

1000

Artis.

LATVIJAS
UNIVERSITĀTES RAKSTI
ACTA UNIVERSITATIS LATVIENSIS

INŽENIERZINĀTŅU FAKULTĀTES
SERIJA

II. SEJUMS
TOMUS

№ 1—2

LATVIJAS UNIVERSITĀTE

R I G Ā, 1 9 3 6

$\frac{LU}{144}$

8

LATVIJAS UNIVERSITĀTES RAKSTI
ACTA UNIVERSITATIS LATVIENSIS

INŽENIERZINĀTŅU FAKULTĀTES SERIJA II. 1.

Aus Rautenzügen gebildete Dreiecksketten.

A. Buchholtz.

Als Mittel zur photogrammetrischen Überbrückung festpunktloser Räume erscheint die Radialtriangulation namentlich für die kartographische Erschliessung unzugänglicher Gebiete sehr geeignet. Es sind denn auch in letzter Zeit seitens kolonialer Vermessungsämter grössere diesbezügliche Versuchsarbeiten durchgeführt worden, und es liegen bereits sehr interessante Veröffentlichungen über solche Versuche und deren Ergebnisse vor¹⁾.

Gerade bei luftphotogrammetrischen Arbeiten zwecks kartographischer Erschliessung unzugänglichen Gebiets mag es nicht selten vorkommen, dass man sich in der Lage sieht, vom Rande bereits vermessenen Landes mit Rautenzügen in unzugängliches Gebiet vorstossen zu müssen, wo keine Möglichkeit besteht, die Enden der Rautenzüge an terrestrisch bestimmte Festpunkte anzuschliessen.

Wie an anderer Stelle²⁾ ausführlich aufgezeigt worden ist, sind nur an einem Ende Basisanschluss habende „offene“ Rautenzüge hinsichtlich der Fehlerfortpflanzung besonders unvorteilhaft. Die mittleren Koordinaten- und Lagefehler wachsen mit zunehmendem Abstand des betreffenden Punkts vom Anfang des Rautenzugs ständig an, und zwar ungefähr proportional der $1\frac{1}{2}$ Potenz dieses Abstands. Sie können daher — selbst bei sorgfältigster Richtungsmessung — schon in mässig langen Rautenzügen Beträge erreichen, die sogar bei sehr bescheidenen Genauigkeitsansprüchen das zulässige Mass überschreiten. Besonders gross sind die Längsfehler in der Richtung des Rautenzugs; dieselben verhalten sich zu den entsprechenden Querfehlern wie $\sqrt{5} : 1$.

Lassen sich keine ergänzenden Festpunkte beschaffen, welche die Umwandlung des offenen Rautenzugs in einen solchen mit Festpunkt- oder Basisanschluss an beiden Enden ermöglichen, so kann man immerhin unter gewissen Umständen eine recht beträchtliche Verkleinerung der Längsfehler dadurch erzielen, dass man eine oder mehrere Polygonseiten des Rautenzugs wenigstens der Länge nach terrestrisch bestimmt. Aber ein solches Verfahren kommt natürlich nur dann in Betracht, wenn die Möglichkeit vorliegt, im Gebiet des Rautenzugs an den betreffenden Stellen wenigstens Längenmessungen terrestrisch auszuführen. Im hier vorausgesetzten Fall völlig unzugänglichen Geländes muss also nach andern Mitteln zur Steigerung der Genauigkeit gesucht werden.

Es ist bereits darauf hingewiesen worden, dass in jedem beliebigen Radialpunkt des Rautenzugs der Querfehler $\sqrt{5}$ mal kleiner als der entsprechende Längsfehler ist, dass also der Rautenzug die Richtung erheblich besser hält, als den Massstab.

Aus diesem Umstand lässt sich auf eine Steigerung der allgemeinen Genauigkeit hinzielender Nutzen ziehen, indem man mehrere Rautenzüge so zusammenfügt, dass die Verbindungslinien ihrer Endpunkte eine Dreieckskette bilden, deren durch vorhandene Festpunkte bestimmte Anfangsseite als Basis dient. Die Winkel einer solchen Dreieckskette können als Resultierende folgender Komponenten ermittelt werden: 1) der unmittelbar aus den Bildern zu entnehmenden Winkel zwischen den in den betreffenden Dreieckspunkten zusammenlaufenden Seiten der Rautenzüge, 2) der auf diese Seiten bezogenen Richtungen zu den entgegengesetzten Endpunkten der betreffenden Rautenzüge. Die zuletzt erwähnten Komponenten lassen sich aus den einzelnen in sich ausgeglichenen Rautenzügen bestimmen; die Genauigkeit dieser Richtungsbestimmung ist im wesentlichen durch den verhältnismässig kleinen Querfehler des Rautenzugs in dessen Endpunkt bedingt.

Im folgenden wird vorausgesetzt, dass die erwähnte Dreieckskette aus gleichseitigen Dreiecken so zusammengefügt sei, dass die Seiten l zwei parallele Geraden bilden, zwischen denen die übrigen Seiten q zickzackförmig verlaufen (Abb. 1). Die annähernd den Richtungen der Dreiecksseiten folgenden Rautenzüge, bzw. die durch deren Radialpunkte gebildeten Polygonzüge (l) und (q) müssen in den Netzpunkten T so verknotet sein, dass aus den be-

treffenden Bildern, bzw. den einzeln für sich ausgeglichenen Rautenzügen sämtliche Winkel des Dreiecksnetzes bestimmt werden können.

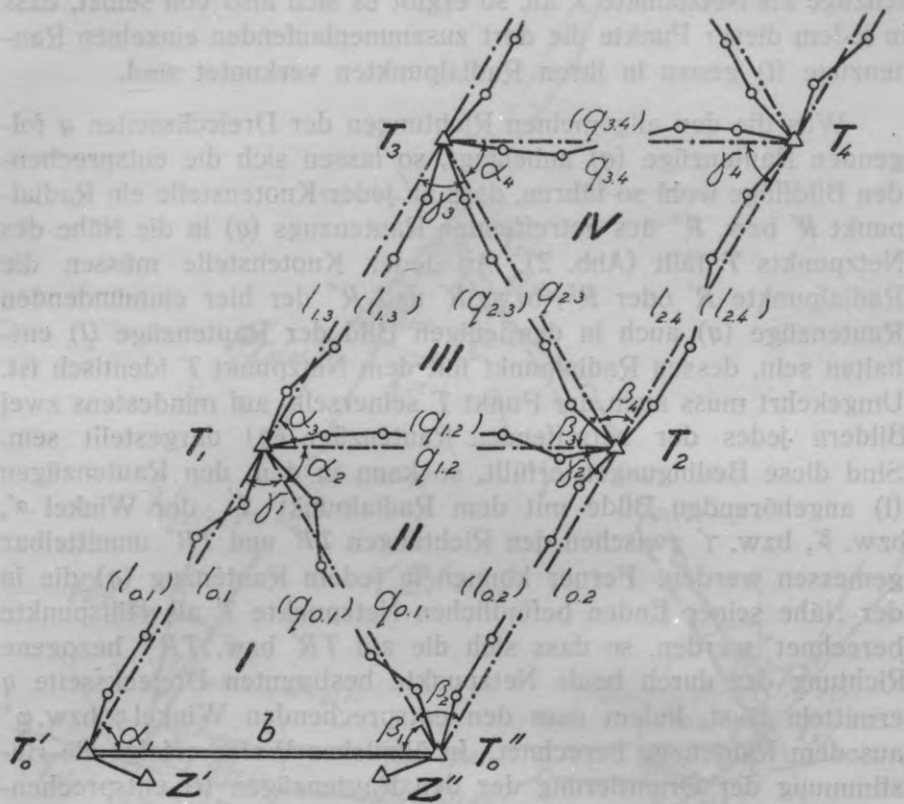


Abb. 1.

Selbstverständlich ist es praktisch nicht möglich, sämtliche in einem gegebenen Netzpunkt zu verknotenden Rautenzüge so anzulegen, dass dieselben alle an der Verknotungsstelle einen dem betreffenden Netzpunkt entsprechenden gemeinsamen Radialpunkt haben, wie das in Abb. 1 der Einfachheit halber angenommen ist.

Eine Ausnahme in dieser Hinsicht bilden nur die den Dreiecksseiten I entsprechenden Rautenzüge (I). Die den in einer Geraden liegenden Dreiecksseiten I entsprechenden Rautenzüge dürften

wohl normalerweise flugtechnisch als ein ununterbrochen durchlaufender Rautenzug behandelt werden. Nimmt man an geeigneten Stellen gewählte Radialpunkte beider solcher durchlaufenden Rautenzüge als Netzpunkte T an, so ergibt es sich also von selbst, dass in jedem dieser Punkte die dort zusammenlaufenden einzelnen Rautenzüge (l) genau in ihren Radialpunkten verknotet sind.

Was die den allgemeinen Richtungen der Dreiecksseiten q folgenden Rautenzüge (q) anbelangt, so lassen sich die entsprechenden Bildflüge wohl so führen, dass an jeder Knotenstelle ein Radialpunkt R' bzw. R'' des betreffenden Rautenzugs (q) in die Nähe des Netzpunkts T fällt (Abb. 2). An jeder Knotenstelle müssen die Radialpunkte R' oder R'' , bzw. R' und R'' der hier einmündenden Rautenzüge (q) auch in demjenigen Bild der Rautenzüge (l) enthalten sein, dessen Radialpunkt mit dem Netzpunkt T identisch ist. Umgekehrt muss auch der Punkt T seinerseits auf mindestens zwei Bildern jedes der betreffenden Rautenzüge (q) dargestellt sein. Sind diese Bedingungen erfüllt, so kann in dem den Rautenzügen (l) angehörenden Bilde mit dem Radialpunkt T der Winkel α' , bzw. β' , bzw. γ' zwischen den Richtungen TR' und TR'' unmittelbar gemessen werden. Ferner können in jedem Rautenzug (q) die in der Nähe seiner Enden befindlichen Netzpunkte T als Hilfspunkte berechnet werden, so dass sich die auf TR' bzw. TR'' bezogene Richtung der durch beide Netzpunkte bestimmten Dreiecksseite q ermitteln lässt, indem man den entsprechenden Winkel φ' bzw. φ'' aus dem Rautenzug berechnet. In ähnlicher Weise erfolgt die Bestimmung der Orientierung der den Rautenzügen (l) entsprechenden Dreiecksseiten l in Bezug auf die in den betreffenden Netzpunkten T auslaufenden Polygonseiten dieser Rautenzüge.

Bezüglich der Anfangspunkte des Dreiecksnetzes T_0' und T_0'' wird vorausgesetzt, dass dieselben in zugänglichem Gelände liegen, dort sorgfältig identifiziert und ihrer Lage nach so genau bestimmt sind, dass die Verbindungslinie $T_0'T_0''$ als nach Länge, Richtung und Lage praktisch fehlerfrei gegebene Basis b gelten kann (s. Abb. 1). Ferner wird angenommen, dass in den Bildern mit den Radialpunkten T_0' und T_0'' u. a. die der Lage nach terrestrisch bestimmten Punkte Z' bzw. Z'' identifiziert sind, und dass die Richtungen von T_0' nach Z' und von T_0'' nach Z'' ebenfalls als praktisch fehlerfrei gegeben gelten können. Dann lassen sich die Richtungen von T_0' und T_0'' nach den

benachbarten Radialpunkten der entsprechenden Rautenzüge ($l_{0.1}$), ($l_{0.2}$) und ($q_{0.1}$) durch Messung je eines Winkels in den Radialpunkten $T_{0'}$ bzw. $T_{0''}$ der betreffenden Bilder unmittelbar bestimmen.

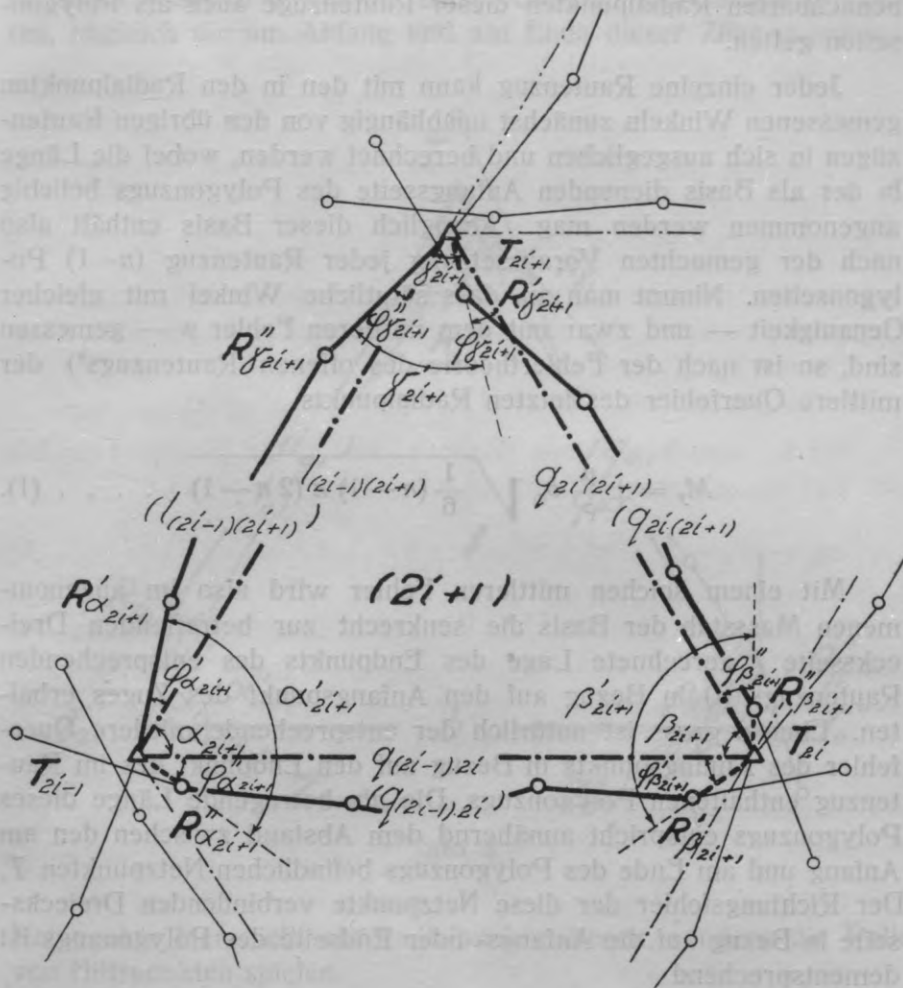


Abb. 2.

Bezüglich der Ermittlung der Dreieckswinkel α , β , γ und der Bestimmung der entsprechenden Gewichte sei zunächst die allgemeine Voraussetzung gemacht, dass die längs den einzelnen Dreiecksseiten verlaufenden Rautenzüge zwischen den betreffenden

Netzpunkten T sämtlich die gleiche Anzahl n von annähernd gleichlangen Polygonseiten haben. Hierbei mögen in den Rautenzügen (q) die Verbindungslinien zwischen den Netzpunkten und den ihnen benachbarten Radialpunkten dieser Rautenzüge auch als Polygonseiten gelten.

Jeder einzelne Rautenzug kann mit den in den Radialpunkten gemessenen Winkeln zunächst unabhängig von den übrigen Rautenzügen in sich ausgeglichen und berechnet werden, wobei die Länge b_0 der als Basis dienenden Anfangsseite des Polygonzugs beliebig angenommen werden mag. Abzüglich dieser Basis enthält also nach der gemachten Voraussetzung jeder Rautenzug $(n-1)$ Polygonseiten. Nimmt man an, dass sämtliche Winkel mit gleicher Genauigkeit — und zwar mit dem mittleren Fehler μ — gemessen sind, so ist nach der Fehlertheorie des offenen Rautenzugs³⁾ der mittlere Querfehler des letzten Radialpunkts

$$M_y = \pm \frac{\mu}{\rho} b_0 \sqrt{\frac{1}{6} (n-1) n (2n-1)} \dots (1).$$

Mit einem solchen mittleren Fehler wird also im angenommenen Massstab der Basis die senkrecht zur betreffenden Dreiecksseite l gerechnete Lage des Endpunkts des entsprechenden Rautenzugs (l) in Bezug auf den Anfangspunkt des Zuges erhalten. Ebenso gross ist natürlich der entsprechende mittlere Querfehler des Anfangspunkts in Bezug auf den Endpunkt des im Rautenzug enthaltenen Polygonzugs. Die nb_0 betragende Länge dieses Polygonzugs entspricht annähernd dem Abstand zwischen den am Anfang und am Ende des Polygonzugs befindlichen Netzpunkten T . Der Richtungsfehler der diese Netzpunkte verbindenden Dreiecksseite in Bezug auf die Anfangs- oder Endseite des Polygonzugs ist dementsprechend

$$m = \pm \frac{M_y}{n b_0} \rho = \pm \mu \sqrt{\frac{(n-1)(2n-1)}{6n}} \dots (2).$$

Mit diesem mittleren Fehler lassen sich also die zwischen einer Dreiecksseite l und der anliegenden Anfangs- bzw. Endseite des im entsprechenden Rautenzug (l) enthaltenen Polygonzugs

φ' und φ'' — darstellen. Die erste dieser Komponenten wird unmittelbar im entsprechenden Bilde gemessen, also mit demselben mittleren Fehler μ erhalten, mit dem die Winkelmessung für die einzelnen Rautenzüge erfolgt. Die übrigen Komponenten φ' und φ'' erscheinen als Winkel zwischen den Dreiecksseiten und den Anfangs- oder Endseiten der in den entsprechenden Rautenzügen enthaltenen Polygonzüge. Diese Komponenten werden aus den zuvor in sich ausgeglichenen und berechneten Rautenzügen durch Rechnung ermittelt und mit dem durch die Formel (2) bestimmten mittleren Fehler erhalten. Eine Ausnahme in dieser Hinsicht bilden die Komponenten φ''_{α_1} und φ'_{β_1} der Winkel α_1 bzw. β_1 des die Basis b enthaltenden Dreiecks I (Abb. 3). Diesen Komponenten, welche den Unterschied zwischen den als praktisch fehlerfrei geltenden Richtungen $T_{O'} T_{O''}$ und $T_{O'} Z'$ bzw. $T_{O''} T_{O'}$ und $T_{O''} Z''$ darstellen, ist dementsprechend der mittlere Fehler 0 zuzuschreiben.

Für die unausgeglichenen Winkel α_1 und β_1 des Dreiecks I ergeben sich also die mittleren Fehler

$$m_{\alpha_1} = m_{\beta_1} = \pm \sqrt{\mu^2 + m^2} = \pm \mu \sqrt{1 + \frac{(n-1)(2n-1)}{6n}} \dots (3).$$

Dagegen hat man für den Winkel γ_1 desselben Dreiecks den mittleren Fehler

$$m_{\gamma_1} = \pm \sqrt{\mu^2 + 2m^2} = \pm \mu \sqrt{1 + \frac{(n-1)(2n-1)}{3n}} \dots (4).$$

Dieselbe Formel (4) gilt auch für die mittleren Fehler der Winkel α , β , γ aller übrigen Dreiecke.

Führt man die Bezeichnung

$$g = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n} \dots \dots \dots (5)$$

ein, und nimmt man μ als mittleren Gewichtseinheitsfehler an, so ergeben sich also für die in angedeuteter Weise ermittelten Winkel α , β , γ der Dreieckskette folgende Gewichtsreziproken

$$\frac{1}{p_\alpha}, \frac{1}{p_\beta}, \frac{1}{p_\gamma}.$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{im Dreieck I: } \frac{1}{p_{\alpha_1}} = 1 + g \\
 \frac{1}{p_{\beta_1}} = 1 + g \\
 \frac{1}{p_{\gamma_1}} = 1 + 2g \\
 \\
 \text{im Dreieck II: } \frac{1}{p_{\alpha_2}} = 1 + 2g \\
 \frac{1}{p_{\beta_2}} = 1 + 2g \\
 \frac{1}{p_{\gamma_2}} = 1 + 2g \\
 \\
 \text{im Dreieck III: } \frac{1}{p_{\alpha_3}} = 1 + 2g \\
 \frac{1}{p_{\beta_3}} = 1 + 2g \\
 \frac{1}{p_{\gamma_3}} = 1 + 2g \\
 \dots \dots \dots
 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (6).$$

Die unter Berücksichtigung dieser Gewichte vorzunehmende Ausgleichung der Winkel α, β, γ des Dreiecksnetzes gestaltet sich sehr einfach, da ausser einer für jedes einzelne Dreieck zu erfüllenden Bedingung der Art

$$[\alpha] + [\beta] + [\gamma] - 180^\circ = 0 \dots \dots \dots (7)^4$$

keine sonstigen Bedingungen bestehen.

Mit den ausgeglichenen Winkeln $[\alpha], [\beta], [\gamma]$ und der gegebenen Basis b lassen sich dann die Koordinaten der einzelnen Netzknotenpunkte T berechnen. Damit sind also für jeden einzelnen Rautenzug (l) und (q) an dessen Anfang und Ende zu Anschlusszwecken geeignete Festpunkte niederer Ordnung beschafft, zwischen denen die einzelnen Rautenzüge, jeder für sich, in üblicher Weise eingeschaltet werden können.

Im folgenden soll nun eine theoretische Genauigkeitsuntersuchung der in eingangs angedeuteter Weise aus Rautenzügen gebildeten Dreieckskette vorgenommen werden.

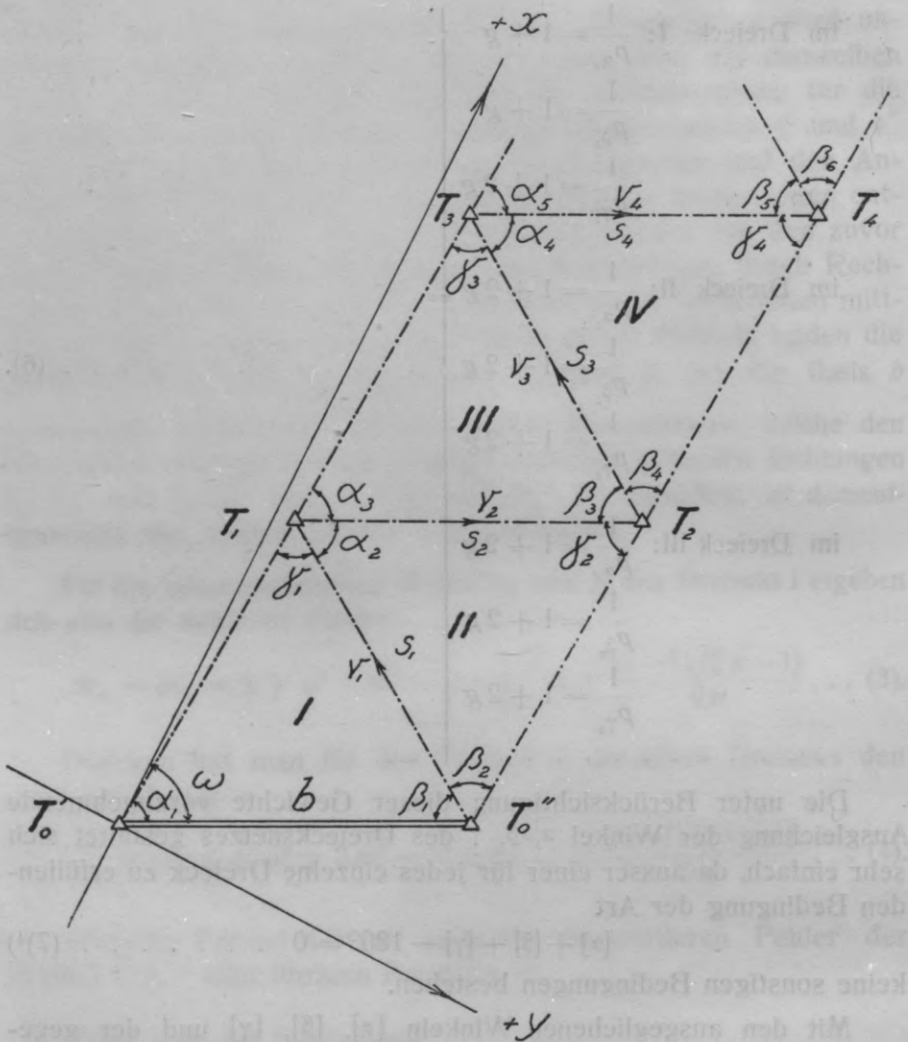


Abb. 4.

Die mit den ausgeglichenen Dreieckswinkeln $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\gamma]$ berechneten Koordinaten x , y der Netzpunkte T mögen auf ein Achsensystem bezogen sein, dessen Ursprung im linken Basisendpunkt T_0' liegt, wobei die annähernd in der Richtung der Dreiecksseite $T_0'T_1$ verlaufende x -Achse mit der Basis den fehlerfrei angenommenen Winkel ω einschliesst (Abb. 4). Unter solchen Umständen

den gibt die x -Achse die beiläufige Längsrichtung der in gestreckter Form gedachten Dreieckskette an. Die mittleren Fehler der mit den ausgeglichenen Winkeln berechneten Koordinaten x , y eines Netzpunkts stellen also den Längs- und den Querfehler M_x bzw. M_y des betreffenden Netzpunkts dar.

Nimmt man an, dass die Koordinatenberechnung in der durch die fortlaufenden Indizes der Netzpunkte T angedeuteten Reihenfolge vorgenommen wird, so kommen die in Abb. 4 mit $s_1, s_2, s_3, s_4, \dots$ bezeichneten Seitenlängen und die entsprechenden Neigungen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \dots$ in Betracht.

Für die $(2i-1)$ -te und für die $2i$ -te Seite hat man:

$$\left. \begin{aligned} s_{2i-1} &= b \frac{\left\{ \sin [\alpha_1] \cdot \sin [\alpha_3] \dots \sin [\alpha_{2i-1}] \right\} \left\{ \sin [\beta_2] \cdot \sin [\beta_4] \dots \sin [\beta_{2i-2}] \right\}}{\sin [\gamma_1] \cdot \sin [\gamma_2] \cdot \sin [\gamma_3] \dots \sin [\gamma_{2i-1}]} \\ s_{2i} &= b \frac{\left\{ \sin [\alpha_1] \cdot \sin [\alpha_3] \dots \sin [\alpha_{2i-1}] \right\} \left\{ \sin [\beta_2] \cdot \sin [\beta_4] \dots \sin [\beta_{2i}] \right\}}{\sin [\gamma_1] \cdot \sin [\gamma_2] \cdot \sin [\gamma_3] \dots \sin [\gamma_{2i}]} \end{aligned} \right\} (8)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{2i-1} &= \omega + \{ [\beta_1] + [\beta_3] + \dots + [\beta_{2i-1}] \} - \{ [\alpha_2] + [\alpha_4] + \dots + [\alpha_{2i-2}] \} + 180^\circ \\ \gamma_{2i} &= \omega + \{ [\beta_1] + [\beta_3] + \dots + [\beta_{2i-1}] \} - \{ [\alpha_2] + [\alpha_4] + \dots + [\alpha_{2i}] \} \end{aligned} \right\} (9).$$

Die Koordinaten der am Ende der erwähnten Dreiecksseiten, bzw. an der linken und der rechten Seite der Dreieckskette gelegenen Netzpunkte T_{2i-1} und T_{2i} sind also

$$\begin{aligned} x_{2i-1} &= b \cos \omega + s_1 \cos \gamma_1 + s_2 \cos \gamma_2 + s_3 \cos \gamma_3 + s_4 \cos \gamma_4 + \dots + s_{2i-1} \cos \gamma_{2i-1} = \\ &= b \cos \omega + b \frac{\sin [\alpha_1]}{\sin [\gamma_1]} \cdot \cos \{ \omega + [\beta_1] + 180^\circ \} + \\ &+ b \frac{\sin [\alpha_1]}{\sin [\gamma_1]} \cdot \frac{\sin [\beta_2]}{\sin [\gamma_2]} \cdot \cos \{ \omega + [\beta_1] - [\alpha_2] \} + \\ &+ b \frac{\sin [\alpha_1]}{\sin [\gamma_1]} \cdot \frac{\sin [\beta_2]}{\sin [\gamma_2]} \cdot \frac{\sin [\alpha_3]}{\sin [\gamma_3]} \cdot \cos \{ \omega + \{ [\beta_1] + [\beta_3] \} - [\alpha_2] + 180^\circ \} + \\ &+ b \frac{\sin [\alpha_1]}{\sin [\gamma_1]} \cdot \frac{\sin [\beta_2]}{\sin [\gamma_2]} \cdot \frac{\sin [\alpha_3]}{\sin [\gamma_3]} \cdot \frac{\sin [\beta_4]}{\sin [\gamma_4]} \cdot \cos \{ \omega + \{ [\beta_1] + [\beta_3] \} - \{ [\alpha_2] + [\alpha_4] \} \} + \\ &+ \dots + \\ &+ b \frac{\sin [\alpha_1]}{\sin [\gamma_1]} \cdot \frac{\sin [\beta_2]}{\sin [\gamma_2]} \cdot \frac{\sin [\alpha_3]}{\sin [\gamma_3]} \cdot \frac{\sin [\beta_4]}{\sin [\gamma_4]} \dots \frac{\sin [\alpha_{2i-1}]}{\sin [\gamma_{2i-1}]} \cdot \cos \{ \omega + \\ &+ \{ [\beta_1] + [\beta_3] + \dots + [\beta_{2i-1}] \} - \{ [\alpha_2] + [\alpha_4] + \dots + [\alpha_{2i-2}] \} + 180^\circ \} \dots (10), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{2i-1} &= b \sin \omega + s_1 \sin \nu_1 + s_2 \sin \nu_2 + s_3 \sin \nu_3 + s_4 \sin \nu_4 + \dots + s_{2i-1} \sin \nu_{2i-1} = \\
&= b \sin \omega + b \frac{\sin [\alpha_1]}{\sin [\gamma_1]} \cdot \sin \left\{ \omega + [\beta_1] + 180^\circ \right\} + \\
&+ b \frac{\sin [\alpha_1]}{\sin [\gamma_1]} \cdot \frac{\sin [\beta_2]}{\sin [\gamma_2]} \cdot \sin \left\{ \omega + [\beta_1] - [\alpha_2] \right\} + \\
&+ b \frac{\sin [\alpha_1]}{\sin [\gamma_1]} \cdot \frac{\sin [\beta_2]}{\sin [\gamma_2]} \cdot \frac{\sin [\alpha_3]}{\sin [\gamma_3]} \cdot \sin \left\{ \omega + \{ [\beta_1] + [\beta_3] \} - [\alpha_2] + 180^\circ \right\} + \\
&+ b \frac{\sin [\alpha_1]}{\sin [\gamma_1]} \cdot \frac{\sin [\beta_2]}{\sin [\gamma_2]} \cdot \frac{\sin [\alpha_3]}{\sin [\gamma_3]} \cdot \frac{\sin [\beta_4]}{\sin [\gamma_4]} \cdot \sin \left\{ \omega + \{ [\beta_1] + [\beta_3] \} - \{ [\alpha_2] + [\alpha_4] \} \right\} + \\
&+ \dots + \\
&+ b \frac{\sin [\alpha_1]}{\sin [\gamma_1]} \cdot \frac{\sin [\beta_2]}{\sin [\gamma_2]} \cdot \frac{\sin [\alpha_3]}{\sin [\gamma_3]} \cdot \frac{\sin [\beta_4]}{\sin [\gamma_4]} \dots \frac{\sin [\alpha_{2i-1}]}{\sin [\gamma_{2i-1}]} \cdot \sin \left\{ \omega + \right. \\
&+ \left. \{ [\beta_1] + [\beta_3] + \dots + [\beta_{2i-1}] \} - \{ [\alpha_2] + [\alpha_4] + \dots + [\alpha_{2i-2}] \} + 180^\circ \right\} \dots \dots (11)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
x_{2i} &= b \cos \omega + s_1 \cos \nu_1 + s_2 \cos \nu_2 + s_3 \cos \nu_3 + s_4 \cos \nu_4 + \dots + s_{2i} \cos \nu_{2i} = \\
&= b \cos \omega + b \frac{\sin [\alpha_1]}{\sin [\gamma_1]} \cdot \cos \left\{ \omega + [\beta_1] + 180^\circ \right\} + \\
&+ b \frac{\sin [\alpha_1]}{\sin [\gamma_1]} \cdot \frac{\sin [\beta_2]}{\sin [\gamma_2]} \cdot \cos \left\{ \omega + [\beta_1] - [\alpha_2] \right\} + \\
&+ b \frac{\sin [\alpha_1]}{\sin [\gamma_1]} \cdot \frac{\sin [\beta_2]}{\sin [\gamma_2]} \cdot \frac{\sin [\alpha_3]}{\sin [\gamma_3]} \cdot \cos \left\{ \omega + \{ [\beta_1] + [\beta_3] \} - [\alpha_2] + 180^\circ \right\} + \\
&+ b \frac{\sin [\alpha_1]}{\sin [\gamma_1]} \cdot \frac{\sin [\beta_2]}{\sin [\gamma_2]} \cdot \frac{\sin [\alpha_3]}{\sin [\gamma_3]} \cdot \frac{\sin [\beta_4]}{\sin [\gamma_4]} \cdot \cos \left\{ \omega + \{ [\beta_1] + [\beta_3] \} - \{ [\alpha_2] + [\alpha_4] \} \right\} + \\
&+ \dots + \\
&+ b \frac{\sin [\alpha_1]}{\sin [\gamma_1]} \cdot \frac{\sin [\beta_2]}{\sin [\gamma_2]} \cdot \frac{\sin [\alpha_3]}{\sin [\gamma_3]} \cdot \frac{\sin [\beta_4]}{\sin [\gamma_4]} \dots \frac{\sin [\beta_{2i}]}{\sin [\gamma_{2i}]} \cdot \cos \left\{ \omega + \right. \\
&+ \left. \{ [\beta_1] + [\beta_3] + \dots + [\beta_{2i-1}] \} - \{ [\alpha_2] + [\alpha_4] + \dots + [\alpha_{2i}] \} \right\} \dots \dots (12),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{2i} &= b \sin \omega + s_1 \sin \nu_1 + s_2 \sin \nu_2 + s_3 \sin \nu_3 + s_4 \sin \nu_4 + \dots + s_{2i} \sin \nu_{2i} = \\
&= b \sin \omega + b \frac{\sin [\alpha_1]}{\sin [\gamma_1]} \cdot \sin \left\{ \omega + [\beta_1] + 180^\circ \right\} + \\
&+ b \frac{\sin [\alpha_1]}{\sin [\gamma_1]} \cdot \frac{\sin [\beta_2]}{\sin [\gamma_2]} \cdot \sin \left\{ \omega + [\beta_1] - [\alpha_2] \right\} + \\
&+ b \frac{\sin [\alpha_1]}{\sin [\gamma_1]} \cdot \frac{\sin [\beta_2]}{\sin [\gamma_2]} \cdot \frac{\sin [\alpha_3]}{\sin [\gamma_3]} \cdot \sin \left\{ \omega + \{ [\beta_1] + [\beta_3] \} - [\alpha_2] + 180^\circ \right\} + \\
&+ b \frac{\sin [\alpha_1]}{\sin [\gamma_1]} \cdot \frac{\sin [\beta_2]}{\sin [\gamma_2]} \cdot \frac{\sin [\alpha_3]}{\sin [\gamma_3]} \cdot \frac{\sin [\beta_4]}{\sin [\gamma_4]} \cdot \sin \left\{ \omega + \{ [\beta_1] + [\beta_3] \} - \{ [\alpha_2] + [\alpha_4] \} \right\} + \\
&+ \dots + \\
&+ b \frac{\sin [\alpha_1]}{\sin [\gamma_1]} \cdot \frac{\sin [\beta_2]}{\sin [\gamma_2]} \cdot \frac{\sin [\alpha_3]}{\sin [\gamma_3]} \cdot \frac{\sin [\beta_4]}{\sin [\gamma_4]} \dots \frac{\sin [\beta_{2i}]}{\sin [\gamma_{2i}]} \cdot \sin \left\{ \omega + \right. \\
&\left. + \{ [\beta_1] + [\beta_3] + \dots + [\beta_{2i-1}] \} - \{ [\alpha_2] + [\alpha_4] + \dots + [\alpha_{2i}] \} \right\} \dots \dots (13).
\end{aligned}$$

Ersetzt man die ausgeglichenen Winkel $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\gamma]$ durch deren näherungsweise gleich 60° angenommenen beobachteten Werte mit den entsprechenden zu Ausgleichszwecken einzuführenden Verbesserungen v_α , v_β , v_γ , so lassen sich die Funktionen (10)–(13) durch Anwendung des Taylorschen Satzes folgendermassen darstellen:

$$\begin{aligned}
x_{2i-1} &= (x_{2i-1}) + \frac{2i-1}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \cdot v_{\alpha_1} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b \cdot v_{\beta_1} - \frac{2i-1}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \cdot v_{\gamma_1} + \\
&+ 0 \cdot v_{\alpha_2} + \frac{2i-2}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \cdot v_{\beta_2} - \frac{2i-2}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \cdot v_{\gamma_2} + \\
&+ \frac{2i-3}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \cdot v_{\alpha_3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b \cdot v_{\beta_3} - \frac{2i-3}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \cdot v_{\gamma_3} + \\
&+ 0 \cdot v_{\alpha_4} + \frac{2i-4}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \cdot v_{\beta_4} - \frac{2i-4}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \cdot v_{\gamma_4} + \\
&+ \dots + \\
&+ 0 \cdot v_{\alpha_{2i-2}} + \frac{2}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \cdot v_{\beta_{2i-2}} - \frac{2}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \cdot v_{\gamma_{2i-2}} + \\
&+ \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \cdot v_{\alpha_{2i-1}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b \cdot v_{\beta_{2i-1}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \cdot v_{\gamma_{2i-1}} \dots (14),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{2i-1} = (y_{2i-1}) &- \frac{1}{2} \cdot b \cdot v_{\alpha_1} + \frac{2i-1}{2} \cdot b \cdot v_{\beta_1} + \frac{1}{2} \cdot b \cdot v_{\gamma_1} - \\
&- \frac{2i-2}{2} \cdot b \cdot v_{\alpha_2} + 0 \cdot v_{\beta_2} + 0 \cdot v_{\gamma_2} - \\
&- \frac{1}{2} \cdot b \cdot v_{\alpha_3} + \frac{2i-3}{2} \cdot b \cdot v_{\beta_3} + \frac{1}{2} \cdot b \cdot v_{\gamma_3} - \\
&- \frac{2i-4}{2} \cdot b \cdot v_{\alpha_4} + 0 \cdot v_{\beta_4} + 0 \cdot v_{\gamma_4} - \\
&\dots \dots \dots - \\
&- \frac{2}{2} \cdot b \cdot v_{\alpha_{2i-2}} + 0 \cdot v_{\beta_{2i-2}} + 0 \cdot v_{\gamma_{2i-2}} - \\
&- \frac{1}{2} \cdot b \cdot v_{\alpha_{2i-1}} + \frac{1}{2} \cdot b \cdot v_{\beta_{2i-1}} + \frac{1}{2} \cdot b \cdot v_{\gamma_{2i-1}} \dots \dots (15)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
x_{2i} = (x_{2i}) &+ \frac{2i}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \cdot v_{\alpha_1} + 0 \cdot v_{\beta_1} - \frac{2i}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \cdot v_{\gamma_1} + \\
&+ \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b \cdot v_{\alpha_2} + \frac{2i-1}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \cdot v_{\beta_2} - \frac{2i-1}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \cdot v_{\gamma_2} + \\
&+ \frac{2i-2}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \cdot v_{\alpha_3} + 0 \cdot v_{\beta_3} - \frac{2i-2}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \cdot v_{\gamma_3} + \\
&+ \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b \cdot v_{\alpha_4} + \frac{2i-3}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \cdot v_{\beta_4} - \frac{2i-3}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \cdot v_{\gamma_4} + \\
&+ \dots \dots \dots + \\
&+ \frac{2}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \cdot v_{\alpha_{2i-1}} + 0 \cdot v_{\beta_{2i-1}} - \frac{2}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \cdot v_{\gamma_{2i-1}} + \\
&+ \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b \cdot v_{\alpha_{2i}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \cdot v_{\beta_{2i}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \cdot v_{\gamma_{2i}} \dots \dots (16),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{2i} = (y_{2i}) - & 0 \cdot v_{\alpha_1} + \frac{2i}{2} \cdot b \cdot v_{\beta_1} - 0 \cdot v_{\gamma_1} - \\
& - \frac{2i-1}{2} \cdot b \cdot v_{\alpha_2} + \frac{1}{2} \cdot b \cdot v_{\beta_2} - \frac{1}{2} \cdot b \cdot v_{\gamma_2} - \\
& - 0 \cdot v_{\alpha_3} + \frac{2i-2}{2} \cdot b \cdot v_{\beta_3} - 0 \cdot v_{\gamma_3} - \\
& - \frac{2i-3}{2} \cdot b \cdot v_{\alpha_4} + \frac{1}{2} \cdot b \cdot v_{\beta_4} - \frac{1}{2} \cdot b \cdot v_{\gamma_4} - \\
& \dots \dots \dots - \\
& - 0 \cdot v_{\alpha_{2i-1}} + \frac{2}{2} \cdot b \cdot v_{\beta_{2i-1}} - 0 \cdot v_{\gamma_{2i-1}} - \\
& - \frac{1}{2} \cdot b \cdot v_{\alpha_{2i}} + \frac{1}{2} \cdot b \cdot v_{\beta_{2i}} - \frac{1}{2} \cdot b \cdot v_{\gamma_{2i}} \dots \dots (17).
\end{aligned}$$

Hier bezeichnen (x_{2i-1}) , (y_{2i-1}) und (x_{2i}) , (y_{2i}) die für diese Untersuchung belanglosen, mit den Näherungswerten der Winkel berechneten Werte der entsprechenden Funktionen x_{2i-1} , y_{2i-1} und x_{2i} , y_{2i} . Denkt man sich diese Funktionen in der allgemeinen Schreibweise

$$\begin{aligned}
x \text{ bzw. } y = (x) \text{ bzw. } (y) + & f_{\alpha_1} + f_{\beta_1} + f_{\gamma_1} + \\
& + f_{\alpha_2} + f_{\beta_2} + f_{\gamma_2} + \\
& + f_{\alpha_3} + f_{\beta_3} + f_{\gamma_3} + \\
& + f_{\alpha_4} + f_{\beta_4} + f_{\gamma_4} + \\
& + \dots \dots \dots + \\
& + f_{\alpha_{2i-2}} + f_{\beta_{2i-2}} + f_{\gamma_{2i-2}} + \\
& + f_{\alpha_{2i-1}} + f_{\beta_{2i-1}} + f_{\gamma_{2i-1}} + \\
& + f_{\alpha_{2i}} + f_{\beta_{2i}} + f_{\gamma_{2i}} \dots \dots (18)
\end{aligned}$$

dargestellt, so ist also



für die Funktion x_{2i-1} :

$$\begin{aligned}
 f_{\alpha_1} &= + \frac{2i-1}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} & f_{\beta_1} &= + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b & f_{\gamma_1} &= - \frac{2i-1}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \\
 f_{\alpha_2} &= 0 & f_{\beta_2} &= + \frac{2i-2}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} & f_{\gamma_2} &= - \frac{2i-2}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \\
 f_{\alpha_3} &= + \frac{2i-3}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} & f_{\beta_3} &= + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b & f_{\gamma_3} &= - \frac{2i-3}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \\
 f_{\alpha_4} &= 0 & f_{\beta_4} &= + \frac{2i-4}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} & f_{\gamma_4} &= - \frac{2i-4}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \dots(19),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{\alpha_{2i-2}} &= 0 & f_{\beta_{2i-2}} &= + \frac{2}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} & f_{\gamma_{2i-2}} &= - \frac{2}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \\
 f_{\alpha_{2i-1}} &= + \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} & f_{\beta_{2i-1}} &= + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b & f_{\gamma_{2i-1}} &= - \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \\
 f_{\alpha_{2i}} &= 0 & f_{\beta_{2i}} &= 0 & f_{\gamma_{2i}} &= 0
 \end{aligned}$$

für die Funktion y_{2i-1} :

$$\begin{aligned}
 f_{\alpha_1} &= - \frac{1}{2} \cdot b & f_{\beta_1} &= + \frac{2i-1}{2} \cdot b & f_{\gamma_1} &= + \frac{1}{2} \cdot b \\
 f_{\alpha_2} &= - \frac{2i-2}{2} \cdot b & f_{\beta_2} &= 0 & f_{\gamma_2} &= 0 \\
 f_{\alpha_3} &= - \frac{1}{2} \cdot b & f_{\beta_3} &= + \frac{2i-3}{2} \cdot b & f_{\gamma_3} &= + \frac{1}{2} \cdot b \\
 f_{\alpha_4} &= - \frac{2i-4}{2} \cdot b & f_{\beta_4} &= 0 & f_{\gamma_4} &= 0 \dots(20);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{\alpha_{2i-2}} &= - \frac{2}{2} \cdot b & f_{\beta_{2i-2}} &= 0 & f_{\gamma_{2i-2}} &= 0 \\
 f_{\alpha_{2i-1}} &= - \frac{1}{2} \cdot b & f_{\beta_{2i-1}} &= + \frac{1}{2} \cdot b & f_{\gamma_{2i-1}} &= + \frac{1}{2} \cdot b \\
 f_{\alpha_{2i}} &= 0 & f_{\beta_{2i}} &= 0 & f_{\gamma_{2i}} &= 0
 \end{aligned}$$

für die Funktion x_{2i} :

$$\left. \begin{aligned}
 f_{\alpha_1} &= +\frac{2i}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} & f_{\beta_1} &= 0 & f_{\gamma_1} &= -\frac{2i}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \\
 f_{\alpha_2} &= +\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b & f_{\beta_2} &= +\frac{2i-1}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} & f_{\gamma_2} &= -\frac{2i-1}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \\
 f_{\alpha_3} &= +\frac{2i-2}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} & f_{\beta_3} &= 0 & f_{\gamma_3} &= -\frac{2i-2}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \\
 f_{\alpha_4} &= +\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b & f_{\beta_4} &= +\frac{2i-3}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} & f_{\gamma_4} &= -\frac{2i-3}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 f_{\alpha_{2i-2}} &= +\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b & f_{\beta_{2i-2}} &= +\frac{3}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} & f_{\gamma_{2i-2}} &= -\frac{3}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \\
 f_{\alpha_{2i-1}} &= +\frac{2}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} & f_{\beta_{2i-1}} &= 0 & f_{\gamma_{2i-1}} &= -\frac{2}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \\
 f_{\alpha_{2i}} &= +\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b & f_{\beta_{2i}} &= +\frac{1}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} & f_{\gamma_{2i}} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{3}}
 \end{aligned} \right\} \dots (21),$$

für die Funktion y_{2i} :

$$\left. \begin{aligned}
 f_{\alpha_1} &= 0 & f_{\beta_1} &= +\frac{2i}{2} \cdot b & f_{\gamma_1} &= 0 \\
 f_{\alpha_2} &= -\frac{2i-1}{2} \cdot b & f_{\beta_2} &= +\frac{1}{2} \cdot b & f_{\gamma_2} &= -\frac{1}{2} \cdot b \\
 f_{\alpha_3} &= 0 & f_{\beta_3} &= +\frac{2i-2}{2} \cdot b & f_{\gamma_3} &= 0 \\
 f_{\alpha_4} &= -\frac{2i-3}{2} \cdot b & f_{\beta_4} &= +\frac{1}{2} \cdot b & f_{\gamma_4} &= -\frac{1}{2} \cdot b \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 f_{\alpha_{2i-2}} &= -\frac{3}{2} \cdot b & f_{\beta_{2i-2}} &= +\frac{1}{2} \cdot b & f_{\gamma_{2i-2}} &= -\frac{1}{2} \cdot b \\
 f_{\alpha_{2i-1}} &= 0 & f_{\beta_{2i-1}} &= +\frac{2}{2} \cdot b & f_{\gamma_{2i-1}} &= 0 \\
 f_{\alpha_{2i}} &= -\frac{1}{2} \cdot b & f_{\beta_{2i}} &= +\frac{1}{2} \cdot b & f_{\gamma_{2i}} &= -\frac{1}{2} \cdot b
 \end{aligned} \right\} \dots (22).$$



Bezüglich der für die Fehlerberechnung in Betracht kommenden Koeffizienten der Korrelaten-Normalgleichungen und der Gewichtsgleichungen ist folgendes zu bemerken.

Wie bereits erwähnt, besteht für jedes einzelne Dreieck nur eine einzige Bedingungsgleichung des Typs (7). In jede solche Gleichung gehen nur die Winkel α , β , γ des betreffenden Dreiecks, bzw. die entsprechenden Verbesserungen v_α , v_β , v_γ ein. Bezeichnet man die Koeffizienten der Bedingungsgleichungen in allgemeiner Schreibweise für die 1-te, 2-te, 3-te, 4-te, ..., $(2i-2)$ -te, $(2i-1)$ -te, $(2i)$ -te Gleichung mit a , b , c , d , ..., $(2i-2)$, $(2i-1)$, $2i$, so hat man unter den erwähnten Umständen und unter Berücksichtigung der Gewichtsreziproken (6):

$$\left. \begin{aligned}
 \left[\frac{aa}{p} \right] &= &= 3 + 4g \\
 \left[\frac{bb}{p} \right] &= \left[\frac{bb}{p} \cdot 1 \right] &= 3(1+2g) \\
 \left[\frac{cc}{p} \right] &= \left[\frac{cc}{p} \cdot 2 \right] &= 3(1+2g) \\
 \left[\frac{dd}{p} \right] &= \left[\frac{dd}{p} \cdot 3 \right] &= 3(1+2g) \\
 \dots & & \\
 \left[\frac{(2i-2)(2i-2)}{p} \right] &= \left[\frac{(2i-2)(2i-2)}{p} \cdot (2i-3) \right] &= 3(1+2g) \\
 \left[\frac{(2i-1)(2i-1)}{p} \right] &= \left[\frac{(2i-1)(2i-1)}{p} \cdot (2i-2) \right] &= 3(1+2g) \\
 \left[\frac{(2i)(2i)}{p} \right] &= \left[\frac{(2i)(2i)}{p} \cdot (2i-1) \right] &= 3(1+2g)
 \end{aligned} \right\} \dots(23).$$

Im Hinblick auf (19) — (23) ergibt sich also:

für die Funktion x_{2i-1} :

$$\left[\frac{ff}{p} \right] = \frac{b^2}{36} \left\{ \{2i(2i-1)(4i-1) + 27i\} (1+2g) - 3g \{(2i-1)^2 + 9\} \right\} \dots(24),$$

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{af}{p} \right] &= + \frac{b}{2\sqrt{3}} \cdot \{3(1+2g) - 2g(i+1)\} \\
 \left[\frac{bf}{p} \cdot 1 \right] &= 0 \\
 \left[\frac{cf}{p} \cdot 2 \right] &= + \frac{b}{2\sqrt{3}} \cdot 3(1+2g) \\
 \left[\frac{df}{p} \cdot 3 \right] &= 0 \\
 &\dots\dots\dots (25),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{(2i-2)f}{p} \cdot (2i-3) \right] &= 0 \\
 \left[\frac{(2i-1)f}{p} \cdot (2i-2) \right] &= + \frac{b}{2\sqrt{3}} \cdot 3(1+2g) \\
 \left[\frac{(2i)f}{p} \cdot (2i-1) \right] &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{af}{p} \right]^2 &= \frac{b^2}{12} \left\{ 3(1+2g) + 2g \cdot \frac{2(i+1)^2g - 3(2i+1)(1+2g)}{3+4g} \right\} \\
 \left[\frac{aa}{p} \right] &= 0 \\
 \left[\frac{bf}{p} \cdot 1 \right]^2 &= 0 \\
 \left[\frac{bb}{p} \cdot 1 \right] &= 0 \\
 \left[\frac{cf}{p} \cdot 2 \right]^2 &= \frac{b^2}{12} \cdot 3(1+2g) \\
 \left[\frac{cc}{p} \cdot 2 \right] &= 0 \\
 \left[\frac{df}{p} \cdot 3 \right]^2 &= 0 \\
 \left[\frac{dd}{p} \cdot 3 \right] &= 0 \\
 &\dots\dots\dots (26),
 \end{aligned}$$

$$\left[\frac{(2i-2)f}{p} \cdot (2i-3) \right]^2 = 0$$

$$\left[\frac{(2i-1)f}{p} \cdot (2i-2) \right]^2 = \frac{b^2}{12} \cdot 3(1+2g)$$

$$\left[\frac{(2i)f}{p} \cdot (2i-1) \right]^2 = 0$$

und als Summe der Ausdrücke (26)

$$\sum = \frac{b^2}{36} \left\{ 9i(1+2g) + 6g \cdot \frac{2(i+1)^2 g - 3(2i+1)(1+2g)}{3+4g} \right\} \dots \dots (27);$$

für die Funktion y_{2i-1} :

$$\left[\frac{ff}{p} \right] = \frac{b^2}{36} \left\{ \{ 3i(2i-1)(4i-1) + 18i \} (1+2g) - 9g \{ (2i-1)^2 + 1 \} \right\} \dots (28),$$

$$\left[\frac{af}{p} \right] = + \frac{b}{2} \{ (2i-1)(1+2g) - 2g(i-1) \}$$

$$\left[\frac{bf}{p} \cdot 1 \right] = - \frac{b}{2} \cdot (2i-2)(1+2g)$$

$$\left[\frac{cf}{p} \cdot 2 \right] = + \frac{b}{2} \cdot (2i-3)(1+2g)$$

$$\left[\frac{df}{p} \cdot 3 \right] = - \frac{b}{2} \cdot (2i-4)(1+2g)$$

$$\dots \dots \dots (29),$$

$$\left[\frac{(2i-2)f}{p} \cdot (2i-3) \right] = - \frac{b}{2} \cdot 2(1+2g)$$

$$\left[\frac{(2i-1)f}{p} \cdot (2i-2) \right] = + \frac{b}{2} \cdot 1(1+2g)$$

$$\left[\frac{(2i)f}{p} \cdot (2i-1) \right] = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\left[\frac{af}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} &= \frac{b^2}{12} \left\{ (2i-1)^2(1+2g) + 2g \cdot \frac{6(i-1)^2g - (2i-1)(4i-5)(1+2g)}{3+4g} \right\} \\ \frac{\left[\frac{bf}{p} \cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p} \cdot 1\right]} &= \frac{b^2}{12} \cdot (2i-2)^2(1+2g) \\ \frac{\left[\frac{cf}{p} \cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p} \cdot 2\right]} &= \frac{b^2}{12} \cdot (2i-3)^2(1+2g) \\ \frac{\left[\frac{df}{p} \cdot 3\right]^2}{\left[\frac{dd}{p} \cdot 3\right]} &= \frac{b^2}{12} \cdot (2i-4)^2(1+2g) \end{aligned} \right\} (30),$$

$$\frac{\left[\frac{(2i-2)f}{p} \cdot (2i-3)\right]^2}{\left[\frac{(2i-2)(2i-2)}{p} \cdot (2i-3)\right]} = \frac{b^2}{12} \cdot 2^2(1+2g)$$

$$\frac{\left[\frac{(2i-1)f}{p} \cdot (2i-2)\right]^2}{\left[\frac{(2i-1)(2i-1)}{p} \cdot (2i-2)\right]} = \frac{b^2}{12} \cdot 1^2(1+2g)$$

$$\frac{\left[\frac{(2i)f}{p} \cdot (2i-1)\right]^2}{\left[\frac{(2i)(2i)}{p} \cdot (2i-1)\right]} = 0$$

und als Summe der Ausdrücke (30)

$$\sum = \frac{b^2}{36} \left\{ i(2i-1)(4i-1)(1+2g) - 6g \cdot \frac{6(i-1)^2g - (2i-1)(4i-5)(1+2g)}{3+4g} \right\} \quad (31);$$

für die Funktion x_{2i} :

$$\left[\frac{ff}{p}\right] = \frac{b^2}{36} \left\{ \{2i(2i+1)(4i+1) + 27i\} (1+2g) - 12gi^2 \right\} \cdot \dots \dots \dots (32),$$

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{af}{p} \right] &= -\frac{b}{2\sqrt{3}} \cdot 2gi \\
 \left[\frac{bf}{p} \cdot 1 \right] &= +\frac{b}{2\sqrt{3}} \cdot 3(1+2g) \\
 \left[\frac{cf}{p} \cdot 2 \right] &= 0 \\
 \left[\frac{df}{p} \cdot 3 \right] &= +\frac{b}{2\sqrt{3}} \cdot 3(1+2g) \\
 &\dots \dots \dots (33),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{(2i-2)f}{p} \cdot (2i-3) \right] &= +\frac{b}{2\sqrt{3}} \cdot 3(1+2g) \\
 \left[\frac{(2i-1)f}{p} \cdot (2i-2) \right] &= 0 \\
 \left[\frac{(2i)f}{p} \cdot (2i-1) \right] &= +\frac{b}{2\sqrt{3}} \cdot 3(1+2g)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\left[\frac{af}{p} \right]^2}{\left[\frac{aa}{p} \right]} &= \frac{b^2 \cdot 4g^2 i^2}{12 \cdot 3+4g} \\
 \frac{\left[\frac{bf}{p} \cdot 1 \right]^2}{\left[\frac{bb}{p} \cdot 1 \right]} &= \frac{b^2 \cdot 3(1+2g)}{12} \\
 \frac{\left[\frac{cf}{p} \cdot 2 \right]^2}{\left[\frac{cc}{p} \cdot 2 \right]} &= 0 \\
 \frac{\left[\frac{df}{p} \cdot 3 \right]^2}{\left[\frac{dd}{p} \cdot 3 \right]} &= \frac{b^2 \cdot 3(1+2g)}{12} \\
 &\dots \dots \dots (34),
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{(2i-2)f \cdot (2i-3)}{p} \right]^2 &= \frac{b^2}{12} \cdot 3(1+2g) \\ \left[\frac{(2i-1)f \cdot (2i-2)}{p} \right]^2 &= 0 \\ \left[\frac{(2i)f \cdot (2i-1)}{p} \right]^2 &= \frac{b^2}{12} \cdot 3(1+2g) \end{aligned} \right\}$$

und als Summe der Ausdrücke (34)

$$\Sigma = \frac{b^2}{36} \left\{ 9i(1+2g) + 12 \frac{g^2 i^2}{3+4g} \right\} \dots \dots \dots (35);$$

für die Funktion y_{2i} :

$$\left[\frac{ff}{p} \right] = \frac{b^2}{36} \left\{ \{ 3i(2i+1)(4i+1) + 18i \} (1+2g) - 36gi^2 \right\} \dots \dots \dots (36),$$

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{af}{p} \right] &= + \frac{b}{2} \{ 2i(1+2g) - 2gi \} \\ \left[\frac{bf}{p} \cdot 1 \right] &= - \frac{b}{2} (2i-1)(1+2g) \\ \left[\frac{cf}{p} \cdot 2 \right] &= + \frac{b}{2} (2i-2)(1+2g) \\ \left[\frac{df}{p} \cdot 3 \right] &= - \frac{b}{2} (2i-3)(1+2g) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (37),$$

$$\left[\frac{(2i-2)f \cdot (2i-3)}{p} \right] = - \frac{b}{2} \cdot 3(1+2g)$$

$$\left[\frac{(2i-1)f \cdot (2i-2)}{p} \right] = + \frac{b}{2} \cdot 2(1+2g)$$

$$\left[\frac{(2i)f \cdot (2i-1)}{p} \right] = - \frac{b}{2} \cdot 1(1+2g)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\left[\frac{af}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} &= \frac{b^2}{12} \left\{ (2i)^2 (1+2g) - 4gi^2 \frac{4+5g}{3+4g} \right\} \\
 \frac{\left[\frac{bf}{p} \cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p} \cdot 1\right]} &= \frac{b^2}{12} (2i-1)^2 (1+2g) \\
 \frac{\left[\frac{cf}{p} \cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p} \cdot 2\right]} &= \frac{b^2}{12} (2i-2)^2 (1+2g) \\
 \frac{\left[\frac{df}{p} \cdot 3\right]^2}{\left[\frac{dd}{p} \cdot 3\right]} &= \frac{b^2}{12} (2i-3)^2 (1+2g)
 \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\left[\frac{(2i-2)f}{p} \cdot (2i-3)\right]^2}{\left[\frac{(2i-2)(2i-2)}{p} \cdot (2i-3)\right]} &= \frac{b^2}{12} \cdot 3^2 (1+2g) \\
 \frac{\left[\frac{(2i-1)f}{p} \cdot (2i-2)\right]^2}{\left[\frac{(2i-1)(2i-1)}{p} \cdot (2i-2)\right]} &= \frac{b^2}{12} \cdot 2^2 (1+2g) \\
 \frac{\left[\frac{(2i)f}{p} \cdot (2i-1)\right]^2}{\left[\frac{(2i)(2i)}{p} \cdot (2i-1)\right]} &= \frac{b^2}{12} \cdot 1^2 (1+2g)
 \end{aligned}$$

und als Summe der Ausdrücke (38)

$$\Sigma = \frac{b^2}{36} \left\{ i(2i+1)(4i+1)(1+2g) - 12gi^2 \frac{4+5g}{3+4g} \right\} \dots \tag{39}$$

Nach der allgemeinen Formel

$$\begin{aligned}
 Q = & \left[\frac{ff}{p} \right] - \left[\frac{af}{p} \right]^2 + \left[\frac{bf}{p} \cdot 1 \right]^2 + \left[\frac{cf}{p} \cdot 2 \right]^2 + \left[\frac{df}{p} \cdot 3 \right]^2 + \dots + \\
 & + \left[\frac{(2i-2)f}{p} \cdot (2i-3) \right]^2 + \left[\frac{(2i-1)f}{p} \cdot (2i-2) \right]^2 + \\
 & + \left[\frac{(2i)f}{p} \cdot (2i-1) \right]^2 \left. \dots \dots \dots \right\} \dots \dots \dots (40) \\
 & \left[\frac{aa}{p} \right] + \left[\frac{bb}{p} \cdot 1 \right] + \left[\frac{cc}{p} \cdot 2 \right] + \left[\frac{dd}{p} \cdot 3 \right] + \dots + \\
 & + \left[\frac{(2i-2)(2i-2)}{p} \cdot (2i-3) \right] + \left[\frac{(2i-1)(2i-1)}{p} \cdot (2i-2) \right] + \\
 & + \left[\frac{(2i)(2i)}{p} \cdot (2i-1) \right] \left. \dots \dots \dots \right\} \dots \dots \dots (40)
 \end{aligned}$$

ergeben sich also für die Gewichtskoeffizienten der Funktionen x_{2i-1} , y_{2i-1} , x_{2i} , y_{2i} folgende Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned}
 Q_{x_{2i-1}} &= \frac{b^2}{36} \cdot 2 \left\{ \{ i(2i-1)(4i-1) + 9i \} (1+2g) - \right. \\
 &\quad \left. - 6g \left\{ i^2 \frac{3+5g}{3+4g} - 2(i-1) \right\} \right\} \\
 Q_{y_{2i-1}} &= \frac{b^2}{36} \cdot 2 \left\{ \{ i(2i-1)(4i-1) + 9i \} (1+2g) - \right. \\
 &\quad \left. - 6g \left\{ i^2 \frac{5+7g}{3+4g} - 2(i-1) \frac{1+2g}{3+4g} \right\} \right\} \\
 Q_{x_{2i}} &= \frac{b^2}{36} \cdot 2 \left\{ \{ i(2i+1)(4i+1) + 9i \} (1+2g) - \right. \\
 &\quad \left. - 6g i^2 \frac{3+5g}{3+4g} \right\} \\
 Q_{y_{2i}} &= \frac{b^2}{36} \cdot 2 \left\{ \{ i(2i+1)(4i+1) + 9i \} (1+2g) - \right. \\
 &\quad \left. - 6g i^2 \frac{5+7g}{3+4g} \right\}
 \end{aligned} \right\} \dots (41).$$

Die Formeln für den mittleren Längs- bzw. Querfehler eines Netzpunktes T sind demnach:

- 1) für an der linken Seite der Dreieckskette gelegene Netzpunkte mit ungeraden Ordnungsnummern $(2i-1)$:

$$\begin{aligned}
 M_{x_{2i-1}} &= \pm \frac{\mu}{\rho} \sqrt{Q_{x_{2i-1}}} = \pm \frac{\mu b}{6\rho} \sqrt{2 \left\{ i(2i-1)(4i-1) + 9i \right\} (1+2g) - 6g \left\{ i^2 \frac{3+5g}{3+4g} - 2(i-1) \right\}} \\
 M_{y_{2i-1}} &= \pm \frac{\mu}{\rho} \sqrt{Q_{y_{2i-1}}} = \pm \frac{\mu b}{6\rho} \sqrt{2 \left\{ i(2i-1)(4i-1) + 9i \right\} (1+2g) - 6g \left\{ i^2 \frac{5+7g}{3+4g} - 2(i-1) \frac{1+2g}{3+4g} \right\}}
 \end{aligned} \tag{42}$$

2) für an der rechten Seite der Dreiecks-kette gelegene Netzpunkte mit geraden Ordnungsnummern (2i):

$$\begin{aligned}
 M_{x_{2i}} &= \pm \frac{\mu}{\rho} \sqrt{Q_{x_{2i}}} = \pm \frac{\mu b}{6\rho} \sqrt{2 \left\{ i(2i+1)(4i+1) + 9i \right\} (1+2g) - 6g i^2 \frac{3+5g}{3+4g}} \\
 M_{y_{2i}} &= \pm \frac{\mu}{\rho} \sqrt{Q_{y_{2i}}} = \pm \frac{\mu b}{6\rho} \sqrt{2 \left\{ i(2i+1)(4i+1) + 9i \right\} (1+2g) - 6g i^2 \frac{5+7g}{3+4g}}
 \end{aligned} \tag{43}$$

und die entsprechenden Formeln für den mittleren Lagefehler eines Netzpunktes T lauten:

$$\begin{aligned}
 M_{p_{2i-1}} &= \pm \sqrt{M_{x_{2i-1}}^2 + M_{y_{2i-1}}^2} = \\
 &= \pm \frac{\mu b}{3\rho} \sqrt{\left\{ i(2i-1)(4i-1) + 9i \right\} (1+2g) - 12g(i^2 - i + 1) \frac{2+3g}{3+4g}} \tag{44}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{p_{2i}} &= \pm \sqrt{M_{x_{2i}}^2 + M_{y_{2i}}^2} = \\
 &= \pm \frac{\mu b}{3\rho} \sqrt{\left\{ i(2i+1)(4i+1) + 9i \right\} (1+2g) - 12g i^2 \frac{2+3g}{3+4g}} \dots \tag{45}
 \end{aligned}$$

Man kann diese Formeln, in etwas veränderter Gruppierung der unter dem Wurzelzeichen stehenden Ausdrücke, auch folgenderweise schreiben:

$$M_{p_{2i-1}} = \pm \frac{\mu b}{3\rho} \sqrt{i(2i-1)(4i-1)(1+2g) + 3 \left\{ 3i(1+2g) - 4g(i^2 - i + 1) \frac{2+3g}{3+4g} \right\}} \dots \tag{46}$$

$$M_{p_{2i}} = \pm \frac{\mu b}{3\rho} \sqrt{i(2i+1)(4i+1)(1+2g) + 3i \left\{ 3(1+2g) - 4gi \frac{2+3g}{3+4g} \right\}} \dots \tag{47}$$

Es ist dann leicht ersichtlich, dass in den unter dem Wurzelzeichen stehenden Ausdrücken dieser Formeln bei kleineren Werten von g das zweite Glied im Vergleich zum ersten eine mehr oder weniger untergeordnete Rolle spielt. Beschränkt man sich im Hinblick darauf auf die ersten Glieder dieser Ausdrücke, so gelangt man zu folgenden, unter den erwähnten Umständen für überschlägliche Fehlerberechnungen brauchbaren abgekürzten Formeln:

$$M_{p_{2i-1}} = \pm \frac{\mu b}{3\rho} \sqrt{i(2i-1)(4i-1)(1+2g) \dots \dots \dots} \quad (48),$$

$$M_{p_{2i}} = \pm \frac{\mu b}{3\rho} \sqrt{i(2i+1)(4i+1)(1+2g) \dots \dots \dots} \quad (49).$$

Bei der vorliegenden fehlertheoretischen Untersuchung der aus Rautenzügen gebildeten Dreieckskette wurde bisher zwischen Netzpunkten mit ungerader und solchen mit gerader Ordnungsnummer ($2i-1$) bzw. ($2i$) unterschieden.

Bedeutet nun r allgemein die — ungerade oder gerade — Ordnungsnummer des betreffenden Netzpunkts, so ist

$$\left. \begin{array}{l} \text{im ersten Fall} \\ i = \frac{r+1}{2}, \\ \text{im zweiten Fall} \\ i = \frac{r}{2} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (50)$$

zu setzen. Ersetzt man dementsprechend i durch r , so erweist es sich, dass die vollständigen Formeln (42)—(47) auch in solcher Fassung für ungerade und gerade Werte von r nicht gleichlautend sind. Die Unterschiede sind jedoch nicht sehr gross; in den Formeln (46)—(47) betreffen sie nur das verhältnismässig wenig ins Gewicht fallende zweite Glied des unter dem Wurzelzeichen stehenden Ausdrucks. Dementsprechend führt der Übergang von i auf r in den abgekürzten Formeln (48)—(49) zu der für beide Fälle der allgemeinen Form nach gleichlautenden Formel

$$M_{p_r} = \pm \frac{\mu b}{3\rho} \sqrt{\frac{r(r+1)(2r+1)}{2} \cdot (1+2g) \dots \dots} \quad (51).$$

Aus den Formeln (42) und (43) ist zu ersehen, dass — im Gegensatz zum einfachen Rautenzug — in einer aus solchen Zügen gebildeten Dreieckskette die mittleren Koordinatenfehler M_x und M_y eines gegebenen Netzpunkts sich nur wenig voneinander unterscheiden.

Bei gegebenem μ erscheinen die mittleren Fehler M_x , M_y und M_p als Funktionen der Argumente b , i und g , die ihrerseits untereinander in einem gewissen Zusammenhang stehen.

Geht man von der diesen Ausführungen zugrunde gelegten Voraussetzung bezüglich der Form der Dreieckskette aus, so entspricht die annähernd konstante Seitenlänge der einzelnen Dreiecke beiläufig der Basislänge b .

Zwischen dem $(2i-1)$ -ten oder dem $(2i)$ -ten Netzpunkt und dem entsprechenden linken bzw. rechten Endpunkt der Basis liegen in kürzester Verbindungslinie je i solche Dreiecksseiten von der Länge b . Bezeichnet man mit S den kürzesten Abstand des $(2i-1)$ -ten oder $(2i)$ -ten Netzpunkts vom entsprechenden Basisendpunkt, so ist also

$$S = ib$$

und dementsprechend

$$i = \frac{S}{b} \dots \dots \dots (52).$$

Es mögen ferner die einzelnen, den Richtungen der Dreiecksseiten beiläufig folgenden Rautenzüge in den durch ihre Radialpunkte gebildeten Polygonzügen alle je n Seiten von der gleichen Länge s aufweisen. Dann hat man für die annähernd konstante Seitenlänge in der Dreieckskette, und damit zugleich auch für die Basislänge

$$b = ns \dots \dots \dots (53).$$

Im Hinblick darauf kann man also (52) in der Form

$$i = \frac{S}{ns} \dots \dots \dots (54)$$

darstellen.

Was schliesslich g anbelangt, so erscheint dieses Element nach der Formel (5) ebenfalls als Funktion von n .

Substituiert man in den Formeln (42) — (49) für g , b , i die entsprechenden Ausdrücke (5), (53), (54), und betrachtet man S als gegebenen Parameter, so erhält man die mittleren Fehler M_x , M_y , M_p als Funktionen der mehr oder weniger frei zu wählenden

Argumente n und s . In solcher Form können die erwähnten Formeln dann als Unterlage für eine Untersuchung der Frage dienen, welche Werte von n und s zu wählen sind, um im Dreiecksnetz in einem bestimmten Abstand S von der Basis bei gegebenem μ den kleinsten Koordinaten- bzw. Lagefehler zu erzielen.

Hierzu ist zu bemerken, dass bei gegebenem Bildformat und Überdeckungsverhältnis die Seitenlänge s des in einem Rautenzug enthaltenen Polygonzugs im wesentlichen vom Bildmassstab abhängt, — dass also ein gewisser im angedeuteten Sinn optimaler Wert von s nur durch entsprechende Wahl des Bildmassstabs zu erzielen ist. Das bedeutet, dass im Fall der Behandlung von s als einem für die in der Dreieckskette erzielte Genauigkeit massgebenden variablen Argument die grundsätzliche Frage nach dem Einfluss des Bildmassstabs auf die Genauigkeit der Radialtriangulation aufgerollt werden muss. Da eine Diskussion dieser Frage im Rahmen der vorliegenden Untersuchung nicht beabsichtigt ist, mag also im folgenden s — ebenso wie μ und S — als durch betreffende vorliegende Umstände bedingter Parameter gelten. Damit erscheint dann der in oben angedeuteter Weise ausgedrückte mittlere Koordinaten- bzw. Lagefehler an einer bestimmten Stelle der Dreieckskette als Funktion eines einzigen frei zu wählenden Arguments n .

Die in üblicher Weise zu bewirkende Ermittlung des zur Erzielung grösstmöglicher Genauigkeit an bestimmter Stelle der Dreieckskette erforderlichen Werts von n bereitet keine besonderen Schwierigkeiten, wenn die Zahlenwerte der betreffenden Parameter bekannt sind. Sehr erhebliche Schwierigkeiten stehen dagegen der Lösung dieser Aufgabe in allgemeiner Form im Wege.

Deswegen soll hier nur an einem Zahlenbeispiel gezeigt werden, welche Zusammenhänge bei gegebenen konstanten Werten von μ und s zwischen wechselnden Werten von n und den entsprechenden mittleren Lagefehlern eines Netzpunkts T in verschiedenem Abstand S von der Basis bestehen.

Dieses Beispiel bezieht sich auf 5 Dreiecksketten, in denen die den einzelnen Dreiecksseiten folgenden Rautenzüge aus $n=1$, bzw. 2, bzw. 4, bzw. 8, bzw. 16 Polygonseiten von der in allen 5 Dreiecksketten gleichen Länge $s=1000$ m bestehen. Dementsprechend sind also in den einzelnen Dreiecksketten die Basislängen $b=1000$ m, bzw. 2000 m, bzw. 4000 m, bzw. 8000 m, bzw. 16.000 m zu setzen (Abb. 5).

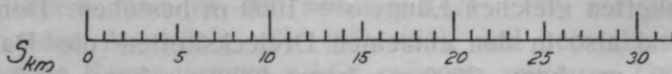
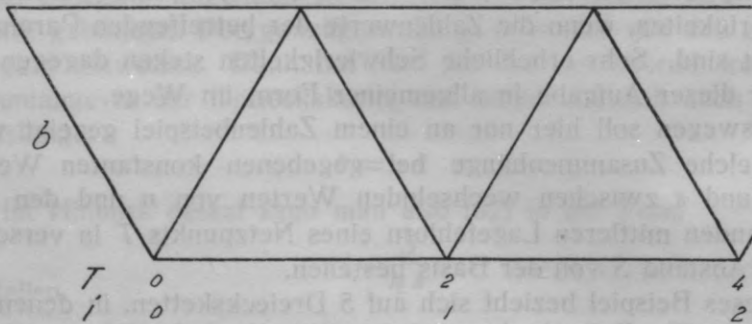
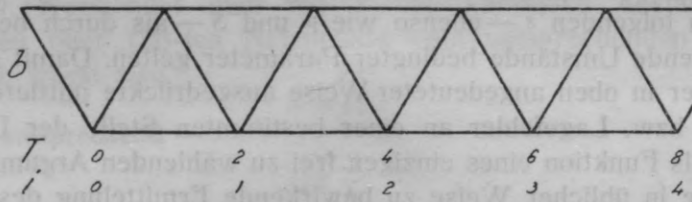
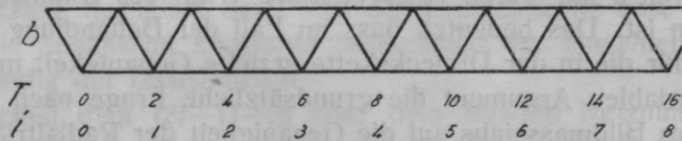
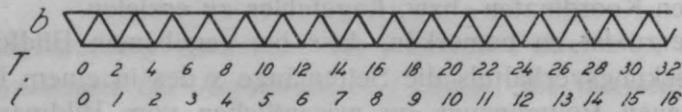
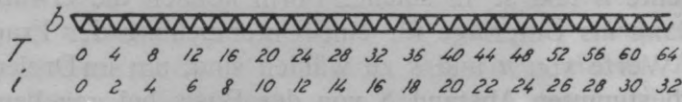


Abb. 5.

In der Annahme, dass die Winkel der Rautenzüge mit dem mittleren Fehler $\mu = \pm 1'$ gemessen seien, sind die mittleren Lagefehler der an der rechten Seite der Dreiecksketten gelegenen Netzpunkte für Abstände S bis zu 64 km berechnet, und zwar sowohl nach der vollständigen Formel (45) oder (47), als auch nach der abgekürzten (49). Ausserdem sind auch die mittleren Lagefehler berechnet, die in einem mit denselben obenerwähnten Werten von s und μ angelegten bzw. gemessenen einfachen Rautenzug in entsprechenden Abständen S von der Basis zu erwarten sind. Die Ergebnisse dieser Berechnungen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. (Siehe Tabelle Seite 32 u. 33.)

Aus dieser Tabelle ist zunächst ersichtlich, dass bei kleinem n bzw. g die nach der abgekürzten Formel berechneten mittleren Lagefehler sich nur wenig von denen unterscheiden, die sich nach der vollständigen Formel ergeben. Dagegen weisen die nach der einen und der anderen Formel berechneten Werte bei grösserem n bzw. g mehr oder weniger beträchtliche Unterschiede auf; und zwar erhält man nach der abgekürzten Formel für kleine Abstände S zu kleine, für grosse Abstände S zu grosse Werte des mittleren Lagefehlers. Es gibt also allgemein für jede aus Rautenzügen gebildete Dreieckskette einen solchen Abstand S von der Basis, für den die abgekürzte Formel (49) denselben Wert des mittleren Lagefehlers ergibt, wie die vollständige Formel (45). Dieser Abstand, bzw. der entsprechende Wert von i lässt sich übrigens leicht ermitteln, indem man in der Formel (47) das zweite Glied des unter dem Wurzelzeichen stehenden Ausdrucks gleich Null setzt und die so erhaltene Gleichung nach i auflöst. Das hier über die vollständigen Formeln (45) und (47) und die abgekürzte Formel (49) Gesagte gilt übrigens sinngemäss auch für die Formeln (44), (46) und (48).

Ferner zeigt die Tabelle, dass derjenige Wert von n , für den sich an einer bestimmten Stelle der Dreieckskette unter gegebenen sonstigen Umständen die grösstmögliche Genauigkeit ergibt, je nach der Grösse des betreffenden Abstands S von der Basis verschieden ist, und zwar mit Vergrösserung von S ebenfalls grösser wird. In der Tabelle sind diejenigen Werte des mittleren Lagefehlers, welche den für die betreffenden Abstände von der Basis in solcher Hinsicht vorteilhaftesten Werten von n entsprechen, durch kräftigere Umrandung hervorgehoben.

Abstand v. der Basis S in km	$n =$	1		2		4		8		16		einf. R.-Zug
	$b =$	1000 m		2000 m		4000 m		8000 m		16000 m		
	$g =$	0,0000		0,2500		0,8750		2,1875		4,8438		
mittl. Lagefehler $\pm M_p$ in m												
nach	(45)	(49)	(45)	(49)	(45)	(49)	(45)	(49)	(45)	(49)	(45)	(49)
1	0,5	0,4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,7
2	1,0	0,9	1,1	0,9	—	—	—	—	—	—	—	1,6
3	1,7	1,6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2,7
4	2,5	2,4	2,4	2,3	3,0	2,5	—	—	—	—	—	3,9
5	3,4	3,3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	5,3
6	4,3	4,3	4,0	3,9	—	—	—	—	—	—	—	6,8
7	5,4	5,4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	8,4
8	6,5	6,5	5,9	5,9	6,3	6,1	8,1	7,0	—	—	—	10,2
9	7,8	7,8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	12,0
10	9,0	9,0	8,1	8,1	—	—	—	—	—	—	—	14,0
11	10,4	10,4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	16,0
12	11,8	11,8	10,5	10,5	10,7	10,6	—	—	—	—	—	18,2
13	13,3	13,3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	20,4
14	14,8	14,8	13,1	13,1	—	—	—	—	—	—	—	22,7
15	16,4	16,4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	25,1
16	18,0	18,0	15,9	15,9	15,8	15,9	17,4	17,1	22,7	19,6	—	27,6
17	19,7	19,7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	30,1
18	21,4	21,4	18,8	18,8	—	—	—	—	—	—	—	32,7
19	23,2	23,2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	35,4
20	25,0	25,0	22,0	22,0	21,6	21,9	—	—	—	—	—	38,2
21	26,9	26,9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	41,0
22	28,8	28,8	25,3	25,3	—	—	—	—	—	—	—	43,9
23	30,8	30,8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	46,9
24	32,8	32,8	28,7	28,8	28,1	28,4	29,4	29,7	—	—	—	49,9
25	34,8	34,8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	53,0
26	36,9	36,9	32,3	32,4	—	—	—	—	—	—	—	56,1
27	39,1	39,1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	59,3
28	41,2	41,2	36,0	36,1	35,1	35,5	—	—	—	—	—	62,6
29	43,4	43,4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	65,9
30	45,7	45,7	39,9	40,0	—	—	—	—	—	—	—	69,3
31	48,0	48,0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	72,7
32	50,3	50,3	43,9	44,0	42,6	43,1	43,7	44,5	48,6	48,1	—	76,2

Abstand v. der Basis S in km	$n =$	1		2		4		8		16		einf. R.-Zug
	$b =$	1000 m		2000 m		4000 m		8000 m		16000 m		
	$g =$	0,0000		0,2500		0,8750		2,1875		4,8433		
mittl. Lagefehler $\pm M_p$ in m												
nach	(45)	(49)	(45)	(49)	(45)	(49)	(45)	(49)	(45)	(49)	(45)	(49)
33	52,6	52,6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	79,8
34	55,0	55,0	48,0	48,1	—	—	—	—	—	—	—	83,4
35	57,4	57,4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	87,0
36	59,9	59,9	52,2	52,3	50,6	51,2	—	—	—	—	—	90,7
37	62,4	62,4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	94,5
38	64,9	64,9	56,6	56,7	—	—	—	—	—	—	—	98,3
39	67,5	67,5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	102,1
40	70,1	70,1	61,0	61,2	59,0	59,7	59,9	61,1	—	—	—	106,0
41	72,7	72,7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	110,0
42	75,4	75,4	65,6	65,8	—	—	—	—	—	—	—	114,0
43	78,1	78,1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	118,0
44	80,8	80,8	70,3	70,5	67,9	68,6	—	—	—	—	—	122,1
45	83,5	83,5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	126,3
46	86,3	86,3	75,1	75,3	—	—	—	—	—	—	—	130,4
47	89,1	89,1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	134,7
48	92,0	92,0	80,0	80,2	77,2	78,0	77,9	79,4	82,4	83,8	—	138,9
49	94,8	94,8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	143,3
50	97,7	97,7	85,0	85,2	—	—	—	—	—	—	—	147,6
51	100,7	100,7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	152,0
52	103,6	103,6	90,1	90,3	86,9	87,7	—	—	—	—	—	156,5
53	106,6	106,6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	161,0
54	109,6	109,6	95,3	95,6	—	—	—	—	—	—	—	165,5
55	112,7	112,7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	170,1
56	115,8	115,8	100,6	100,9	97,0	97,8	97,4	99,2	—	—	—	174,7
57	118,9	118,9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	179,4
58	122,0	122,0	106,0	106,3	—	—	—	—	—	—	—	184,1
59	125,1	125,1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	188,8
60	128,3	128,3	111,5	111,8	107,4	108,3	—	—	—	—	—	193,6
61	131,5	131,5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	198,4
62	134,8	134,8	117,1	117,3	—	—	—	—	—	—	—	203,3
63	138,0	138,0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	208,2
64	141,3	141,3	122,8	123,0	118,2	119,1	118,4	120,4	122,5	125,5	—	213,1

Vergleicht man diese mittleren Lagefehler mit denen, die sich in entsprechendem Abstand von der Basis in einem dieselben Polygonseitenlängen s aufweisenden einfachen Rautenzug ergeben, so tritt in dieser Hinsicht eine recht wesentliche Überlegenheit der Dreieckskette gegenüber dem einfachen Rautenzug zutage. Das den relativen Genauigkeitsgewinn charakterisierende Verhältnis des Unterschieds zwischen entsprechenden mittleren Lagefehlern in der Dreieckskette und dem einfachen Rautenzug zum entsprechenden mittleren Lagefehler im Rautenzug ist je nach der Grösse des Abstands S verschieden. Es wird mit zunehmendem S grösser und beträgt im hier behandelten Beispiel bei $S = 1 \text{ km}$ — ca. 29%, bei $S = 64 \text{ km}$ — ca. 45%.

Bietet also die aus Rautenzügen gebildete Dreieckskette gegenüber dem einfachen Rautenzug hinsichtlich der Genauigkeit recht beträchtliche Vorteile, so beansprucht andererseits die Dreieckskette einen wesentlich grösseren Aufwand von Zeit und Arbeit, sowohl für die flugtechnische Durchführung, als für die Ausgleichung und Berechnung. Dieser Nachteil dürfte aber wohl dadurch wettgemacht werden, dass vermittels einer aus Rautenzügen gebildeten Dreieckskette die photogrammetrische Passpunktbestimmung in einem bedeutend breiteren Streifen erfolgt, als vermittels eines gewöhnlichen einfachen Rautenzugs.

Absolut genommen, sind die für das hier gewählte Beispiel errechneten mittleren Lagefehler allerdings auch für die aus Rautenzügen gebildete Dreieckskette reichlich gross. Hierzu ist zu bemerken, dass die in diesem Beispiel vorausgesetzten Umstände keineswegs die praktisch erreichbar günstigsten sind. In dieser Hinsicht ist zu beachten, dass die Genauigkeit der Lagebestimmung in der Dreieckskette augenscheinlich umso grösser wird, je kleiner μ und g ist, wobei die Verkleinerung von g bzw. n durch entsprechende Vergrösserung von s bewirkt werden kann. Im vorliegenden Beispiel sind für μ und s die runden Werte $\pm 1'$ und 1000 m angenommen. Was nun den mittleren Fehler der Winkelmessung μ anbelangt, so dürfte derselbe beim heutigen Stand der photogrammetrischen Technik, bei Benutzung entsprechender Spezialgeräte — etwa des v. Gruberschen Radialtriangulators — wohl nicht unbeträchtlich unter $1'$ herabgedrückt werden können. Für die Vergrösserung von s kommt ausser der — hinsichtlich ihres sonstigen Einflusses auf die Genauigkeit der Radialtriangulation hier nicht

untersuchten — Verkleinerung des Bildmassstabs auch noch die Vergrößerung des Bildformats in Betracht, wobei in dieser Hinsicht zweckmässig eingerichtete Panoramenkammern von grossem Nutzen sein dürften.

Wenn hier ausschliesslich sog. offene, d. h. nur an einem Ende Basis- bzw. Festpunktanschluss habende, aus Rautenzügen gebildete Dreiecksketten behandelt wurden, so soll damit natürlich nicht gesagt sein, dass solche Dreiecksketten nicht auch dann in Frage kommen, wenn es sich um die photogrammetrische Überbrückung unzugänglicher Räume zwischen gegebenen Festpunkten bzw. Festpunktinseln handelt. Die unter solchen Umständen in Betracht kommenden Fälle sollen hier nicht näher untersucht werden. Es ist aber wohl selbstverständlich, dass auch in solchen Fällen aus Rautenzügen gebildete Dreiecksketten gegenüber einfachen Rautenzügen ähnliche Vorteile bieten, wie im hier behandelten Fall. Natürlich sind unter solchen günstigeren Umständen dementsprechend ihrem Absolutwert nach erheblich bessere Genauigkeitsergebnisse zu erwarten.

Der Fakultät vorgelegt den 6. Dez. 1935.

¹⁾ A. Kint, Anwendung der Radialtriangulation in Niederländisch-Indien. Bildm. u. Luftbildw., 1935, Nr. 2.

²⁾ A. Buchholtz, Zur Fehlertheorie des Rautenzugs. Intern. Archiv f. Photogrammetrie, VIII/1, 1934.

³⁾ A. Buchholtz, Zur Fehlertheorie des Rautenzugs. Intern. Archiv f. Photogrammetrie, VIII/1, 1934.

⁴⁾ Unter $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\gamma]$ sind die ausgeglichenen Werte der betreffenden Winkel zu verstehen.

No rombu gājieniem sastādītas trijstūru virknes.

A. Buchholcs.

Citā rakstā iztirzātajā rombu gājienu teorijā pierādīts, ka šādos gājienos šķērsklūdas M_y ievērojami mazākas par atbilstošām garenklūdām M_x . Izmantojot šo apstākli, iespējams panākt ar radiāltriangulāciju augstāku noteiktību, savienojot vairākus atsevišķus rombu gājienu tīklā tā, lai ar šo gājienu gala punktiem noteiktās taisnes veidotu apmēram rēgulāru trijstūru virkni.

Tādā trijstūru virknē katru leņķi var uzskatīt par triju komponentu algebraisko summu. No šiem komponentiem viens izmērījams tieši attiecīgā ainā; bet pārējie divi nosakāmi no atbilstošiem rombu gājieniem, pagaidām izlīdzinot un aplešot katru šādu gājienu atsevišķi, neatkarīgi no pārējiem.

Šeit apskatīts gadījums, kad, trijstūru virknei vispārīgi atrodoties nepieejamā teritorijā, virknes pirmā trijstūra divas virsotnes atrodas pieejamā vietā un nosakāmas ar praktiski nesvarīgām klūdām. Tā tad ar šiem diviem punktiem noteikta trijstūru virknes baze. Bez tam pieņemts, ka ainās, kur baze gala punkti spēlē radiālpunktu lomu, identificējami virzieni uz diviem pēc stāvokļa horizontālā projekcijā bez praktiski manāmas klūdas dotiem pamatpunktiem.

Attiecībā uz trijstūru malu noteicējiem rombu gājieniem pieņemts, ka tiem visiem ir vienāds vienāda gaŗuma malu skaits n , un ka visi, rombu gājienu un vispārīgi ainās, izmērītie leņķi nosacīti ar vienādu vidējo klūdu μ . Tad uz atbilstošā rombu gājiena pirmo resp. pēdējo malu attiecinātie trijstūru malu virzieni nosakāmi ar vienādu, pēc formulas (2) aplešamo vidējo klūdu.

Tādos apstākļos augšā minētā veidā nosacītie leņķi visi iznāk ar vidējo klūdu (4), izņemot tikai divus, pirmā trijstūrī bazei pieguļošos leņķus, kuŗu vidējā klūda noteikta ar formulu (3). Tā tad atsevišķiem leņķiem piešķirami svāri, kuŗu pretējās vērtības aizrādītas tabulā (6).

Trijstūru virknē nosacīto leņķu izlīdzināšana izdarāma pa atsevišķiem trijstūriem, katram neatkarīgi no pārējiem, pie kam

katra atsevišķa trijstūra leņķi padoti tikai vienam tipa (7) noteikumam.

Ar izlīdzinātiem leņķiem aplēšot trijstūru virknes virsotņu taisnleņķu koordinātas x un y , koordinātu sistēmu var izvēlēties tā, lai x -ass ieslēgtu ar bazi leņķi ω ap 60° , tā tad būtu orientēta apmēram virknes garenvirzienā. Tādā sistēmā aplēsto koordinātu x un y vidējās kļūdas identiskas ar attiecīgās virsotnes vidējo garen- resp. šķērsklūdu trijstūru virknē.

Parastajā kārtībā vispārējā veidā aplēstas trijstūru virknes virsotnes vidējā garen- un šķērsklūda M_x un M_y un atbilstošā vidējā stāvokļa kļūda M_p . Šis aplēsums izdarīts atsevišķi virsotnēm — ar nepārskaitļu numuriem ($2i-1$), — kas atrodas virknes kreisajā pusē, un virsotnēm — ar pārskaitļu numuriem, — kas atrodas virknes labajā pusē. Atrastās pilnīgās formulas (44)—(47) zināmos apstākļos aizstājamas ar vienkāršākām saīsinātām formulām (48)—(49) resp. vienu kopīgo (51), kur ar i sakarā (50) stāvošais r apzīmē vispārējo — nepārskaitļu vai pārskaitļu — virsotnes numuru.

Minētās formulas, starp citu, rāda, ka — pretēji parastajam vienkāršajam rombu gājienam — no tādiem gājieniem sastādītā trijstūru virknē garenklūdas M_x tikai ļoti maz atšķiras no atbilstošām šķērsklūdām M_y .

Formulas izsaka kļūdas M_x un M_y un atbilstošo vidējo stāvokļa kļūdu M_p kā argumentu b , i un g funkcijas ar parametru μ , pie kam b apzīmē trijstūru virknes bazes garumu, i — no attiecīgās virsotnes numura resp. stāvokļa virknē atkarīgu skaitli, bet g ir koeficients, kas savukārt noteikts ar virknes sastādīšanai lietotajos atsevišķajos rombu gājienu ietilpstošo poligōngājienu malu garumu s un skaitu n .

Izejot no svarīgās virsotnes atstatuma S no bazes, visus minētos elementus b , i , g un tā tad arī virsotnes vidējo stāvokļa kļūdu M_p var izteikt kā argumentu s un n funkcijas ar parametriem μ un S . Tādā veidā pārvērsta, kļūdas M_p noteicēja formula var noderēt par pamatu to s un n optimālo vērtību noteikšanai, kuŗām ar dotiem parametriem μ un S raksturotos apstākļos trijstūru virknes zināmā vietā atbilst minimālā kļūda M_p .

Šinī ziņā jāievēro, ka ar doto lietotās fotokameras ainu formātu elementa s rēgulēšana saistīta ar attiecīgo ainu mēroga grozīšanu. Tā tad uzskatot augšā minētā iztīrājuma ne tikai n , bet arī s par brīvi izvēlamu elementu, līdz ar to paceltos principiālais

jautājums par radiāltriangulācijas noteiktības atkarību no lietoto ainu mēroga. Šis jautājums līdz šim vēl nav iztirzāts, un nav arī domāts to darīt šinī rakstā. Tāpēc turpmākos no šinī rakstā atrastām formulām taisītos secinājumos pieņemts, ka virsotnes vidējā stāvokļa kļūdas noteicēja formula izsaka šo kļūdu M_p kā viena vienīga argumenta n funkciju pie apstākļiem atbilstošiem parametriem μ , S , s , no kuriem s atkarīgs no lietoto ainu mēroga.

Parametriem μ un s paliekot konstantiem, bet trešajam parametram S mainoties, atbilstošā kļūdas M_p vērtība, saprotams, arī mainās pēc kāda zināma likuma. Šā likuma izteikšana vispārējas formulas veidā saistīta ar zināmām matemātiskām grūtībām. Tāpēc vispārējas formulas vietā apskatīts skaitlisks piemērs, kas, starp citu, paskaidro elementa n optimālās vērtības atkarību no atstatuma S un vispārīgi parāda, kādas ir sagaidāmas uz šeit iztirzātās teorijas pamata zināmos dotos apstākļos vidējās stāvokļa kļūdas no rombu gājieniem sastādītā trijstūru virknē dažādos atstatumos S no bāzes.

Vienmēr pieņemot $\mu = \pm 1'$ un $s = 1000$ m, šinī piemērā apskatītas 5 trijstūru virknes, kur $n = 1$, resp. 2, resp. 4, resp. 8, resp. 16. Vidējās stāvokļa kļūdas aplēstas — kā pēc pilnīgās, tā arī pēc saīsinātās formulas — trijstūru virknes labās puses virsotnēm atstatumos līdz 64 km no bāzes. Bez tam salīdzināšanai aplēstas atbilstošās vidējās stāvokļa kļūdas arī parastajā vienkāršajā rombu gājienā.

No tabulas, kur sagrupēti šo aplēsumu rezultāti, redzams, ka pēc pilnīgās un pēc saīsinātās formulas aplēstās atbilstošās M_p vērtības atšķiras jo mazāk, jo mazāks ir elements n resp. no tā atkarīgs g . Bez tam redzams, ka atstatumam S pieaugot, pieaug arī atbilstošā elementa n optimālā vērtība. Beidzot, salīdzinot no rombu gājieniem sastādītajā trijstūru virknē dažādos atstatumos S no bāzes iznākušās vidējās stāvokļa kļūdas M_p ar atbilstošām kļūdām vienkāršā rombu gājienā, izrādās, ka šīs kļūdas trijstūru virknē ievērojami mazākas. Ja veidosim diferenci starp kļūdu M_p trijstūru virknē un atbilstošo kļūdu vienkāršā rombu gājienā, un šo diferenci attiecināsim pret vidējo stāvokļa kļūdu vienkāršā rombu gājienā, tad šī attiecība iznāk jo lielāka, jo lielāks ir atstatums S . Apskatītā piemērā tā ir atstatumā $S = 1$ km — 29%, bet atstatumā $S = 64$ km — 45%.

Zur Ausgleichung von Rautenzügen.

A. Buchholtz.

Der von den Radialpunkten eines Rautenzugs gebildete Polygonzug unterscheidet sich von einem terrestrischen Polygonzug hauptsächlich dadurch, daß seine einzelnen Seitenlängen nicht jede für sich, unabhängig von den übrigen, bestimmt werden. Vielmehr wird jede folgende Polygonseite mit gewissen im Rautenzug gemessenen Winkeln trigonometrisch aus der vorhergehenden abgeleitet, wobei die Fehlerfortpflanzung natürlich eine recht ungünstige ist. In diesem Umstand ist also wohl eine sehr wesentliche Ursache der im Vergleich zum terrestrischen Polygonzug recht geringen Genauigkeit des Rautenzugs zu erblicken.

Es ist daher einleuchtend, daß man bessere Genauigkeitsergebnisse erzielen kann, wenn man in gewissen Abständen einige Seitenlängen des im Rautenzug enthaltenen Polygonzugs der Radialpunkte unmittelbar terrestrisch bestimmt, oder aus mit ihnen in einfache trigonometrische Verbindung gebrachten und im Gelände gemessenen Längen ableitet. Auf solche Weise unabhängig voneinander und mit verhältnismäßig großer Genauigkeit nur der Länge nach bestimmte Polygonseiten sollen im folgenden als „unorientierte Hilfsbasen“ des Rautenzugs bezeichnet werden.

Selbstverständlich kommen Rautenzüge mit unorientierten Hilfsbasen praktisch nur dann in Betracht, wenn es sich um nicht völlig unzugängliches Gelände handelt, in dem die erforderlichen terrestrischen Längenmessungen auf keine unüberwindlichen Schwierigkeiten stoßen.

Was die technische Ausführung solcher Messungen anbelangt, so wird man wohl aus wirtschaftlichen Rücksichten auf die Anwendung von Präzisionsverfahren verzichten, und sich auf gewöhnliche Stahlbandmessung oder sogar auf mehr oder weniger genaue optische Distanzmessung beschränken müssen. Immerhin dürften auch

auf solche Weise terrestrisch bestimmte Hilfsbasen im Rautenzug als der Länge nach praktisch fehlerfrei gegebene Elemente gelten können.

Durch die Einführung unorientierter Hilfsbasen werden im Rautenzug gewisse bei der Ausgleichung zu berücksichtigende und dieselbe grundsätzlich komplizierende zusätzliche Bedingungen geschaffen.

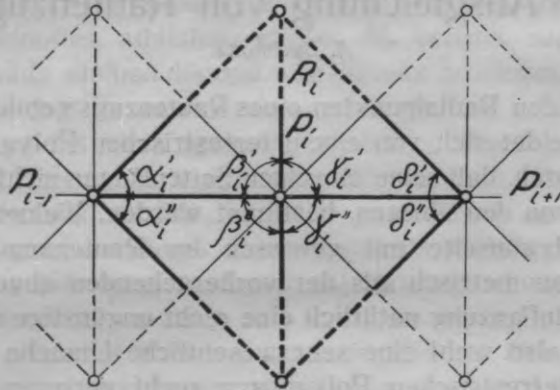


Abb. 1.

Sind in jedem beliebigen Rautenelement R_i die bei gegebener Zugrichtung linken und rechten Winkel α_i' , β_i' , γ_i' , δ_i' bzw. α_i'' , β_i'' , γ_i'' , δ_i'' (Abb. 1) unabhängig voneinander gemessen, so müssen die ausgeglichenen Werte [] dieser Winkel u. a. den „lokalen“ Bedingungengleichungen

$$[\beta_i'] + [\gamma_i'] + [\beta_i''] + [\gamma_i''] - 360^\circ = 0 \dots \dots (1)$$

$$\frac{\sin [\alpha_i']}{\sin [\alpha_i' + \beta_i']} \cdot \frac{\sin [\gamma_i' + \delta_i']}{\sin [\delta_i']} \cdot \frac{\sin [\delta_i'']}{\sin [\gamma_i'' + \delta_i'']} \cdot \frac{\sin [\alpha_i'' + \beta_i'']}{\sin [\alpha_i'']} = 1 \dots (2)$$

genügen.

Beständen keinerlei sonstigen Bedingungen, so könnten also die Winkel jedes einzelnen Rautenelements völlig unabhängig von den übrigen Winkeln ausgeglichen werden.

Im folgenden wird nun aber angenommen, daß in dem durch die Radialpunkte gebildeten Polygonzug gewisse Seiten als unorientierte Hilfsbasen bestimmt sind, durch welche der Rautenzug in entsprechende Abschnitte gegliedert wird.

Es mögen am Anfang und am Ende eines solchen Abschnitts die Hilfsbasen b_r und b_{r+n} gegeben sein, die durch die Rautengruppe $\{R_1, R_2, \dots, R_i, \dots, R_{n-1}, R_n\}$ trigonometrisch verbunden sind

(Abb. 2). Die ausgeglichenen Winkel dieses Abschnitts müssen also außer den die einzelnen Rautenelemente für sich betreffenden „lokalen“ Bedingungsgleichungen (1) und (2) auch noch einer „allgemeinen“ Basisgleichung genügen, die man etwa in der die linken Winkelgruppen erfassenden Form

$$\left\{ \left(\frac{\sin [\alpha_1']}{\sin [\alpha_1' + \beta_1']} \cdot \frac{\sin [\gamma_1' + \delta_1']}{\sin [\delta_1']} \right) \cdot \left(\frac{\sin [\alpha_2']}{\sin [\alpha_2' + \beta_2']} \cdot \frac{\sin [\gamma_2' + \delta_2']}{\sin [\delta_2']} \right) \cdot \dots \right. \\ \cdot \left(\frac{\sin [\alpha_i']}{\sin [\alpha_i' + \beta_i']} \cdot \frac{\sin [\gamma_i' + \delta_i']}{\sin [\delta_i']} \right) \cdot \dots \\ \cdot \left(\frac{\sin [\alpha_{n-1}']}{\sin [\alpha_{n-1}' + \beta_{n-1}']} \cdot \frac{\sin [\gamma_{n-1}' + \delta_{n-1}']}{\sin [\delta_{n-1}']} \right) \cdot \\ \left. \left(\frac{\sin [\alpha_n']}{\sin [\alpha_n' + \beta_n']} \cdot \frac{\sin [\gamma_n' + \delta_n']}{\sin [\delta_n']} \right) \right\} = \frac{b_{r+n}}{b_r} \dots (3)$$

darstellen kann.

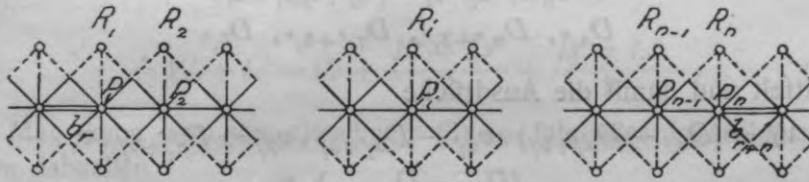


Abb. 2.

Unter solchen Umständen würde eine in aller Strenge durchgeführte Ausgleichsrechnung einen größeren Arbeitsaufwand erheischen, als durch die recht mäßige Genauigkeit der Radialtriangulation gerechtfertigt erscheint. Es sind daher für die innere Ausgleichung der einzelnen Abschnitte geeignete vereinfachte Verfahren besser am Platz. Ein solches Verfahren soll im folgenden entwickelt werden.

Nach diesem Verfahren werden zunächst für jedes einzelne Rautenelement die in dessen mittlerem Radialpunkt P_i (Abb. 1) gemessenen Winkel β_i' , γ_i' , β_i'' , γ_i'' stationsweise hinsichtlich der Bedingung (1) ausgeglichen, indem jedesmal der Widerspruch zu gleichen Teilen auf die betreffenden Winkel verteilt wird.

Die auf solche Weise nur hinsichtlich der Bedingung (1) ausgeglichenen Winkel β_i' , γ_i' , β_i'' , γ_i'' und die noch garnicht ausgeglichenen

Winkel $\alpha_i', \delta_i', \alpha_i'', \delta_i''$ müssen nun zwecks endgültiger innerer Ausgleichung gewisse Verbesserungen

$$\begin{aligned} &v_{\alpha_i'}, v_{\beta_i'}, v_{\gamma_i'}, v_{\delta_i'} \\ &v_{\alpha_i''}, v_{\beta_i''}, v_{\gamma_i''}, v_{\delta_i''} \end{aligned}$$

erhalten. Diese Verbesserungen sind so zu wählen, daß einerseits die Bedingungen (2) und (3) erfüllt werden, andererseits die bereits erzielte Erfüllung der Bedingung (1) nicht gestört wird.

Wir wenden uns nun zunächst der Bedingung (2) zu. Es mögen für die unausgeglichene, bzw. vorläufig stationsweise ausgeglichene Winkel die

$$\begin{aligned} &\log \sin \alpha_i', \log \sin (\alpha_i' + \beta_i'), \log \sin (\gamma_i' + \delta_i'), \log \sin \delta_i' \\ &\log \sin \alpha_i'', \log \sin (\alpha_i'' + \beta_i''), \log \sin (\gamma_i'' + \delta_i''), \log \sin \delta_i'' \end{aligned}$$

nebst den entsprechenden Tabellendifferenzen

$$\begin{aligned} &D_{\alpha_i'}, D_{\alpha_i'+\beta_i'}, D_{\gamma_i'+\delta_i'}, D_{\delta_i'} \\ &D_{\alpha_i''}, D_{\alpha_i''+\beta_i''}, D_{\gamma_i''+\delta_i''}, D_{\delta_i''} \end{aligned}$$

ermittelt und damit die Ausdrücke

$$\begin{aligned} V_i' = &(D_{\alpha_i'} - D_{\alpha_i'+\beta_i'}) \cdot v_{\alpha_i'} - D_{\alpha_i'+\beta_i'} \cdot v_{\beta_i'} + D_{\gamma_i'+\delta_i'} \cdot v_{\gamma_i'} - \\ &-(D_{\delta_i'} - D_{\gamma_i'+\delta_i'}) \cdot v_{\delta_i'} \dots \dots \dots (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_i'' = &(D_{\alpha_i''} - D_{\alpha_i''+\beta_i''}) \cdot v_{\alpha_i''} - D_{\alpha_i''+\beta_i''} \cdot v_{\beta_i''} + D_{\gamma_i''+\delta_i''} \cdot v_{\gamma_i''} - \\ &-(D_{\delta_i''} - D_{\gamma_i''+\delta_i''}) \cdot v_{\delta_i''} \dots \dots \dots (5) \end{aligned}$$

und

$$L_i' = \log \sin \alpha_i' - \log \sin (\alpha_i' + \beta_i') + \log \sin (\gamma_i' + \delta_i') - \log \sin \delta_i' \dots (6)$$

$$L_i'' = \log \sin \alpha_i'' - \log \sin (\alpha_i'' + \beta_i'') + \log \sin (\gamma_i'' + \delta_i'') - \log \sin \delta_i'' \dots (7)$$

gebildet sein. Dann läßt sich die Gleichung (2) in logarithmischer Form wie folgt darstellen.

$$(V_i' + L_i') - (V_i'' + L_i'') = V_i' - V_i'' + (L_i' - L_i'') = 0 \dots (8),$$

wobei $(L_i' - L_i'')$ den logarithmischen Widerspruch der unausgeglichene Winkel bedeutet.

Unter der Voraussetzung annähernd symmetrischer Form der Rautenelemente erscheint es zulässig, den erwähnten Widerspruch zu gleichen Teilen der linken und der rechten Winkelgruppe $(\alpha_i', \beta_i', \gamma_i', \delta_i')$ und $(\alpha_i'', \beta_i'', \gamma_i'', \delta_i'')$ zur Last zu legen, indem man einzeln setzt

$$\left. \begin{aligned} V_i' &= -\frac{L_i' - L_i''}{2} \\ V_i'' &= +\frac{L_i' - L_i''}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9).$$

(11) Dementsprechend mag dann die Gleichung (8) in der Form

$$\left(V_i' + \frac{L_i' - L_i''}{2} \right) = \left(V_i'' - \frac{L_i' - L_i''}{2} \right),$$

oder noch anders

$$\left(V_i' + \frac{L_i' - L_i''}{2} + \Delta_i \right) = \left(V_i'' - \frac{L_i' - L_i''}{2} + \Delta_i \right) \dots \dots (10)$$

geschrieben werden. Hierbei bedeutet Δ_i eine vorläufig unbestimmte, also bis auf weiteres zu freier Verfügung stehende Größe.

Was nun die Bedingung (3) anbelangt, so ist für jedes beliebige Rautenelement R_i

$$\begin{aligned} \log \left(\frac{\sin [\alpha_i']}{\sin [\alpha_i' + \beta_i']} \cdot \frac{\sin [\gamma_i' + \delta_i']}{\sin [\delta_i']} \right) &= \\ = V_i' + L_i' &= V_i' + \frac{L_i' - L_i''}{2} + \frac{L_i' + L_i''}{2} \dots \dots (11). \end{aligned}$$

Man kann also die Gleichung (3) in folgender logarithmischer Form darstellen

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=n} (V_i' + L_i') - B &= \sum_{i=1}^{i=n} \left\{ \left(V_i' + \frac{L_i' - L_i''}{2} \right) + \frac{L_i' + L_i''}{2} \right\} - \\ - B &= \sum_{i=1}^{i=n} \left(V_i' + \frac{L_i' - L_i''}{2} \right) + \left(\sum_{i=1}^{i=n} \frac{L_i' + L_i''}{2} - B \right) = 0 \dots (12), \end{aligned}$$

wobei

$$B = \log b_{r+n} - \log b_r$$

ist.

Denkt man sich in den einzelnen Rautenelementen deren „lokale“ Widersprüche $(L_i' - L_i'')$ bezüglich der Bedingung (2) in der früher angedeuteten Weise auf die betreffende linke und rechte Winkelgruppe verteilt und durch die entsprechenden Winkelverbesserungen bereinigt, so bedeutet der Ausdruck

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{L_i' + L_i''}{2} - B \dots \dots \dots (13)$$

den auf die Bedingung (3) bezüglichen „allgemeinen“ logarithmischen Widerspruch.

Offenbar muß dieser Widerspruch Λ auf die einzelnen Rautenelemente verteilt werden. Deswegen mag die Gleichung (12) in der Form

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(V_i' + \frac{L_i' - L_i''}{2} + \Delta_i \right) = 0 \dots \dots \dots (14)$$

geschrieben werden, wobei natürlich

$$\sum_{i=1}^{i=n} \Delta_i = \Lambda$$

sein muß.

Unter der Voraussetzung, daß sämtliche Rautenelemente annähernd gleiche Form haben, erscheint es wohl zulässig, bei der Verteilung des Widerspruchs Λ alle Rautenelemente gleichmäßig in Mitleidenschaft zu ziehen, also

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_i = \dots = \Delta_{n-1} = \Delta_n = \frac{\Lambda}{n} \dots (15)$$

zu setzen. Dementsprechend ist dann die Gleichung (14) zu schreiben

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(V_i' + \frac{L_i' - L_i''}{2} + \frac{\Lambda}{n} \right) = 0 \dots \dots \dots (16).$$

Die einzelnen Summanden der linken Seite dieser Gleichung entsprechen der linken Seite der Gleichung (10), wenn man in derselben $\Delta_i = \frac{\Lambda}{n}$ setzt. Es ist klar, daß man der Gleichung (16), folglich auch der Bedingung (3) genügende Winkelverbesserungen bzw. ausgeglichene Winkel der linken Gruppen ($\alpha_i', \beta_i', \gamma_i', \delta_i'$) erhält, wenn man dieselben so wählt, daß für jedes einzelne Rautenelement die Bedingung

$$V_i' + \frac{L_i' - L_i''}{2} + \frac{\Lambda}{n} = 0 \dots \dots \dots (17)$$

erfüllt wird. Sollen dieselben Winkelverbesserungen bzw. ausgeglichenen Winkel zugleich auch der Bedingung (2) genügen, so muß im Hinblick auf (10) zugleich mit (17) auch die auf die entsprechende rechte Winkelgruppe

$$(\alpha_i'', \beta_i'', \gamma_i'', \delta_i'')$$

bezügliche Gleichung

$$V_i'' - \frac{L_i' - L_i''}{2} + \frac{\Lambda}{n} = 0 \dots \dots \dots (18)$$

erfüllt sein.

Damit die auf solche Weise hinsichtlich der Bedingungen (2) und (3) ausgeglichenen Winkel auch der Bedingung (1) genügen, mag in den Bedingungsgleichungen (17) und (18)

$$\left. \begin{aligned} v_{\beta_i'} &= -v_{\gamma_i'} = v' \\ v_{\beta_i''} &= -v_{\gamma_i''} = v'' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (19)$$

gesetzt werden.

Das hier entwickelte Verfahren läuft also darauf hinaus, daß man für jedes einzelne Rautenelement die Bedingungsgleichungen (17) und (18) ansetzt, die in ausführlicher Schreibweise folgendermaßen lauten:

$$\left. \begin{aligned} (D_{\alpha_i'} - D_{\alpha_i'+\beta_i'}) \cdot v_{\alpha_i'} - (D_{\alpha_i'+\beta_i'} + D_{\gamma_i'+\delta_i'}) \cdot v' - \\ - (D_{\delta_i'} - D_{\gamma_i'+\delta_i'}) \cdot v_{\delta_i'} + \frac{L_i' - L_i''}{2} + \frac{\Lambda}{n} = 0 \\ (D_{\alpha_i''} - D_{\alpha_i''+\beta_i''}) \cdot v_{\alpha_i''} - (D_{\alpha_i''+\beta_i''} + D_{\gamma_i''+\delta_i''}) \cdot v'' - \\ - (D_{\delta_i''} - D_{\gamma_i''+\delta_i''}) \cdot v_{\delta_i''} - \frac{L_i' - L_i''}{2} + \frac{\Lambda}{n} = 0 \end{aligned} \right\} \dots (20).$$

Die erste dieser Bedingungsgleichungen betrifft die linke, die zweite — die rechte Winkelgruppe eines einzelnen Rautenelements. Auf solche Weise wird also die innere Ausgleichung eines Abschnitts des Rautenzugs in eine Anzahl von Sonderausgleichungen nach den einzelnen Winkelgruppen der einzelnen Rautenelemente aufgelöst, wobei jedesmal nur eine einzige Bedingungsgleichung zu berücksichtigen ist.

Hierbei ist zu beachten, daß bei der Berechnung der Absolutglieder der erwähnten Bedingungsgleichungen einerseits die völlig unausgeglichenen Winkel

$$\alpha_i', \delta_i', \alpha_i'', \delta_i'',$$

andererseits die vorher bereits hinsichtlich der Bedingung (1) ausgeglichenen Winkel

$$\beta_i', \gamma_i', \beta_i'', \gamma_i''$$

benutzt wurden. Schreibt man einem gemessenen unausgeglichenen Winkel das Gewicht 1 zu, so müssen also die hinsichtlich der Bedingung (1) ausgeglichenen Winkel

$$\beta_i', \gamma_i', \beta_i'', \gamma_i''$$

das Gewicht $\frac{4}{3}$ erhalten.

Im übrigen kann die Ausgleichung auf Grund der entsprechenden Bedingungsgleichung (20) in üblicher Weise erfolgen. Die für jede Winkelgruppe einzige Korrelate k_i' bzw. k_i'' ist

$$k_i' = \frac{-\left(\frac{L_i' - L_i''}{2} + \frac{\Lambda}{n}\right)}{(D_{\alpha_i'} - D_{\alpha_i' + \beta_i'})^2 + 0,75(D_{\alpha_i' + \beta_i'} + D_{\gamma_i' + \delta_i'})^2 + (D_{\delta_i'} - D_{\gamma_i' + \delta_i'})^2}$$

bzw.

$$k_i'' = \frac{-\left(-\frac{L_i' - L_i''}{2} + \frac{\Lambda}{n}\right)}{(D_{\alpha_i''} - D_{\alpha_i'' + \beta_i''})^2 + 0,75(D_{\alpha_i'' + \beta_i''} + D_{\gamma_i'' + \delta_i''})^2 + (D_{\delta_i''} - D_{\gamma_i'' + \delta_i''})^2} \quad (21);$$

für die unmittelbar gemessenen Winkel $\alpha_i', \delta_i', \alpha_i'', \delta_i''$ und die vorläufig hinsichtlich der Bedingung (1) ausgeglichenen Winkel $\beta_i', \gamma_i', \beta_i'', \gamma_i''$ ergeben sich die Verbesserungen

$$\left. \begin{aligned} v_{\alpha_i'} &= + & v_{\alpha_i''} &= + \\ + (D_{\alpha_i'} - D_{\alpha_i' + \beta_i'}) \cdot k_i' & & + (D_{\alpha_i''} - D_{\alpha_i'' + \beta_i''}) \cdot k_i'' \\ v_{\beta_i'} &= - & v_{\beta_i''} &= - \\ - 0,75 (D_{\alpha_i' + \beta_i'} + D_{\gamma_i' + \delta_i'}) \cdot k_i' & & - 0,75 (D_{\alpha_i'' + \beta_i''} + D_{\gamma_i'' + \delta_i''}) \cdot k_i'' \\ v_{\gamma_i'} &= + & v_{\gamma_i''} &= + \\ + 0,75 (D_{\alpha_i' + \beta_i'} + D_{\gamma_i' + \delta_i'}) \cdot k_i' & & + 0,75 (D_{\alpha_i'' + \beta_i''} + D_{\gamma_i'' + \delta_i''}) \cdot k_i'' \\ v_{\delta_i'} &= - & v_{\delta_i''} &= - \\ - (D_{\delta_i'} - D_{\gamma_i' + \delta_i'}) \cdot k_i' & & - (D_{\delta_i''} - D_{\gamma_i'' + \delta_i''}) \cdot k_i'' \end{aligned} \right\} (22).$$

Bevor die eigentliche Ausgleichung in der durch diese Formeln angedeuteten Weise vorgenommen wird, müssen natürlich für die einzelnen Rautenelemente die betreffenden $\log \sin$ nebst den entsprechenden Tabellendifferenzen D ausgeschrieben und die Ausdrücke

$$\left(\frac{L_i' - L_i''}{2} + \frac{\Lambda}{n}\right) \text{ und } \left(-\frac{L_i' - L_i''}{2} + \frac{\Lambda}{n}\right) \text{ berechnet werden.}$$

Es empfiehlt sich, zugleich auch die entsprechenden Ausdrücke $\left(\frac{L_i' + L_i''}{2} - \frac{\Lambda}{n}\right)$ zu berechnen. Durch dieselben wird das für die

ausgeglichenen Winkel geltende Verhältnis der folgenden Polygonseite zur vorhergehenden in logarithmischer Form zum Ausdruck gebracht. Diese Logarithmen der Seitenverhältnisse können unmittelbar bei der Berechnung des Polygonzugs der Radialpunkte benutzt werden. Sie können aber auch zur Kontrolle der Ausgleichsrechnung Verwendung finden, denn es soll in jedem einzelnen Rautenelement sein

$$\begin{aligned} & \log \sin [\alpha_i'] - \log \sin [\alpha_i' + \beta_i'] + \log \sin [\gamma_i' + \delta_i'] - \log \sin [\delta_i'] = \\ & = \log \sin [\alpha_i''] - \log \sin [\alpha_i'' + \beta_i''] + \log \sin [\gamma_i'' + \delta_i''] - \log \sin [\delta_i''] = \\ & = \frac{L_i' + L_i''}{2} - \frac{\Delta}{n} \dots \dots \dots (23). \end{aligned}$$

Im Zusammenhang mit dieser Rechenkontrolle sei folgende Bemerkung eingeschaltet. Um die in Betracht kommenden transzendenten Bedingungsgleichungen auf lineare Form zu bringen, wurde hier das bekannte logarithmische Verfahren angewandt, wobei in üblicher Weise angenommen wurde, daß die Zunahme der Logarithmen proportional der Zunahme der betreffenden Winkelargumente erfolge. Diese bei sehr kleinen Veränderungen des Winkelarguments praktisch gewiß zulässige Annahme ist natürlich umso weniger begründet, je größer die in Betracht kommenden Winkelverbesserungen sind. Unter den bei Radialtriangulationen vorhandenen Umständen kann es daher vorkommen, daß aus diesem Grunde, trotz einwandfrei ausgeführter Rechnung, bei der Kontrolle der ausgeglichenen Winkel nach (23) restliche Widersprüche zutage treten, die über das den vorgenommenen Abrundungen entsprechende Maß hinausgehen.

Die praktische Bedeutung solcher — immerhin in recht bescheidenen Grenzen bleibender — restlicher Widersprüche ist allerdings recht gering. Es sei daran erinnert, daß für jedes Rautenelement das Verhältnis der folgenden Polygonseite zur vorhergehenden in logarithmischer Form durch den Ausdruck

$$\left(\frac{L_i' + L_i''}{2} - \frac{\Delta}{n} \right)$$

bestimmt ist, — also unabhängig von den einzelnen ausgeglichenen Winkeln und deren etwaigen restlichen Widersprüchen. Ferner haben die nach dem hier entwickelten Verfahren ermittelten Verbesserungen augenscheinlich keinerlei Einfluß auf die mit den stationsweise ausgeglichenen Winkeln

$$\beta_i', \gamma_i', \beta_i'', \gamma_i''$$

berechneten Brechungswinkel des Polygonzugs der Radialpunkte. Folglich sind die einzelnen endgültig ausgeglichenen Winkel für die Berechnung dieses Polygonzugs überhaupt nicht erforderlich. Die ausgeglichenen Winkel haben nur gewissermaßen lokale Bedeutung innerhalb der betreffenden einzelnen Rautenelemente, wo sie für die Berechnung der seitlichen Hilfs- oder Zielpunkte gebraucht werden. Unter solchen Umständen kommen also etwaige restliche Widersprüche der ausgeglichenen Winkel bei der Berechnung des Rautenzugs nur in sehr geringem Maß zur Auswirkung.

Immerhin soll im folgenden ein einfaches Verfahren zur Tilgung etwaiger restlicher Widersprüche der ausgeglichenen Winkel angegeben werden. Nach diesem Verfahren erhalten sämtliche ausgeglichenen Winkel der betreffenden Gruppe dem Absolutwert nach gleiche zusätzliche Verbesserungen w_i' bzw. w_i'' , wobei jedoch die auf die Winkel β_i' und δ_i' bzw. β_i'' und δ_i'' bezüglichen Verbesserungen mit umgekehrtem Vorzeichen eingeführt werden. Damit wird erreicht, daß durch diese zusätzlichen Verbesserungen die Erfüllung der in dieser Hinsicht neutralen Bedingung (1) nicht gestört wird.

Sollen die in bezug auf die Kontrollgleichungen (23) zutage getretenen restlichen Widersprüche λ_i' bzw. λ_i'' in der angedeuteten Weise getilgt werden, so müssen die zusätzlichen Verbesserungen w_i' bzw. w_i'' der Gleichung

$$\left. \begin{aligned} D_{\alpha_i'} \cdot w_i' - D_{\alpha_i' + \beta_i'} \cdot (w_i' - w_i') + D_{\gamma_i' + \delta_i'} \cdot (w_i' - w_i') - \\ - D_{\delta_i'} \cdot (-w_i') + \lambda_i' = (D_{\alpha_i'} + D_{\delta_i'}) \cdot w_i' + \lambda_i' = 0 \end{aligned} \right\} \text{ bzw. } (24)$$

$$\left. \begin{aligned} D_{\alpha_i''} \cdot w_i'' - D_{\alpha_i'' + \beta_i''} \cdot (w_i'' - w_i'') + D_{\gamma_i'' + \delta_i''} \cdot (w_i'' - w_i'') - \\ - D_{\delta_i''} \cdot (-w_i'') + \lambda_i'' = (D_{\alpha_i''} + D_{\delta_i''}) \cdot w_i'' + \lambda_i'' = 0 \end{aligned} \right\}$$

genügen.

Es ergibt sich also

$$\left. \begin{aligned} w_i' = \frac{-\lambda_i'}{D_{\alpha_i'} + D_{\delta_i'}} \\ \dots \dots \dots \\ w_i'' = \frac{-\lambda_i''}{D_{\alpha_i''} + D_{\delta_i''}} \end{aligned} \right\} \text{ bzw. } (25).$$

Bei dieser Berechnung müßten eigentlich die den ausgeglichenen Winkeln $[\alpha_i']$ und $[\delta_i']$ bzw. $[\alpha_i'']$ und $[\delta_i'']$ entsprechenden Tabellen-

differenzen benutzt werden, deren Ermittlung ja auch keine nennenswerte Mühe bereitet. Da die zusätzlichen Verbesserungen natürlich sehr klein sind, kann man sie aber auch mit den bereits bei der Hauptausgleichung benutzten Tabellendifferenzen berechnen.

Selbstverständlich bezieht sich das hier angegebene Verfahren nur auf die sozusagen innere Ausgleichung eines Rautenzugs mit unorientierten Hilfsbasen. Ist außer solchen Hilfsbasen Anschluß nur an eine einzige nach Länge, Richtung und Lage gegebene Basis, bzw. nur an zwei terrestrisch bestimmte Festpunkte vorhanden, so ist mit der — etwa nach diesem Verfahren bewirkten — inneren Ausgleichung zugleich die Ausgleichung überhaupt erledigt. Liegt dagegen Anschlußzwang an mehr als eine orientierte Basis, bzw. an mehr als zwei Festpunkte vor, so ist nach erfolgter innerer Ausgleichung noch die äußere Ausgleichung des Rautenzugs vorzunehmen, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll.

Beispiel.

Zum Abschluß sei hier ein die praktische Anwendung des Verfahrens erläuterndes Beispiel angeführt. Dasselbe bezieht sich auf einen durch zwei unorientierte Hilfsbasen begrenzten, aus 8 Rautenelementen bestehenden Abschnitt eines Rautenzugs, dessen Winkel ohne Benutzung irgendwelcher Spezialgeräte vermittels eines guten gewöhnlichen Winkeltransporteurs gemessen sind.

Die gemessenen, bzw. hinsichtlich der Horizontbedingung vorläufig ausgeglichenen Winkel sind — nach den einzelnen Rautenelementen und deren linken und rechten Winkelgruppen geordnet — in Tabelle 1 angeführt.

In der folgenden Tabelle 2 sind die mit diesen Winkeln und den gegebenen Logarithmen der beiden unorientierten Hilfsbasen berech-

neten Werte der Ausdrücke $\frac{L_i' + L_i''}{2}$, $\frac{L_i' - L_i''}{2}$, $\left(\frac{L_i' - L_i''}{2} + \frac{\Lambda}{n}\right)$

$\left(-\frac{L_i' - L_i''}{2} + \frac{\Lambda}{n}\right)$, $\left(\frac{L_i' + L_i''}{2} - \frac{\Lambda}{n}\right)$ nach den einzelnen Rautenelementen zusammengestellt.

Die eigentliche Ausgleichsrechnung ist dann in Tabelle 3 auszugsweise für die beiden Winkelgruppen des Rautenelements R_4 aufgezeigt, wo sich die größten Winkelverbesserungen und dementsprechend die größten restlichen Widersprüche der ausgeglichenen Winkel ergaben. Anschließend folgt die Berechnung der zwecks Tilgung der restlichen Widersprüche λ_4' bzw. λ_4'' erforderlichen zusätzlichen Verbesserungen w_4' bzw. w_4'' , durch welche die restlichen Widersprüche auf einen durch die vorgekommenen Abrundungen erklärlichen geringfügigen Betrag reduziert werden.

Schließlich enthält Tabelle 4, wiederum nach den einzelnen Rautenelementen geordnet, eine Wiederholung sämtlicher gemessenen Winkel, die entsprechenden Verbesserungen, und — als Endergebnis — die ausgeglichenen Winkel.

Die gemessenen, bzw. hinsichtlich der Horizontbedingung vorläufig ausgeglichenen Winkel sind — nach den einzelnen Rautenelementen und deren linken und rechten Winkelgruppen geordnet — in Tabelle 1 angeführt.

In der folgenden Tabelle 2 sind die mit diesen Winkeln und den gegebenen Logarithmen der beiden unorientierten Hilfsachsen be-

$$\frac{L_1 + L_2}{2} - \frac{L_1 - L_2}{2} \cdot \frac{\Delta}{n} \quad \frac{L_1 - L_2}{2} \cdot \frac{\Delta}{n} + \frac{L_1 + L_2}{2}$$

nach den einzelnen Rautenelementen zusammengefasst.

Tabelle 1.

Rautenelement	Linke Winkelgruppe				Rechte Winkelgruppe			
	α_i'	β_i'	γ_i'	δ_i'	α_i''	β_i''	γ_i''	δ_i''
	o /	o /	o /	o /	o /	o /	o /	o /
R_1	49 38,0	103 06,4	91 51,6	51 33,6	61 35,2	89 14,0	75 48,0	64 43,8
R_2	48 35,3	90 54,9	86 40,9	53 10,8	57 24,3	89 08,2	93 16,0	56 12,4
R_3	51 14,2	95 15,3	90 18,8	56 38,1	64 11,2	85 14,2	89 11,7	63 02,6
R_4	53 45,9	95 00,7	74 19,0	68 41,2	58 35,6	93 10,8	97 29,5	54 55,2
R_5	51 01,0	100 06,8	97 44,5	51 21,4	73 57,7	75 29,7	86 39,0	63 27,3
R_6	59 50,9	83 56,4	77 16,8	70 05,6	39 36,3	110 03,2	88 43,6	57 05,6
R_7	52 01,6	98 51,2	92 59,2	53 58,3	72 08,0	79 15,4	88 54,2	61 59,8
R_8	59 47,2	90 46,4	82 01,9	61 19,2	41 04,8	110 05,1	77 06,6	56 03,9

Tabelle 2.

Rautenelement	$\frac{L_i' + L_i''}{2}$	$\frac{L_i' - L_i''}{2}$	$\frac{L_i' - L_i''}{2} + \frac{\Lambda}{n}$	$-\frac{L_i' - L_i''}{2} + \frac{\Lambda}{n}$	$\frac{L_i' + L_i''}{2} - \frac{\Lambda}{n}$
R_1	0,102.732	- 418	- 173	+ 663	0,102.487
R_2	9,969.408	- 935	- 690	+ 1180	9,969.163
R_3	9,965.467	- 573	- 328	+ 818	9,965.222
R_4	0,005.667	- 3456	- 3211	+ 3701	0,005.422
R_5	0,023.717	+ 1017	+ 1262	- 772	0,023.472
R_6	9,925.250	- 1327	- 1082	+ 1572	9,925.005
R_7	0,038.814	- 539	- 294	+ 784	0,038.569
R_8	0,078.060	- 253	- 8	+ 498	0,077.815

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{L_i' + L_i''}{2} = 0,109.115$$

$$\log b_{r+n} - \log b_r = 0,107.156$$

$$\Lambda = + 1.959$$

$$\frac{\Lambda}{n} = + 245$$

$$\log b_{r+n} = 2,566.827$$

$$\log b_r = 2,459.671$$

$$\log b_{r+n} - \log b_r = 0,107.156$$

Tabelle 3.

Rautenelement R_4 .

Linke Winkelgruppe.

	(D)	$(D')^2$	$1:p$	$(D')^2:p$	$(D'):p$	
$(D\alpha_4' - D\alpha_4' + \beta_4') =$	+ 302	91 204	1,00	91 204	+ 302	$v\alpha_4' = + 3,96'$
$-(D\alpha_4' + \beta_4' + D\gamma_4' + \varrho_4') =$	+ 377	142 129	0,75	106 597	+ 283	$v\gamma_4' = v\beta_4' = -v\gamma_4' = + 3,71$
$-(D\varrho_4' - D\gamma_4' + \varrho_4') =$	- 217	47 089	1,00	47 089	- 217	$v\varrho_4' = - 2,85$
				244 890		$v\alpha_4' + \beta_4' = + 7,67$
	$\frac{L_4' - L_4''}{2} + \frac{\Lambda}{n} = - 3211$		$k_4' = +$	$\frac{3211}{244 890} =$		$v\gamma_4' + \varrho_4' = - 6,56'$
				$+ 0,0131$		
$\log \sin (53^\circ 45,90' + 3,96') =$						$D\alpha_4' = + 93$
$-\log \sin (148 46,60 + 7,67) =$						
$\log \sin (143 00,20 - 6,56) =$						
$-\log \sin (68 41,20 - 2,85) =$						$D\varrho_4' = + 49$
						$D\alpha_4' + D\varrho_4' = + 142$
				$\frac{L_4' + L_4''}{2} - \frac{\Lambda}{n} =$		
				$0,005 \cdot 419$		
				$0,005 \cdot 422$		
				$\lambda_4' =$		$w_4' = + 0,02'$
				$- 3$		
$[\alpha_4'] = 53^\circ 45,90' + 3,96' + 0,02' = 53^\circ 49,88'$						$\log \sin [\alpha_4'] = 9,907 \cdot 026$
$[\beta_4'] = 95 00,70 + 3,71 - 0,02 = 95 04,39$						$-\log \sin [\alpha_4' + \beta_4'] = 0,286 \cdot 958$
$[\gamma_4'] = 74 19,00 - 3,71 + 0,02 = 74 15,31$						$\log \sin [\gamma_4' + \varrho_4'] = 9,780 \cdot 528$
$[\varrho_4'] = 68 41,20 - 2,85 - 0,02 = 68 38,33$						$-\log \sin [\varrho_4'] = 0,030 \cdot 909$
						$0,005 \cdot 421$

Rautenelement R_4 .

Rechte Winkelgruppe.

	(D'')	$(D'')^2$	$1:p$	$(D'')^2:p$	$(D''):p$
$(D_{\alpha_4}'' - D_{\alpha_4}'' + \beta_4'')$	+ 312	97 344	1,00	97 344	+ 312
$-(D_{\alpha_4}'' + \beta_4'' + D_{\gamma_4}'' + \delta_4'')$	+ 477	227 529	0,75	170 647	+ 358
$-(D_{\delta_4}'' - D_{\gamma_4}'' + \delta_4'')$	- 331	109 561	1,00	109 561	- 331
				377 552	
	$-\frac{L_4' - L_4''}{2} + \frac{\Lambda}{n} + 3701$		$k_4'' =$	$\frac{3701}{377 552}$	
				$= -0,0098$	

$$v_{\alpha_4}'' = -3,06'$$

$$v_4'' = v\beta_4'' = -v\gamma_4'' = -3,51$$

$$v_{\delta_4}'' = +3,25$$

$$v_{\alpha_4}'' + \beta_4'' = -6,57$$

$$v_{\gamma_4}'' + \delta_4'' = +6,76$$

$$\log \sin (58^\circ 35,60' - 3,06') = \log \sin 58^\circ 32,54' = 9,930 \cdot 962$$

$$- \log \sin (151 46,40 - 6,57) = - \log \sin 151 39,83 = 0,323 \cdot 633$$

$$\log \sin (152 24,70 + 6,76) = \log \sin 152 31,46 = 9,664 \cdot 050$$

$$- \log \sin (54 55,20 + 3,25) = - \log \sin 54 58,45 = 0,086 \cdot 773$$

$$D_{\alpha_4}'' = + 77$$

$$D_{\delta_4}'' = + 89$$

$$D_{\alpha_4}'' + D_{\delta_4}'' = + 166$$

$$\frac{L_4' + L_4''}{2} - \frac{\Lambda}{n} = 0,005 \cdot 418$$

$$= 0,005 \cdot 422$$

$$\lambda_4'' = - 4$$

$$w_4'' = + 0,02'$$

$$\log \sin [\alpha_4''] = 9,930 \cdot 964$$

$$- \log \sin [\alpha_4'' + \beta_4''] = 0,323 \cdot 633$$

$$\log \sin [\gamma_4'' + \delta_4''] = 9,664 \cdot 050$$

$$- \log \sin [\delta_4''] = 0,086 \cdot 774$$

$$\frac{\quad}{\quad} = 0,005 \cdot 421$$

Tabelle 4.

Rautenelement R_1 .

$[\alpha_1'] = 49^\circ 38,00' + 0,19' - 0,01' =$ $= 49^\circ 38,18'$	$[\alpha_1''] = 61^\circ 35,20' - 0,81' + 0,01' =$ $= 61^\circ 34,40'$
$[\beta_1'] = 103 06,40 + 0,17 + 0,01 =$ $= 103 06,58$	$[\beta_1''] = 89 14,00 - 0,79 - 0,01 =$ $= 89 13,20$
$[\gamma_1'] = 91 51,60 - 0,17 - 0,01 =$ $= 91 51,42$	$[\gamma_1''] = 75 48,00 + 0,79 + 0,01 =$ $= 75 48,80$
$[\delta_1'] = 51 33,60 - 0,14 + 0,01 =$ $= 51 33,47$	$[\delta_1''] = 64 43,80 + 0,59 - 0,01 =$ $= 64 44,38$

Rautenelement R_2 .

$[\alpha_2'] = 48^\circ 35,30' + 0,92' + 0,00' =$ $= 48^\circ 36,22'$	$[\alpha_2''] = 57^\circ 24,30' - 1,12' + 0,00' =$ $= 57^\circ 23,18'$
$[\beta_2'] = 90 54,90 + 0,80 - 0,00 =$ $= 90 55,70$	$[\beta_2''] = 89 08,20 - 1,25 - 0,00 =$ $= 89 06,95$
$[\gamma_2'] = 86 40,90 - 0,80 + 0,00 =$ $= 86 40,10$	$[\gamma_2''] = 93 16,00 + 1,25 + 0,00 =$ $= 93 17,25$
$[\delta_2'] = 53 10,80 - 0,87 - 0,00 =$ $= 53 09,93$	$[\delta_2''] = 56 12,40 + 1,23 - 0,00 =$ $= 56 13,63$

Rautenelement R_3 .

$[\alpha_3'] = 51^\circ 14,20' + 0,35' - 0,01' =$ $= 51^\circ 14,54'$	$[\alpha_3''] = 64^\circ 11,20' - 0,70' + 0,01' =$ $= 64^\circ 10,51'$
$[\beta_3'] = 95 15,30 + 0,35 + 0,01 =$ $= 95 15,66$	$[\beta_3''] = 85 14,20 - 0,86 - 0,01 =$ $= 85 13,33$
$[\gamma_3'] = 90 18,80 - 0,35 - 0,01 =$ $= 90 18,44$	$[\gamma_3''] = 89 11,70 + 0,86 + 0,01 =$ $= 89 12,57$
$[\delta_3'] = 56 38,10 - 0,33 + 0,01 =$ $= 56 37,78$	$[\delta_3''] = 63 02,60 + 0,77 - 0,01 =$ $= 63 03,36$

Rautenelement R_4 .

$[\alpha_4'] = 53^\circ 45,90' + 3,96' + 0,02' =$ $= 53^\circ 49,88'$	$[\alpha_4''] = 58^\circ 35,60' - 3,06' + 0,02' =$ $= 58^\circ 32,56'$
$[\beta_4'] = 95 00,70 + 3,71 - 0,02 =$ $= 95 04,39$	$[\beta_4''] = 93 10,80 - 3,51 - 0,02 =$ $= 93 07,27$
$[\gamma_4'] = 74 19,00 - 3,71 + 0,02 =$ $= 74 15,31$	$[\gamma_4''] = 97 29,50 + 3,51 + 0,02 =$ $= 97 33,03$
$[\delta_4'] = 68 41,20 - 2,85 - 0,02 =$ $= 68 38,33$	$[\delta_4''] = 54 55,20 + 3,25 - 0,02 =$ $= 54 58,43$

Rautenelement R_5 .

$[\alpha_5'] = 51^\circ 01,00' - 1,19' - 0,00' =$ $= 50^\circ 59,81'$	$[\alpha_5''] = 73^\circ 57,70' + 0,68' - 0,03' =$ $= 73^\circ 58,35'$
$[\beta_5'] = 100 06,80 - 1,18 + 0,00 =$ $= 100 05,62$	$[\beta_5''] = 75 29,70 + 0,89 + 0,03 =$ $= 75 30,62$
$[\gamma_5'] = 97 44,50 + 1,18 - 0,00 =$ $= 97 45,68$	$[\gamma_5''] = 86 39,00 - 0,89 - 0,03 =$ $= 86 38,08$
$[\delta_5'] = 51 21,40 + 1,12 + 0,00 =$ $= 51 22,52$	$[\delta_5''] = 63 27,30 - 0,77 + 0,03 =$ $= 63 26,56$

Rautenelement R_6 .

$[\alpha_6'] = 59^\circ 50,90' + 1,20' - 0,01' =$ $= 59^\circ 52,09'$	$[\alpha_6''] = 39^\circ 36,30' - 1,76' - 0,00' =$ $= 39^\circ 34,54'$
$[\beta_6'] = 83 56,40 + 1,35 + 0,01 =$ $= 83 57,76$	$[\beta_6''] = 110 03,20 - 1,44 + 0,00 =$ $= 110 01,76$
$[\gamma_6'] = 77 16,80 - 1,35 - 0,01 =$ $= 77 15,44$	$[\gamma_6''] = 88 43,60 + 1,44 - 0,00 =$ $= 88 45,04$
$[\delta_6'] = 70 05,60 - 1,18 + 0,01 =$ $= 70 04,43$	$[\delta_6''] = 57 05,60 + 1,28 + 0,00 =$ $= 57 06,88$

Rautenelement R_7 .

$[\alpha_7'] = 52^\circ 01,60' + 0,30' + 0,00' =$ $= 52^\circ 01,90'$	$[\alpha_7''] = 72^\circ 08,00' - 0,67' - 0,01' =$ $= 72^\circ 07,32'$
$[\beta_7'] = 98 51,20 + 0,29 - 0,00 =$ $= 98 51,49$	$[\beta_7''] = 79 15,40 - 0,85 + 0,01 =$ $= 79 14,56$
$[\gamma_7'] = 92 59,20 - 0,29 + 0,00 =$ $= 92 58,91$	$[\gamma_7''] = 88 54,20 + 0,85 - 0,01 =$ $= 88 55,04$
$[\delta_7'] = 53 58,30 - 0,26 - 0,00 =$ $= 53 58,04$	$[\delta_7''] = 61 59,80 + 0,72 + 0,01 =$ $= 62 00,53$

Rautenelement R_8 .

$[\alpha_8'] = 59^\circ 47,20' + 0,01' - 0,01' =$ $= 59^\circ 47,20'$	$[\alpha_8''] = 41^\circ 04,80' - 0,68' + 0,00 =$ $= 41^\circ 04,12'$
$[\beta_8'] = 90 46,40 + 0,01 + 0,01 =$ $= 90 46,42$	$[\beta_8''] = 110 05,10 - 0,48 - 0,00 =$ $= 110 04,62$
$[\gamma_8'] = 82 01,90 - 0,01 - 0,01 =$ $= 82 01,88$	$[\gamma_8''] = 77 06,60 + 0,48 + 0,00 =$ $= 77 07,08$
$[\delta_8'] = 61 19,20 - 0,01 + 0,01 =$ $= 61 19,20$	$[\delta_8''] = 56 03,90 + 0,37 - 0,00 =$ $= 56 04,27$

Der Fakultät vorgelegt den 10. Januar 1936.

Par rombu virkņu izlīdzināšanu.

A. Buchholcs.

Rombu virknes radiālpunktu veidotā poligōngājiēnā malu garumi tiek trigōnometriski aplēsti kā vienas vai vairāku terrestriski nosacītu bazu un ainās izmērīto leņķu funkcijas. Tā tad kļūdu sakrāšanās ziņā apstākļi šādā radiālpunktu gājiēnā, un vispārīgi rombu virknē, nelabvēlīgāki nekā parastā terrestriskā poligōngājiēnā, kur katras atsevišķas malas garumu nosaka tieši, neatkarīgi no pārējām malām.

Šis rombu virknes trūkums ievērojami mazināms, nosakot dabā tieši garumus dažām radiālpunktu gājiēna malām. Ar to tad rodas „neorientētas palīgbazes“, kas sadala rombu virkni attiecīgos posmos un ierobežo noteiktībai kaitīgo kļūdu sakrāšanos. Bet līdz ar to ievērojami komplicējas rombu virknē izmērīto virzienu vai leņķu izlīdzināšana.

2. attēlā schēmatiski parādītā rombu virkne sastādās no atsevišķiem rombveidīgiem elementiem (1. att.). Pieņemsim, ka katrā tādā elementā izmērīti „kreisie leņķi“ α_i' , β_i' , γ_i' , δ_i' , un „labie leņķi“ α_i'' , β_i'' , γ_i'' , δ_i'' . Tad katrā elementā minētie leņķi padoti diviem „vietējiem noteikumiem“, kas formulējami nolīdzinājumu (1) un (2) veidā. Ja rombu virknē būtu dota tikai viena vienīga orientēta vai neorientēta baze, tad izlīdzināšana izsmeltos ar šo vietējo noteikumu apmierināšanu un būtu izdarāma ļoti ērti un vienkārši pa virknes atsevišķiem rombveidīgiem elementiem.

Bet ja rombu virknē ir, starp citu, neorientētas palīgbazes, tad — spēkā paliekot vietējiem noteikumiem — katrā posmā starp divām tādām bazēm leņķi padoti vēl vienam „vispārējam noteikumam“, piem., nolīdzinājuma (3) veidā. Šis vispārējais noteikums zīmējas uz visiem dotā posma rombveidīgajiem elementiem resp. šinīs elementos izmērītajiem leņķiem.

Tādos apstākļos izlīdzināšana pēc stingra paņēmiena padara lielu darbu. Pie tam šā darba lielums un grūtība neatbilst izlīdzināšanas rezultātu noteiktībai, kas radiāltriangulācijas apstākļos sagai-

dāma tikai diezgan mērena. Tāpēc izlīdzināšana lietderīgāk izdarāma pēc kāda apstākļiem piemērota vienkāršota paņēmiena, piem., pēc šeit aprakstītā.

Šā paņēmiena pamatideja ir tā, ka rombu virknes dotajā posmā starp divām neorientētām palīgbazēm izmērītos leņķus iedomājas pagaidām izlīdzinātus pa atsevišķiem rombveidīgiem elementiem tikai attiecībā uz vietējiem noteikumiem (1) un (2), un pēc tam ielikts vispārējā noteikumu nolīdzinājumā (3). Tad parādās šim noteikumam attiecīgā „vispārējā pretruna“ Δ . To vienmērīgi sadala uz visiem posma atsevišķajiem elementiem resp. šo elementu leņķu grupām. Tādam nolūkam katru noteikuma nolīdzinājumu (2) aizstāj ar diviem, no kuriem viens zīmējas uz dotā elementa kreisajiem, otrais — uz šā elementa labajiem leņķiem. Šo nolīdzinājumu brīvos locekļus nosaka tā, lai ar meklētajiem leņķu labojumiem — izpildoties minētajiem nolīdzinājumiem — līdz ar to izpildītos kā visi atsevišķie vietējie noteikumi (2), tā arī vispārīgais noteikums (3). Kas zīmējas uz vietējo horizonta noteikumu (1), tad šim noteikumam attiecīgo izlīdzināšanu izdara pašā sākumā, pirms stājas pie minētās pamatzlīdzināšanas attiecībā uz noteikumiem (2) un (3). Lai pamatzlīdzināšanas rezultātā atrastie leņķu labojumi netraucētu jau pāņāko noteikuma (1) izpildīšanu, tos nosaka ievērojot papildu noteikumu (19).

Šeit vispārīgos vilcienos aizrādīto iztīrājumu rezultātā iznāk, ka katram rombveidīgam elementam jāastāda divi tipa (20) noteikumu nolīdzinājumi, no kuriem pirmais zīmējas uz kreisajiem, otrs — uz labajiem leņķiem. Ja katras tādas grupas leņķu labojumi apmierina uz tiem attiecīgo noteikumu (20), tad tie paši labojumi apmierina arī visus svarīgos tipu (1), (2) un (3) noteikumus.

Tādā veidā rombu virknes posma iekšējā izlīdzināšana izdarāma pa atsevišķo rombveidīgo elementu atsevišķajām — kreiso un labo — leņķu grupām, pie kam katrreiz jāievēro tikai viens vienīgs noteikuma nolīdzinājums.

Izlīdzinot pēc šeit aprakstītā paņēmiena, transcendentos noteikumu nolīdzinājumus (2) un (3) lieto logaritmiski pārvērstā veidā, pie kam, kā parasts, pieņem, ka logaritma pieaugums proporcionāls argumenta pieaugumam. Tāds pieņēmums, saprotams, uzskatāms par praktiski pareizu tikai gadījumā, kad svarīgie argumentu pieaugumi, t. i. izmērīto leņķu labojumi, nelieli. Bet riādiātriangulācijās leņķu labojumi nereti mēdz būt tik lieli, ka tiem atbilstošie $\log \sin$

pieaugumi arī praktiski manāmi izrādās neproporcioniāli pašiem leņķu labojumiem. Tāpēc var gadīties, ka atrastie izlīdzinātie leņķi nepilnīgi apmierina visus svarīgos noteikumus, un paliek pretrunas, kas — lai gan ļoti nelielas — tomēr nav izskaidrojamas tikai ar notikašiem apaļojumiem. Tādu pēc izlīdzināšanas pārpalikušu pretrunu praktiskā nozīme vispārīgi pavisam niecīga, un tāpēc atbilstošu papildu labojumu ieviešana parasti nav vajadzīga. Tomēr šeit atrastas un aizrādītas formulas (25), pēc kurām vajadzības gadījumā apļesami šādi papildu labojumi.

Aprakstītā izlīdzināšanas paņēmiena praktiskā lietošana paskaidrota ar skaitlisku piemēru, kas zīmējas uz Rīgas apkārtnē izdarītu nelielu radiāltriangulāciju rombu virknes veidā. Šinī darbā — smalkāka speciāla instrumenta trūkuma dēļ — leņķu mērīšanai ainās lietots vienkāršs transportieris ar alidadi un noniju; ar to izskaidrojama izmērīto leņķu nelielā noteiktība un sakarā ar to izlīdzināšanas rezultātā iznākušie lieli leņķu labojumi.



246524

LATVIJAS UNIVERSITĀTES BIBLIOTEKA



0504015944

2-

LU
1440

LŪR. inž. II.

AUL. ing. II.

№ 1.	A. Buchholtz (A. Buchholcs). Aus Rautenzügen gebildete Dreiecksketten	1
	No rombu gājieniem sastādītas trijstūru virknes	36
№ 2.	A. Buchholtz (A. Buchholcs). Zur Ausgleichung von Rautenzügen.	39
	Par rombu virkņu izlīdzināšanu	56a

1 AUG. 1938

M. nod. B5 304
Inv. Nr. 5373 (54)

Spriegumu stāvoklis kvadrātveidīgām plātnēm ar visāda lieluma kvadrātveidīgu caurumu.

Erichs Videmanis.

1. Uzdevums. Savos divos iepriekšējos darbos¹⁾ es iztīrāju četrus uzguldījumu gadījumus kvadrātveidīgai plātnei ar kvadrātveidīgu caurumu, ja noslodzījums uz tās sadalīts vienmērīgi, attiecību λ starp ārējās un iekšējās malas garumiem ierobežojot ar to, ka $\lambda = \frac{1}{3}$. Šis ierobežojums noteiktai λ attiecībai iepriekš bija vajadzīgs tāpēc, ka es atturējos no mēģinājuma dot noteiktu atrisinājumu plātnes nolīdzinājumam — t. i. 4. kārtas parciālam diferenciālnolīdzinājumam — ar komplicētiem malu noteikumiem; tai vietā es devu praktiski izmantojamu tuvīnu atrisinājumu, pārejot no diferenciālnolīdzinājuma uz attiecīgo diferencu nolīdzinājumu; izdarot pāreju uz diferencu nolīdzinājumu, vajadzētu atrast skaitlisko atrisinājumu atsevišķi katrai λ attiecībai; bet aplēse bija izdarīta tikai attiecībai, ka $\lambda = \frac{1}{3}$; ar minēto paņēmieni aplēsi varētu izdarīt arī katrai citai λ attiecībai. Tomēr šo paņēmieni vajadzīgo lielo skaitļojumu dēļ nevar atzīt par ieteicamu inženierim, lai gan iegūtie iznākumi ir piemēroti viņa vajadzībām.

Šī jaunā darba mērķis ir atcelt ierobežojumu attiecībai, ka $\lambda = \frac{1}{3}$, dodot inženierim ieteicamāku aplēses veidu, ar kuŗu, pamatojoties uz

¹⁾ „Der Formänderungszustand einer quadratischen Platte mit quadratischer Öffnung“, Ingenieur-Archiv VII, 1 (1936), 56. lp. un „Der Spannungszustand einer quadratischen Platte mit quadratischer Öffnung“, Ingenieur-Archiv VII, 3 (1936), 196. lp.; šos divus darbus es turpmāk minēšu īsāk ar vārdiem „Formänderungszustand“ un „Spannungszustand“.

sp. 4953. 14145

U. Medb. fak. biblioteka

M. nod. BI № 304

Inv. № 5373

L. 91. mechanical faculty
bibliothek autor

LATVIJAS ŪNIVERSITĀTES RAKSTI
ACTA UNIVERSITATIS LATVIENSIS

INŽENIERZINĀTŅU FAKULTĀTES SERIJA. II. 3.

M Bf 304
Inv. 5373 (54)

Spriegumu stāvoklis kvadrātveidīgām plātnēm ar visāda lieluma kvadrātveidīgu caurumu.

Erichs Videmanis.

sp 4453-14145

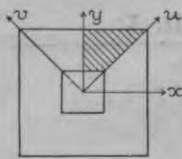
1. Uzdevums. Savos divos iepriekšējos darbos¹⁾ es iztirzāju četrus uzguldījumu gadījumus kvadrātveidīgai plātnei ar kvadrātveidīgu caurumu, ja noslodzījums uz tās sadalīts vienmērīgi, attiecību λ starp ārējās un iekšējās malas garumiem ierobežojot ar to, ka $\lambda = \frac{1}{3}$. Šis ierobežojums noteiktai λ attiecībai iepriekš bija vajadzīgs tāpēc, ka es atturejos no mēģinājuma dot noteiktu atrisinājumu plātnes nolīdzinājumam — t. i. 4. kārtas parciālam diferencialnolīdzinājumam — ar komplikētiem malu noteikumiem; tai vietā es devu praktiski izmantojamu tuvīnu atrisinājumu, pārejot no diferencialnolīdzinājuma uz attiecīgo diferencu nolīdzinājumu; izdarot pāreju uz diferencu nolīdzinājumu, vajadzētu atrast skaitlisko atrisinājumu atsevišķi katrai λ attiecībai; bet aplēse bija izdarīta tikai attiecībai, ka $\lambda = \frac{1}{3}$; ar minēto paņēmieni aplēsi varētu izdarīt arī katrai citai λ attiecībai. Tomēr šo paņēmieni vajadzīgo lielo skaitļojumu dēļ nevar atzīt par ieteicamu inženierim, lai gan iegūtie iznākumi ir piemēroti viņa vajadzībām.

Šī jaunā darba mērķis ir atcelt ierobežojumu attiecībai, ka $\lambda = \frac{1}{3}$, dodot inženierim ieteicamāku aplēses veidu, ar kuŗu, pamatojoties uz

¹⁾ „Der Formänderungszustand einer quadratischen Platte mit quadratischer Öffnung“, Ingenieur-Archiv VII, 1 (1936), 56. lp. un „Der Spannungszustand einer quadratischen Platte mit quadratischer Öffnung“, Ingenieur-Archiv VII, 3 (1936), 196. lp.; šos divus darbus es turpmāk minēšu īsāk ar vārdiem „Formänderungszustand“ un „Spannungszustand“.

„Spannungszustand“ iegūtiem iznākumiem, varētu atrast praktiski izmantojamus atrisinājumus plātnēm ar visādām λ attiecībām.

Iztirzāsim divus uzguldījumu gadījumus:



1. att.

I — plātnes ārējā mala ir brīvi uzguldīta, un

II — plātnes ārējā mala ir iespīlēta.

Iekšējā mala abos gadījumos pilnīgi brīva.

Noslodzījums sadalīts vienmēri.

Simetrijas dēļ pietiek apskatīt plātnes astotdaļu; apskatītam paredzētā plātnes astotdaļa 1. attēlā ir svītrotā.

2. Apzīmējumi. Pieturēsimies pie šādiem apzīmējumiem:¹⁾

$l = 10 \Delta_0$ = ārējās malas pusgarums,

$x = \xi \Delta_0$ = gaļuma gabals x -ass virzienā,

$y = \eta \Delta_0$ = arī, y -ass virzienā,

$u = \upsilon \Delta_0$ = arī, u -ass virzienā,

q = sadalīts noslodzījums, attiecināts uz laukuma vienību;

$m_x = \mu_x q \Delta_0^2$ = lieces moments, attiecināts uz gaļuma vienību, griezumā stateniski pret x -asi,

$m_y = \mu_y q \Delta_0^2$ = arī, griezumā stateniski pret y -asi,

$m_u = \mu_u q \Delta_0^2$ = arī, griezumā stateniski pret u -asi,

$m_v = \mu_v q \Delta_0^2$ = arī, griezumā stateniski pret v -asi,

$m_{xy} = \mu_{xy} q \Delta_0^2$ = vērpes moments, attiecināts uz gaļuma vienību, griezumos stateniski pret x - un y -asīm;

$a = \alpha q \Delta_0$ = sadalītā atbalstreakcija, attiecināta uz gaļuma vienību,

$a' = \alpha' q \Delta_0$ = reakcijas a daļa, kas rodas no šķērsspēkiem,

$a'' = \alpha'' q \Delta_0$ = reakcijas a daļa, kas rodas no vērpes momentiem;

kopotie lielumi:

$\mathcal{Q} = K q \Delta_0^2$ = plātnes astotdaļas kopnoslodzījums,

$\mathcal{Q}_I = A q \Delta_0^2$ = ārējās pusmalas atbalstreakcija,

$\mathcal{Q}' = A' q \Delta_0^2$ = reakcijas \mathcal{Q}_I daļa, kas rodas no šķērsspēkiem,

$\mathcal{Q}'' = A'' q \Delta_0^2$ = reakcijas \mathcal{Q}_I daļa, kas rodas no vērpes momentiem,

$l_a = \lambda_a \Delta_0$ = kospēka \mathcal{Q}_I atstatums no ārējā stūra,

$l'_a = \lambda'_a \Delta_0$ = arī, kospēka \mathcal{Q}' ,

$l''_a = \lambda''_a \Delta_0$ = arī, kospēka \mathcal{Q}'' ;

$\mathcal{E} = E q \Delta_0^2$ = puse no ārējā stūra spēka,

$\mathcal{M}_a = M_a q \Delta_0^3$ = ārējās pusmalas lieces moments,

$\mathcal{M}_x = M_x q \Delta_0^3$ = plātnes astotdaļas kreisās malas (y -ass) lieces moments,

$\mathcal{M}_v = M_v q \Delta_0^3$ = arī, labās malas (u -diagonāles) lieces moments.

¹⁾ salīdz. „Spannungszustand“ 197. lp.

3. Robežgadījumi. Vispirms iztirzāsim divus robežgadījumus: $\lambda \rightarrow 1$ un $\lambda \rightarrow 0$. Gadījumā, ja $\lambda \rightarrow 1$, caurums kļūst tikpat liels kā veselā plātne; tas nozīmē, ka plātne šai gadījumā vispār pazūd, un visas vērtības tiecas uz 0.

Gadījumā, ja $\lambda \rightarrow 0$ plātnes caurums kļūst neizmērijami mazs; tad visas vērtības tiecas uz tādām pat vērtībām, kādas ir kvadrātveidīgai plātnei bez cauruma, izņemot neizmērijami šaura apgabala vērtības ap neizmērijami mazo caurumu. Mēs katrā ziņā neizdarām lielu kļūdu, ja pieņemam, ka kvadrātveidīgā plātne ar neizmērijami mazu caurumu vidū šā cauruma tuvumā ietekmēsies tāpat kā apļveidīga plātne ar neizmērijami mazu caurumu centrā ietekmēsies šā cauruma tuvumā. Bet apļveidīgai plātnei ar apļveidīgu caurumu centrā (2. att.) var noteikti pierādīt:



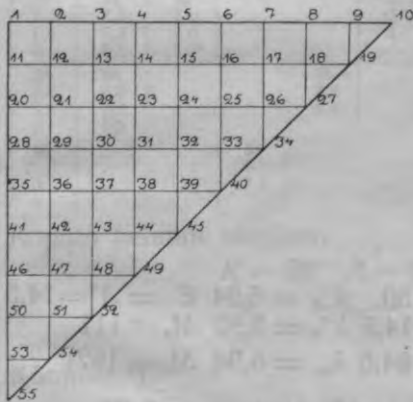
2. att.

ja $\lambda = \frac{r}{R} \rightarrow 0$, tad visas vērtības tiecas uz tādām vērtībām, kādas ir apļveidīgai plātnei bez cauruma, izņemot μ_r - (stateniski pret radiju) un μ_φ -vērtības (stateniski pret skāruli pie apļa) tieši pie neizmērijami maza cauruma apmales. Gadījumā, ja plātnei nav cauruma, $\mu_r = \mu_\varphi$; turpretim gadījumā, ja plātnei ir neizmērijami mazs caurums, $\mu_r = 0$ un μ_φ ir divreiz lielāks, nekā gadījumā, ja plātnei nav cauruma.

Līdzīgi mēs pieņemsim kvadrātveidīgai plātnei ar kvadrātveidīgu caurumu tai gadījumā, ja $\lambda \rightarrow 0$: visas vērtības tiecas uz tādām vērtībām, kādas ir kvadrātveidīgai plātnei bez cauruma, izņemot μ_x - un μ_y -vērtības neizmērijami šauram apgabalam ap neizmērijami mazo caurumu; apskatam paredzētai plātnes astotdaļai šē $\mu_y = 0$, bet μ_x divreiz lielāks, nekā tai gadījumā, ja plātnei nav cauruma.

Tā tad vērtības kvadrātveidīgai plātnei ar neizmērijami mazu caurumu ir viegli sadabūjamas.

Kvadrātveidīgas plātnes ar neizmērijami mazu caurumu astotdaļai pieņemsim 3. att. uzrādīto iedalījumu un punktu numerāciju.¹⁾



3. att.

¹⁾ salīdz. „Spannungszustand“ 1. att.

Vērtību sakārtojums kvadrātveidīgai plātnei ar neizmērījami mazu caurumu.¹⁾

I. gadījums: plātnes ārējā mala ir brīvi uzguldīta.

α -vērtības:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
α' =	6,8	6,7	6,5	6,3	5,8	5,3	4,7	3,8	2,5	0
α'' =	1,9	1,9	1,9	1,8	1,7	1,6	1,4	1,1	0,7	0
α =	8,7	8,6	8,4	8,1	7,5	6,9	6,1	4,9	3,2	0

μ_x -vērtības,

μ_y -vērtības,

μ_{xy} -vērtības:

μ_u -vērtības | diagonāles

μ_v -vērtības | punktiem :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10										10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0										-14,0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0										14,0
0	2,5	4,5	6,5	8,5	10,0	11,5	12,5	13,5	14,0										
11	12	13	14	15	16	17	18	19											19
3,0	3,0	3,0	3,0	2,5	2,5	2,0	2,0	1,5											-11,5
4,5	4,5	4,5	4,0	4,0	3,5	2,5	2,0	1,5											14,5
0	2,5	4,5	6,5	8,0	9,5	11,0	12,0	13,0											
20	21	22	23	24	25	26	27												27
6,5	6,5	6,5	6,0	6,0	5,0	4,5	3,5												-8,0
8,5	8,5	8,0	7,5	7,0	6,0	4,5	3,5												15,0
0	2,0	4,0	6,0	7,5	9,0	10,5	11,5												
28	29	30	31	32	33	34													34
9,0	9,0	8,5	8,5	8,0	7,5	6,5													-3,0
11,0	11,0	10,5	10,0	9,0	8,0	6,5													16,0
0	2,0	4,0	5,5	7,0	8,5	9,5													
35	36	37	38	39	40														40
11,5	11,5	11,0	10,5	10,0	9,0														1,5
13,0	13,0	12,5	11,5	10,5	9,0														16,5
0	2,0	3,5	5,0	6,5	7,5														
41	42	43	44	45															45
13,5	13,0	12,5	12,0	11,5															6,0
14,5	14,5	14,0	13,0	11,5															17,0
0	1,5	3,0	4,5	5,5															
46	47	48	49																49
15,0	14,5	14,5	14,0																10,5
16,0	15,5	15,0	14,0																17,0
0	1,5	2,5	3,5																
50	51	52																	52
16,0	15,5	15,5																	14,0
16,5	16,0	15,5																	17,0
0	1,0	1,5																	
53	54																		54
16,5	16,5																		16,0
17,0	16,5																		17,0
0	0,5																		
55																			55
34,0																			0
0																			34,0
0																			0

Kopoto lielumu vērtības: $K = 50$ $A' = 50$ $\lambda'_a = 5,94$ $E = A'' = 14,5$
 $A'' = 14,5$ $\lambda''_a = 5,92$ $M_x = 111$
 $A = 64,5$ $\lambda_a = 5,94$ $M_v = 162\sqrt{2}$

Kontrole:²⁾ 1. $K \cdot \frac{10}{3} = 167$, bet $\frac{M_v}{\sqrt{2}} = 162$; kļūda ir $-2,8\%$.

2. $2K \cdot \frac{10}{2} = 500$, bet $A\lambda_a + M_y = 494$; kļūda ir $-1,2\%$.

¹⁾ salīdz. „Spannungszustand“ 199. lp.

²⁾ salīdz. „Formänderungszustand“ 69. — 70. lp. un „Spannungszustand“ 199. lp.

II. g a d i j u m s: plātnes ārējā mala ir iespīlēta.

α - vērtības:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
8,6	8,4	8,1	7,5	6,4	5,3	3,7	1,9	0,2	-1,5

μ_x -vērtības,

μ_y -vērtības,

μ_{xy} -vērtības:

μ_u -vērtības } diagonāles

μ_v -vērtības } punktiem:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			10
-3,0	-3,0	-3,0	-2,5	-2,5	-2,0	-1,5	-1,0	-0,5	0			0
-19,0	-18,5	-17,5	-16,0	-13,5	-10,5	-7,5	-4,5	-2,0	0			0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			0
11	12	13	14	15	16	17	18	19				19
-1,5	-1,5	-1,5	-1,0	-1,0	-1,0	-1,0	-1,0	-1,0				-3,0
-11,0	-10,0	-9,5	-9,0	-7,0	-6,0	-4,5	-2,5	-1,0				1,0
0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0				
20	21	22	23	24	25	26	27					27
0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,0	-0,5	-1,0					-4,0
-5,0	-5,0	-4,5	-4,0	-3,5	-2,5	-2,0	-1,0					2,0
0	0,5	1,5	2,0	2,5	3,0	3,0	3,0					
28	29	30	31	32	33	34						34
2,0	2,0	2,0	2,0	1,5	1,0	-0,5						-4,0
-0,5	-0,5	-0,5	-0,5	-0,5	-0,5	-0,5						3,0
0	1,0	1,5	2,5	3,0	3,5	3,5						
35	36	37	38	39	40							40
4,0	4,0	4,0	3,5	3,0	1,5							-2,0
3,0	3,0	2,5	2,5	2,0	1,5							5,0
0	1,0	1,5	2,5	3,0	3,5							
41	42	43	44	45								45
5,5	5,5	5,5	5,0	4,0								1,0
5,0	5,0	5,0	4,5	4,0								7,0
0	0,5	1,5	2,0	3,0								
46	47	48	49									49
6,5	6,5	6,0	5,5									3,5
6,5	6,5	6,0	5,5									7,5
0	0,5	1,5	2,0									
50	51	52										52
7,5	7,5	7,0										6,0
7,5	7,5	7,0										8,0
0	0,5	1,0										
53	54											54
9,0	8,0											7,5
8,5	8,0											8,5
0	0,5											
55												55
17,5												17,5
0												
0												

Kopoto lielumu vērtības:

$$K = 50 \quad A = 50 \quad M_a = -110,5$$

$$\lambda_a = 6,78 \quad M_x = 44$$

$$M_v = 51,5\sqrt{2}$$

Kontrole:¹⁾

1. $K \cdot \frac{10}{3} = 167$, bet $\frac{M_v}{\sqrt{2}} - M_a = 162$; kļūda ir $- 2,8\%$.

2. $2K \cdot \frac{10}{2} = 500$, bet $A\lambda_a - M_a + M_y = 493,5$; kļūda ir $- 1,3\%$.

¹⁾ salīdz. „Spannungszustand“ 200. lp.

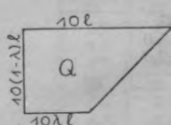
4. Kopoto lielumu vērtību noteikšana kvadrātveidīgām plātnēm ar visāda lieluma kvadrātveidīgu caurumu.

Lai noteiktu vērtības kopotiem lielumiem, mūsu rīcībā ir divi palīga līdzekļi: līdzsvara noteikumu izmantošana un interpolācija starp zināmām vērtībām gadījumos,

$$\text{ka } \lambda \rightarrow 0, \lambda = \frac{1}{3} \text{ un } \lambda \rightarrow 1.$$

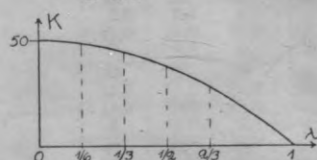
Līdzsvara noteikumi.

A. Visu vertikālo spēku summa ir = 0 (4. att.):



4. att.

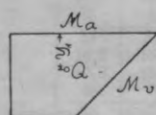
$K = A'$ I. gadījumā,
bet $K = A$ II. gadījumā.
 $K = 50(1 - \lambda^2)$ (5. att.).



5. att.

λ	K
0	50
$1/6$	$875/18 = 48,6$
$1/3$	$400/9 = 44,4$
$1/2$	$75/2 = 37,5$
$2/3$	$250/9 = 27,8$

B. Plātnes izgrieztai astotdaļai visu statisko momentu summa uz ārējo malu ir = 0 (6. att.):

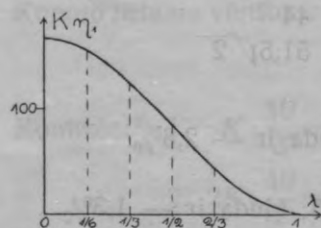


6. att.

$$K\eta_1 = \frac{M_v}{\sqrt{2}} \quad \text{I. gadījumā,}$$

$$\text{bet } K\eta_1 = \frac{M_v}{\sqrt{2}} - M_a \quad \text{II. gadījumā.}$$

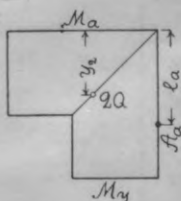
$$\eta_1 = \frac{10}{3} \cdot \frac{1 + \lambda - 2\lambda^2}{1 + \lambda} \quad (7. \text{ att.}).$$



7. att.

λ	η_1	$K\eta_1$
0	$10/3 = 3,33$	167
$1/6$	$200/63 = 3,18$	154,5
$1/3$	$25/9 = 2,78$	123,5
$1/2$	$20/9 = 2,22$	83,5
$2/3$	$14/9 = 1,55$	43

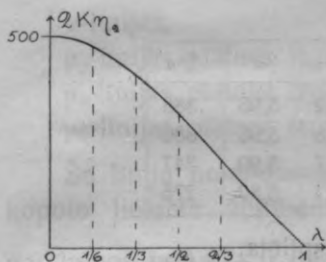
C. Plātnes izgrieztai ceturtdajai visu statisko momentu summa uz ārējo malu ir = 0 (8. att.):



8. att.

$2K\eta_2 = A\lambda_a + M_y$ I. gadījumā,
bet $2K\eta_2 = A\lambda_a - M_a + M_y$ II. gadījumā.

$$\eta_2 = 5 \cdot \frac{1 + \lambda - \lambda^2}{1 + \lambda} \quad (9. \text{ att.}).$$



9. att.

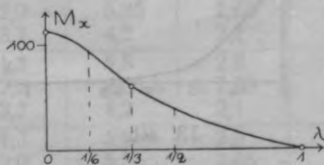
λ	η_2	$2K\eta_2$
0	5	500
$1/6$	$205/42 = 4,88$	474
$1/3$	$55/12 = 4,58$	407
$1/2$	$25/6 = 4,17$	312,5
$2/3$	$11/3 = 3,67$	204

I. gadījumā: plātnes ārējā mala ir brīvi uzguldīta.

Ja plātnes ārējā mala ir brīvi uzguldīta un caurums liels (apm. $\lambda > \frac{1}{2}$), tad mēs nevaram cerēt uz pareizu atrisinājumu, jo tad, dabiski, plātnes daļai, kas atrodas tās malu vidus tuvumā, būs lieli izliekumi; šī iemesla dēļ tāda plātne arī praktiski nav izmantojama. Tamdēļ mēs I. gadījumu izmeklēsim tikai robežās no $\lambda \rightarrow 0$ līdz $\lambda = \frac{1}{2}$.

Kopoto lielumu vērtības mēs noteicam šādā kārtībā.

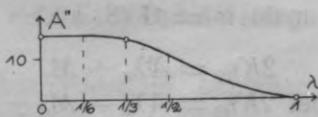
- 1) Noteicam M_v no līdzsvara noteikuma [B].
- 2) Grafiski interpolējam M_x , piemērojoties $2K\eta_2$ -linijas veidam (salīdz. 10. att. ar 9. att.):



10. att.

- 3) Noteicam $A\lambda_a$ no līdzsvara noteikuma [C].

- 4) Grafiski interpolējam A'' (11. att.):



11. att.

- 5) Aplešam $A = A' + A''$;

- 6) Aplešam $\lambda_a = \frac{A\lambda_a}{A}$.

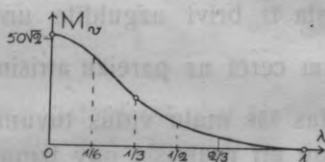
Iznākumu sakārtojums:

λ	M_x	M_v	A'	A''	A	λ_a	$A\lambda_a$
0	112	$167\sqrt{2}$	50	15,2	65,2	5,95	388
$1/6$	94	$154,5\sqrt{2}$	48,6	15,2	63,8	5,95	380
$1/3$	60	$123,5\sqrt{2}$	44,4	14,3	58,7	5,90	347
$1/2$	38	$83,5\sqrt{2}$	37,5	9,9	47,4	5,80	275

II. g a d ī j u m s: plātnes ārējā mala ir iespīlēta.

II. gadījumā mēs vērtības noteicam šādā kārtībā.

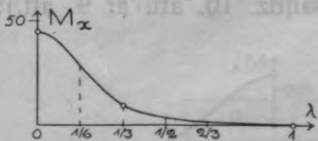
- 1) Grafiski interpolējam M_v , piemērojoties K_{η_1} -līnijas veidam (salīdz. 12. att. ar 7. att.):



12. att.

- 2) Noteicam M_a no līdzsvara noteikuma [B].

- 3) Grafiski interpolējam M_x , piemērojoties $2K_{\eta_2}$ -līnijas veidam (salīdz. 13. att. ar 9. att.):



13. att.

- 4) Noteicam $A\lambda_a$ no līdzsvara noteikuma [C].

- 5) Aplešam $\lambda_a = \frac{A\lambda_a}{A}$.

Iznākumu sakārtojums:

λ	M_a	M_x	M_v	A	λ_a	$A\lambda_a$
0	-115	44	$52\sqrt{2}$	50	6,8	341
$1/6$	-113	28	$42\sqrt{2}$	48,6	6,8	330
$1/3$	-100	9	$23\sqrt{2}$	44,4	6,7	298
$1/2$	-73	3	$11\sqrt{2}$	37,5	6,3	237
$2/3$	-38	1	$5\sqrt{2}$	27,8	5,95	165

5. Vienkāršoto līniju noteikšana:

α -līnijas,

μ_y -līnijas plātnes izgrieztās astotdaļas ārējai malai,

μ_x -līnijas plātnes izgrieztās astotdaļas kreisajai malai,

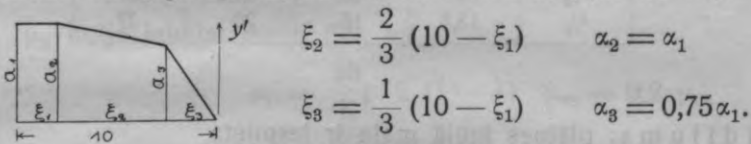
μ_v -līnijas plātnes izgrieztās astotdaļas labajai malai.

Šo līniju noteikšanai mēs izejam no attiecīgām nupat aplēstām kopoto lielumu vērtībām un no mums pazīstamiem līniju veidiem gadījumos, ja $\lambda \rightarrow 0$ un $\lambda = \frac{1}{3}$.¹⁾

I. gadījums: plātnes ārējā mala ir brīvi uzguldīta.

α' -, α'' - un α -līnijas (14. att.).

Mēs pieņemam, ka α'' -līnija ir līdzīga α' -līnijai; mēs to drīkstam darīt, jo zinām, ka λ''_a tikai maz atšķiras no λ'_a .



14. att.

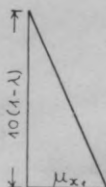
Abas nezināmās vērtības ξ_1 un α_1 mēs noteicam pēc diviem noteikumiem:

- 1) α -laukums = A ,
- 2) α -laukuma statistiskais moments uz y' -asi ir = $A\lambda_a$.

	λ	ξ_1	ξ_2	ξ_3	$\alpha_1 = \alpha_2$	α_3
α'	$1/6$	1,3	5,8	2,9	6,55	4,9
	$1/3$	2,0	5,35	2,65	5,8	4,35
	$1/2$	3,7	4,2	2,1	4,6	3,45
α''	$1/6$	1,3	5,8	2,9	2,05	1,5
	$1/3$	2,0	5,35	2,65	1,85	1,4
	$1/2$	3,7	4,2	2,1	1,2	0,9
α	$1/6$	1,3	5,8	2,9	8,6	6,4
	$1/3$	2,0	5,35	2,65	7,65	5,75
	$1/2$	3,7	4,2	2,1	5,8	4,35

1) „Spannungszustand“ 2., 3., 4. u. 5. att.

μ_x -līnija kreisajai malai (15. att.).



λ	μ_{x1}
$1/6$	21
$1/3$	18
$1/2$	15

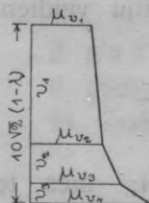
15. att.

μ_v -līnija labajai malai (16. att.):

$$v_1 = \frac{60}{9} \sqrt{2} (1 - \lambda) \quad \mu_{v1} = 0,5 \quad \mu_{v4}$$

$$v_2 = \frac{20}{9} \sqrt{2} (1 - \lambda) \quad \mu_{v2} = 0,6 \quad \mu_{v4}$$

$$v_3 = \frac{10}{9} \sqrt{2} (1 - \lambda) \quad \mu_{v3} = 0,75 \quad \mu_{v4}$$



16. att.

λ	μ_{v1}	μ_{v2}	μ_{v3}	μ_{v4}
$1/6$	15	18	22,5	30
$1/3$	15	18	22,5	30
$1/2$	13,5	16	20	27

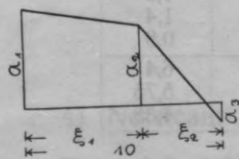
II. g a d i j u m s: plātnes ārējā mala ir iespīlēta.

α -līnija (17. att.).

$$\xi_2 = 10 - \xi_1 \quad \alpha_2 = 0,8\alpha_1$$

$$\alpha_3 = -0,2\alpha_1$$

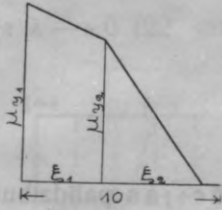
Abas nezināmās vērtības ξ_1 un α_1 mēs noteicam tāpat kā I. gadījumā.



17. att.

λ	ξ_1	ξ_2	α_1	α_2	α_3
$1/6$	4,45	5,55	8,55	6,85	-1,7
$1/3$	4,8	5,2	7,55	6,05	-1,5
$1/2$	6,3	3,7	5,5	4,4	-1,1
$2/3$	7,4	2,6	3,7	3,0	-0,75

μ_y -linija ārējai malai (18. att.):



18. att.

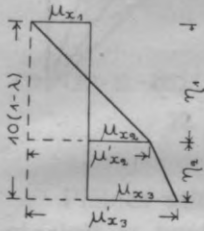
$$\xi_1 = 4$$

$$\xi_2 = 5 \quad \mu_{y2} = 0,8\mu_{y1}$$

$$\xi_3 = 1$$

λ	μ_{y1}	μ_{y2}
$1/6$	-20	-16
$1/3$	-18	-14,5
$1/2$	-13	-10,5
$2/3$	-7	-5,5

μ_x -linija kreisajai malai (19. att.):



19. att.

$$\eta_1 = \frac{20}{3}(1-\lambda) \quad \mu_{x1} = \frac{1}{6}\mu_{y1}^1$$

$$\eta_2 = \frac{10}{3}(1-\lambda) \quad \mu'_{x2} = 0,8\mu'_{x3}; \quad \mu_{x2} = \mu_{x1} + \mu'_{x2}$$

$$\mu_{x3} = \mu_{x1} + \mu'_{x3}$$

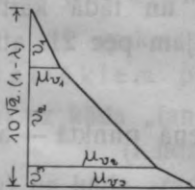
λ	μ_{x1}	μ_{x2}	μ_{x3}
$1/6$	-3,2	6,2	8,6
$1/3$	-3,0	3,2	4,7
$1/2$	-2,15	1,8	2,7
$2/3$	-1,15	0,9	1,4

μ_v -linija labajai malai (20. att.):

$$\nu_1 = \frac{30}{9}\sqrt{2}(1-\lambda) \quad \mu_{v1} = 0,2 \quad \mu_{v3}$$

$$\nu_2 = \frac{50}{9}\sqrt{2}(1-\lambda) \quad \mu_{v2} = 0,75\mu_{v3}$$

$$\nu_3 = \frac{10}{9}\sqrt{2}(1-\lambda)$$



20. att.

λ	μ_{v1}	μ_{v2}	μ_{v3}
$1/6$	2	8,5	11
$1/3$	1,5	6,5	8,5
$1/2$	1,5	5	6,5
$2/3$	1	3,5	4,5

¹⁾ jo šķērsspieduma skaitlis ν bija pieņemts $= \frac{1}{6}$: salīdz. „Formänderungszustand“ 56. lp.

6. α - un μ -vērtību noteikšana plātnes atsevišķiem punktiem.

No katra lieluma mūsu rīcībā ir trīs vērtības:

v_0 vienam robežgadījumam $\lambda \rightarrow 0$,

$v_{1/3}$ vidējam gadījumam $\lambda = \frac{1}{3}$,

$v_1 = 0$ otram robežgadījumam $\lambda \rightarrow 1$;

starpvērtības v — citiem λ — var noteikt ar interpolācijas palīdzību; mēs pagaidām interpolēsim pēc parabolas.

Tad interpolācijas formula ir šāda:

$$v = (1 - 4\lambda + 3\lambda^2)v_0 + (4,5\lambda - 4,5\lambda^2)v_{1/3}$$

ja $\lambda \rightarrow 0$, tad $v = v_0$

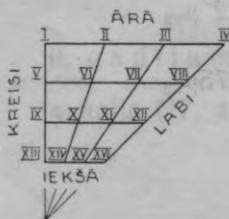
$$\lambda = \frac{1}{6}, \quad v = \frac{5}{12}v_0 + \frac{5}{8}v_{1/3}$$

$$\lambda = \frac{1}{3}, \quad v = v_{1/3}$$

$$\lambda = \frac{1}{2}, \quad v = -\frac{1}{4}v_0 + \frac{9}{8}v_{1/3}$$

$$\lambda = \frac{2}{3}, \quad v = -\frac{1}{3}v_0 + v_{1/3}$$

$$\lambda \rightarrow 1, \quad v = 0$$



21. att.

Lai izdarītu interpolāciju, mēs ievadam plātnei jauniedalījumu pēc 21. att.: plātnes izgrieztās astotdaļas „ārējo“ un „iekšējo“, tāpat arī „kreiso“ un „labo“ malu katru sadalām trijās vienādās daļās, pretim atrodošos malu attiecīgos dalījuma punktus savienojam ar taisnēm un tādā kārtā iegūtos plātnes punktus numerējam pēc 21. att.

Gadījumā, ja $\lambda \rightarrow 0$, punkti XIII — XVI sakrīt vienā punktā — ar plātnes viduspunktu;

gadījumā, ja $\lambda \rightarrow 1$, punkti V, IX, XIII sakrīt ar I

VI, X, XIV — ar II

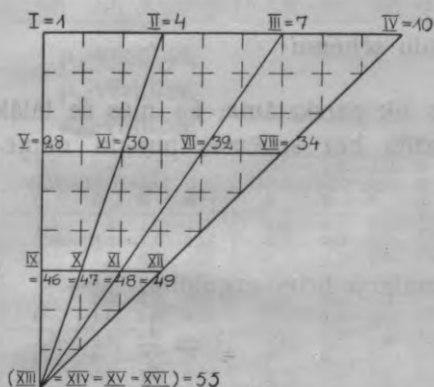
VII, XI, XV — ar III

VIII, XII, XVI — ar IV.

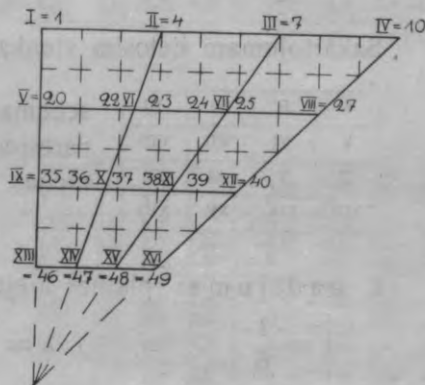
Salīdzināsim plātnes numerāciju pēc jaunā iedalījuma ar numerāciju pēc vecā iedalījuma:

ja $\lambda \rightarrow 0$ (22. att.):¹⁾

ja $\lambda = \frac{1}{3}$ (23. att.):²⁾



22. att.



23. att.

Plātnes astotdaļas četri iekšējie punkti 23. att. pēc jaunā iedalījuma nesakrīt ar punktiem pēc vecā iedalījuma; iztrūkstošās vērtības šiem punktiem viegli ar pietiekošu noteiktību var atrast grafiski interpolējot, t. i. novelkot attiecīgās līnijas griezumus (20—27) un (35—40). Iznākumi ir še zemāk sakārtoti.

No līnijām, noteiktām 5. pantā, mēs nolasām un pierakstām pārļabotās α -un μ -vērtības plātnes astotdaļas attiecīgās malās un, piemērojoties šīm pārļabotām malu vērtībām, pārļabojam arī pārējās vērtības, velkot tekošas līnijas:

1) apskatāmā lieluma vērtībām vienam atsevišķam plātnes punktam, bet plātnēm ar dažādām λ ;

2) apskatāmā lieluma vērtībām plātnei ar noteiktu λ , bet vairākiem punktiem, kas guļ:

a) uz kāda „tangentiālgriezuma“

(I līdz IV, V līdz VIII, VI līdz XII, XIII līdz XVI),

b) uz kāda „radiālgriezuma“

(I līdz XIII, II līdz XIV, III līdz XV, IV līdz XVI).

¹⁾ salīdz. ar šā darba 3. att.

²⁾ salīdz. ar „Spannungszustand“ 1. att.

7. Iznākumu sakārtojums plātnēm ar $\lambda = \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$

(vai $\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}$).

Sakārtojumam lietojam vienkāršotu schēmu:

I	II	III	IV
V	VI	VII	VIII
IX	X	XI	XII
XIII	XIV	XV	XVI

schēma ir tik pārskatāma, ka mēs še tālāk varēsim iztikt bez schēmas punktu numērācijas.

I. gadījums: plātnes ārējā mala ir brīvi uzguldīta.

$$\lambda = \frac{1}{6}$$

$$\lambda = \frac{1}{3}$$

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

α -vērtības:

$$\alpha' = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6,6 & 6,0 & 4,8 & 0 \\ \hline 2,0 & 1,9 & 1,5 & 0 \\ \hline 8,6 & 7,9 & 6,3 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\alpha'' = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5,8 & 5,4 & 4,5 & 0 \\ \hline 1,9 & 1,7 & 1,4 & 0 \\ \hline 7,7 & 7,1 & 5,9 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\alpha''' = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4,6 & 4,6 & 3,8 & 0 \\ \hline 1,2 & 1,2 & 1,0 & 0 \\ \hline 5,8 & 5,8 & 4,8 & 0 \\ \hline \end{array}$$

μ_x -vērtības,

μ_y -vērtības,

μ_{xy} -vērtības:

$$\mu_x = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 7,5 & 13,0 & 15,0 \\ \hline 7,0 & 7,0 & 6,5 & 4,5 \\ \hline 8,0 & 8,0 & 7,0 & 4,5 \\ \hline 0 & 5,5 & 9,5 & 12,0 \\ \hline 14,0 & 14,0 & 13,5 & 10,5 \\ \hline 10,5 & 10,5 & 10,5 & 10,5 \\ \hline 0 & 4,0 & 6,5 & 7,5 \\ \hline 21,0 & 22,5 & 25,0 & 32,0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1,5 & 3,5 & 16,0 \\ \hline \end{array}$$

$$\mu_y = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 7,5 & 13,0 & 15,0 \\ \hline 6,0 & 6,0 & 5,5 & 3,0 \\ \hline 5,5 & 5,5 & 5,0 & 3,0 \\ \hline 0 & 6,0 & 10,5 & 13,5 \\ \hline 12,0 & 12,5 & 12,0 & 8,0 \\ \hline 6,0 & 6,5 & 7,0 & 8,0 \\ \hline 0 & 5,0 & 9,0 & 10,0 \\ \hline 18,0 & 18,5 & 21,0 & 29,0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2,5 & 6,0 & 15,5 \\ \hline \end{array}$$

$$\mu_{xy} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 7,0 & 12,0 & 13,5 \\ \hline 5,0 & 5,0 & 4,0 & 2,0 \\ \hline 3,5 & 3,5 & 3,0 & 2,0 \\ \hline 0 & 6,0 & 10,0 & 12,0 \\ \hline 10,0 & 10,5 & 10,0 & 5,5 \\ \hline 3,5 & 4,0 & 4,5 & 5,5 \\ \hline 0 & 5,5 & 9,5 & 10,5 \\ \hline 15,0 & 16,0 & 18,0 & 24,0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3,0 & 7,0 & 15,0 \\ \hline \end{array}$$

μ_u -vērtības } diagonāles punktiem:
 μ_v -vērtības }

$$\mu_u = \begin{array}{|c|} \hline -15,0 \\ \hline 15,0 \\ \hline -7,5 \\ \hline 16,5 \\ \hline 3,0 \\ \hline 18,0 \\ \hline 0,0 \\ \hline 32,0 \\ \hline \end{array}$$

$$\mu_v = \begin{array}{|c|} \hline -15,0 \\ \hline 15,0 \\ \hline -10,0 \\ \hline 16,0 \\ \hline -2,0 \\ \hline 18,0 \\ \hline -1,0 \\ \hline 30,0 \\ \hline \end{array}$$

$$\mu_w = \begin{array}{|c|} \hline -13,5 \\ \hline 13,5 \\ \hline -11,5 \\ \hline 15,5 \\ \hline -5,0 \\ \hline 16,0 \\ \hline -3,0 \\ \hline 27,0 \\ \hline \end{array}$$

II. gadījums: plātnes ārējā mala ir iespīlēta.

$$\lambda = \frac{1}{6} \quad \lambda = \frac{1}{3} \quad \lambda = \frac{1}{2} \quad \lambda = \frac{2}{3}$$

α -vērtības:

8,6	7,2	3,1	-1,1	7,6	6,5	3,3	-0,8	5,5	5,0	3,8	-0,5	3,7	3,2	2,9	-0,3
-----	-----	-----	------	-----	-----	-----	------	-----	-----	-----	------	-----	-----	-----	------

μ_x -vērtības,

μ_y -vērtības,

μ_{xy} -vērtības:

-3,5	-3,0	-1,5	0	-3,0	-2,5	-1,0	0	-2,0	-2,0	-1,0	0	-1,0	-1,0	-0,5	0
-21,0	-17,5	-8,0	0	-18,0	-15,0	-7,0	0	-12,5	-11,0	-5,0	0	-6,5	-5,5	-2,5	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,0	1,0	1,0	-1,0	0,0	0,0	0,5	-1,0	-0,5	-0,5	0,0	-1,0	-0,5	-0,5	-0,0	-1,0
-3,5	-3,0	-2,0	-1,0	-4,5	-4,0	-2,5	-1,0	-4,0	-3,5	-2,0	-1,0	-3,0	-2,5	-1,5	-1,0
0	1,5	3,0	3,0	0	1,5	2,5	2,5	0	1,5	2,0	2,5	0	1,0	1,5	2,0
5,0	4,5	4,0	2,0	3,0	3,0	2,5	1,0	2,0	2,0	1,5	-0,0	1,0	1,0	0,5	-0,5
3,0	3,0	3,0	2,0	0,5	0,5	1,0	1,0	-1,0	-1,0	-0,5	-0,0	-1,5	-1,5	-1,0	-0,5
0	1,0	2,5	3,5	0	1,5	3,0	3,5	0	1,5	3,0	3,5	0	1,5	2,5	3,0
7,5	8,5	9,0	11,5	4,5	5,0	5,0	7,0	3,0	3,0	3,0	3,5	1,5	1,5	1,5	1,5
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0,5	1,5	5,5	0	1,0	2,0	5,0	0	1,0	2,0	4,5	0	1,0	2,0	3,0

μ_u -vērtības

μ_v -vērtības

diagonāles punktiem:

0	0	0	0
0	0	0	0
-4,0	-3,5	-3,5	-1,0
2,0	1,5	1,5	1,0
-1,5	-2,5	-3,5	-2,5
5,5	4,5	3,5	2,5
-0,0	-1,5	-2,5	-2,5
11,0	8,5	6,5	4,0

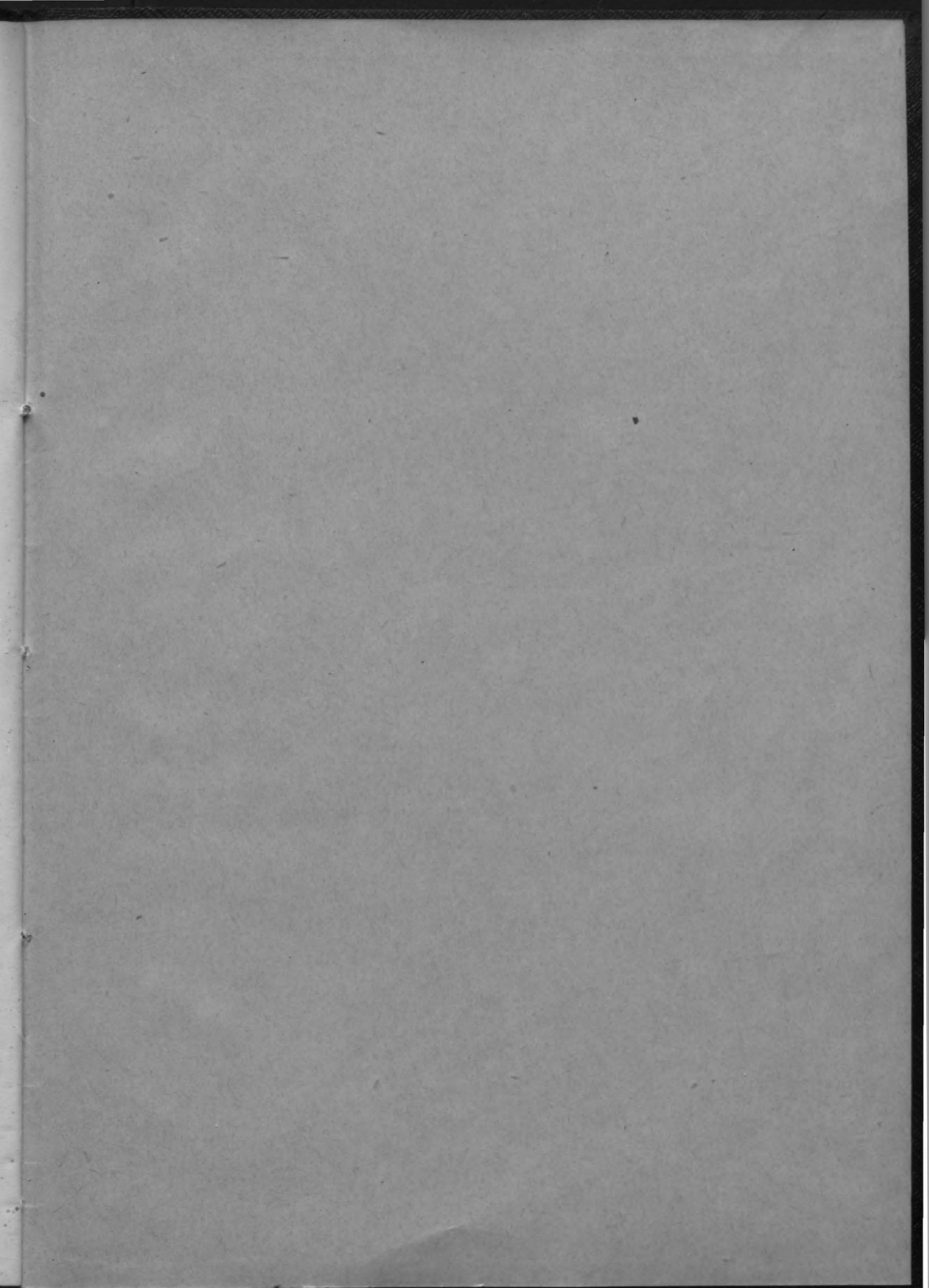
(Iesniegts L. U. inženierzinātņu fakultātei 1936. g. 20. novembrī.)

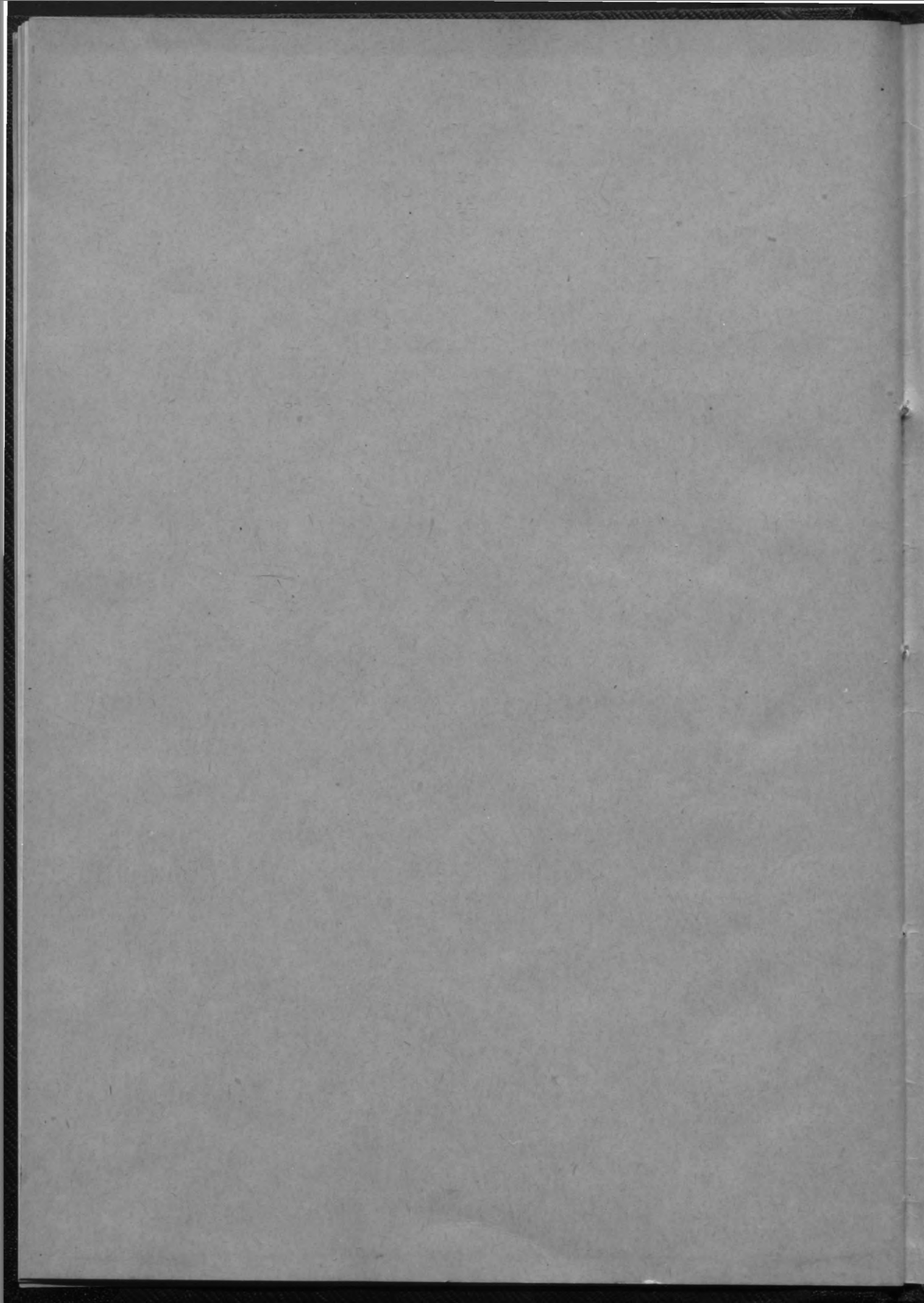
Der Spannungszustand einer quadratischen Platte mit beliebig grosser quadratischer Öffnung.

Von *Erich Wiedemann*.

Kurze Inhaltsangabe der Schrift.

Die vorliegende Arbeit fusst auf zwei früheren Arbeiten des Verfassers (siehe Fussnote auf Seite 57), in welchen der Formänderungs- und Spannungszustand der quadratischen Platte mit quadratischer Öffnung für gleichmässig verteilte Belastung und vier Auflagerungsfälle untersucht wurden mit der Einschränkung, dass das Verhältnis λ der Innenlänge zur Aussenlänge gleich $\frac{1}{3}$ war. In der neuen Arbeit wird diese Einschränkung aufgehoben: es wird der Spannungszustand (Biegemomente, Drillungsmomente, Auflagerreaktionen) einer quadratischen Platte mit quadratischer Öffnung für verschiedene Verhältnisse λ ermittelt, und zwar für zwei Auflagerungsfälle: für den Fall der freien Auflagerung am äusseren Rande (mit $\lambda = \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$) und den Fall der vollkommenen Einspannung des äusseren Randes (mit $\lambda = \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$). Während in den früheren Arbeiten das Verfahren der Differenzenrechnung angewandt und verhältnismässig hohe Ansprüche an die Genauigkeit der zu gewinnenden Ergebnisse gestellt wurden, ist in der vorliegenden Arbeit ein gröberes, mehr ingenieurmässiges Näherungsverfahren herangezogen worden: die stark abgerundeten Ergebnisse wurden durch Interpolation zwischen den drei Fällen $\lambda \rightarrow 0$, $\lambda = \frac{1}{3}$, $\lambda \rightarrow 1$ unter Berücksichtigung von drei Gleichgewichtsbedingungen gewonnen.





294300

LATVIJAS UNIVERSITĀTES BIBLIOTEKA



0506004875