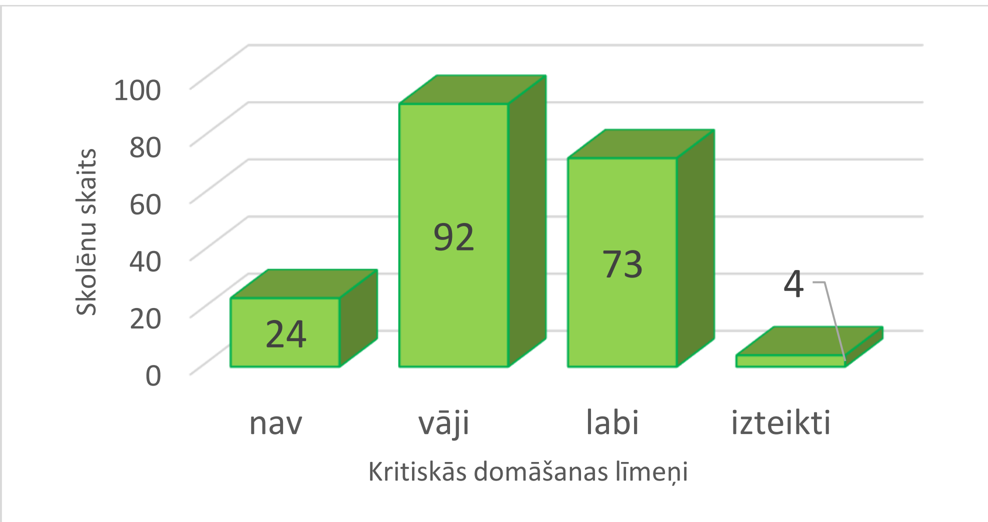
Trešajā kritiskā domāšanas uzdevumā skolēniem vajadzēja izvērtēt, vai var viennozīmīgi apgalvot, ka četrstūris, kura diagonāles ir perpendikulāras un vienāda garuma, ir kvadrāts.

Atbilžu moda ir "jā" (115 respondenti jeb 59,6 %). Gandrīz vienāds skaits skolēnu nezināja atbildi vai atbildēja "nē" (attiecīgi, 37 un 38 respondenti). Visbeidzot, trīs skolēni atbildēja noliedzoši un pamatoja savu atbildi, minot kādu pretpiemēru. Patiešām, perpendikulāras un vienāda garuma diagonāles ir arī deltoīdam un bezgalīgi daudziem patvaļīgiem četrstūriem, kuri nav kvadrāti (*skat. 5.28. att.*).



5.28. att. **Pretpiemēri uzdevumā par četrstūri ar vienādām un perpendikulārām diagonālēm**

Uzdevumu nomaiņa pamatpētījumā palielināja uzdevumu izšķirtspēju, jo ar jaunajiem uzdevumiem bija pārstāvēti visi četri līmeņi. Uzdevumam par pirmskaitļiem atbilžu standartnovirze ir 0,89, kas ir ievērojami lielāka izkliede nekā izmēģinājuma pētījuma uzdevumam par $\sqrt{2}$, kurā standartnovirze bija 0,55.



5.29. att. **Skolēnu kritiskās domāšanas līmeņi**

Apkopojot pusaudžu sniegumu visos kritiskās domāšanas uzdevumos, 4 respondentiem ir izteikts līmenis (2,1 %), 73 ir labs (37,8 %), 92 ir vājš (47,7 %), un 24 skolēni jeb 12,4 % nespēja nopelnīt kaut vienu punktu visos trijos uzdevumos (*skat. 5.29. att.*). Šī sadalījuma standartnovirze ir samērā liela – 1,4. Tāpat kā izmēģinājuma pētījumā, skolēni uzrādīja viszemāko sniegumu tieši kritiskās domāšanas uzdevumos. Turklāt kritiskajā domāšanā ir pats mazākais pusaudžu skaits ar izteiktu līmeni (4 respondenti jeb 2,1 %).

Skolēnu pašvērtējums savas kritiskās domāšanas līmenim ir ievērojami augstāks par veikumu kritiskās domāšanas uzdevumos, it sevišķi, uzdevumos ar ģeometrisku saturu. Atbilstoši pašvērtējumam 89 pusaudži uzskata, ka viņiem ir labs vai augstākais kritiskās domāšanas līmenis, taču ar trīs uzdevumu risināšanu to varēja apliecināt, attiecīgi, 5, 41 un 62 pusaudži. Pirmie divi ir dati par ģeometrijas uzdevumiem, pēdējais – par algebras uzdevumu. Iespējams, šādu situāciju rada apstāklis, ka pamatizglītības matemātikas saturā vairāk laika tiek veltīts algebrai.

Zemie rezultāti varētu norādīt uz to, ka pusaudžiem trūkst aktīvas iesaistes, jo kritiski domājošs pusaudzis ir matemātikas darītājs (*skat. 4.2.6. apakšnodaļu*). Skolotāju diskusijā izskanēja viedoklis, ka skolotājam ir ļoti jājūt, cik ilgi var ļaut skolēniem kaut ko darīt pašiem un kurā mirklī skolotājam vajag iesaistīties, piemēram, parādīt laba snieguma paraugu, palabot skolēna risinājumu vai individuāli konsultēt, ja skolēns patstāvīgi netiek galā ar uzdevumu (*skat. 10. pielikumu*). Kritiskā domāšana kā metode argumentēti un neatkarīgi izzināt patiesību un domāt patstāvīgi ir pretstats reproduktīvām mācībām, iegaumēšanai un gatavu modeļu izmantošanai. Gan starptautiskie salīdzinošie pētījumi, gan Latvijā veiktais pētījums par eksakto mācību priekšmetu stundām rāda, ka vairākums Latvijas pusaudžu matemātikas stundās darbojas reproduktīvā līmenī, tādēļ neiegūst kritiskās domāšanas prasmes (France, 2010; OECD, 2018a). Lai veidotu šīs prasmes, jaunajā standartā ir paredzēts kombinatoriku mācīt nevis kā atsevišķu tematu, bet gan kā matemātikai raksturīgu spriešanu, kurā izmantotās stratēģijas tiktu pielietotas citos tematos, līdzīgi kā caurvijas (*skat. 11. pielikumu*).

Pēc A. Kumerdankas domām, skolēnu kritiskās domāšanas prasmju (novērošanas, interpretācijas, analītiskuma, refleksivitātes) attīstību kavē skolotāju vēlme visu ļoti sīki atrunāt pa soļiem. Tas noved pie tā, ka skolēniem ir grūtības izpildīt pierādījuma uzdevumus, kas arī liecina par kritisko domāšanu, jo tie paredz atlasīt vajadzīgo informāciju, salikt faktus pareizā secībā, pamanīt, visbiežāk, vairākus spriedumu-seku elementus. A. Kumerdanka ir novērojusi, ka skolotāji pat pētnieciskajos darbos pasaka priekšā pētāmo problēmu, kaut gan to varētu formulēt skolēni paši. “Sākumskolā mēs vēl tiekam galā, bet, ja tas vidusskolēns ir krietni domājošs un oriģināls savā domāšanā, viņš var aizvilkt uz tādu pusi, kur mēs vairs nejūtamies droši," iemeslus šādai rīcībai min eksperte un iesaka skolotājiem pārvarēt šīs bailes (*skat. 12. pielikumu*).

Arī jautājumā par kritiskās domāšanas veidošanos skolotāji atsaucās uz to, ka nemitīgi nākas atskatīties uz laika ierobežojumiem, tādēļ pamatskolas klasēs, it sevišķi, 7. un 8. klasē ne vienmēr ir iespēja mācīties no daudzveidīgām situācijām, kas negatīvi ietekmē iespējas skolēniem uzkrāt pietiekami daudz faktu un pieredzes, lai varētu formulēt pretpiemēru. Šī prasme ļoti noder informācijas un starprezultātu izvērtēšanā, subjektīvu spriedumu identificēšanā, pieņēmumu apšaubīšanā, kas visas arī ir kritiskās domāšanas izpausmes. Vēl viens ierobežojošs faktors ir skolas fizikā vide, jo novērot, praktiski pārbaudīt reālās dzīves situācijās un konceptualizēt matemātikas saturu, kā to paredz augstākais kritiskās domāšanas līmenis, var tikai pietiekami plašā klases telpā, kurā skolēni var brīvi pārvietoties un strādāt grupās, netraucējot vienam otru (*skat. 10. pielikumu*).

Skolēnu anketā arī tika uzdots jautājums par skolas vides ietekmi uz matemātikas apguvi. Kaut gan atbilžu moda ir "palīdz", šajā jautājumā pusaudžu vienprātība nav tik liela kā jautājumā par skolotāja ietekmi, jo pozitīvi vides ietekmi novērtēja trešdaļa aptaujāto (67 respondenti jeb 34,7 %). Skolēniem palīdz jaunās tehnoloģijas un cits moderns aprīkojums, no kura visbiežāk tika uzsvērta interaktīvā tāfele, kas ļauj veidot un rādīt dažādas animācijas, video fragmentus u. tml. Vēl skolēniem palīdz formulu špikeris pie tāfeles, jaunas mācību grāmatas un uzdevumu krājumi, patīkama un mierīga atmosfēra, kā arī tīras, remontētas un ergonomiski iekārtotas klases. 55 pusaudži (28,5 %) neitrāli novērtēja mācību vides ietekmi un lielākoties savu atbildi neizvērsa. Katrs ceturtais pusaudzis (47 respondenti jeb 24,4 %) uzskata, ka skolas mācību vide traucē apgūt matemātiku. Visbiežāk, viņi minēja lielo troksni stundas laikā, disciplīnas trūkumu, stresu, lielo mācību tempu, depresīvo skolas interjeru, neērtu klases iekārtojumu, kad nav redzama tāfele, neērtos krēslus, ventilācijas problēmas, kā arī skolas slikto auru un mācību grāmatas – tajās jau temata pašā sākumā ir sarežģīti uzdevumi; ne visās grāmatās ir atbildes, lai varētu salīdzināt. Astotdaļai aptaujāto skolēnu (24 respondenti jeb 12,4 %) nebija viedokļa šajā jautājumā.

A. Kumerdanka uzsver, ka skolēni neprot pārnest skolas matemātikā iegūtās zināšanas uz reālās dzīves situācijām. "Statistikā runā par spēļu teoriju, loterijām un iespēju uzvarēt, bet, spēlējot "SuperBingo" pie televizora, mēs par to vairs nedomājam, jo tajā brīdī tas ir emocionāls pārdzīvojums, kaut gan mums būtu jāapzinās, ka varbūtība uzvarēt ir ļoti, ļoti maza, tādēļ no tā nebūtu jāķer kreņķi, ka man atkal nav nekā. Cilvēkam vajadzētu to apzināties," ar piemēru ilustrē eksperte (*skat. 12. pielikumu*).

5.2.2.6. Personības īpašības

Atbildēm uz personības īpašību kritērijam atbilstošajiem jautājumiem Kronbaha alfa koeficienta vērtība ir 0,67 (*skat 5.30. att.*). Ja šis koeficients ir robežās no 0,6 līdz 0,7, tā tiek uzskatīta par pietiekamu skalas saskaņotības vērtību.

Reliability Statistics

Cronbach's Alpha	N of Items
,672	5

5.30. att. **Skalas saskaņotības koeficienta vērtība (Kronbaha alfa) pamatpētījuma personības īpašību kritērijiem atbilstošajiem uzdevumiem**

5.13. tabula. Skolēnu atbilžu centrālās tendences un variācijas rādītāji jautājumos par personības īpašībām

Jautājums	Mediāna (*median*)	Aritmē-tiskais vidējais (*mean*)	Moda (*mode*)	Standart-novirze (*standard deviation*)	Dispersija (*variance*)	Asimetrijas koeficients (*skewness*)
1. Kā Tu rīkojies, ja uzdevumu neizdodas uzreiz atrisināt?	Atliek malā	2,17	Atliek malā	0,74	0,55	–0,62
2. Cik bieži, risinot uzdevumu, Tev rodas interese noskaidrot kaut ko vairāk?	Reizēm 1	0,78	Reizēm 1	0,73	0,53	0,86
3. Kā Tu rīkotos, ja ģeometrijas uzdevuma atbilde būtu negatīvs garums?	Meklētu kļūdu	2,17	Meklētu kļūdu	1,18	1,39	–1,04
4. Vai Tev rodas zinātkāre risināt atjautības uzdevumus?	Jā	1,08	Jā + atrisina	0,83	0,69	–0,15

Tabulā izmantotā Likerta skala. 1. jautājumā: 3 – pūlos izdomāt; 2 – atlieku malā; 1 – atrodu gatavu atrisinājumu; 0 – nerisinu. 2. jautājumā: 3 – vienmēr/ katru stundu; 2 – bieži; 1 – reizēm; 0 – nekad. 3. jautājumā: 3 – meklētu kļūdu; 2 – secinātu, ka ir kļūda; 1 – pajautātu; 0 – nezinu. 4. jautājumā: 3 – jā, pozitīva reakcija; 2 – jā, neitrāla vai negatīva reakcija; 1 – jā, bet nav norādīta atbilde; 0 – nē.

Atbilstoši šiem kritērijiem tika apskatīts, cik lielā mērā pusaudžiem piemīt personības īpašības, kuras pēc dažādu pētījumu datiem vairāk ietekmē panākumus matemātikā: neatlaidība, zinātkāre, patstāvība un iniciatīva (*skat. 4.2.1. apakšnodaļu*).

Lai novērtētu skolēnu **neatlaidību**, tika uzdots jautājums par skolēnu rīcību, ja uzreiz neizdodas atrisināt kādu uzdevumu. Atbilžu moda bija "atlieku malā, lai pēc brīža turpinātu risināt" (87 respondenti jeb 45,1 %), kas ir racionāla mācīšanās stratēģija un kas liecina par lielu neatlaidību (*skat. 5.13. tab.*). Viens skolēns komentēja savu atbildi šādi: "Atlieku malā, lai pēc brīža turpinātu risināt, iespējams, lūdzu palīdzību, bet ne pateikšanu priekšā." Vairāki skolēni norādīja, ka viņu neatlaidība ir atkarīga no konteksta, piemēram, "Pārbaudes darbā atlieku malā un pēc tam pildu", "Ja uzdevums nav interesants, vispirms to atlieku malā, pēc tam centīšos pavisam to nerisināt, ja to nepamana" vai arī "Atkarīgs no uzdevuma un no mana garastāvokļa".

Vairāk nekā trešdaļa skolēnu (69 respondenti jeb 35,8 %) atbildēja, ka pūlētos izdomāt atrisinājumu. Vēl 19 pusaudži paši nepūlētos atrisināt šo uzdevumu, jo paļaujas, ka viņiem palīdzēs skolotājs vai klasesbiedri. Šie respondenti ierakstīja ļoti kolorītus komentārus, tostarp "Mēģinu izdomāt, kamēr vai nu izdomāju, vai sadusmojos un pametu malā. Reizēm jautāju palīdzību tētim vai draugiem" vai "Pajautāju Anatolijam". Ņemot vērā, ka pārliecinošs vairākums jeb 156 respondenti (80,8 %) atbildēja, ka uzreiz vai vēlāk atgrieztos pie uzdevuma un risinātu to vēlreiz, standartnovirze (0,74) un dispersija (0,55) ir salīdzinoši neliela. Pusaudži ļoti augstu novērtēja savu neatlaidību, tādēļ pa kreisi no vidējā aritmētiskā atrodas tikai 12,3 % datu un asimetrijas koeficients ir negatīvs (–0,62).

Vērtīgu informāciju par mācīšanās stratēģijām kopumā un konkrētāk neatlaidību var iegūt no atbildēm uz jautājumu, kā skolēns rīkotos, ja, risinot ģeometrijas uzdevumu, iegūtu atbildi, ka malas garums ir negatīvs skaitlis. Pamatpētījuma dalībnieki bijuši ļoti apzinīgi, jo moda ir apņemšanās meklēt risinājumā kļūdu vai atrisināt uzdevumu no sākuma (117 respondenti jeb 60,6 %). Šie skolēni dažādi komentē savu rīcību, taču visām atbildēm vienojošais ir apņēmība atrast un novērst kļūdu savā risinājumā vai, varbūt, uzdevuma tekstā: "Pārrēķinātu vai secinātu, ka šāda ģeometriska figūra neeksistē", "Pārbaudītu savu risinājumu, vai, ja atrisinājums ir iegūts no kvadrātsaknes, tad izmantotu otru rezultātu, kurš ir pozitīvs", "Parēķinātu uzdevumu, pārbaudītu, vai nav kļūdas uzdevumā", "Pārbaudītu katru soli no beigām līdz sākumam, kamēr es atrastu vietu, kur kļūdījos. Ja tas neizdotos, tad es lūgtu palīdzību skolotājai", "Risināšu visu no jauna, uz jaunas lapas un uzmanīgāk, lai viss ir kārtīgi un lai es pārliecinātos, ka nepieļāvu kļūdu jau no paša sākuma", kā arī "Izmantotu citu formulu, lai aprēķinātu malas garumu".

Otra biežākā atbilde ir dažādos veidos izteikts pretstats: šie skolēni nepieliktu pūles, lai noskaidrotu, kas par lietu (37 respondenti jeb 19,2 %). Skolēnu pašu vārdiem: "Nezinātu, ko darīt", "Padotos", "Raudātu" u. tml. 29 respondenti (15,0 %) konstatētu, ka tā ir kļūda, taču nemeklētu, kā tā ir radusies, piemēram, "Nevar būt negatīvs rezultāts", "Tas nav iespējams, tā ka varētu būt kļūda ar zīmēm" vai ļoti attapīgais, taču ne tas neatlaidīgākais "Pieliktu vēl vienu svītru negatīvajam skaitlim". Arī atbildēs uz šo jautājumu izpaudās tas, ka skolēnu rīcība ir atkarīga no tā, kādā kontekstā uzdevums ir uzdots: “Ja tas ir kontroldarbā, tad pārrēķināšu, ja parasts uzdevums no grāmatas – došos pie nākamā uzdevuma.” Šī jautājuma atbilžu sadalījuma asimetrijas koeficients ir –1,04, kas norāda uz būtisku nobīdi pa labi, jo gan mediāna, gan moda ir skolēna centieni atrast kļūdu, tikmēr vidējais aritmētiskais atbilst rīcībai, kur kļūda tiek tikai konstatēta. Pusaudžu reakcijas aprakstītajā situācijā ir dažādas, un tās visas ir samērā vienmērīgi pārstāvētas, tādēļ standartnovirzes (1,18) un dispersijas (1,39) vērtības ir samērā lielas (*skat. 5.13. tab.*).

Arī vairāki citi anketas jautājumi bija vērsti uz to, lai novērtētu pusaudži neatlaidību. Pašrefleksijas jautājumu blokā skolēniem jautāts, kā viņi rīkotos, ja atklātos, ka viņu izvēlētais risināšanas paņēmiens izrādās nederīgs. Divas trešdaļas skolēnu atbildēja, ka risinātu uzdevumu vēlreiz ar citu metodi vai meklētu kļūdu, kas norāda uz lielu mērķtiecību. Tikai katrs piektais skolēns atbildēja, ka ignorētu uzdevumu.

Zinātkāre mērīta ar jautājumu, cik bieži, risinot uzdevumu, skolēnam rodas interese noskaidrot vai aprēķināt vēl kaut ko, kas nav prasīts uzdevumā. Atbilžu moda ir “reizēm” (100 respondenti jeb 51,8 %), otra populārākā atbilde ir “nekad” (71 respondents jeb 36,8 %). Pārējie skolēni atbildēja “bieži” (16) un “katru stundu” (6). Viens skolēns atbildēja: “Gandrīz nekad, vienīgi, ja tas ir algebras uzdevums.” Atbilžu standartnovirze (0,73) un dispersija (0,53) ir salīdzinoši nelielas, kas ir izskaidrojams ar to, ka gandrīz 90 % atbildēja “reizēm” vai “nekad”. Tā kā šajā pašvērtējuma jautājumā pusaudži samērā kritiski novērtēja savu zinātkāri, asimetrijas koeficients ir pozitīvs un samērā liels (0,86), dati ir nobīdīti pa kreisi.

Vēl viens uzdevums, kur izpaužas zinātkāre, bija šāds: skolēnam prasīts apskatīt šo attēlu un pateikt, vai viņam rodas zinātkāre pārbaudīt, kāds rezultāts sanāk pēdējā rindiņā (*skat. 5.31. att.*). Šis uzdevums ļoti polarizēja skolēnu viedokļus, jo gandrīz trešdaļu veidoja atbildes “nē”, “jā” bez atbildes un “jā” ar atbildi (attiecīgi, 59, 60 un 74 respondenti). Šeit apzināti ir nodalītas divas apstiprinošās atbildes, jo pirmā liecina tikai par hipotētisku zinātkāri, savukārt, otrā ir pamatota ar rīcību.

$$1 \times 8 + 1 = 9$$
$$12 \times 8 + 2 = 98$$
$$123 \times 8 + 3 = 987$$
$$1234 \times 8 + 4 = 9876$$
$$12345 \times 8 + 5 = 98765$$
$$123456 \times 8 + 6 = 987654$$
$$1234567 \times 8 + 7 = ?$$

5.31. att. **Ilustrācija uzdevumam, ar kuru mērīta pusaudžu zinātkāre**

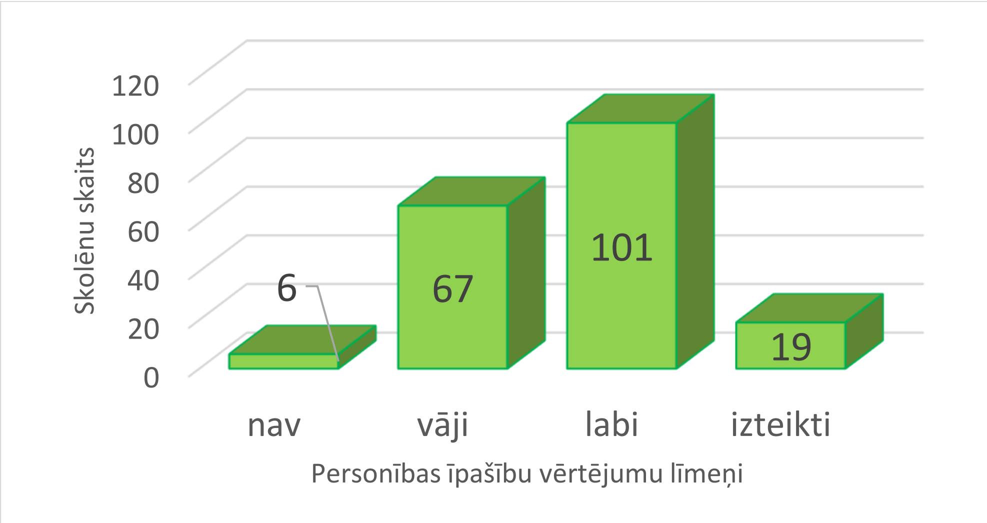
Skolēnu komentāri par šo uzdevumu bija samērā netriviāli un atsevišķas izpētes vērti. Daļai skolēnu zinātkāre neradās tādēļ, ka uzdevums iepriekš bija manīts sociālajos tīklos vai arī, viņuprāt, bijis pārāk viegls: “Nē, jo skaitli var uzreiz saprast.” Kāds cits skolēns atbildēja noliedzoši, taču ar būtisku piebildi: “Nē, bet es saprotu, ka rezultāts ir 9876543.” Daži skolēni saistīja interesi ar mirkli, kad pamanīja likumsakarību: “Radās neliela interese, kad saskatīju sakarību.” Citi skolēni to nepamanīja, tādēļ veica aprēķinus: “Jā, bet arī nedaudz atgrūž gribēšanu tas, ka ir lieli skaitļi.” Vēl kāds skolēns veica aprēķinus un tikai tad pamanīja, ka to, šķiet, varēja nedarīt. Skolēnu atbildēs parādījās arī pašpārliecības trūkums, tostarp “Ja mana loģika ir pareiza, kas ir ļoti reti, tad ir 9876543”. Nedaudz lielāks pārsvars bija tiem pusaudžiem, kuri izvēlējās noskaidrot rezultātu, tādēļ sadalījums ir nedaudz nobīdīts pa labi un asimetrijas koeficients ir nebūtiski zem nulles (–0,15).

Anketā ir iekļauti vairāki jautājumi, kas ļauj novērtēt skolēnu **patstāvību**. Katrs astotais pusaudzis atzīst, ka, nonākot strupceļā, meklētu skolotāja vai klasesbiedru palīdzību. Vairākums aptaujāto pusaudžu izvēlas patstāvīgi plānot un uzraudzīt savu darbību. Jautājumā, kā matemātikas skolotājs Tev palīdz vai traucē apgūt matemātiku, atbilžu moda ir “palīdz” – tā uzskata divas trešdaļas aptaujāto (128 respondenti jeb 66,3 %). Pieņemot palīdzību, pusaudži prot saglabāt patstāvību un labprātāk izvēlas domāt paši, tādēļ no skolotājiem lūgtā palīdzība izpaužas kā skaidrošana, mācību organizēšana tā, lai skolēni paši nonāktu pie vajadzīgajiem secinājumiem, pavedieni uzdevuma risinājumā, individuālas konsultācijas, dažādu risināšanas paņēmienu apspriešana, kas ļauj izvēlēties skolēnam ērtāko un saprotamāko.

31 pusaudzis jeb 16,1 % atbildēja, ka ir spiesti būt patstāvīgi, jo skolotājs traucē apgūt matemātiku. Šo skolēnu atbildes bija daudz emocionālākas, izvērstākas un arī savstarpēji gana pretrunīgas. “Man liekas, ka pārāk ilgi māca vienu tēmu, un tas iekavē mūs izņemt visas tēmas. Skolotāja dusmojas uz mums, lai gan pati *maļ* vienu un to pašu visu laiku, kas liek apjukt kontroldarbos.” “Māca haotiski un nesaprotami.” “Pēc manām domām, viņa neizskaidro visiem, kuri nesaprot, un viņa iet uz priekšu ar uzdevumiem, pat ja tikai viens cilvēks saprot, ko dara.” 23 skolēniem ir neitrāla attieksme šajā jautājumā. Arī šai skolēnu grupai bija raksturīgi izvērsti pamatojumi, kādēļ izvēlēta tieši šāda atbilde. “Skolotāja man bieži palīdz, kad jautāju, bet nejūtu īsti, ka viņa vēlētos man baigi iemācīt.” “Skolotāja nenāk pie mums, tāpēc ne traucē, ne palīdz.” “Skolotāja uz jautājumiem atbild, ka vienkāršāk paskaidrot vairs nemāk.” “Man ir neitrāla attieksme, jo skolotāja visiem izskaidro jauno saturu, es to saprotu un tālāk palīdzību man nevajag. Dažreiz traucē ar savu nevajadzīgi skaļo un nervozo runāšanu.” 10 skolēni neatbildēja uz šo jautājumu.

Aptaujātie skolēni mācās skolā, kur no pilnveidotā mācību satura projekta *Skola2030* piedāvātajām četrām caurviju prasmēm tika aprobēta tieši pašvadītas mācīšanās caurvija, kas varēja ietekmēt skolēnu patstāvības līmeni.

Lielākā daļa aptaujāto pusaudžu (117 jeb 60,6 %) atbildēja arī uz neobligātajiem jautājumiem, demonstrējot **iniciatīvu** un uzcītību katru darbu, arī aptaujas pildīšanu, izdarīt pēc iespējas pamatīgām un kvalitatīvāk. Vairāki skolēni uzsvēra, ka viņu ierosinātās idejas bieži netiek praktiski ieviestas dzīvē, kas mazina viņu motivāciju. Viens pusaudzis situāciju matemātikas stundās raksturoja šādi: "Ir skolēni, kuri var ļoti ātri atrisināt visus uzdevumus, bet ir spiesti sēdēt un ilgi gaidīt, kamēr skolotājs vēl skaidro pirmo uzdevumu pārējiem. Tas ir ļoti slikti, jo tā šie gudrākie bērni nevar attīstīt savas zināšanas tālāk, pat ja ir spējīgi."



5.32. att. **Skolēnu personības īpašību vērtējumu līmeņi**

Rezumējot skolēnu sniegumu visos četros uzdevumos, kur izpaužas personības īpašības, ir redzama pozitīva aina, kur 120 respondentiem jeb 62,3 % ir labs vai izteikts līmenis neatlaidībā un zinātkārē (*skat. 5.32. att.*). Tā kā šo uzdevumu kopvērtējuma moda (7 no 11 maksimāli iespējamajiem punktiem) pārsniedz mediānu (6,3) un vidējo aritmētisko (6,2), šī sadalījuma asimetrijas koeficients ir negatīvs ar lielāko absolūto vērtību, salīdzinot ar citiem kritērijiem (–0,38). Šo datu interpretācijā ir būtiski ņemt vērā izmēģinājuma pētījumā gūto atziņu: skolēni ne vienmēr prot objektīvi un precīzi izvērtēt savu darbību. Arī pamatpētījumā starp skolēnu neatlaidību, paturpinot skaitļu virkni, un pašvērtējumu par viņu neatlaidību nav korelācijas ($r \approx 0,03$).

Uz to, ka pusaudžu pašvērtējums viņu personības īpašībām ir krasi subjektīvs, norāda arī šādi dati: tikai 6 skolēni uzskata, ka ir zinātkāri, bet praktiskā uzdevumā zinātkāri demonstrē 74 skolēni, savukārt, savu zinātkāri ar zemāko līmeni novērtēja 71 pusaudzis, kaut gan uzdevumos tādu līmeni uzrāda tikai 6 respondenti. Šī savā ziņā inversā situācija apstiprina pusaudžu vecumposma īpatnību īpaši kritiski izvērtēt sevi un ignorēt stiprās puses; tā ir emocionālā aizsardzība pret potenciālu kritizēšanu, tādēļ pusaudzis izvēlas sevis novērtēt zemāk (*skat. 2.1. apakšnodaļu*).

Kā jau minēts, seši skolēni nespēja savākt kaut vienu no 11 punktiem, kurus varēja nopelnīt uzdevumos, kur izpaužas personības īpašības. Šī matemātiskās kompetences kritērija uzdevumu rezultātiem konstatēta pati lielākā standartnovirze (1,92), jo vairākos jautājumos skolēnu viedokļi bija krasi polarizēti. Personības īpašību (neatlaidība, zinātkāre, patstāvība un iniciatīva) uzdevumos pusaudži uzrādīja pārliecinoši augstāko vidējo līmeni starp visiem matemātiskās kompetences kritērijiem. Šajā kritērijā ir pats lielākais pusaudžu skaits ar labu līmeni (101 respondents jeb 52,3 %) un vismazākais pusaudžu skaits ar līmeni “nav” (6 respondenti jeb 3,1 %).

Pēc skolotāju domām, matemātika attīsta tādas īpašības kā pacietība, mērķtiecība, neatlaidība, spēja koncentrēties, prasme kritiski izvērtēt. Ja skolēns sarežģītākus matemātikas uzdevumus uzreiz atliek malā, tad arī citās dzīves situācijas, sastopoties ar grūtībām, visticamāk, izvēlēsies padoties, un otrādi – ja ir pieradis censties, meklēt vajadzīgo formulu, izmēģināt dažādus risināšanas paņēmienus, tad arī citās situācijās izpaudīsies tādas rakstura īpašības kā neatlaidība un mērķtiecība. Nemitīgi skaidrojot skolēniem šādas likumsakarības, skolēnu neatlaidība un iniciatīva matemātikā būtiski uzlabojas (*skat. 10. pielikumu*).

Kaut gan pusaudži uzrādīja ļoti labu sniegumu attiecībā uz personības īpašībām, skolotāju fokusgrupas diskusijā un ekspertu intervijās identificēti vairāki kritiskie brīži, kad pastāv risks pazaudēt skolēnu zinātkāri, neatlaidību un iniciatīvu mācībās. Pirmais no tiem ir jau sākumskolā, kad pēc J. Vilciņa un matemātikas skolotāju domām matemātika pārāk agri tiek padarīta abstrakta, formalizēta.

“Kāpēc kādreiz matemātiku visi zināja tik labi un tagad – sliktāk? Kādreiz mācīja viens maiss plus divi maisi ir trīs maisi, bet tagad 1. klasē māca 1 + 2 = 3. Tas 1 un 2 bērnam neizsaka pilnīgi neko, un līdz ar to viņš nesaprot, kā no tā rodas 3, bet maisus spēj iztēloties un saprast būtību,” skolotāju diskusijā skaidroja A. Sokolova (*skat. 10. pielikumu*). J. Vilciņš min piemēru, kur skolēnam par pareizi izsecinātu atbildi, bet tādu pierakstu, kas skolotājam varētu nebūt tīkams, nereti nākas saņemt negatīvu vērtējumu, kas sākumskolēnos rada neizpratni, negatīvas emocijas un nepatiku pret matemātiku (*skat. 11. pielikumu*).

Otrs kritiskais brīdis ir pāreja no sākumskolas uz pamatskolu. “Vai neiznāk tā, ka pirmos gadus matemātiku māca skolotājs ar filozofiju “Viņi neko nevar izdomāt, es pasniegšu gatavu”, un 4. vai 5. klasē viņiem nāk skolotāja ar konceptu “Viņi visu var izdomāt paši”,” intervijā skaidro J. Vilciņš (*skat. 11. pielikumu*). Trešais brīdis ir visa 6. klase, jo gandrīz viss mācību gads tiek veltīts skaitļošanas prasmēm, kas pēc skolotāju vērojumiem pat ar daudzveidīgu mācību metodiku ļoti nogurdina skolēnus, kas mazina motivāciju apgūt matemātiku un samazina bērnu dabisko zinātkāri. Tūdaļ pēc tam seko 7. klases saturs ar ātru abstrakcijas eskalāciju un nezināmo ieviešanu līdz tematam par polinomiem, kur ir gandrīz tikai darbs ar nezināmajiem (*skat. 10. pielikumu*).

A. Kumerdanka uzsver, ka skolēnu interesi par matemātiku vairo sociāli atbildīgi uzņēmumi, piemēram, “Latvijas valsts meži”, kas izstrādā dažādus ar matemātiku saistītus uzdevumus, Latvijas banka ar interaktīvu finanšu izglītības un informācijas centru “Naudas pasaule”, “Latvijas dzelzceļš” ar resursu mūsdienīgai un pieredzē balstītu eksakto mācību priekšmetu apguvei steamup.lv un daudzi citi. “Vēl apdrošināšanas kompāniju piedāvājumu izvērtējums, kas ir reāla situācija. Mēs arī kā pieaugušie salīdzinām. Īstenībā man tas paņem diezgan daudz laika, lai es varētu atrast visjēdzīgāko piedāvājumu. Tieši tāpat kā kredītpiedāvājumi, līzings ar atlaidi vai bezprocentu līzings bez atlaides,” par topošo matemātikas skolotāju praktisko darbu, kura mērķis ir sarīkot nodarbību matemātikā ārpus klases, intervijā stāsta A. Kumerdanka. Šāda mācīšanās, kur skolēns var kaut ko izdarīt un izspriest, rada pilnīgi citu interesi (*skat. 12. pielikumu*).

5.2.2.7. Pašrefleksija

Atbildēm uz pašrefleksijas kritērijam atbilstošajiem jautājumiem Kronbaha alfa koeficienta vērtība ir 0,73 (*skat 5.33. att.*). Ja šis koeficients ir robežās no 0,7 līdz 0,8, tā tiek uzskatīta par pietiekamu skalas saskaņotības vērtību.

Reliability Statistics

Cronbach's Alpha	N of Items
,734	5

5.33. att. **Skalas saskaņotības koeficienta vērtība (Kronbaha alfa) pašrefleksijas jautājumu skalām**

Jautājumā, vai pusaudži var atrisināt jebkuru matemātikas uzdevumu, atbilžu moda ir “nē” (*skat. 5.14. tab.*). Tā atbildēja 99 respondenti jeb 51,3 % aptaujāto. Skolēni savu atbildi pamatoja ar to, ka “neesmu tik gudrs/-a”, “nav tik lielas zināšanas matemātikā”, “dažreiz nesaprotu uzdevumus”. Vairāk nekā trešdaļa pusaudžu (38,3 %) izteica šaubas, ka var to izdarīt, visbiežāk, skaidrojot to tā, ka noteikti varētu atrisināt uzdevumus par tematiem, kuri jau ir apgūti, bet grūtības varētu rasties ar vēl neapgūtiem uzdevumu risināšanas paņēmieniem, jēdzieniem (viens pusaudzis konkretizēja, ka nevarētu atrisināt uzdevumus par logaritmiem). Katrs desmitais pusaudzis (10,4 %) atbildēja, ka var atrisināt jebkuru matemātikas uzdevumu, un argumentēja to ļoti dažādi, tostarp, ka vajag kārtīgi iedziļināties uzdevumā un veltīt risināšanai pietiekami daudz laika. Kā norādīja respondenti vispārīgo jautājumu sadaļā testa noslēgumā, lielais praktiska satura uzdevumu skaits paildzināja testa pildīšanu, jo skolēniem nācās pamatīgi iedziļināties, atbildes, lielākoties, nebija acīmredzamas, taču rezultātā vairākumam aptaujāto radās lielāka pārliecība par sevi un par spējām atrisināt jebkuru matemātikas uzdevumu. Tā kā tikai 10,4 % atbildēja “jā”, standartnovirze (0,67) un dispersija (0,45) nav lielas un dati ir nobīdīti pa kreisi – asimetrijas rādītājs ir 0,69.

5.14. tabula. Skolēnu atbilžu centrālās tendences un variācijas rādītāji jautājumos par pašrefleksiju

Jautājums	Mediāna (*median*)	Aritmē-tiskais vidējais (*mean*)	Moda (*mode*)	Standart-novirze (*standard deviation*)	Dispersija (*variance*)	Asimetrijas koeficients (*skewness*)
1. Vai Tu vari atrisināt jebkuru matemātikas uzdevumu?	Nē	0,60	Nē	0,67	0,45	0,69
2. Kā Tu rīkotos, ja risinājuma gaitā atklātos, ka Tevis izvēlētais risināšanas paņēmiens noved strupceļā	Pār-risinātu	1,47	Pār-risinātu	0,81	0,66	–1,06
3. Izdari secinājumus no divām nevienādībām	Neko/ aplami	0,70	Neko/ aplami	0,89	0,79	0,76
4. Formulē pārdomas par “pierādījumu”, ka 2 = 1	Nav pārdomu	0,41	Nav pārdomu	0,71	0,50	1,70

Tabulā izmantotā Likerta skala. 1. jautājumā: 3 – jā; 2 – ne visus; 1 – nezinu; 0 – nē. Pārējos jautājumos: 3 – aktīva rīcība, pareiza atbilde vai secinājums; 2 – mēģinājums, kuram trūkst iniciatīvas; 1 – vienaldzīga, atsvešināta attieksme; 0 – ignorē situāciju, nav pārdomu.

Pretstatā iepriekšējā jautājumā izskanējušām šaubām un paškritikai, lūgti novērtēt savu matemātisko prasmju līmeni, pusaudži ir daudz pozitīvāki. Visbiežākā atbilde ir “labs līmenis” (74 respondenti jeb 38,3 %). Argumentējot šo atbildi, skolēni rakstīja tādus pamatojumus kā “Pēc manām domām, mans līmenis ir labs, jo es ikdienas situācijās izmantoju matemātikas zināšanas", "Ikdienas situācijās es labi risinu, bet nesaprotu ko daru stundās". Šīs atbildes norāda arī uz samērā pieticīgām prasībām pret sevi, kas ļauj izvēlēties atbildi "labs līmenis". Ceturtdaļa aptaujāto (49) atbildēja, ka viņu matemātisko prasmju līmenis ir viduvējs. 35 skolēni savu prasmju līmeni novērtēja kā zemu. Katrs sestais pusaudzis (31) uzskata, ka viņam nav matemātisko prasmju, skaidrojot, ka neko nesaprot matemātikas stundās, ka rezultāts gandrīz vienmēr ir nepareizs. Trīs skolēni atbildēja "augsts", jo "spēju izrēķināt jebkāda veida uzdevumu". Viens skolēns neatbildēja uz šo jautājumu.

Pārliecinošs vairākums pusaudžu (130 respondenti jeb 67,4 %) atbildēja, ka gadījumā, ja viņu izvēlētais risināšanas paņēmiens noved strupceļā un neļauj tikt pie atbildes, viņi rīkotos aktīvi: sāktu risināt ar citu metodi, pārrēķinātu, meklētu kļūdu savā risinājumā. Ņemot vērā tik pozitīvo pašvērtējumu, dati ir būtiski nobīdīti pa labi, tādēļ asimetrijas koeficients ir pēc moduļa liels, negatīvs skaitlis (–1,06). 24 aptaujātie (12,4 %) paļautos uz skolotāja vai klasesbiedru palīdzību. Katrs piektais pusaudzis (20,2 %) ignorētu šo uzdevumu, padotos un reaģētu vienaldzīgi vai, gluži pretēji, izteikti emocionāli: kristu panikā, raudātu, dusmotos vai lamātos. Atbilžu sadalījums ir nebūtiski vienmērīgāks nekā iepriekšējā jautājumā, kas izskaidro nedaudz lielāku standartnovirzes un dispersijas vērtību (attiecīgi, 0,81 un 0,66).

Skolēnu pašrefleksijas novērtēšanai tika iekļauti divi uzdevumi, kuros no skolēna tika sagaidīta prasme izvērsti un racionāli aprakstīt, ko var mācīties no piedāvātajām situācijām. Pirmajā no tām skolēniem jautāts, ko viņi secina no divām skaitliskām nevienādībām $9^2 > 9$ un $0{,}9^2 < 0{,}9$. Atbilžu moda bija "neko" vai kāds aplams apgalvojums, piemēram, ka viena no nevienādībām ir aplama (111 respondenti jeb 57,5 %). Šo pusaudžu atbilžu izpēte rāda, ka vairākumam aptaujāto skolēnu nav skaidrs, ko nozīmē izdarīt secinājumus, kaut gan tā ir viena no prioritārām prasmēm visos eksaktajos mācību priekšmetos (fizikā, ķīmijā, bioloģijā un pirms tam dabaszinībās). Lielākoties, pusaudži aizstāj mazāk izprotamo jēdzienu "secinājumi" ar uzdevuma teksta pārfrāzēšanu, kas saskan ar D. Kānemana aprakstīto domāšanas īpatnību nezināmo vai neskaidro aizstāt ar līdzīgu, bet labāk zināmo (Kahneman, 2011).

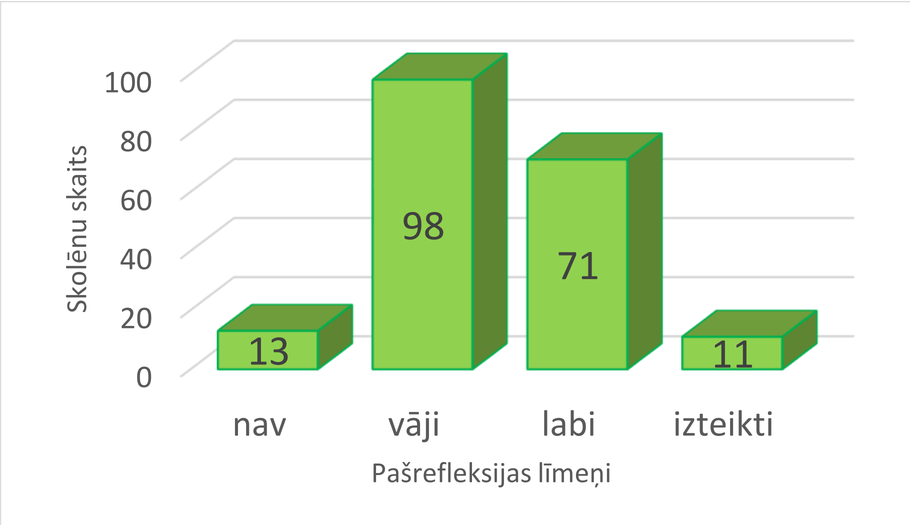
Vēl 47 respondenti (24,4 %) mēģināja vispārināt doto situāciju, taču darīja to neprecīzi. Tipiskākā neprecizitāte ir apgalvojums, ka, reizinot divas decimāldaļas, reizinājums vienmēr ir mazāks nekā dotie skaitļi, taču tas neizpildās decimāldaļām, kuras ir lielākas nekā 1. Piemēram, $2{,}5 \cdot 2{,}5 = 6{,}25$, taču 6,25 nav mazāks nekā 2,5. Arī viens skolēns, kurš izdarīja šķietami vairāk un konkretizēja, ka šī decimāldaļa ir mazāka nekā 1, tomēr neņēma vērā, ka negatīvas decimāldaļas kvadrāts pārsniedz pašu skaitli, piemēram, $(-0{,}9)^2 = 0{,}81$ jeb $-0{,}9 < (-0{,}9)^2$. Otra biežākā neprecizitāte ir secinājumā, ka vesela skaitļa kvadrāts vienmēr ir lielāks nekā pats skaitlis, taču tas nav patiesi veseliem skaitļiem 0 un 1. Šie piemēri norāda uz to, ka skolēni uztvēra uzdevuma ideju, taču viņiem nav pietiekamu matemātiskās komunikācijas prasmju korekti izklāstīt savu domu vai pietrūkst modelēšanas pieredzes iedomāties par visām situācijām. 32 respondenti balstīja savus secinājumus tikai uz konkrētiem diviem piemēriem. Trīs pusaudžiem izdevās formulēt matemātiski korektus secinājumus. Divi skolēni konkretizēja, ka šī uzdevuma kontekstā decimāldaļām veselo ir 0, un viens skolēns uzrakstīja, ka decimāldaļai jābūt intervālā (0; 1).

$$
\begin{gathered}
a = b \\
a^2 = ab \\
a^2 - b^2 = ab - b^2 \\
(a+b)(a-b) = b(a-b) \\
(a+b) = b \\
b + b = b \\
2b = b \\
2 = 1
\end{gathered}
$$

5.34. att. **Pašrefleksijas noteikšanā izmantotais "pierādījums" tam, ka 2 = 1**

Pēdējais uzdevums pašrefleksijas novērtēšanai bija tāds, ka pusaudzim piedāvāja izpētīt "pierādījumu" tam, ka 2 = 1, un uzrakstīt savas pārdomas (*skat. 5.34. att.*). Uzdevuma formulējumā apzināti netika iekļauts vārds "kļūda", neuzvedinot uz pareizo domu un ļaujot skolēnam patstāvīgi aprakstīt savu domu gaitu. Atbilžu moda bija "nezinu" (136 respondenti jeb 70,5 %). Skolēni papildināja savu atbildi ar tādiem komentāriem kā "kādā veidā?", "ļoti dīvaini", "maģija" u. tml. Gandrīz katrs piektais pusaudzis (38 respondenti jeb 19,7 %) fokusējās uz pēdējo apgalvojumu, rakstot, ka 2 nav vienāds ar 1, taču nesniedza papildus komentārus. 16 pusaudži konstatēja, ka šajos pārveidojumos ir kāda kļūda, taču nemācēja to identificēt.

Jāpiebilst, ka patiesībā "pierādījumā" ir pieļautas pat trīs līdzīgas kļūdas, proti, vienādojuma abas puses ir reizinātas vai dalītas ar algebrisku izteiksmi, par kuru nav pateikts, ka tā nevar būt vienāda ar 0, tādējādi tie nav ekvivalenti pārveidojumi, kur no patiesa vienādojuma var iegūt aplamu. Jau pats pirmais pārveidojums, kad vienādojuma $a = b$ abas puses reizina ar a, nav ekvivalents pārveidojums, ja nav piebildes, ka a nav 0. Tāpat kļūda ir vienādojuma $(a + b)(a - b) = b(a - b)$ abas puses dalīt ar $(a - b)$, jo "pierādījums" sākas ar apgalvojumu $a = b$, no kurienes izriet, ka $a - b = 0$, un reālo skaitļu kopā dalīšana ar 0 nav definēta. Visbeidzot, arī no pēdējā vienādojuma $2b = b$ neizriet vienādība $2 = 1$, jo b tikpat labi var būt vienāds ar 0, tādējādi sanāk skaitliska vienādība $2 \cdot 0 = 0$, kas ir patiesa. Diviem respondentiem izdevās identificēt pa vienai no šīm kļūdām, savukārt viens pusaudzis atklājas visas "pierādījuma" nepilnības, kas atbilst izteiktam pašrefleksijas līmenim, jo liecina par skolēna spēju visās mācību situācijās patstāvīgi un objektīvi izvērtēt, kas jau izdodas un ko vajag uzlabot.



5.35. att. **Skolēnu pašrefleksijas līmeņi**

Apkopojot pusaudžu veikumu visos četros pašrefleksijas uzdevumos, var redzēt, ka vairākums pusaudžu (111 jeb 57,5 %) nespēja parādīt pašrefleksijas prasmes vai arī tās ir attīstītas vāji (*skat. 5.35. att.*). No maksimāli iespējamiem 10 punktiem skolēni visbiežāk nopelnīja 2 (48 respondenti jeb 24,9 %) vai 4 (33 respondenti jeb 17,1 %), kas arī liecina par kopumā zemu pašrefleksiju.

Šie rezultāti ievērojami atšķiras no pusaudžu pašvērtējuma viņu pašrefleksijas prasmēm. Viens uzskatāms piemērs: 130 pusaudži (67,3 %) atbildēja, ka meklētu kļūdu vai citu risināšanas paņēmienu, ja atklātos, ka viņu risinājums neved pie rezultāta, tomēr praktiski to darīja tikai septītā daļa no šiem skolēniem jeb 19 respondenti.

Skolotāji fokusgrupas diskusijā atzīst, ka skolēniem nav ieraduma apdomāt un izvērtēt savas darbības rezultātus ar mērķi turpmāk uzlabot savu sniegumu. Daļēji tas ir skaidrojams ar haotisko satura izkārtojumu – brīdī, kad skolēns varētu demonstrēt uzlaboto sniegumu, refleksijā gūtās atziņas ir aizmirsušās, jo ir pagājis nesamērīgi liels laiks. Piemēram, kāpināšanu skolēni fragmentāri apgūst 5., 6. un 7. klasē, taču 8. klases sākumā, sastopoties ar izteiksmi

$(x-3)^2$, skolēni neasociē to kā tādu pašu kāpināšanu. Lai izveidotu saikni ar iepriekšējām zināšanām, skolotāja A. Sokolova šajā tematā izmēģināja pašvadītu mācīšanos, piedāvājot skolēniem izdarīt visu, ko vien viņi prot, ar reizinājumiem $(a+b)(a+b)$, $(a-b)(a-b)$ un $(a+b)(a-b)$. Skolēni paši atklāja gan izteiksmes ar divkāršo reizinājumu, gan pamanīja to, ka pirmos divus reizinājumus var īsāk uzrakstīt kā binoma kvadrātu. “Rezultātā skolēni to saprata vienkāršāk, jo viņi uzreiz ieraudzīja nevis gatavu formulu, ar kuru viņi nezina, ko iesākt, bet principu, no kā tas veidojas,” pašvadītas mācīšanās priekšrocības diskusijā skaidroja A. Sokolova (*skat. 10. pielikumu*).

J. Vilciņš intervijā skaidro, ka pašrefleksijas prasmes jaunajā standartā ir ietvertas ar apzinātības jēdzienu – skolēns nevis vienkārši kaut ko dara, bet dara apzināti. “Darīt var tad, ja tev pirms sekundēm pateica: “Dari!”, bet lēmumu par kaut kā darīšanu var pieņemt pats skolēns. Tādā nozīmē tiek lietots vārds “apzināti”, ka ir situācijas, kurās skolēns pieņem lēmumu, vai to tagad vajag vai nevajag darīt. Piemēram, ko nozīmē: “Apzināti novērtē rezultāta precizitāti”? Tur ir divi līmeņi: ja skolotājs pasaka vai uzdevumā ir rakstīts pēc darbības izpildes to pārbaudīt; un pavisam cita lieta, un tas ir cits kompetences līmenis, ja skolēns pats pārbauda,” apzinātības ideju ar piemēru ilustrē J. Vilciņš. Jaunā standarta sabiedriskajā apspriešanā ir noskaidrojies, ka matemātikas skolotāji pašrefleksijas izpausmes – apzinātību un pašvadību – uztver kā liekus un traucējošus matemātikā. “Viņi tur saskata draudus, jo nezina, ko no viņiem tas prasa,” uzskata J. Vilciņš, paredzot lielu skaidrojošo darbu (*skat. 11. pielikumu*).

Skolotāji uzsver, ka skolēniem izvērtēt savu rīcību un spriedumus un, bastoties uz šo izvērtējumu, formulēt jaunus mērķus un problēmas, tādējādi mācoties pašvadīti un autonomi, traucē nesakārtotība ar mācību materiāliem. “Ir kaut kas, taču skolotājam vajag izurbties cauri 10 mācību grāmatām,” metodisko materiālu, daudzveidīgu vingrinājumu un labu, skolēniem pieejamā valodā rakstītu skaidrojumu deficītu akcentē skolotāja G. Dzene, uzsverot – ja skolotājam tas prasa papildus laiku, tad skolēnam patstāvīgi tas ir nepaveicams darbs. Publiski pieejamie tiešsaistes resursi matemātikas apguvei skolotāju vērtējumā ir primitīvi, kas arī kavē pašvadītu mācīšanos (*skat. 10. pielikumu*).

Pēc ekspertu domām, daudziem Latvijas pusaudžiem nav iespēju attīstīt pašrefleksiju kā īpašību kopumu, ar kura palīdzību ir iespējams apzināties un racionāli regulēt savu domāšanas procesu, apziņu un darbību, tai skaitā, mācīšanos, novēršot sarežģījumus šo procesu funkcionēšanā. Pēc J. Vilciņa aplēsēm, aptuveni trešdaļa Latvijas skolēnu ir raduši mācīties pēc konkrētām norādēm, kas viņiem ir jādara, proti, viņu domāšanas procesu regulē un vada skolotājs, un patiesa pašrefleksija šādā situācijā nav iespējama. Arī Latvijas pusaudžu sniegums PISA testā un 8. klases matemātikas diagnosticējošajā darbā pēc eksperta domām neparāda pašrefleksiju kompetences līmenī, proti, teorijā skolēni, iespējams, zina par savas mācīšanās izvērtējuma nozīmīgumu, taču praktiskā darbībā šīs iemaņas neizpaužas (*skat. 11. pielikumu*).

Viens no būtiskiem pašrefleksijas kritērijiem ir spēja objektīvi veikt mācību sasniegumu pašvērtējumu. Pusaudžu aptaujas rezultātu analīze atbilstoši matemātiskās kompetences kritērijiem rāda, ka pusaudži bieži atkāpjas no saviem vārdiem, jo pašvērtējums nesakrīt ar sniegumu vai automātiskām reakcijām, turklāt, pusaudži paši to neapzinās, bet tā vietā meklē ārējus iemeslus: uzdevuma formulējums nav saprotams, uzdevums ir par sarežģītu, skolotājs nav gana atsaucīgs. Pašpārbaude nav izveidojusies kā pusaudžu mācību ieradums. Pašpārbaudes vietā ar afektīvo, spontāno intuīciju cenšas kompensēt gan faktu, gan algoritmu nepārzināšanu. Tas varētu būt skaidrojams ar to, ka skolēnu reālās dzīves pieredze nav iesaistīta mācību procesā, tādēļ skolēni lieto intuīciju kā haotisku minēšanu, nevis pārdomātu, strukturētu, empīrisku un konstruktīvu procesu.

Skolēni savu sniegumu izvērtē ārkārtēji neobjektīvi. No 52 skolēniem ar augstāko matemātiskās intuīcijas līmeni tikai 2 to novērtēja kā augstu. Vāju līmeni spēj identificēt tikai piektdaļa šī līmeņa skolēnu, tādējādi 80 % skolēnu ar vāju līmeni ir augsts pašvērtējums pie zema snieguma, kas rada lielus izaicinājumus cieņpilnai komunikācijai ar skolotāju. 80 % skolēnu apgalvo, ka pieliek pūles visu, arī sarežģītāku uzdevumu risināšanā, tomēr testā atsevišķos uzdevumos pie 40 līdz pat 70 % skolēnu darbos ir rakstīts “nezinu”. Pusaudži 24 reizes pārvērtē savu lasītprasmi. ¾ skolēnu neizvērtē kritiski informāciju.

Atbilžu pamatojumos aptuveni trešdaļai pusaudžu parādās skeptiska un negatīva attieksme pret matemātikas apguvi, ko pamato ar skolotāju neiecietīgo attieksmi pret skolēna kļūdām un motivācijas trūkumu, kas rada apburto loku. Katrs sestais skolēns negatīvi izsakās par sadarbību ar savu matemātikas skolotāju. Nestandarta situācijās skolēni apjūk un necenšas padomāt, tā vietā izlaiž uzdevumu, jo nav pietiekamas neatlaidības un ieraduma papūlēties – tā vietā visbiežāk izvēlas kritizēt pašu uzdevumu.

Lai iegūtu pusaudžu pašvērtējumu, vai pusaudžiem veidojas matemātiskā kompetence, pusaudžiem prasīts novērtēt savas zināšanas, prasmes un attieksmes matemātikā. Uz jautājumu par zināšanām matemātikā varēja atbildēt ar tekstu, tomēr vairākums respondentu (179) ierakstīja skaitlisku novērtējumu ballēs, vēl 10 pusaudži uzrakstīja aprakstošu novērtējumu savām zināšanām, neminot skaitlisku ekvivalentu, un četri skolēni atbildēja “nezinu”. Pusaudžu zināšanu pašnovērtējuma vidējā vērtība ir 5,8, kas ir samērā tuvu šo skolēnu vidējam gada vērtējumam matemātikā, kas ir 6,0 balles (dažādās klasēs tas bija robežās no 4,7 līdz 7,2), kā arī tuvāk anektēšanā iesaistīto 9. klašu skolēnu vidējam rezultātam matemātikas eksāmenā (5,9 balles).

Turpretī pašvērtējuma jautājumos par panākumiem atsevišķos matemātiskās kompetences kritērijos pusaudži sevi novērtēja ievērojami neobjektīvi – vai nu neatbilstoši pozitīvi, vai nu nepamatoti kritiski. Tas varētu liecināt par to, ka skolēni ir raduši ikdienā panākumus matemātikā novērtēt tikai ar kādu nosacītu vidējo aritmētisko savām zināšanām, prasmēm un attieksmēm, tādēļ to spēj novērtēt daudz precīzāk, bet viņiem nav pieredzes izolēti izvērtēt atsevišķas prasmes, piemēram, kritisko domāšanu vai prasmi modelēt procesus ar matemātiskiem paņēmieniem.

5.2.2.8. Pusaudžu matemātiskās kompetences komponenšu savstarpējo sakarību analīze

Pētījuma datu analīze atbilstoši 4. nodaļā izvirzītajiem kritērijiem raksturo savstarpējās sakarības starp pusaudžu matemātiskās kompetences komponentēm. No 21 sakarības, kas izveidojas starp matemātiskās kompetences kritērijiem, 20 gadījumos p-vērtība jeb būtiskuma līmenis (*significance*) ir mazāks par 0,01, kas tiek uzskatīts par statistiski ļoti nozīmīgu (*skat. 17. pielikumu*). Tikai vienai korelācijai p-vērtība ir izteikti lielāka: korelācijai starp pusaudžu panākumiem matemātiskās intuīcijas un komunikācijas uzdevumos p-vērtība ir 0,11. Tas nozīmē, ka nav statistiski būtiskas atšķirības, vai pusaudzis veiksmīgi tiek galā ar komunikācijas uzdevumiem, lai varētu spriest par viņa matemātisko intuīciju vai otrādi. Tiesa gan, uz to norāda arī viszemākā korelācijas koeficienta r vērtība ($r \approx 0{,}12$), ja salīdzina visas korelācijas starp rezultātiem dažādās matemātiskās kompetences komponentēs (*skat. 5.15. tab.*).

Detalizētāk analizēsim cieši un vāji saistītās matemātiskās kompetences komponentes. Ciešākā korelācija ir starp matemātisko modelēšanu un kritisko domāšanu ($r \approx 0{,}53$). Par šo ciešo saistību liecina arī teorijas analīze, kas veikta 4. nodaļā. Gan matemātiskās modelēšanas, gan kritiskās domāšanas teorētiskajos skaidrojumos ir akcentēta prasme konceptualizēt rezultātus, vienīgi, modelēšanas gadījumā tas ir mācību aktivitātes mērķis, turpretī kritiskajā domāšanā konceptualizācija ir starpposms, lai varētu formulēt atbilstošus spriedumus.

5.15. tabula. Korelācijas koeficienti atbilstoši matemātiskās kompetences kritērijiem

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
1. Matemātiskā intuīcija	1,00						
2. Problēmu risināšana	0,38	1,00					
3. Matemātiskā modelēšana	0,31	0,35	1,00				
4. Komunikācija	*0,12*	0,21	0,37	1,00			
5. Kritiskā domāšana	0,31	0,36	**0,53**	0,27	1,00		
6. Personības īpašības	*0,19*	0,22	0,25	0,21	0,30	1,00	
7. Pašrefleksija	0,26	0,32	0,38	0,31	0,38	**0,48**	1,00

Lai pusaudzis mācētu analizēt, vispārināt un konceptualizēt informāciju, kas ir priekšnoteikumi matemātiskai modelēšanai, ir vajadzīgas visas kritiskās domāšanas prasmes, to skaitā novērošana, interpretācija, analītiskums. Tajā pašā laikā, arī kritiskās domāšanas prasme izvērtēt un sintezēt informāciju, lai to sekmīgi pielietotu reālās dzīves situācijās, nav iedomājama bez modelēšanā pieminētajām atsaucēm uz savu pieredzi un algoritmu pārzināšanas.

Pieminēšanas vērta ir arī korelācija starp matemātisko modelēšanu un kritiskās domāšanas uzdevumu, kurā skolēniem bija jāatpazīst pirmskaitļi ($r \approx 0{,}48$). Tā ir samērā sagaidāma saistība, jo matemātiskā modelēšana paredz prasmi analizēt un konceptualizēt informāciju. Matemātiskā modelēšana paredz arī tādu būtisku soli kā modeļa validācija, proti, pārbaudi uz kļūdām. Skolēni ar izkoptu pašpārbaudes prasmi mācēja labāk par citiem vienaudžiem piemeklēt pretpiemērus, piemēram, lai izslēgtu atbildi, ka izceltie skaitļi ir visi nepāra skaitļi, jo šim aprakstam neatbilst izceltais skaitlis 2 un tajā trūkst saliktu nepāra skaitļu kā 9, 15, 21 utt. Vēl viena izteikta sakarība starp šīm divām komponentēm – kritiskā domāšana korelē ar matemātiskās modelēšanas uzdevumu, kurā pēc istabas plāna dotajā mērogā jānosaka galda izmēri ($r \approx 0{,}46$).

Otra spēcīgākā korelācija ir starp personības īpašībām un pašrefleksiju ($r \approx 0{,}48$). Šo korelāciju ir būtiski ņemt vērā, jo tā sniedz atbildi uz jautājumu, kā uzlabot pusaudžu pašrefleksijas prasmes, kas lielākoties ir vājā līmenī – ir sistemātiski jāstrādā pie rakstura izglītības. Vairāki autori, tostarp D. Kānemans (*Daniel Kahneman*), D. Kuna (*Deanna Kuhn*) un citi, ir izpētījuši, ka pašrefleksijas spējas ietekmē domāšanas veidu, mācīšanās ieradumus, izziņas dziļumu un personības īpašības, un otrādi – pēc noteiktām personības īpašībām var paredzēt labu pašrefleksiju. Piemēram, labākas pašrefleksijas prasmes ir skolēniem, kuri ir zinātkāri, atvērti jaunai pieredzei un sadarbībai, pašpārliecināti, ambiciozi. Pašrefleksija korelē ar skolēna pārliecību, jo ietekmē pūles un neatlaidību, saskaroties ar izaicinājumiem. Pašrefleksija nav laikā nemainīgs lielums, bet gan tendence, kuru izraisa noteikti stimuli. Pašrefleksijas biežumu un kvalitāti ietekmē domāšanas veids, mācīšanās stratēģijas un panākumi mācībās (Seggelen-Damen, 2013; Kahneman, 2011; Kuhn, Katz, Dean, 2004).

Matemātiskā modelēšana korelē ar matemātisko intuīciju, problēmu risināšanu, komunikāciju, kritisko domāšanu un pašrefleksiju. Visas piecas korelācijas ir divpusējas sakarības. Matemātiskā modelēšana paredz radošu risinājumu kompleksām situācijām, kas nozīmē treniņu matemātiskai intuīcijai kā spējai domās paredzēt visu risinājumu, un otrādi – intuīcijai piedēvētā prasme atlasīt noderīgus faktus un pētnieciskos jautājumus ļauj ātrāk un efektīvāk izveidot problēmsituācijas modeli, kas ir vienkāršs, ērts un vienlaicīgi pietiekami precīzs. Problēmu risināšana iekļauj prasmi izvēlēties daudzveidīgus atsevišķos gadījumus, kas ir ļoti būtiski, veidojot un pārbaudot matemātisko modeli. Matemātiskajā modelēšanā minētā spēja saskatīt algoritmu un piemērotu risinājuma gaitu ir pamata priekšnoteikumi prasmei risināt problēmas. Matemātisko modelēšanu ievērojami stiprina skolēna izkopta komunikācija kā prasme izmantot dažādus informācijas avotus, taču pretējā virzienā nevar runāt par cēloņsakarības attiecībām, jo komunikāciju primāri ietekmē četri faktori: kultūras, situatīvie, attīstības un fiziskie, no kuriem izriet informācijas apmaiņas veids, apjoms un skaidrība, vārdu krājums un daudzi citi, nevis pusaudža spēja modelēt. Pašrefleksijas centrālie jautājumi palīdz objektīvi izvērtēt un uzlabot matemātiskos modeļus; arī modelēšanā aktuālā savas pieredzes vispārināšana un analīze ietekmē spēju kvalitatīvi veikt pašrefleksiju.

Tāpat kā matemātiskā modelēšana, arī pašrefleksija vairāk korelē ar piecām matemātiskās kompetences komponentēm: personības īpašībām, kritisko domāšanu, problēmu risināšanu, komunikāciju un matemātisko modelēšanu. Pašrefleksijas divpusējā saistība ar personības īpašībām un modelēšanu ir aprakstīta iepriekšējās rindkopās. 2012. gadā ASV veiktā pētījumā secināts, ka pašrefleksija ir būtiskākais kritiskās domāšanas priekšnoteikums. Pašrefleksijas treniņš uzlaboja skolēnu attieksmi pret matemātiku, paaugstināja viņu pašapziņu. Skolēni kļuva neatlaidīgāki mācībās, labāk izprata, kas tieši viņiem jāuzlabo savā sniegumā, kā rezultātā uzlabojās viņu problēmu risināšanas prasmes un sekmes matemātikā. Kanādas izglītības stipendiātu žurnālā publicētā pētījumā B. Kolija (*Binta Colley*), A. Biliksa (*Andrea Bilics*) un K. Lerča (*Carol Lerch*) to saista ar to, ka pašrefleksija stiprināja pusaudžu emocionālo inteliģenci, kas ļauj vieglāk pārvarēt dažādus izaicinājumus. Pašrefleksija uzlaboja arī skolēnu komunikācijas prasmes, jo viņi mācījās savas domas, idejas un zināšanas izteikt saviem vārdiem. Minētā pētījuma autori šo procesu tēlaini apraksta tā, ka mācībās apgūtās zināšanas patiesi kļūst par skolēna zināšanām (Colley, Bilics, Lerch, 2012).

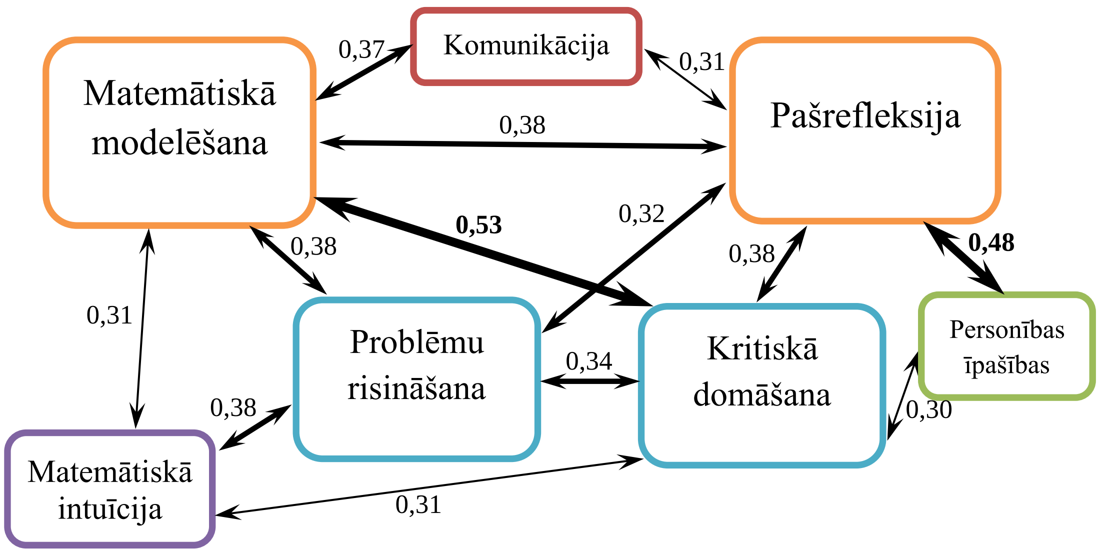
Starp problēmu risināšanu un pašrefleksiju pastāv vāja korelācija ($r \approx 0{,}26$), jo pašrefleksiju veicina tādi faktori kā atvērtība dažādiem viedokļiem, vērīgums, objektivitāte, prasme plānot laiku, izvēlēties prioritātes un piemērotas metodes, kas visi ir arī problēmu risināšanas priekšnoteikumi. Līdzīgi arī kritiskās domāšanas prasmes, it sevišķi, novērošana, analītiskums un refleksivitāte, ir nepieciešami, lai varētu kvalitatīvi veikt pašrefleksiju, kas iekļauj būtisku pašizvērtējuma jautājumu uzdošanu piemērotos brīžos, objektīvu savas iepriekšējās pieredzes analīzi, spēju pamanīt pat vismazākās izmaiņas savā sniegumā. Labas komunikācijas prasmes ietekmē pašrefleksiju, jo ļauj detalizētāk aprakstīt pusaudža pieredzi, sintezēt informāciju no vairākiem informācijas avotiem, piemēram, pašvērtējumu, atgriezenisko saiti, ārējo faktoru ietekmi uz pusaudža sasniegumiem mācībās.

Gan problēmu risināšana, gan kritiskā domāšana attiecas uz spēju izmantot zināšanas, faktus un datus, lai efektīvi risinātu problēmas, tādēļ starp problēmu risināšanu un kritisko domāšanu pastāv korelācija ($r \approx 0{,}36$). Taču abām komponentēm ir arī vairākas būtiskas atšķirības. Šķiet, svarīgākā no tām ir tāda, ka problēmu risināšanai nevajadzētu būt ierobežotai laikā – nebūtu produktīvi no pusaudža tūlītēji sagaidīt problēmas risinājumu, turpretī kritiskā domāšana ir kā ieradums, jo tiek sagaidīts, ka to demonstrēs, veicot jebkuru darbību. Tajā pašā laikā kritiskai domāšanai raksturīgo skaidrību, sakārtotību, racionalitāti un balstīšanos uz pierādījumiem pusaudži visorganiskāk pielieto brīžos, kad ir jāpieņem lēmums, kas mācību kontekstā saistās tieši ar problēmu risināšanu. Taču pretējā virzienā šī sakarība ne obligāti izpildās – reizēm problēmas var atrisināt tiešā veidā, nepielietojot kritisko domāšanu, bet gan ilgstošo vai cita veida atmiņu, emocionālo inteliģenci, pārliecināšanas prasmi. Vairākas problēmu risināšanas stratēģijas pat ir pretstats kritiskai domāšanai, piemēram, sekošana algoritmam vai instrukcijai. Cita situācija rodas tad, ja mācību procesa laikā skolēns no vairākiem viņam zināmajiem algoritmiem patstāvīgi izvēlas vienu, kurš ir efektīvākais konkrētas problēmas risināšanā; šāds process prasa izkoptu kritisko domāšanu.

Pēdējās divas korelācijas ir saistītas ar matemātisko intuīciju. Problēmu risināšana ietver sevī matemātisko intuīciju, jo parasti pusaudži ir apguvuši tādu problēmu risināšanas stratēģiju kā problēmas sadalīšanu vairākās mazākās un tādēļ vienkāršākās problēmās. Jau pats lēmums sadalīt sākotnējo problēmu un arī šis dalīšanas process visvairāk balstās tieši uz empīrisko intuīciju, jo, kā pusaudži paši norāda anketēšanā, viņiem parasti trūkst laika analītiskā ceļā nonākt pie optimālākā problēmas risinājuma plāna. Savukārt problēmu risināšanas pieredze attīsta empīrisko intuīciju, jo jebkuru neparedzētu reakciju uz problēmu var interpretēt kā intuitīvu. Kaut gan pusaudžiem parasti izteiktāk piemīt analītiskā vai intuitīvā pieeja problēmu risināšanai, komplicētākas un augstāka izziņas līmeņa problēmas iekļauj abas pieejas.

Intuīciju var uzlabot jebkura refleksija kā savākto zināšanu un pieredzes kritiska analīze, tādēļ intuīcija ietekmē kritisko domāšanu (Bradley, Price, 2016). Tajā pašā laikā, intuīcija netiek minēta starp noteicošajiem faktoriem, kuri veicina pusaudžu kritisko domāšanu, jo uz intuīciju var paļauties, padziļināti izpētot pieejamo informāciju (Patel, 2018). Pusaudži anketēšanā atzīst, ka nereti izvēlas intuitīvo atbildi un nepārbauda to, kā paredz kritiskās domāšanas augstākie līmeņi, jo ir pārāk nepacietīgi, kas ir raksturīgi šim vecumposmam.

Šīs 12 izteiktākās korelācijas var apkopot shēmā, kurā korelāciju norāda simbols $\leftrightarrow$ (*skat. 5.36. att.*). Korelācijas koeficienta lielumi atzīmēti uz bultiņām.



5.36. att. **Sakarības starp pusaudžu matemātiskās kompetences komponentēm**

Četras komponentes ir ciešāk saistītas ar pārējām, jo tās korelē ar lielāku skaitu komponenšu – matemātiskā modelēšana, kritiskā domāšana un pašrefleksija ar piecām, problēmu risināšana ar četrām komponentēm. Matemātiskā intuīcija korelē ar trīs citām komponentēm, komunikācija un personības īpašības – ar divām (*skat. 5.36. att.*).

Starp pusaudžu sniegumu komunikācijas un kritiskās domāšanas uzdevumos pastāv vāja, pozitīva korelācija ($r \approx 0{,}27$). Pārsteidzoši zemo korelācijas koeficientu starp šīm lielā mērā radniecīgām komponentēm varētu skaidrot ar vērojumiem no prakses – panākumi komunikācijā un kritiskajā domāšanā vairāk ir izteikti pusaudžiem ar dažādiem psiholoģiskajiem tipiem.

5.16. tabula. Fragments no pamatpētījuma korelācijas analīzes ar Spīrmena testu (17. pielikums)

	Kritiskās domāšanas uzdevumi		
	Pierādījuma uzdevums par rombu (18.)	Uzdevums par pirmskaitļu atpazīšanu (19.)	Ģeometrijas uzdevums par pretpiemēru (20.)
Pašvērtējums	-,026	,011	,023

Taču starp skolēnu pašvērtējumiem šajās matemātiskās kompetences komponentēs pastāv vidēji cieša, pozitīva korelācija ar otru augstāko korelācijas koeficientu pamatpētījumā ($r \approx 0{,}55$). Jāatzīmē, ka pusaudžu pašvērtējums viņu komunikācijas prasmēm ļoti vāji korelē ar panākumiem uzdevumos, kuros jāpielieto šīs prasmes (korelāciju koeficienti ir, attiecīgi 0,06 un 0,13); kā redzams 5.16. tabulā, vēl vājāka korelācija ir pašvērtējumam un veikumam kritiskajās domāšanas uzdevumos (koeficienti ir –0,03; 0,01 un 0,02). To, cik ļoti neobjektīvi pusaudži novērtēja savu kritisko domāšanu, var redzēt arī no šādiem datiem – no 14 pusaudžiem, kuri atbildēja, ka vienmēr spēj argumentēt savu risinājumu vai viedokli, astoņi pat nemēģināja pamatot, kādēļ pēc apraksta var apgalvot, ka četrstūris ir rombs (*skat. 17. pielikumu*).

Samērā cieša korelācija pastāv starp skolēnu pašrefleksiju un aktīvu reakciju situācijā, ja uzdevuma risinājuma pašās beigās atklājas kļūda ($r \approx 0{,}45$). Skolēni ar labām pašrefleksijas spējām ir ar lielāku gatavību meklēt citus risināšanas paņēmienus vai vēlreiz pārskatīt savu risinājumu, lai tajā atrastu kļūdu, savukārt skolēni ar vājām pašrefleksijas prasmēm labprātāk ignorē uzdevuma beigās atklāto kļūdu vai arī cenšas to noslēpt. Ar skolēnu mērķtiecību korelē arī komunikācijas prasmes ($r \approx 0{,}36$), konkrētāk, prasme pielietot citos mācību priekšmetos apgūto informāciju matemātikas uzdevuma risināšanā ($r \approx 0{,}34$).

Visvājākā korelācija ir starp matemātisko intuīciju un komunikāciju ($r \approx 0{,}12$). No vienas puses, šāds rezultāts ir negaidīts, jo nereti matemātiskā intuīcija tiek traktēta kā intensīvā darbā ar dažādiem informācijas avotiem, tai skaitā, personīgā pieredzē iegūtu noturīgu prasmi paredzēt uzdevuma risināšanas soļus, atlasīt noderīgus faktus un apjēgt matemātikai raksturīgus pētnieciskos jautājumus. Tas viss būtiski saskan ar komunikācijas komponenti. Vienlaikus jāņem vērā, ka pusaudžu ikdienas komunikācijas paradumi ir ievērojami mainījušies: vairākums dod priekšroku rakstiskai saziņai čatos un dažādās aplikācijās nevis mutvārdu komunikācijai; arī rakstisko saziņu pamazām aizstāj emocijzīmes, fotogrāfijas un īsi video fragmenti bez kādas kognitīvās slodzes.

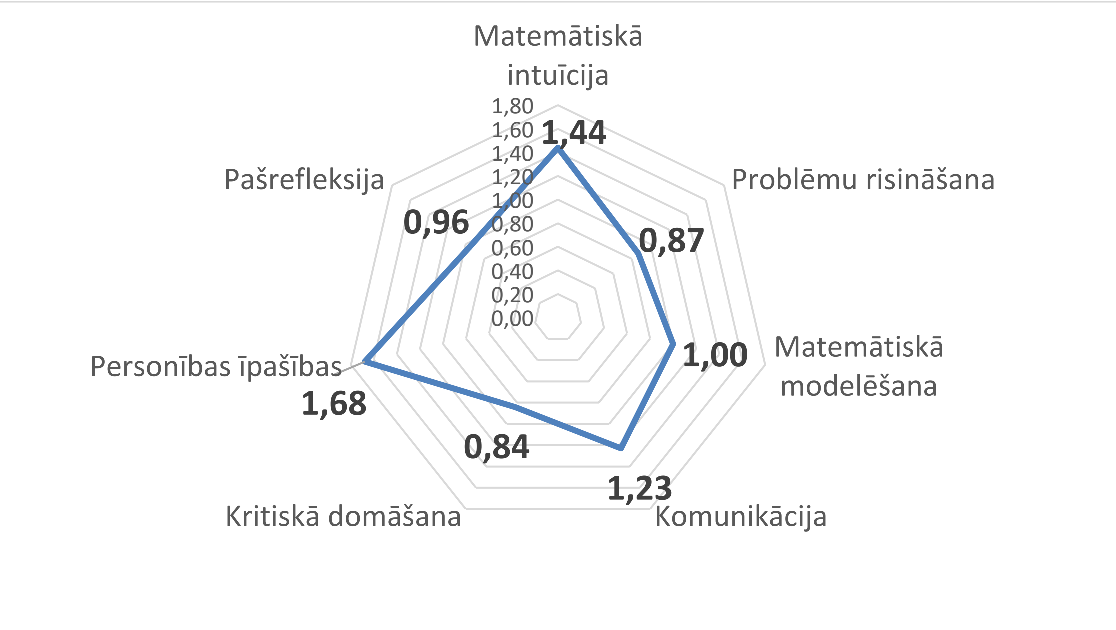
Otra vājākā pozitīvā korelācija pastāv starp matemātisko intuīciju un personības īpašībām ($r \approx 0{,}19$). Vienlaikus intuīcija salīdzinoši daudz vairāk korelē ar vienu personības īpašību – neatlaidību, kur veidojas spēcīga korelācija ($r \approx 0{,}60$). Tas saskan ar J. Pretza pētījumā par intuīcijas veidiem atklāto saistību starp neatlaidību informācijas un pieredzes uzkrāšanā un empīrisko intuīciju (Pretz, 2011).

Rezumējot pamatpētījumā iegūtos datus, matemātiskās kompetences kritērijiem noteikts vidējais rādītājs, vārdisko vērtēšanas skalu pārveidojot par skaitlisku ar šādu punktu sadalījumu: 0 punkti par “nav”, 1 – “vāji”, 2 – “labi” un 3 par “izteikti” (*skat. 5.17. tab.*).

5.17. tabula. Pusaudžu vidējie rezultāti pēc matemātiskās kompetences kritērijiem pamatpētījumā

Matemātiskās kompetences kritērijs	**Vidējais rezultāts (mean) (min=0, max=3)**
Personības īpašības	1,68
Matemātiskā intuīcija	1,44
Komunikācija	1,23
Matemātiskā modelēšana	1,00
Pašrefleksija	0,96
Problēmu risināšana	0,87
Kritiskā domāšana	0,84

Lai šie rezultāti būtu vizuāli vieglāk uztverami un salīdzināmi, piemērotākais attēlošanas veids ir radara tipa diagramma, kurā katram kritērijam ir sava ass (*skat. 5.37. att.*). Pusaudžu matemātiskā kompetence vislabāk attīstās atbilstoši personības īpašību (1,68 no 3), matemātiskās intuīcijas (1,44) un komunikācijas (1,23) kritērijiem, bet liela uzmanība matemātikas skolotājiem ir jāpievērš kritiskās domāšanas (0,84), problēmu risināšanas (0,87) un pašrefleksijas (0,96) attīstībai. Arī rezultāts matemātiskās modelēšanas kritērija uzdevumos (1,00) būtiski atpaliek no matemātikas skolotāju prognozēm, ņemot vērā iepriekšējās matemātikas satura reformās akcentēto pētniecisko darbību un sasaisti ar reālās dzīves situācijām.



5.37. att. **Pusaudžu matemātiskās kompetences vērtēšanas rezultāti**

Pamatpētījumā iegūtie dati sakrīt ar VISC tēzi, ka skolēni slikti pārzina matemātisko jēdzienu nozīmi. Piemēram, trešdaļa skolēnu kā sinonīmus lieto kopš sākumskolas mācīto laukumu un perimetru, aptuveni tikpat skolēnu uzskata, ka četrstūris un taisnstūris ir viens un tas pats, 40 % skolēnu neprot vai necenšas lietot mērogu un proporciju, kuru apgūst jau no 4. klases. Daudz aplamu priekšstatu ir par jēdzienu "pirmskaitļi".

Skolēni vairākus mēnešus apgūst dažādas funkcijas, netieši tās mācās arī fizikā, ģeogrāfijā un citos mācību priekšmetos, taču rezultātā 55 % skolēnu nespēj nosaukt nevienu procesu, kuru var aprakstīt ar funkciju. Tātad skolēni nespēj salikt kopā teorētiskās zināšanas ar praktisko pielietojumu.

Nobeigums

Promocijas darbā “Pusaudžu matemātiskās kompetences veidošanās” atbilstoši pētījuma mērķim ir izpētīts pusaudžu matemātiskās kompetences saturs, definēta pusaudžu matemātiskā kompetence, tās komponentes un to vērtēšanas kritēriji, veikts pusaudžu matemātiskās kompetences izvērtējums un formulētas rekomendācijas matemātikas skolotājiem veiksmīga pusaudžu matemātiskās kompetences veidošanās pedagoģiskā procesa veicināšanai.

Pētījuma mērķa sasniegšanai ir izpildīti izvirzītie pētījuma uzdevumi.

1. Kompetences teorētisko pamatu izpētē veikta zinātniskās literatūras analīze un sistematizēta kompetences jēdziena veidošanās mūsdienu izpratnē. Promocijas darba temats ir īpaši aktuāls kompetenču pieejā balstīta mācību satura ieviešanas kontekstā, kā arī tādēļ, ka pedagoģiskajā, psiholoģiskajā, ekonomikas, vēstures un citu nozaru literatūrā kompetences jēdziens ir skaidrots dažādi. Teorētiskās literatūras analīzes nodaļā (*skat. 1. nodaļu*) ir doti kompetences skaidrojumi 14 dažādās nozarēs, parādot šo skaidrojumu līdzības un atšķirības no tās izpratnes, kādā vārdu “kompetence” dažādos laika posmos lietoja pedagoģijā. Šo skaidrojumu dažādību labi ilustrē, piemēram, šādas definīcijas:

- Kompetence – darbinieka atbilstība viņam uzticēta darba veikšanai; no Antīkās pasaules pārmantots skaidrojums (Kübler, 1996).
- Kompetence jurisprudencē – tiesiska pazīme, piemēram, likumīgi atļautais vecums, pilnvaras vai spējas; spēja apzināties savas rīcības būtību un sekas (Garner, 2019).
- Kompetence personālvadībā – prasmes un īpašības, kas nodrošina izcilu darba izpildi (Dubois, 2004).

Arī pedagoģijā ir formulēti vairāki kompetences skaidrojumi, kuri atšķiras ar kontekstu, mērķauditoriju un citiem nosacījumiem, kuros šīs definīcijas ir tapušas. Piemēram:

- Sarežģīta zināšanu, prasmju, izpratnes, vērtību, attieksmju un vēlmju kombinācija, kas sekmē efektīvu cilvēka rīcību konkrētā nozarē vai sabiedrībā kopumā (Crick, 2008).
- Kompetenci veido trīs komponentes: zināšanas, kā lietot teorijas; prasmes risināt problēmas un attieksmes, kas izpaužas kā atbildīga spēja pieņemt lēmumus, vadīt, veidot saskarsmi ar citiem cilvēkiem (Andersone, 2010).

Teorētiskās literatūras analīzē ir aprakstītas un salīdzinātas iepriekšējā desmitgadē astoņas bieži citētas matemātiskās kompetences definīcijas (*skat. 2.2. apakšnodaļu*).

Salīdzinošā analīze ļāva identificēt matemātiskās kompetences izpausmes, kuras akcentē vairākums pētnieku, un tādas izpausmes, kas ir retāk pieminētas definīcijās, kaut gan matemātiķu vidū ir liela vienprātība par šo komponenšu būtisko lomu. Ievērojot pusaudžu vecumposma raksturojumu un matemātiskās kompetences definīciju teorētisko analīzi, pētījumā ir definēta pusaudžu matemātiskā kompetence:

Pusaudžu matemātiskā kompetence ir zināšanu, prasmju un attieksmju kopums, kas ļauj izprast un risināt daudzveidīgas problēmsituācijas, darboties vispārinātu modeļu veidā, kritiski izvērtēt un pamatot rezultātu, izmantot matemātiski korektu valodu.

2. Ir apzināti pusaudžu matemātiskās kompetences veidošanās nosacījumi. Pusaudžu vecumposma īpatnību izpēte rāda, ka daudzas no šīm īpatnībām kalpo kā veicinoši faktori. Piemēram, pusaudžiem strauji attīstās kognitīvās spējas, lielākoties, viņi kļūst kritiskāki pret visu apkārt notiekošo, tai skaitā, pret mācību saturu, kas veiksmīgi organizētā mācību procesā var veicināt kritiskās domāšanas un problēmu risināšanas prasmju attīstību. Tai pat laikā, pusaudži mēdz būt nepacietīgi, ātri aizkaitināmi, izteikti emocionāli, arī depresīvi, kas traucē pienācīgā kvalitātē apgūt matemātisko modelēšanu, matemātiskās valodas lietojumu un citas komponentes.

Pusaudžu sensāciju kāre, kā to nosauca G. S. Hols (Hall, 1904), paver lielas iespējas matemātiskajā modelēšanā, problēmu risināšanā, eksperimentu veikšanā, savas personības īpašību izpētē un citās jomās (*skat. 2.1. apakšnodaļu*). Tas gan ir iespējams vienīgi tad, ja pusaudžu dabisko interesi un atklājēja garu nenotrulina ar pārlieku formalizētu un sīki reglamentētu mācību procesu, kurā pusaudzim nav iespēju pieņemt lēmumus, patstāvīgi plānot darbu un laiku, kā arī iesaistīties mērķu formulēšanā.

Hipotētiski deduktīvās spriešanas elementu parādīšanās šajā vecumā ir labs pamats kritiskās domāšanas, problēmu risināšanas un citu prasmju attīstībai. Rezultātā attīstās metakognīcija jeb domāšana par domāšanu, objektīvāka pašrefleksija, iztēle, prasme veidot loģiskus spriedumus u. c. Rezumējot, pusaudžu vecumā ir daudz priekšnoteikumu veiksmīgam matemātiskās kompetences veidošanās procesam, taču pētnieki vienmēr piebilst – papildus pusaudžu rakstura un vecumposma īpatnībām svarīgs faktors ir prasmīgs skolotājs un kvalitatīvi mācību līdzekļi.

Jaunākie pētījumi par pusaudžu uztveres īpatnībām rāda, ka pusaudži vislabāk uztver informāciju, kas ir veiksmīgi strukturēta, vizualizēta, lakoniska, argumentēta un noderīga reālās dzīves situācijās (Dolot, 2018; Jörg, 2017). Kaut gan mūsdienu pusaudžu paaudzi raksturo gandrīz nemitīga atrašanās tiešsaistē, pētījumos nav apstiprinājies, ka digitālo rīku un informācijas tehnoloģiju lietojums veicina pusaudžu matemātiskās kompetences veidošanos – rezultāts vairāk ir atkarīgs no skolotāja ieinteresētības un iemaņām ar jēgu lietot šos jaunos rīkus.

3. Izstrādāts matemātiskās kompetences modelis, kā arī identificēti, aprobēti un precizēti kritēriji pusaudžu matemātiskās kompetences vērtēšanai (*skat. 4. nodaļu*). Balstoties uz analizētām dažādām pieejām matemātiskās kompetences izpratnē, izvērtējot dažādu definīciju priekšrocības un trūkumus, ir aprakstīts pusaudžu matemātiskās kompetences saturs, kas ir sadalīts septiņās komponentēs: personības īpašības, matemātiskās modelēšana, matemātiskās valodas lietošana (komunikācija), problēmu risināšana, matemātiskā intuīcija, kritiskā domāšana un pašrefleksija, kam piekārtoti atbilstoši kritēriji matemātiskās kompetences novērtēšanai.

Katram matemātiskās kompetences kritērijam sniegts skaidrojums, iekļaujot vēsturisko perspektīvu, jaunāko pētījumu atziņas, konkrētu uzdevumu piemērus, kuros vistiešāk izpaužas atbilstība šim kritērijam, un citu informāciju, kas ļāva formulēt četru līmeņu aprakstus: izteikti, labi, vāji un nav. Promocijas darba empīriskajā daļā šie līmeņu apraksti tika izmantoti pusaudžu matemātiskās kompetences novērtēšanai. Kritērijiem sniegts konspektīvs, kodolīgs apraksts, kuru ir ērti lietot matemātikas stundu vērošanā, pusaudžu testēšanas atbilžu kodēšanā, skolotāju fokusgrupas diskusijā un ekspertu intervijās.

4. Atbilstoši pētījuma teorētiskās analīzes rezultātā izveidotajiem metodoloģiskajiem pamatiem, tika veikts empīrisks pētījums, lai noteiktu pusaudžu matemātisko kompetenci. Gan izmēģinājuma pētījumā, gan pamatpētījumā izmantota datu triangulācija. Pētījuma 1. posma jeb izmēģinājuma pētījuma mērķis bija precizēt un papildināt izstrādāto matemātiskās kompetences modeli un kritērijus. Izmēģinājuma pētījumu veidoja triangulācija: skolēnu un skolotāju anketēšana, fokusgrupas intervija ar skolēniem un matemātikas stundu vērojumi. 41 skolēns aizpildīja anketu par matemātisko kompetenci, kas sastāv no 21 jautājuma. Analizējot anketēšanas rezultātus, anketa tika precizēta un papildināta, lai tā kalpotu par precīzāku mērinstrumentu.

Rezultātā pētījuma 2. posma jeb pamatpētījuma anketā jautājumu skaits pieauga līdz 33. Arī pamatpētījumā izmantota triangulācija: pusaudžu matemātiskās kompetences izpēte ar anketēšanu un testēšanu, matemātikas skolotāju refleksija fokusgrupas diskusijā un daļēji strukturētās intervijās ar ekspertiem, lai izvērtētu pusaudžu un skolotāju darbību. Pamatpētījuma bāzi veidoja 193 pusaudži no 3 skolām, trīs matemātikas skolotāji un divi eksperti. Pamatpētījums veikts ar mērķi izvērtēt pusaudžu matemātisko kompetenci atbilstoši izstrādātajam matemātiskās kompetences veidošanās didaktiskajam modelim un vērtēšanas kritērijiem pēc konverģenta pētījuma dizaina, izmantojot kvantitatīvās un kvalitatīvās pētījuma metodes. Konstatētā pusaudžu matemātiskā kompetence interpretēta, izmantojot skolotāju fokusgrupas diskusijā un ekspertu intervijās iegūtos viedokļus. Pētījuma datu apstrādei izmantota programma *IBM SPSS Statistics 22*.

5. Izpētīta pedagoģiskā pieredze pusaudžu matemātiskās kompetences veidošanās sekmēšanai (*skat. 2. nodaļu*). Dažādos avotos atrodami reizēm pretrunīgi viedokļi par matemātikas mācību mērķiem, metodēm un galvenajām grūtībām matemātikas apguvē. Kā rāda OECD starptautiskā salīdzinošā pētījuma dati, Latvijā matemātikas mācības vairāk koncentrējas uz pamatprasmju apguvi, process ir drīzāk reproduktīvs nekā produktīvs, tādēļ matemātikas metodiķi jau kopš pagājušā gadsimta 80. gadiem mudināja matemātikas mācību procesā vairāk pievērsties analīzes un sintēzes apguvei, proti, akcentēja matemātiskās kompetences veidošanās nozīmīgumu.

Matemātikas skolotāju fokusgrupas diskusija un ekspertu intervijas apliecina, ka matemātikas mācībās Latvijā saturs, kā arī citi mācību struktūras elementi ir pakārtoti rezultātam – skolēna panākumiem valsts pārbaudes darbos. Eksperti intervijās pauda bažas par šo tradīciju, jo tā ierobežo skolotāju autonomiju, radošumu un iniciatīvu. Meklējot kopsakarības un līdzības starp pieejām, kādas īsteno valstīs, kur pusaudžiem ir visvairāk attīstīta matemātiskā kompetence, ir saskatāmi vairāki vienojoši faktori:

1) galvenā uzmanība ir vērsta uz skolēnu motivāciju, zinātkāres saglabāšanu, labizjūtu;

2) sakārtota, apmaksāta, daudzveidīga skolotāju sadarbība gan starppriekšmetu satura veidošanā, gan vienā mācību jomā, piemēram, vienojoties par vērtēšanu un mācību metodēm;

3) liela skolotāju autonomija noteikt mācību saturu, tempu, tālākizglītības vajadzības.

Pedagoģiskā pieredze pētīta ar anketēšanu, stundu vērošanu un intervijām. Izmēģinājuma pētījuma skolotāju anketēšana ļāva skolotājiem reflektēt par savu pedagoģisko pieeju un priekšstatu par skolēnu kompetenci. Skolotāji atzina, ka tas nebija viegli, jo ikdienā ierasts par skolēniem spriest pēc viņu rezultātiem summatīvajos vērtēšanas darbos, tomēr skolēna matemātiskā kompetence pēc skolotāju vērojumiem ne vienmēr korelē ar šiem rezultātiem; reizēm starp tiem pat ir vērojamas pretrunas. Skolotāji piesardzīgi izvērtēja skolēnu panākumus pēc tādiem matemātiskās kompetences kritērijiem, kuros skolēni uzrādīja labu veikumu, piemēram, komunikācijā, bet pārvērtēja spējas pašrefleksijā. Atbildes ekspertu intervijās pamatpētījumā labāk izskaidro šīs un citas pretrunas, kā arī ļauj precīzāk formulēt rekomendācijas.

Secinājumi

Apkopojot empīriskā pētījuma gaitā iegūtos datus, un veicot datu analīzi tika konstatēts, ka iegūtie dati ir ticami, un pusaudžu matemātiskās kompetences veidošanās empīriskās izpētes rezultātā ir formulējami šādi secinājumi:

- Labākos panākumus pusaudži uzrādīja uzdevumos, kuros pārbaudīja personības īpašības (1,68 no 3), matemātisko intuīciju (1,44) un komunikāciju (1,23). Zemākie rezultāti ir kritiskajā domāšanā (0,84), problēmu risināšanā (0,87) un pašrefleksijā (0,96). Modelēšanā (1,00) pusaudžu sniegums ir viduvējs.
- **Personības īpašības** (neatlaidība, zinātkāre, patstāvība un iniciatīva) vairāk korelē ar pašrefleksiju ($r \approx 0{,}48$) un kritisko domāšanu ($r \approx 0{,}30$), taču ar pārējām komponentēm korelē vāji; visvājāk ar matemātisko intuīciju ($r \approx 0{,}19$). Teorijā tas tiek skaidrots ar to, ka šī komponente netiek pietiekami aktualizēta skolotāju izglītībā un vēlāk mācību procesā, jo personības īpašību un rakstura audzināšanas nozīme nav sistemātiski pētīta. Kaut gan no visiem matemātiskās kompetences kritērijiem vislabākos rezultātus pusaudži uzrādīja uzdevumos, kuri pārbauda personības īpašības, pētījuma dati rāda, ka skolēni īpaši kritiski vērtē savu sniegumu tieši šajā matemātiskās kompetences kritērijā.
- Ciešākā sakarība starp matemātiskās kompetences kritērijiem pastāv starp **matemātisko modelēšanu** un kritisko domāšanu ($r \approx 0{,}53$). Pētījuma kontekstā šī sakarība ir ļoti būtiska, jo zemākos rezultātus skolēni uzrādīja tieši kritiskās domāšanas prasmēs. Patlaban matemātiskās modelēšanas uzdevumos pusaudžiem ir trešais zemākais rezultāts. Turpinot Latvijā jau labi iesāktās tradīcijas matemātiskās modelēšanas apguvē, veltot tai vairāk laika un ļaujot skolēniem patstāvīgi apjēgt dažādus modeļus, var prognozēt uzlabojumu arī pusaudžu kritiskajā domāšanā. Kā intervijās brīdina eksperti, šis process prasa skrupulozu pieeju un pacietību.
- Līdzīgi kā personības īpašības, arī **komunikācija** salīdzinoši vājāk korelē ar citiem matemātikās kompetences kritērijiem – ciešākā sakarība komunikācijai ir ar matemātisko modelēšanu ($r \approx 0{,}37$) un pašrefleksiju ($r \approx 0{,}31$). Visvājākā korelācija starp matemātiskās kompetences kritērijiem saista komunikāciju un matemātisko intuīciju ($r \approx 0{,}12$). Kaut gan šāds secinājums varētu likties neloģisks un pretrunīgs intuitīvai nojausmai, ka izkoptai komunikācijai vajadzētu ietekmēt matemātiskās intuīcijas līmeni, tomēr jāatceras, ka pēdējās desmitgadēs un, it sevišķi pēdējos pāris gados ir ļoti būtiski mainījusies pusaudžu komunikācijas kultūra, tikmēr matemātiskās intuīcijas saturs nav mainījies.

- **Problēmu risināšana** vairāk korelē ar četriem matemātiskās kompetences kritērijiem, taču šīs korelācijas nav pārāk izteiktas: ar matemātisko modelēšanu ($r \approx 0{,}38$), matemātisko intuīciju ($r \approx 0{,}38$), kritisko domāšanu ($r \approx 0{,}34$) un pašrefleksiju ($r \approx 0{,}32$). Pārsteidzošā kārtā problēmu risināšana visvājāk korelē ar komunikāciju ($r \approx 0{,}21$), kur varētu prognozēt ciešāku sakarību. Eksperti intervijā norāda, ka šo situāciju varētu skaidrot duāla situācija, kad jau notiek pāreja uz jaunu, izziņas līmeņa ziņā augstāku izpratni par problēmu risināšanu, taču skolotāju un skolēnu komunikācija paliek kopumā nemainīga – skolēns joprojām visbiežāk ir izglītojamais, kuru skolotājs māca, nevis palīdz mācīties.
- Biežā paļaušanās uz **matemātisko intuīciju**, ar kuru varētu būt skaidrojami labie rezultāti uzdevumos, kas pārbauda intuīciju, ir skaidrojami ar pusaudžu vecumposma īpatnībām – skolēni apzinās, ka labāk un drošāk ir paļauties uz kritisko domāšanu un problēmu risināšanas prasmēm, analītiski izspriest atbildi un beigās to pārbaudīt, modelēt vēl citus iespējamos variantus, kas reizē ir arī vērtīgs darbs ar personības īpašībām un pašrefleksiju, taču realitātē izvēlas spontānas atbildes, jo mēdz būt pārāk nepacietīgi. Rezultātā korelācija starp matemātisko intuīciju un kritisko domāšanu nav pārāk izteikta ($r \approx 0{,}31$). Matemātiskā intuīcija spēcīgi korelē ar neatlaidību ($r \approx 0{,}60$), jo tā noder informācijas un pieredzes uzkrāšanā, kas ir pamats empīriskās intuīcijas attīstībai.
- Otrais labākais sniegums pusaudžiem bija uzdevumos, ar kuriem var pārbaudīt matemātisko intuīciju, tādēļ viena no stratēģijām veiksmīgākam darbam ar pusaudžiem ir vairāk izmantot matemātisko intuīciju mācību procesā. Matemātiskajā intuīcijā ir lielākais to aptaujāto pusaudžu skaits, kuri uzrādīja izteiktu līmeni, salīdzinot ar visiem pārējiem kritērijiem, taču vienlaicīgi arī viens no augstākajiem vāja līmeņa rezultātiem (52,3 %), kas divarpus reizes pārsniedz Eiropas Savienības mērķi, ka zemu prasmju līmeni uzrāda ne vairāk kā 20 % pusaudžu. Skolēni jāradina aptuveni novērtēt skaitlisko aprēķinu rezultātu, izteikt pieņēmumus un tad tos rūpīgi pārbaudīt. Pusaudži galvenokārt izmanto afektīvo intuīciju, proti, seko tūlītējai nojausmai. Empīriskās un konstruktīvās intuīcijas attīstīšana paredz lielu iepriekšējo pieredzi līdzīgu cita izziņas līmeņa uzdevumu risināšanā, kā arī apzinātu tādu uzdevumu izvēli, kuri veicina vajadzīgos analītiskos, loģikā balstītos kognitīvos procesus. Eksperti un skolotāji atzīst, ka mācību stundās vingrināšanās nav pietiekama, lai veidotos empīriskā intuīcija, jo matemātikas mācību saturs joprojām ir pārblīvēts.

- **Kritiskā domāšana** ir ciešāk saistīta ar pašrefleksiju ($r \approx 0{,}38$) un problēmu risināšanu ($r \approx 0{,}34$). Jāatzīmē, ka kritiskā domāšana samērā līdzīgi korelē ar visiem sešiem pārējiem matemātiskās kompetences kritērijiem. Piemēram, visvājākā korelācija kritiskajai domāšanai ir ar komunikāciju ($r \approx 0{,}27$). Tas varētu būt saistīts ar teorijā aprakstītiem kritiskās domāšanas skaidrojumiem, jo tie saturiski ietver elementus no visiem pārējiem matemātiskās kompetences kritērijiem, piemēram, konceptualizāciju (matemātiskā modelēšana), pieredzē un novērojumos iegūtās informācijas lietošanu (matemātiskā intuīcija un komunikācija) u. tml.
- Otra spēcīgākā korelācija starp matemātiskās kompetences kritērijiem pastāv starp **pašrefleksiju** un personības īpašībām un ($r \approx 0{,}48$). Šī korelācija saista divus matemātiskās kompetences kritērijus ar ievērojami atšķirīgiem pusaudžu panākumiem, tādēļ šī sakarība sniedz atbildi uz vēl vienas problēmas iespējamo risinājumu. Pašrefleksijā pusaudži uzrāda kopumā viduvēju rezultātu, un to varētu uzlabot, sistemātiski strādājot pie rakstura izglītības. Labākas pašrefleksijas prasmes ir zinātkāriem, pašpārliecinātiem, ambicioziem skolēniem, kuri ir atvērti jaunai pieredzei, tādēļ šīs personības īpašības būtu svarīgi attīstīt.
- Skolēni ļoti subjektīvi novērtē savu matemātisko kompetenci. Pārsvarā neatbilstības starp pusaudžu pašvērtējumu un sniegumu atbilstošajos uzdevumos saskan ar Danninga un Krīgera aprakstīto metakognitīvo traucējumu (Kruger, Dunning, 1999), proti, skolēni ar zemāko sniegumu sevi novērtē visaugstāk, bet skolēni ar labiem un izciliem rezultātiem sevi vērtē neatbilstoši zemu. Vismazākā korelācija starp pašvērtējumu un panākumiem uzdevumu risināšanā ir kritiskās domāšanas uzdevumos, kur korelācijas koeficients ir vidēji 0,00. Citiem vārdiem sakot, nepastāv pilnīgi nekāda sakarība. Komunikācijas kritērijā šī korelācija ir tikai 0,09. Ņemot vērā virzību uz pašvadīto mācīšanos, skolēniem jāmāca objektīvāk izvērtēt savu sniegumu.
- Izpētot sakarības starp pusaudžu matemātiskās kompetences kritērijiem (*skat. 5.34. att. un 5.2.2. apakšnodaļā*), var nonākt pie vairākām atziņām, kas ļauj skolotājiem apsvērt vairākas stratēģijas. Pieci matemātiskās kompetences kritēriji ir ciešāk savstarpēji saistīti ar vairākiem citiem kritērijiem (matemātiskā modelēšana, kritiskā domāšana, pašrefleksija un problēmu risināšana), tādēļ viena no stratēģijām varētu būt vairāk laika un uzmanības veltīt darbiem tieši pie dažiem no šiem kritērijiem. Ņemot vērā starp kritērijiem pastāvošās korelācijas, darbs pie viena kritērija, visticamāk, rezultēsies pusaudžu snieguma uzlabojumā vēl trijos vai pat četros citos kritērijos.

- Vēl divi citi matemātiskās kompetences kritēriji – komunikācija un personības īpašības – korelē tikai ar diviem citiem kritērijiem, tādēļ otra stratēģija ir fokusēties uz šiem nosacīti izolētākiem kritērijiem, kuros uzlabojumu var sagaidīt tad, ja skolotājs konsekventi tiem pievērš uzmanību, plānojot mācību procesu.
- Gan eksperti, gan matemātikas skolotāji akcentē, ka pamatskolas matemātikas saturs līdz šim ir bijis pārblīvēts, tādēļ nav iespējams pienācīgu laiku veltīt tam, lai skolēni paši konstruētu savas zināšanas, kā dēļ skolotāji bieži izvēlas gatavu zināšanu nodošanas pieeju. Daļēji šo problēmu risina jaunais mācību priekšmeta standarts, kur daļa pamatskolas satura ir pārcelta uz vidusskolas posmu, izbrīvējot vairāk laika tēmām, kur skolēni veido izpratni par matemātikas jēdzieniem. Piemēram, pirms funkciju temata skolēni divas nedēļas apgūs dažādu veidu sakarības, neminot vārdu "funkcija". Eksperti uzsver, ka skolotājiem būtu ļoti svarīgi izmantot šo laiku paredzētajam mērķim, nevis uz priekšstata veidošanai paredzētā laika rēķina pagarināt nākamā temata apguvei ieplānoto laiku. Lai vēl vairāk optimizētu un efektivizētu mācībām veltīto laiku, skolotājiem jāmeklē vēl vairāk sadarbības iespēju ar citu mācību priekšmetu skolotājiem, jo starpdisciplināra pieeja ļauj vairākas reizes atkārtot un trenēties lietot dažādos kontekstos matemātikā svarīgas zināšanas.

Promocijas darbā veiktā teorētiskās literatūras un avotu analīzes un empīriskā pētījuma rezultātā, izstrādātas **rekomendācijas** matemātikas skolotājiem pedagoģiskās prakses pilnveidei veiksmīgai pusaudžu matemātiskās kompetences veidošanās veicināšanai mācību procesā atbilstoši pusaudžu matemātiskās kompetences saturam:

1) Attīstot pusaudžu matemātisko kompetenci ir jārūpējas par visu septiņu matemātiskās kompetences satura komponenšu vienlaicīgu un sabalansētu attīstību, izvirzot mērķus, formulējot stundā skolēnam sasniedzamo rezultātu, veidojot stundas struktūru un mērķtiecīgi atlasot uzdevumus, lai skolēni konstruētu zināšanas atbilstoši konstruktīvisma pedagoģiskajai pieejai.
2) Lielāka uzmanība jāpievērš skolēnu pašpārliecinātības stiprināšanai un emocionālai labizjūtai. Mācību stundās jāveicina pusaudžu zinātkāre, kopīgi formulējot stundā sasniedzamos rezultātus, dodot vairāk izvēles iespēju, kā sasniegt akadēmiskos mērķus, kā arī, saistot mācību procesu ar reālo dzīvi, piemēram, izvēloties uzdevumus un problēmas ar atbilstošu saturu un dodoties mācību ekskursijās. Arī pilnveidotā satura projektā *Skola2030* īpašs akcents ir likts uz personības īpašībām, rakstura audzināšanu,

vērtībām, tikumiem un ieradumiem, jo arī valstiskā līmenī šī joma ir identificēta kā viena no prioritātēm.

3) Uzticēt skolēniem patstāvīgi veikt pierādījuma uzdevumus, veicināt skolēnu pētniecisko interesi.

4) Vislielākā uzmanība matemātikas skolotājiem ir jāpievērš skolēnu kritiskās domāšanas un problēmu risināšanas prasmēm, jo šajos kritērijos pusaudži uzrādīja viszemākos rezultātus. Viens no risinājumiem ir aktīva skolēnu iesaiste mācību procesā un lielāka fokusēšanās uz saturiski daudzveidīgiem un produktīviem, nevis reproduktīviem uzdevumiem. Skolēniem jāļauj patstāvīgi novērot, interpretēt, pētīt, reflektēt, secināt, konceptualizēt, pārnest iegūtās zināšanas uz citām situācijām, saskatīt atklātās informācijas saistību ar reālo dzīvi, atturoties piedāvāt gatavus, sīki aprakstītus algoritmus. Lai to panāktu, visām šīm darbībām jānodrošina adekvāts daudzums laika, kuru var izbrīvēt, veidojot starpdisciplinārus projektus, tādējādi daļu no matemātikā apgūstamā satura skolēni uzreiz trenētos pielietot vēl citos mācību priekšmetos, piemēram, procentu aprēķini ķīmijā, funkciju lietojums fizikā u. tml. Arī prasmi risināt problēmas skolēni apgūst ātrāk un pamatīgāk, ja iemaņas veidot darba plānu, izvirzīt hipotēzi, izteikt idejas par iespējamiem risinājumiem attīsta vairākos mācību priekšmetos. Jaunajās pamatizglītības programmās ir samazināts tematu un jēdzienu skaits, daļu satura pārnesot uz vidusskolu, tādējādi dodot iespēju atlikušos tematus un jēdzienus apgūt padziļināti, izprotot to jēgu.

5) Lai uzlabotu pusaudžu panākumus modelēšanā, tai jāvelta vairāk laika, lai skolēni varētu ne tikai izprast skolotāja izskaidroto modeli, bet arī pagūtu to saistīt ar savām iepriekšējā zināšanām un trenēties šo modeli lietot dažādu uzdevumu risināšanā. Skolēnu panākumi matemātiskajā modelēšanā ir atkarīgi no starppriekšmetu saiknes, kas var palielināt skolēnu motivāciju apgūt matemātiku, ja modelim ir izvēlēts konteksts no citas jomas. Piemēram, funkcijas var modelēt ar kontekstu no dažādām dzīves jomām: ekonomikas, psiholoģijas, fizikas, ķīmijas, bioloģijas, sporta utt. Veicināt modelēšanas prasmes var arī ar uzdevumiem, kuriem nav vienas, bet ir vairākas pareizās atbildes, jo tas radina kritiski izvērtēt rezultātu.

6) Matemātiskās valodas lietošanas un komunikācijas prasmju uzlabošanai pusaudžiem jāļauj un viņus jāmudina runāt par matemātiku ar klasesbiedriem un skolotāju. Ja mācību līdzekļos lietotā matemātiskā valoda ir pārāk sarežģīta, ieteicams kopā ar skolēniem veidot savus mācību materiālus: atgādnes, garākus un īsākus konspektus, domu zirnekļus u. tml. Vienlaikus pakāpeniski un mērķtiecīgi jāattīsta skolēnu prasmes strādāt ar tekstu: atrast galveno domu, pasvītrot atslēgvārdus. Skolotājiem svarīgi

pievērst uzmanību arī savam komunikācijas veidam, lai skaidrojumi būtu zinātniski korekti, uzdevumu formulējumi – atvērti, savukārt, atgriezeniskā saite – iedrošinoša un konstruktīva.

7) Pusaudži jāradina apdomāt un izvērtēt sava risinājuma rezultātus ar mērķi turpmāk uzlabot savu sniegumu. Pētījuma dati rāda, ka skolēni ārkārtēji neobjektīvi izvērtē savu sniegumu, dara to tikai pēc atgādinājuma un neizmanto pašrefleksijas ceļā vai atgriezeniskajā saitē iegūto informāciju, tādēļ skolēniem jāmācās objektīvi izvērtēt savu darbību un reflektējot to uzlabot. Šis ieradums palīdz mācības veidot par apzinātu procesu, tādējādi mazinot reproduktīvās mācīšanās daļu. Nākamā skolēna patstāvības pakāpe ir pašvadīta mācīšanās.

Pētījuma jautājumi

Promocijas darbā veiktā teorijas analīze un empīriskā pētījuma rezultāti ļauj atbildēt uz pētījuma jautājumiem.

1) Kāds ir pusaudžu matemātiskās kompetences saturs?

Pusaudžu matemātiskā kompetence ir zināšanu, prasmju un attieksmju kopums, kas ļauj izprast un risināt daudzveidīgas problēmsituācijas, darboties vispārinātu modeļu veidā, kritiski izvērtēt un pamatot rezultātu, izmantot matemātiski korektu valodu. Pusaudžu matemātiskās kompetences saturu veido septiņas komponentes: personības īpašības, matemātiskā intuīcija, kritiskā domāšana, problēmu risināšana, modelēšana, komunikācija un pašrefleksija.

2) Kas ietekmē pusaudžu matemātiskās kompetences veidošanos pedagoģiskajā procesā?

Matemātiskās kompetences veidošanos veicina pusaudžu strauji augošās kognitīvās spējas, tostarp atmiņa, uzmanība, kritiskā un racionālā domāšana, kā arī vēlme kritiski izvērtēt informāciju un zinātkāre; turpretī apgrūtina nepacietība, aizkaitināmība un kritiska attieksme pret iegaumēšanu un reproduktīvu mācību procesu. Pusaudžu matemātiskās kompetences veidošanos veicina pāreja no reproduktīvas mācīšanās uz produktīvu, mācību satura diferenciācija, dažādu izziņas līmeņu uzdevumu izvēle, starpdisciplinaritāte, ciešāka sadarbība starp visiem izglītības procesā iesaistītajiem, mācību tempa un grūtības pakāpes pielāgošana pusaudža vajadzībām.

Pētījumā iegūto datu apkopojuma un analīzes rezultātā aizstāvēšanai izvirzītas šādas **tēzes**:

1) Pusaudžu matemātiskā kompetence ir prasmju un attieksmju kopums, kas ļauj izprast un risināt daudzveidīgas problēmsituācijas, darboties vispārinātu modeļu veidā, kritiski izvērtēt un pamatot rezultātu, izmantot matemātiski korektu valodu.
2) Pusaudžu matemātiskās kompetences saturu veido septiņas komponentes: personības īpašības (neatlaidība, zinātkāre, patstāvība un iniciatīva), matemātiskā intuīcija (prasme paredzēt risinājuma gaitu un atbildi, atlasīt noderīgus faktus), komunikācija (prasme izmantot vairākus informācijas avotus, skaidrot savu domu gaitu, uztvert cita argumentus), matemātiskā modelēšana (pusaudzis konceptualizē, vispārina, analizē, saskata algoritmu, izveido modeli), pašrefleksija (izvērtē savu sniegumu, mācās pašvadīti), problēmu risināšana (prot risināt problēmas, pētīt un interpretēt to risinājumus) un kritiskā domāšana (ikdienā novēro, analizē, secina, novērtē, interpretē, izdara argumentētus spriedumus).
3) Pusaudžu matemātiskās kompetences veidošanos veicina:
    a. vecumposma īpatnības: augošas kognitīvās, metakognitīvās, kritiskās domāšanas kā mērķtiecīgas reflektīvas spriešanas un hipotētiski deduktīvās spriešanas prasmes, izteikta zinātkāre, pragmatisms, aizrautība, entuziasms, identitātes meklējumi;
    b. mācību procesa organizācija: novitāte, produktīva, kooperatīva un pašvadīta mācīšanās, pētnieciskie darbi, individualizācija, kvalitatīva atgriezeniskā saite;
    c. mācību uzdevumu izvēle: risinājuma soļu kritisks izvērtējums, iespējas patstāvīgi atklāt jaunas sakarības, pašizziņa.

Pusaudžu matemātiskās kompetences veidošanās izpētes rezultātā iezīmējas šāda tālāko pētījumu tematika:

- Pusaudžu matemātiskās kompetences komponenšu satura detalizētāka izpēte.
- Pusaudžu iekļaušana mācību procesā, izpētot gan matemātikas mācību saturu, gan pedagoģiskās pieejas un metodes.
- Skolotāju izglītības, tālākizglītības un profesionālā atbalsta saturs pusaudžu matemātiskās kompetences attīstībā.
- Rakstura izglītības un pusaudžu matemātiskās kompetences attīstības mijsakarības.
- Izglītības vides un pusaudžu matemātiskās kompetences veidošanās mijsakarības.

Pateicības

Vislielākā pateicība promocijas darba zinātniskajai vadītājai *Dr. paed.*, Latvijas Universitātes profesorei Rudītei Andersonei par zināšanām, prasmēm un attieksmēm, vienu vārdu sakot, kompetenci pētniecībā, pedagoģijā, matemātikā un darba tikumā; ārkārtējo pietāti pret niansēm un bezkompromisa augstākajiem darba standartiem, kas robežojas ar perfekcionismu.

Pateicos promocijas darba priekšaizstāvēšanas recenzentēm *Dr. habil. paed.*, profesorei Irēnai Žoglai un *Dr. habil. paed.*, profesorei Irinai Maslo, kā arī visiem kolokviju dalībniekiem, Pedagoģijas nodaļas docētājiem un kursabiedriem par noderīgu, konkrētu un atklātu refleksiju un padomiem promocijas darba teorētiskās daļas un pētījuma plāna pilnveidē. Liels paldies Latvijas Universitātes profesorei, *Dr. paed.* Lindai Danielai, Latvijas Lauksaimniecības universitātes profesorei, *Dr. paed.* Baibai Briedei un Biznesa, mākslas un tehnoloģiju augstskolas RISEBA profesorei, *Dr. psych.*, *Mg. hrm.*, *Mg. math.* Lūcijai Rutkai par atbalstu, pārliecību par manām spējām izpētīt šo jautājumu un, protams, par ieguldīto darbu pētījuma recenzēšanā. Atsevišķs paldies *Dr. paed.*, profesorei Zandai Rubenei par ļoti interesantām nodarbībām, vērtīgo informāciju par paaudžu teoriju un pacietību sadarbības pirmajos gados.

Īpašs paldies manai audzināmajai klasei ar padziļinātu matemātikas apguvi Mārupes Valsts ģimnāzijā jeb #teamvorobjovs par ideju, iedvesmu un praktisku palīdzību šī darba tapšanā, piekrītot piedalīties izmēģinājuma pētījumā.

Pateicos pētījuma respondentiem – Rīgas un Pierīgas skolu 8. – 9. klašu skolēniem un matemātikas skolotājiem par apzinīgu aptaujas pildīšanu un atklātām atbildēm fokusgrupu diskusijās. Paldies *Mg. paed.*, lektorei Airai Kumerdankai un *Mg. math.* Jānim Vilciņam par veltīto laiku un vērtīgām atbildēm ekspertu intervijās.

Paldies manam labākajam draugam *Mg. sc. soc.* Jurim Tihonovam par promocijas darba un kopsavilkuma literāro rediģēšanu.

Vissirsnīgākais paldies manai ģimenei un draugiem par atbalstu, uzmundrināšanu paguruma brīžos, sapratni un līdzi jušanu visu šo astoņu gadu laikā un ārpus tiem.

Izmantotā literatūra

Zinātniskā literatūra

1. **Adler, A.** (1972). *Reflections: Mathematics and Creativity*. New Yorker, 47, No. 53, 39-45.
2. **Albanese, R.** (1989). *Competency-based Management Education*, Journal of Management Development, Vol. 8 No. 2, pp. 66-76.
3. **Amonašvili, Š.** (2014). Balāde par audzināšanu. Rīga, Latvijas Humānās pedagoģijas asociācija. 103 lpp.
4. **Andersone, R.** (2010). Skolotāju profesionālā kompetence sabiedrības ilgtspējīgai attīstībai. Latvijas Universitātes raksti, 747. sējums. Pedagoģija. Rīga, Latvijas Universitāte. 8. – 19. lpp.
5. **Andrews P.** (2013). *Finnish mathematics teaching from a reform perspective: a video-based case-study analysis*. Comparative Education Review 57, no. 2, pages 189–211.
6. **Aries, P.** (1960). *L'Enfant et la vie familiale sous l'Ancien Régime* (*Centuries of Childhood*). Paris, Plon.
7. **Armstrong, T**. (2017). *Multiple Intelligences in the Classroom*. Alexandria, Va.: ASCD.
8. **Avery, O. T., Macleod, C. M., McCarty, M.** (1944). *Studies on the Chemical Nature of the Substance Inducing Transformation of Pneumococcal Types*. J. Exp. Med. 79 (2): 137–58.
9. **Badger, J.** (2013). *Teaching Singapore Math: Evaluating Measures to Effectively Teach and Implement a New Mathematics Curriculum in 21 Elementary Schools*. GATEways to Teacher Education, A journal of the Georgia Association of Teacher Educators.
10. **Bariss, V**. (2009). Publiskā administrācija. Jelgava, Latvijas Lauksaimniecības universitāte, Sociālo zinātņu fakultāte, 111 lpp.
11. **Barrett, P., Davies, F., Zhang, Y., Barrett, L.** (2015). *The impact of classroom design on pupils' learning: Final results of a holistic, multi-level analysis*. Building and Environment.
12. **Benson, D.** (1999). *The Moment of Proof : Mathematical Epiphanies*. Oxford University Press. pp. 172.–173.
13. **Bernholt, S., Ronnebeck, S., Ropohl, M., Koller, O., & Parchmann, I.** (2013). *ASSIST ME. Report on current state of the art in formative and summative assessment in IBE in STM*. ASSIST-ME Report Series Number 1–2.

14. **Berriman, A.** (1956). *The Babylonian Quadratic Equation*. The Mathematical Gazette, 40(333), 185-192.
15. **Bethere, D., Cupere, I., Kaupužs, A., Laganovska, E., Ļubkina, V., Marzano, G., … Žogla, I.** (2016). Pusaudžu fiziskā, emocionālā un sociālā līdzsvara attīstība iekļaujošajā izglītībā. Rēzekne: Rēzeknes Tehnoloģiju akadēmija. Pieejams šeit: http://www.telerehabilitation.lv/sites/default/files/monografija.pdf
16. **Biggs, J. B., Collis, K. F.** (1982). *Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy*. New York: Academic Press.
17. **Black P., Broadfoot, P., Daugherty, R., Gardner J., Harlen, W., James, M., … Wiliam, D.** (2002). *Testing, Motivation and Learning*. Nuffield Foundation and University of Cambridge.
18. **Blumenstyk, G.** (2020). *By 2020, They Said, 2 Out of 3 Jobs Would Need More Than a High-School Diploma. Were They Right?* The Chronicle of Higher Education, The Edge.
19. **Boaler, J.** (2016). *Mathematical Mindsets. Unleashing Students' Potential through Creative Math, Inspiring Messages & Innovative Teaching*. Wiley: San Francisco.
20. **Bogomolny, A.** (2018). *Mathematics Is a Language*. Available at http://www.cut-the-knot.org/language/MathIsLanguage.shtml
21. **Borba, M**. (2009). *The Big Book of Parenting Solutions*. Jossey-Bass, San Francisco.
22. **Boyatzis, R. E.** (2006). *Competencies in the 21st century*. In: Journal of Management Development, vol.27, 1, pp.5 – 12.
23. **Boyer, C. B., Merzbach, U. C.** (1991). *A History of Mathematics. Second edition*. New York, Wiley.
24. **Bradley, S., Price, N.** (2016). *Critical Thinking: Proven Strategies To Improve Decision Making Skills, Increase Intuition And Think Smarter*. CreateSpace Independent Publishing Platform.
25. **Bruner, J.** (1960). *The Process of Education.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press.
26. **Butler, R.** (1988). Enhancing and undermining intrinsic motivation: The effects of task-involving and ego-involving evaluation on interest and performance. British Journla of Educational Psychology, 58-1.
27. **Burton, D.** (2005). *The History of Mathematics: An Introduction*. New York, McGraw–Hill.
28. **Calinger, R.** (1999). A Contextual History of Mathematics. New York, Pearson.

29. **Carroll, L., Heick, T.** (2019). *8 Science-Based Strategies For Critical Thinking*. TeachThought. Available https://www.teachthought.com/critical-thinking/8-science-based-strategies-for-critical-thinking/
30. **Carver, C., Scheier, M.** (1990). *Origins and functions of positive and negative affect: A control process view*. Psychological Review, 97, 19-35.
31. **Casselman, B.** (1897). *Archimedes' quadrature of the parabola*. Cambridge University Press.
32. **Casserly, A. M.** (2014). *Early Number Concepts: Key Vocabulary and Supporting Strategies*. British Congress of Mathematics Education BCME – 8, University of Nottingham. Available at https://scotens.org/site/wp-content/uploads/Early-Number-Concepts.pdf
33. **Casserly, M.** (2012). *The 10 Skills That Will Get You Hired In 2013*. *Forbes*.
34. **Cassirer, E.** (1962). *An Essay on Man: An Introduction to a Philosophy of Human Culture*. Yale University Press; Reprint edition.
35. **Charles, R.** (2005). *Big Ideas and Understandings as the Foundation for Elementary and Middle School Mathematics*. Journal of Mathematics Education Leadership. 8. 9-24. California: San Jose State University. Available at https://www.cambridgemaths.org/Images/266726-big-ideas.pdf
36. **Chomsky, N.** (1965). *Aspects of the theory of syntax*, Cambridge, Mass, 261 pages.
37. **Chrisomalis, S.** (2003). *The Egyptian origin of the Greek alphabetic numerals*. Antiquity. 77 (297): 485–96.
38. **Clagett, M.** (1961). *The Science of Mechanics in the Middle Ages*. Madison, University of Wisconsin Press,
39. **Cobb, P., Wood, T. and Yackel, E.** (1991). *A constructivist approach to second grade mathematics*. In von Glaserfield, E. (Ed.), Radical Constructivism in Mathematics Education, pp. 157-176. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
40. **Colley, B., Bilics, A., Lerch, C.** (2012) *Reflection: A Key Component to Thinking Critically*. The Canadian Journal for the Scholarship of Teaching and Learning: Vol. 3: Iss. 1, Article 2. DOI: http://dx.doi.org/10.5206/cjsotl-rcacea.2012.1.2 Available at: http://ir.lib.uwo.ca/cjsotl_rcacea/vol3/iss1/2
41. **Collin, A.** (1989). *Managers' Competence: Rhetoric, Reality and Research*. Personnel Review 18. pp. 20–25.
42. **Coolidge, J.** (1952). *The Origin of Polar Coordinates*. Mathematical Association of America, American Mathematical Monthly. 59 (2): 78–85.

43. **Crawford, L.** (2014). *Teaching young kids persistence*. GreatSchools. Available at https://www.greatschools.org/gk/articles/teaching-persistence-1st-and-2nd-grade/
44. **Crick, R. D.** (2008). *Key Competencies for Education in a European Context: narratives of accountability or care*. In: European Educational Research Journal, vol 7, 3, pp.311 – 318.
45. **Croll, P., Attwood, G., Fuller, C.** (2011). *Children's Lives, Children's Futures: A Study of Children Starting Secondary School*. Continuum Studies in Educational Research, Continuum.
46. **Crooks, T.** (2001). *The validity of formative assessments*. British Educational Research Association Annual Conference, University of Leeds. Available at http://www.leeds.ac.uk/educol/documents/00001862.htm
47. **Crounch, D.** (2015). *Highly trained, respected and free: why Finland's teachers are different*. Helsinki, The Guardian.
48. **Cunska, A.** (2013). IKT lietojuma iespējas matemātikas mācīšanā skolā. Rīga, Latvijas Universitāte.
49. **Daeezadeh, H., Homayouni, A., Hosseinzadeh, B., Fakorihajiyar, F.** (2014). *Investigation the role of personality traits in learning mathematics and academic achievement in students of distance education system*. International Institute of Social and Economic Sciences, London.
50. **Daro, V. E., Kokka, K.** (2016). *Evaluating Item Quality in Mathematics Assessments. In Evaluating Item Guality in Large-Scale Assessments. Understanding Language*. Stanford Center for Assessment, Learning & Equity. Stanford Graduate School of Education, pp. 48–82.
51. **Debesse, M.** (1947). *L'adolescence*. Paris, Bibliothèque de Philosophie Contemporaine.
52. **Demir, S., Pismek, N.** (2018). *A Convergent Parallel Mixed-Methods Study of Controversial Issues in Social Studies Classes: A Clash of Ideologies*. Educational Sciences: Theory and Practice. 18. DOI: 10.12738/estp.2018.1.0298.
53. **Dewey, J.** (1910). *How We Think*. Dover Publications.
54. **Dickinson, K.** (2019). *Finland's education system is failing*. New York, Big Think.
55. **Dieudonne, J.** (1975). *L' abstraction et l'intuition mathématique* (Abstrakcija un matemātiskā intuīcija). Bienne, Dialectica, 29: 39–54.
56. **Dijksterhuis, A.** (2004). *Think Different: The Merits of Unconscious Thought in Preference Development and Decision Making*. Journal of Personality and Social Psychology 87(5): 586-98

57. **Dolot, A.** (2018). *The characteristics of Generation Z*. e-mentor. 44-50. 10.15219/em74.1351.
58. **Dreyfus, H. L., Dreyfus, S. E.** (1997). *From Socrates to Expert Systems: The Limits and Dangers of Calculative Rationality*. First published in *Philosophy and Technology II: Information Technology and Computers in Theory and Practice*, Reidel. Available http://www2.psych.utoronto.ca/users/reingold/courses/ai/cache/Socrates.html
59. **Dubois D. D.** (2004). *Competency-Based Human Resource Management*. Rothwell, W. J. – Palo Alto, Davies – Black Publishing, 291 pages, pp. 34.
60. **Dubois, G.** (2018). *Modeling and Simulation: Challenges and Best Practices for Industry. 1st Edition*. CRC Press
61. **Dweck, C. S.** (2006). *Mindset: The new psychology of success*. New York: Random House.
62. **Einstein, A.** (1941). *The Common Language of Science*. the British Association for the Advancement of Science,
63. **Eriksons, E.** (1998). Identitāte: jaunība un krīze. Rīga, Jumava.
64. **Euclid.** (300 B.C.). *Elements*, Book 2.
65. European Commission. (2007). *Key competences for lifelong learning*. Luxembourg: Office for Official Publications of the European Communities.
66. European Commission (2012). *Education and Training 2020 Work programme Thematic Working Group 'Assessment of Key Competences' Literature review, Glossary and examples*. Brussels: Directorate-General for Education and Culture. Available http://ec.europa.eu/dgs/education_culture/repository/education/policy/school/doc/keyreview_en.pdf
67. Eurydice. (2011) *Mathematics Education in Europe: Common Challenges and National Policies*. Brussels, Education, Audiovisual and Culture Executive Agency.
68. **Evan, R. and Lappin, G.** (1994). *Constructing meaningful understanding of mathematics content*, in Aichele, D. and Coxford, A. (Eds.) Professional Development for Teachers of Mathematics , pp. 128-143. Reston, Virginia: NCTM.
69. **Facione, P., Facione, N.** (1993). *Profiling critical thinking dispositions*. Assessment Update. 5 (2): 1–4.
70. **Facione, P.** (2011). *Critical Thinking: What It is and Why It Counts*. Insight Assessment.
71. **Fasko, D.** (2003). *Critical Thinking and Reasoning: Current Research, Theory, and Practice*. Hampton Press.

72. **Fernāte, A.** (2011). Pamatskolu beidzēju analītiskā kompetence. Rīga, Latvijas Universitāte, Dānija, *Danish School of Education*.
73. **Ferri, R., Mousoulides, N.** (2017). *Mathematical modelling as a prototype for interdisciplinary mathematics education?-Theoretical reflections*. CERME, Dublin, Ireland.
74. **Figueroa, D. T., Salz, S.** (2009). *PISA Take the Test: Sample Questions from OECD's PISA Assessments*. OECD.
75. **France, I.** (2010). Matemātika 1. – 9. klasei. Mācību priekšmeta programmas paraugs. ISEC, Rīga.
76. **France, I., Namsone, D., Čakāne, L.** (2015). *What Research Shows about Mathematics Teachers' Learning Needs: Experience from Latvia*. Society, Integration, Education. Proceedings of the International Scientific Conference.
77. **Francis, T., Hoefel, F.** (2018). 'True Gen': Generation Z and its implications for companies. McKinsey & Box1824, Recife, Rio de Janeiro, and São Paulo.
78. **Freire, P., Macedo, D.** (1987). *Literacy: Reading the Word and the World*. South Hadley, MA: Bergin & Garvey.
79. **Freire, P.** (1997) *Pedagogy of the Heart*. New York, Continuum, 141 pp.
80. **Frigg, R., Hartmann, S.** (2006). *Models in Science*. Stanford Encyclopedia of Philosophy. Edward N. Zalta (ed.). Available https://plato.stanford.edu/entries/models-science/
81. **Fullan, M., Langworthy, M.** (2014). *A Rich Seam: How New Pedagogies Find Deep. Learning*. London: Pearson
82. **Fuson, K. C.** (1992). *Research onto whole number addition and subtraction*. In D. A. Grouws (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillian.
83. **Gardner, H**. (1993). *Frames of Mind: The theory of multiple intelligences*. New York: Basic Books.
84. **Gardner, H**. (1999). *Multiple Intelligences: The theory in practice*. New York: Basic Books.
85. **Gardner, H.** (2014). *Mind, Work, and Life: A Festschrift on the Occasion of Howard Gardner's 70th Birthday*. Create Space. Available at: https://howardgardner01.files.wordpress.com/2012/06/festschrift-_-volumes-1-2-_-final.pdf
86. **Garner, B.** (2019). *Black's Law Dictionary, 11th Revised edition*. West Group.

87. **Gavotto-Nogales, O., Glasserman, L., Pierra, L.** (2015). *Formative Assessment as an Essential Competence of University Teachers*. IOSR Journal of Research & Method in Education. 5. 44-47.
88. **Geidžs N. L., Berliners D. C.** (1999) Pedagoģiskā psiholoģija. Rīga: Zvaigzne ABC.
89. **Gershenfeld, N.** (1998). *The Nature of Mathematical Modeling*. Cambridge University Press.
90. **Gertsch, C.** (2011). *Switzerland. Country Report on ICT in Education*. Brussels, European Schoolnet.
91. **Geske, A., Grīnfelds, A., Kangro, A., Kiseļova, R.** (2010). Ko skolēni zina un prot – kompetence lasīšanā, matemātikā un dabaszinātnēs. Rīga, Latvijas Universitāte.
92. **Geske, A., Grīnfelds, A., Kangro, A., Kiseļova, R.** (2013). Latvija OECD Starptautiskajā skolēnu novērtēšanas programmā 2012 – pirmie rezultāti un secinājumi. Rīga, Latvijas Universitāte.
93. **Geske, A., Grīnfelds, A., Kangro, A., Kiseļova, R., Mihno, L.** (2013). OECD starptautiskie izglītības vides un skolēnu novērtēšanas pētījumi. Rīga, Latvijas Universitāte.
94. **Geske, A., Grīnfelds, A., Kangro, A., Kiseļova, R.** (2016). Latvija OECD Starptautiskajā skolēnu novērtēšanas programmā 2015 – pirmie rezultāti un secinājumi. Rīga, Latvijas Universitāte.
95. **Giere, R.** (2010). *An agent-based conception of models and scientific representation*. Synthese, 172(2), pp. 269-281.
96. **Giroux, H., Freire, P., McLaren, P.** (1988). *Teachers as Intellectuals: Toward a Critical Pedagogy of Learning*. Bergin & Garvey Publishers, Inc.
97. **Godel, K.** (1931). *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I* [On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems I]. Monatshefte für Mathematik und Physik. 38: 173–98.
98. **Grattan-Guinness, I.** (1997). *The Rainbow of Mathematics: A History of the Mathematical Sciences*. New York, W. W. Norton.
99. **Gullberg, J.** (1997). *Mathematics: From the Birth of Numbers*. New York, W. W. Norton and Company
100. **Guseva, V.** (2012). Diferencētas mācības iekļaujošās pieejas nodrošināšanai pamatizglītības pirmajā posmā. Daugavpils, Daugavpils Universitāte.
101. **Hahele, R.** (2005). Skolēnu pašnovērtējums bioloģijas mācību procesā. Rīga, Latvijas Universitāte.

102. **Hall, G. S.** (1904). *Adolescence: Its psychology and its relations to physiology, anthropology, sociology, sex, crime, religion and education*, Vol. I. D Appleton & Company.

103. **Halpern, D.** (1995). *Thinking Critically About Critical Thinking*. Routledge.

104. **Handel, M. J.** (2016). *What do people do at work? A profile of U. S. jobs from the survey of workplace Skills, Technology, and Management Practices (STAMP).* Journal for Labour Market Research, Springer, Heidelberg, Vol. 49, Iss. 2, pp. 177-197. Available https://www.econstor.eu/bitstream/10419/158816/1/iab-jlmr-v49-i2-pp177-197.pdf

105. **Hattie, J. A.** (1999). *Influences on student learning*. University of Auckland, New Zealand.

106. **Hattie, J., Timperley, H.** (2007). *The power of feedback*. Review of Educational Research, 77, 81-112.

107. **Hattie, J.** (2012). *Visible Learning for Teachers: Maximizing Impact on Learning*. New York, *Routledge*.

108. **Hattie, J., Clarke, S.** (2018). *Visible Learning: Feedback*. New York, Routledge.

109. **Head, J.** (1981). *Personality and the learning of mathematics*. Educational Studies in Mathematics, Springer Netherlands.

110. **Helmke, A.** (2009). *Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität. Diagnose, Evaluation und Verbesserung des Unterrichts*. Klett, Stuttgart, Kallmeyer, Seelze.

111. **Higgins, S., Beauchamp, G., Miller, D.** (2007). *Reviewing the literature on interactive whiteboards*. Learning, Media and Technology. Vol.32, No.3, pp.213-225. Pieejams šeit: http://www.voiceofsandiego.org/wp-content/uploads/app/pdf/whiteboards.pdf

112. **Hines, E. W.** (1996). *Building Conditions and Student Achievement and Behavior*. Virginia Polytechnic Institute and State University. Blacksburg, Virginia.

113. **Holand, B.** (2017). *The Art of Reflection*. Edutopia.

114. **Hole, A., Grønmo, L. S., Onstad, T.** (2018). *The dependence on mathematical theory in TIMSS, PISA and TIMSS Advanced test items and its relation to student achievement*. Large-scale Assessments in Education.

115. **Hooks, B.** (2010). *Teaching critical thinking: Practical wisdom*. New York, Rootledge.

116. **Howe, N., Strauss, B., Williams, I.** (1993). *13th Gen: Abort, Retry, Ignore, Fail?*. New York: Vintage.

117. **Howe, N., Strauss, W.** (2008). *Millennials Go to College: Strategies for a New Generation on Campus* (2nd ed.). Great Falls: LifeCourse Associates.
118. **Imbovica, I.** (2014). Dzīves svinētājs Jānis Mencis. Rīga, Zvaigzne ABC.
119. Izglītības attīstības centrs. (2008). Kritiskās domāšanas attīstīšanas pieejas izmantošana izglītības sistēmā – ietekme un efektivitāte Latvijā.
120. **Jungs, K.** (1993). Psiholoģiskie tipi. R.: Zvaigzne.
121. **Jurjans, P., Pukite, M., Babajeva, L., Fernandez, M., Andersone, R., Maslo, I., … Lindenskov, L.** (2010) *Analytical competences and positioning – experiences and results from Latvia*. Riga, University of Latvia. Available: https://www.dpu.dk/fileadmin/www.dpu.dk/ASEM/publications/VIETNAM_FORUM_-_LIFELONG_LEARNING_-_BUILDING_A_LEARNING_SOCIETY.pdf
122. **Kahneman, D.** (2011). *Thinking, Fast and Slow*. London, Panguin Books. 499 pages.
123. **Kaiser, G., Vollstedt, M.** (2007). *Teachers' views on effective mathematics teaching: Commentaries from a European perspective*. ZDM. 39. 341-348.
124. **Kakse, V.** (2017). Izglītība mūsdienīgai lietpratībai: mācību satura un pieejas apraksts. Rīga, *Skola2030*.
125. **Kangro, I.** (2010). Studentu matemātiskās domāšanas attīstība profesionālās kompetences veidošanās procesā. Rīga, Latvijas Universitāte.
126. **Kangro, I.** (2016). Latvija OECD Starptautiskajā skolēnu novērtēšanas programmā 2015 – pirmie rezultāti un secinājumi. Rīga, Latvijas Universitāte.
127. **Kant, I.** (1781). *Critique of Pure Reason*. Library of Congress Cataloging-in-Publication Data.
128. **Kardamis, L.** (2019). *10 Ways Literacy Can Promote A Deeper Understanding Of Math*. TeachThought Staff.
129. **Kaur, B., Kian Soh, C., Yoong Wong, K., Tay, E., Toh, T. L., Lee, N. … Chin Tan, L.** (2015). *Mathematics Education in Singapore*. The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education Intellectual and attitudinal challenges. Pages.311-316.
130. **Keevy, J., Chakroune, B.** (2015). *Level-setting and recognition of learning outcomes: the use of level descriptors in the twenty-first century*. Paris, UNESCO.
131. *Key Competences for Lifelong Learning in Europe: Frequently Asked Questions*. (2005). Available: www.europa.eu
132. **Kim, H. S.** (2013). *Quantification for complex assessment: uncertainty estimation in final year project thesis assessment*. European Journal of Engineering Education.

133. **Kincheloe, J.** (2008). *Knowledge and Critical Pedagogy*: *An Introduction (Explorations of Educational Purpose, 1)*. Springer.
134. **King, D. A.** (2005). *Mathematics and the Divine: A Historical Study*. Amsterdam : Elsevier. Pages 162–178.
135. **Kiseļova, R.** (2011). Latvijas pamatizglītības kvalitātes starptautiskas novērtēšanas rezultāti un analīze kā informatīvā bāze izglītības vadības lēmumu pieņemšanai. Rīga, Latvijas Universitāte.
136. **Klafki, W.** (1991). *Neue Studien zur Bildungstheorie und Didaktik. Beiträge zur kritisch-konstruktiven Didaktik.* Beltz, Weinheim/Basel.
137. **Kluger, A. N., DeNisi, A.** (1996). *The effects of feedback interventions on performance: A historical review, a meta-analysis, and a preliminary feedback intervention theory*. Psychological Bulletin, 119(2), 254-284.
138. **Koķe, T.** (2003). Nepārtrauktā izglītība: galvenie uzdevumi un to īstenošana. Nepārtrauktās izglītības sociāli pedagoģiskie aspekti. Rīga : SIA Izglītības soļi.
139. **Kolb, D.** (1984). *Experiential learning: Experience as the source of learning and development* (Vol. 1). Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
140. **Kolmogorovs, A.** (1988). Математика – наука и профессия. Maskavas Universitāte.
141. **Krajcovicova, M.** (2011). *Curriculum of Primary Education in the Slovak Republic*. Problemy Wczesnej Edukacji/Issues in Early Education. VII.
142. **Kristapsone, S.** (2014). Zinātniskā pētniecība studiju procesā. Otrais, aktualizētais izdevums. Biznesa augstskola “Turība”.
143. **Kristapsone, S.** (2020). Statistiskās analīzes metodes pētījumā. Biznesa augstskola “Turība”.
144. **Kruger, J., Dunning, D.** (1999). *Unskilled and Unaware of It: How Difficulties in Recognizing One's Own Incompetence Lead to Inflated Self-Assessments*. Journal of Personality and Social Psychology. 77. 1121-1134.
145. **Krūze, A.** (2004). Laikmets un personība. 5. rakstu krājums. Īga, Izdevniecība RaKa.
146. **Kulberga, I.** (2013). Uzņēmējdarbības vadītāja profesionālās kompetences pilnveidošana Latvijā. Rīga, Latvijas Universitāte.
147. **Kuhn, D., Katz, J. B., Dean, D. J.** (2004). *Developing reason*. Thinking and Reasoning, 10 (2), 197–219.
148. **Kübler, H.-D.** (1996). *Kompetenz der Kompetenz der Kompetenz ... Anmerkungen zur Lieblingsmetapher der Medienpädagogik*. Medien praktisch 2, 11-15.

149. **Lai, M. Y., Murray, S.** (2012). *Teaching with Procedural Variation: A Chinese Way of Promoting Deep Understanding of Mathematics*. International Journal for Mathematics Teaching and Learning. Available at http://www.cimt.org.uk/journal/lai.pdf
150. **Lanmere, J.** (2014). Veicinās iedzīvotāju matemātikas prasmes. Rīga, E-klase. Pieejams http://www.e-klase.lv/lv/zina/zinas/aktualitates/veicinas-iedzivotaju-matematikas-prasmes/ (18.08.2014.).
151. **Lapiņš, E.** (2015). Argumentācija un kritiskā domāšana. 2. lekcija. Rīga, Latvijas Universitāte, LU Open Minded. Pieejams https://www.youtube.com/watch?v=vuAT0mzWL2I (07.07.2016.)
152. **Larson, R., Richards, M. H.** (1994). *Divergent realities: The emotional lives of mothers, fathers, and adolescents*. New York: Basic.
153. **Laursen, K. B.** (2010). *Competence driven teaching of Mathematics*. Institute of Mathematical Sciences, Centre for Science Education, University of Copenhagen, p.13.
154. **Lāce, G.** (2010). Latvijas pamatskolas matemātikas skolotāju kompetence matemātikas didaktikā. Rīga, Latvijas Universitāte.
155. **Lee, K.** (2016). *Mathematical Competence, Teaching, and Learning*. Journal of Numerical Cognition. Vol. 2. 48-52.
156. **Lees, M.** (2016). *Estonian education system 1990 – 2016. Reforms and their impact*. Tallinn, Estonian Ministry of Education and Research.
157. **Lenhart, A.** (2015). *Teens, Social Media & Technology Overview 2015*. Pew Research Center. Pew Research Center Internet Science Tech RSS
158. **Lester, F. K. Jr., Masingila, J. O., Mau, S. T., Lambdin, D. V., dos Santon, V. M., Raymond, A. M.** (1994). *Learning how to teach via problem solving*. in Aichele, D. and Coxford, A. (Eds.) Professional Development for Teachers of Mathematics, pp. 152-166. Reston, Virginia: NCTM.
159. **Levi, L., Oz., S.** (2017). *The Meaningful Learning Cycle: How Learning Should Really Happen?* Medium.
160. **Ļubkina, V**. (2007). Kompetenču paaugstināšana skolotājiem jaunā pamatizglītības standarta realizēšanai vispārizglītojošā skolā. Rēzekne, Rēzeknes augstskola.
161. **Madelāne, S.** (2010). Topošo skolotāju pētnieciskās kompetences pilnveidošanās pētnieciskajā darbībā augstskolā. Rīga, Latvijas Universitāte.

162. **Magnus, J. R., Peresetsky, A. A.** (2018). *Grade Expectations: Rationality and Overconfidence*. Frontiers in Psychology. Available at https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fpsyg.2017.02346/full
163. **Manzano-García, B., Fernández, M.** (2016). The Inclusive Education in Europe. Universal Journal of Educational Research. 4. 383-391.
164. **Mascolo, M.** (2009). *Beyond Student-Centered and Teacher-Centered Pedagogy: Teaching and Learning as Guided Participation*. Pedagogy and the Human Sciences. 1. 3-27.
165. **Maslo I., Tiļļa I.** (2005). Kompetence kā audzināšanas ideāls un analītiskā kategorija. Skolotājs Nr.3., 4. – 9. lpp.
166. **McCarthy, S. A., Griffith, I. J., Gambel, P., Francescutti, L. H., Fotedar, A., Diener, E., & Wegmann, T. G.** (1987). *Immunological competence and host-specific tolerance of antibody-facilitated bone marrow chimeras*. Transplantation, 44(1), 97–105.
167. **McClelland, D.** (1973). *Testing for Competence Rather Than for Intelligence*. American Psychologist, Vol 28(1), Jan 1973, 1-14.
168. **McPeck, J. E.** (1981). *Critical thinking and education*. Oxford: Martin Robinson.
169. **Mead, M.** (1961). *Coming of age in Samoa: A psychological study of primitive youth for Western civilization*. 6th edition. New York: Morrow.
170. **Melton, R.** (1997). *Objectives, Competences and Learning Outcomes*. London : Kogan Page Limited.
171. **Mencis, J.** (1984). Matemātikas metodika pamatskolā. Rīga, Zvaigzne.
172. **Mencis, J.** (2010). Matemātika kā vērtība un matemātika kā līdzeklis. Rīga, Latvijas Universitāte.
173. **Miesniece, A.** (2012). Pirmsskolas izglītības mācību satura programma. Rīga, Valsts izglītības satura centrs.
174. **Minsky, M.** (1965). *Matter, Mind and Models*. Proceedings of IFIP Congress 65, Vol. 1, pp. 45-49.
175. **Montessori, M.** (1914). *Dr. Montessori's Own Handbook*. New York: Frederick A. Stokes Company.
176. **Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Goh, S., Cotter, K.** (2016). *TIMSS 2015 Encyclopedia: Education Policy and Curriculum in Mathematics and Science*. Boston College, TIMSS & PIRLS International Study Center website. Available at http://timssandpirls.bc.edu/timss2015/encyclopedia/

177. **Mwapea, C. M.** (2015). *The Effect of Daily Quizzes on Student Performance in Science*. Montana State University. Available at https://nanopdf.com/download/the-effect-of-daily-quizzes-on-student-performance-in-science-exams-by_pdf
178. **Namsone, D.** (2015). Kompetences mācību saturā. Ko rāda pētījumi? Rīga, Latvijas Universitātes Dabaszinātņu un matemātikas izglītības centrs.
179. **Namukasa, I.** (2004). *School Mathematics in the Era of Globalization*. Interchange, 35(2), 209-227.
180. **Narvaišs, G.** (2013). Matemātikas skolotāju atbalsta sistēma skolā pirmo divu mācību gadu laikā. Rīga, Latvijas Universitāte.
181. **Needham, J.** (1986). *Science and Civilization in China: Volume 3, Mathematics and the Sciences of the Heavens and the Earth*. Taipei, Caves Books, Ltd.
182. **Neimane, I.** (1993). Dažas pedagoģiskās atziņas matemātikas saturā un apguves organizācijā 20. gadsimta 20., 30. gados Latvijā. Rīga, Latvijas Universitāte.
183. **Nikitina, S.** (2006). *Three strategies for interdisciplinary teaching: contextualizing, conceptualizing, and problem-centering*. Journal of Curriculum Studies, 38(3), 251−271.
184. **Niss, M.** (2011). *Curriculum, assessment, teacher training, skills*. The Danish KOM project and possible consequences for teacher education, Journa l of research and training in mathematics education No 9:, Costa Rica, pp 13-24.
185. **Niss, M., Højgaard, T.** (2019). *Mathematical competencies revisited*. Springer Netherlands: Educational Studies in Mathematics, 102: 9, pp 9-28.
186. **Nunes, T., Schlieman, A.-L., Carraher, D.** (1993). *Street mathematics and school mathematics*. New York: Cambridge University Press.
187. OECD. (2009). *Assessment Framework – Key competencies in reading, mathematics and science*, PISA, [online] [02.07.2016.] Available at: www.oecd.org/dataoecd/11/40/44455820.pdf
188. OECD. (2010). *Finland: slow and steady reform for consistently high results*. Available at: https://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/46581035.pdf
189. OECD. (2016a). *PISA 2015 Results. Volume I, Excellence and Equity in Education*. PISA, OECD Publishing, Paris.
190. OECD. (2018a). *PISA 2015 Results in Focus*. PISA, OECD Publishing, Paris.
191. OECD. (2018b). *The Future of Education and Skills*. OECD, Education 2030. Available at: www.oecd.org/education/2030/E2030%20Position%20Paper%20(05.04.2018).pdf

192. OECD. (2019a). *PISA 2018 Results (Volume I) What Students Know and Can Do*. PISA, OECD Publishing, Paris. Available at https://www.oecd-ilibrary.org/docserver/5f07c754-en.pdf
193. OECD. (2019b). *PISA 2018 Results (Volume III): What School Life Means for Students' Lives*. PISA, OECD Publishing, Paris, https://doi.org/10.1787/acd78851-en
194. OECD (2019c). *Education at a Glance 2019: OECD Indicators*. PISA, OECD Publishing, Paris, https://doi.org/10.1787/f8d7880d-en
195. **Oliņa, Z., Namsone D., France I., Čakāne, L., Pestovs, P., Bērtule, D., … Butkēviča, A.** (2018). Mācīšanās lietpratībai. Rīga, Latvijas Universitāte.
196. **Palm, T.** (2008). *Performance assessment and authentic assessment: A conceptual analysis of the literature*. Practical Assessment, Research & Evaluation, 13(4), 1-11.
197. **Pardala, A.** (2010). *The Traditions and Development of Mathematics Education. Case of Poland*. Rzeszów University of Technology, Poland.
198. **Patel, D.** (2018). *16 Characteristics of Critical Thinkers*. Entrepreneur. Irvine, CA.
199. **Pauli, C., Reusser, K.** (2011). *Expertise in Swiss Mathematics Instruction*. Institute of Education, University of Zurich, Zurich, Switzerland. 85-107.
200. Pedagoģijas terminu skaidrojošā vārdnīca. (2000). Rīga : Zvaigzne ABC.
201. **Perry, N.** (1998). *Young children's self-regulated learning and contexts that support it*. Journal of Educational Psychology 90: 715-729
202. **Petersen, A. C., Compas, B. E., Brooks-Gunn, J., Stemmler, M., Ey, S., & Grant, K. E.** (1993). *Depression in adolescence*. American Psychologist, 48, 155–168. Available at: https://www.researchgate.net/publication/233896396_Depression_in_Adolescence
203. **Peterson, C., Seligman, M.** (2004). *Character strength and virtues, a handbook and classification*. New York, NY, Oxford University Press.
204. **Peierls, R.** (1980). *Model-making in physics*. Contemporary Physics. 21: 3–17.
205. **Piaget, J.** (1928). *Judgment and reasoning in the child*. Harcourt, Brace.
206. **Piaget, J., Inhelder, B.** (1999). *The Early Growth of Logic in the Child*. London, Routledge. 302 Pages.
207. **Plofker, K.** (2009). *Mathematics in India: 500 BCE–1800 CE*. Princeton, Princeton University Press.
208. **Podnieks, K.** (2015). Formālisms kā reālās matemātikas filozofija: 14 argumenti. Rīga, Latvijas Universitāte.
209. **Podolak, M., Młynarska, M., Kawałek, A., Śnieżek, W., Genowefa, W.** (2013). *Modern Methods of Teaching – Learning Mathematics and Related Subjects*. The

podkarpacie centre for teacher education in Rzeszów. 2013, Available at http://ec.europa.eu/programmes/proxy/alfresco-webscripts/api/node/content/workspace/SpacesStore/65deb96e-7b36-4dde-869a-28c180d48b11/Modern_Methods_of_Teaching(2).pdf

210. **Poincare, H.** (1894). *On the nature of mathematical Reasoning*. Chapter 1 in Science and Hypothesis . London: Walter Scott Publishing.
211. **Pollard, A., Triggs, P., Broadfoot, P., McNess, E. & Osborn, M.** (2000). What pupils say: changing policy and practice in primary education (chapters 7 and 10). London: Continuum.
212. **Pólya, G.** (1945). *How to Solve It*. Princeton University Press
213. **Pretz, J.** (2011). *Types of intuition: Inferential and holistic*. Cheltenham: Edward Elgar Pub.
214. **Puankare, A.** (1990). *О науке* ("Par zinātni"), 2. izdevums. Maskava, Наука.
215. **Quansah, F.** (2018). *Traditional or Performance Assessment: What is the Right Way to Assessing Learners?* Research on Humanities and Social Sciences, Vol.8, No.1.
216. **Rauhvargers, A.** (2008). Boloņas procesa un ES kvalifikāciju ietvarstruktūras – kopējais un atšķirīgais. Pieejams: www.aic.lv (25.07.2015.).
217. **Riemere, I.** (2013) Uzņēmējdarbības izglītības pārvaldības pilnveide Latvijā skolēnu uzņēmējkompetences attīstības kontekstā. Rīga, Latvijas Universitāte.
218. **Rogers, L.** (1995). *Is the historical reconstruction of mathematical knowledge possible?* Histoire et epistemologie dans I education mathematique, IREM de Montpellier, 105-114.
219. **Rogers, C. R., Lyon, H. C., Jr., Tausch, R.** (2014). *On becoming an effective teacher: Person-centered teaching, psychology, philosophy, and dialogues with Carl R. Rogers and Harold Lyon*. Routledge/Taylor & Francis Group.
220. **Roth, W.-M., Jornet, A.** (2014). *Toward a Theory of Experience*. Sci. Ed., 98: 106-126.
221. **Rubene, Z.** (2006). Kritiskās domāšanas aktualitāte augstākās izglītības reformu kontekstā. Latvijas Universitātes raksti, 700. sējums. Pedagoģija un skolotāju izglītība. Rīga, Latvijas Universitāte.
222. **Rubene, Z.** (2012). Homo medialis kā izpētes fenomens pedagoģiskajā antropoloģijā. Latvijas Universitātes raksti, 781. sējums. Pedagoģija un skolotāju izglītība. Rīga, Latvijas Universitāte.
223. **Rubene, Z., Svece, A.** (2018). Kritiskās domāšanas attīstība Latvijā: situācijas analīze un pilnveides perspektīvas. M. Kūles zinātniskajā redakcijā pētījumā

"Kritiskā domāšana. Izglītība, medijpratība, spriestspēja". Latvijas Universitātes Filozofijas un socioloģijas institūts.

224. **Rust, C.** (2002). *Guide to assessment*. Learning and Teaching Briefing Paper Series, Oxford Centre for Staff and Learning Development – OCSLD.
225. **Saad, L.** (2005). *Math problematic for U. S. teens*. Gallup.
226. **Sahlgren, G. H.** (2015). *Real Finnish Lessons: The true story of an education superpower*. Centre for Policy Studies, Surrey.
227. **Savola, L.** (2010). *Structures of Finnish and Icelandic Mathematics Lessons*. Charlotte, NC, Information Age.
228. **Schoenfeld, A.** (1994). *Reflections on doing and teaching mathematics*. In A. Schoenfeld (Ed.). Mathematical Thinking and Problem Solving. (pp. 53-69). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
229. **Schwarzenberger, R. L. E.** (2000). *The Language of Geometry*. Published in *A Mathematical Spectrum Miscellany*, Applied Probability Trust.
230. **Scriven M., Paul, R. W.** (1987). *Defining Critical Thinking*. 8th Annual International Conference on Critical Thinking and Education Reform, Summer 1987. National Council for Excellence in Critical Thinking.
231. **Seggelen-Damen, I.** (2013). Reflective Personality: Identifying Cognitive Style and Cognitive Complexity. Current Psychology. 32. 82-99.
232. **Sesiano, J., Helaine, S., D'Ambrosio, U.** (2000). *Islamic mathematics. Mathematics Across Cultures*. The History of Non-western Mathematics. Springer.
233. **Setiawan, A. R.** (2019). *A Brief Overview of Singapore Mathematics Syllabus*. LIS Scholarship Archive. Available at https://doi.org/10.31229/osf.io/kgndx
234. **Shor, I.** (1996). *When Students Have Power: Negotiating Authority in a Critical Pedagogy*. University of Chicago Press. 251 Pages.
235. **Siemon, D.** (2006). Assessment for Common Misunderstandings Materials. Prepared for and published electronically by the Victorian Department of Education and Early Childhood Development. http://www.education.vic.gov.au/school/teachers/teachingresources/discipline/maths/assessment/Pages/misunderstandings.aspx
236. **Silver, E.** (2009). *Cross-national comparisons of mathematics curriculum materials: What might we learn?* ZDM - International Journal on Mathematics Education. Karlsruhe, Springer.
237. **Singer, F. M., Sheffield, L. J., Freiman, V., Brandl, M.** (2016). *Research On and Activities For Mathematically Gifted Students*. Hamburg, University of Hamburg.

238. **Singh, A. N.** (1936). *On the Use of Series in Hindu Mathematics*. Osiris, 1 (1): 606–628
239. **Silverstein, M.** (2016). Why Math Skills Are So Important in the Workplace. West Hollywood, Criteria.
240. **Steenhuis, H.-J., Grinder, B., de Bruijn, E. J.** (2009). *The use(lessness) of online quizzes for achieving student learning*. International Journal of Information and Operations Management Education. Pieejams šeit: https://www.researchgate.net/publication/240968615_The_uselessness_of_online_quizzes_for_achieving_student_learning
241. **Steinberg, S., Cannella, G.** (2014). *Critical Youth Studies Reader* (co-edited with Awad Ibrahim). Peter Lang Inc., International Academic Publishers.
242. **Stiggins, R**. (2007). *Educating the Whole Child*. Educational Leadership, Vol 64, No 8. Pieejams: http://www.ascd.org/publications/educational-leadership/may07/vol64/num08/Assessment-Through-the-Student%27s-Eyes.aspx
243. **Struik, D.** (1987). *A Concise History of Mathematics. Third edition*. New York, Courier Dover Publications.
244. Svešvārdu vārdnīca. (1999) Rīga, Jumava, 373 lpp.
245. **Šūmane, I.** (2012). Pusaudžu mācību sasniegumus veicinoša mācību vide. Rīga, Latvijas Universitāte, 203 lpp.
246. **Taimiņa, D.** (1990). Matemātikas vēsture. Rīga, Zvaigzne.
247. **Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S. L., Ingvarson, L., Rowley, G., Peck, R., … Reckase, M.** (2012). *Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics in 17 countries: Findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M)*. Amsterdam, International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).
248. **Tawil, S., Harley, A.** (2004). Education, Conflict and Social Cohesion. UNESCO-IBE.
249. **Teilhard de Chardin, P.** (1959). *The Phenomenon of Man*. Library of Congress.
250. **Thomas, O.** (2006). *Das Modellverständnis in der Wirtschaftsinformatik: Historie, Literaturanalyse und Begriffsexplikation*. In: Scheer, A.-W. (Hrsg.): Veröffentlichungen des Instituts für Wirtschaftsinformatik im Deutschen Forschungszentrum für Künstliche Intelligenz. Heft 184.
251. **Tiļļa, I.** (2005). Sociālkultūras mācīšanās organizācijas sistēma. Rīga, RaKa. 295 lpp.

252. **Tough, P.** (2014). *How Children Succeed – The Hidden Power of Character*. Qatar, World Innovation Summite for Education (WISE).
253. **Turner, A.** (2015). *Generation Z: Technology and Social Interest*. Journal of Individual Psychology.
254. **Turner, R.** (2011). *Exploring mathematical competencies*. Research Developments, Vol. 24.
255. **Turner, R.** (2016). *The very model of a modern mathematician'*. Research Developments, ACER. Available at https://rd.acer.org/article/the-very-model-of-a-modern-mathematician
256. **UNFPA.** (2013). *UNFPA strategy on Adolescents and Youth*. Available at https://www.unfpa.org/sites/default/files/resource-pdf/UNFPA%20Adolescents%20and%20Youth%20Strategy.pdf
257. **Upīte, J.** (2013). Skolotāju izglītības programmas ietekme uz studentu attieksmi pret pedagoga profesiju. Rīga, Latvijas Universitāte.
258. **Ünal, M.** (2017). *Preferences of Teaching Methods and Techniques in Mathematics with Reasons*. Universal Journal of Educational Research. 5. 194-202.
259. **Van Zoest, L., Jones, G. and Thornton, C.** (1994). *Beliefs about mathematics teaching held by pre-service teachers involved in a first grade mentorship program*. Mathematics Education Research Journal. 6(1): 37-55.
260. **Vēgners, U.** (2018). Kritiskās domāšanas izpratne un tās ierobežojumi. M. Kūles zinātniskajā redakcijā pētījumā "Kritiskā domāšana. Izglītība, medijpratība, spriestspēja". Latvijas Universitātes Filozofijas un socioloģijas institūts.
261. **Vigotskis, Ļ.** (1934) *Мышление и речь*. Maskava, Соцэкгиз.
262. **Vilciņš, J.** (2015). Diagnosticējošais darbs matemātikā 8. klasei: skolēnu rezultātu un snieguma analīze. Rīga, VISC.
263. **Vilciņš, J.** (2016). Matemātikas centralizētais eksāmens 2015./2016. m. g.; skolēnu rezultātu un snieguma analīze. VISC.
264. **Young, J.** (2018). *Why Competency-Based Education Stalled*. Burlingame, EdSurge.
265. **Zeidmane, A., Vintere, A.** (2013). Matemātikas kompetenču attīstība augstākās izglītības iestādēs sociāli ekonomiskajā kontekstā (MatNet). Jelgava, Latvijas Lauksaimniecības Universitāte, Šauļi, Šauļu Universitāte.
266. **Zeps, D.** (2007). Reliģijas un matemātikas dialogs: Dieva pierādījumi un Gēdeļa teorēma. Rīga, Latvijas Universitāte.

267. **Zimmerman, B. J., Schunk, D. H.** (2011). *Educational psychology handbook series. Handbook of self-regulation of learning and performance*. New York, NY, US: Routledge/Taylor & Francis Group.

268. **Zuckerman, M.** (1995). *Behavioral expressions and psychobiological bases of sensation seeking*. New York: Cambridge University Press.

269. **Žogla, I.** (2001). Didaktikas teorētiskie pamati. Žurnāla "Skolotājs" mazā pedagoģiskā bibliotēka. Rīga, RaKa.

270. **Žogla, I.** (2018). Pedagoģijas zinātne un izglītības zinātnes. Latvijas Universitātes raksti, 816. sējums. Pedagoģija un skolotāju izglītība.

271. **Wang, L., Liu, Q., Du, X., Liu, J.** (2018). *Chinese Mathematics Curriculum Reform in the Twenty-First Century*. EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education.

272. **Wiggins, G.** (2012). *Seven keys to effective feedback*. Feedback for Learning Special Issue, Educational Leadership, Vol 70 No, pp 10-16.

273. **Wijers, M., van den Heuvel-Panhuizen, M.** (2005). *Mathematics standards and curricula in the Netherlands*. ZDM: the international journal on mathematics education. 37. 287-307.

274. **White, R.** (1959). *Motivation reconsidered: The concept of competence*. Psychological Review, Pages 297–333.

275. **Wolters, M. A. D.** (1986). *Rules in arithmetic: learning the basic facts*. In F. Lowenthal & F. Vandamme (eds), *Pragmatics and education*, New York: Plenum Press.

276. **Wood, D.** (1998). *How Children Think and Learn. Second Edition*. Oxford, *Blackwell Publishers Ltd*.

277. **Амонашвили Ш.** (1998). *Школа жизни*. Москва, Издательский дом Шалвы Амонашвили.

278. **Дахин, А.** (2009). *Моделирование компетентности участников открытого образования*. Москва: НИИ школьных технологий.

279. **Истомина, Н.** (2001). *Методика обучения математике в начальных классах*. Москва, Академия

280. **Моро, М., Пышкало, А.** (1978). *Методика обучения математике в 1 - 3 классах*. Москва, Просвящение. 336 стр.

281. **Ушинский, К.** (1867). *Человек как предмет воспитания. Том I.*

Citi avoti

1. **Adams, D.** (2019). *11 Essential Strategies in Teaching Math*. Available at https://www.weareteachers.com/strategies-in-teaching-mathematics/
2. **Belkin, L.** (2009). *Math's Too Hard for a Parent's Help*. The New York Times.
3. **Bowater, D.** (2012). *Half of children find science and maths too difficult or too boring*. London, Telegraph.
4. **Casselman, B.** (2007). *Yale Babylonian Collection's Tablet YBC 7289*. Yale University, Yale Babylonian Collection. Available at http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/ybc/ybc.html
5. Council of Ministers of Education, Canada. (2010). *PCAP 2010 report on the pan-Canadian assessment of mathematics, science and reading*. Available at http://www.cmec.ca/docs/pcap/pcap2010/English/2_PublicReport/PublicReport_pcap2010.pdf
6. CSP. (2020). Pamatskolu un vidusskolu beigušo turpmākā izglītība. Pieejams šeit: http://data1.csb.gov.lv/pxweb/lv/sociala/sociala__izgl__vispskolas/IZG180.px
7. Cuemath. (2018). *Maths toughest subject for kids, say parents in survey*. New Delhi, India Today.
8. **Department for Education**. (2013). Mathematics programmes of study: key stage 3 National curriculum in England. London.
9. The Economist. (2019). *Generation Z is stressed, depressed and exam-obsessed*. Pieejams šeit: https://www.economist.com/graphic-detail/2019/02/27/generation-z-is-stressed-depressed-and-exam-obsessed
10. Education – from Kindergarten to Adult Education. (2007). Oslo: Norwegian Ministry of Education and Research. Available at https://www.udir.no/Upload/Brosjyrer/5/Education_in_Norway.pdf?epslanguage=no
11. Eiropas Savienības Padome (2009). Padomes secinājumi (2009. gada 12. maijā) par stratēģisku sistēmu Eiropas sadarbībai izglītības un apmācības jomā ("ET 2020"). . Brisele, Eiropas Savienības Oficiālais Vēstnesis.
12. Eiropas Savienības terminu vārdnīca. (2004). Rīga, UNDP, 252 lpp.
13. Eiropean Commission (2005). *Recommendation of the European Parliament and of the Council on Key Competences for Lifelong Learning*. Brussels: Commission of the European Communities. Official Journal of the European Union.
14. **Einstein, A.** (1935). Obituary for Emmy Noether. New York, The New York Times.
15. **Ernštreite, S.** (2017) Aizvadīts ievadseminārs pilotskolām, kas piedalīsies mācību satura aprobācijā. Rīga, VISC.

16. Eurostat (2016). *Low achievers in reading, maths and science, by country*. Available https://ec.europa.eu/eurostat/statistics-explained/index.php?title=File:Low_achievers_in_reading,_maths_and_science,_by_country,_2015.png
17. **Finnish National Board of Education**. (2014). National Core Curriculum for Basic Education 2014. Helsinki.
18. **Fizmix**.lv (2015). Fiztēmas. Mehānika. Ķermeņu kustība. Sviedieni. Pieejams šeit: https://www.fizmix.lv/fiztemas/mehanika-kermenu-kustiba-18/fiztemas-sviedieni
19. **Forbes** (2020). *The Top 10 Skills Recruiters Are Looking For In 2021*. Forbes Human Resources Council. Available at: https://www.forbes.com/sites/forbeshumanresourcescouncil/2020/11/09/the-top-10-skills-recruiters-are-looking-for-in-2021/?sh=69a24c027e38
20. **France, I.** (2010) Matemātika 1. – 9. klasei. Mācību priekšmeta programmas paraugs. Rīga, ISEC.
21. **Graham, B.** (2018). *Five Big Differences Between Millennials and Gen Z That You Need to Know*. Writers Guild. Pieejams šeit: https://medium.com/writers-guild/five-big-differences-between-millennials-and-gen-z-that-you-need-to-know-fdefb607fc41
22. **Grēviņa, R.** (2000). Ekonomikas skaidrojošā vārdnīca. Rīga, Zinātne.
23. **Grīnuma, I.** (2003). Pusceļā uz mūsdienīgām mācībām. Rīga, Diena.26.06.2003. Pieejams https://www.diena.lv/raksts/pasaule/krievija/puscela-uz-musdienigam-macibam-11707236
24. **Humphreys, J.** (2015). *Half of girls believe science and maths are 'too difficult'*. The Irish Times.
25. Izglītības un zinātnes ministrija. (1998). Valsts pamatizglītības standarts. Rīga, Izglītības satura un eksaminācijas centrs.
26. Izglītības un zinātnes ministrija (2015). 8.3.1. specifiskā atbalsta mērķa „Attīstīt kompetenču pieejā balstītu vispārējās izglītības saturu" 8.3.1.1. pasākuma „Kompetenču pieejā balstīta vispārējās izglītības satura aprobācija un ieviešana" sākotnējais novērtējums. 2015. marts. Pieejams http://komitejas.esfondi.lv/Shared Documents/IZM_SN_8311_precizets_12052015.doc
27. **Jeffreys, B.** (2019). PISA rankings: Why Estonian pupils shine in global tests. BBC News. Available at: https://www.bbc.com/news/education-50590581
28. **Jörg, M.** (2017). *Introducing: Generation Z*. En Garde. Available at: https://www.engarde.net/introducing-generation-z/
29. **Kinca, A.** (2015). Matemātika – grūta vai novecojusi? LTV, Panorāma, 09.06.2015.

30. **Kluge, F., Seebold, E.** (2002). *Etymologisches Wörterbuch der deutschen Sprache*, 24.auflage. De Gruyter.
31. **Klūga, M., Krieviņš, R.** (2018). Valdība apstiprina jauno izglītības saturu. Rīga, LSM.
32. **Kuzmina, I.** (2015). Moderni skolosies jau pēc diviem gadiem. Rīga, Latvijas Avīze. Pieejams http://www.la.lv/moderni-skolosies-jau-pec-diviem-gadiem
33. **Lavonen, J.** (2019). The Finnish education system cannot be copied, but parts of it can be exported. Helsinki, Univeristy of Helsinki. Available at https://www.helsinki.fi/en/news/teaching-studying-at-the-university/jari-lavonen-the-finnish-education-system-cannot-be-copied-but-parts-of-it-can-be-exported
34. **LETA**. (2014a). Ar jauno pamatizglītības standartu plānots atteikties no "iekalšanas". Rīga, LETA.
35. **LETA**. (2014b). Skolotāji sliktajos eksāmena rezultātos vaino skolu zemās prasības. Rīga, LETA.
36. **LETA**. (2019). Eksāmenu vidējos rezultātus pasliktinājis profesionālo un vakarskolu audzēkņu sniegums. Rīga, LETA.
37. Māmiņu klubs. (2018). Kurai paaudzei piederi Tu, kurai - Tavi bērni? Uzzini vairāk par X, Y, Z un Alfa paaudzēm. Citāts no 2:41. Pieejams šeit: https://maminuklubs.lv/mazulis/x-y-z-un-alfa-paaudzes-berni-kas-tie-ir-un-kapec-dazkart-nesaprotas-291482/
38. Ministeriet for Børn, Undervisning og Ligestilling. (2015). *Folkeskolens fag* [Subjects in school]. Available at http://www.uvm.dk/Uddannelser/Folkeskolen/Fag-timetal-og-overgange/Fag-emner-og-tvaergaaende-temaer/Folkeskolens-fag
39. Ministru kabineta 2000. gada 5. decembra noteikumi Nr. 462 "Noteikumi par valsts pamatizglītības standartu". Latvijas Vēstnesis, 473/476 (2384/2387), 29.12.2000. https://likumi.lv/ta/id/14020
40. Ministru kabineta 2006. gada 19. decembra noteikumi Nr. 1027 "Noteikumi par valsts standartu pamatizglītībā un pamatizglītības mācību priekšmetu standartiem". Latvijas Vēstnesis, 204 (3572), 22.12.2006. https://likumi.lv/ta/id/150407/redakcijas-datums/2012/01/06
41. Ministru kabineta 2013. gada 6. augusta noteikumi Nr. 530 "Noteikumi par valsts pamatizglītības standartu, pamatizglītības mācību priekšmetu standartiem un pamatizglītības programmu paraugiem". Latvijas Vēstnesis, 162 (4968), 21.08.2013. https://likumi.lv/ta/id/259125

42. Ministru kabineta 2014. gada 12. augusta noteikumi Nr. 468 “Noteikumi par valsts pamatizglītības standartu, pamatizglītības mācību priekšmetu standartiem un pamatizglītības programmu paraugiem”. Latvijas Vēstnesis, 165 (5225), 22.08.2014. https://likumi.lv/ta/id/268342
43. Ministru kabineta 2018. gada 27. novembra noteikumi Nr. 747 “Noteikumi par valsts pamatizglītības standartu un pamatizglītības programmu paraugiem”. Latvijas Vēstnesis, 249 (6335), 19.12.2018. https://likumi.lv/ta/id/303768
44. Ministry of Education, Singapore. (2006). *Mathematics syllabus primary*. Available at https://www.moe.gov.sg/docs/default-source/document/education/syllabuses/sciences/files/2007-mathematics-%28primary%29-syllabus.pdf
45. Ministry of Education, Singapore. (2012). *Mathematics syllabus primary one to four: Implementation starting with 2013 primary one cohort*. Availabe at https://www.moe.gov.sg/docs/default-source/document/education/syllabuses/sciences/files/mathematics-syllabus-(primary-1-to-4).pdf
46. OECD. (2016b). How does PISA work? Available at https://youtu.be/i4RGqzaNEtg
47. **Ozola, Z.** (2019). Jāļauj projektam *Skola2030* iet savu gaitu un paveikt to, kas ir iesākts. Rīga, Latvijas Avīze. Pieejams http://www.la.lv/zane-ozola-jalauj-projektam-skola2030-iet-savu-gaitu-un-paveikt-to-kas-ir-iesakts
48. **Phillips, C.** (2016). *Survey finds nearly half of parents unable to help kids with homework*. Times Free Press.
49. **Riigi Teataja** (2011). *National curriculum for basic schools*. Tallinn.
50. **Salomäki, U.** (2015). *Action Methods Improving Motivation and Quality in the Learning Situations*. Erasmus+, European Bridges Consulting.
51. **Sellgren, K.** (2018). Ofsted admits adding to 'teach-to-the-test' mentality. London, BBC News.
52. **Simanoviča, D., Znotiņa, M.** (2017). Skola 2030. Jaunais mācību saturs prasīs cita veida plānošanu no skolotājiem. Latvijas Radio 1, “Ģimenes studiju”. Pieejams https://lr1.lsm.lv/lv/raksts/gimenes-studija/skola-2030.-jaunais-macibu-saturs-prasis-cita-veida-planosanu-no.a93994/
53. ***Skola2030***. (2018). Ceļā uz mūsdienīgu izglītību – skolotājs kā mācību procesa vadītājs. Rīga, konference “Lietpratība pamatizglītībā”.
54. **Skujiņa, V**. (2009) Par termina kompetence izpratni un lietošanu latviešu valodā. Latvijas Zinātņu akadēmijas Terminoloģijas komisijas lēmums Nr.84. Rīga.

55. **Squires, N.** (2013). OECD education report: Switzerland's pupils focus on maths to succeed in the knowledge economy. Zurich, The Telegraph.
56. The Elementary and Secondary Education Bureau. (2011). *The Revisions of the Course of Study for Elementary and Secondary Schools*. Ministry of Education of Japan, Culture, Sports, Science and Technology.
57. Valsts valodas aģentūra (2014). *Glossary of European Union Terminology*. Eiropas Savienības terminu vārdnīca. Baltiņš, M. (priekšvārds). Rīga, "Madris".
58. **Vilciņš, J**. (2018). Kā mainīsies mācīšanas pieeja matemātikā? Rīga, *Skola2030*. Pieejams https://www.youtube.com/watch?v=PVbvG30v7OI
59. **VISC** (2015). Par plānotajām izmaiņām mācību saturā. VISC, Vispārējās izglītības satura nodrošinājuma nodaļa.
60. **VISC** (2016). Projekta "Kompetenču pieeja mācību saturā" pieteikums. VISC, Vispārējās izglītības satura nodrošinājuma nodaļa.
61. **VISC** (2017). Diagnosticējošais darbs matematikā 8. klasei. 1. variants. VISC, Vispārējās izglītības pārbaudījumu nodaļa.
62. **VISC** (2019). Projekta "Kompetenču pieeja mācību saturā" materiālu izstrāde. Mājaslapas domaundari.lv materiālu darba variants.
63. **Министерство образования и науки**. (2014). Федеральный государственный образовательный стандарт начального общего образования. Москва.

Pielikumi

1. pielikums. Empīriskā pētījuma 1. posma (izmēģinājuma pētījuma) anketa pusaudžiem

2. pielikums. Empīriskā pētījuma 1. posma (izmēģinājuma pētījuma) anketa matemātikas skolotājiem

3. pielikums. Empīriskā pētījuma 1. posma (izmēģinājuma pētījuma) pašrefleksijas anketa pusaudžiem un viņu atbildes

4. pielikums. Empīriskā pētījuma 1. posma (izmēģinājuma pētījuma) matemātikas stundas vērošanas piezīmes

5. pielikums. Empīriskā pētījuma 1. posma (izmēģinājuma pētījuma) fokusgrupas intervijas ar skolēniem transkripts

6. pielikums. Empīriskā pētījuma 1. posma (izmēģinājuma pētījuma) skaitliskie rezultāti

7. pielikums. Empīriskā pētījuma 1. posma (izmēģinājuma pētījuma) aprakstošā statistika

8. pielikums. Empīriskā pētījuma 1. posma (izmēģinājuma pētījuma) korelācijas analīze ar Spīrmena testu

9. pielikums. Empīriskā pētījuma 2. posma (pamatpētījuma) anketa pusaudžiem

10. pielikums. Empīriskā pētījuma 2. posma (pamatpētījuma) fokusgrupas diskusijas ar matemātikas skolotājiem transkripts

11. pielikums. Empīriskā pētījuma 2. posma (pamatpētījuma) daļēji strukturētā intervija ar ekspertu Jāni Vilciņu

12. pielikums. Empīriskā pētījuma 2. posma (pamatpētījuma) daļēji strukturētā intervija ar eksperti Airu Kumerdanku

13. pielikums. Empīriskā pētījuma 2. posma (pamatpētījuma) skaitliskie rezultāti

14. pielikums. Empīriskā pētījuma 2. posma (pamatpētījuma) frekvenču tabulas

15. pielikums. Empīriskā pētījuma 2. posma (pamatpētījuma) aprakstošā statistika

16. pielikums. Empīriskā pētījuam 2. posma (pamatpētījuma) mainīgo sadalījums

17. pielikums. Empīriskā pētījuma 2. posma (pamatpētījuma) korelācijas analīze ar Spīrmena testu

1. pielikums

Empīriskā pētījuma 1. posma (izmēģinājuma pētījuma) anketa pusaudžiem

Aptauja

Šī ir anonīma aptauja, kuras mērķis ir noskaidrot Tavu viedokli par iespējām veidot matemātisko kompetenci matemātikas mācību stundās, kā arī pārbaudīt Tavas prasmes.

1. Cik bieži Tev gadās uzminēt nākamo uzdevuma atrisinājuma soli?

vienmēr bieži reizēm nekad

cita atbilde ………………………………………………………….

2. Cik bieži, risinot uzdevumu, novērtē rezultātu, pirms veikt aprēķinus?

vienmēr bieži reizēm nekad

cita atbilde ………………………………………………………….

3. Paturpini skaitļu virkni 2, 8, 18, …

4. Cik bieži Tev ir problēmas uztvert, kas ir prasīts uzdevumā?

katru stundu bieži reizēm nekad

cita atbilde ……………………………………………….

5. Cik bieži Tev matemātikas stundās jāpamato savs viedoklis

katru stundu bieži reizēm nekad

cita atbilde ……………………………………………….

6. 2015. gadā Mārupes vidusskolā mācījās 910 skolēni, 2016. gadā – 1000 skolēnu un 2017. gadā – 1100 skolēni. Sastādi matemātisku uzdevumu un atrisini to!

7. Cik bieži matemātikas stundās veidojat matemātisku modeli reālas dzīves problēmai?

katru stundu bieži reizēm nekad

cita atbilde ……………………………………………….

8. Kādus procesus var aprakstīt ar funkciju?

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………….……

9. Vienādsānu trijstūra viena mala ir 8 cm un cita mala ir 5 cm gara. Aprēķini trijstūra perimetru.

10. Vai risinot uzdevumus izmanto enciklopēdijas, rokasgrāmatas vai citus informācijas avotus?

katru stundu bieži reizēm nekad

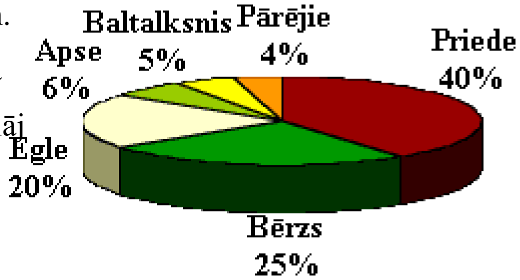
cita atbilde ………………………………………….

11. Cik bieži Tu spēj uzdevumu pateikt saviem vārdiem, interpretēt?

vienmēr bieži reizēm nekad

cita atbilde ……………………………………………………….

12. Puse Latvijas teritorijas ir klāta ar mežiem. Diagrammā ir redzams Latvijas mežu sadalījums pa koku sugām. Cik procentus no Latvijas teritorijas klāj skujkoku meži?



13. Cik bieži spēj argumentēt savu risinājumu vai viedokli?

vienmēr bieži reizēm nekad

cita atbilde ………………………………………………………….

14. Kāds būtu pirmais solis, lai ar pierādījumu no pretējā pamatotu, ka $\sqrt{2}$ ir iracionāls skaitlis?

15. Četrstūra diagonāles ir reizē arī četrstūra leņķu bisektrises. Kā Tu pamatotu, ka šis četrstūris ir rombs?

16. Ja uzdevumu Tev neizdodas uzreiz atrisināt, Tu tomēr meklē citu risinājumu vai arī atliec malā, neturpini par to domāt?

☐ pūlos izdomāt risinājumu

☐ atlieku malā, lai pēc brīža turpinātu risināt

☐ nerisinu, jo gan jau saņemšu palīdzību

☐ nerisinu, jo pieņemu, ka to nevaru atrisināt

☐ cita atbilde

……………………………………………………………………………………

17. Cik bieži, risinot uzdevumu, Tev rodas interese noskaidrot vai aprēķināt vēl kaut ko, kas nav prasīts uzdevumā?

vienmēr bieži reizēm nekad

cita atbilde ………………………………………………………….

18. Iedomājies, ka, risinot ģeometrijas uzdevumu, Tu ieguvi atbildi, ka malas garums ir negatīvs skaitlis. Kā Tu rīkotos?

19. Vai Tu vari atrisināt jebkuru matemātikas uzdevumu?

20. Kā Tu rīkotos, ja risinājuma gaitā atklātos, ka Tevis izvēlētais risināšanas paņēmiens noved strupceļā un neļauj tikt pie atbildes?

21. $9^2 > 9$, bet $0{,}9^2 < 0{,}9$. Ko Tu secināji no šīm divām skaitliskām nevienādībām?

2. pielikums

Empīriskā pētījuma 1. posma (izmēģinājuma pētījuma) anketa matemātikas skolotājiem

Skolotāja aptauja

Šī ir anonīma aptauja, kuras mērķis ir noskaidrot Jūsu viedokli par skolēnu iespējām veidot matemātisko kompetenci matemātikas mācību stundās.

1. Cik bieži Jūsu skolēniem gadās uzminēt nākamo uzdevuma atrisinājuma soli?

1.1. vienmēr 1.2. bieži 1.3. reizēm 1.4. nekad

1.5. cita atbilde ……………………………………………………….

2. Cik bieži, risinot uzdevumu, Jūsu skolēniem novērtē rezultātu, pirms veikt aprēķinus?

2.1. vienmēr 2.2. bieži 2.3. reizēm 2.4. nekad

2.5. cita atbilde ……………………………………………………….

3. Paturpiniet skaitļu virkni 2, 8, 18, …

4. Cik bieži Jūsu skolēniem ir problēmas uztvert, kas ir prasīts uzdevumā?

4.1. katru stundu 4.2. bieži 4.3. reizēm 4.4. nekad

4.5. cita atbilde ………………………………………….

5. Cik bieži Jūsu skolēniem matemātikas stundās jāpamato savs viedoklis?

5.1. katru stundu 5.2. bieži 5.3. reizēm 5.4. nekad

5.5. cita atbilde ………………………………………….

6. 2015. gadā Mārupes vidusskolā mācījās 910 skolēni, 2016. gadā – 1000 skolēnu un 2017. gadā – 1100 skolēni. Sastādiet matemātisku uzdevumu un atrisini to!

7. Cik bieži matemātikas stundās veidojat matemātisku modeli reālas dzīves problēmai?

7.1. katru stundu 7.2. bieži 7.3. reizēm 7.4. nekad

7.5. cita atbilde ………………………………………….

8. Kādus procesus var aprakstīt ar funkciju?

……………………………………………………………………………………….………

……………………………………………………………………………..…………………

…………………………………………………………………..……

9. Vienādsānu trijstūra viena mala ir 8 cm un cita mala ir 5 cm gara. Aprēķini trijstūra perimetru.

10. Vai risinot uzdevumus Jūsu skolēni izmanto enciklopēdijas, rokasgrāmatas vai citus informācijas avotus?

10.1. katru stundu 10.2. bieži 10.3. reizēm 10.4. nekad

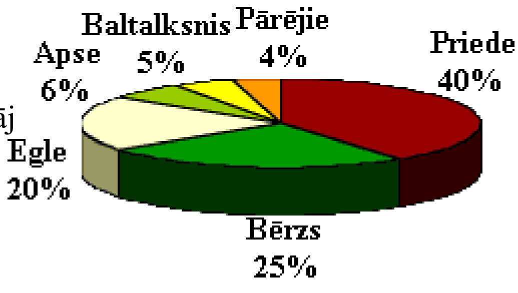
10.5. cita atbilde ………………………………………….

11. Cik bieži Jūsu skolēni spēj uzdevumu pateikt saviem vārdiem, interpretēt?

11.1. vienmēr 11.2. bieži 11.3. reizēm 11.4. nekad

11.5. cita atbilde ……………………………………………………….

12. Puse Latvijas teritorijas ir klāta ar mežiem. Diagrammā ir redzams Latvijas mežu sadalījums pa koku sugām. Cik procentus no Latvijas teritorijas klāj skujkoku meži?



13. Cik bieži Jūsu skolēni spēj argumentēt savu risinājumu vai viedokli?

13.1. vienmēr 13.2. bieži 13.3. reizēm 13.4. nekad

13.5. cita atbilde …………………………………………………….

14. Kāds būtu pirmais solis, lai ar pierādījumu no pretējā pamatotu, ka $\sqrt{2}$ ir iracionāls skaitlis?

15. Četrstūra diagonāles ir reizē arī četrstūra leņķu bisektrises. Kā Jūs pamatotu, ka šis četrstūris ir rombs?

16. Ja Jūsu skolēniem neizdodas uzreiz atrisināt, viņi tomēr meklē citu risinājumu vai arī atliek malā, neturpina par to domāt? Sarindojiet iespējamos scenārijus pēc ticamības, kur 1 – vismazāk ticamā atbilde līdz 5 – ticamākā versija.

16.1. ☐ pūlētos izdomāt risinājumu

16.2. ☐ atliktu malā, lai pēc brīža turpinātu risināt

16.3. ☐ nerisinātu, gaidītu palīdzību no skolotāja

16.4. ☐ nerisinātu, jo uzskatītu, ka to nevaru atrisināt

16.5. ☐ cita atbilde

…………………………………………………………………………………

17. Cik bieži, risinot uzdevumu, Jūsu skolēniem rodas interese noskaidrot vai aprēķināt vēl kaut ko, kas nav prasīts uzdevumā?

17.1. vienmēr 17.2. bieži 17.3. reizēm 17.4. nekad

17.5. cita atbilde …………………………………………………….

18. Iedomājieties, ka, risinot ģeometrijas uzdevumu, Jūsu skolēns ieguva atbildi, ka malas garums ir negatīvs skaitlis. Kā, Jūsuprāt, skolēns rīkotos?

19. Vai Jūsu skolēni var atrisināt jebkuru matemātikas uzdevumu?

20. Ja Jūsu skolēns risinājuma gaitā atklātu, ka viņa izvēlētais risināšanas paņēmiens noved strupceļā un neļauj tikt pie atbildes, kā skolēns, visticamāk, rīkotos?

21. $9^2 > 9$, bet $0{,}9^2 < 0{,}9$. Ko Jūsu skolēni, Jūsuprāt, secinātu no šīm divām skaitliskām nevienādībām?

3. pielikums

Empīriskā pētījuma 1. posma (izmēģinājuma pētījuma) pašrefleksijas anketa pusaudžiem un viņu atbildes

Aptauja par matemātisko kompetenci

Šī ir anonīma aptauja, kuras mērķis ir noskaidrot Tavu viedokli par matemātiskās kompetences jēdzienu, kā arī ļaut Tev novērtēt, cik lielā mērā matemātikas stundas šajā pusgadā palīdzējušas Tev veidot matemātisko kompetenci, kā arī pamatot savu atbildi.

1. Kā Tu saproti matemātisko kompetenci?

“Labas matemātikas zināšanas.”

“Matemātikas līmenis, kādā tu esi apguvis mācīto saturu.”

“Es varu minēt, ka tā ir manu zināšanu daudzuma noteikšana vai kaut kas tamlīdzīgs.”

“Varbūt tas ir kaut kas saistīts ar to, ka skolotājs runā tikai par matemātiku un visu kas notiek šajā klasē nevienam neizpauž.”

“Matemātiskā kompetence ir cieņa pat priekšmetu matemātika, zināšanu līmeņa vērtējums, cik daudz Tu esi kompetents matemātikas jomā.”

“Izvērtēt rezultātus domājot matemātiski, ievērojot matemātikas likumus un rezultātus balstīt uz tiem.”

“Spēju pielietot matemātikā iegūtās zināšanas un prasmes dažādu uzdevumu veikšanai, arī ikdienas dzīvē.”

“Varbūt tas varētu būs saistīts ar kaut kādu atbildību, ka kaut ko spēj izvērtēt atbilstoši un izdarīt.”

“Manuprāt, tas ir, ka uz jebkuru jautājumu var atrast atbildes ar matemātikas palīdzību.”

“Manuprāt, tas ir matemātisko zināšanu līmenis. Kompetence norāda, cik augsts tas ir.”

“Manuprāt, tā ir īpašība , kura parāda skolnieka attieksmi pret šo mācību saturu.”

“Apzīmējums, cik labas vai sliktas spējas katram ir matemātikā.”

“Manuprāt, matemātiskā kompetence ir, kad skolotājs pasniedz matemātiku pēc iespējas augstākā un kvalitatīvākā līmenī, cenšoties sadarboties ar skolēniem, ir draudzīgs, uzklausa visu neskaidro un vienmēr cenšas palīdzēt, ja radusies kāda sarežģītāka situācija. Tajā pašā laikā neaizmirstot par savu profesionalitāti un to, ka esat skolotājs ar mērķi mums kaut ko iemācīt!”

“Manuprāt, tas norāda uz to, vai Tu zini un saproti šo priekšmetu, vai tas ir Tavā kompetencē.”

“Matemātiskā kompetence ir tā kā sacensības – kurš vispareizāk izdara.”

“To, kad cilvēks visu saprot un izprot tēmu.”

“To, ka cilvēks matemātiski var saprast, kā kāda darbība vai uzdevums ir izpildāms.”

“Es īsti nezinu šo vārdu nozīmi, bet ja to uztver kā to, kā tas palīdzēs nākotnē, tad matemātika ļoti noderēs, manuprāt 80 % sadzīvē sastāv no matemātikas.”

“Matemātiski kompetents cilvēks ir cilvēks, kuram padodas un patīk matemātika un šķiet viegli saprotama.”

“Matemātiskā kompetence, manuprāt, nozīmē tās nepieciešamību un lietderīgumu ikdienā un dzīves pieredzē, kā arī to, cik ļoti cilvēks saprot to, kas viņam ir jāzina un jāprot.”

“Man šķiet, ka tā ir kaut kāda apziņa matemātiku izmantot dzīvē.”

“Manuprāt, tas ir potenciāls vai viedoklis par matemātikas tēmām, izpratne, matemātiska domāšana.”

“Manuprāt, tā ir matemātikas pieredze. Pieredze, ar ko ir saskāries un kas saistīta ar matemātiku.”

“Matemātikas sasniegumi vai panākumi.”

“Kā cilvēks saprot matemātiku, pilda uzdevumus.”

“Laba skaidrošana un patika pret matemātiku.”

Pārējās atbildes bija dažādos veidos izteikts “Nezinu” (19 atbildes) vai minējumi, ka tā ir kaut kādā veidā saistīta ar matemātiku (“Kaut kas ļoti matemātisks”). 4 respondenti neatbildēja uz šo jautājumu.

2. Pusaudžu matemātiskā kompetence ir spēja ar iniciatīvu, atbildību un pārliecību par sevi uztvert, izprast un risināt jautājumus daudzveidīgās situācijās, darboties kvantitatīvi un vispārinātu modeļu veidā; kritiski izvērtē un pamato rezultātu, kuru spēj nojaust pirms risinājuma. Vai Tu piekrīti šim formulējumam? Kādēļ jā vai nē? Ko Tu izlabotu šajā skaidrojumā?

“Es piekrītu, ka skolēniem ir jāmācās daudzpusīgāk, lai zinātu vairākas pieejas vienam atrisinājumam un, lai trenētu loģisko domāšanu un veicinātu uzdevumu veiktspēju.”

“Piekrītu, jo, lai kaut ko sasniegtu un iegūtu augstu līmeni, ir jāpieliek darbs tajā, darot visu, kas minēts augstāk.”

“Jā piekrītu, jo izklausās kā no vārdnīcas nokopēts. Es gan noņemtu vārdu "pusaudžu", jo es nedomāju, ka bērnu un pieaugušo matemātiskās kompetences ir atšķirīgas. Kā arī rezultātu nevar vienmēr nojaust pirms risinājuma pildīšanas.”

“Piekrītu, jo es pats nezināju, ko tas nozīmē, un tas izklausās ļoti atbilstoši.”

“Piekrītu, jo tas ir tuvu tam, ko es pateicu, bet labāk izskaidrots.”

“Es piekrītu šim formulējumam, jo, manuprāt, spēja risināt lietas ar iniciatīvu un atbildību ir ļoti noderīgi un tas var palīdzēt uzlabot to, kas vēl ir jāuzlabo.”

“Pusaudžiem ir jāiesaistās aktīvi, jāmēģina visu izprast. Piekrītu formulējumam.”

3. Skalā no 1 līdz 10 novērtē, cik lielā mērā matemātikas stundas šajā pusgadā palīdzējušas Tev veidot matemātisko kompetenci šīs aptaujas 2. jautājumā minētajā izpratnē?

Skolēnu atbilžu vidējais aritmētiskais ir 6,35, moda ir 8 (šādu vērtējumu ir izvēlējušies 13 no 66 respondentiem), atbilžu standartnovirze ir 2,38 un vienas standartnovirzes attālumā no vidējās aritmētiskās vērtības atrodas 45 no 66 atbildēm jeb 68,2 % atbilžu, kas ar procenta desmitdaļas precizitāti atbilst normālajam sadalījumam.

4. Pamato izvēlēto vērtējumu.

Skolēni, kuri ir izvēlējušies augstākos vērtējumus (8 līdz 10), kā pamatojumu uzskaitīja dažādas matemātikas stundās iegūtās prasmes.

“Ja es nevaru izrēķināt uzdevumu, bet tajā pašā laikā zinu, nojaušu pareizo atbildi, es mēģinu viņu pierādīt, risinot to uzdevumu ar dažādām metodēm. Kaut kas, ko es nedarīju pagāšgad.”

“Man patīk matemātika un man patīk apskatīt visdažādākos risinājumu veidos, jo tas papildina manu skatījumu uz lietām par matemātiku.”

“Matemātikas stundās es daudz esmu iemācījies, attīstījis prasmes, kas ietvertas matemātiskās kompetences skaidrojumā.”

“Jo kādreiz es ta nevarēju un tagad varu risināt jautājumus daudzveidīgās situācijās.”

“Es uzskatu, ka esmu kļuvusi atbildīgāka par to, ko es daru.”

“Esmu sapratis, ka pašam ir vairāk jāapgūst temats, lai motivētu sevi saprast stundu norisi un atvieglotu savus pārbaudes darbus ar savām zināšanām. Kā mēs reiz teicām: “Matemātika vienmēr būs jautra un interesanta tikai tad, kad to sapratīsi.””

Skolēni, kuri ir izvēlējušies vidējus un labus vērtējumus (5 līdz 7), kā pamatojumu minēja to, ka ir iemācījušies tikai atsevišķas prasmes, kuras ir pieminētas matemātiskās kompetences definīcijā, vai arī tās prot pielietot noteiktās situācijas, uzdevumos.

"Es varu daudzveidīgi izrisināt piemērus, bet tikai dažus."

"Es nespēju redzēt vairākas pieeja. Es labāk iemācos vienu, lai nejauktu galvu, jo man matemātika ir grūta lieta."

Skolēni, kuri ir izvēlējušies zemus vērtējumus (1 līdz 4), to argumentēja ar grūtībām saprast matemātiku.

"Nezinu, grūti izprast."

"Nav mans priekšmets."

"Es neesmu daudzveidīgi veidojis atbildes."

Empīriskā pētījuma 1. posma (izmēģinājuma pētījuma) matemātikas stundas vērošanas piezīmes

1. stunda

Klase: 8.

Skolēnu skaits: 29.

Stundas tēma: Kvadrātu starpība.

Mērķis: Atklāj lietderīgumu pielietot kvadrātu starpības formulu.

Skolēnam sasniedzamie rezultāti:

- ✓ Zina kvadrātu starpības formulu.
- ✓ Prot pielietot kvadrātu starpības formulu gan dažādu abstraktu, gan praktiska satura uzdevumu risināšanā.

Stundas gaita:

Stundas fāze	**Skolotāja darbība**	**Skolēnu darbība**
Aktualizācija	Piedāvā skolēniem uzdevumu: uzraksti polinoma $a+3$ reizinājumu ar polinomu $a-3$, sareizini tos un savelc līdzīgos saskaitāmos! Nākamais uzdevums skan šādi: Pārveido par polinomu $(b-5)\cdot(b+5)=?$ Vai novēroji sakarību? Ar ko vienāds reizinājums $(a+b)\cdot(a-b)$?	Skolēni pielieto iepriekš iegūtās zināšanās par darbībās ar polinomiem, cenšas pamanīt likumsakarību. Vispārina iepriekšējos divus piemērus un izvirza hipotēzi, ka atbilde varētu būt $a^2 - b^2$.
Apjēgšana	Aicina skolēnus izpildīt uzdevumu ar 11 piemēriem, kuros kvadrātu starpībā iztrūkst kādi monomi un darbību zīmes, piemēram, $(4 - a)(a + 4) = 16 - ?$	Skolēni cenšas pārnest zināšanas no iepriekšējiem piemēriem, lai varētu aizpildīt trūkstošo informāciju.
Lietošana	Ierosina pielietot nupat apgūto formulu, lai sadalītu reizinātājos kvadrātu starpības. Piedāvā dažādas grūtības pakāpes piemērus, tostarp $y^2 - 121$, $\frac{1}{4}x^2 - \frac{25}{36}c^2$ un $0{,}01x^2 - y^6$. Turpinājumā skolēniem piedāvā piemērus ar augstāku izziņas līmeni – tajos starpības kvadrāta	No piedāvātajiem 16 piemēriem, kuri ir sakārtoti grūtības pakāpes pieaugšanas secībā, skolēni izvēlas vairākas starpības un sadala tās reizinātājos. Risinājuma gaitu un atbildes pārrunā ar klasesbiedriem un skolotāju.

	formula jāpielieto nestandarta situācijās: $1-(x-y)^2$, $(a+b+c)^2-(a+b-c)^2$ u. tml.	No piedāvātajiem sešiem piemēriem skolēni atrisina dažus pēc izvēles. Salīdzina atbildi ar atbilžu lapu.
Refleksija	Noslēgumā skolotājs piedāvā atrisināt uzdevumu, kurā atbilde jānosaka attapīgi, piemēram, 88^2-86^2, $1003\cdot 997$ u. tml. Ātrākajiem risinātājiem skolotājs piedāvā pierādījuma uzdevumu: pierādi, ka ar jebkuru veselu n vērtību izteiksmes $(7n+1)^2-(3n-1)^2$ vērtība dalās ar 40.	Skolēni saskata šajos piemēros kvadrātu starpības formulu un pielieto to. Pārveido par reizinājumu arī pierādījuma uzdevumā ietverto izteiksmi un cenšas argumentēt, kādēļ tā vienmēr dalās ar 40.

2. stunda

Klase: 8.

Skolēnu skaits: 29.

Stundas tēma: Saīsinātās reizināšanas formulas vienādojumu un nevienādību atrisināšanā.

Mērķis: pilnveidot, sistematizēt prasmes darbā ar algebriskajām izteiksmēm, padziļināt izpratni par vienas un tās pašas izteiksmes dažāda veida pierakstu priekšrocībām un nozīmi.

Skolēnam sasniedzamie rezultāti:

- ✓ Plāno vienādojumu, nevienādības risinājuma gaitu.
- ✓ Zina, saskata un prot pielietot saīsinātās reizināšanas formulas.
- ✓ Lieto saīsinātās reizināšanas formulas divējādi – kreisās puses izteiksmi aizstāj ar labās puses izteiksmi un labās puses izteiksmi aizstāj ar kreisās puses izteiksmi.

Stundas gaita:

Stundas fāze	Skolotāja darbība	Skolēnu darbība
Aktualizācija	Sāk stundu ar uzdevumu: “Savieto izteiksmes, lai iegūtu vienādības! Izlasi izveidotās vienādības.” Aicina veikt pārbaudi, piemēram, pārrakstot $(2x+3y)^2$ kā divkāršu reizinājumu $(2x+3y)(2x+3y)$ un atverot iekavas.	Skolēni bez grūtībām savieno izteiksmes, kas veido formulas, piem., $a^2+2ab+b^2$ un $(a+b)^2$. Mazliet ilgāk domā par izteiksmēm, kurās koeficienti pie kvadrātiem nav 1. Tā kā dažām izteiksmēm nav sava “pāra”, vairāki skolēni ieguva sakarības, kuras nav patiesas visām mainīgo vērtībām. Veicot pārbaudi,

		skolēni secina, ka dažas uzrakstītās vienādības ne vienmēr ir patiesas.
Apjēgšana	Izstāsta uzdevuma nosacījumus: izmantojot skolēnam zināmās formulas, pārveidot izteiksmes par polinomiem. Darba lapā ir tādi piemēri kā: $(m-3)^2 =$ $(y^2-5)(y^2+5)=$ $(a-a^3)^2 =$ Uzdod jautājumu – ar ko jāsāk, lai varētu atrisināt vienādojumu $(x+2)^2 - x^2 = 6$?	Vairāki skolēni precizē, kas tieši ir jādara. Saņēmuši atbildi, ka ir jāatver iekavas, ķeras pie darba. Vairākums skolēnu sāk risināt vienādojumu, nevis atbild uz uzdoto jautājumu. Pēc precizējuma par uzdevuma mērķi, iesaistās sarunā – jāpielieto formula, jāatver iekavas.
Lietošana	Uz ekrāna parāda nākamo uzdevumu – jāatrisina vienādojumi un nevienādības: a) $(x + 5)^2 = x^2 – 9$ b) $x^2 – 3x – 3 = (x + 2)^2$ c) $(2x – 3)^2 – 2(4 + 2x^2) \leq 1$ d) $(4x – 7)(4x + 7) > (4x)^2 + 5$	Risina uzdevumu, salīdzina risinājuma soļus ar klasesbiedriem. Dažiem skolēniem a) vienādojuma kreisā puse sanāk $x^2 + 25$. Skolēni, kuri zina, kā šī kļūda ir radusies, uzņemas skaidrojošo darbu un ar pretpiemēru parāda, ka šīs izteiksmes ir vienādas vienīgi tad, ja $x = 0$.
Refleksija	Aicina atrisināt vienādojumus: a) $x^2 + 6x + 9 = 0$ b) $4x^2 – 20x + 25 + y^2 + 4y + 4 = 0$ Piedāvā par šiem vienādojumiem padomāt līdz nākamai stundai, kad varētu pārrunāt atrisinājumu.	Skolēni noraksta vienādojumus. Pirmajā vienādojumā vairākums uzreiz saskata saīsinātās reizināšanas formulu un pārveido vienādojumu par $(x+3)^2 = 0$, taču nezina, kā tas palīdz noteikt vienādojuma saknes.

3. stunda

Klase: 8.

Skolēnu skaits: 29.

Stundas tēma: Pitagora teorēma.

Mērķis: Pilnveidot skaitļošanas prasmes, prasmi vispārināt, lietot Pitagora teorēmu, strādāt pāros.

Skolēnam sasniedzamie rezultāti:

- ✓ Izvirza pieņēmumu par sakarībām starp katetēm un hipotenūzu.
- ✓ Pārbauda formulēto pieņēmumu, patstāvīgi izvēloties katešu garumus.
- ✓ Secina par Pitagora teorēmas pielietojumu.

Stundas gaita:

Stundas fāze	**Skolotāja darbība**	**Skolēnu darbība**
Aktualizācija	Iepazīstina ar stundas darba gaitu un sasniedzamajiem rezultātiem. Piedāvā iespēju strādāt pāros. Piedāvā iespēju- sākt darbu ar skolotājas dotajiem malu garumiem vai strādāt ar paša izvēlētajiem malu garumiem.	Sadalās pāros. Vienojas par turpmāko darbību.
Apjēgšana	Aicina uzzīmēt taisnleņķa trijstūrus ar katetēm 3 cm un 4 cm, tad 5 cm un 12 cm, tad 6 cm un 8 cm. Var uzzīmēt vēl kādu trijstūri. Aicina izvirzīt pieņēmumu par sakarību starp trijstūra katetēm un hipotenūzu. Pārrunā kādas darbības var veikt ar skaitļiem, kā kāpina kvadrātā kā var aprēķināt kvadrātsakni, izmantot kvadrātu tabulu.	Uzzīmē taisnleņķa trijstūrus. Izmēra hipotenūzas garumu. Izvirza hipotēzi. Daži skolēni pēc pirmā un trešā trijstūra izvirza hipotēzi, ka taisnleņķa trijstūra malu garumu veido aritmētisko progresiju. Pārbauda vai izvirzītais pieņēmums ir spēkā vēl kādam taisnleņķa trijstūrim.
Lietošana	Ja trim skaitļiem x, y, z izpildās vienādība $x^2 + y^2 = z^2$, tad skaitļu trijnieku sauc par Pitagora trijnieku. Piemēram, $3^2 + 4^2 = 5^2$ Izdala darba lapas, vērš uzmanību uz to, ka var izvēlēties ar kuriem uzdevumiem sākt strādāt, jo malu garumi ir uzrakstīti arī izmantojot burtus, kvadrātsaknes zīmi.	Pārbauda vai dotie skaitļi ir Pitagora trijnieki, aizpilda tabulu, lai būtu Pitagora trijnieki. Izmanto kvadrātu tabulu. Salīdzina savus rezultātus ar kāda cita pāra iegūtajiem datiem
Refleksija	Aicina beigt risināšanu, izvērtēt veikto darbu. Aicina izteikt savas domas par stundas darbu, veiksmēm, problēmām.	Pāri izvērtē savu darbu. Izsakās kā veicās Pitagora trijnieku meklēšana, kas izdevās labi, kas sagādā grūtības.

4. stunda

Klase: 8.

Skolēnu skaits: 29.

Stundas tēma: Pitagora teorēmas pielietojums.

Mērķis: pilnveidot plānošanas, spriešanas un pierādīšanas prasmes.

Skolēnam sasniedzamie rezultāti:

- ✓ Lieto Pitagora teorēmu, lai aprēķinātu taisnleņķa trijstūra nezināmo malu, nezināmo lielumu plaknes figūrā.

Stundas gaita:

Stundas fāze	Skolotāja darbība	Skolēnu darbība
Aktualizācija	Jautā, kādu likumsakarību skolēni pāru darbā atklāja iepriekšējā stundā, pētot taisnleņķa trijstūra malu garumus.	Skolēni saka, ka ir atklājuši Pitagora teorēmu, un nosauc to vārdiem: taisnleņķa trijstūrī divu īsāko malu (katešu) garumu kvadrātu summa ir vienāda ar garākās malas (hipotenūzas) garuma kvadrātu.
Apjēgšana	Piedāvā kopā atrisināt uzdevumu: “Taisnleņķa trijstūra katešu garumi ir 7 cm un 24 cm. Aprēķini šī trijstūra hipotenūzu.” Vērš skolēnu uzmanību uz to, ka iegūtajam kvadrātvienādojumam ir divas saknes (± 25), taču definīcijas apgabalam pieder tikai pozitīvā sakne. Rosina skolēnus atrisināt līdzīgu uzdevumu, kurā katešu malu garumi ir 8 cm un 15 cm.	Skolēni veido zīmējumu, ievieš apzīmējumus un pielieto Pitagora teorēmu: $7^2 + 24^2 = c^2$. Tad risina šo nepilno kvadrātvienādojumu. Papildina savu risinājumu ar negatīvo sakni un skaidrojumu, ka tā neder par atrisinājumu. Sadarbojoties savā starpā, apspriežot risinājuma gaitu un pamatojumus, skolēni atrod hipotenūzas garumu, kas ir 17 cm.
Lietošana	Piedāvā paveikt pētījumu un atklāt vēl vienu noderīgu sakarību. Pētnieciskais uzdevums sākas šādi: “Aprēķini hipotenūzas garumu vienādsānu taisnleņķa trijstūrī, kura katetes garums ir 4 cm.”	Skolēni veido zīmējumu. Daži skolēni jautā, cik gara ir otra katete un no klasesbiedriem uzzina, ka tekstā ir vārds “vienādsānu”. Citi apspriež, ka šaurie leņķi šajā trijstūrī ir 45°, un paši konstatē, ka šī informācija, visticamāk, nebūs noderīga tālākajā risinājumā. Vairākiem skolēniem rodas grūtības izvilkt kvadrātsakni no 32, viņi piedāvā to noapaļot līdz 36.

	Atgādina, ka skolēni prot sadalīt reizinātājos: $\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$ cm. Uzdod nākamo jautājumu: cik gara būtu hipotenūza, ja vienādsānu taisnleņķa trijstūra katetes garums būtu 10 cm? Jautā, vai kāds varētu bez rēķināšanas pateikt, cik gara būtu hipotenūza, ja skaitli 10 aizstātu, piemēram, ar skaitli 14? Piedāvā pārliecināties par šīs hipotēzes patiesumu, atrisinot vēl vienu līdzīgu piemēru ar katetes garumu a. Aicina pierakstīt atklāto likumsakarību ar vārdiem. Uzdod augstākas grūtības pakāpes jautājumu – cik gara būtu hipotenūza, ja šī trijstūra katetes būtu $\sqrt{8}$ cm.	Šoreiz skolēni veiksmīgi tiek galā ar uzdevumu un vienkāršo atbildi: $10\sqrt{2}$ cm, taču likumsakarību skolēni pagaidām nepamana. Pēc šādi formulēta jautājuma vairāki skolēni izsaka pieņēmumu, ka atbilde varētu būt $14\sqrt{2}$. Skolēni atrisina šo piemēru un vairākums konstatē, ka hipotenūza patiešām sanāk $a\sqrt{2}$. Lai uzrakstītu šo sakarību vārdiem, skolēniem ir vajadzīga palīdzība vārdu izvēlē. Daži skolēni ievēro, ka šo iracionālo skaitli var vienkāršot par $2\sqrt{2}$ cm. Citi piedāvā uzreiz $\sqrt{8}$ reizināt ar $\sqrt{2}$.
Refleksija	Piedāvā vēl divus apgrieztus uzdevumus – šoreiz ir dots vienādsānu taisnleņķa trijstūra hipotenūzas garums un ir jāaprēķina katetes garums. Vienkāršākajā gadījumā hipotenūzas garums ir $7\sqrt{2}$ cm, bet sarežģītākā gadījumā tas ir 12 cm. Uzdod mājasdarbu.	Skolēni ātri tiek galā ar pirmo jautājumu un uzreiz sauc pareizo atbildi – 7 cm. Par otro gadījumu sākumā nav ideju. Saņemot padomu no skolotāja – kādu darbību viņi veica, lai no katetes iegūtu hipotenūzu, un kāda darbība ir pretējā – ķeras klāt darbam, taču neatsauc atmiņā, kā varēja vienkāršot daļu $\frac{12}{\sqrt{2}}$. Ar nelielu palīdzību no skolotāja puses, skolēni ieguva atbildi $6\sqrt{2}$ cm.

5. stunda

Klase: 9.

Skolēnu skaits: 25.

Stundas tēma: Taisnleņķa trijstūra šaurā leņķa sinusa, kosinusa un tangensa vērtības.

Mērķis: Pilnveidot pētniecības prasmes, attīstīt loģiku un vērīgumu, spēju domāt stratēģiski un sadarbības prasmes.

Skolēnam sasniedzamie rezultāti:

- ✓ Sprież konkrēti vai vispārīgi, izmanto vienādmalu, vienādsānu trijstūra īpašības, Pitagora teorēmu un secina par malu attiecību, ja taisnleņķa trijstūra šaurais leņķis ir 30°; 45°.

Stundas gaita:

Stundas fāze	Skolotāja darbība	Skolēnu darbība
Aktualizācija	Skolotājs stāsta, ka stundas mērķis ir noskaidrot un pārskatāmi apkopot sinusa, kosinusa un tangensa vērtības sadzīves situācijās visbiežāk pielietotiem leņķiem: 30°, 45° un 60°. Aicina skolēnus izstāstīt Pitagora teorēmu un trigonometrisko funkciju definīcijas.	Skolēni pieraksta stundas tēmu, izstāsta Pitagora teorēmu. Precizē viens otra atbildi, papildinot formulējumu ar vārdu "taisnleņķa" un diskutējot par to, kādā secībā būtu pareizām saukt formulas puses. Nosauc vārdiem trigonometrisko funkciju definīcijas.
Apjēgšana	Piedāvā pirmo uzdevumu – par regulāru ΔABC. Jautā, cik grādu liels ir šī trijstūra leņķis ABC. Prasa papildināt zīmējumu tā, lai varētu noteikt trigonometrisko funkciju vērtības 60° leņķim. Jautā, cik grādu liels ir otrs šaurais leņķis iegūtajā taisnleņķa trijstūrī.	Uzzīmē regulāru trijstūri. Daži skolēni apspriežas par to, ka regulārs ir vienādmalu trijstūris. Skolēni zina nosaukt, ka leņķa lielums ir 60°. Novelk augstumu, lai izveidotos taisnleņķa trijstūri. Pēc regulāra trijstūra īpašībām secina, ka augstums ir arī mediāna. Pēc Pitagora teorēmas aprēķina trijstūra augstumu. Pēc trijstūra iekšējo leņķu summas nosaka, ka prasītais leņķis ir 30°. Aprēķina trigonometrisko funkciju vērtības 30° leņķim.
Lietošana	Dod skolēniem patstāvīgu uzdevumu: konstruēt atbilstošu trijstūri un noteikt trigonometrisko funkciju vērtības 45° leņķim.	Skolēni secina, ka jākonstruē vienādsānu taisnleņķa trijstūris. Pēc Pitagora teorēmas aprēķina hipotenūzas garumu un prasītās vērtības.
Refleksija	Refleksijai aicina skolēnus tabulā apkopot šajā stundā atklātās trigonometrisko funkciju vērtības un atrast šajā tabulā likumsakarības, kas ļautu vieglāk iegaumēt visas vērtības.	Apkopo iegūtās sinusa, kosinusa un tangensa vērtības šajā tabulā! Izdomā paņēmienu, kā atcerēties šīs vērtības no galvas

6. stunda

Klase: 9.

Skolēnu skaits: 25.

Stundas tēma: Taisnleņķa trijstūra elementu aprēķināšana.

Mērķis: Pilnveidot pētniecības prasmes, attīstīt loģiku un vērīgumu, spēju domāt stratēģiski un sadarbības prasmes.

Skolēnam sasniedzamie rezultāti:

- ✓ Aprēķina taisnleņķa trijstūra visus elementus, ja dots viena šaurā leņķa lielums un vienas malas garums vai divu malu garumi.
- ✓ Lieto apgūtos jēdzienus un apzīmējumus sinA, cosA, tgA, raksturojot zīmējumus un uzdevumu risinājumus.

Stundas gaita:

Stundas fāze	Skolotāja darbība	Skolēnu darbība
Aktualizācija	Dažādi novietotos taisnleņķa trijstūros aicina atbilstošās krāsās iekrāsot tās malas, kuras tiek izmantotas sin, cos un tg aprēķināšanai. Tad dod otrādu uzdevumu – tagad malas un leņķis ir iekrāsoti, un skolēniem jānosaka, kāda trigonometriskā funkcija ar to ir domāta.	Skolēni pārzīmē attēlus un iekrāso malas, uzraksta atbilstošās sakarības. Skolēni sauc katram attēlam atbilstošās funkcijas nosaukumu.
Apjēgšana	Piedāvā šādu uzdevumu: taisnleņķa trijstūra malu garumu ir 5 cm, 12 cm un 13 cm. Aprēķini 5 cm garas malas pretleņķa β sin, cos un tg vērtības. Uz ekrāna ir redzams taisnleņķa trijstūris, kura katešu garumi ir 3 cm un 4 cm. Skolēnu uzdevums ir noteikt 3 cm garas malas pretleņķa α sin, cos un tg. Atgādina, ka taisnleņķa trijstūrī ir spēkā Pitagora teorēma, tādēļ hipotenūzas garumu var aprēķināt.	Skolēni samērā ātri uzraksta atbildes. Savstarpēji viens otru palabo par to, ka atbildē nav jāraksta mērvienības, jo tās saīsinās, jānorāda leņķis, kuram tiek noteikta trigonometriskās funkcijas vērtība, jo pieraksts sin = $\frac{5}{13}$ ir nepilnīgs. Vairākums skolēnu sāk ar to, ka aprēķina $tg\alpha = \frac{3}{4}$. Daži skolēni apgalvo, ka šajā uzdevumā trūkst informācijas, lai varētu aprēķināt pārējo funkciju vērtības. Aprēķina trūkstošās malas garumu un tiek pie sin un cos vērtībām.

Lietošana	Uzdod uzdevumu pēc taisnleņķa trijstūra malu garumiem noteikt trijstūra šauro leņķu lielumu. Iesaka aprēķināt šaurā leņķa sin vērtību. Aicina ieskatīties iepriekšējā stundā veiktā pētījuma rezultātos – 30º, 45º, un 60º leņķu trigonometrisko funkciju vērtību tabulā un tajā atrast atbilstošo sin vērtību. Nākamie pāris piemēri ir ar augstāku grūtības pakāpi (iracionāliem malu garumiem). Piedāvā vēl cita tipa uzdevumu: šoreiz dots, ka taisnleņķa trijstūra vienas katetes garums ir 4 cm un tās pretleņķis ir 30º liels. Jāaprēķina trijstūra pārējo malu garumus. Ierosina šo uzdevumu atrisināt, izmantojot trigonometriskās sakarības, jo tāds ir stundas mērķis. Uzdod vēl vairākus līdzīgus piemērus.	Skolēni vispirms atpazīst vienādsānu taisnleņķa trijstūri un izsecina, ka tā šaurie leņķi ir vienādi un abi ir pa 45º, neizmantojot trigonometriju. Par piemēru, kurā īsākā katete ir divas reizes īsāka nekā hipotenūza, nav versiju. Aprēķina, ka $\sin\alpha = \frac{1}{2}$. Arī šajā brīdī vairākums skolēnu nesaskata, kā šī informācija palīdz noteikt leņķi. Skolēni secina, ka šaurais leņķis ir 30º. Skolēni veiksmīgi tiek galā ar šiem piemēriem, jo zina stratēģiju, kā tikt pie leņķa. No iepriekšējiem piemēriem skolēni atsauc atmiņā, ka 30º lielam leņķi pretkatete ir divas reizes īsāka nekā hipotenūza, tādēļ secina, ka hipotenūza ir 8 cm gara. Garāko kateti aprēķina pēc stundas sākumā atkārtotās Pitagora teorēmas. Raksta sakarības ar sin un cos. Risina, salīdzina savā starpā atbildes.
Refleksija	Jautā skolēniem, kurš risināšanas paņēmiens viņiem šķiet optimālāks – lietojot 30º pretmalas īpašību un tad Pitagora teorēmu vai izmantojot trigonometriju?	Daži skolēni saka, ka ar trigonometriskām sakarībām risināt ir vienkāršāk, taču vairākums oponē.

7. stunda

Klase: 9.

Skolēnu skaits: 25.

Stundas tēma: Kopsavilkums par trigonometriskām sakarībām taisnleņķa trijstūrī.

Mērķis: Trenēties veidot kopsavilkumu un izcelt svarīgāko informāciju.

Skolēnam sasniedzamie rezultāti:

- ✓ Aprēķina taisnleņķa trijstūra nezināmos lielumus, ja dots viena šaurā leņķa lielums un vienas malas garums vai divu malu garumi.
- ✓ Apraksta risinājuma gaitu, raksturojot gan katru figūru atsevišķi, gan figūras, kas no tām veidojas, skaidrojot nogriežņu un leņķu nozīmi katrā no figūrām.
- ✓ Lieto trigonometriskās sakarības taisnleņķa trijstūrī, lai aprēķinātu plaknes figūru lielumus.

Stundas gaita:

Stundas fāze	Skolotāja darbība	Skolēnu darbība
Aktualizācija	Izdala materiālu, kas noderēs kā palīglīdzeklis, veidojot kopsavilkumu par trigonometriskajām funkcijām. Mudina izpildīt 1. uzdevumu.	Skolēni klausās, izdala darba lapas un sāk tās pētīt. Pirmais uzdevums ir uzzīmē trijstūri, kuram viens leņķis ir 90°, un salikt burtus stūros.
Apjēgšana	Ierosina papildināt izveidoto zīmējumu, pēc izvēles vienu šauro leņķi apzīmējot ar α. Aicina izpildīt 2. uzdevumu.	Skolēni atliek α un lasa 2. uzdevumu: “Dotajā trijstūrī uzraksti sinα, cosα un tgα.” Vairākums skolēnu zina šīs definīcijas no galvas, daži šķirsta kladi, meklē iepriekšējos pierakstos.
Lietošana	Pievēršas 3. uzdevumam: “Taisnleņķa trijstūra šaurā leņķa sinuss ir 0,9848, bet šī leņķa pretkatete ir 10 cm gara. Aprēķini šī trijstūra pārējās malas.” Jautā, kā pēc šaurā leņķa sinusa vērtības var prognozēt šī leņķa lielumu, uztur diskusiju ar skolēniem. Uzdod vēl divus uzdevumus: 4. Aprēķini paralelograma leņķus, ja zināms, ka paralelograma īsāka mala ir 2 reizes garāka nekā augstums pret garāko malu! 5. Vienādsānu trijstūra virsotnes leņķis ir 120° un pamats 6 cm. Aprēķini augstumu, kas novilkts pret sānu malu.	Skolēni iedziļinās uzdevuma tekstā. Daži skolēni spriež, ka uzdevuma tekstā trūkst datu, jo nav teikts, kāds ir minētā šaurā leņķa lielums grādos. Pēc diskusijas ar skolotāju un klasesbiedriem, piekrīt, ka datu tomēr ir pietiekami daudz. Veic aprēķinus. Skolēni sadarbojas nelielās grupās un pāros. Risina nākamos divus uzdevumus, salīdzina savā starpā domu gaitu, ieskatās atbilžu lapā.
Refleksija	Noslēgumā piedāvā izpildīt uzdevumu, kur pēc situācijas apraksta jāpasaka, vai šāds taisnleņķa trijstūra modelis ir iespējams.	Skolēni lasa refleksijas uzdevuma tekstu: “Vai šaurā leņķa kosinuss var būt 2? Vai šaurā leņķa sinuss var būt 2? Vai šaurā leņķa tangenss var būt 2?” Vairākums cenšas modelēt – veidot jautājumam atbilstošu

		zīmējumu. Pirmajos divos gadījumos tas neizdodas, tādēļ skolēni apraksta pamatojumu tam, kādēļ atbilde ir noliedzoša. Uz trešo jautājumu atbild apstiprinoši un uzzīmē atbilstošu taisnleņķa trijstūri ar katešu attiecību 2 : 1.

8. stunda

Klase: 9.

Skolēnu skaits: 23.

Stundas tēma: Parametru ietekme uz kvadrātfunkcijas grafika novietojumu koordinātu plaknē.

Mērķis: Mācīties saskatīt saikni starp funkcijas formulu un grafisko attēlojumu.

Skolēnam sasniedzamie rezultāti:

- ✓ Aplūko konkrētus piemērus (t. sk., ar digitāliem rīkiem izveidotus), pēta un raksturo kvadrātfunkcijas grafika novietojumu koordinātu plaknē atkarībā no koeficientu vērtībām.

Stundas gaita:

Stundas fāze	Skolotāja darbība	Skolēnu darbība
Aktualizācija	Atgādina, ka kvadrātfunkcijas vispārīgā formula ir $f(x) = ax^2 + bx + c$. Aicina skolēnus komentēt, ko nozīmē visi šajā formulā izmantotie burti. Apstiprina izskanējušās atbildes. Pastāsta, ka šajā stundā skolēni paveiks pētniecisku darbu, kurā koeficienti iegūs jaunu nosaukumu – šoreiz tos dēvēs par parametriem, jo tiem būs mainīga skaitliska vērtība. Nodiktē stundas tēmu.	Skolēni sauc, ka f ir funkcija, x ir nezināmais jeb neatkarīgais mainīgais, savukārt, a, b un c sauc par koeficientiem. Pieraksta stundas tēmu.
Apjēgšana	Izdala darba lapas ar daudzām, saturiski dažādām kvadrātfunkcijām. Lai izpētītu parametru ietekmi uz grafika formu un novietojumu koordinātu plaknē, iesaka šo funkciju	Skolēni izpēta darba lapas uzdevumu un pēc skolotāja ieteikuma sāk veidot funkciju grafikus, lietojot tehnoloģijas. Skolēni samērā ātri pamana, ka parametra a zīme nosaka parabolas

	grafikus konstruēt ar digitāliem rīkiem, piemēram, ar Desmos.com. Iesaka pārbaudīt šo hipotēzi ar dažiem piemēriem, kuros a ir negatīvs. Rosina pamatot novēroto parametra b ietekmi uz grafiku, izmantojot parabolas virsotnes koordinātas formulu. Piedāvā pārbaudīt šo pieņēmumu, dažādu zīmju b vērtībām nosakot –b vērtību.	zaru vērsumu, taču grūtības rodas, mēģinot aprakstīt likumsakarību starp parametra a moduli $\|a\|$ un parabolas zaru atvērumu – ar šo palīdz skolotājs. Par parametru b skolēni vienprātīgi nonāk pie secinājuma, ka tas ietekmē pārbīdi x ass virzienā – ja b ir pozitīvs, tad parabola ir vairāk nobīdīta pa kreisi, un otrādi. Secina, ka tādā gadījumā parametra b ietekme ir tieši pretēja iepriekš izpētītajam. Skolēni zina formulu $x_v = \frac{-b}{2a}$, taču vairākums intuitīvi pieņem, ka skaitītājs –b ir negatīvs skaitlis. Skolēni jau iepriekš zināja brīvā saskaitāmā grafisko nozīmi, tādēļ ātri tika pie meklētās likumsakarības – parametrs c norāda uz parabolas krustpunktu ar y asi.
Lietošana	Darba lapas turpinājumā ir apgriezti uzdevumi – pēc parabolu skicēm jānosaka parametru zīmes.	Skolēni veiksmīgi tiek galā ar šiem uzdevumiem. Izņēmums ir parametrs b, ar kuru mēdz būt grūtības.
Refleksija	Aicina skolēnus pāris teikumos aprakstīt šajā stundā izpētītās sakarības.	Bez grūtībām apraksta secinājumus.

9. stunda

Klase: 9.

Skolēnu skaits: 23.

Stundas tēma: Kvadrātfunkcijas pielietojums reālās dzīves problēmu risināšanā.

Mērķis: Pielietot zināšanas par kvadrātfunkciju un kvadrātnevienādībām reālās dzīves problēmu risināšanā.

Skolēnam sasniedzamie rezultāti:

- ✓ Veido praktiskas problēmas matemātisko modeli – kvadrātfunkciju vai kvadrātvienādojumu – un lieto zināšanas par kvadrātfunkciju un kvadrātvienādojumu, lai atrisinātu problēmu.

Stundas gaita:

Stundas fāze	Skolotāja darbība	Skolēnu darbība
Aktualizācija	Jautā, kāds ir kvadrātfunkcijas $y = 3x^2 + 2x - 5$ grafika zaru vērsums. Skolotājs jautā, ko vēl var noteikt.	Skolēni atbild, ka šai parabolai zari ir vērsti uz augšu, jo $a = 3 > 0$. Skolēni min variantus: krustpunktus ar asīm, parabolas virsotnes koordinātu u. tml.
Apjēgšana	Uzdod atrisināt kvadrātnevienādību $2x^2 - 5x + 3 \leq 0$, izmantojot kvadrātfunkcijas grafiku.	Skolēnu konstruē funkcijas $y = 2x^2 - 5x + 3$ grafiku. Lielākoties, to dara pēc iepriekš izrunāta plāna: nosaka krustpunktus ar asīm, parabolas virsotni un vēl vienu vai divus papildus punktus. Pēc grafika nolasa nevienādības atrisinājumus.
Lietošana	Uz ekrāna parāda uzdevumu grupu darbam: “Taisnstūra kartona gabala perimetrs ir 64 cm. Lai no tā izveidotu 3 cm augstu kastīti, no katra stūra jāizgriež kvadrāts. Cik garas jāizvēlas kartona malas, lai iegūtu kastīti ar iespējami lielāko tilpumu?” Piedāvā salīdzināt, kāda funkcija apraksta kastītes tilpumu.	Skolēni sadalās grupās un sāk risināt uzdevumu. Modelē uzdevuma tekstu ar zīmējumiem un papīra modeli. Izsecina, ka taisnstūra platumu var apzīmēt ar *x* un izteikt garumu. Skolēni ir ieguvuši tilpuma izteiksmi: $V(x) = 3(x - 6)(26 - x)$. Skolēni secina, ka šoreiz nav vajadzības konstruēt funkcijas grafiku, jo prasīto informāciju var noteikt pēc šīs kvadrātfunkcijas virsotnes koordinātām.
Refleksija	Zināšanu pārbaudei piedāvā atrisināt vēl vienu problēmu: “Andris un Jānis pēta funkciju y=$2x^2$+bx-20. Ir zināms, ka funkcijas grafiks krusto x asi	Skolēni risina uzdevumu, apspriežas grupās, izvirza hipotēzi un mēģina to pamatot. Beigās dažādos variantus un argumentāciju pārrunā kopīgi.

	punktos ar koordinātām (-2; 0) un (5; 0). Andris domā, ka koeficients *b* ir pozitīvs skaitlis, bet Jānis domā, ka koeficients *b* ir negatīvs skaitlis. Kuram zēnam taisnība? Pamato savu viedokli”	

10. stunda

Klase: 9.

Skolēnu skaits: 23.

Stundas tēma: No viena punkta vilktas riņķa līnijas pieskares.

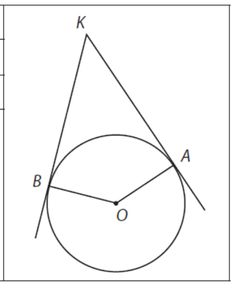
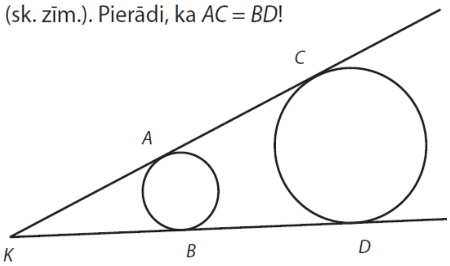
Mērķis: Pilnveidot spriešanas, pierādīšanas un sadarbības prasmes, izmantot pamatskolā apgūtās ģeometrijas zināšanas, lai pētītu un matemātiski raksturotu riņķa līnijas un pieskaru savstarpējo novietojumu.

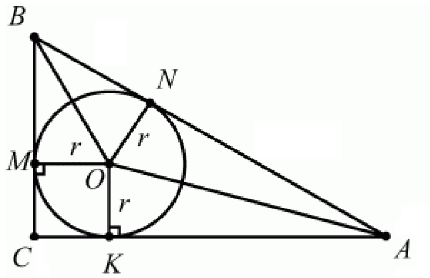
Skolēnam sasniedzamie rezultāti:

- ✓ Lieto divu pieskaru īpašību, kuras vilktas no viena punkta ārpus riņķa līnijas.
- ✓ Pierāda riņķa līnijas pieskaru īpašību, kuras vilktas no viena punkta.

Stundas gaita:

Stundas fāze	Skolotāja darbība	Skolēnu darbība
Aktualizācija	Jautā skolēniem, kāds var būt taisnes novietojums attiecībā pret riņķa līniju. Lūdz nosaukt riņķa līnijas pieskares īpašību un pazīmi. Palīdz ar pazīmes formulējumu, sakot, ka tā pēc būtības ir pārfrāzēt īpašība.	Sauc iepriekšējās stundās apgūtos jēdzienus: taisne var būt novietota kā pieskare vai sekante. Nosauc īpašību: pieskare ir perpendikulāra rādiusam, kurš ir novilkts pieskaršanās punktā. Pazīmi neatceras.
Apjēgšana	Piedāvā kopīgi pierādīt jaunu īpašību – no viena punkta vilktu riņķa līnijas pieskaru īpašību. Aicina skolēnus uzzīmēt atbilstošu zīmējumu. Atgādina pierādījuma vispārīgo struktūru: vispirms jāuzraksta, kas ir dots, tad – ko pierādīs un pēc tam, detalizēti skaidrojot katru soli, sniedz pierādījumu.	Pieraksta stundas tematu. Skolēni zīmē riņķa līniju un pieskare.

	Uz ekrāna rāda šādu uzdevumu: Daudzpunktu vietā ieliec “=” vai “⊥”, ja zināms, ka *KA* un *KB* ir pieskares dotajai riņķa līnijai! AO ... BO AO ... KA KA ... KB KB ... OB  Jautā, vai visi skolēni mācētu pamatot visas četras atbildes. Aicina papildināt zīmējumu ar vēl vienu nogriezni – *KO*, un jautā, vai skolēni pamana šajā zīmējumā vienādus trijstūrus. Lūdz pamatot, ka trijstūri ir vienādi, izmantojot kādu no skolēniem zināmajām trijstūru vienādības pazīmēm. Rezumē pierādījumu ar to, ka aicina pierakstīt pierādīto īpašību – no viena punkta vilktas pieskares ir vienāda garuma.	Skolēni papildina savu zīmējumu ar apzīmējumiem un samērā ātri un pareizi izpilda uzdevumu. Atbild apstiprinoši un sauc pamatojumus: viena riņķa rādiusi, rādiuss, kas novilkts pret pieskaru. Skolēni intuitīvi atbild pareizi, ka *KA* un *KB* ir vienādi, taču vēl nepamana, kāda varētu būt argumentācija. Skolēni sauc trijstūrus. Ne visi skolēni ievēro virsotņu nosaukšanas secību, tādēļ tas tiek pārrunāts. Vairākums izmanto pazīmi *mlm*, kaut gan vienādais leņķis neatrodas starp vienādajām malām. Daži skolēni ierosina atsaukties uz Pitagora teorēmu, pēc kuras nezināmās katetes abos trijstūros ir vienādas, tādējādi sanāk pazīme *mmm*. Viens skolēns zināja pazīmi *kh* (katete-hipotenūza). Pieraksta īpašību.
Lietošana	Uz tāfeles uzraksta uzdevumu numurus treniņa, kā arī piedāvā divus paaugstinātas grūtības uzdevumus. No punkta *K* vilktās pieskares vienai riņķa līnijai pieskaras punktos *A* un *B*, bet otrai riņķa līnijai pieskaras punktos *C* un *D* (sk. zīm.). Pierādi, ka *AC* = *BD*! 	Vairākums skolēnu izvēlas uzdevumus no mācību grāmatas. Četri skolēni izveido grupu, lai risinātu paaugstinātas grūtības uzdevumus. Daži skolēni šos divus uzdevumus mēģina risināt patstāvīgi.

	Taisnleņķa trijstūrī ievilktas riņķa līnijas pieskaršanās punkts sadala hipotenūzu 4 cm un 6 cm garos nogriežņos. Ievilktās riņķa līnijas rādiuss ir 2 cm. Aprēķini īsāko kateti! Savus spriedumus pamato! 	
Refleksija	Stundai tuvojoties izskaņai, piedāvā apspriesties.	Skolēni pastāsta, kā viņiem ir veicies ar uzdevumu risināšanu, kas sagādāja grūtības, kas bija viegli izdarāms un cik tālu viņi tika. Skolēni atrisināja arī abus atjautības uzdevumus.

11. stunda

Klase: 9.

Skolēnu skaits: 23.

Stundas tēma: Divu riņķa līniju kopīgās pieskares.

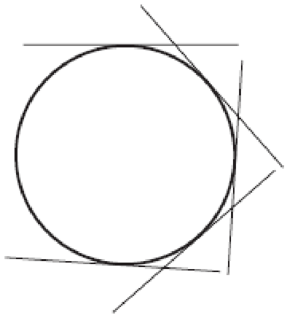
Mērķis: Noskaidrot, cik kopīgu pieskaru var novilkt divām riņķa līnijām, analizējot iespējamos divu riņķu līniju novietojumus plaknē.

Skolēnam sasniedzamie rezultāti:

- ✓ Nosaka, cik kopīgu pieskaru var novilkt, apskatot visus dažādos divu riņķa līniju novietojumus plaknē.
- ✓ Prezentē iegūtos rezultātus un pamato to.

Stundas gaita:

Stundas fāze	Skolotāja darbība	Skolēnu darbība
Aktualizācija	Atgādina, ka iepriekšējā stundā skolēni kopā ar skolotāju izpētīja, kāda īpašība ir pieskarēm, kuras vilktas no viena punkta pret vienu riņķa līniju. Arī šajā stundā ir ieplānots pētījums, kuru šoreiz skolēni paveiks patstāvīgi.	Klausās.

	Aicina skolēnus izpētīt zīmējumu par iespējamo pieskaru skaitu vienai riņķa līnijai.  Izstāsta, ka šīs stundas pētījuma mērķis būs noskaidrot – kāda būs atbilde uz iepriekšējo jautājumu, ja kopīgās pieskares konstruēs divām riņķa līnijām? Citiem vārdiem sakot – cik kopīgas pieskares var būt divām riņķa līnijām?	Skolēni secina, ka pieskaru skaits ir bezgalīgs. Pieraksta jaunā pētījuma jautājumu.
Apjēgšana	Aicina skolēnus sadalīties grupās pa trīs un ķerties klāt darbam. Izdala grupām lielās lapas, uz kurām jāapkopo (jāilustrē) visi iespējamie gadījumi.	Sadalās grupās, sāk pētījumu. No šīs instrukcijas skolēni secina, ka gadījumu skaits šoreiz būs galīgs.
Lietošana	Kad vairākām grupām ir tapuši zīmējumi ar visiem pieciem gadījumiem, atgādina vēl vienu svarīgu pētījuma soli – pamatot, ka nav iespējams lielāks kopīgu pieskaru skaits.	Skolēni neformāli pamato iegūtos rezultātus. Skolēniem nav nepieciešamo priekšzināšanu un iemaņu, lai izveidotu formāli stingru pierādījumu, ka vairāk par 4 pieskarēm nevar novilkt.
Refleksija	Aicina pielikt izveidotos plakātus pie sienas un uz ekrāna parāda pareizo atbildi – iespējamais kopīgo pieskaru skaits ir no 0 līdz 4.	Skolēni salīdzina savu darbu ar citu grupu veikumu, izsaka komentārus par darbu noformējumu.

12. stunda

Klase: 9.

Skolēnu skaits: 25.

Stundas tēma: Reizinājuma salīdzināšana ar nulli.

Mērķis: Pilnveidot skolēnu kritisko domāšanu un prasmi pārnest informāciju no viena konteksta uz citu.

Skolēnam sasniedzamie rezultāti:

- ✓ Nosaka reizinājuma zīmi, ja darbību locekļi ir pozitīvi/negatīvi skaitļi.
- ✓ Nosaka darbības locekļu zīmes, ja reizinājums ir pozitīvs/negatīvs skaitlis.
- ✓ Atrisina nevienādību $g(x) \cdot f(x) > 0$, pārveidojot to par divu nevienādību sistēmām.

Stundas gaita:

Stundas fāze	Skolotāja darbība	Skolēnu darbība
Aktualizācija	Pasaka stundas tēmu. Uz tāfeles uzraksta nevienādību $a \cdot b > 0$ un jautā, cik var būt a un b? Precizē skolēna pieņēmumu – var būt negatīvs, taču tikai tad, ja negatīvi ir abi nezināmie reizē.	Pieraksta stundas tēmu kladēs. Skolēni min: "2 un 3," "Tie var būt jebkādi." Pēc skolotājas precizējuma, vai tad vienmēr sanāks pozitīvs reizinājums, cits skolēns oponē: "2 reizināts ar –1 ir negatīvs. Nav lielāks par 0. Tātad a un b nevar būt negatīvi."
Apjēgšana	Jautā skolēniem, kā nupat apspriesto varētu pierakstīt? Kā to pateikt precīzāk? a ir pozitīvs. Kā to pieraksta? $a > 0$. Kādam b jābūt? Tātad kādam jābūt? Pozitīvam. Kā pasaka, ka tam jāizpildās vienlaicīgi? Ko mācamies tagad?	Skolēni apspriežas savā starpā, daži mēģina formulēt hipotēzi skolotājai. Piemēram: "Ja abi skaitļi ir plusā, tad to reizinājums ir lielāks par nulli." Tie paši daži skolēni, cenšoties atbildēt uz skolotājas jautājumiem, nosauc vairākus minējumus pēc kārtas, cenšas uzminēt pareizās atbildes. Ja minējumi ir nepilnīgi vai aplami, skolotāja pasaka atbildi. "Nedrīkst būt negatīvs". Vairākums skolēnu nespēja šādā tempā uztvert skolotājas iztaujāšanu. Piemēram, uz jautājumu par šī brīža tēmu, kāds skolēns atšķir pierakstu burtnīcā stundas sākuma lapu un bikli

	Nevienādību sistēmas. Lai reizinājums būtu pozitīvs, abiem reizinātājiem jābūt pozitīviem, un to var pierakstīt ar nevienādību sistēmu. Pēc mēģinājumiem izvilināt no skolēniem jēdzienu “vienādzīmju” nevienādības atbildes vispārināšanai, skolotāja izstāsta, ka vēl ir gadījums, kad $a < 0$ un arī $b < 0$.	nolasa jautājošā intonācijā: “Reizinājuma salīdzināšanu ar nulli?” Skolēni uzdod jautājumus un konsultē viens otru. Skolotāja iebilst kāda skolēna pieņēmumam, ka pieraksts – a apzīmē negatīvu skaitli, taču nedod papildus informāciju par to, kādēļ tā nav.
Lietošana	Izdomājiet, kad $a \cdot b < 0$? Pēc skolēnu konsultēšanas, skolotāja jautā, kuram vēl galīgi nav ne jausmas, un iesaka mēģināt ar skaitļiem, piemēram, –2 x 1. Viens no skaitļiem ir, kā Tu teiktu, mīnusā jeb negatīvs. Kā to pieraksta ar nevienādību? $a < 0$. Kādam jābūt otram? Kāds ir otrs gadījums? Kādēļ šis bija vajadzīgs? Kā šos abus dažādos gadījumus var pateikt vienā teikumā? (*Mēģināja skolēnus uzvedināt uz vārdu “dažādzīmju”*). Uzdod nevienādību $(x-2)\cdot(4+x) > 0$.	Raksta savas hipotēzes. Skolotāja vēro skolēnu veikumu un to komentē. Vairāki skolēni apskata tikai vienu gadījumu, tādēļ skolotāja pasaka, ka jābūt diviem dažādiem gadījumiem. Kāds skolēns abus gadījumus ir sarakstījis kopā, kā vienu sistēmu. Vēl cits saka, ka ir pabeidzis, taču skolotāja oponē, ka viņam nav uzrakstīts piemērs, un bez tā nevar uztvert, ko nozīmē uzrakstītās sistēmas. Tā kā iepriekš netika pieminēts jēdziens “vienādzīmju”, arī šoreiz uzvedinošie jautājumi skolēniem nelīdzēja – viņi gaidīja, kad skolotāja pati pateiks pareizo atbildi. Kāds skolēns sāk minēt: ja x vietā ieliek 2, tad sanāk (2 nepieder nevienādības atrisinājumu kopai) “Iekavu reizināšana”

	Kāda nevienādība tā ir? Tu mēģināji apskatīt dažus gadījumus? Kurš tagad ir *a* un *b*? Kādam jābūt $x - 2$? Kāds ir galīgais atrisinājums? Jāskatās, kur abu nevienādību atrisinājumi pārklājas, kur ir atbilde?	Saka ļoti dažādus minējumus, izpratnes par notiekošo vairākumam nav: "Nezinu." "Lielākam par 0." "x ir 2." "x ir lielāks par 2." "Var izmantot tikai pirmo intervālu." "Kāpēc lai nevarētu izmantot abus?" "Jo viens ir mīnusā." Skolniece pasaka nepareizu intervālu, skolotāja nenorāda uz kļūdu.
Refleksija	Kādēļ šo tēmu ir svarīgi mācīties? Uzdod mājasdarbu: $(3-x)\cdot(x+7)>0$ "Ja kāds ir drosmīgs, apskatiet gadījumu, kad šis reizinājums ir negatīvs."	"Loģiski jādomā," "Lai zinātu, ka var būt aplama nevienādību," "Pēc idejas tā ir formula." Pieraksta mājasdarba piemēru.

13. stunda

Klase: 9.

Skolēnu skaits: 25.

Stundas tēma: Lineāru nevienādību sistēmu atrisināšana.

Mērķis: Situāciju ar praktisku un matemātisku kontekstu aprakstīt ar lineāru nevienādību, divkāršu nevienādību vai lineāru nevienādību sistēmu. Skolēnam jāprot izvēlēties, kuru no tiem lietot.

Skolēnam sasniedzamie rezultāti:

- ✓ Atrisina lineāru nevienādību sistēmu.
- ✓ Jaunā situācijā sadarbojas un atrisina problēmu, lietojot matemātisko modelēšanu (lineārs vienādojums, lineāra nevienādība, lineāru nevienādību sistēma)..

Stundas gaita:

Stundas fāze	Skolotāja darbība	Skolēnu darbība
Aktualizācija	Piedāvā izpētīt šādu uzdevumu: "Trijstūra malu garumi ir 8, 10 un x. Trijstūra perimetrs ir lielāks nekā 30. Kādas ir iespējamās x vērtības?" Skolotājs ietur pauzi, lai redzētu, vai kāds no skolēniem pamanīs, ka uzdevums nav atrisināts līdz galam. Ja skolēni to nepamana paši, piedāvā veikt pārbaudi, piemēram, ar vērtību $x = 20$ pamēģināt mērogā konstruēt šo trijstūri. Aicina uzrakstīt trijstūra nevienādību algebriskā formā. Skolotājs paskaidro, ka ir iegūta lineāru nevienādību sistēma, jo abiem nosacījumiem ir jāizpildās vienlaikus: $\begin{cases} 8+10+x>30 \\ 8+10>x \end{cases}$	Skolēni izveido zīmējumu, uzraksta perimetra izteiksmi $P = 8 + 10 + x$, uzraksta atbilstošu nevienādību un atrisina to, iegūstot atbildi $x > 12$. Skolēni piedāvā minējumus, ka atbilde ir $(12; \infty)$, nosauc konkrētas x vērtības. Skolēni konstatē, ka šī vērtība pieder x vērtību intervālam. Sākot zīmēt modeli, daži skolēni pamana: šāds trijstūris neeksistē. Pamata to ar iepriekš apgūto trijstūra nevienādību: jebkuru divu trijstūra malu garumu summa ir lielāka nekā trešā mala. Raksta $8 + 10 > x$. Skolēni sprież, kas varētu būt galīgā atbilde šajā uzdevumā, jo ir jāievēro divi nosacījumi. Nonāk pie atbildes: $x \in (12; 18)$
Apjēgšana	Skolotājs izstāsta, ka nevienādību sistēma sastāv no divām vai vairāk nevienādībām, kurām jāatrod visi kopīgie atrisinājumi jeb atsevišķo nevienādību atrisinājumu kopu šķēlums. Ja šādi atrisinājumi neeksistē, tad atbilde ir tukša kopa. Skolotājs parāda, ka atbildi var pierakstīt ar intervālu, divkāršu nevienādību vai vienkāršotu nevienādību sistēmu, kurā abās (visās) nevienādībās ir izteikts x.	Skolēni pieraksta nevienādību sistēmas skaidrojumu, kā arī apdomā stratēģiju, kā to varētu risināt. Skolēni pieraksta šo informāciju un ilustrē to ar piemēriem.

	Skolotājs piedāvā uzdevumu: jāpārbauda, vai skaitlis –2 der par nevienādību sistēmas $\begin{cases} 5x - 1 > 4{,}5 \\ 2 - 3x < 1 \end{cases}$ atrisinājumu? Skolēniem uzdod divus līdzīgus uzdevumus patstāvīgai risināšanai. Skolotājs rezumē šo stundas daļu ar algoritmu nevienādību sistēmu risināšanai: 1) Atrisina katru sistēmas nevienādību. 2) Atrod abu nevienādību kopīgo atrisinājumu.	Skolēni veic aprēķinus un secina, ka ar vērtību x = –2 neizpildās otrā nevienādību, tādēļ skaitlis –2 neder par sistēmas atrisinājumu. Skolēni risina piemērus, salīdzina risinājumus savā starpā un ieskatās atbildēs grāmatas beigās. Pieraksta algoritmu.
Lietošana	Lietojot apspriesto algoritmu, uzdod skolēniem atrisināt dažādas grūtības pakāpes lineāras nevienādību sistēmas.	Risina sistēmas. Patstāvīgi izvēlas, ar kuru piemēru sākt (klasē ir vienošanās, ka skolēni paši izvērtē, ar kuru grūtības pakāpi sākt).
Refleksija	Uzdod jautājumu: vai nevienādību sistēmas atrisinājumu kopa var sastāvēt tikai no viena skaitļa?	Skolēni mēģina izveidot atbilstošu sistēmu. Iedod to atrisināt klasesbiedriem.

14. stunda

Klase: 9.

Skolēnu skaits: 25.

Stundas tēma: Dažādu nevienādību sistēmu atrisināšana.

Mērķis: Pilnveidot skolēni prasmi izvēlēties konkrētajā situācijā atbilstošu algoritmu.

Skolēnam sasniedzamie rezultāti:

- ✓ Atrisina kvadrātnevienādību, nevienādību sistēmu (lineāra nevienādība un kvadrātnevienādība).

Stundas gaita:

Stundas fāze	Skolotāja darbība	Skolēnu darbība
Aktualizācija	Uz skolēnu izvēli piedāvā atrisināt vienu no nevienādībām:	Skolēni atrisina vienu kvadrātnevienādību pēc izvēles.

	$(x+3)^2 < 16$ $x(x+2) < 15$ $3x^2 - x \geq 4$	Pārrunā risināšanas gaitu ar klasesbiedriem un salīdzina atbildes ar atbilžu lapu.
Apjēgšana	Skolotājs piedāvā vēl divu kvadrātnevienādību atrisinājumus. a) $x^2 + 5x + 4 > 0$; b) $-6x^2 + 6 \geq 0$. Skolotājs atgādina, kāds ir vispārīgais algoritms nevienādību sistēmas atrisināšanai.	Skolēni piedalās risināšanā, skaidro risinājuma soļus, to matemātisko jēgu.
Lietošana	Skolēniem piedāvā uzdevumu: Atrisini nevienādību sistēmu! $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 \leq 0 \\ \frac{x-5}{2} + 2 > 0 \end{cases}$ Turpinājumā skolotājs piedāvā atrisināt nevienādību sistēmu no divām kvadrātnevienādībām: $\begin{cases} x^2 - 8x \leq -7 \\ (x-2)^2 > 0 \end{cases}$ Uz tāfeles ir redzama atbildi: $x \in [1; 2) \cup (2; 7]$ Jautā, kā skolēni risinātu nevienādību $(x-2)(x+4) > 0$? Piedāvā sadalīties komandās un atrisināt šo nevienādību ar dažādiem paņēmieniem, tad salīdzināt.	Skolēni ievēro, ka šīs sistēmas atrisināšanā ir jālieto divi šajā stundā apspriesti algoritmi: jārisina katra nevienādība atsevišķi; kvadrātnevienādības atrisināšanai jāpielieto atbilstoša risinājuma shēma. Skolēni risina nākamo sistēmu, salīdzina risināšanas gaitu ar klasesbiedriem, apspriežas par labāko risināšanas paņēmienu un salīdzina atbildi. Skolēni piedāvā variantus: atvērtu iekavas, sastādītu divas ekvivalentas lineāru nevienādību sistēmas, pielietotu citu metodi. Skolēni risina nevienādību, tad apspriežas un mēģina argumentēt, kurš risināšanas paņēmiens bijis visefektīvākais.
Refleksija	Pēc izvēles piedāvā dažādas grūtības pakāpes nevienādību sistēmas: ar lineārām un kvadrātnevienādībām, reizinājuma un dalījuma salīdzināšanu ar nulli, saīsinātās reizināšanas formulām.	Skolēni izvērtē savas spējas nevienādību sistēmu risināšanā un izvēlas atbilstošas grūtības pakāpes uzdevumu. Konsultējas savā starpā un ar skolotāju, spriež par risinājuma gaitu un salīdzina atbildes.

5. pielikums

Empīriskā pētījuma 1. posma (izmēģinājuma pētījuma) fokusgrupas diskusijas ar skolēniem transkripts

Diskusijā piedalījās astoņi dažādu zināšanu un prasmju līmeņu 8. klases skolēni. Skolēnu vārdi ir mainīti.

Jautājums	**Pusaudžu viedokļi**
Kā Tu vērtē savas matemātikas zināšanas? Vai, Tavuprāt, zināšanas ir tas pats, kas atzīme? Tad atzīme reprezentē Tavas zināšanas?	9, jo tā bija mana semestra atzīme. Atzīme ir zināšanu novērtējums. • Gandrīz. • Kā kurā tēmā
Kurā tēma Tev ir labākas zināšanas?	• Neatceros. • Trijstūri. • Pēdējās tēmas bija vienkāršas (*8. klases 2. semestris*). Visa ģeometrija. • Man liekas, ka es visu zinu. Es pārzinu tās tēmas. Ja ne katru, tad vismaz lielāko daļu. • Var vienmēr labāk.
Kas Tev liek domāt, ka Tu jau nedari vislabāk?	• Es iekrītu vienkāršās lietās. Neuzmanības kļūdas. • Jā, man arī tā ir. • Man arī gadās neuzmanības kļūdas. Es esmu rakstījusi, ka 2 + 2 = 6. Dažreiz. • Man liekas, ka manas zināšanas ir labas, bet man negāja tik labi ar kvadrātsaknēm. • Pēc vasaras bija grūti, jo es slinkoju. • Vasarā var nedarīt neko, smadzenes atpūšas. • Arī tāpēc, ka vasarā es eju gulēt kādos četros vai sešos no rīta. Kad klasē pilda uzdevumus, tad viss sanāk, bet, kad kontroldarbs.. Tad es uztraucos un nekas nesanāk. • Kad uztraucies, smadzenes vispār sliktāk strādā.
Kas rada uztraukumu?	Tas, ka tiek vērtēts uz atzīmi.
Kādēļ Tu mācies matemātiku?	• Tādēļ, ka ir tāds mācību priekšmets skolā. • 6. klasē man likās baigi interesanti mācīties matemātiku, tādēļ izvēlējos mācīties matemātikas virziena klasē. • Tas attīsta domāšanu. Mums arī tagad ir labs skolotājs. • Tāpēc, ka tas var noderēt darbā. Es domāju kļūt par programmētāju. • Es nezinu. Man īsti nav nekāda iemesla, kāpēc tieši matemātiku. Es visu mācos. Varbūt vairāk atzīmju dēļ. Nav tā, ka es ļoti cenšos – man vienkārši padodas. Es sekoju līdzi stundā, un ar to pietiek. Nav tā, ka es mājās baigi mācītos.

	• Lai būtu gudrāka. • Tāds ir mācību priekšmets – jāiet un jāmācās. • Lai vairāk zinātu, izprastu.
Vai Tu vari atrisināt jebkuru matemātikas uzdevumu?	(visi smejas un saka: “Nē!”) • Ja Tu ilgāk pasēdi un padomā, tad jau jā. • Kaut kādus vieglus jau jā. • Ar skolotāja palīdzību. • Ar Google var visu atrisināt. Gandrīz visu. Neviens nevar zināt visus uzdevumus. • Ja ir teikts, ka jebkuru matemātikas uzdevumu, tad nē, jo tad tas nozīmē arī kādu 12. klases uzdevumu. Tur es pat nezinātu, ar ko sākt.
Kā ir ar jebkuru 8. klases matemātikas uzdevumu?	• Iespējams. • Ar kādu laiku – varētu. • Pēc kādiem trīs gadiem. • Ja pašķirsta kladi, atkārto, tad gan jau, ka visu var atrisināt.
Kādi mācību līdzekļi Tev visvairāk palīdz, mācoties matemātiku?	• Klade un pildspalva. Ja kārtīgi visu pieraksta, tad visu var atrast. • uzdevumi.lv. Marķieri, ar kuriem izcelt svarīgāko. • Skaistās animācijas uz projektora. • Man visvairāk palīdz klade, jo tajā ir definīcijas un uzdevumu risinājumu piemēri, kas paskaidro. • Ja kaut kas nav ierakstīts, tad grāmata. • Grāmata jau ir jānodod, un pēc tam tā nebūs.
Kādas rakstura īpašības Tev palīdz attīstīt matemātika?	• Pacietību. • Pašpārliecinātību. • Apņēmību. • Centību, neatlaidību. • Loģisko domāšanu, ja vien tā ir rakstura īpašība.
Vai Tu mācies matemātiku no daudzveidīgām problēmsituācijām?	• Tikai pēdējos gados. Iepriekšējai skolotājai vajadzētu atņemt tiesības mācīt. • Līdz 7. klasei mums īsti neko nemācīja. • Mums bija skolotāja, kura visu laiku bļāva. • Mums skolotāja neko nemācīja un visiem bija sliktas atzīmes. • Man visu laiku bija 8 – pie dažādiem skolotājiem. • Mums deva vienādus piemērus un uzdevumus. • Kontroldarbā bija teksta uzdevumi, kuri bija nedaudz citādāki, un es tos nekad nevarēju izpildīt. Tēma it kā tā pati. Tādēļ man vienmēr bija 8, jo nekad nepietika laika izpildīt pēdējo vai pēdējos divus uzdevumus. Tagad ir labāk – lai arī mums ir lielāki kontroldarbi, tomēr tie ir pa divām stundām, tādēļ ir pietiekami daudz laika izpildīt visus uzdevumus.

	• 6. klasē kontroldarbā bija viens grūtais uzdevums, lai dabūtu 10. Man ar to parasti gāja labi, bet es pati domāju, mēs nemācījāmies risināt šādus uzdevumus. • Manai skolotājai pamatskolas sākumā bija tāda attieksme – dari, ko tu gribi, vari nemācīties, tikai netraucē stundu. Līdz ar to daudzi zīmēja kaut ko un nedarīja neko matemātikā. • Cik es atceros, bija baigais troksnis. • Man tikai piedāvāja braukt uz olimpiādi, jo man bija stundās garlaicīgi.
Vai un kā skolas vide Tev palīdz apgūt matemātiku?	• Nekā. • Ja ir draudzīgi klasesbiedri, tad ir vieglāk mācīties. • Ja nav troksnis. • Ja ir foršs skolotājs.
Cik lielā mērā skolēna paša iesaiste ietekmē panākumus matemātikā?	• Ļoti. • Ja grib mācīties, tad arī iemācīsies. Ja negrib – tad nekā nebūs. • Bet, ja skolotājs neiemācīs, tad arī nebūs. Pie slikta skolotājs nevar iemācīties, lai arī cik ļoti skolēns gribētu. • Ja ļoti gribēs, tad varēs kaut vai mājās pats iemācīties. • Ja skolēns negribēs iemācīties, tad skolotājs nevarēs neko iemācīt. • Vienkārši ir jāgrib mācīties.
Vai sabiedrība ietekmē jūsu motivāciju mācīties matemātiku?	• Kad Tu saproti, ka vairākiem ir labākas atzīmes par Tavējām, kļūst svarīgi mācīties labāk. • Matemātiķi tiek vērtēti augstāk. Ja Tu proti matemātiku vai Tev ir labas atzīmes, tad uzreiz Tu tiec vērtēts kā gudrs.
Vai matemātikas stundas attīsta jūsu domāšanu?	• Jā (visi). • Kad ir jādomā visādi uzdevumi, tas arī attīsta. • Iemāca atrisināt problēmas. • Matemātika iemāca rīkoties ar formulām – likt tajās iekšā skaitļus, pielietot arī citās nozarēs. • Jā, jo es esmu dzirdējis, ka tas tā ir pierādīts.
Vai tas, ko apgūsti matemātikā, Tev noderēs darba tirgū?	• Varbūt viss pilnīgi nē, kaut kāda daļa. • Atkarīgs no darba. • Man noderēs kritiskā domāšana. • Ne viss. Piemēram, kaut kādi diskriminanti un tādas lietas – nē, bet matemātika kopumā trenē domāšanu, un tas noderēs.

6. pielikums

Empīriskā pētījuma 1. posma (izmēģinājuma pētījuma) skaitliskie rezultāti

	1. Matemātiskā intuīcija		2. Problēmu risināšana		3. Matemātiskā modelēšana	4. Komunikācija		5. Kritiskā domāšana	6. Personības īpašības
	1. Cik bieži Tev gadās uzminēt nākamo uzdevuma atrisinājuma soli?	2. Cik bieži, risinot uzdevumu, novērtē rezultātu, pirms veikt aprēķinus?	4. Cik bieži Tev ir problēmas uztvert, kas ir prasīts uzdevumā?	5. Cik bieži Tev matemātikas stundās jāpamato savs viedoklis?	7. Cik bieži matemātikas stundās veidojat matemātisku modeli reālas dzīves problēmai?	10. Vai risinot uzdevumus izmanto enciklopēdijas, rokasgrāmatas vai citus informācijas avotus?	11. Cik bieži Tu spēj uzdevumu pateikt saviem vārdiem, interpretēt?	13. Cik bieži Tu spēj argumentēt savu risinājumu vai viedokli?	17. Cik bieži, risinot uzdevumu, Tev rodas interese noskaidrot vai aprēķināt vēl kaut ko, kas nav prasīts uzdevumā?
Katru stundu	0	4	0	2	0	0	3	2	1
Bieži	15	9	5	14	10	1	9	19	3
Reizēm	17	22	35	24	30	13	24	17	17
Nekad	9	5	1	1	1	27	5	3	20
Kopā	41	40	41	41	41	41	41	41	41

7. pielikums

Empīriskā pētījuma 1. posma (izmēģinājuma pētījuma) aprakstošā statistika

Matemātiskās kompetences komponente	**Aritmē-tiskais vidējais**	**Moda**	**Mediāna**	**Standart-novirze**	**Asimetrijas koeficients**
Personības īpašības	0,63	0	1	0,73	1,11
Matemātiskā modelēšana	1,02	1	1	0,99	0,77
Komunikācija	0,90	1	1	0,44	–0,55
Problēmu risināšana	1,22	1	1	0,72	1,29
Matemātiskā intuīcija	1,54	2	2	1,19	–0,14
Kritiskā domāšana	0,59	1	1	0.59	0,42
Pašrefleksija	0,95	0	1	1,00	0,42

0=nav, 1=vāji, 2=labi, 3=izteikti.

Empīriskā pētījuma 1. posma (izmēģinājuma pētījuma) korelācijas analīze ar Spīrmena testu

1. datu rindiņa – Spīrmena korelācijas koeficients, 2. rindiņā – p-vērtība (*significance*)

	1.	2.	3a.	3b.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.
1. Cik bieži Tev gadās uzminēt nākamo uzdevuma atrisinājuma soli?	1,000	,103	,200	,214	,479	,077	,254	-,214	,188	,209	-,175	,036	,095	,201	,104
		,527	,210	,178	,002	,631	,109	,180	,238	,191	,275	,823	,555	,208	,516
2. Cik bieži, risinot uzdevumu, novērtē rezultātu, pirms veikt aprēķinus?	,103	1,000	,009	-,168	,223	,129	,083	,108	-,068	-,035	,296	,067	-,146	,160	,027
	,527		,954	,300	,167	,426	,611	,506	,678	,828	,063	,683	,370	,324	,866
3a. Paturpini skaitļu virkni 2, 8, 18, … un izskaidro to vārdiem!	,200	,009	1,000	,771	,242	,116	,204	-,140	,158	,141	,078	,136	-,085	,298	,026
	,210	,954		,000	,128	,469	,201	,384	,324	,378	,626	,397	,599	,058	,870
3b. Ar cik skaitļiem paturpināja skaitļu virkni	,214	-,168	,771	1,000	,083	,093	,231	-,068	,126	-,053	,000	,288	,107	,227	,081
	,178	,300	,000		,607	,564	,146	,673	,434	,741	,998	,068	,505	,153	,617
4. Cik bieži Tev ir problēmas uztvert, kas ir prasīts uzdevumā?	,479	,223	,242	,083	1,000	,064	,329	-,306	,412	,228	-,126	,069	,093	,041	,072
	,002	,167	,128	,607		,690	,035	,052	,008	,151	,433	,670	,563	,798	,654
5. Cik bieži Tev matemātikas stundās jāpamato savs viedoklis?	,077	,129	,116	,093	,064	1,000	,230	,274	,134	,095	-,030	,241	-,144	,402	-,005
	,631	,426	,469	,564	,690		,148	,083	,404	,553	,854	,129	,369	,009	,977
6. 2015. gadā Mārupes vidusskolā mācījās 910 skolēni, 2016. gadā – 1000 skolēnu un 2017. gadā – 1100 skolēni. Sastādi matemātisku uzdevumu un atrisini to!	,254	,083	,204	,231	,329	,230	1,000	-,102	,369	,298	,046	,261	,171	,104	,008
	,109	,611	,201	,146	,035	,148		,526	,018	,059	,773	,099	,285	,516	,961
7. Cik bieži matemātikas stundās veidojat matemātisku modeli reālas dzīves problēmai?	-,214	,108	-,140	-,068	-,306	,274	-,102	1,000	-,082	,109	,123	,233	-,007	,017	-,368
	,180	,506	,384	,673	,052	,083	,526		,611	,498	,445	,143	,966	,914	,018
8. Kādus procesus var aprakstīt ar funkciju?	,195	-,009	,117	,093	,412**	,144	,446**	-,118	1	,354*	-,064	,157	,180	,054	,212
	,222	,954	,467	,564	,007	,370	,003	,461		,023	,689	,327	,260	,738	,182

	1.	2.	3a.	3b.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.
9. Vienādsānu trijstūra viena mala ir 8 cm un cita mala ir 5 cm gara. Aprēķini trijstūra perimetru.	,226	,033	,102	,027	,213	,048	,324*	,117	,354*	1	,090	-,231	-,125	-,246	,138
	,156	,839	,524	,866	,181	,763	,039	,465	,023		,577	,147	,435	,121	,389
10. Vai risinot uzdevumus izmanto enciklopēdijas, rokasgrāmatas vai citus informācijas avotus?	-,196	,280	,037	-,070	-,191	-,090	,045	,168	-,064	,090	1	,081	,050	-,086	-,104
	,220	,080	,816	,666	,231	,576	,778	,295	,689	,577		,613	,759	,592	,518
11. Cik bieži Tu spēj uzdevumu pateikt saviem vārdiem, interpretēt?	,023	,155	,155	,165	,085	,199	,261	,261	,157	-,231	,081	1	-,002	,463**	-,068
	,887	,339	,334	,303	,598	,213	,100	,099	,327	,147	,613		,991	,002	,671
12. Puse Latvijas teritorijas ir klāta ar mežiem. Diagrammā ir redzams Latvijas mežu sadalījums pa koku sugām. Cik procentus no Latvijas teritorijas klāj skujkoku meži?	,120	-,198	-,090	,147	,093	-,122	,148	-,015	,180	-,125	,050	-,002	1	-,165	,279
	,457	,221	,577	,359	,562	,448	,354	,927	,260	,435	,759	,991		,302	,078
13. Cik bieži spēj argumentēt savu risinājumu vai viedokli?	,096	,144	,275	,120	-,005	,318*	,127	,045	,054	-,246	-,086	,463**	-,165	1	,174
	,551	,376	,082	,453	,977	,043	,431	,779	,738	,121	,592	,002	,302		,276
14. Kāds būtu pirmais solis, lai ar pierādījumu no pretējā pamatotu, ka kvadrātsakne no 2 ir iracionāls skaitlis?	,091	-,006	-,005	,004	,080	-,004	,017	-,359*	,212	,138	-,104	-,068	,279	,174	1
	,572	,972	,977	,979	,617	,983	,916	,021	,182	,389	,518	,671	,078	,276	
15. Četrstūra diagonāles ir reizē arī četrstūra leņķu bisektrises. Kā Tu pamatotu, ka šis četrstūris ir rombs?	,306	-,063	,397*	,320*	,265	,070	,276	-,113	,404**	,328*	,017	-,047	,033	,077	,159
	,052	,698	,010	,042	,094	,662	,080	,482	,009	,036	,914	,770	,837	,633	,322
16. Ja uzdevumu Tev neizdodas uzreiz atrisināt, Tu tomēr meklē citu risinājumu vai arī atliec malā, neturpini par to domāt? (0=nerisinu, jo pieņemu, ka to nevar atrisināt; 1=nerisinu, jo gan jau saņemšu palīdzību; 2=atlieku malā, lai pēc brīža turpinātu turpinātu risināt; 3=pūlos izdomāt risinājumu)	,235	,108	-,006	-,136	,243	-,333	,173	-,239	,233	,058	,209	-,098	,390	,002	,107
	,139	,508	,969	,395	,126	,033	,280	,133	,143	,720	,190	,541	,012	,989	,507
17. Cik bieži, risinot uzdevumu, Tev rodas interese noskaidrot vai aprēķināt vēl kaut ko, kas nav prasīts uzdevumā?	,226	,131	,126	-,022	,143	-,170	-,129	-,001	,327	-,047	-,272	,162	-,218	,284	-,055
	,156	,420	,434	,893	,372	,287	,420	,995	,037	,771	,085	,310	,171	,072	,731

	1.	2.	3a.	3b.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.
18. Iedomājies, ka, risinot ģeometrijas uzdevumu, Tu ieguvi atbildi, ka malas garums ir negatīvs skaitlis. Kā Tu rīkotos?	,182	-,060	,383	,407	,179	-,094	,352	-,384	-,135	-,012	-,102	,084	,011	,090	,070
	,256	,712	,014	,008	,264	,558	,024	,013	,400	,941	,524	,601	,946	,575	,663
19. Vai Tu vari atrisināt jebkuru matemātikas uzdevumu?	-,075	,047	-,130	-,122	-,076	,261	,079	,098	-,115	-,140	-,155	,079	-,228	,298	-,192
	,641	,774	,417	,446	,636	,099	,625	,541	,475	,383	,332	,624	,151	,059	,230
20. Kā Tu rīkotos, ja risinājuma gaitā atklātos, ka Tevis izvēlētais risināšanas paņēmiens noved strupceļā un neļauj tikt pie atbildes?	,183	-,108	,307	,203	,291	-,096	,005	-,216	,029	,208	-,232	-,027	-,020	,069	,125
	,251	,507	,051	,203	,065	,549	,976	,175	,859	,192	,145	,867	,902	,669	,435
21. Ko Tu secināji no šīm divām skaitliskām nevienādībām?	,122	-,100	,232	,329	,323	-,045	,134	-,192	,242	,247	-,217	,004	,111	,078	,362
	,448	,538	,144	,036	,040	,782	,404	,228	,127	,120	,173	,981	,488	,628	,020

	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.
1. Cik bieži Tev gadās uzminēt nākamo uzdevuma atrisinājuma soli?	,332	,235	,226	,182	-,075	,183	,122
	,034	,139	,156	,256	,641	,251	,448
2. Cik bieži, risinot uzdevumu, novērtē rezultātu, pirms veikt aprēķinus?	-,058	,108	,131	-,060	,047	-,108	-,100
	,724	,508	,420	,712	,774	,507	,538
3a. Paturpini skaitļu virkni 2, 8, 18, … un izskaidro to vārdiem!	,392	-,006	,126	,383	-,130	,307	,232
	,011	,969	,434	,014	,417	,051	,144
3b. Ar cik skaitļiem paturpināja skaitļu virkni	,345	-,136	-,022	,407	-,122	,203	,329
	,027	,395	,893	,008	,446	,203	,036
4. Cik bieži Tev ir problēmas uztvert, kas ir prasīts uzdevumā?	,277	,243	,143	,179	-,076	,291	,323
	,080	,126	,372	,264	,636	,065	,040
5. Cik bieži Tev matemātikas stundās jāpamato savs viedoklis?	,083	-,333	-,170	-,094	,261	-,096	-,045
	,604	,033	,287	,558	,099	,549	,782
6. 2015. gadā Mārupes vidusskolā mācījās 910 skolēni, 2016. gadā – 1000 skolēnu un 2017. gadā – 1100 skolēni. Sastādi matemātisku uzdevumu un atrisini to!	,190	,173	-,129	,352	,079	,005	,134
	,235	,280	,420	,024	,625	,976	,404
7. Cik bieži matemātikas stundās veidojat matemātisku modeli reālas dzīves problēmai?	-,120	-,239	-,001	-,384	,098	-,216	-,192
	,456	,133	,995	,013	,541	,175	,228
8. Kādus procesus var aprakstīt ar funkciju?	,436	,233	,327	-,135	-,115	,029	,242
	,004	,143	,037	,400	,475	,859	,127
9. Vienādsānu trijstūra viena mala ir 8 cm un cita mala ir 5 cm gara. Aprēķini trijstūra perimetru.	,341	,058	-,047	-,012	-,140	,208	,247
	,029	,720	,771	,941	,383	,192	,120
10. Vai risinot uzdevumus izmanto enciklopēdijas, rokasgrāmatas vai citus informācijas avotus?	,044	,209	-,272	-,102	-,155	-,232	-,217
	,787	,190	,085	,524	,332	,145	,173

	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.
11. Cik bieži Tu spēj uzdevumu pateikt saviem vārdiem, interpretēt?	-,008	-,098	,162	,084	,079	-,027	,004
	,961	,541	,310	,601	,624	,867	,981
12. Puse Latvijas teritorijas ir klāta ar mežiem. Diagrammā ir redzams Latvijas mežu sadalījums pa koku sugām. Cik procentus no Latvijas teritorijas klāj skujkoku meži?	,018	,390	-,218	,011	-,228	-,020	,111
	,911	,012	,171	,946	,151	,902	,488
13. Cik bieži spēj argumentēt savu risinājumu vai viedokli?	,162	,002	,284	,090	,298	,069	,078
	,313	,989	,072	,575	,059	,669	,628
14. Kāds būtu pirmais solis, lai ar pierādījumu no pretējā pamatotu, ka kvadrātsakne no 2 ir iracionāls skaitlis?	,194	,107	-,055	,070	-,192	,125	,362
	,225	,507	,731	,663	,230	,435	,020
15. Četrstūra diagonāles ir reizē arī četrstūra leņķu bisektrises. Kā Tu pamatotu, ka šis četrstūris ir rombs?	1,000	,159	,171	,228	,023	,080	,341
		,320	,286	,152	,886	,620	,029
16. Ja uzdevumu Tev neizdodas uzreiz atrisināt, Tu tomēr meklē citu risinājumu vai arī atliec malā, neturpini par to domāt? (0=nerisinu, jo pieņemu, ka to nevar atrisināt; 1=nerisinu, jo gan jau saņemšu palīdzību; 2=atlieku malā, lai pēc brīža turpinātu risināt; 3=pūlos izdomāt risinājumu)	,159	1,000	,117	,085	-,188	-,093	,069
	,320		,468	,599	,239	,561	,668
17. Cik bieži, risinot uzdevumu, Tev rodas interese noskaidrot vai aprēķināt vēl kaut ko, kas nav prasīts uzdevumā?	,171	,117	1,000	-,091	-,049	,187	-,072
	,286	,468		,571	,763	,241	,657
18. Iedomājies, ka, risinot ģeometrijas uzdevumu, Tu ieguvi atbildi, ka malas garums ir negatīvs skaitlis. Kā Tu rīkotos?	,228	,085	-,091	1,000	-,114	,245	,391
	,152	,599	,571		,478	,122	,011
19. Vai Tu vari atrisināt jebkuru matemātikas uzdevumu?	,023	-,188	-,049	-,114	1,000	,093	,100
	,886	,239	,763	,478		,562	,532
20. Kā Tu rīkotos, ja risinājuma gaitā atklātos, ka Tevis izvēlētais risināšanas paņēmiens noved strupceļā un neļauj tikt pie atbildes?	,080	-,093	,187	,245	,093	1,000	,253
	,620	,561	,241	,122	,562		,111
21. Ko Tu secināji no šīm divām skaitliskām nevienādībām?	,341	,069	-,072	,391	,100	,253	1,000
	,029	,668	,657	,011	,532	,111	

9. pielikums

Empīriskā pētījuma 2. posma (pamatpētījuma) anketa pusaudžiem

Aptauja

Šī ir anonīma aptauja, kuras mērķis ir noskaidrot Tavu viedokli par iespējām veidot matemātisko kompetenci matemātikas mācību stundās, kā arī pārbaudīt Tavas prasmes.

Matemātiskā intuīcija

1. Cik bieži Tev gadās uzminēt nākamo uzdevuma atrisinājuma soli?

1.1. Vienmēr 1.2. Bieži 1.3. Reizēm 1.4. Nekad

1.5. Cits ....

2. Cik bieži, risinot uzdevumu, novērtē rezultātu, pirms veikt aprēķinus?

2.1. Vienmēr 2.2. Bieži 2.3. Reizēm 2.4. Nekad

3. Nerisinot vienādojumu, cik atrisinājumu (sakņu) ir šim vienādojumam?

$$x^3 - 4x = 0$$

3.1. 1 3.2. 2 3.3. 3 3.4. neviena 3.5. es nezinu

3.6. Cits ....

4. Paturpini skaitļu virkni 2, 8, 18, ... un paskaidro savu ideju!

Problēmu risināšana

5. Cik bieži Tev ir problēmas uztvert, kas ir prasīts uzdevumā?

5.1. Katru stundu 5.2. Bieži 5.3. Reizēm 5.4. Nekad

5.5. Cits ....

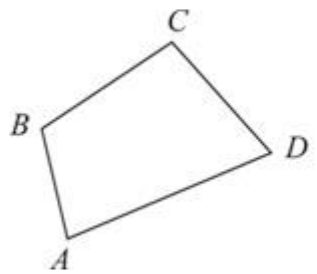
6. Cik bieži Tev matemātikas stundās jāpamato savs viedoklis?

6.1. Katru stundu 6.2. Bieži 6.3. Reizēm 6.4. Nekad

6.5. Cits ....

7. 2015. gadā Mārupes vidusskolā mācījās 910 skolēni, 2016. gadā – 1000 skolēnu un 2017. gadā – 1100 skolēni. Sastādi matemātisku uzdevumu un atrisini to!

8. Attēlā parādīta zemesgabala ABCD forma. Kādi mērījumi jāveic, lai varētu noteikt šī zemesgabala laukumu? Uzraksti īsu plānu, kā Tu noteiktu laukumu!



Matemātiskā modelēšana

9. Cik bieži matemātikas stundās veidojat matemātisku modeli reālas dzīves problēmai?

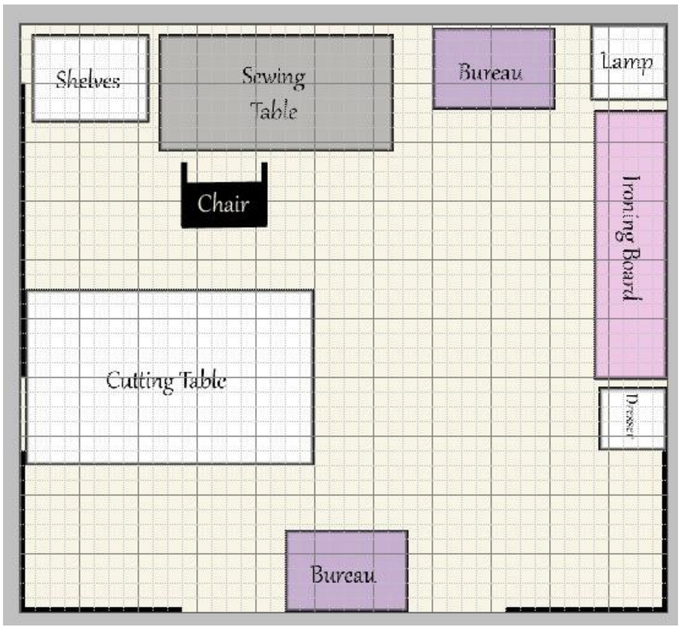
9.1. Katru stundu 9.2. Bieži 9.3. Reizēm 9.4. Nekad

9.5. Cits ....

10. Kādus procesus var aprakstīt ar funkciju?

11. Vienādsānu trijstūra viena mala ir 8 cm un cita mala ir 5 cm gara. Aprēķini trijstūra perimetru.

12. Attēlā parādīts istabas plāns. Zināms, ka istabas platums ir 5 metri. Nosaki lielākā galda izmērus!



Komunikācija

13. Vai risinot uzdevumus izmanto enciklopēdijas, rokasgrāmatas vai citus informācijas avotus?

13.1. Katru stundu 13.2. Bieži 13.3. Reizēm 13.4. Nekad

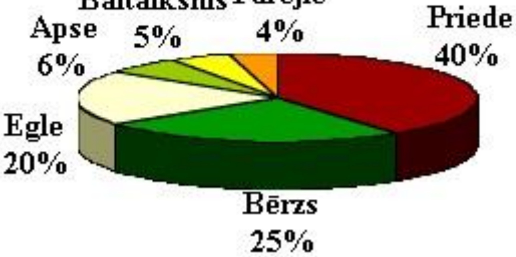
13.5. Cits ....

14. Cik bieži Tu spēj uzdevumu pateikt saviem vārdiem, interpretēt?

14.1. Vienmēr 14.2. Bieži 14.3. Reizēm 14.4. Nekad

14.5. Cits ....

15. Puse Latvijas teritorijas ir klāta ar mežiem. Diagrammā ir redzams Latvijas mežu sadalījums pa koku sugām. Cik procentus no Latvijas teritorijas klāj skujkoku meži?



16. Aptuveni katram devītajam Latvijas iedzīvotājam ir Instagram profils. Cik Instagram lietotāju ir Latvijā?

Kritiskā domāšana

17. Cik bieži Tu spēj argumentēt savu risinājumu vai viedokli?

17.1. Vienmēr   17.2. Bieži   17.3. Reizēm   17.4. Nekad

17.5. Cits ....

18. Četrstūra diagonāles ir vienlaikus arī četrstūra leņķu bisektrises. Kā Tu pamatotu, ka šis četrstūris ir rombs?

19. Kā Tu domā, pēc kāda principa daži skaitļi šajā tabulā ir iekrāsoti zaļā krāsā?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

20. Vai var viennozīmīgi apgalvot, ka četrstūris, kura diagonāles ir perpendikulāras un vienāda garuma, ir kvadrāts?

Personības īpašības

21. Ja uzdevumu Tev neizdodas uzreiz atrisināt, Tu tomēr meklē citu risinājumu vai arī atliec malā, neturpini par to domāt? (var atzīmēt vairākas atbildes)

21.1. ☐ pūlos izdomāt risinājumu

21.2. ☐ atlieku malā, lai pēc brīža turpinātu risināt

21.3. ☐ nerisinu, jo gan jau saņemšu palīdzību no klasesbiedriem vai skolotāja/-as

21.4. ☐ nerisinu, jo pieņemu, ka to nevaru atrisināt

21.5. ☐ cits

22. Cik bieži, risinot uzdevumu, Tev rodas interese noskaidrot vai aprēķināt vēl kaut ko, kas nav prasīts uzdevumā?

22.1. Vienmēr 22.2. Bieži 22.3. Reizēm 22.4. Nekad

22.5. Cits ....

23. Iedomājies, ka, risinot ģeometrijas uzdevumu, Tu ieguvi atbildi, ka malas garums ir negatīvs skaitlis. Kā Tu rīkotos?

24. Apskatot šo attēlu, vai Tev rodas zinātkāre pārbaudīt, kāds rezultāts sanāk pēdējā rindiņā?

$$
\begin{aligned}
1 \times 8 + 1 &= 9\\
12 \times 8 + 2 &= 98\\
123 \times 8 + 3 &= 987\\
1234 \times 8 + 4 &= 9876\\
12345 \times 8 + 5 &= 98765\\
123456 \times 8 + 6 &= 987654\\
1234567 \times 8 + 7 &= ?
\end{aligned}
$$

Pašrefleksija

25. Vai Tu vari atrisināt jebkuru matemātikas uzdevumu? Paskaidro savu atbildi!

26. Kā Tu rīkotos, ja risinājuma gaitā atklātos, ka Tevis izvēlētais risināšanas paņēmiens noved strupceļā un neļauj tikt pie atbildes?

27. Ko Tu secināji no šīm divām skaitliskām nevienādībām?

$9^2 > 9$, bet $0{,}9^2 < 0{,}9$

28. Kādas pārdomas Tev rodas, apskatot šo "pierādījumu" tam, ka 2 = 1?

$$a = b$$
$$a^2 = ab$$
$$a^2 - b^2 = ab - b^2$$
$$(a+b)(a-b) = b(a-b)$$
$$(a+b) = b$$
$$b + b = b$$
$$2b = b$$
$$2 = 1$$

Vispārīgo jautājumu bloks

29. Kā Tu vērtē savas zināšanas matemātikā?

30. Kāds ir Tavu matemātisko prasmju līmenis? Piemēram, vai ikdienas situācijās Tu veiksmīgi pielieto matemātikas zināšanas dažādu problēmu risināšanā?

31. Kā matemātikas skolotāja/-s Tev palīdz vai traucē apgūt matemātiku?

32. Kā skolas mācību vide (aprīkojums, mācību materiāli, emocionālā vide u. c.) Tev palīdz vai traucē apgūt matemātiku?

33. Ja, pildot šo testu, Tev radās vēl kādi komentāri, uzraksti tos šeit

Paldies par atsaucību! :) Lai veicas mācībās!

10. pielikums

Empīriskā pētījuma 2. posma (pamatpētījuma) fokusgrupas diskusijas ar matemātikas skolotājiem transkripts

Diskusijā piedalījās trīs matemātikas skolotāji. **Andžela Sokolova** ir matemātikas skolotāja un direktora vietniece mācību darbā, Latvijas Izglītības un zinātnes darbinieku arodbiedrības (LIZDA) eksperte sociāli ekonomiskajos jautājumos. **Zanda Romanovska** ir matemātikas skolotāja un audzinātāja, kura nāk no skolotāju dinastijas. Kā pati vērtē, ir specializējusies uz zēnu mācīšanu – diskusijas brīdī skolotājas audzināmajā klasē bija 10 meitenes un 18 zēni. **Gundega Dzene** sākotnēji bija vācu valodas skolotāja, taču tagad māca gan vācu valodu, gan matemātiku, tādēļ var sniegt skatījumu par to, kā humanitāro mācību priekšmetu mācīšanās atšķiras no matemātikas metodikas.

Kādēļ ir svarīgi labi mācēt matemātiku?

Šis jautājums sarunas dalībniekus sasmīdināja un lika mirkli padomāt. Matemātika māca domāt ārpus rāmjiem, meklēt jaunus, abstraktus jēdzienus, atrisināt nestandarta uzdevumus, paredzēt alternatīvas, dažādus iespējamos atrisinājumus, apšaubīt (Z. Romanovska min piemēru par matemātiķi Nikolaju Lobačevski, kurš apšaubīja ģeometrijas aksiomu, ka paralēlas taisnes nekrustojas, kas viņu mudināja izveidot pirmo neeiklīda ģeometriju). Šīs iemaņas, pārnestas reālajā dzīvē, ļauj cilvēkam, kurš ir labi apguvis matemātiku, elastīgāk, ātrāk un racionālāk pārvarēt dažādas problēmsituācijas. Tādējādi matemātika attīsta nestandarta domāšanu, spēju domāt "ārpus rāmjiem". Matemātika iemāca to, ka problēmām ir vismaz divi dažādi risinājumu veidi, kā arī to, ka reizēm uzdevumam nav atrisinājumu, un tā jau ir atbilde. G. Dzenes rezumējums, ka visa dzīve ir matemātika, raisīja viedokļu apmaiņu par to, ka šajā jautājumā matemātiķiem nav vienota skatījuma – Vācijas izglītības tradīciju iespaidā liela daļa matemātiķu ir pārliecināti, ka matemātikai nav jābūt saistītai ar reālo dzīvi, tai jābūt iespējami abstraktai, jāattīsta domāšana; tikmēr vāciski nerunājošās valstīs valda uzskats, ka matemātika ir lietišķā zinātne (*applied science*), proti, tās galvenā funkcija ir pielietojums praktisku problēmu risināšanā, analīzē, skaidrošanā, prognozēšanā un tamlīdzīgi.

Kādus matemātikas uzdevumus Jūs atlasiet darbam ar skolēniem?

Diskusijas dalībnieki vadās pēc standarta prasībām, skolēnu spējām, nedaudz skolēnus izaicinot ar grūtības pakāpi, lai skolēnam būtu iespēja attīstīties. Tas jādara prātīgi, lai neiedzītu skolēnos šausmas, taču lai skolēni neieslīgst pašapmierinātībā, ka visu zina un prot. Piemēram, gatavojoties kontroldarbam, A. Sokolova saviem skolēniem piedāvā veselu virkni ar uzdevumiem, aicinot sākt risināt ar to uzdevumu, kuru skolēns uzreiz nezina, kā atrisināt. Saturā skolotāji cenšas piemeklēt nevis abstraktas, bet reālas dzīves situācijas. "Kāpēc kādreiz matemātiku visi zināja tik labi un tagad – sliktāk? Kādreiz mācīja *viens maiss plus divi maisi ir trīs maisi,* bet tagad 1. klasē māca 1 + 2 = 3. Tas 1 un 2 bērnam neizsaka pilnīgi neko, un līdz ar to viņš nesaprot, kā no tā rodas 3, bet maisus spēj iztēloties un saprast būtību," matemātikas metodikas grāmatā izlasītu atziņu atstāstīja A. Sokolova. Skolotāji novērojuši, ka skolēniem ir vieglāk saprast matemātiskās darbības, ja tās skaidro ar naudu. Mūsdienās gan nauda kā norēķināšanās līdzeklis arvien vairāk tiek aizstāta ar elektroniskajiem norēķiniem, tādējādi arī nauda kļūst par abstraktu jēdzienu. Daudzveidīgu saturu var nodrošināt, izpētot vairāku autoru mācību avotus, ne tikai latviešu skolotāju izdotos materiālus. "Man, piemēram, ļoti interesē, ko mācās Amerikas skolās, ko dara Dānijā, kādus uzdevumus pilda PISA testā. Galvenā atšķirība ir tāda, ka lielākā daļa uzdevumu pamatā ir par spēju strādāt ar tekstu. Tas, ko (Jānis) Vilciņš mēģināja darīt ar 8. klašu diagnostikas darbiem matemātikā, un izrādījās, ka mūsu skolēniem ar to ir lielas problēmas, tādēļ atpakaļ no 10 kvadrātvienādojumu risināšanas pāriet uz tekstu, kurā varbūt ir jāizdara tikai divas darbības, bet skolēns nezina – kādas," vērojumos par globālām tendencēm matemātikas mācības dalās Z. Romanovska. Skolotāji mēģina sekot globālām tendencēm matemātikas mācīšanā. "Arī matemātikā ir sava mode. Kādreiz modē bija uzkonstruēt parabolu un noteikt, ka tā aug vai dilst un kur krusto asis. Tagad parabolu savieno ar dzīvi un pēta parabolu kā izmesta akmens lidojuma trajektoriju," vēl vienu piemēru min Z. Romanovska. Studējot pedagoģijas fakultātē, skolotāja uzzināja, ka pēc universitātes pasniedzēju aplēsēm praktiskajā dzīvē tiešā veidā var pielietot tikai 20 % vidusskolas matemātikas mācību satura. Daļa satura ir abstrakta, un skolēniem ir jāskaidro, ka tas attīsta citas prasmes, kas arī ir noderīgas dzīvē, tostarp prasmi veidot loģisku domu ķēdīti, kritiski izvērtēt piedāvāto informāciju, atrast pretpiemērus un tamlīdzīgi. "Modernajā matemātikā patlaban ir divi virzieni – vai nu matemātiķis atklāj kaut ko atklāšanas pēc, vai un strādā kādai idejai, kura varētu īstenoties nākotnē, piemēram, aprēķini, ko varēs darīt ar kvantu datoru," saka Z. Romanovska. G. Dzene ir ievērojusi, ka latviešu valodā izdotajās matemātikas grāmatās lietotā valoda, skaidrojumi un uzskates materiāls ir ļoti sarežģīts; vācu valodā izdotajās grāmatās ir izvēlēta skolēniem saprotamāka valoda, it sevišķi, rūpējoties par to, lai skolēni ar zemu matemātikas līmeni varētu temata pašā sākumā uztvert pašu būtiskāko.

Cik svarīgi un cik reāli ir skolēniem matemātikas stundām piedāvāt daudzveidīgas situācijas?

Skolotāji uzskata, ka daudzveidīgas situācijas var piedāvāt klasēm, kuras tām ir gatavas, bet citās klasēs lietderīgāk ir atrisināt dažus konkrētus uzdevumus, kurus skolēnu saprot.

“Saprāta robežās. Pamatzināšanas, kuras skolēns pēc tam var pielietot dažādās situācijās, tomēr ir jāapgūst uz ne tik daudzveidīgām, bet ierastām un klasiskām situācijām. Kad skolēnam jau ir stabili pamati, tad var piedāvāt daudzveidīgas situācijas, ļaut domāt nestandarta, ārpus rāmjiem. Jābūt arī laikam šos pamatus nostiprināt, lai nav tā, ka mēs parādam kaut ko jaunu un sāksim uzreiz pielietot dažādās situācijās, citādi liela daļa skolēnu apjūk un nesaprot,” uzskata A. Sokolova. Pēc skolotāju domām, pēc Latvijā praktizētās matemātikas mācīšanās skolēniem neveidojas izpratne par matemātiku kā veselumu; zināšanas no atsevišķiem tematiem ir atrautas. Piemēram, skolēns atsevišķi var pārzināt tādus jautājumus kā nevienādības, funkcijas, parabola, taču, visbiežāk, nespēj starp tiem saskatīt kopsakarības, pat ar skolotāja iedotu darbības plānu. Arī mācību grāmatu autoru piedāvātā tematu secība neveido izpratni par matemātiku, jo šai secībai trūkst loģikas – tematu ir pārāk daudz un tie nav sasaistīti savā starpā. Saturiski pārblīvētā programma arī mazina iespējas skolotājam būt elastīgam un piedāvāt daudzveidīgās situācijas, jo visu laiku nākas atskatīties uz laika ierobežojumiem. Vienīgais izņēmums ir 6. klase, kur gandrīz viss mācību gads tiek veltīts skaitļošanas prasmēm, taču arī tas nav labs risinājums, jo tas ļoti nogurdina skolēnus un tādējādi mazina motivāciju apgūt matemātiku.

Kas, Jūsuprāt, būtu uzlabojams matemātikas standartā?

Skolotāji iesaka matemātikas saturu dalīt lielākos blokos, kura ietvaros tiktu padziļinātāk un savā starpā saistīti aplūkotas vairākas tēmas. Piemēram, apgūstot funkcijas, skolēni apskatītu arī funkciju grafiku pielietojumu nevienādību grafiskajai atrisināšanai, pētītu dažādas formas telpisko ķermeņu piepildīšanās funkcijas, veidojot izpratni par to tilpumu, analizētu, ko praktiska satura uzdevumā nozīmē divu funkciju grafiku krustpunkti, pētītu funkcijas ekstrēmus utt. “Es arī šogad 8. klasei sajaucu tēmu kārtību kājām gaisā, jo patreizējais sadalījums man šķiet pilnīgi neloģisks, tas neveido kopskatu. Ja mēs mācamies pakāpes, tad kāpēc pēc pakāpēm nevar sekot Pitagora teorēma, kur mēs šīs pakāpes pielietojam. Viss saturs ir tā izmētāts pa visu gadu, ka katru reizi, kad mēs sākam jaunu tēmu, man viss ir jāsāk no gala, jo skolēni to ir mācījušies pirms pusgada un sen ir aizmirsuši,” skaidro A. Sokolova. Otrs ieteikums – ne tik daudz, bet kvalitatīvāk. Ir gan grūti pateikt, kuri temati ir tādi, bez kuriem varētu iztikt. Reizēm skolotāji nepagūst izņemt visas konkrētajā klasē paredzētās tēmas, piemēram, reti ar kuru klasi sanāk 7. klasē pagūt pēdējo tematu par monomiem un polinomiem, taču šis defekts pārvēršas par efektu, ja 8. klasi iesāk ar kādu salīdzinoši vieglāk uztveramu un radošu tematu, piemēram, statistiku un tad turpina ar polinomiem – salīdzinot ar programmu, skolēni šo tematu apgūst pusgadu vēlāk, kas šajā vecumā nozīmē būtisku kognitīvo izaugsmi. Rezultātā plānoto 6 nedēļu vietā skolēni visu saprata gandrīz 2 nedēļās, tādēļ skolotāju ieteikums ir ievērot skolēnu vecumposmu īpatnības, spējas un psiholoģiju. “6. klasē informātikā visi bērni bija šausmās, kad bija jāveido strukturētie saraksti: 1. un līmeņoti 1.1., 1.2., 1.3., līdzīgi kā satura rādītājā. Viņi nevar. Es sāku domāt – kāpēc nevar? Es paņēmu psiholoģijas grāmatu un izlasīju, ka strukturētā domāšana bērnam parādās 15 gadu vecumā. Līdz 15 gadiem viņš nevar iztēloties to, ko mēs no viņa prasām tajā tematā. Ja standarts būtu pakārtots vecumposmu attīstības īpatnībām, būtu daudz labāk,” šo ideju ar piemēru ilustrē A. Sokolova. Skolotāju vērtējumā vidusskolas saturs ir sakārtots salīdzinoši loģiskāk, bet 6. – 9. klašu posms nav pārdomāts, kas ir kritiski svarīgs vecums, jo tieši šajā vecumā veidojas zināšanu bāze, bet vidusskolas klasēs jebkādas izpratnes un attieksmes korekcijas ir sarežģītākas. “Līdz 9. klasei procesi matemātikā notiek ļoti ātri, skolēni tiem netiek līdzi,” vērtē A. Sokolova, piebilstot, ka ir lasījusi psiholoģijas grāmatā, ka vecāku vēlme ļoti agri sākt bērniem mācīt lasīt un rakstīt ir pretrunā tam, kāda ir smadzeņu attīstība. Ja sākam mākslīgi attīstīt to smadzeņu šūniņu, kura atbild par lasīšanu, bet tai 3 gadu vecumā vēl nav pienākusi kārta, tad bremzējas attīstība tai šūniņai, kura ir atbildīga par to, lai bērns pats iemācās ēst, kurai tieši vajag attīstīties šajā vecumā, kas ilgtermiņā var izraisīt mācīšanās traucējumus. Analoģisks piemērs ir 7. klasē, kur mācību gada sākumā tiek ieviesti nezināmie, bet jau mācību gada beigās no skolēniem sagaida prasmi operēt tikai ar abstraktām burtu izteiksmēm, bet šim vecumam abstrakta domāšana vēl nav raksturīga.

Ar kādām tēmām vai prasmēm matemātikā pusaudžiem ir izteiktas grūtības?

Skolēni ar dažādu priekšzināšanu līmeni 8. klasē vai nu nespēj apgūt saīsinātās reizināšanas formulas, vai arī atceras tikai dotajā brīdī un nepamana šo formulu pielietojumu, piemēram, vienādojumu risināšanā, pat ja skolotājs lieto ļoti daudzveidīgu mācību metodiku (taisnstūra laukuma pētīšana, polinoma reizināšana ar polinomu utt.). Viens no iemesliem ir ierobežotais laika resurss, trūkst treniņa, jo ir pusaudži, kuriem šajā tematā pietiek ar 3 piemēriem, bet ir tādi, kuriem vajag 30 piemērus. Vēl viens iemesls – pēctecības trūkums. Kāpināšanu skolēni fragmentāri apgūst 5., 6. un 7. klasē, taču 8. klases sākumā, sastopoties ar izteiksmi $(x-3)^2$, skolēni neasociē to kā tādu pašu kāpināšanu. A. Sokolova šajā tematā izmēģināja pašvadītu mācīšanos, piedāvājot skolēniem izdarīt visu, ko vien viņi prot, ar reizinājumiem $(a+b)(a+b)$, $(a-b)(a-b)$ un $(a+b)(a-b)$. Skolēni paši atklāja gan izteiksmes ar divkāršo reizinājumu, gan pamanīja to, ka pirmos divus reizinājumus var īsāk uzrakstīt kā binoma kvadrātu. “Rezultātā skolēni to saprata vienkāršāk, jo viņi uzreiz ieraudzīja nevis gatavu formulu, ar kuru viņi nezina, ko iesākt, bet principu, no kā tas veidojas,” šīs metodes priekšrocības skaidro A. Sokolova.

Vai Jūsu skolēni var atrisināt jebkuru matemātikas uzdevumu, kas ir paredzēts viņu vecumam?

Skolotāji to apšauba, jo daļa pusaudžu nevar atrisināt komplicētākos 5. klases uzdevumus. “Kādreiz 9. klases eksāmenā 1. uzdevums bija ļoti gara skaitliska izteiksme ar daudzām iekavām un visām aritmētiskajām darbībām. Šo piemēru var dot jebkurai klasei pēc sestās, un 10 % skolēnu izpildīs pareizi. Pat skolēni, kuri mācās labi, jauc darbību secību. Tālāk ir daļa skolēnu, kuriem 1^3 ir 3. ½ reizināt vai dalīt ar 2 – daļai skolēnu atbilde abos gadījumos ir 1,” problēmu un iespējamos tās iemeslus skaidro Z. Romanovska. Viņasprāt, skolēni nesaista veiktās darbības ar reālo dzīvi, jo, piemēram, puse no 0,5 kg iepakojuma noteikti nav 1 kg.

“10. klases skolēniem nav nekādu problēmu ar vidusskolas satura apguvi, taču viņi apstājas, tiklīdz mēs nonākam pie skaitļošanas,” saka A. Sokolova, kā vienu piemēru minot progresijas. Skolēni saprot savam vecumposmam domāto saturu, taču grūtības rada darbības, kuras skolēni apguva iepriekš. Ņemot vērā ierobežoto laiku, ir sarežģīti vienlaikus gan apgūt aktuālo saturu, gan atkārtot vai nereti mācīties no jauna nepieciešamās iepriekšējās zināšanas. Skolotāji ir novērojuši, ka ar katru gadu pasliktinās pusaudžu skaitļošanas prasmes, piemēram, arvien mazāks īpatsvars skolēnu zina no galvas reizrēķinu, tā vietā pat vienkāršākās darbības uzticot kalkulatoram. Daļa skolotāju sliecas vairāk uz to, ka matemātikā jāatļauj lietot zinātniskais kalkulators, jo mūsdienās vairs nav vajadzīgi cilvēki, kuri prot aprēķināt – atbilstošas programmas to visu prot izdarīt. Citi oponē, ka, lietojot kalkulatoru, pazūd prāta asums, jo skaitļošana kā elementārs algoritms ir sava veida matemātiskā vingrošana, kā arī iespēja kritiski izvērtēt iegūto rezultātu.

Kādas rakstura īpašības noder, apgūstot matemātiku?

Pacietība, mērķtiecība, neatlaidība, spēja koncentrēties, prasme kritiski izvērtēt.

Kādas rakstura īpašības attīsta matemātikas apguve?

Pēc skolotāju domām, matemātika attīsta tās pašas īpašības, kuras tika minētas kā nepieciešamās īpašības matemātikas apguvei. Ja skolēns sarežģītākus matemātikas uzdevumus uzreiz atliek malā, tad arī citās dzīves situācijas, sastopoties ar grūtībām, visticamāk, izvēlēsies padoties, un otrādi – ja ir pieradis censties, meklēt vajadzīgo formulu, izmēģināt dažādus risināšanas paņēmienus, tad arī citās situācijās izpaudīsies tādas rakstura īpašības kā neatlaidība un mērķtiecība.

Kā, Jūsuprāt, skolas fiziskā vide ietekmē matemātikas apguvi?

Ja ir ambīcija apgūt matemātiku tā, ka skolēni ne tikai sēž pie galda un raksta, bet arī praktiski pārbaudot, ir jābūt pietiekami plašai klases telpai, kurā skolēni var brīvi pārvietoties un strādāt grupās, netraucējot viens otram. Lai stiprinātu skolēnu matemātisko valodu, ir būtiski ļaut viņiem parunāt par matemātiku savā starpā vai ar skolotāju, kas ir pretēja pieeja tam, ka skolas vidē parasti tiek sagaidīts klusums. Skolēnu izveidotie uzskates līdzekļi un plakāti veido klases telpā matemātisko gaisotni.

Cik liela loma matemātikas apguvē ir skolotāja profesionalitātei?

Ļoti liela tajā ziņā, ka skolotājam ir ļoti jājūt, cik ilgi var ļaut bērniem pašiem kaut ko darīt un kurā mirklī vajag iejaukties ar to, ka parādīt, ko nozīmē izdarīt labi, vai palabot, vai glābt. Labam skolotājam jābūt ar dzinuli palīdzēt saprast, dalīties savās zināšanās ar jebkuru cilvēku un izcilām komunikācijas prasmēm, jo arvien lielāks īpatsvars skolēnu kļūst noslēgti vai pāriet uz elektronisko saziņu, nelabprāt komunicējot verbāli. Ņemot vērā to, cik dažādi ir skolēni, svarīga ir skolotāja pielāgošanās un prasme atstāt savu "es" malā.

Kā sabiedrība ietekmē skolēnu motivāciju mācīties matemātiku?

Visvairāk ietekmē vecāki – kāda attieksme ir ģimenē, tāda ir arī skolēnam. Piemēram, ja bērnam vecāki ir autoritāte, un vecāki saka, ka matemātika nav svarīga vai arī ka bērns var necensties to apgūt, jo vecākiem ar to ir gājis grūti, tad skolēns, visticamāk, atmetīs matemātikai ar roku. Turpretī, ja skolotāja personība ir spilgtāka par vecāku ietekmi, tad var gadīties, ka sabiedrības diktētais skolēna uzskats mainās. Skolotāji saskata pretrunu starp sabiedrības pieprasījumu pēc matemātiķiem, fiziķiem, ķīmiķim, inženieriem un iespējām eksakto studiju programmu absolventiem atrast darbu savā specialitātē ražošanā Latvijā.

Kāda ir viena atziņa pēc šīs diskusijas?

Matemātikas mācībās iztrūkst kopveseluma un vienprātības, tādēļ skolotāji pēc savas intuīcijas mēģina pārskatīt tematu secību, akcentus, metodes. Lai novērstu situācijas, kad skolotāju diskusijas par profesionāliem jautājumiem rezultējas tikai ar parunāšanu, A. Sokolova ieteica uzlikt par pienākumu visiem skolotājiem piedalīties valsts izglītības politikas veidošanā, kas paredz atstrādātu mehānismu, kā valsts mērogā pieņemt skolotāju ierosinājumus, jo praktiķu domas netiek pietiekami sadzirdētas.

Par matemātiku sabiedrībā ir radīts priekšstats kā par sarežģītāko mācību priekšmetu. Citu skolēnu nepatiku pret matemātiku rada bailes no centralizētā eksāmena, jo tā rezultāti parasti ir zemākie starp visiem mācību priekšmetiem. Tas ierobežo arī skolotāja radošumu, jo par primāro uzdevumu skolēni un viņu vecāki uzskata labu rezultātu eksāmenā, nevis patiku pret mācīšanos un izpratni. Z. Romanovska pauda, ka 9. klases eksāmens ir "ļoti šaurs spektrs, kas neko neparāda par to, ko skolēns zina matemātikā", bet kalpo par mehāniskās atmiņas apjoma mērījumu.

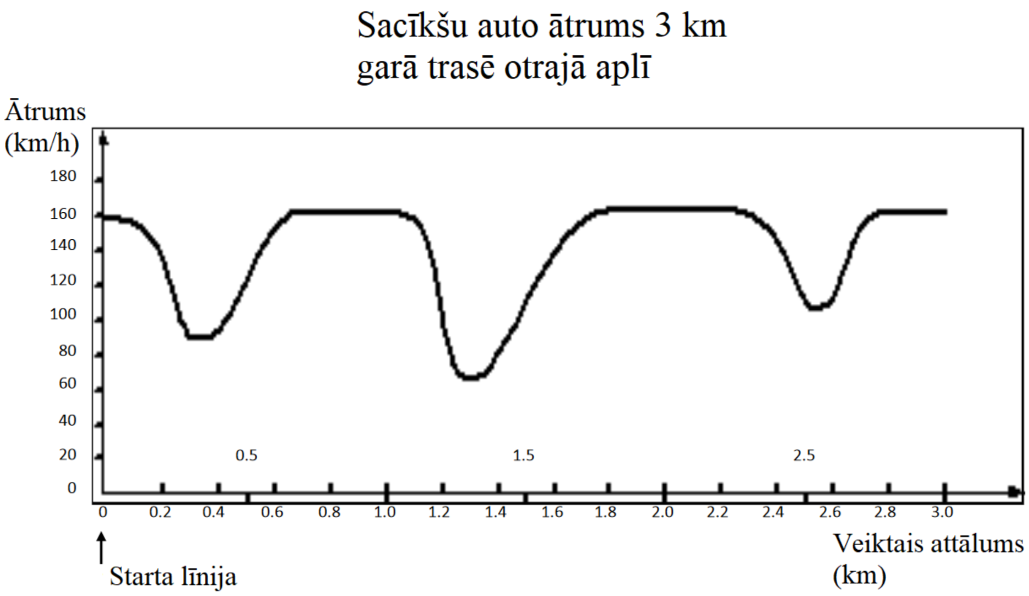
"Salīdzinot vācu valodu ar matemātiku, uzskates materiālos un mācību grāmatā vācu valodā reizēm šķita, ka ir kādas nepilnības, bet es zināju, kur un ko meklēt; matemātikā man bija brīnums – es nesapratu, vai mēs šogad tikai sākām mācīties matemātiku? Ir kaut kas, taču skolotājam vajag izurbties cauri 10 mācību grāmatām," metodisko materiālu, daudzveidīgu vingrinājumu un labu, skolēniem pieejamā valodā rakstītu skaidrojumu deficītu akcentē G. Dzene, uzsverot – ja skolotājam tas prasa papildus laiku, tad skolēnam patstāvīgi tas ir nepaveicams darbs. Atsevišķas pašvaldības vai to apvienības ir izveidojušas skolotāju savstarpējās dalīšanās risinājumus, piemēram, *Moodle* sistēma, taču šīs resursu krātuves neveido kopīgu sistēmu. Savukārt, publiski pieejamos tiešsaistes resursus matemātikas apguvei skolotāji vērtē kā primitīvus.

Empīriskā pētījuma 2. posma (pamatpētījuma) daļēji strukturētā intervija ar ekspertu Jāni Vilciņu

Intervija ar projekta *Skola2030* matemātikas mācību satura izstrādes vecāko ekspertu, ilggadējo Valsts izglītības satura centra (VISC) vecāko referentu **Jāni Vilciņu**.

Kā Jūs skaidrojat matemātisko kompetenci?

Īsā, teorētiskā atbilde: arī pēc kāda laika, kas ir pagājis kopš mācībām, es spēju matemātiku lietot. Taču uzreiz gribu piebilst, ka matemātikas lietošanu nevajag uztvert tikai utilitāri, kā praktisku problēmu atrisināšanu. PISA testā bija uzdevums, kurā bija grafiks, kurā parādīta reālas sacīkšu automašīnas ātruma izmaiņa laikā, un skolēniem tika prasīts noskaidrot attālumu no starta līnijas līdz trases garākajam taisnajam posmam (*skat. 11.1. att.*). Ko tas uzdevums atsedza? Tas lika pusaudžiem domāt kategorijās, kā reāli mainās ātrums. Latvijas skolēni izvēlējās nepareizo atbildi, kura bija uzbūvēta tādā veidā, ka skolēniem ir asociācijas tikai par vidējo ātrumu, jo kustības grafiku ir pieraduši redzēt kā taisnu līniju vai lauztu līniju, kas sastāv no taisnes nogriežņiem. Viņiem nekad nav bijusi pieredze lasīt līknes. Ja mašīna izbrauc no maza ceļa uz šoseju, ātrums pieaug pakāpeniski. Skolēni negāja uz pareizo atbildi gluži vienkārša iemesla pēc – viņi nekad nav domājuši tādās kategorijās, ka viņiem ir tiesības savā galvā pieņemt lēmumu par to, kā reāli kustas automašīna, un ka šāda realitāte varētu būt ietverta matemātikas uzdevumā. Tādā nozīmē mūsu skolēni nav kompetenti izvērtēt šo problēmu.



11.1. att. **2009. gada PISA testa matemātikas uzdevums par ātruma grafiku** (Figueroa, Salz, 2009)

Vai tas nozīmē, ka matemātikas uzdevumi Latvijā nav saistīti ar reālo dzīvi?

Tā mēs nevaram raksturot visu lauku. Ir dažas tradīcijas. Piemēram, attiecībā uz ātrumu skolēni paliek formātā: "Jānis no Liepājas uz Rīgu brauca ar ātrumu 80 km/h." Viņi gan ar to sāk 4. klasē, gan tur paliek līdz 12. klasei, bet to nevar attiecināt uz visiem satura jautājumiem. Ir jautājumi, kuros matemātiskās zināšanās nesaslēdzas ar reālo dzīvi, jo skolēns nebalstās savā pieredzē. PISA pētnieku skaidrojums par nupat minēto piemēru bija tāds: kuram gan bērnam nav pieredze sēdēt blakus tētim un skatīties spidometru. Ir tāda pieredze, bet viņam neienāk prātā to salikt kopā ar skolas matemātiku, kas viņu ir pieradinājusi nedomāt par realitāti.

Kādos vēl satura jautājumos Latvijas pusaudži nespēj saistīt matemātikas zināšanas ar savu pieredzi?

Jau tiražētais piemērs par ķīmiju un procentu lietošanu, kur klasiski ķīmijas skolotājs iedod savas receptes, kā jārēķina šķīdumu masas attiecības, un nedod iespēju skolēniem pašiem pārnest matemātikas zināšanas uz ķīmijas uzdevumu. Tas ir skolotāju sadarbības jautājums, un mēs (projekts *Skola2030*) mēģinām to tagad aktualizēt. Varbūt, tas atrisināsies nedaudz ātrāk nekā tas jautājums par ātruma saskatīšanu reālā dzīvē.

Kam ir jānotiek, lai Latvijas skolēni mācētu ātrumu balstīt savā pieredzē?

Te ir jautājums, kuram par to ir pirmajam jārunā: fizikas vai matemātikas skolotājam? Esošajā tradīcijā matemātikas skolotājs sāk par ātrumu. Tagad kolēģi-fiziķi ir aptvēruši un piekrīt, ka tas nav labi, jo skolēniem rodas sašaurināts priekšstats kā par vidējo ātrumu, un pēc tam ir grūti paplašināt bildi par ātrumu līdz momentānajam ātrumam. Arī šeit risinājums būtu sadarbība un satura pārskatīšana.

Ko VISC secināja no 8. klašu diagnosticējošajiem darbiem matemātikā?

Ar šo darbu gribējām parādīt, ka matemātikas mācīšanas un mācīšanās process ir bagātāks par mūsu tradīciju, daudzveidīgāks, ka tam ir jābūt vairāk vērstam uz izpratni, lai skolēns mācētu atrisināt dziļākus uzdevumus. Mācot matemātiku, skolēniem ir arī jārunā, jāskaidro, tādēļ tur bija tādi uzdevumi. Mērķis ir, lai skolotājs sev uzdod jautājumus – vai manā procesā ir tāds uzdevums, vai es dodu savos pārbaudes darbos tikai "atražojams" (*reproduktīvus*), arvien sarežģītākus uzdevumus vai apzināti izvēlos tādus uzdevumus, kuros nepazīstamā situācijā skolēnam ir pašam jāsaliek kopā vairākas atziņas. Labs piemērs no diagnosticējošā darba – pie taisnstūra divām malām bija doti izmēri, un no skolēna tika sagaidīts, ka viņam ienāks prātā, ka šo problēmu var atrisināt vienādojums, kas nebija tekstā pieminēts (*skat. 11.2. att.*). Bija jāsaliek kopā divas lietas, kuras skolēns ir darījis: skaidri zina, ka taisnstūra pretējās malas ir vienādas, un prot risināt vienādojumu, bet, vai skolēns abas šīs lietas saliek kopā.

6. uzdevums *(2 punkti).*
Aprēķini vai nosaki a vērtību, izmantojot attēlā doto informāciju par taisnstūri.

11.2. att. **2017. gada 8. klases diagnosticējošā darba uzdevums par taisnstūri** (VISC, 2017)

Pēc šī diagnosticējošā darba bija redzams, ka bija diezgan pārstāvētas abas skolotāju grupas: tie, kas vairāk priecājās, un tie, kas vairāk sašuta. Bija arī tāda individuālā atgriezeniskā saite no skolotājiem, kas jautāja: "Vai tad šogad nebūs 8. klases darbs?", jo viņi jau bija pieraduši. Vienlaikus, bija ne maza grupa tādu skolotāju, kuru galvenā doma, kāpēc viņi nejutās komfortabli: "Kā mēs varam dot bērniem uzdevumus, kurus viņi nekad nav rēķinājuši, un ko tad mēs pārbaudām?" Mana atbilde bija tāda, ka patiesībā jau šobrīd (*saruna notika 2018. gada 8. februārī*) spēkā esošais standarts paredz to visu. Matemātikas standartam ir trīs sadaļas: matemātiskās prasmes, pētnieciskā darbība un mijiedarbība ar reālo dzīvi. Problēmas būtība ir tāda, ka pēdējās divas sadaļas skolotāji novērtēja kā kārtējos lielos vārdus bez seguma. No VISC viedokļa raugoties, ir visas tiesības likt tādus uzdevumus, jo standartā ir aprakstīts, ka skolēns pēta, domā, risina problēmas utt. Vienlaikus, tā ir arī ziņa, ka viena lieta ir uzrakstīt standartu, otra lieta – pārliecināt un ar to aizraut skolotājus. Ir skaidras indikācijas, ka daļa skolotāju māca tikai standarta sadaļu "matemātiskās prasmes", par savu uzdevumu uzskata šauru matemātisko prasmju iemācīšanu.

Kāpēc mums tā ir iegājies matemātikas mācīšanu apzināti nesaistīt ar domāšanu? Tā ir matemātikas skolotāju aizsargfrāze "mēs mācam domāt", bet nemācam. Tikko ir kāds uzdevums, kas ir no rāmjiem ārā, nekas nenotiek. Vienmēr ir jābūt uzmanīgiem, jo ir ļoti daudz talantīgu skolotāju, kuri individuāli jau ir daudz tālāk par projektu *Skola2030*, kur tas ir pašlaik. Tas pārmetums ir tādam vidējam Latvijas matemātikas skolotājam tādā nozīmē, ka man ir dati par valsti kopumā, kur 12. klases eksāmenu var izpildīt vidēji uz 36 %. Tai pat laikā, es zinu lauku vidusskolas, kurās neatlasītās klasēs vidējais rādītājs ir 65 %. Brīnumi nenotiek, tas ir vienkārši darbs. Šie skolotāji strādā uz izpratni. Viņu mērķis nav tikai iemācīt uzdevumu, bet gan rūpējas par to, vai mācību dalībnieki saprot, ko viņi dara: kāpēc man abas vienādojuma puses tagad ir jāreizina ar 2, kāpēc ir jāatliek vienības, kāpēc es to daru?

Jūs pieminējāt izpratni kā vienu atslēgvārdu. Kādi vēl ir priekšnosacījumi, lai skolēniem veidotos matemātiskā kompetence?

Veidojot jauno standartu (*2018. gadā pieņemtais valsts pamatizglītības standarts, kas stājās spēkā 2020. gada 1. septembrī, MK noteikumi Nr.747*), esmu apzinājies vairākas lietas, kuras vairāk ir saistītas ar sākumskolu. Tajā vecumā lielā mērā iekodējās daudzas mūsu problēmas. Skolotājs piektajā vai kādā citā klasē saņem skolēnus jau ar kaut kādu pieredzi, un tur bieži vien, lielākoties, neko vairs nevar darīt. Vienu piemēru minēšu ilustrācijai. Tā ir pārlieku agra formalizēšanās, bērnu iedabūšana kanonā. Mans tradicionālais piemērs ir par siera gabalu uz svariem. Uz viena svaru kausa ir 20 gramu atsvars, uz otra svaru kausa – 12 gramu atsvars un siera gabals. Cik sver siera gabals? 1. klasē bērns domā apmēram tā: "Cik ir jāpieliek pie 12, lai sanāktu 20?" Un bērns tā arī raksta: 12 + 8 = 20, proti, vienā maisā ir sajaukts, kā es izdomāju un kā es to pierakstu. Tradīcija, kura mums ir jāmaina, ir kādu informāciju saņem bērns pēc šī risinājuma. Tradīcijā viņš ļoti bieži saņem ļoti treknu sarkanu svītru un komentāru: "Tev nav pareizi." Bērnam būtu jāsaņem tāda informācija: "Problēmu Tu esi atrisinājis, taču matemātikā ir pieņemts pierakstīt citādi." Bērns visu laiku saņem negatīvu komentāru par to, ka viņš nemāk pierakstīt. Veidojot jauno saturu, mēs gribam pacelt jautājumu – vai viņam tas 7-8 gadu vecumā ir primārais, vai mēs fundamentāli zaudējam, to tagad neieliekot, ja bērns apjēdz darbību, vai pierakstu nevar iemācīt vēlāk? Sagaidāmais rezultāts ir, ka skolotājs nodala saturu, kas skolēnam ir jāizdomā, kas ir matemātiskā problēma, un kā to pieraksta. Tās ir divas dažādas lietas. Kamēr sākumskolas skolotāji to nesapratīs, viņi taisīs no matemātikas "bubuli". Bērniem ātri vien negribas nodarboties ar matemātiku, jo viņi nevar saprast: "Es taču atrisināju. Nu ko grib?" Ar to gan es netaisos noliegt matemātisko pierakstu. Runa ir par to, kad to darīt un ir stabili jānotiek pirms tam, lai ietu uz šo pierakstu. Kāpēc tam bērnam tajā brīdī ir jāuzraksta atņemšana? Kāpēc tas ir tik šausmīgi svarīgi?

Otrs moments, kam ir jāmainās sākumskolā, ir jānoņem bailes par vienīgo pareizo atbildi kā matemātikas ārkārtīgi spilgtu un absolūtu vērtību, jo tā stindzina bērnus. Projekta *Skola2030* ieviešanas sakarā komunicējot šo domu, es parasti stāstu šādu piemēru: 2; □; 4; □. Uzdevumu varētu formulēt dažādi, teiksim, padomā, kādi skaitļi var atrasties tukšajās vietās, un izstāsti, kā Tu domāji! Citreiz mācību grāmatās ir vienkārši rakstīts: "Aizpildi tukšās vietas," bet būtība jau ir tajā "izstāsti, kā Tu domāji". Ja skolotājs redz, ka akceptējama atbilde ir tikai 2; 3; 4; 5, tā nav ļoti liela traģēdija, bet tā ir neizmantota iespēja, jo ne visās situācijā ir viena skaidra, pareizā atbilde. Kāpēc lai nebūtu ļoti sakarīga doma 2; 2; 4; 4? Tajā rindiņā ir iekodēta likumsakarība, kura nav obligāti jāformalizē, bet saviem vārdiem skolēns var pateikt: "Vispirms ir divi vienādi skaitļi un pēc tam ir citi divi vienādi skaitļi." Tikpat leģitīmi bērns varētu uzrakstīt 2; 2; 4; 6, jo, saskaitot divus skaitļus, iegūst nākamo. Šajos uzdevumos bērni dalās, kā varēja domāt. Virknes kā objekts sākumskolā atšķir mūsu saturu no daudzām Rietumvalstīm, kuras ir aizgājušas šajā virzienā, pateicoties reformām pēdējo 20 gadu laikā. Mums vēl nav tādu uzdevumu. Es domāju, ka iemesls ir tāds, ka ir bailes pazaudēt akadēmisko nesatricināmību un viennozīmīgumu. Latvijā līdz šim izglītības satura veidošana notika no akadēmiskā kanona skatupunkta, tādēļ primārais ir akadēmiskā tīrība, nevis 7-gadīga skolēna vajadzības un intereses matemātikā. Es ticu, ka no akadēmiķu puses man noteikti oponēs un teiks, kādas briesmas slēpjas šādā uzdevumu traktējumā: "Kurš tad tur visu savāks?"

Šāda pētīšana nozīmē arī lielāku laika patēriņu, kas ir bieži dzirdēts skolotāju pretarguments atvērta tipa uzdevumiem.

Es tur vienmēr redzu jautājumu par vērtībām. Ja tev ir ierobežots laiks, tu izvēlies to, kas tev ir augstākā vērtība. Ja esi pasūtījuma izpildītājs, skolotājs un tev ir ierobežots laiks, tu atmet lieko. Ja bērns iepriekšējā uzdevumā atbild 2; 3; 4; 5, skolotājs pasaka "labi", jo skolēns ir iemācījies naturālo skaitļu virkni, bet uzreiz ir jautājums – cik ļoti tu šajā brīdī atver vai veido kognitīvo dimensiju un kā tu uz to iedarbojies.

Akadēmiskumam, protams, ir kādā brīdī jāieslēdzas. Mēs nevaram fantazēt līdz bezgalībai par to, kas ir $2x$. Sākumskolā bērniem ir jāizveido pieradums domāt; ka matemātikā patiešām ir jādomā. Kur citur lai šis pieradums veidotos? Nevis tikai jāatražo algoritmi, kuriem pašiem par sevi nav nekādas vainas. Vaina ir tāda, ka ar algoritmiem nepietiek.

Kādi uzlabojumi vēl ir vajadzīgi matemātikas saturā?

Vēl nāk prātā doma, ka mums ir jāmaina mīts par to, kas matemātikā ir radošs uzdevums. Ja komunicē ar auditoriju, kas nav matemātikas skolotāji, teiksim, skolas vadību vai vecākiem, kļūst skaidrs, ka tas ir būtiski. Proti, matemātikā radošs uzdevums nav obligāti sarežģīts uzdevums, bet cilvēkiem tradīcijā ir priekšstats, ka radošums ir mākslā, kur katrs var gleznot, kā var, vai valodā, bet matemātikā, protams, radošs ir sarežģīts.

Mums ir ļoti grūti jēgpilni iemācīt, kas ir funkcija. Projektā *Skola2030* ir iecere uzbūvēt veselu tematu 7. klasē ar nosaukumu "Sakarības" un stingri vienoties, ka mēs šajā tematā vārdu "funkcijas" vispār nepieminam. Tās ir aptuveni 20 mācību stundas. Vesels temats, kurā bērnam veidojas arvien dziļākā izpratnē balstīti priekšstati par to, kas tas vispār būs, jo tas ir kaut kas netverams. Skolēns pirmo reizi sastopas ar kaut ko tādu, ko nevar uzzīmēt, ko var pierakstīt ar *f*, bet – ko tas nozīmē? Es piedāvāju šādu uzdevumu pašā sākumā tematam "sakarības", kad vēl nav nosaukts vārds "funkcija". Tas var būt mājasdarbs. Apdomājiet un katrs formulējiet divus tādus lielumus starp kuriem ir sakarība un kas skaitliski raksturo tieši tavu ikdienu. Piemēram, viens lielums varētu būt nedēļas diena, kas ir ciklisks lielums, un otrs – tēriņi transportam manās ikdienas gaitās. Es to sauktu par radošu uzdevumu. Protams, šis uzdevums ir jānokomunicē tā, lai visi bērni saprot, ko īsti no viņiem sagaida. Uz to nav ko taupīt laiku. Mana pārliecība ir, ka pirms jēdziena “funkcija” skolēnam vajag izdzīvot šādu uzdevumu un atrast savā dzīvē divus lielumus, starp kuriem ir sakarība. Nav jau tai sakarībai noteikti jābūt izteiktai ar formulu. Kā mēs paši pēc tam mācam – paņemam Mocarta un Bēthovena dzimšanas gadus un saliekam funkciju no tā. Es aicinu Mocarta vietā ielikt sevi un atrast sakarību. Protams, šāda uzdevuma īstenošanai vajag laiku. Radošā uzdevumā kā primārajam jābūt nevis sarežģītībai, bet iespējai būt absolūti individuālam.

Kuros vēl satura jautājumos ir plānota šāda padomāšanas un izpratnes pēctecība?

To padomāšanu es tomēr arī asociētu ar mācību procesa sastāvdaļu. Mēs nedrīkstam nodalīt jēdzīgo saturu un formālo saturu. Tam jābūt plūstoši, kur viens otru papildina. Doma, ka pirms formālā temata, kur zīmēsim lineāras funkcijas grafiku un pētīsim virziena koeficienta zīmi, kas arī notiks, skolēnam jābūt pamatam zem kājām, kas tā funkcija vispār ir.

Kādas satura izmaiņas ir plānotas jaunajā matemātikas standartā?

Ir doma no pamatskolas uz vidusskolu pārcelt tematu par racionālām daļām, jo temats ir formāls un pamatskolēni tam nav gatavi. Pagaidām skolotāji to atbalsta, bet nav skaidrs, vai viņi ir apzinājuši blaknes. Piemēram, atkrīt iespēja pamatskolas matemātikā pētīt kustību, kopīgi veikto darbu u. tml. Es to saredzu kā problēmu, kas, varbūt, nebūs problēma, ja mēs atradīsim citus kontekstus, kurus pamatskolēni var modelēt matemātiski bez racionālām daļām. Ir jautājums, vai mēs esam izsmēluši visus lineāros un kvadrātiskos modeļus, ka mums obligāti vajag daļveida. Respektīvi, pārceļot šo tematu, vai kaut kas jēdzīgs aizpildīs atbrīvoto vietu. Varbūt, šī pieredze tiks laupīta un ilgtermiņā iestāsies kādi riski. Par to man ir nedaudz bažas, kuras mazina tas, ka 10. klasē šim tematam ir jābūt, tādēļ visiem skolēniem, kuri mācīsies tālāk, šīs zināšanas tāpat būs.

Ģeometrijā tiek vētīts un pārskatīts jēdzienu daudzums. Cik specifiskās lietas ir vajadzīgas? Pavētīt, kurus jēdzienus tiešām vajag. Teiksim, centra un ievilktie leņķi, hordas, viduslīnijas. Taču tiklīdz mēs paņemam kādu jēdzienu, tā uzreiz ir kāda teorēma, pāris uzdevumu, lai to pielietotu. Jaunā standarta sabiedriskās apspriešanas komentāros iezīmējas tas, ka var redzēt, ka jēdzienu skaits ģeometrijā ir samazināts, lai atlikušos padarbinātu vairāk, dziļāk, jēdzīgāk.

Aprobācijā notiek pārdomas par to, kas īsti ir kombinatorika: tas ir atsevišķs temats vai kombinatorikas metodes es varu izmantot jebkurā tematā. Kombinatorikas stratēģijas ir matemātikai raksturīga spriešana. Ja ir bažas, ka šādi rīkojoties mēs kaut ko zaudējam, varbūt, būs jāpārskata šis koncepts, bet pašlaik drīzāk redzējām, ka tas ir nevis temats, bet tas notiek visu laiku.

Standarta pirmo versiju skolotājiem ir grūti lasīt, jo ļoti bieži ir jautājums, kas tas īsti ir. Viss ir labi, pareizi, it kā saprotams, bet nav skaidra bilde, piemēram, kas tie ir par uzdevumiem, kas tieši man kā skolotājam jāatrod vai jāizdomā pašam. Sabiedriskās apspriešanas kontekstā šīs bažas nāk kā plūsma. Ir jānodala divas lietas, kuras pašlaik ir bieži kopā. Viena lieta ir konkrētas prasmes un otra lieta ir izpratne. Ja abas šīs dimensijas, kuras, protams, ir saistītas, ir formulētas ar trim, četriem palīgteikumiem, tad skolotājiem ir ļoti grūti to sadalīt pa šīm divām sastāvdaļām: kas man ir jāiemāca, kas skolēniem ir jāsaprot, kā tas izskatīsies mācību procesā. Mēģināsim bez liekas informācijas skaidrāk uzrakstīt prasmes un noformulēt, ko mēs gribam, lai skolēns saprot.

Kādi priekšlikumi par matemātiku nāk sabiedriskajā apspriešanā?

Nāk dažādi detalizēti priekšlikumi, piemēram: "Mēs domājam, ka 3. klasē vēl nevar parastās daļas" vai "Ko jūs domājat ar negatīviem skaitļiem 3. klasē? Tā arī vajag rakstīt, ka viņš tikai termometru skatās". Mēs jau arī to gribam, taču, ja standartā ir pieminēti dažādzīmju skaitļi, tad rodas pamatots jautājums, cik tālu, jo tradīcijā darbības ar dažādzīmju skaitļiem ir 6. klasē. Ir tādi precizējoši priekšlikumi. Vairāk ir par to, ka vajag vai un uzrakstīt vienkāršāk, vai tradīcijā pierastāk. Piemēram, skolotāji ir samulsuši par vietām, kur ir pieminētas digitālās iespējas, aplikācijas vai ierīces, jo daudzi skolotāji paši ne visai tās lieto, un viņiem uzreiz nav skaidrs, kas tur ir iecerēts matemātiskajā kontekstā. Piemēram, reālu objektu laukumus var novērtēt ar atbilstošu aplikāciju.

Vai tās nav divas dažādas prasmes: ievadīt datus kādā aplikācijā un patstāvīgi konstruēt parabolu?

Vairumā gadījumu tas noteikti nav tā, ka digitālā iespēja aizstāj manuālo. Pamatam ir jābūt rociņās, galvā un reālajās darbībās. Pēc tam skolēns iepazīstas ar efektīvākām darbības iespējām. Līdzīgi kā digitālo prasmi, mēs mēģinājām formulējumos iekodēt pašvadības un mācīšanās mācīties caurviju caur tādiem atslēgvārdiem, ka skolēns nevis vienkārši kaut ko dara, bet apzināti dara. Skolotāji jautā, ko nozīmē darīt apzināti, kas ir leģitīms jautājums. Īsā atbilde ir tāda, ka darīt var tad, ja tev sekundes atpakaļ pateica: "Dari!", bet lēmumu par kaut kā darīšanu var pieņemt pats skolēns. Tādā nozīmē tiek lietots vārds "apzināti", ka ir situācijas, kurās skolēns pieņem lēmumu, vai to tagad vajag vai nevajag darīt. Piemēram, ko nozīmē: "Apzināti novērtē rezultāta precizitāti"? Tur ir divi līmeņi: ja skolotājs pasaka vai uzdevumā ir rakstīts pēc darbības izpildes to pārbaudīt; un pavisam cita lieta, un tas ir cits kompetences līmenis, ja skolēns pats pārbauda.

Tas ir ļoti ambiciozi.

Protams. Dažu formulējumu ambiciozitāte vai, varbūt, nepamatotas cerības ir vēl viena ziņa, ko mēs saņemam. Skolotāji daudz komfortablāk justos, ja būtu teikts: “Skolēns izdara to un to.” Kā apzinātība saistās par pašvadību – ka abus labāk nevajag matemātikā, ka tas skolotājiem traucē. Viņi tur saskata draudus, jo nezina, ko no viņiem tas prasa.

Kāda būs matemātikas sasniegumu vērtēšana?

Tas būs mans personiskais redzējums, kas nedaudz balstās kopīgās sapulcēs, bet galīgā vienošanās vēl top. Mēs gribam no teorētiskā ietvara viedokļa novienādot 3. un 6. klases diagnostikas. Pašlaik šie darbi ir konceptuāli absolūti dažādi. Vienlaikus šeit ir jautājums par šo vecumposmu jēgpilnāku nepārtrauktības nodrošināšanu. Šobrīd skolās pirmās četras klasītes dzīvo savu dzīvi, sākumskolas skolotāji neko nezina par to, kas notiek tālākajās klasēs, savukārt, posma 5. – 9. skolotāji ļoti aptuveni nojauš, kas notiek sākumskolā. Jau tas, ka šo diagnosticējošo darbu koncepts būs vienāds, skolotājiem liks nākt kopā, sākt domāt un meklēt kopīgu redzējumu. Kā es parasti saku skolu vadībām: “Vai jūs esat droši, ka visiem jūsu matemātikas skolotājiem ir apmēram vienāds skatījums uz to, kā mācīt matemātiku?” Vai neiznāk tā, ka pirmos gadus matemātiku māca skolotājs ar filozofiju “Viņi neko nevar izdomāt, es pasniegšu gatavu”, un 4. klasē viņiem nāk skolotāja ar konceptu “Viņi visu var izdomāt paši”. Kas tādā gadījumā notiek? Rezumējot, ir jāveido vienāds teorētiskais ietvars.

Nedaudz cits skatījums ir uz 9. klasi, jo tur ir eksāmens, kuram ir citi mērķi nekā diagnosticējošajiem darbiem. Eksāmenam ir jāpārbauda viss apgūtais, kamēr diagnostikas darbiem – tāds saturs, kas būtu noderīgs skolotājiem, uzsākot jauna posma apguvi, jo diagnostika par pirmajām trim klasēm notiks 4. klases septembrī; par nākošajām trim klasēm – 7. klases septembrī, kad sanāk kopā skolēni no dažādām klasēm un skolām. Tur jāparādās tām lietām, kam jābūt uz izpratni veidotā matemātikas procesā. Pirmkārt, tiks pārbaudīts nevis vienkārši, vai skolēns var aprēķināt taisnstūra perimetru, bet vai viņš saprot, kā un kāpēc perimetra izteiksme ir tāda, lai varētu mērīt izpratnes dziļumu. Otra lieta – dažas ģenerālās līnijas, kur nevar pārbaudīt visu, tādēļ būs jāizdara izvēle: matemātiskā modelēšana, problēmu risināšanas stratēģiju lietošana, spriešana, spriedumu veidošana, Kuras no šīm līnijām būs prioritāras, par to vēl diskutējam. Doma ir tāda, ka skolotājiem tiks dota ziņa, ka diagnostika sastāv no divām daļām. Daļu A veido pats skolotājs, daļu B veido ārējais diagnosticētājs. Jēgu mēs redzam, ka ārējais diagnosticētājs nepārbauda to, par ko ir pilnīgi skaidrs, ka to pārbauda katrs sevi cienošs skolotājs.

Vēl ir pāragri spriest, kas mainīsies 12. klases matemātikas eksāmenā, bet tajā ar lielāku īpatsvaru jāparādās izpratnes dziļumam un tam, ko mēs gribam redzēt procesā, un procesā tas neparādīsies tik ilgi, kamēr tas nebūs eksāmenā.

Ikdienas vērtēšanā ceram jaunā līmenī pacelt formatīvo vērtēšanu. Attiecībā uz konkrētām prasmēm skolotājiem būs pieejami skolēnu darbības apraksti četros līmeņos. Prioritāri ir tas, ka skolotājs saņem instrumentu, ko iedot arī bērnam, lai varētu viņam parādīt: "Redzi, tu esi šeit. Izlasīsim kopīgi, kas tev ir jāprot, lai tiktu nākamajā līmenī." Ir iecere, ka arī diagnostikas darbā vērtēšanas sadaļā būs analogs instruments ar snieguma aprakstu līmeņos, lai vērtēšanas pašmērķis nebūtu saskaitīt, cik punkti no maksimāli iespējamiem ir savākti, bet attiecībā uz katru pārbaudāmo prasmi, prasmju kopumu noteikt, kur ir vairums skolēns vai kur ir katrs skolēns, jo procesam un vērtēšanai ir jāsaskan. Par ko vēl diskutējam – kā vērtēšanā iegūto informāciju pārvērst novērtējumā, jo, protams, arī vecāki gribēs iegūt kādu informāciju. Diez vai mēs uzreiz tā mainīsim tradīciju, ka vecāki būs laimīgi, ka viņi saņems ziņu: "Attiecībā uz pierādīšanu Jūsu bērns ir 2. līmenī" u. tml.

Kādi ir galvenie ieguvumi no sešām lielajām idejām?

(*Matemātikas mācību jomas saturs ir strukturēts sešās lielajās idejās, kas aptver sasniedzamos rezultātus skolēnam šādos saturiskajos laukos: matemātikas valoda; matemātikai raksturīgās stratēģijas un spriešana; skaitļi, darbības ar tiem; algebras elementi un sakarības; figūras; dati un statistikas elementi.*)

Pirmkārt, tas palīdzēja satura veidotājiem iegūt kopainu, vai nav kaut kas aizmirsies. Skolotājiem, pieļauju, tas palīdz skaidrāk ieraudzīt galvenās idejas, lai viņš pats varētu kaut kādās situācijās pieņemt lēmumu attiecībā uz prioritātēm. Piemēram, uz ģeometriju skolotājs var skatīties tā – bērni paši veido figūras, tad ir šo figūru īpašības (dalās uz pusēm, vienādi, līdzīgi) un, visbeidzot, lielumi (garums, laukums, tilpums).

Ļoti būtiski, manuprāt, bija tas, ka visu lauku "Skaitļi" sadalīja divās daļās ar atslēgas vārdiem "skaitļu izjūta" un "darbības ar skaitļiem". Latvijas tradīcijā absolūti dominē darbības ar skaitļiem, tādēļ 3. lielā ideja ir par skaitļa izjūtas veidošanu. No ieviesēja viedokļa es šeit saskatu labumu – gribu iedot domu, ka, mācot darbības ar skaitļiem, primārā ir skaitļu izjūtas veidošana un darbības ar skaitļiem ir sekundārs jautājums, jo tās skolēns izpilda, ja viņam ir skaitļu izjūta. Tādējādi lielās idejas ir arī kā politisks instruments.

Ja mēs paskatāmies uz visām jomām kopumā, tās idejas ne visiem ir idejas, bet metodiski orientieri. Arī matemātikā tās nav īsti idejas šī vārda burtiskā nozīmē. Tur ir divi ceļi: vai nu tiks noprecizēts, mēģināsim formulēt kā idejas, jebšu tā paliks kā metodiska struktūra.

Rezumējot, kādi ir ieguvumi un kādi ir potenciālie riski matemātikas mācībām, pārejot uz kompetenču izglītību?

Ja vienā teikumā formulē, kādēļ kaut kas ir jāmaina – netiek pilnībā izmantots potenciāls, kā bērni varētu apgūt matemātiku, to arī izprotot. Ja to izdosies panākt, tad domāšanas prasmes būs kā sekas. Tur arī redzam ieguvumu – ka bērnu prasmes būs ilgstošākas, jo, ja nebalstās uz izpratni, tad zināšanas un prasmes pazūd. Divi gadi pēc skolas paiet, un nekā nav. Viss izplēn. Paliek tikai fona intelektuālas treniņš, kas kaut ko dara ar smadzenēm, bet, cik jēdzīgi.

Risku, protams, ir daudz. Kamēr skolotājs nav pieņēmis šo koncepciju, ko nozīmē jēdzīgi mācīt matemātiku, bet ar gariem zobiem to mēģinās darīt, iznāks tikai sliktāk nekā, ja viņš darītu "pa vecam", godprātīgi, kā ir darījis vienmēr. Piemēram, skolotājs saklausīs, ka ir kaut kas jādara grupās. Viņš pieņem lēmumu vienreiz nedēļā vienu stundu novadīt grupās, bet viņam nav skaidrības, kādēļ un ko tas dos. Jebkuru labu lietu var pārvērst par formālu, par farsu vai sliktākajā gadījumā par kaut ko tādu, no kā nevienam nav labuma. Vai arī – jāveic lieli pētījumi, portfolio. Bieži esmu novērojis, ka notiek pseido-pētniecība. Teiksim, ir divas krustiskas taisnes, ir trīs gadījumi. Uzdevums skan: mēri krustleņķus, ko tu vari secināt? No jēdzīgas matemātiskās darbības tas ir ārkārtīgi riskants un plakans uzdevums. Pirmkārt, daļa skolēnu 59° izmērīs kā 60°, un tad būs gara diskusija pilnīgi ne par to, ko mums vajag. Otrkārt, divas trešdaļas saprātīgo klases skolēnu vispār nesaprot, kur ir problēma, jo viņiem viss ir acīmredzams uzreiz. Viņu acīs krītas matemātikas prestižs un vērtība: "A, mēs atkal pētīsim, bet uzzināsim acīmredzamo." Mums ir jāraksta vismaz tā: "Mēri vai citādi nosaki." Visur, kur varu, es skolotājiem šo saku – ja grāmatā ir rakstīts "mēri", uzlīmējam virsū lapiņas, kur ir pateikts "mēri vai citādi nosaki". Tai vienai trešdaļai skolēnu, kuri tikai izmērot var pieslēgties, lai viņi mēra, bet pārējiem nevajag mērīt – lai viņi izdomā.

Skolotājam vajadzētu sev uzdot jautājumu: "Tu tam redzi jēgu?" Atbildi sev, vai tu šim uzdevumam redzi jēgu. Ja redzi – uz priekšu, un kopā ar bērniem meklējiet to jēgu. Ja tu vienkārši paskaties, ka grāmatā ir tāds uzdevums vai tev šķiet, ka tas ir tāds uzdevums, kuru standarts liek darīt, bet tu nespēj paskatīties no malas, vai šis uzdevums ir par to – ko tad bērns iegūst un kāda tur pētniecība? Tad drīzāk būs sliktāk nekā labāk. Tādā gadījumā labāk izrēķināt piecus tradicionālus uzdevumus nekā šāda pētniecība. Galvenais ir, vai skolotāji savā mācīšanas darbībā saprot, ko un kāpēc dara. Ja ir šī pārliecība, tad skolotāju nevar uztraukt ārējie piedāvājumi par to, kā varētu darīt labāk. Jaunajam standartam jānāk nevis ar ziņu, ka viss ir jāmaina, bet gan, ka nāk kompleksa pakete: kāpēc mums kā sistēmai ir problēmas un kur mums jāvirzās tālāk. Absolūts vairums skolotāju strādā godprātīgi. Ja viņam piedāvā jaunu instrumentu vai redzējumu kopu un saka: "Ņem šos instrumentus un strādā." Es teiktu skolotājam – primārais ir mēģināt saprast, ko tu ar esošajiem instrumentiem dari. Ja tev nav ieraduma vērtēt savus instrumentus un tev iedod jaunus, bet, ja nav iekšēja motīva skatīties no malas uz šo procesu, manuprāt, nekāda labuma nebūs. Gluži otrādi – būs liela panika un frustrācija par to, kas man tagad ir jādara. Tas ir jautājums par kompleksu ilgtermiņa skolotāju tālākizglītības nodrošinājumu. Ir ļoti pamazām jāatradina skolotājs no tās pozīcijas, kas ir mūsu gēnos, arī runājot par komunikācijas veidu. Primārais ir izvērtēt esošo pieredzi un darbību – kā mēs mācam? –, un šī izvērtējuma dalībnieks ir katrs skolotājs. Lai skolotājs patiešām saprot, ka ir kaut kas jāmaina, ka šādi vairs nevar, ka bērni nesapratīs, ja es darīšu šādi. Lai rodas pieprasījums pēc jaunā instrumenta. Pašlaik nav pieprasījuma kritiskās masas, jo sākās no piedāvājumu, tādēļ pieprasījuma pusē ir pretestība. Es ļoti ceru, ka, ieraugot galīgo standarta un programmas versiju, jābūt pozitīvākai domai.

Paldies par sarunu!

12. pielikums

Empīriskā pētījuma 2. posma (pamatpētījuma) daļēji strukturētās intervijas ar eksperti Airu Kumerdanku

Intervija ar Latvijas Universitātes Starpnozaru izglītības inovāciju centra (SIIC) eksperti, VISC eksperti **Airu Komerdanku**. A. Kumerdanka strādā Latvijas Universitātes Fizikas un matemātikas fakultātē ar topošajiem matemātikas skolotājiem. Kopš 2005. gada strādāja Dabaszinātņu un matemātikas (DZM) Izglītības centra komandā. 20 gadus strādāja Talsu Valsts ģimnāzijā par matemātikas un biznesa ekonomisko pamatu skolotāju.

Kādas izmaiņas ir plānotas matemātikas skolotāju sagatavošanā?

Par to daudz tiek šobrīd runāts, jo principā visām skolotāju studiju programmām ir jauni uzstādījumi. Principiāli ir jāmaina uzstādījumi, tai skaitā, sadarbojoties ar Latvijas Universitātes Pedagoģijas, psiholoģijas un mākslas fakultāti (PPMF), jo šobrīd, domājot par skolotāju sagatavošanu, lielākā rūpe ir par to, ka viņi atnāk neko nezinoši principā par pedagoģijas pamatiem: par formatīvo vērtēšanu, par stundas daļām. Tādām lietām, kuras ne jau matemātikas un dabaszinātņu satura kontekstā mums ir jāmāca. Tās ir jebkuram mācību priekšmetam. Jēga būtu, ja pedagoģijas kursos viņiem iemācītu pusaudžu psiholoģiju, attīstības vecumposmus, un tad mēs liekam virsū savu kontekstu – kā tad tās dabaszinātnes un matemātiku mācīt.

Šobrīd prakses ir jēdzīgas. Matemātiķiem ir sešas prakses. Matemātikas skolotājiem ir noformulēts diezgan optimāls variants. Pirmajā praksē viņi iet kā klases audzinātājs kopā ar klasi un skatās, kā skolēni reaģē uz dažādiem skolotājiem. Otrajā praksē mēs ejam vērot kopīgi – mācamies sarunāties pēc stundas. Trešā prakse ir jau matemātikas skolotāja palīgs, kurš ēno un dara visu, ko skolotājs atļauj vai lūdz. Var jau sākt vadīt stundas. Tad ir divas prakses: pamatskolā un vidusskolā, kur students jau uzņemas rūpi un atbildību par procesu. Pēdējā ir pētnieciskā prakse. Līdz ar to, ja paralēli praksēm saliktu metodikas un teorijas kursus, izejot cauri sešiem semestriem, ir jēdzīgi.

Kur, Jūsuprāt, būtu loģiskāk sagatavot matemātikas skolotājus: fizikas, matemātikas un optometrijas fakultātē (FMOF) vai PPMF?

Man šķiet, ka tā ir runga ar diviem galiem. No vienas puses, var domāt, ka matemātikas fakultātē, lai ieliktu fundamentu šajā mācību priekšmetā un zinātnē, lai topošais skolotājs saprot, no kurienes katrai lietai, kuru mēs mācām skolā, kā saka, "kājas aug". No otras puses, man šķiet, ka ļoti loģiski būtu, ka pedagoģijas fakultāte sagatavo skolotājus, un tad viņi specializējas un izvēlas savu jomu. Mums tā sistēma ir tāda, ka mums tās abas lietas it kā formāli sadarbojas, un tomēr tas nav vienots organisms – katrs to deķi rauj uz savu pusi.

Kā studentu prakses vadītāja, vai ievērojāt, kas ir tipiskās topošo skolotāju grūtības?

Pirmais ir tas, ka viņi mēģina darīt tā, kā ir darījuši viņu skolotāji. Ja tas skolotājs ir bijis ļoti radošs un inovatīvs, tad viņi bieži vien ir gatavi arī darīt jaunas lietas. Ja tas skolotājs ir bijis tradicionālās skolas piekritējs, tad ir ļoti grūti pārliecināt, ka var mācīt arī citādāk, ka skolēni mācās citādi. Pagājušā gadā man bija viens students no vienas ļoti labas ģimnāzijas. Pēc pirmā semestra viņš mums tā arī pateica: “Ak, Dievs! Tik daudz lauzis sevī, kā es esmu šī semestra laikā, es mūžā neesmu.” Viņam bija tradicionālā skola: sēžam, rēķinām uzdevumus. Kad mēs runājām par to, ka, faktiski, matemātiku mēs nemācamies, lai varētu atrisināt tādu vai citu uzdevumu, bet tāpēc, lai iemācītos dažādas stratēģijas, kā principā risināt uzdevumus un problēmas, tā viņam bija pilnīgi cita pieredze. Viņš pirmo reizi mūžā dzirdēja tādus vārdus kā sasniedzamais rezultāts un atgriezeniskā saite, bet viņam tūlīt jau jāiet klasē. Tā ka, ir ļoti dažādi. Ir arī tādi, kuri saka: “Jā, mēs esam kaut ko tādu darījuši,” bet ir ļoti daudz studentu, kuri atnāk un saka: “Mēs pirmo reizi par pētniecību šeit runājam. Nekad, neviens man skolā neko tādu nav darījis.” Tagad viņam ir jāmāca citiem to, ko viņš pats nekad uz savas ādas nebija izbaudījis, un jānotic, ka tas ir labi un vērtīgi. Uzskatu maiņa ir visgrūtākais.

Atceros, ka Jūs savos studiju kursos šo uzskatu maiņu veidojāt ar piemēriem, kas liek pašiem domāt. Piemēram, ļoti spilgti atceros tādu uzdevumu: kā trīs dažādos veidos izskaidro, kā atrisināt uzdevumu par proporciju?

Esmu ļoti daudz mācījusies. Es domāju, ka tas, ko mēs šobrīd darām kopā ar SIIC, Daci Namsoni un Līgu Čakāni – es no viņām esmu ļoti daudz mācījusies. Tas bija arī tas, ko mana skolotāja man iemācīja, jo tā bija skolotāja, kurai arī bija ļoti svarīgi, lai vienu un to pašu uzdevumu izrēķina vismaz divos variantos. Tas, ko es nojautu, kad es pati daudz strādāju skolā ar skolēniem, kuriem bija tā saucamais profilkurss, man jau bija uzskats un princips. Tas man likās pilnīgi normāli, ka ir svarīgi nevis izrēķināt daudz uzdevumus, bet izdomāt, kā pa dažādiem ceļiem var tikt līdz atrisinājumam. Šī man vairāk bija intuitīva atziņa. Kad sākām strādāt ar matemātikas saturu projektā, tad te, ar kolēģiem runājot, es vēlreiz dabūju apstiprinājumu, ka tas ir ļoti svarīgi. Tā ka tas nav mans izgudrojums, bet tā ir mana pārliecība, ka tā ir jādara. Vienīgais, kas mani druscīņ dara bažīgu, ir tas, ka skolotāji saka: “Jā, viss jau ir ļoti skaisti, bet šo mēs varam darīt tikai ar spējīgiem skolēniem,” bet tam spējīgajam bieži vien pietiks ar to vienu ceļu, jo viņš to ļoti labi sapratīs un varēs tikt ar to galā. Tas ir tieši tas, kas ir jāmāca visiem tiem, kuriem pat ir grūtāk ar matemātiku, jo viņš neatcerēsies formālo ceļu. Viņam ir jābūt vismaz vēl diviem ceļiem, kā tikt tam lielajam akmenim garām.

Šis bija ļoti labs stāsts, kas apkopo mūsu sarunas sākumu. Kas vēl ir saglabājamās lietas, kuras mums matemātikas mācībās jau izdodas labi?

Mācot matemātiku, mums ir daudz ļoti labu lietu. Es nedomāju, ka tās būtu jānonivelē. Mēs varam paralēli tam iemācīt vēl daudz citu lietu, neliekot tik lielu akcentu uz tik daudz dažādām sīkām, nenozīmīgām lietām, kas, patiesībā, neko jaunu matemātiskajā izglītība nedod. Mēs varam iemācīt nosaukumus, jēdzienus. Tie paši logaritmiskie vienādojumi – ja tam īsti nav nekāda seguma... Ja mēs runājam principā par kaut kādu vienādojumu risināšanu, par algoritmu ievērošanu, tad tas ir labs konteksts, uz kura to var darīt. Kāpēc ne? Arī tādi vienādojumi ir.

Kā viens no gadījumiem, bet ne kā atsevišķs temats.

Jā, jo – vai es rēķinu tādā veidā eksponentvienādojumu, trigonometrisko vai logaritmisko vienādojumu, kāda atšķirība, bet es zinu, ka es protu pielietot substitūciju, es varu grupēt vai smuki izcelt homogēnus vienādojumus, taču logaritmiskais vienādojums man ir tikai piemērs, uz kura bāzes to var darīt. Man šķiet, ka ir jāsaliek citi akcenti. Man tieši vakar bija saruna ar vienu studentu, kurš tikko aizstāvēja bakalaura darbu un strādā vienā no Rīgas nomales skolām. Sākumā viņš par visu šo izklausījās diezgan pesimistiski. Tad viņš sāka sestdienās strādāt ar skolēniem tieši par spriešanas prasmju attīstīšanu. Šīs mācības notiek nu jau divus gadus. Sākumā viņš ar to cīnījās, nu jau, varbūt, ar baudu kaut kādas lietas dara un redz rezultātus. Ka arī tie skolēni, par kuriem saka: "Kāda tur matemātika? Liekam viņiem svētu mieru un darām tā, kā esam visu mūžu darījuši – skolotājs pastāstīs, parakstīs pie tāfeles, skolēni kaut ko pārrakstīs un viss būs labi," sāk šim skolotājam piedāvāt savus risinājumus, kas parāda, ka, ja mēs konsekventi liekam citus uzsvarus, arī skolotājs uzskatīs, ka uzdevums nav jāiemāca, ir jāiemāca jēga, spriešana. Tad var panākt rezultātus, taču tas nebūs ne semestra laikā, iespējams, ka pat ne gada laikā. Tam vajag ilgāku laika posmu, lai arī tie jaunieši notic, ka tam ir jēga. Dabūt to garšu, lai arī tie, kas nav tādi baigie gudrinieki, par darbu mājās pasaka: "Ai, es tur kaut kādas muļķības švīkāju aiz neko darīt, bet re, kā man šāds risinājums sanāca." Skolēns ir dabūjis to sajūtu, ka viņš var. Super! Skolēniem ļaut ieraudzīt pievienoto vērtību no tā, ka viņi sarunājas. Tik ilgi runājas par matemātiku, kamēr ir: "Eu, bet šī bija baigi labā ideja." No tā, ka viņi kopā dara kaut kādas lietas, ka viņi var tik galā ar problēmām, uztaisīt kādu modeli pēc aprēķinātiem parametriem, var izskaitļot, izdomāt, uztaisīt. Lai skolēns iegūst sajūtu, ka viņam matemātika noderēja, lai es to izdarītu.

Kādas ir Jūsu pārdomas, lasot jauno matemātikas standartu?

Ir ļoti labi, ka ir tās lielās idejas, jo mēs iegūstam sešus apgalvojumus, par kuriem skolēni saprot, ka tas tā ir. Tādas kā aksiomas. Tad mēs varam domāt, kāds ir tas ceļš, līdz viņš dabū galvā šo domu. Otra lietas, kas man ļoti patīk, ir tā, ka beidzot ir salikts no pirmsskolas līdz 12.

klasei, kur tiešām var redzēt progresu, ka mēs nemuļļājamies. Var jau būt, ka caur standartu tas vēl nav tik labi nolasāms, bet es domāju, kad apakšā jēdzīgi saliks programmas, tad nebūs atkal un atkal par to pašu. Ka redz – tik tālu bija jāiemācās sākumskolā vai pamatskolā, ka kombinatoriku mēs nesākam 7. klasē, bet tā ir bijusi sākumskolā tiešām ļoti labā līmenī, vienīgi tad ir pārrāvums, tādēļ pēc tam visi brīnās, kādēļ skolēni neko nesaprot un nevar. Tāpēc, ka mēs neesam to pēctecīgi darījuši. Pēctecība ir ļoti laba. Tīrāmas lietas vēl ir diezgan daudz. Ir arī daudz priekšlikumu. Strādāja arī FMOF profesori, sadarbībā ar Daugavpils Universitāti, rakstīja savus ieteikumus, kas ir liels atbalsts tiem, kas veidoja jauno saturu. Es pieņemu, ka dažkārt skolotāji, veidojot materiālus, to dara druscin “sarunvalodas” līmenī. Ka tā var parunāties klasē, bet, kad to uzliek uz papīra, kas ir valsts dokuments, tas nedrīkstētu būt kļūdaini. Tur jābūt pareizā valodā ar pareiziem jēdzieniem.

Kā Jums šķiet, vai šie ieteikumi tiks ņemti vērā?

Es pieņemu, ka visi noteikti netiks. Ieteikumi ir ļoti pretrunīgi. Ja viens pasaka, ka šis ir baigi forši, bet otrs pasaka – tas galīgi neder. Līdz ar to viss noteikti nebūs. Šobrīd tie cilvēki, kuri to dara, ļoti godprātīgi mēģina atrast labāko variantu.

Kādas ir Jūsu domas par vidusskolas mācību satura apguvi trīs līmeņos: vispārīgajā, optimālajā un augstākajā?

Man ļoti patīk. Beidzot mēs esam godīgi pateikuši, ka tie, kas mācās profesionāli-tehniskajās skolās tomēr matemātiku neiemācās tādā līmenī un mēs esam legalizējuši lietas, par kurām mēs visu laiku noklusējām. Tas, ka šie skolēni lika tieši tādu pašu eksāmenu kā Rīgas Valsts 1. ģimnāzijas skolēni, nebija godīgi, jo viņiem stundu skaits bija trīs reizes mazāks un uz pusi mazāks nekā parastām vispārizglītjošām programmām. Mēs izlikāmies, ka mēs to neredzam.

Ņemot vērā, ka Latvija šobrīd pāriet uz kompetenču izglītību, kā Jūs skaidrotu matemātisko kompetenci?

Vārds “kompetence” ir kā karsts kartupelis. Runājot ar skolotājiem, es vairs nelietoju šo vārdu, bet tā vietā saku, ka skolēns ir lietpratīgs. Ka skolēns tiešām lietas prot, līdz ar to zina, kas tas ir, kā to darīt, viņš dara matemātiskajā modelī, bet var darīt arī tad, ja tā būs fizika, sociālās zinības, un reāli lieto citās situācijās. Manuprāt, kompetence ir šajā darbībā.

Ko Jūs ieteiktu skolotājam, kurš ar matemātiskās kompetences testu atklāj, ka viņa skolēniem rezultāti visās komponentēs ir vienlīdz zemas?

Man šķiet, ka tas ir pilnīgi dabiski, ka tas tā ir. Ja mēs mērķtiecīgi nemācam, neatkarīgi no tā, cik tu esi prasmīgs skaitļošanā, piemēram, intuīcija ir tāda kā dabas dāvana. Protams, mēs varam mācīties, varam intuīciju izkopt analizējot, jo intuīcija, manuprāt, ir ļoti saistīta ar prognozēšanu. Intuīcija ir vairāk uz buršanos, bet bērniem var iemācīt novērtēt.

Līdzīgs piemērs ar acumēru - bērniem ir pilnīga mistika, cik tālu ir no šejienes līdz tam kokam. Vai tas ir kilometrs, vai kas tas ir? Kādreiz mēs skolā tā smējāmies - es teicu, piepildīsim vienu kubikmetru ar ūdeni. Sanesam spainīšiem, jo kas ir viens kubikmetrs - metrs reiz metrs reiz metrs. To, ka tas būs vājprātā daudz spainīši jānes, bērni saprot tikai tajā brīdī, kad ir piepildījuši tvertni. Līdzīgi, ja bērniem prasa: "Cik tālu ir 100 metri?", viņi var atbildēt: "A, tur jau kilometrs sanāk līdz tam ceļam." Mēs varam trenēt, teikt, ka no staba līdz stabam ir 50 metri. Iemācīt stratēģijas, kā tu vari novērtēt. Pēc šādas mācīšanās, ja es pārbaudītu skolēnu panākumus, es pieņemu, ka rezultāti intuīcijas jautājumos būtu citi, bet ne jau tāpēc, ka viņam intuīcija ir dabiski mainījusies, bet ka viņam ir kaut kādi instrumenti, kā viņš var kaut ko izvērtēt tīri ar prātu.

Ja skolēnam nepadodas problēmu risināšana?

Tas vienkārši ir jāmāca. Mēs sakām – viņi neprot, bet tas neiedzimst ar mātes pienu. Tas viss ir reāli jāmāca. Ir bērni, kuriem ir dabas dots; mēs viņu mācam vai nemācam, viņš kaut kādā brīdī pats pie tādiem secinājumiem nonāk. Par šiem skolēniem mēs esam šausmīgi priecīgi – re, kādi mums ir labi bērni. Kāds mums tur nopelns? Viņš vienkārši tāds ir dabas dots.

Tad ir jautājums, kas notiek ar pārējiem. Mēs viņus varam norakstīt vai mēs varam pateikt: "Mēs taču viņus varam iemācīt." Mācam plānot, rakstam pa punktiņiem, vingrināmies ieraudzīt situācijas, ģenerējam idejas, ko mēs šeit varam pētīt, ko ar to var darīt. Ka mēs apzināti radām situācijas, kurās viņam tas ir jādara. Tas, kas šobrīd visvairāk ir – pirmkārt, aizmet uz skolēniem: "Viņi jau neko nevar. Viņi ir tādi un šitādi." Tad man ir jautājums, kāpēc viņi tādi ir, kas viņus tādus veido? Taču pieaugušie cilvēki. Nākamais stāsts – tieši tāpat runā par skolotājiem: "Kādi mums tie skolotāji!" Uz to es saku – kur tad viņi tādi radās? Vai tad mēs šeit pat universitātē viņus nesagatavojām? Mēs viņus iemācījām būt tādiem, nav ko pārmest. Šobrīd skolā strādā tie, kuri ir 50-60-gadīgo pasniedzēju produkts. Tad mums ir jādomā, kā mēs varam šiem skolotājiem palīdzēt, tieši tāpat kā skolotājam ir jādomā, kā viņš var palīdzēt bērnam.

Skolotājiem arī nav bijusi dzīves pieredze un vajadzība kaut ko kādreiz darīt ar šāda veida datiem, jo vienmēr viņiem pateica: "Dari šādi." Neatkarīgi no tā, kādi ir tavi skolēni, ko viņi prot vai neprot, standarts ir šāds, programma ir šāda, un tev šajā tematā ir jāiemāca šis. Viņiem nekad nebija atbildība par to. Ja mēs tagad sakām, ka skolotājiem būs lielāka atbildība, tad viņi ir izmisumā tieši no tā, jo viņiem ir bail uzņemties atbildību. Viņi nav gatavi, jo tā nav viņu dzīves pieredze. Šajā situācijā – sāc ar mazu krikumiņu un šajā klasē pamēģini, bet arī tas ir ļoti ilgstošs process. Tas nemainīsies ne pēc gada, ne pēc diviem, ne pēc pieciem. Ar matemātikas skolotājiem jau vairāk nekā 10 gadus esam strādājuši ar šīm lietām, esam runājuši, tādēļ ir lietas, kuras ir mainījušās. Tieši tāpat dabaszinātnēs.

Jā, šeit var minēt pētnieciskās prasmes.

Skolotāji vismaz mēģina, taču vēl joprojām pētniecība mums ir tāda, ka kaut ko iemācam un tad sakām: "Nu tad apskatāties – šajā pētnieciskajā darbā ir tā vai nav." Vai arī pētniecība notiek tā, ka viss ir ļoti sīki atrunāts pa soļiem, ka neļaujas bērnam. Piemēram, maziem bērniem liek saģenerēt pētāmās problēmas. Bērni piedāvā dažādas interesantas idejas. Skolotāja pat ir ļāvusies, to visu sarakstīja, un tad saka: "Bet mēs šodien pētīsim to un to." Tas ir skolotājas pētnieciskais jautājums, pie tā mēs arī paliekam, jo bērniem neizdevās uzminēt, ko skolotāja grib izpētīt. Viens ir bailes par atbildību, bet otrs ir, manuprāt, tas, ka mēs diezgan slikti pārzinām saturu, jo mēs nevaram brīvi par matemātiku ieraudzīt kopbildi. Sākumskolā mēs vēl tiekam galā, bet, ja tas vidusskolēns ir krietni domājošs un oriģināls savā domāšanā, viņš var aizvilkt uz tādu pusi, kur mēs vairs nejūtamies droši. Kāpēc tad man ļauties kā skolotājam? Tad es labāk turu viņu savās sliedēs, jo, ja es stāstu, es taču stāstu to, par ko es zinu. Līdzko es lieku bērniem darīt, es nezinu, kas tur sanāks. Es domāju, ka skolotājiem vienkārši ir bail.

Droši vien, tur rodas arī metodiskas problēmas.

Protams. Teorētiski es arī varu mācīt fiziku, bet man nav metodes. Ja es mācītu fiziku, tas man būtu baigais izaicinājums. Tad es arī stāstītu tik ilgi, kamēr es pati iemācītos.

Cēsu 2. pamatskolā bija tāda Ingrīda Brizga. Viņa ir matemātiķis, un tad pārprofilējās uz fiziku. Viņa atkal ļoti ļāvās. Viņa teica: "Es taču mācos ar viņiem kopā." Viņa ļāva tiem bērniem darīt. No eksperimentiem viņa guva pieredzi, savāca faktus, kas tur viss var sanākt.

Tieši tā, jo eksperimentā var sanākt kaut kas pilnīgi cits, un skolotājam ir jāspēj reaģēt.

Bet viņa teica: "Es nesaprotu, es arī nezinu un nespēju reaģēt," jo šajā situācijā ir tas, ka es kā skolotāja nezinu, kas var sanākt un kāpēc ir tā. Skolotājam jābūt tik gudram, lai kopā ar bērniem tālāk meklētu risinājumu, jo palikt visu laiku ar atbildi: "Piedod, es nezinu, kas tur sanāca," arī skolēnu acīs ir diezgan sensitīvi, jo galu beigās vari zināmā mērā izrādīties galīgi ne autoritāte.

Kā citas sabiedrības grupas, izņemot jau plaši pieminētos skolotājus, var palīdzēt pusaudžiem kļūt par lietpratējiem matemātikā?

Uzņēmumi, kas iesaistās, piemēram, Latvijas valsts meži, kas izstrādā dažādus ar matemātiku saistītus uzdevumus, ir patiešām ieinteresēti. Matemātika saistās ar ekonomiku, tādēļ Latvijas banka un apdrošināšanas kompānijas varētu piedāvāt savus uzdevumus. Loģistikas uzņēmumi. Viņiem pat ir idejas. Studentiem viens patstāvīgais darbs ir uztaisīt nodarbību matemātikā ārpus klases. Pašiem jāiet uz uzņēmumu, jāapzina, ko tur varētu darīt saistībā ar matemātiku. Idejas patiešām ir interesantas: dažādas trasītes, kaut ko izrēķināt. Tāda mācību ekskursija, kur skolēns var kaut ko izdarīt un izspriest. Piemēram, kārtinga trasītes: kā man ir jāizņem līkums un ar kādu ātrumu. Skolēni apguva fiziku kopā ar matemātiku, domāja par ātruma virziena maiņu un vektoriem. Man tas likās jēdzīgs uzdevums. Vēl apdrošināšanas kompāniju piedāvājumu izvērtējums, kas ir reāla situācija. Mēs arī kā pieaugušie salīdzinām. Īstenībā, man tas paņem diezgan daudz laika, lai es varētu atrast visjēdzīgāko piedāvājumu. Tieši tāpat kā kredītpiedāvājumi, līzings ar atlaidi vai bezprocentu līzings bez atlaides.

Bet atkal tas vienmēr ir druscin diskutabli, lai situācijas un piemēri nesanāk ļoti mākslīgas, lai nepiedzejojam klāt to, ko neviens mūža nerēķinās. Tāpat sportā – reāli jau tur notiek aprēķini, kā man tas šķēps ir jāmet vai kā man tas lēciens ir jāvirza, lai tas būtu vistālākais. Kāds ar to nodarbojas. Protams, ka to, visticamāk, nedara pats sportists – viņam ir apkalpojošais personāls, kas to dara. Tas, ka uzņēmumi un veikali ļautu bērnus pieņemt, ir labi.

Es kādreiz mācīju ekonomiku. Faktiski, man pilnīgi cita matemātika pavērās tieši tajā brīdī, kad es sāku mācīt ekonomiku. Man bija pilnīgi citi piemēri. Es redzēju, kā tie skolēni skatās tad, ja mēs reāli rēķinām, tad ir pilnīgi cita interese, nekā par teksta uzdevumu, kur pa vienu šļūtenei ūdens tek iekšā un pa otru – ārā. Šādi teksta uzdevumi ir tik samākasloti, ka skolēni vairs neuzskata, ka tā ir reālā dzīve. Ļoti daudz labu reāla satura uzdevumu var atrast krievu literatūrā – tur ir, ko šķirstīt, meklēt. Varbūt, situāciju un kontekstu var pamainīt uz šodien atbilstošāku, bet matemātiskā puse tur ir baigi foršā.

Mums pietrūkst jaunās matemātikas idejas. Varbūt, satura veidotāji nezina, kā to ielikt. Es pieņemu, kaut kas no grafu teorijas, spēļu teorijas, kur ir jauni atklājumi un pieejas, varētu būt iekšā, bet tās jaunās lietas mēs patiesībā maz liekam. Tām vajadzētu būt, jo tas skolēniem interesētu. Statistikā runā par spēļu teoriju, loterijām un iespēju uzvarēt, bet, spēlējot "SuperBingo" pie televizora, mēs par to vairs nedomājam, jo tajā brīdī tas ir emocionāls pārdzīvojums, kaut gan mums būtu jāapzinās, ka varbūtība uzvarēt ir ļoti, ļoti maza, tādēļ no tā nebūtu jāķer kreņķi, ka man atkal nav nekā. Cilvēkam vajadzētu to apzināties. Kad skolā paņem tādus piemērus, bērniem acis iespīdas, jo viņiem interesē. Līdzīgi ar normāliem loģistikas uzdevumiem - tur nekā tik ļoti sarežģīta nebūtu, ko vidusskolas kursā ielikt. Ja šobrīd domā par padziļināto līmeni, kur būtu druscin atvasinājumi un citi jautājumi no matemātiskās analīzes, parēķināt peļņas, ka nevar visu laiku tikai ražot vairāk un pelnīt vairāk, jo kaut kādā brīdī iestājas piesātinājums. Tajā brīdī tas vairs nav jautājums par intuīciju, ka es zinu, ka nevar mūžīgi tik labi veikties, bet tas ir ļoti racionāli.

Mēs runājām par bailēm no jaunā. Kā Jūs iedrošinātu skolotājus, kuri nav tik ļoti pārliecināti par sevi, lai varētu mācīties kopā ar saviem skolēniem?

Ir jāiet pa mazam solītim. Es ieteiktu: "Pamēģiniet! Varbūt, ka jums izdodas." Tieši tāpat, kā mēs mudinām skolēnus pamēģināt. Ja jūs teiksiet, ka tas jums neder, jūs vienmēr drīkstat kāpties atpakaļ un darīt kaut kā citādāk, bet, ja jūs nepamēģināsiet, jūs nekad neuzzināsiet, kā tas ir. Kādreiz kāds saka: "O, es pamēģināju – tiešām ir forši." Ir arī citādāk: "Es pamēģināju grupu darbu matemātikā – pilnīgas muļķības! Nekas tur nesanāk." Ja skolotājs nav dabūjis garšu tam, kāpēc skolēniem piedāvāt strādāt grupās, viņš, visticamāk, vienu reizi pamēģināja, nemācēja to izdarīt, kas bieži vien ir tehnikas lieta, skolotājs nav dabūjis sajūtu, kas tas ir forši, un skolēni arī ne, tad viss – skolotājs noliedz šo metodi principā. Ja kādu metodi izspēlē ar skolotājiem, viņiem ir diezgan grūti pārnest. Tāpat kā ar bērniem – viņam var stāstīt piemērus, bet, kamēr viņš pats to nav piedzīvojis, viņš to nedarīs klasē. Mēs mācībās, kursos reizēm modelējam viens pret viens – viņi ir skolēni, es esmu skolotājs. Pēc tam viņi saka: "Jā, es pamēģināju. Bērniem patika." Dabīgi, ka bērniem patika, tāpēc ka bērniem ļāva darīt. Ja skolotājs dabū sajūtu, ka tas ir forši, tad tas ir iedrošinājums. Ir jāpamēģina ar vienu mazu kripatiņu. Nevajag uzreiz taisīt nezin kādus lielos darbus un lielos projektus, jo tas ir laikietilpīgi. Mēs nevar pēc tam to saimniecību vairs savākt atpakaļ. Kad es kā skolotājs redzu, cik daudz man darba gāžas virsū no tā, es to nedarīšu, jo priekš kam man to vajag; es varu mierīgi eksistēt tā, kā es tagad daru.

Paldies par sarunu!

13. pielikums

Empīriskā pētījuma 2. posma (pamatpētījuma) skaitliskie rezultāti

	1. Matemātiskā intuīcija		2. Problēmu risināšana		3. Matemātiskā modelēšana	4. Komunikācija		5. Kritiskā domāšana	6. Personības īpašības
	1. Cik bieži Tev gadās uzminēt nākamo uzdevuma atrisinājuma soli?	2. Cik bieži, risinot uzdevumu, novērtē rezultātu, pirms veikt aprēķinus?	5. Cik bieži Tev ir problēmas uztvert, kas ir prasīts uzdevumā?	6. Cik bieži Tev matemātikas stundās jāpamato savs viedoklis?	9. Cik bieži matemātikas stundās veidojat matemātisku modeli reālas dzīves problēmai?	13. Vai risinot uzdevumus izmanto enciklopēdijas, rokasgrāmatas vai citus informācijas avotus?	14. Cik bieži Tu spēj uzdevumu pateikt saviem vārdiem, interpretēt?	17. Cik bieži Tu spēj argumentēt savu risinājumu vai viedokli?	22. Cik bieži, risinot uzdevumu, Tev rodas interese noskaidrot vai aprēķināt vēl kaut ko, kas nav prasīts uzdevumā?
Katru stundu	4	13	10	9	1	3	3	14	6
Bieži	51	68	34	59	43	20	56	75	16
Reizēm	123	94	135	104	90	92	108	89	100
Nekad	15	18	14	21	59	78	26	15	71

Empīriskā pētījuma 2. posma (pamatpētījuma) frekvenču tabulas

3. Nerisinot vienādojumu, cik atrisinājumu (sakņu) ir šim vienādojumam?

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	Nezinu	47	24,4	24,4	24,4
	1 vai 2	113	58,5	58,5	82,9
	3	33	17,1	17,1	100,0
	Total	193	100,0	100,0	

4.a Paturpini skaitļu virkni 2, 8, 18, ... un paskaidro savu ideju!

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	nav darīts vai nezina	42	21,8	21,8	21,8
	tikai minējums	72	37,3	37,3	59,1
	mēģina skaidrot savu ideju	26	13,5	13,5	72,5
	korekts skaidrojums	53	27,5	27,5	100,0
	Total	193	100,0	100,0	

4b. Ar cik skaitļiem paturpināja virkni?

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	0	47	24,4	24,4	24,4
	1	103	53,4	53,4	77,7
	2	13	6,7	6,7	84,5
	3	24	12,4	12,4	96,9
	4	5	2,6	2,6	99,5
	5	1	,5	,5	100,0
	Total	193	100,0	100,0	

7. 2015. gadā Mārupes vidusskolā mācījās 910 skolēni, 2016. gadā – 1000 skolēnu un 2017. gadā – 1100 skolēni. Sastādi matemātisku uzdevumu un atrisini to!

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	nav	41	21,2	21,2	21,2
	atņemšana/ vidējais aritmētiskais/ kopā pa trīs gadiem	128	66,3	66,3	87,6
	procentu uzdevums	14	7,3	7,3	94,8
	progresijas vai prognozēšana	10	5,2	5,2	100,0
	Total	193	100,0	100,0	

8. Attēlā parādīta zemesgabala ABCD forma. Kādi mērījumi jāveic, lai varētu noteikt šī zemesgabala laukumu? Uzraksti īsu plānu, kā Tu noteiktu laukumu!

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	nav	100	51,8	51,8	51,8
	zināms algoritms	58	30,1	30,1	81,9
	atsevišķi secīgi lēmumi	18	9,3	9,3	91,2
	atrisina	17	8,8	8,8	100,0
	Total	193	100,0	100,0	

10. Kādus procesus var aprakstīt ar funkciju?

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	nav vai nekonkrēti	107	55,4	55,4	55,4
	lineāra vai kvadrātfunkcija	63	32,6	32,6	88,1
	cita konkrēta funkcija	13	6,7	6,7	94,8
	gandrīz jebkādus	10	5,2	5,2	100,0
	Total	193	100,0	100,0	

11. Vienādsānu trijstūra viena mala ir 8 cm un cita mala ir 5 cm gara. Aprēķini trijstūra perimetru!

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	nav	54	28,0	28,0	28,0
	1 pareizā atbilde	107	55,4	55,4	83,4
	Abas atbildes	32	16,6	16,6	100,0
	Total	193	100,0	100,0	

12. Attēlā parādīts istabas plāns. Zināms, ka istabas platums ir 5 metri. Nosaki lielākā galda izmērus!

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	nav	77	39,9	39,9	39,9
	nosaka aptuveni	40	20,7	20,7	60,6
	viens izmērs pareizs	42	21,8	21,8	82,4
	pareizā atbilde	34	17,6	17,6	100,0
	Total	193	100,0	100,0	

15. Puse Latvijas teritorijas ir klāta ar mežiem. Diagrammā ir redzams Latvijas mežu sadalījums pa koku sugām. Cik procentus no Latvijas teritorijas klāj skujkoku meži?

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	nav/ cita aplama atbilde	31	16,1	16,1	16,1
	60 % vai 60 % + vēl nedaudz	147	76,2	76,2	92,2
	30 %	14	7,3	7,3	99,5
	30 % un vēl nedaudz	1	,5	,5	100,0
	Total	193	100,0	100,0	

16. Aptuveni katram devītajam Latvijas iedzīvotājam ir Instagram profils. Cik Instagram lietotāju ir Latvijā?

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	nav	72	37,3	37,3	37,3
	minējums, kas ir tālu no 217 000	24	12,4	12,4	49,7
	atbilde tuvu precīzajai	97	50,3	50,3	100,0
	Total	193	100,0	100,0	

18. Četrstūra diagonāles ir vienlaikus arī četrstūra leņķu bisektrises. Kā Tu pamatotu, ka šis četrstūris ir rombs?

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	nav	130	67,4	67,4	67,4
	aplams mēģinājums	58	30,1	30,1	97,4
	daļēji pareizi	3	1,6	1,6	99,0
	korekts pamatojums	2	1,0	1,0	100,0
	Total	193	100,0	100,0	

19. Kā Tu domā, pēc kāda principa daži skaitļi šajā tabulā ir iekrāsoti zaļā krāsā?

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	nav	98	50,8	50,8	50,8
	plams mēģinājums (nepāra, racionāli)	33	17,1	17,1	67,9
	secina, ka tie ir pirmskaitļi	62	32,1	32,1	100,0
	Total	193	100,0	100,0	

20. Vai var viennozīmīgi apgalvot, ka četrstūris, kura diagonāles ir perpendikulāras un vienāda garuma, ir kvadrāts?

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	nav	37	19,2	19,2	19,2
	jā	115	59,6	59,6	78,8
	nē	38	19,7	19,7	98,4
	nē ar pretpiemēru	3	1,6	1,6	100,0
	Total	193	100,0	100,0	

21. Ja uzdevumu Tev neizdodas uzreiz atrisināt, Tu tomēr meklē citu risinājumu vai arī atliec malā, neturpini par to domāt?
0 – nerisinātu; 3 – pūlētos izdomāt

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,0	5	2,6	2,6	2,6
	1,0	19	9,8	9,8	12,4
	1,3	2	1,0	1,0	13,5
	1,5	8	4,1	4,1	17,6
	1,7	3	1,6	1,6	19,2
	2,0	87	45,1	45,1	64,2
	3,0	69	35,8	35,8	100,0
	Total	193	100,0	100,0	

23. Iedomājies, ka, risinot ģeometrijas uzdevumu, Tu ieguvi atbildi, ka malas garums ir negatīvs skaitlis. Kā Tu rīkotos?

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	nezinu	37	19,2	19,2	19,2
	pajautātu	10	5,2	5,2	24,4
	secinātu, ka ir kļūda	29	15,0	15,0	39,4
	meklētu kļūdu	117	60,6	60,6	100,0
	Total	193	100,0	100,0	

24. Apskatot šo attēlu, vai Tev rodas zinātkāre pārbaudīt, kāds rezultāts sanāk pēdējā rindiņā?

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	nē	59	30,6	30,6	30,6
	jā (neitrāli)	60	31,1	31,1	61,7
	jā (pozitīvi)	74	38,3	38,3	100,0
	Total	193	100,0	100,0	

25. Vai Tu vari atrisināt jebkuru matemātikas uzdevumu? Paskaidro savu atbildi!

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	nē	98	50,8	50,8	50,8
	ne visus/ nezinu	75	38,9	38,9	89,6
	jā	20	10,4	10,4	100,0
	Total	193	100,0	100,0	

26. Kā Tu rīkotos, ja risinājuma gaitā atklātos, ka Tevis izvēlētais risināšanas paņēmiens noved strupceļā un neļauj tikt pie atbildes?

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	ignorētu	39	20,2	20,2	20,2
	pasīva attieksme	24	12,4	12,4	32,6
	pārrisinātu	130	67,4	67,4	100,0
	Total	193	100,0	100,0	

27. Ko Tu secināji no šīm divām skaitliskām nevienādībām?

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	nav vai aplami	111	57,5	57,5	57,5
	secina par šo situāciju	32	16,6	16,6	74,1
	mēģina vispārināt	47	24,4	24,4	98,4
	vispārina	3	1,6	1,6	100,0
	Total	193	100,0	100,0	

28. Kādas pārdomas Tev rodas, apskatot šo "pierādījumu" tam, ka 2 = 1?

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	nav pārdomu	136	70,5	70,5	70,5
	vispārīga atbilde	38	19,7	19,7	90,2
	secina, ka tur ir kļūda	16	8,3	8,3	98,4
	identificē kļūdu	3	1,6	1,6	100,0
	Total	193	100,0	100,0	

29. Kā Tu vērtē savas zināšanas matemātikā? (Skalā no 1 līdz 10)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	2	4	2,1	2,1	2,1
	3	17	8,8	9,0	11,1
	4	12	6,2	6,3	17,5
	5	31	16,1	16,4	33,9
	6	64	33,2	33,9	67,7
	7	43	22,3	22,8	90,5
	8	3	1,6	1,6	92,1
	8	6	3,1	3,2	95,2
	9	8	4,1	4,2	99,5
	10	1	,5	,5	100,0
	Total	189	97,9	100,0	

30. Kāds ir Tavu matemātisko prasmju līmenis? Piemēram, vai ikdienas situācijās Tu veiksmīgi pielieto matemātikas zināšanas dažādu problēmu risināšanā?

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	nav	31	16,1	16,1	16,1
	zems	35	18,1	18,2	34,4
	viduvējs	49	25,4	25,5	59,9
	labs	74	38,3	38,5	98,4
	izcils	3	1,6	1,6	100,0
	Total	192	99,5	100,0	
Total		193	100,0		

31. Kā matemātikas skolotāja/-s Tev palīdz vai traucē apgūt matemātiku?

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	traucē	31	16,1	17,0	17,0
	neitrāli	23	11,9	12,6	29,7
	palīdz	128	66,3	70,3	100,0
	Total	182	94,3	100,0	
	neatbildēja	11	5,7		
Total		193	100,0		

32. Kā skolas mācību vide (aprīkojums, mācību materiāli, emocionālā vide u. c.) Tev palīdz vai traucē apgūt matemātiku?

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	traucē	47	24,4	27,8	27,8
	neitrāli	55	28,5	32,5	60,4
	palīdz	67	34,7	39,6	100,0
	Total	169	87,6	100,0	
	neatbildēja	24	12,4		
Total		193	100,0		

15. pielikums

Empīriskā pētījuma 2. posma (pamatpētījuma) aprakstošā statistika

Matemātiskās kompetences komponente	**Max punktu skaits**	**Aritmē-tiskais vidējais**	**Moda**	**Mediāna**	**Standart-novirze**	**Asimetrijas koeficients**
Personības īpašības	11	0,60	6	7	2,15	–0,21
Matemātiskā modelēšana	8	0,33	1	3	1,84	0,43
Komunikācija	5	0,41	3	2	1,14	–0,23
Problēmu risināšana	6	0,29	1	1	1,27	0,80
Matemātiskā intuīcija	5	0,56	3	3	1,56	0,14
Kritiskā domāšana	8	0,28	2	2	1,46	0,46
Pašrefleksija	10	0,32	2	3	1,92	0,44

Aritmētiskais vidējais izteikts kā daļa no maksimālā punktu skaita šajā kritērijā.

16. pielikums

Empīriskā pētījuam 2. posma (pamatpētījuma) mainīgo sadalījums

Jautājums	Kolmogorov-Smirnov Test		
	Statistic	df	Sig.
1.	,360	193	,000
2.	,280	193	,000
3.	,327	193	,000
4a.	,253	193	,000
4b.	,342	193	,000
3.-4.	,196	193	,000
5.	,398	193	,000
6.	,304	193	,000
7.	,355	193	,000
8.	,303	193	,000
7.-8.	,237	193	,000
9.	,233	193	,000
10.	,326	193	,000
11.	,289	193	,000
12.	,247	193	,000
10.-12.	,140	193	,000
13.	,253	193	,000
14.	,303	193	,000
15.	,401	193	,000
16.	,328	193	,000
15.-16.	,257	193	,000
17.	,269	193	,000
18.	,411	193	,000
19.	,326	193	,000
20.	,309	193	,000
18.-20.	,159	193	,000
21.	,236	193	,000
22.	,266	193	,000
23.	,364	193	,000
24.	,252	193	,000
21.-24.	,153	193	,000
25.	,320	193	,000
26.	,416	193	,000
27.	,359	193	,000
28.	,423	193	,000
25.-28.	,165	193	,000
29.	,208	189	,000
30.	,234	192	,000
31.	,431	182	,000
32.	,257	169	,000

Tā kā visas Kolmogorova-Smirnova testa vērtības ir 0,000 < 0,05, mainīgie nav normāli sadalīti; tie ir neparametriski dati.

17. pielikums

Empīriskā pētījuma 2. posma (pamatpētījuma) korelācijas analīze ar Spīrmena testu

1. datu rindiņa – Spīrmena korelācijas koeficients, 2. rindiņā – p-vērtība (*significance*)

	1.	2.	3a.	4a.	4b.	3+4	5.	6.	7a.	8a.	7+8	9.	10a.	11a.	12a.	10-12	13.
1. Cik bieži Tev gadās uzminēt nākamo uzdevuma atrisinājuma soli?	1,000	,188	,214	,226	,194	,260	,197	,193	,180	,149	,201	,234	,035	,133	,192	,182	,019
		,009	,003	,002	,007	,000	,006	,007	,012	,039	,005	,001	,632	,065	,007	,011	,794
2. Cik bieži, risinot uzdevumu, novērtē rezultātu, pirms veikt aprēķinus?	,188	1,000	,182	,068	,042	,096	,137	,182	,041	,008	,039	,085	-,011	,071	,036	,056	,087
	,009		,011	,350	,563	,183	,058	,011	,576	,914	,595	,240	,883	,325	,622	,439	,230
3. Cik bieži, risinot uzdevumu, novērtē rezultātu, pirms veikt aprēķinus?	,214	,182	1,000	-,017	-,048	,312	,078	-,019	,086	,277	,269	,054	,116	,123	,133	,163	,014
	,003	,011		,814	,506	,000	,281	,790	,232	,000	,000	,459	,107	,088	,064	,023	,842
4a. Paturpini skaitļu virkni 2, 8, 18, … un izskaidro to vārdiem!	,226	,068	-,017	1,000	,710	,878	,021	,077	,199	,214	,278	,088	,093	,157	,243	,267	,010
	,002	,350	,814		,000	,000	,772	,285	,006	,003	,000	,222	,196	,030	,001	,000	,893
4b. Ar cik skaitļiem paturpināja skaitļu virkni	,194	,042	-,048	,710	1,000	,596	-,046	,170	,111	,111	,153	,181	,120	,159	,166	,234	,013
	,007	,563	,506	,000		,000	,529	,018	,123	,123	,034	,012	,096	,028	,021	,001	,855
Rezultāts matemātiskās intuīcijas uzdevumos	,260	,096	,312	,878	,596	1,000	,063	,092	,257	,293	,376	,136	,148	,195	,262	,308	,047
	,000	,183	,000	,000	,000		,386	,205	,000	,000	,000	,059	,040	,006	,000	,000	,518
5. Cik bieži Tev ir problēmas uztvert, kas ir prasīts uzdevumā?	,197	,137	,078	,021	-,046	,063	1,000	,080	-,022	,003	,005	,140	,073	,081	-,013	,062	-,040
	,006	,058	,281	,772	,529	,386		,270	,756	,967	,946	,051	,316	,263	,856	,394	,578
6. Cik bieži Tev matemātikas stundās jāpamato savs viedoklis?	,193	,182	-,019	,077	,170	,092	,080	1,000	-,040	-,020	-,043	,263	,115	,106	,119	,150	,135
	,007	,011	,790	,285	,018	,205	,270		,578	,780	,549	,000	,111	,141	,101	,038	,062
7. Sastādi matemātisku uzdevumu par skolēnu skaitu un atrisini to!	,180	,041	,086	,199	,111	,257	-,022	-,040	1,000	,158	,671	,037	,203	,151	,165	,233	-,109
	,012	,576	,232	,006	,123	,000	,756	,578		,029	,000	,606	,005	,036	,022	,001	,132

	1.	2.	3a.	4a.	4b.	3+4	5.	6.	7a.	8a.	7+8	9.	10a.	11a.	12a.	10-12	13.
8. Uzraksti īsu plānu, kā Tu noteiktu patvaļīga četrstūra ABCD laukumu!	,149	,008	,277	,214	,111	,293	,003	-,020	,158	1,000	,815	,067	,191	,219	,215	,291	,026
	,039	,914	,000	,003	,123	,000	,967	,780	,029		,000	,357	,008	,002	,003	,000	,725
Rezultāts problēmu risināšanas uzdevumos	,201	,039	,269	,278	,153	,376	,005	-,043	,671	,815	1,000	,072	,270	,246	,255	,349	-,055
	,005	,595	,000	,000	,034	,000	,946	,549	,000	,000		,323	,000	,001	,000	,000	,451
9. Cik bieži matemātikas stundās veidojat matemātisku modeli reālas dzīves problēmai?	,234	,085	,054	,088	,181	,136	,140	,263	,037	,067	,072	1,000	,203	,104	,134	,199	,158
	,001	,240	,459	,222	,012	,059	,051	,000	,606	,357	,323		,005	,151	,063	,006	,028
10. Kādus procesus var aprakstīt ar funkciju?	,035	-,011	,116	,093	,120	,148	,073	,115	,203	,191	,270	,203	1,000	,177	,160	,561	,088
	,632	,883	,107	,196	,096	,040	,316	,111	,005	,008	,000	,005		,014	,027	,000	,225
11. Vienādsānu trijstūra viena mala ir 8 cm un cita mala ir 5 cm gara. Aprēķini trijstūra perimetru	,133	,071	,123	,157	,159	,195	,081	,106	,151	,219	,246	,104	,177	1,000	,307	,625	-,051
	,065	,325	,088	,030	,028	,006	,263	,141	,036	,002	,001	,151	,014		,000	,000	,481
12. Attēlā parādīts istabas plāns. Zināms, ka istabas platums ir 5 metri. Nosaki lielākā galda izmērus!	,192	,036	,133	,243	,166	,262	-,013	,119	,165	,215	,255	,134	,160	,307	1,000	,819	,187
	,007	,622	,064	,001	,021	,000	,856	,101	,022	,003	,000	,063	,027	,000		,000	,009
Rezultāts matemātiskās modelēšanas uzdevumos	,182	,056	,163	,267	,234	,308	,062	,150	,233	,291	,349	,199	,561	,625	,819	1,000	,132
	,011	,439	,023	,000	,001	,000	,394	,038	,001	,000	,000	,006	,000	,000	,000		,067
13. Vai risinot uzdevumus izmanto enciklopēdijas, rokasgrāmatas vai citus informācijas avotus?	,019	,087	,014	,010	,013	,047	-,040	,135	-,109	,026	-,055	,158	,088	-,051	,187	,132	1,000
	,794	,230	,842	,893	,855	,518	,578	,062	,132	,725	,451	,028	,225	,481	,009	,067	
14. Cik bieži Tu spēj uzdevumu pateikt saviem vārdiem, interpretēt?	,317	,311	,098	,086	-,041	,107	,279	,155	,061	,040	,080	,098	,112	,049	,139	,138	,084
	,000	,000	,173	,233	,567	,138	,000	,031	,400	,585	,270	,177	,119	,500	,053	,055	,247
15. Lietojot divus informācijas avotus, aprēķini, cik % no Latvijas teritorijas klāj skujkoku meži.	,156	-,025	-,015	,056	-,046	,023	,090	,074	,166	-,011	,102	-,005	,108	,108	,220	,225	,017
	,031	,725	,841	,440	,530	,754	,213	,305	,021	,882	,159	,949	,136	,135	,002	,002	,812
16. Aptuveni katram 9. Latvijas iedzīvotājam ir Instagram profils. Cik Instagram lietotāju ir Latvijā?	,138	,044	,193	,109	,060	,136	,060	,142	,192	,138	,214	-,118	,052	,295	,318	,343	-,003
	,056	,540	,007	,132	,408	,060	,404	,049	,007	,056	,003	,102	,474	,000	,000	,000	,969

	1.	2.	3a.	4a.	4b.	3+4	5.	6.	7a.	8a.	7+8	9.	10a.	11a.	12a.	10-12	13.
Rezultāts uzdevumos, kuri pārbauda komunikācijas prasmes	,173	,031	,153	,113	,030	,117	,087	,152	,219	,105	,209	-,109	,081	,283	,349	,369	-,002
	,016	,673	,034	,119	,677	,105	,230	,035	,002	,147	,003	,131	,265	,000	,000	,000	,980
17. Cik bieži Tu spēj argumentēt savu risinājumu vai viedokli?	,273	,239	-,059	,066	-,081	,044	,280	,298	,028	,077	,063	,094	,115	-,029	,078	,077	,012
	,000	,001	,413	,362	,262	,540	,000	,000	,701	,285	,381	,196	,110	,689	,278	,285	,868
18. Četrstūra diagonāles ir vienlaikus arī četrstūra leņķu bisektrises. Kā Tu pamatotu, ka šis četrstūris ir rombs?	,191	-,028	,110	,213	,136	,214	-,090	,050	,174	,189	,263	,083	,168	,091	,233	,249	,190
	,008	,699	,127	,003	,059	,003	,214	,488	,016	,008	,000	,249	,020	,206	,001	,000	,008
19. Kā Tu domā, pēc kāda principa daži skaitļi šajā tabulā ir iekrāsoti zaļā krāsā? (uzdevums par pirmskaitļiem)	,057	,060	,039	,309	,262	,286	,021	,024	,294	,205	,297	,143	,233	,293	,406	,481	,041
	,434	,410	,593	,000	,000	,000	,777	,742	,000	,004	,000	,048	,001	,000	,000	,000	,573
20. Uzdevums par pretpiemēru kvadrātam.	,158	-,089	,092	,059	,060	,124	,024	-,039	,109	,130	,154	,124	,184	,107	,257	,300	,074
	,029	,218	,203	,417	,405	,085	,735	,591	,131	,072	,032	,086	,011	,139	,000	,000	,309
Rezultāts kritiskās domāšanas uzdevumos	,160	,004	,103	,293	,237	,309	,002	,011	,311	,257	,355	,180	,279	,270	,463	,531	,121
	,027	,951	,155	,000	,001	,000	,975	,878	,000	,000	,000	,012	,000	,000	,000	,000	,094
21. Kā rīkosies, ja uzdevumu neizdodas atrisināt uzreiz?	,274	,069	,122	,049	,066	,135	,102	,182	,135	,096	,140	,163	,123	,027	,123	,129	,133
	,000	,342	,091	,494	,359	,062	,156	,011	,062	,185	,052	,023	,089	,712	,089	,074	,065
22. Cik bieži Tev rodas interese noskaidrot vai aprēķināt vēl kaut ko, kas nav prasīts uzdevumā?	,060	,152	,058	,072	,095	,082	-,070	,155	,025	-,164	-,132	,087	-,042	-,052	,038	-,028	,105
	,410	,035	,420	,320	,188	,257	,332	,032	,725	,023	,066	,230	,567	,476	,601	,703	,148
23. Kā rīkotos, ja risinājuma beigās atklātos kļūda?	,154	-,004	,181	,171	,082	,236	,192	,060	,225	,190	,272	,075	,164	,058	,254	,255	,217
	,032	,958	,012	,017	,258	,001	,007	,404	,002	,008	,000	,301	,023	,420	,000	,000	,002
24. Apskatot šo attēlu, vai Tev rodas zinātkāre pārbaudīt, kāds rezultāts sanāk pēdējā rindiņā?	,093	,090	-,050	-,056	-,020	-,064	-,061	,093	,055	,130	,125	,069	,073	,031	,008	,049	,046
	,198	,214	,488	,440	,781	,378	,401	,196	,446	,071	,082	,341	,315	,668	,917	,497	,522
Rezultāts personības īpašības uzdevumos	,272	,116	,170	,106	,082	,188	,100	,224	,228	,145	,224	,171	,186	,063	,236	,246	,239
	,000	,107	,018	,141	,257	,009	,164	,002	,001	,044	,002	,017	,010	,387	,001	,001	,001
25. Vai Tu vari atrisināt jebkuru matemātikas uzdevumu?	,131	,055	,115	,024	,006	,067	,139	,067	,013	,106	,090	,058	,080	-,093	,121	,076	,153
	,070	,448	,110	,740	,939	,353	,055	,355	,863	,144	,211	,421	,271	,200	,095	,296	,034

	1.	2.	3a.	4a.	4b.	3+4	5.	6.	7a.	8a.	7+8	9.	10a.	11a.	12a.	10-12	13.
26. Kā Tu rīkotos, ja Tevis izvēlētais risināšanas paņēmiens novestu strupceļā?	,231	-,001	,154	,097	,006	,160	,118	,081	,110	,219	,213	,079	,197	,116	,241	,291	,139
	,001	,991	,032	,181	,930	,026	,101	,262	,129	,002	,003	,274	,006	,109	,001	,000	,055
27. Jāizdara secinājumi par divām skaitliskām nevienādībām.	,155	-,063	,219	,171	,075	,235	-,019	,146	,129	,272	,264	,063	,058	,103	,356	,310	,134
	,031	,388	,002	,018	,301	,001	,791	,043	,074	,000	,000	,384	,420	,153	,000	,000	,062
28. Jākomentē "pierādījums" tam, ka 2 = 1.	,169	,016	,082	,273	,140	,246	,085	,034	,153	,149	,189	,012	-,008	,047	,247	,193	,154
	,019	,829	,256	,000	,051	,001	,242	,643	,034	,039	,009	,863	,909	,513	,001	,007	,033
Rezultāts pašrefleksijas uzdevumos	,274	-,009	,220	,210	,082	,264	,127	,129	,176	,316	,321	,113	,145	,088	,412	,377	,235
	,000	,899	,002	,003	,258	,000	,078	,074	,015	,000	,000	,118	,044	,225	,000	,000	,001
29. Kā Tu vērtē savas zināšanas matemātikā?	,351	,183	,136	,267	,212	,310	,420	,234	,130	,152	,186	,163	,066	,229	,168	,227	-,025
	,000	,012	,061	,000	,003	,000	,000	,001	,074	,037	,010	,025	,364	,002	,021	,002	,737
30. Kāds ir Tavu matemātisko prasmju līmenis?	,283	,179	,043	,105	,024	,128	,142	,218	,091	,129	,132	,165	-,003	,142	,209	,183	,107
	,000	,013	,557	,147	,743	,077	,049	,002	,207	,074	,067	,022	,969	,050	,004	,011	,140
31. Kā matemātikas skolotāja/-s Tev palīdz vai traucē apgūt matemātiku?	,022	,082	,012	,038	,075	,043	,180	,118	,153	,158	,211	,194	,136	,117	,130	,169	,115
	,764	,271	,877	,615	,315	,561	,015	,113	,039	,033	,004	,009	,068	,117	,079	,023	,124
32. Kā skolas mācību vide Tev palīdz vai traucē apgūt matemātiku?	,034	,056	,063	,017	,063	,073	,084	,133	-,080	,078	,029	,101	,028	,069	,050	,060	,007
	,661	,470	,414	,829	,416	,345	,278	,084	,301	,314	,708	,189	,722	,376	,520	,439	,924

	14.	15.	16.	15+16	17.	18.	19.	20.	18-20	21.	22.	23.	24.	21-24	25.	26.	27.
1. Cik bieži Tev gadās uzminēt nākamo uzdevuma atrisinājuma soli?	,317	,156	,138	,173	,273	,191	,057	,158	,160	,274	,060	,154	,093	,272	,131	,231	,155
	,000	,031	,056	,016	,000	,008	,434	,029	,027	,000	,410	,032	,198	,000	,070	,001	,031
2. Cik bieži, risinot uzdevumu, novērtē rezultātu, pirms veikt aprēķinus?	,311	-,025	,044	,031	,239	-,028	,060	-,089	,004	,069	,152	-,004	,090	,116	,055	-,001	-,063
	,000	,725	,540	,673	,001	,699	,410	,218	,951	,342	,035	,958	,214	,107	,448	,991	,388
3. Cik bieži, risinot uzdevumu, novērtē rezultātu, pirms veikt aprēķinus?	,098	-,015	,193	,153	-,059	,110	,039	,092	,103	,122	,058	,181	-,050	,170	,115	,154	,219
	,173	,841	,007	,034	,413	,127	,593	,203	,155	,091	,420	,012	,488	,018	,110	,032	,002
4a. Paturpini skaitļu virkni 2, 8, 18, … un izskaidro to vārdiem!	,086	,056	,109	,113	,066	,213	,309	,059	,293	,049	,072	,171	-,056	,106	,024	,097	,171
	,233	,440	,132	,119	,362	,003	,000	,417	,000	,494	,320	,017	,440	,141	,740	,181	,018
4b. Ar cik skaitļiem paturpināja skaitļu virkni	-,041	-,046	,060	,030	-,081	,136	,262	,060	,237	,066	,095	,082	-,020	,082	,006	,006	,075
	,567	,530	,408	,677	,262	,059	,000	,405	,001	,359	,188	,258	,781	,257	,939	,930	,301
Rezultāts matemātiskās intuīcijas uzdevumos	,107	,023	,136	,117	,044	,214	,286	,124	,309	,135	,082	,236	-,064	,188	,067	,160	,235
	,138	,754	,060	,105	,540	,003	,000	,085	,000	,062	,257	,001	,378	,009	,353	,026	,001
5. Cik bieži Tev ir problēmas uztvert, kas ir prasīts uzdevumā?	,279	,090	,060	,087	,280	-,090	,021	,024	,002	,102	-,070	,192	-,061	,100	,139	,118	-,019
	,000	,213	,404	,230	,000	,214	,777	,735	,975	,156	,332	,007	,401	,164	,055	,101	,791
6. Cik bieži Tev matemātikas stundās jāpamato savs viedoklis?	,155	,074	,142	,152	,298	,050	,024	-,039	,011	,182	,155	,060	,093	,224	,067	,081	,146
	,031	,305	,049	,035	,000	,488	,742	,591	,878	,011	,032	,404	,196	,002	,355	,262	,043
7. Sastādi matemātisku uzdevumu par skolēnu skaitu un atrisini to!	,061	,166	,192	,219	,028	,174	,294	,109	,311	,135	,025	,225	,055	,228	,013	,110	,129
	,400	,021	,007	,002	,701	,016	,000	,131	,000	,062	,725	,002	,446	,001	,863	,129	,074
8. Uzraksti īsu plānu, kā Tu noteiktu patvaļīga četrstūra ABCD laukumu!	,040	-,011	,138	,105	,077	,189	,205	,130	,257	,096	-,164	,190	,130	,145	,106	,219	,272
	,585	,882	,056	,147	,285	,008	,004	,072	,000	,185	,023	,008	,071	,044	,144	,002	,000
Rezultāts problēmu risināšanas uzdevumos	,080	,102	,214	,209	,063	,263	,297	,154	,355	,140	-,132	,272	,125	,224	,090	,213	,264
	,270	,159	,003	,003	,381	,000	,000	,032	,000	,052	,066	,000	,082	,002	,211	,003	,000
9. Cik bieži matemātikas stundās veidojat matemātisku modeli reālas dzīves problēmai?	,098	-,005	-,118	-,109	,094	,083	,143	,124	,180	,163	,087	,075	,069	,171	,058	,079	,063
	,177	,949	,102	,131	,196	,249	,048	,086	,012	,023	,230	,301	,341	,017	,421	,274	,384

	14.	15.	16.	15+16	17.	18.	19.	20.	18-20	21.	22.	23.	24.	21-24	25.	26.	27.
10. Kādus procesus var aprakstīt ar funkciju?	,112	,108	,052	,081	,115	,168	,233	,184	,279	,123	-,042	,164	,073	,186	,080	,197	,058
	,119	,136	,474	,265	,110	,020	,001	,011	,000	,089	,567	,023	,315	,010	,271	,006	,420
11. Vienādsānu trijstūra viena mala ir 8 cm un cita mala ir 5 cm gara. Aprēķini trijstūra perimetru	,049	,108	,295	,283	-,029	,091	,293	,107	,270	,027	-,052	,058	,031	,063	-,093	,116	,103
	,500	,135	,000	,000	,689	,206	,000	,139	,000	,712	,476	,420	,668	,387	,200	,109	,153
12. Attēlā parādīts istabas plāns. Zināms, ka istabas platums ir 5 metri. Nosaki lielākā galda izmērus!	,139	,220	,318	,349	,078	,233	,406	,257	,463	,123	,038	,254	,008	,236	,121	,241	,356
	,053	,002	,000	,000	,278	,001	,000	,000	,000	,089	,601	,000	,917	,001	,095	,001	,000
Rezultāts matemātiskās modelēšanas uzdevumos	,138	,225	,343	,369	,077	,249	,481	,300	,531	,129	-,028	,255	,049	,246	,076	,291	,310
	,055	,002	,000	,000	,285	,000	,000	,000	,000	,074	,703	,000	,497	,001	,296	,000	,000
13. Vai risinot uzdevumus izmanto enciklopēdijas, rokasgrāmatas vai citus informācijas avotus?	,084	,017	-,003	-,002	,012	,190	,041	,074	,121	,133	,105	,217	,046	,239	,153	,139	,134
	,247	,812	,969	,980	,868	,008	,573	,309	,094	,065	,148	,002	,522	,001	,034	,055	,062
14. Cik bieži Tu spēj uzdevumu pateikt saviem vārdiem, interpretēt?	1,000	,059	,127	,130	,551	,040	,097	,019	,090	,271	,160	,148	,007	,239	,181	,160	,092
		,413	,078	,072	,000	,581	,179	,788	,212	,000	,027	,040	,922	,001	,012	,026	,201
15. Lietojot divus informācijas avotus, aprēķini, cik % no Latvijas teritorijas klāj skujkoku meži.	,059	1,000	,212	,574	,071	,083	,090	,188	,166	,044	-,052	,184	-,004	,136	,021	,234	,071
	,413		,003	,000	,326	,254	,214	,009	,021	,542	,474	,011	,954	,060	,771	,001	,327
16. Aptuveni katram 9. Latvijas iedzīvotājam ir Instagram profils. Cik Instagram lietotāju ir Latvijā?	,127	,212	1,000	,919	-,076	,149	,232	,107	,266	-,031	-,080	,366	,037	,193	,001	,198	,316
	,078	,003		,000	,296	,038	,001	,140	,000	,664	,266	,000	,612	,007	,992	,006	,000
Rezultāts uzdevumos, kuri pārbauda komunikācijas prasmes	,130	,574	,919	1,000	-,028	,149	,222	,153	,274	-,014	-,078	,370	,030	,209	,007	,252	,287
	,072	,000	,000		,701	,038	,002	,034	,000	,847	,278	,000	,682	,004	,923	,000	,000
17. Cik bieži Tu spēj argumentēt savu risinājumu vai viedokli?	,551	,071	-,076	-,028	1,000	-,026	,011	,023	,013	,369	,156	,069	,113	,275	,173	,128	,025
	,000	,326	,296	,701		,719	,875	,746	,860	,000	,031	,343	,118	,000	,016	,077	,729
18. Četrstūra diagonāles ir vienlaikus arī četrstūra leņķu bisektrises. Kā Tu pamatotu, ka šis četrstūris ir rombs?	,040	,083	,149	,149	-,026	1,000	,170	,115	,505	,175	,149	,267	,111	,359	,106	,194	,165
	,581	,254	,038	,038	,719		,018	,112	,000	,015	,039	,000	,124	,000	,142	,007	,022
19. Kā Tu domā, pēc kāda principa daži skaitļi šajā tabulā ir iekrāsoti zaļā krāsā? (uzdevums par pirmskaitļiem)	,097	,090	,232	,222	,011	,170	1,000	,217	,817	,062	-,016	,191	-,095	,093	,013	,164	,215
	,179	,214	,001	,002	,875	,018		,002	,000	,389	,824	,008	,188	,199	,857	,022	,003

	14.	15.	16.	15+16	17.	18.	19.	20.	18-20	21.	22.	23.	24.	21-24	25.	26.	27.
20. Uzdevums par pretpiemēru kvadrātam.	,019	,188	,107	,153	,023	,115	,217	1,000	,613	,086	-,056	,252	,086	,221	,005	,315	,204
	,788	,009	,140	,034	,746	,112	,002		,000	,236	,440	,000	,236	,002	,948	,000	,004
Rezultāts kritiskās domāšanas uzdevumos	,090	,166	,266	,274	,013	,505	,817	,613	1,000	,136	,021	,355	,017	,302	,042	,308	,296
	,212	,021	,000	,000	,860	,000	,000	,000		,060	,774	,000	,815	,000	,563	,000	,000
21. Kā rīkosies, ja uzdevumu neizdodas atrisināt uzreiz?	,271	,044	-,031	-,014	,369	,175	,062	,086	,136	1,000	,203	,153	,022	,560	,160	,203	,154
	,000	,542	,664	,847	,000	,015	,389	,236	,060		,005	,033	,758	,000	,026	,005	,033
22. Cik bieži Tev rodas interese noskaidrot vai aprēķināt vēl kaut ko, kas nav prasīts uzdevumā?	,160	-,052	-,080	-,078	,156	,149	-,016	-,056	,021	,203	1,000	-,100	,139	,431	,097	,004	-,034
	,027	,474	,266	,278	,031	,039	,824	,440	,774	,005		,167	,054	,000	,178	,959	,636
23. Kā rīkotos, ja risinājuma beigās atklātos kļūda?	,148	,184	,366	,370	,069	,267	,191	,252	,355	,153	-,100	1,000	,055	,614	,172	,335	,353
	,040	,011	,000	,000	,343	,000	,008	,000	,000	,033	,167		,449	,000	,017	,000	,000
24. Apskatot šo attēlu, vai Tev rodas zinātkāre pārbaudīt, kāds rezultāts sanāk pēdējā rindiņā?	,007	-,004	,037	,030	,113	,111	-,095	,086	,017	,022	,139	,055	1,000	,510	,162	,117	,073
	,922	,954	,612	,682	,118	,124	,188	,236	,815	,758	,054	,449		,000	,024	,106	,313
Rezultāts personības īpašības uzdevumos	,239	,136	,193	,209	,275	,359	,093	,221	,302	,560	,431	,614	,510	1,000	,314	,340	,308
	,001	,060	,007	,004	,000	,000	,199	,002	,000	,000	,000	,000	,000		,000	,000	,000
25. Vai Tu vari atrisināt jebkuru matemātikas uzdevumu?	,181	,021	,001	,007	,173	,106	,013	,005	,042	,160	,097	,172	,162	,314	1,000	,004	,191
	,012	,771	,992	,923	,016	,142	,857	,948	,563	,026	,178	,017	,024	,000		,951	,008
26. Kā Tu rīkotos, ja Tevis izvēlētais risināšanas paņēmiens novestu strupceļā?	,160	,234	,198	,252	,128	,194	,164	,315	,308	,203	,004	,335	,117	,340	,004	1,000	,281
	,026	,001	,006	,000	,077	,007	,022	,000	,000	,005	,959	,000	,106	,000	,951		,000
27. Jāizdara secinājumi par divām skaitliskām nevienādībām.	,092	,071	,316	,287	,025	,165	,215	,204	,296	,154	-,034	,353	,073	,308	,191	,281	1,000
	,201	,327	,000	,000	,729	,022	,003	,004	,000	,033	,636	,000	,313	,000	,008	,000	
28. Jākomentē "pierādījums" tam, ka 2 = 1.	,103	,073	,150	,151	,074	,180	,236	,078	,257	,217	,036	,162	-,068	,168	,076	,229	,272
	,153	,315	,038	,036	,303	,012	,001	,281	,000	,002	,624	,024	,347	,020	,291	,001	,000
Rezultāts pašrefleksijas uzdevumos	,219	,177	,296	,311	,170	,269	,255	,269	,381	,298	,034	,445	,121	,477	,474	,659	,741
	,002	,014	,000	,000	,018	,000	,000	,000	,000	,000	,637	,000	,092	,000	,000	,000	,000

	14.	15.	16.	15+16	17.	18.	19.	20.	18-20	21.	22.	23.	24.	21-24	25.	26.	27.
29. Kā Tu vērtē savas zināšanas matemātikā?	,320	,066	,200	,194	,366	,070	,140	,116	,172	,217	,166	,166	,153	,308	,213	,162	,078
	,000	,369	,006	,008	,000	,337	,055	,112	,018	,003	,023	,023	,035	,000	,003	,026	,289
30. Kāds ir Tavu matemātisko prasmju līmenis?	,336	,097	,249	,245	,197	,142	,011	,056	,094	,116	,189	,159	,204	,294	,117	,267	,112
	,000	,183	,000	,001	,006	,049	,883	,439	,196	,110	,009	,028	,004	,000	,107	,000	,121
31. Kā matemātikas skolotāja/-s Tev palīdz vai traucē apgūt matemātiku?	,101	,079	,041	,055	,005	,032	,051	,128	,097	,147	,069	,183	,063	,210	,148	,148	,138
	,176	,286	,585	,464	,949	,671	,498	,086	,191	,048	,354	,014	,398	,004	,046	,046	,063
32. Kā skolas mācību vide Tev palīdz vai traucē apgūt matemātiku?	,166	,002	-,033	-,024	,039	,062	-,039	,041	,012	,081	,097	-,095	,002	-,001	,142	,055	,039
	,031	,980	,673	,755	,615	,424	,615	,592	,873	,292	,210	,219	,984	,991	,065	,477	,619

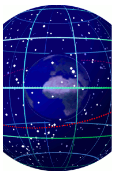
	28.	25-28	29.	30.	31.	32.
1. Cik bieži Tev gadās uzminēt nākamo uzdevuma atrisinājuma soli?	,169	,274	,351	,283	,022	,034
	,019	,000	,000	,000	,764	,661
2. Cik bieži, risinot uzdevumu, novērtē rezultātu, pirms veikt aprēķinus?	,016	-,009	,183	,179	,082	,056
	,829	,899	,012	,013	,271	,470
3. Cik bieži, risinot uzdevumu, novērtē rezultātu, pirms veikt aprēķinus?	,082	,220	,136	,043	,012	,063
	,256	,002	,061	,557	,877	,414
4a. Paturpini skaitļu virkni 2, 8, 18, … un izskaidro to vārdiem!	,273	,210	,267	,105	,038	,017
	,000	,003	,000	,147	,615	,829
4b. Ar cik skaitļiem paturpināja skaitļu virkni	,140	,082	,212	,024	,075	,063
	,051	,258	,003	,743	,315	,416
Rezultāts matemātiskās intuīcijas uzdevumos	,246	,264	,310	,128	,043	,073
	,001	,000	,000	,077	,561	,345
5. Cik bieži Tev ir problēmas uztvert, kas ir prasīts uzdevumā?	,085	,127	,420	,142	,180	,084
	,242	,078	,000	,049	,015	,278
6. Cik bieži Tev matemātikas stundās jāpamato savs viedoklis?	,034	,129	,234	,218	,118	,133
	,643	,074	,001	,002	,113	,084
7. Sastādi matemātisku uzdevumu par skolēnu skaitu un atrisini to!	,153	,176	,130	,091	,153	-,080
	,034	,015	,074	,207	,039	,301
8. Uzraksti īsu plānu, kā Tu noteiktu patvaļīga četrstūra ABCD laukumu!	,149	,316	,152	,129	,158	,078
	,039	,000	,037	,074	,033	,314
Rezultāts problēmu risināšanas uzdevumos	,189	,321	,186	,132	,211	,029
	,009	,000	,010	,067	,004	,708
9. Cik bieži matemātikas stundās veidojat matemātisku modeli reālas dzīves problēmai?	,012	,113	,163	,165	,194	,101
	,863	,118	,025	,022	,009	,189
10. Kādus procesus var aprakstīt ar funkciju?	-,008	,145	,066	-,003	,136	,028
	,909	,044	,364	,969	,068	,722
11. Vienādsānu trijstūra viena mala ir 8 cm un cita mala ir 5 cm gara. Aprēķini trijstūra perimetru	,047	,088	,229	,142	,117	,069
	,513	,225	,002	,050	,117	,376
12. Attēlā parādīts istabas plāns. Zināms, ka istabas platums ir 5 metri. Nosaki lielākā galda izmērus!	,247	,412	,168	,209	,130	,050
	,001	,000	,021	,004	,079	,520
Rezultāts matemātiskās modelēšanas uzdevumos	,193	,377	,227	,183	,169	,060
	,007	,000	,002	,011	,023	,439
13. Vai risinot uzdevumus izmanto enciklopēdijas, rokasgrāmatas vai citus informācijas avotus?	,154	,235	-,025	,107	,115	,007
	,033	,001	,737	,140	,124	,924
14. Cik bieži Tu spēj uzdevumu pateikt saviem vārdiem, interpretēt?	,103	,219	,320	,336	,101	,166
	,153	,002	,000	,000	,176	,031

	28.	25-28	29.	30.	31.	32.
15. Lietojot divus informācijas avotus, aprēķini, cik % no Latvijas teritorijas klāj skujkoku meži.	,073	,177	,066	,097	,079	,002
	,315	,014	,369	,183	,286	,980
16. Aptuveni katram 9. Latvijas iedzīvotājam ir Instagram profils. Cik Instagram lietotāju ir Latvijā?	,150	,296	,200	,249	,041	-,033
	,038	,000	,006	,000	,585	,673
Rezultāts uzdevumos, kuri pārbauda komunikācijas prasmes	,151	,311	,194	,245	,055	-,024
	,036	,000	,008	,001	,464	,755
17. Cik bieži Tu spēj argumentēt savu risinājumu vai viedokli?	,074	,170	,366	,197	,005	,039
	,303	,018	,000	,006	,949	,615
18. Četrstūra diagonāles ir vienlaikus arī četrstūra leņķu bisektrises. Kā Tu pamatotu, ka šis četrstūris ir rombs?	,180	,269	,070	,142	,032	,062
	,012	,000	,337	,049	,671	,424
19. Kā Tu domā, pēc kāda principa daži skaitļi šajā tabulā ir iekrāsoti zaļā krāsā? (uzdevums par pirmskaitļiem)	,236	,255	,140	,011	,051	-,039
	,001	,000	,055	,883	,498	,615
20. Uzdevums par pretpiemēru kvadrātam.	,078	,269	,116	,056	,128	,041
	,281	,000	,112	,439	,086	,592
Rezultāts kritiskās domāšanas uzdevumos	,257	,381	,172	,094	,097	,012
	,000	,000	,018	,196	,191	,873
21. Kā rīkosies, ja uzdevumu neizdodas atrisināt uzreiz?	,217	,298	,217	,116	,147	,081
	,002	,000	,003	,110	,048	,292
22. Cik bieži Tev rodas interese noskaidrot vai aprēķināt vēl kaut ko, kas nav prasīts uzdevumā?	,036	,034	,166	,189	,069	,097
	,624	,637	,023	,009	,354	,210
23. Kā rīkotos, ja risinājuma beigās atklātos kļūda?	,162	,445	,166	,159	,183	-,095
	,024	,000	,023	,028	,014	,219
24. Apskatot šo attēlu, vai Tev rodas zinātkāre pārbaudīt, kāds rezultāts sanāk pēdējā rindiņā?	-,068	,121	,153	,204	,063	,002
	,347	,092	,035	,004	,398	,984
Rezultāts personības īpašības uzdevumos	,168	,477	,308	,294	,210	-,001
	,020	,000	,000	,000	,004	,991
25. Vai Tu vari atrisināt jebkuru matemātikas uzdevumu?	,076	,474	,213	,117	,148	,142
	,291	,000	,003	,107	,046	,065
26. Kā Tu rīkotos, ja Tevis izvēlētais risināšanas paņēmiens novestu strupceļā?	,229	,659	,162	,267	,148	,055
	,001	,000	,026	,000	,046	,477
27. Jāizdara secinājumi par divām skaitliskām nevienādībām.	,272	,741	,078	,112	,138	,039
	,000	,000	,289	,121	,063	,619
28. Jākomentē "pierādījums" tam, ka 2 = 1.	1,000	,544	,072	,106	,045	-,068
		,000	,323	,145	,548	,377
Rezultāts pašrefleksijas uzdevumos	,544	1,000	,219	,255	,203	,070
	,000		,002	,000	,006	,366

	28.	25-28	29.	30.	31.	32.
29. Kā Tu vērtē savas zināšanas matemātikā?	,072	,219	1,000	,382	,166	,100
	,323	,002		,000	,026	,199
30. Kāds ir Tavu matemātisko prasmju līmenis?	,106	,255	,382	1,000	,110	,221
	,145	,000	,000		,139	,004
31. Kā matemātikas skolotāja/-s Tev palīdz vai traucē apgūt matemātiku?	,045	,203	,166	,110	1,000	,213
	,548	,006	,026	,139		,006
32. Kā skolas mācību vide Tev palīdz vai traucē apgūt matemātiku?	-,068	,070	,100	,221	,213	1,000
	,377	,366	,199	,004	,006	

Matemātiskā intuīcija

Problēmu risināšana



Matemātiskā modelēšana

Matemātiskās valodas lietošana, komunikācija

Kritiskā domāšana (spriešana)

Personības īpašības

Pašrefleksija