LATVIJAS ŪNIVERSITĀTES RAKSTI

ACTA UNIVERSITATIS LATVIENSIS

INŽENIERZINĀTŅU FAKULTĀTES SERIJA

II. SĒJUMS TOMUS

№ 4—5

LATVIJAS ŪNIVERSITĀTE

RĪGĀ, 1938

LATVIJAS ŪNIVERSITĀTES RAKSTI
ACTA UNIVERSITATIS LATVIENSIS

INŽENIERZINĀTŅU FAKULTĀTES SERIJA II. 4.

Trīs projektīvas skālas kā kollīneāru punktu nomogramma.

Priv.-doc. *Kārlis Zalts.*

1. Jēdziens par projektīvu skālu.

Apzīmēsim ar $f(z)$ kādu no reālā mainīgā z atkarīgu funkciju; pieņemsim, ka vismaz apskatāmās argumenta vērtību robežās tā ir vienvērtīga un nepārtraukta. Nolīdzinājumi:

$$x = \frac{\bar{a} f(z) + a}{\bar{c} f(z) + c} \quad y = \frac{\bar{b} f(z) + b}{\bar{c} f(z) + c} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

kur x, y — parastās nehomogenās Dekarta koordinātas, izteic taisni, ja konstantas $\bar{a}, a, \ldots \bar{c}, c$ tādas, ka izteiksmes

$$\bar{a} c - a \bar{c} \text{ un } \bar{b} c - b \bar{c}$$

abas reizē nav nulles.

Pēdējais ierobežojums ir līdzvērtīgs tam, ka koordinātu formulās (1) koeficienti abos skaitītājos reizē nedrīkst būt proporcionāli attiecīgiem koeficientiem saucējā. Pretējā gadījumā no abām formulām izzūd mainīgais parametrs, un tās izteic konstantu punktu.

Konstruējot taisni (1) var ikvienam tās punktam piekārtot attiecīgās argumenta vērtības. To, vispārīgi, dara tā, ka argumentam z liek pieņemt apaļas, aritmētiskā progresijā pieaugošas vērtības un attiecīgos punktus apzīmē šķērssvīkām; pēdējām pieraksta klāt z vērtības.

Tādu skaitļiem apzīmētu punktu sistemu sauc par skālu, šķērsšvīkas sauc par skālas iedalījumu, tām (kā arī starppunktiem) piekārtotos skaitļus — par skālas atzīmēm un līniju, uz kuŗas iedalījums konstruēts, par skālas atbalstu.

Skālai, ko definē nolīdzinājumi (1), ir tā raksturīgā īpašība, ka četru tās punktu $P_i(x_i, y_i)$ anharmoniskā attiecība atkarājas tikai no funkcijas $f(z)$ vērtībām šinīs punktos ($i = 1, 2, 3, 4$):

$$(P_1 P_2 P_3 P_4) = \frac{\overline{P_1 P_3}}{\overline{P_3 P_2}} : \frac{\overline{P_1 P_4}}{\overline{P_4 P_2}} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} : \frac{x_4 - x_1}{x_2 - x_4} =$$

$$= \frac{f(z_3) - f(z_1)}{f(z_2) - f(z_3)} : \frac{f(z_4) - f(z_1)}{f(z_2) - f(z_4)}, \quad \ldots \ldots \ldots (2)$$

tā tad, nemaz neatkarājas no konstantām $\bar{a}, a, \ldots \bar{c}, c$. Liekot izteiksmēs (1) citas konstantu vērtības, bet atstājot to pašu funkciju $f(z)$, dabūsim, vispārīgi runājot, kādu citu skālu. Visām tā dabūtām skālām anharmoniskā attiecība četros homologos punktos ir vienāda, un tādu punktu savienojumi veido taišņu šķipsnu, kas iet caur kopīgu punktu. No tā seko, ka divas vienai tādai saimei piederīgas skālas var dabūt vienu no otras vienkāršas centrālās projekcijas ceļā. Tāpēc skālu, ko definē nolīdzinājumi (1), sauc par projektīvu skālu.

2. Projektīvas skālas atbalsta nolīdzinājumi un pamatpunkti.

Nolīdzinājumi (1) noteic skālas atbalsta punktu koordinātas atkarībā no parametra $f(z)$. Eliminējot parametru dabū atbalsta nolīdzinājumu sakarības veidā, kas saista x ar y:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

Skālas atbalsts iet caur divi punktiem (skālas pamatpunktiem), kuŗu vietu noteic skaitļu trijotnes a, b, c un $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, ja tās uzskata par punktu homogenām Dekarta koordinātām.

Punktu ar homogenām koordinātām a, b, c nosauksim par nulles punktu; tā nehomogenās koordinātas apzīmēsim ar (ξ, η). Otru pamatpunktu, kam homogenās koordinātas ir $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, nosauksim par bezgalības punktu; tā nehomogenās koordinātas apzīmēsim ar $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$. No sakarībām:

$$a : b : c = \xi : \eta : 1,$$

$$\bar{a} : \bar{b} : \bar{c} = \bar{\xi} : \bar{\eta} : 1$$

seko skālas pamatpunktu nehomogenās koordinātas:

$$\text{nulles punktam} : \xi = \frac{a}{c}, \ \eta = \frac{b}{c}; \quad \ldots \ldots \ldots (4)$$

$$\text{bezgalības punktam} : \bar{\xi} = \frac{\bar{a}}{\bar{c}}, \ \bar{\eta} = \frac{\bar{b}}{\bar{c}}, \quad \ldots \ldots \ldots (5)$$

pieņemot, ka $c \neq 0$, $\bar{c} \neq 0$.

Pamatpunktu nosaukumus attaisno tas, ka (4) un (5) seko no (1), ja tur funkcijai $f(z)$ liek izzust vai neaprobežoti pieaugt. Ja $f(z)$ to spēj, tad pamatpunkti ir skālas iespējamā iedalījuma robežās un to atzīmes ζ (nulles punktam) un $\bar{\zeta}$ (bezgalības punktam) ir tādas, ka $f(\zeta)=0$ un $f(\bar{\zeta})=\infty$. Ja funkcija nespēj izzust vai neaprobežoti pieaugt, piem. $f(z)=1+\sin^2 z$, tad attiecīgais pamatpunkts (vai arī abi) nav skālas iedalījuma robežās un tam (tiem) nav atzīmes (-mju).

Ja projektīvas skālas pamatpunkti ir galīgā atstatumā no koordinātu iesākuma ($c\bar{c} \neq 0$), tad skālas nolīdzinājumus (1), ievietojot tajos pamatpunktu koordinātas, var pārrakstīt šādā veidā:

$$x=\frac{\bar{\xi} f(z)+\omega \xi}{f(z)+\omega}, \quad y=\frac{\bar{\eta} f(z)+\omega \eta}{f(z)+\omega}, \quad \ldots \ldots \ldots (6)$$

kur $\omega=c/\bar{c}$.

Formulas (6) izteic to, ka skālas punkts (x, y) dala atstatumu no bezgalības punkta $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ līdz nulles punktam (ξ, η) attiecībā $\omega : f(z)$. Punkts (ξ_0, η_0), kam atbilst tada atzīme ζ_0, ka $f(\zeta_0)=1$ (v i e n ī b a s p u n k t s), dala šo atstatumu attiecībā $\omega : 1$. Tā tad, $\omega=c/\bar{c}$ a p z ī m ē a t t i e c ī b u, k ā d ā v i e n ī b a s p u n k t s d a l a a t s t a t u m u n o b e z g a l ī b a s p u n k t a l ī d z n u l l e s p u n k t a m.*

Ja n a v tādas realas vērtības ζ_0, kas dod $f(\zeta_0)=1$, tas nozīmē, ka vienības punkts (ξ_0, η_0) nepieder skālas iedalījumam.

3. Projektīvu skālu kritiskie punkti un kritiskās vērtības.

Par skālu k r i t i s k i e m p u n k t i e m sauc punktus, kur skālu atbalsti sastop viens otru. Skālu atzīmes šinīs punktos sauc par k r i t i s k ā m v ē r t ī b ā m, un šo jēdzienu attiecina arī uz funkcijām, no kuŗām skālas atkarājas. Šos jēdzienus nomografijā sāka lietāt *M. d'Ocagne* darbā: „Sur les équations d'ordre nomographique 3 et 4" (Bulletin de la Société Mathématique de France, t. 35, 1907).

Apskatīsim divi projektīvas skālas, kas uzdotas ar nolīdzinājumiem

$$x=\frac{\bar{a}_j f_j+a_j}{\bar{c}_j f_j+c_j}, \quad y=\frac{\bar{b}_j f_j+b_j}{\bar{c}_j f_j+c_j}, \quad \ldots \ldots \ldots (7)$$

kur $f_j=f_j(z_j)$ un $j=i,k$. Skālu konstantas $\bar{a}_j, a_j, \ldots$ pieņemsim tādas, ka neviena skāla nedeģenerē punktā; tā tad, no lielumiem:

---

* Zem attiecības, kādā punkts P sadala nogriezni AB, jāsaprot

$$\lambda=AP:PB;$$

šis skaitlis ir pozitīvs, ja P ir starp A un B, bet negātīvs, ja P ir ārpus AB.

$$A_j = \begin{vmatrix} \bar{b}_j & b_j \\ \bar{c}_j & c_j \end{vmatrix} = \bar{b}_j c_j - b_j \bar{c}_j,$$

$$B_j = \begin{vmatrix} \bar{c}_j & c_j \\ \bar{a}_j & a_j \end{vmatrix} = \bar{c}_j a_j - c_j \bar{a}_j, \quad \ldots\ldots\ldots (7')$$

$$C_j = \begin{vmatrix} \bar{a}_j & a_j \\ \bar{b}_j & b_j \end{vmatrix} = \bar{a}_j b_j - a_j \bar{b}_j$$

vislielākais, viens drīkst būt nulle. Skālu atbalstu nolīdzinājumi, saskaņā ar (3), izvirzot determinantu un ievērojot nupat pieņemtos apzīmējumus:

$$A_j x + B_j y + C_j = 0. \quad (j = i, k) \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

Atbalsti sastopas noteiktā punktā, ja tie nav paralleli; analitiskā pazīme tam ir tā, ka $A_i B_k - A_k B_i \neq 0$. Ja šis beidzamais noteikums izpildīts, nolīdzinājumus (8) var atrisināt attiecībā uz x un y un tā dabūt atbalstu krustpunkta (kritiskā punkta) koordinātas.

Apzīmēsim ar $(f_i)_k$ funkcijas f_i vērtību kritiskā punktā. No (7) seko:

$$(f_i)_k = \frac{a_i - x_{ik} c_i}{x_{ik} \bar{c}_i - \bar{a}_i} = \frac{b_i - y_{ik} c_i}{y_{ik} \bar{c}_i - \bar{b}_i} \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

kur x_{ik}, y_{ik} — kritiskā punkta koordinātas. Pārmijot savā starpā indekus i un k, dabū līdzīgu formulu otras funkcijas kritiskai vērtībai $(f_k)_i$: protams, $x_{ki} = x_{ik}$, $y_{ki} = y_{ik}$.

No proporcijas (9) veidojam jaunu, lietājot šādu principu:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{A_k a + B_k c}{A_k b + B_k d};$$

ievērojot (8), dabū:

$$(f_i)_k = -\frac{A_k a_i + B_k b_i + C_k c_i}{A_k \bar{a}_i + B_k \bar{b}_i + C_k \bar{c}_i} \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

A_k, B_k, C_k var izteikt skālu konstantās. Tad seko funkcijas f_i kritiskā vērtība divu determinantu attiecības veidā:

$$(f_i)_k = \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_k & b_k & c_k \\ \bar{a}_k & \bar{b}_k & \bar{c}_k \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \bar{a}_i & \bar{b}_i & \bar{c}_i \\ \bar{a}_k & \bar{b}_k & \bar{c}_k \\ a_k & b_k & c_k \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

Mums še darīšana ar determinantiem, ko veido skālu pamatpunktu homogenās koordinātas. Ievērojot lielo lomu, kāda šādiem determinantiem būs arī turpmāk, norunāsim tiem saīsinātu rakstības veidu.

Skālu pamatpunktus apzīmēsim ar attiecīgā mainīgā indeku, liekot indekam virsū švīku, ja runā par bezgalības punktu, un atstājot indeku nemainītu, ja runā par nulles punktu. Mums ir:

Pamatpunktu nosaukumi		Homogenās koordinātas
nulles punkti . . .	i	$a_i,\ b_i,\ c_i$
	k	$a_k,\ b_k,\ c_k$
bezgalības punkti	$\bar{i}$	$\bar{a}_i,\ \bar{b}_i,\ \bar{c}_i$
	$\bar{k}$	$\bar{a}_k,\ \bar{b}_k,\ \bar{c}_k$

Determinantus, ko veido pamatpunktu homogenās Dekarta koordinātas, apzīmēsim ar simbolu Δ, kam iekavās pierakstīsim pamatpunktu nosaukumus tādā sekojumā, kas atbilst rindu sekojumam determinantā.

Uz šīs norunas pamata formulu (11) varam pārrakstīt šā:

$$(f_i)_k = \Delta(i k \bar{k}) : \Delta(\bar{i} \bar{k} k) \quad \text{. . . . . (12)}$$

4. Pamatpunktu un kritisko punktu savietošanās. Trīs skālas caur kopīgu punktu.

Vispārīgā gadījumā, ko schēmatiski rāda att. 1, trīs projektīvu skālu atbalsti veido trīsstūri, un skālu raksturīgie punkti (nulles punkti 1, 2, 3, bezgalības punkti $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$ un kritiskie punkti K_{12}, K_{23}, K_{31}) neviens nav kopā ar otru. Īpašos gadījumos tie var savietoties.

J ā i z š ķ i ŗ: 1) kritisko punktu savietošanās ar pamatpunktiem, 2) pamatpunktu savietošanās ar pamatpunktiem un 3) kritisko punktu savietošanās ar kritiskiem.

Vienai tai pašai skālai piederīgie pamatpunkti nekad nav kopā, ja pieņemam, ka skāla neizvēršas punktā. Skālas pamatpunkts var būt kopā ar sava atbalsta kritisko punktu. Ja, piem., i ir kopā ar K_{ij} $(j \neq i)$, tad seko, ka i ir uz taisnes $j\bar{j}$ jeb punkti $ij\bar{j}$ veido izlīdzinājumu (fr. alignement). Otrādi, j a $ij\bar{j}$ v e i d o i z l ī d z i n ā j u m u, t a d s e k o, k a i i r u z t a i s n e s $j\bar{j}$, t ā t a d, k r i t i s k ā p u n k t ā K_{ij}.

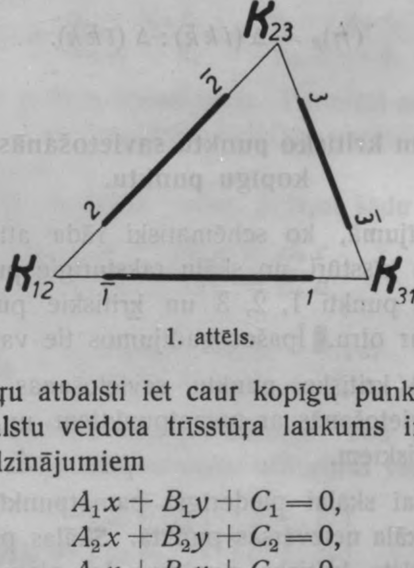
Sekojošā tabulā sakopoti izlīdzinājumi, kas rodas, kad kāds pamatpunkts savietots ar kritisko punktu:

Pamatpunkts	Savietots ar K_{23}	K_{31}	K_{12}
1	—	$13\bar{3}$	$12\bar{2}$
$\bar{1}$	—	$\bar{1}3\bar{3}$	$\bar{1}2\bar{2}$
2	$23\bar{3}$	—	$21\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{2}3\bar{3}$	—	$\bar{2}1\bar{1}$
3	$32\bar{2}$	$31\bar{1}$	—
$\bar{3}$	$\bar{3}2\bar{2}$	$\bar{3}1\bar{1}$	—

Pamatpunkti i vai $\bar{\imath}$ var savietoties ar otras skālas pamatpunktu j vai $\bar{\jmath}$ tikai kritiskā punktā, kas kopīgs abiem atbalstiem. Pieņemsim, ka savietoti nulles punkti i un j. Tādā gadījumā ir spēkā izlīdzinājumi

$$ij\bar{\imath}, \quad ij\bar{\jmath}, \quad ijk, \quad ij\bar{k},$$

t. i. savietotie pamatpunkti ir izlīdzinājumā ar ikvienu pārējo.



1. attēls.

Trīs skālas, kuŗu atbalsti iet caur kopīgu punktu, atbilst robežgadījumam, kad atbalstu veidota trīsstūŗa laukums ir nulle. Šinī gadījumā atbalstu nolīdzinājumiem

$$\begin{aligned} A_1 x + B_1 y + C_1 &= 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 &= 0, \\ A_3 x + B_3 y + C_3 &= 0, \end{aligned}$$

kur koeficientus noteic (7′), ir kopīgs atrisinājums, un tapēc koeficientu determinants

$$D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

Šīs sakarības dēļ visi kritiskie punkti savietojas vienā, un skālām abas funkciju kritiskās vērtības top vienādas. Dabūjam, saskaņā ar (12):

$$(f_1)_2 = (f_1)_3 = \frac{\Delta\,(12\bar{2})}{\Delta\,(\bar{1}22)} = \frac{\Delta\,(13\bar{3})}{\Delta\,(\bar{1}33)},$$

$$(f_2)_1 = (f_2)_3 = \frac{\Delta\,(21\bar{1})}{\Delta\,(\bar{2}11)} = \frac{\Delta\,(23\bar{3})}{\Delta\,(\bar{2}33)}, \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

$$(f_3)_1 = (f_3)_2 = \frac{\Delta\,(31\bar{1})}{\Delta\,(\bar{3}11)} = \frac{\Delta\,(32\bar{2})}{\Delta\,(\bar{3}22)}.$$

5. Nolīdzinājums, ko attēlo nomogramma, kas sastāv no trīs taisnām projektīvām skālām.

Skālas uzdotas ar nolīdzinājumiem:

$$x_i = \frac{\bar{a}_i f_i + a_i}{\bar{c}_i f_i + c_i}, \quad y_i = \frac{\bar{b}_i f_i + b_i}{\bar{c}_i f_i + c_i},$$

kur $f_i = f_i(z_i)$ un $i = 1, 2, 3$. Konstantas $\bar{a}_i, a_i, \ldots \bar{c}_i, c_i$ pieņemsim tādas, ka neviena skāla neizvēršas punktā. Visas trīs skālas kopā ir nomogramma (grafiska tabula), kas attēlo noteiktu sakarību starp mainīgiem z_1, z_2, z_3, tā ka, uzskatot divi mainīgo vērtības par uzdotām, trešā mainīgā vērtību var nolasīt. Nolasīšanas paņēmiens kollīneāru (izlīdzinātu) punktu nomogrammās: punktus, kas atbilst uzdotām mainīgo lielumu vērtībām, savieno ar taisni un raugās, kur taisne krusto trešo skālu; tur nolasa vajadzīgo atbildi.

Ja trīs punkti (x_i, y_i) ir uz vienas taisnes, to koordinātas atbilst noteikumam:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ievietojot še koordinātu izteiksmes skālu funkcijās dabū, pēc nelieliem pārveidojumiem, attēloto sakarību starp z_1, z_2, z_3:

$$\begin{vmatrix} \bar{a}_1 f_1 + a_1 & \bar{b}_1 f_1 + b_1 & \bar{c}_1 f_1 + c_1 \\ \bar{a}_2 f_2 + a_2 & \bar{b}_2 f_2 + b_2 & \bar{c}_2 f_2 + c_2 \\ \bar{a}_3 f_3 + a_3 & \bar{b}_3 f_3 + b_3 & \bar{c}_3 f_3 + c_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

un, ja determinantu izvirza, seko (sk. *M. d'Ocagne,* Calcul graphique et Nomographie, 2. ed., Paris, 1914, 256. lp. p.):

$$Af_1f_2f_3 + \Sigma B_i f_j f_k + \Sigma C_i f_i + D = 0,$$

kur A, B_i, C_i, D ir konstantas un i, j, k apzīmē skaitļu 1, 2, 3 cikliskās permūtācijas.

Neraugoties uz to, ka beidzamais nolīdzinājums ir sīki pētīts (*M. d'Ocagne,* „Théorie des équations représentables par trois systèmes linéaires de points cotés", Acta mathematica t. XXI, 1897, 301. lp. p.), nav noskaidrots, kā tā koeficienti saistās ar skālu konstantām.

No (15) seko, palielinot dēterminanta rindu skaitu:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \bar{a}_1 & \bar{b}_1 & \bar{c}_1 \\ f_1 & 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & -1 & 0 & \bar{a}_2 & \bar{b}_2 & \bar{c}_2 \\ 0 & f_2 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & -1 & \bar{a}_3 & \bar{b}_3 & \bar{c}_3 \\ 0 & 0 & f_3 & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ja kreiso pusi izvirza pēc pirmo trīs stabiņu elementiem, seko iznākumā nolīdzinājums:

$$\Delta(\bar{1}\bar{2}\bar{3})f_1f_2f_3 + \Delta(\bar{1}\bar{2}3)f_1f_2 + \Delta(\bar{1}2\bar{3})f_1f_3 + \Delta(1\bar{2}\bar{3})f_2f_3 + \\ + \Delta(\bar{1}23)f_1 + \Delta(1\bar{2}3)f_2 + \Delta(12\bar{3})f_3 + \Delta(123) = 0, \quad \ldots \quad (16)$$

kur koeficienti ir trīsrindu determinanti, ko veido iekavās uzskaitīto pamatpunktu homogenās Dekarta koordinātas:

$$\bar{a}_i,\ \bar{b}_i,\ \bar{c}_i \text{ (punktam } \bar{\imath}\text{)},$$
$$a_i,\ b_i,\ c_i \text{ (punktam } i\text{)}.$$

Piemēram:

$$\Delta(\bar{1}2\bar{3}) = \begin{vmatrix} \bar{a}_1 & \bar{b}_1 & \bar{c}_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \bar{a}_3 & \bar{b}_3 & \bar{c}_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta(1\bar{2}3) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \bar{a}_2 & \bar{b}_2 & \bar{c}_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Turpmāk būs vajadzīgs katram koeficientam savs noteikts nummurs. Norunāsim determinantus, kas formulā (16) klāt dažadām funkciju kombinācijām, apzīmēt pēc kārtas ar A_0, A_1, . . . A_7.

№	Loceklis	Pamatpunkti	Koeficienti
0	$f_1 f_2 f_3$	$\bar{1}\bar{2}\bar{3}$	$\Delta(\bar{1}\bar{2}\bar{3}) = A_0$
1	$f_1 f_2$	$\bar{1}\bar{2}3$	$\Delta(\bar{1}\bar{2}3) = A_1$
2	$f_1 f_3$	$\bar{1}2\bar{3}$	$\Delta(\bar{1}2\bar{3}) = A_2$
3	$f_2 f_3$	$1\bar{2}\bar{3}$	$\Delta(1\bar{2}\bar{3}) = A_3$
4	f_1	$\bar{1}23$	$\Delta(\bar{1}23) = A_4$
5	f_2	$1\bar{2}3$	$\Delta(1\bar{2}3) = A_5$
6	f_3	$12\bar{3}$	$\Delta(12\bar{3}) = A_6$
7	1	123	$\Delta(123) = A_7$

. . . (T)

Formula (16) saīsinātos koeficientu apzīmējumos:

$$A_0 f_1 f_2 f_3 + A_1 f_1 f_2 + A_2 f_1 f_3 + A_3 f_2 f_3 + \\ + A_4 f_1 + A_5 f_2 + A_6 f_3 + A_7 = 0. \quad \ldots \ldots (17)$$

6. Koeficientu anullēšanās un tās ģeometriskā nozīme.

Nolīdzinājumā (16) vai (17), ko attēlo trīs taisnas projektīvas skālas, koeficienti ir determinanti, ko veido skālu pamatpunktu homogenās Dekarta koordinātas, ņemot šos punktus visādās iespējamās kombinācijās pa vienam no katras skālas.

T i k l ī d z k ā d i t r ī s d a ž ā d ā m s k ā l ā m p i e d e r ī g i p a m a t p u n k t i i r u z v i e n a s t a i s n e s, n o š o p u n k t u k o o r d i n ā t ā m v e i d o t a i s d e t e r m i n a n t s i r n u l l e, u n a t t ē l o t ā n o l ī d z i n ā j u m ā i z z ū d l o c e k l i s, k a m š i s d e t e r m i n a n t s i r k l ā t k ā k o e f i c i e n t s.

Piemēram, ja nulles punkti 1, 2, 3 ir izlīdzinājumā, tad $\Delta(123) = 0$ jeb $A_7 = 0$, t. i. nolīdzinājumam nav konstantā locekļa. Ja bezgalības punkti $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$ ir izlīdzinājumā, tad $\Delta(\bar{1}\bar{2}\bar{3}) = 0$ jeb $A_0 = 0$, t. i. nolīdzinājumā nav visu trīs funkciju reizinājuma.

Pamatpunktu novietojums var būt tāds, ka tie veido vairāk izlīdzinājumus. Cik izlīdzinājumu viņi veido, tik locekļu attēlotā nolīdzinājumā izzūd.

Otrādi, ja jāattēlo kollineāru punktu nomogrammā nolīdzinājums

$$Af_1 f_2 f_3 + \Sigma B_i f_j f_k + \Sigma C_i f_i + D = 0,$$

u n j a t ā a t t ē l o š a n a a r t a i s n ā m s k ā l ā m v i s p ā r i e s p ē j a m a, tad, salīdzinot uzdotos koeficientus ar attiecīgiem nolīdzinājumos

(16) vai (17), iegūstam datus par skālu pamatpunktu savstarpējo stāvokli: ja kāds koeficients ir nulle, attiecīgie pamatpunkti ir izlīdzinājumā.

7. Izlīdzinājumu analize.

Pieņemsim, ka jāattēlo kollīneāru punktu nomogrammā sakarība starp trīs mainīgiem un ka attēlošana iespējama ar trīs taisnām skālām. Gala mērķis ir — atrast skālu nolīdzinājumus, bet pirmais solis šinī virzienā — noskaidrot skālu pamatpunktu relātīvo stāvokli, ciktāl par to var spriest no zināmu koeficientu izzušanas.

Pamatpunktu novietošanas uzdevumos nulles punkts atšķiŗas no tās pašas skālas bezgalības punkta tikai taī ziņā, ka abi nedrīkst būt kopā. Tāpēc varam šeit lietāt vispārīgākus apzīmējumus. Ŗakstīsim 1 un $\bar{1}$ vietā i un $\bar{i}$, bet švīku virs i nesapratīsim kā bezgalības punkta, bet tikai kā otra pamatpunkta apzīmējumu. Saskaņā ar šo norunu varam pieņemt, ka $i = 1$ (nulles punkts) un $\bar{i} = \bar{1}$ (bezgalības punkts), bet varam pieņemt arī otrādi, ka $i = \bar{1}$ (bezgalības punkts) un $\bar{i} = 1$ (nulles punkts). Tāpat pieņemsim $j, \bar{j} = 2, \bar{2}$ un $k, \bar{k} = 3, \bar{3}$.

Dažreiz nav gluži viegli novietot 6 punktu pāŗus uz 3 taisnēm tā, lai spēkā vairāki uzdoti izlīdzinājumi. Še nāk palīgā šādas kārtulas:

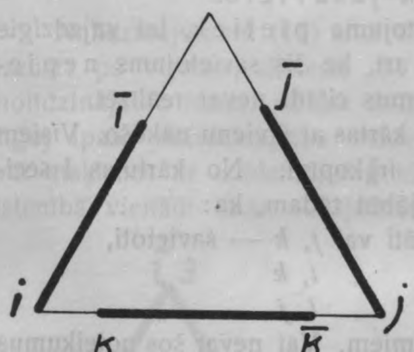
Ķārtula I: Izlīdzinājumi ijk un $ij\bar{k}$ ir spēkā: 1) ja punkti i, j savietoti ar atbalsta $k\bar{k}$ kritiskiem punktiem, vai arī 2) ja punkti i, j savietoti atbalstu $i\bar{i}$ un $j\bar{j}$ kopīgā kritiskā punktā.

Citādi:

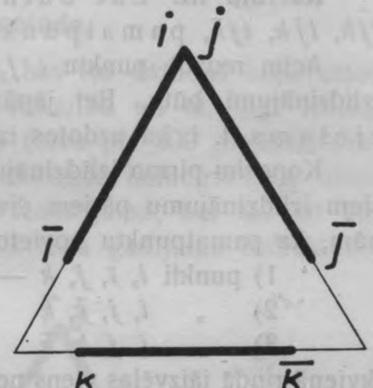
Izlīdzinājumi ijk un $ij\bar{k}$ ir spēkā: 1) ja punkti $i, j, k, \bar{k}$ ir uz vienas taisnes, vai arī 2) ja punkti i, j ir kopā.

Izlīdzinājumiem ijk un $ij\bar{k}$ ir divi kopīgi pamatpunkti i un j. Tie var būt: 1) šķirti vai 2) kopā. Pirmā gadījumā, atrazdamies savrup, punkti i, j noteic taisni ij, uz kuŗas jābūt arī punktiem k un $\bar{k}$, lai būtu spēkā izlīdzinājumi ijk un $ij\bar{k}$. Pamatpunktu novietojuma schēma rāda, ka punkti i un j ir kritiskos punktos, kur atbalsts $k\bar{k}$ sastop atbalstus $i\bar{i}$ un $j\bar{j}$. (Att. 2.)

Otrā gadījumā pamatpunkti i un j ir savietoti, kas iespējams tikai skālu $i\bar{i}$ un $j\bar{j}$ kopīgā kritiskā punktā. Taisnes caur šo kritisko punktu un $k, \bar{k}$ veido izlīdzinājumus ijk un $ij\bar{k}$. (Att. 3.) Šis kopīgais kritiskais punkts var būt arī uz taisnes $k\bar{k}$; tādā gadījumā skālu atbalsti iet caur kopīgu punktu.

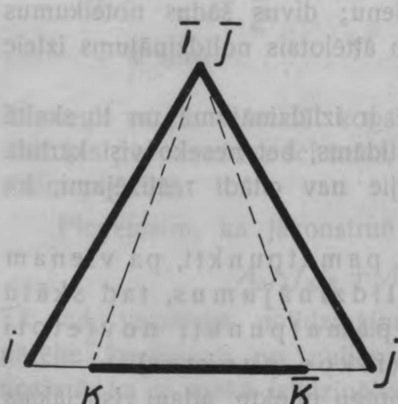


2. attēls.

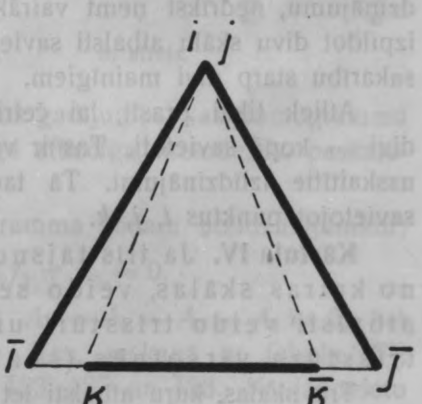


3. attēls.

Kārtula II. Lai būtu spēkā četri izlīdzinājumi ijk, $ij\bar{k}$, $\bar{i}\bar{j}k$, $\bar{i}\bar{j}\bar{k}$, pamatpunktiem $i, j, \bar{i}, \bar{j}$ jābūt savietotiem ar kritiskiem punktiem un punktiem i, j vai $\bar{i}, \bar{j}$ jābūt kopā.



4. attēls.



5. attēls.

Izlīdzinājumi ijk un $ij\bar{k}$ noved pie schēmām, kas atbilst kārtulai I (att. 2.—3.). Tas jāpārveido tā, lai nāktu klāt izlīdzinājumi $\bar{i}\bar{j}k$ un $\bar{i}\bar{j}\bar{k}$. No tiem, saskaņā ar kārtulu I, seko, ka punktiem $\bar{i}, \bar{j}, k, \bar{k}$ jābūt uz vienas taisnes (kas sasniedzams att. 3) vai arī punktiem $\bar{i}, \bar{j}$ jābūt kopā (kas sasniedzams att. 2.). Nonākam pie schēmām, kas parādītas att. 4.—5. Abās pamatpunkti i, $\bar{\imath}$ un j, $\bar{j}$ ir savietoti ar savu atbalstu kritiskiem punktiem tā, ka i ar j (vai $\bar{\imath}$ ar $\bar{j}$) ir kopā.

Kārtula III. Lai būtu spēkā četri izlīdzinājumi ijk, $\bar{\imath}jk$, $i\bar{j}k$, $ij\bar{k}$, pamatpunkti i, j, k jāsavieto.

Acīm redzot, punktu i, j, k savietojuma pietiek, lai vajadzīgie izlīdzinājumi būtu. Bet jāpārliecinās arī, ka šis savietojums nepieciešams, t. i. ka uzdotos izlīdzinājumus citādi nevar reālizēt.

Koposim pirmo izlīdzinājumu pēc kārtas ar ikvienu nākošo. Visiem šiem izlīdzinājumu pāŗiem divi punkti ir kopīgi. No kārtulas I secinām, ka pamatpunktu novietojumam jābūt tādam, ka:

1) punkti $i, \bar{\imath}, j, k$ — izlīdzināti vai j, k — savietoti,
2) „ $i, j, \bar{j}, k$ „ „ i, k „
3) „ $i, j, k, \bar{k}$ „ „ i, j „

Ikvienā rindā jāizvēlas viens no noteikumiem. Vai nevar šos noteikumus sakopot no katras rindas pa vienam tā, ka punkti i, j, k nav kopā, bet kārtulā uzskaitītie četri izlīdzinājumi ir spēkā?

Viegli pārliecināties, ka tas nav iespējams.. No savietošanas noteikumiem drīkstam ņemt vislielākais vienu; divi no šiem noteikumiem (piem.: j, k — savietoti, un i, k — arī savietoti) nav izpildāmi citādi, kā savietojot i, j, k. Bet arī tos noteikumus, kas prasa 4 punktu izlīdzinājumu, nedrīkst ņemt vairāk par vienu; divus šādus noteikumus izpildot divu skālu atbalsti savietojas, un attēlotais nolīdzinājums izteic sakarību starp divi mainīgiem.

Atliek tikai prasīt, lai četri punkti ir izlīdzinājumā un to skaitā divi — kopā savietoti. Tas ir viegli izpildāms, bet neseko visi kārtulā uzskaitītie izlīdzinājumi. Tā tad, pēdējie nav citādi reālizējami, kā savietojot punktus i, j, k.

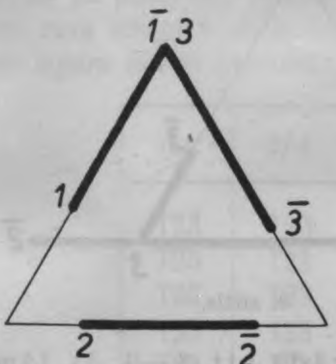
Kārtula IV. Ja trīs taisnu skālu pamatpunkti, pa vienam no katras skālas, veido sešus izlīdzinājumus, tad skālu atbalsti veido trīsstūri un visi pamatpunkti novietoti trīsstūŗa virsotnēs (skālu kritiskos punktos).

Trīs skālas, kuŗu atbalsti iet caur kopīgu punktu, atļauj vislielākais piecus pamatpunktu izlīdzinājumus, runājot tikai par tādiem izlīdzinājumiem, ko veido trīs pamatpunkti — pa vienam no katras skālas. Lai šo maksimālo izlīdzinājumu skaitu sasniegtu, trīs pamatpunkti jānovieto skālu atbalstu krustojumā un pārējie trīs — uz taisnes. Tā tad, trīs skālas caur kopīgu punktu ir nederīgas sešu izlīdzinājumu reālizēšanai.

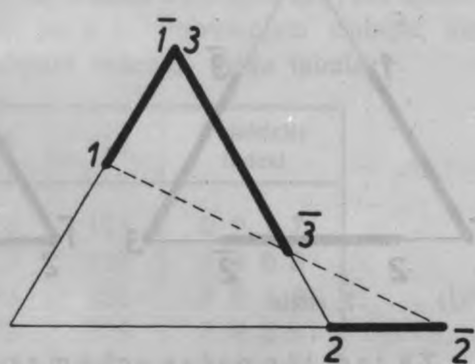
Ja atbalsti veido trīsstūri, izlīdzinājumu skaitu var palielināt vienīgi tā, ka pamatpunktus novieto trīsstūra virsotnēs. Vislielākais izlīdzinājumu skaits (6) ir, kad **visi** skālu pamatpunkti novietoti kritiskos punktos.

8. Permūtāciju metode.

Nolīdzinājumam (17) ir 8 koeficienti, kas var dažādos kopojumos izzust: pa vienam, diviem, ... sešiem. Atkarībā no tā, kuri locekļi nolīdzinājumā izzūd, izceļas lielāks skaits (tuvu pie 200 praktiski svarīgu) īpašu nolīdzinājuma veidu, kuŗu attiecīgie nomografiskie attēli var atšķirties ar izlīdzinājumu skaitu un reālizējumu, bet var arī būt īstenībā vienādi. Lai nevajadzētu pētīt ikvienu gadījumu individuāli,



6. attēls.



8. attēls.

lai viegli varētu sameklēt kopā saderīgos gadījumus, kas nomogrammā attēlojas pēc vienādas schēmas, vajadzīga attiecīga metode, ko paskaidrosim piemērā.

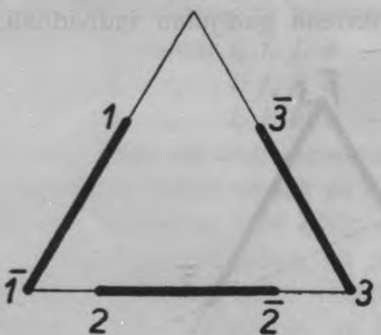
Pieņemsim, ka jākonstruē nomogramma šādam nolīdzinājumam:

$$A_0 f_1 f_2 f_3 + A_5 f_2 + A_6 f_3 + A_7 = 0.$$

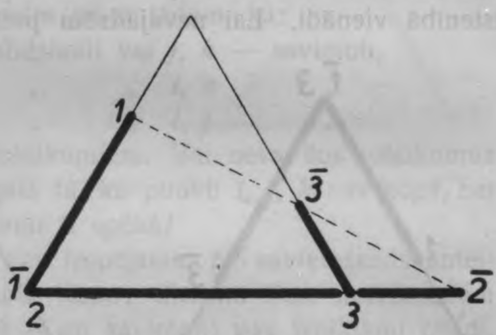
Tā tad, vispārīgā nolīdzinājumā (17) $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 0$, bet pārējie koeficienti no nulles atšķiras. Tas, saskaņā ar tabulu (T), nozīmē, ka ir spēkā izlīdzinājumi $\bar{1}23$, $\bar{1}2\bar{3}$, $12\bar{3}$ un $\bar{1}23$. Kā jānovieto skālu pamatpunkti, lai to sasniegtu?

Pirmais un beidzamais izlīdzinājums izteic, ka punkti $\bar{1}$, 3 ir uz vienas taisnes (izlīdzinājumā) ar 2, $\bar{2}$, kas iespējams divējādi: 1) punkti $\bar{1}$, 3 ir savietoti vai 2) punkti $\bar{1}$, 3 ir šķirti, bet atrodas uz taisnes $2\bar{2}$. Tā tad, izlīdzinājumi $\bar{1}23$ un $\bar{1}23$ noved pie schēmām, kas parādītas att. 6.—7. Ar to ir noteikta vieta punktiem $\bar{1}$, 3. Pārējo punktu stāvoklis jāspeciālizē tā, lai būtu spēkā izlīdzinājumi $\bar{1}2\bar{3}$ un $1\bar{2}\bar{3}$. Punkts $\bar{2}$ ir tur, kur krustojas taisnes $1\bar{3}$ un $2\bar{2}$; punkts 2 ir tur, kur krustojas $\bar{1}\bar{3}$ un $2\bar{2}$. No tā seko galīgās schēmas (att. 8.—9.).

Dabūtām schēmām atstāsim savās vietās skālu atbalstus un pamatpunktus, bet p ā r m a i n ī s i m s k ā l a i $1\bar{1}$ p a m a t p u n k t u n o s a u k u m u s, t. i. pārmīsim savā starpā nulles punktu ar bezgalības punktu (1 ar $\bar{1}$). Lai uzrakstītu izlīdzinājumus, ar kuŗiem tagad darīšana, agrākos izlīdzinājumos ($\bar{1}\bar{2}3$, $\bar{1}2\bar{3}$, $1\bar{2}\bar{3}$, $\bar{1}23$) 1 vietā jāliek $\bar{1}$ un otrādi. Dabūjam izlīdzinājumus $1\bar{2}3$, $12\bar{3}$, $\bar{1}\bar{2}\bar{3}$, 123. Tādēļ saskaņā ar tabulu (T), nolīdzinājumā (17) izzūd koeficienti A_0, A_5, A_6, A_7.



7. attēls.



9. attēls.

T ā t a d, t ā s p a š a s s c h ē m a s, k o r ā d a a t t. 8.—9., j a t ā m p ā r m i j s a v ā s t a r p ā p a m a t p u n k t u s 1 u n $\bar{1}$, a t b i l s t n o l ī d z i n ā j u m a m

$$A_1f_1f_2 + A_2f_1f_3 + A_3f_2f_3 + A_4f_1 = 0.$$

Atstāsim paraugschēmās (att. 8.—9.) atbalstus un pamatpunktus savās vietās, bet pārmīsim viena atbalsta pamatpunktus savā starpā, un to izdarīsim visiem iespējamiem paņēmieniem: ikvienam atbalstam atsevišķi, divi atbalstiem reizē, visiem trīs reizē. Tas nozīmē paraugschēmas izlīdzinājumos pārmīt savā starpā 1 ar $\bar{1}$, 2 ar $\bar{2}$, 3 ar $\bar{3}$, tad reizē 1 ar $\bar{1}$ un 2 ar $\bar{2}$ un t. t. Tā darot dabū pavisam 8×4 izlīdzinājumus:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & *\cdot\cdot & \cdot*\cdot & \cdot\cdot* & **\cdot & *\cdot* & \cdot** & *** \\
\bar{1}\bar{2}3 & 1\bar{2}3 & \bar{1}23 & \bar{1}\bar{2}\bar{3} & 123 & 1\bar{2}\bar{3} & \bar{1}2\bar{3} & 12\bar{3} \\
\bar{1}2\bar{3} & 12\bar{3} & \bar{1}\bar{2}\bar{3} & \bar{1}23 & 1\bar{2}\bar{3} & 123 & \bar{1}\bar{2}3 & 1\bar{2}3 \\
1\bar{2}\bar{3} & \bar{1}\bar{2}\bar{3} & 12\bar{3} & 1\bar{2}3 & \bar{1}2\bar{3} & \bar{1}\bar{2}3 & 123 & \bar{1}23 \\
\bar{1}23 & 123 & \bar{1}\bar{2}3 & \bar{1}2\bar{3} & 1\bar{2}3 & 12\bar{3} & \bar{1}\bar{2}\bar{3} & 1\bar{2}\bar{3}
\end{array} \quad \ldots\ldots \text{(U)}$$

Zvaigznītes rāda, kuŗam (-iem) atbalstam (-iem) pamatpunkti pārmīti.

Izlīdzinājumiem, kas sakopoti iepriekšējās tabulas stabiņos, ir tā īpašība, ka no ikviena stabiņa var secināt visus pārējos, pārmijot savā starpā 1 ar $\bar{1}$, 2 ar $\bar{2}$, 3 ar $\bar{3}$ visiem iespējamiem paņēmieniem. Tāpēc ikvienu stabiņu var uzskatīt par visas tabulas noteicēju.

Vispārīgos pamatpunktu apzīmējumos ($i, \bar{i} = 1, \bar{1}$; $j, \bar{j} = 2, \bar{2}$; $k, \bar{k} = 3, \bar{3}$) visus tabulā (U) sakopotos izlīdzinājumu stabiņus var uzrakstīt, piem., šā:

$$ijk, \quad i\bar{j}k, \quad \bar{i}j\bar{k}, \quad \bar{i}\bar{j}\bar{k}.$$

Parādīsim, kā no šīm izteiksmēm seko visa tabula (U).

Liksim ijk vietā pamatpunktu kopojumus pa trim, no ikvienas skālas pa punktam. Pārmainot 2 un $\bar{2}$ dabū attiecīgos $i\bar{j}k$, bet apmainot savā starpā k un $\bar{k}$ dabū $ij\bar{k}$, un t. t. Pievienojam stabiņu, kur trīs ciparu indeki pārrakstīti vienciparu indekos. Seko tabula:

ijk	$i\bar{j}k$	$ij\bar{k}$	$\bar{i}\bar{j}\bar{k}$	Vienkāršie indeki	
$\bar{1}2\bar{3}$	$\bar{1}2\bar{3}$	$\bar{1}\bar{2}3$	123	0 2 1 7	
$\bar{1}\bar{2}3$	$\bar{1}23$	$\bar{1}\bar{2}\bar{3}$	$12\bar{3}$	1 4 0 6	
$\bar{1}2\bar{3}$	$\bar{1}\bar{2}\bar{3}$	$\bar{1}23$	$1\bar{2}3$	2 0 4 5	. . . (U′)
$1\bar{2}\bar{3}$	$12\bar{3}$	$1\bar{2}3$	$\bar{1}23$	3 6 5 4	
$\bar{1}23$	$\bar{1}\bar{2}3$	$\bar{1}2\bar{3}$	$1\bar{2}\bar{3}$	4 1 2 3	
$1\bar{2}3$	123	$1\bar{2}\bar{3}$	$\bar{1}2\bar{3}$	5 7 3 2	
$12\bar{3}$	$1\bar{2}\bar{3}$	123	$\bar{1}\bar{2}3$	6 3 7 1	
123	$1\bar{2}3$	$12\bar{3}$	$\bar{1}\bar{2}\bar{3}$	7 5 6 0	

Salīdzinot tabulas (U) stabiņus ar tabulas (U′) rindām, redzam, ka saskan:

(U) stabiņš №	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
(U′) rinda №	V	VIII	II	III	VI	VII	I	IV

Visos gadījumos, kad nolīdzinājumā (17) četri beidzamās tabulās uzskaitītie koeficienti izzūd, nolīdzinājuma eventuālam nomografiskam attēlam atbilst viena tā pati pamatpunktu schēma, kas rādīta att. 8.—9. Uzskaitīto koeficientu kopojumiem ir tā īpašība, ka tos dabū, pārmijot šādos divos

$$\begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_7 \\ A_5 & A_6 & A_0 & A_4 \end{matrix}$$

kāda viena stabiņa elementus.

Līdz šim mēs mainījām savā starpā pamatpunktus, bet pašas skālas nemainīja savu vietu. Iesim tagad vēl tālāk. Atstāsim paraugschēmās (att. 8.—9.) spēkā pamatpunktu konfigūrāciju, bet pārmainīsim savā starpā skālu nosaukumus. Piemēram, $1\bar{1}$ vietā rakstīsim $2\bar{2}$ un $2\bar{2}$ vietā rakstīsim $1\bar{1}$, atstājot $3\bar{3}$ vecā vietā; vai atkal $1\bar{1}$ vietā rakstīsim $2\bar{2}$, $2\bar{2}$ vietā $3\bar{3}$, $3\bar{3}$ vietā $1\bar{1}$ un t. t. Kādi jauni izlīdzinājumu kopojumi izceļas un kādiem jauniem nolīdzinājumiem tie atbilst, ja šo pārmaiņu izdara visiem iespējamiem (pavisam 6) paņēmieniem?

Lai šo jautājumu atrisinātu vispārīgā veidā, izpētīto izlīdzinājumu izteiksmēs:

$$ijk \quad i\bar{j}k \quad ij\bar{k} \quad \bar{i}\bar{j}\bar{k} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

atstāsim savās vietās švīkas, bet visādiem iespējamiem paņēmieniem pārgrupēsim simbolus ijk. Mums būs:

$$\begin{array}{cccc}
ijk & i\bar{j}k & ij\bar{k} & \bar{i}\bar{j}\bar{k} \\
ikj & i\bar{k}j & ik\bar{j} & \bar{i}\bar{k}\bar{j} \\
jik & j\bar{i}k & ji\bar{k} & \bar{j}\bar{i}\bar{k} \\
jki & j\bar{k}i & jk\bar{i} & \bar{j}\bar{k}\bar{i} \\
kij & k\bar{i}j & ki\bar{j} & \bar{k}\bar{i}\bar{j} \\
kji & k\bar{j}i & kj\bar{i} & \bar{k}\bar{j}\bar{i}
\end{array}$$

Rindas ir pa pāŗām vienādas. Atmetot liekās un pārrakstot punktu apzīmējumus alfabēta kārtībā, dabūjam vēl divi jaunus izlīdzinājumu kopojumus:

$$ijk \quad \bar{i}jk \quad ij\bar{k} \quad \bar{i}\bar{j}\bar{k} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

$$ijk \quad i\bar{j}k \quad \bar{i}jk \quad \bar{i}\bar{j}\bar{k} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

kas atbilst gadījumiem, kad att. 8.—9. pārmij savā starpā $1\bar{1}$ ar $2\bar{2}$ vai attiecīgi $1\bar{1}$ ar $3\bar{3}$, un kuŗus viegli analizēt ar augšā aprakstītām metodēm.

Jaunatrastie izlīdzinājumu kopojumi anullē nolīdzinājumā (17) četrus koeficientus, ko var dabūt no šādiem

b) $\begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_7 \\ A_4 & A_0 & A_6 & A_5 \end{matrix}$ c) $\begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_7 \\ A_0 & A_4 & A_5 & A_6 \end{matrix}$

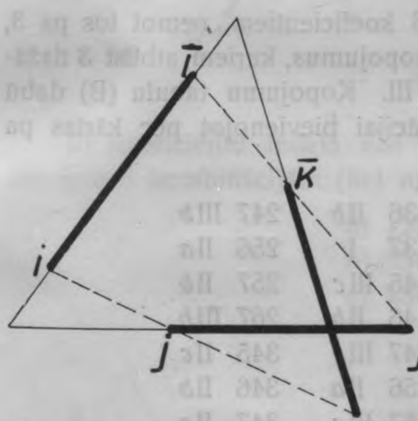
pārmijot kāda viena stabiņa elementus.

9. Pamatpunktu konfigūrācija īpašos gadījumos.

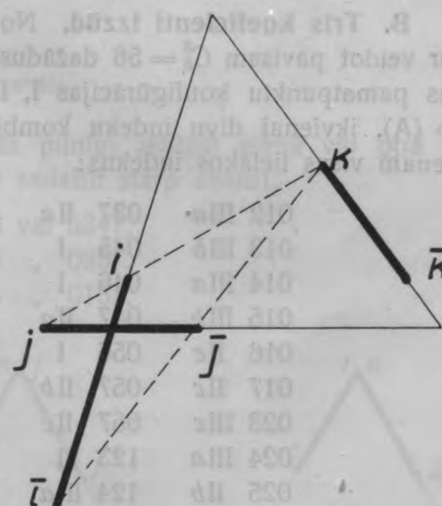
Spraužot par mērķi konstruēt nomogrammu nolīdzinājumam (17), kad tas uzdots kādā īpašā veidā, der jau iepriekš zināt attiecīgās nomogrammas pamatpunktu savstarpējo stāvokli, ciktāl par to var spriest no koeficientiem, kas vienādi ar nulli. Turpinājumā sakopoti aizrādījumi par pamatpunktu novietojumu, kas atbilst dažādiem koeficientu izzušanas gadījumiem. Šie aizrādījumi iegūti ar iepriekšējā Nr. paskaidroto metodi.

A. Divi koeficienti izzūd. Veidosim visus koeficientu $A_0, A_1, \dots A_7$ kopojumus pa divi. Pietiek kombinēt indekus 0, 1, . . . 7. Ir pavisam $C_8^2 = 28$ dažādi kopojumi:

01 III*c*	12 II*c*	24 III*c*	37 II*c*	
02 III*b*	13 II*b*	25 I	45 II*a*	
03 III*a*	14 III*b*	26 III*a*	46 II*b*	
04 II*c*	15 III*a*	27 II*b*	47 III*a*	(A)
05 II*b*	16 I	34 I	56 II*c*	
06 II*a*	17 II*a*	35 III*c*	57 III*b*	
07 I	23 II*a*	36 III*b*	67 III*c*	



10. attēls.



11. attēls.

Kopojumiem pievienotie latīņu cipari I—III apzīmē dažādas pamatpunktu konfigūrācijas; *a*, *b*, *c* ir apakšgadījumi, kas izceļas kādai konfigūrācijai pārmijot savā starpā skālu nosaukumus. Apskatīsim tabulā (A) sakopotos gadījumus sakārtojumā pēc konfigūrācijām.

I) Koeficienti ir vienādos atstatumos no nolīdzinājuma (17) kreisās puses galiem, izzūdošiem koeficientiem indeku summa ir 7. Izlīdzinājumos piedalās visi pamatpunkti. Izlīdzinājumu veids: ijk, $\bar{i}\bar{j}\bar{k}$. Neviens pamatpunkts nav savietots ar kritisko punktu. (Att. 10.)

II) Koeficientu indeki abi ietilpst vienā vai otrā no kombinācijām 1237 un 0456. Izlīdzinājumos piedalās 5 pamatpunkti. Viens punkts abiem izlīdzinājumiem kopīgs. Izlīdzinājumu vispārīgais veids: a) ijk, $\bar{i}\bar{j}k$; b) ijk, $\bar{i}j\bar{k}$; un c) ijk, $i\bar{j}\bar{k}$. (Att. 11., gad. a.) Kritiskā punktā var novietoties vienīgi tas pamatpunkts, kas nepiedalās nevienā izlīdzinājumā.

III) Ja viens indeks ir kombinācijā 1237, tad otrs ir kombinācijā 0456, un otrādi, bet indeku summa nav 7. Izlīdzinājumos piedalās 4 pamatpunkti. Divi punkti abiem izlīdzinājumiem kopīgi. Izlīdzinājumu veids: a) ijk, $\bar{i}jk$; b) ijk, $i\bar{j}k$; un c) ijk, $ij\bar{k}$.

Divi pamatpunkti, kas piedalās abos izlīdzinājumos, paši var būt kopā vai arī šķirti. Pirmā gadījumā tie savietoti kopīgā kritiskā punktā. Otrā gadījumā tie savietoti attiecīgi ar trešā atbalsta kritiskiem punktiem. (Att. 2.—3.)

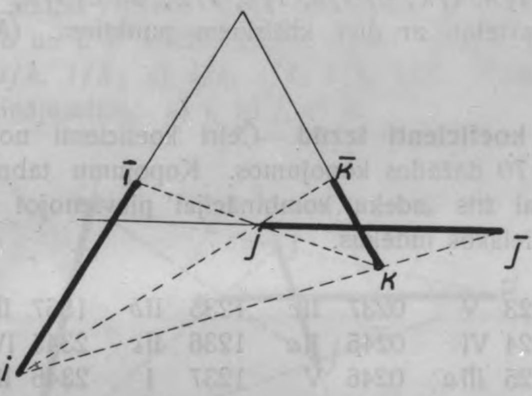
B. Trīs koeficienti izzūd. No 8 koeficientiem, ņemot tos pa 3, var veidot pavisam $C_8^3 = 56$ dažādus kopojumus, kuŗiem atbilst 3 dažādas pamatpunktu konfigūrācijas I, II, III. Kopojumu tabulu (B) dabū no (A), ikvienai divu indeku kombinācijai pievienojot pēc kārtas pa vienam visus lielākos indekus:

012	III*a*	037	II*a*	136	II*b*	247	III*b*
013	III*b*	045	I	137	I	256	II*a*
014	III*a*	046	I	145	III*c*	257	II*b*
015	III*b*	047	II*a*	146	II*b*	267	III*b*
016	II*c*	056	I	147	III*c*	345	II*c*
017	II*c*	057	II*b*	156	II*a*	346	II*b*
023	III*c*	067	II*c*	157	III*c*	347	II*a*
024	III*a*	123	I	167	II*c*	356	III*a*
025	II*b*	124	III*a*	234	II*c*	357	III*a*
026	III*c*	125	II*a*	235	II*c*	367	III*a*
027	II*b*	126	II*a*	236	III*c*	456	I
034	II*a*	127	I	237	I	457	III*c*
035	III*b*	134	II*b*	245	II*c*	467	III*b*
036	III*c*	135	III*b*	246	III*b*	567	III*a*

. . . (B)

Kombināciju šķirojums gadījumos (kas apzīmēti ar I, II, III) un apakšgadījumos (kas apzīmēti ar *a*, *b*, *c*) dabūts ar agrāk aprakstīto permūtāciju metodi. Apakšgadījumi atšķiŗas ar to, ka pamatpunktu nosaukumi skālu starpā apmainīti. Raksturosim īsi tabulā (B) sakopotos gadījumus:

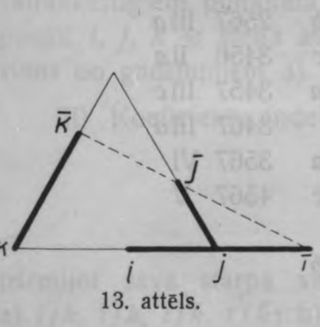
I) Nullei vienlīdzīgo koeficientu indeki visi reizē ietilpst vienā vai otrā no kombinācijām 1237 vai 0456. Ik diviem izlīdzinājumiem viens pamatpunkts kopīgs. Izlīdzinājumu vispārīgais veids: $\bar{i}jk$, $i\bar{j}k$, $ij\bar{k}$. Pamatpunkti nav savietoti ar kritiskiem. Ikvienai skālai viens pamatpunkts tāds, ka caur to iet divas izlīdzinājumu taisnes (att. 12).



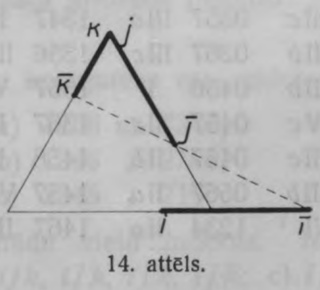
12. attēls.

II) Koeficientu indeki visi trīs pilnīgi ietilpst vienā vai otrā no sekojošām kombinācijām (bet nav sadalīti starp abām):

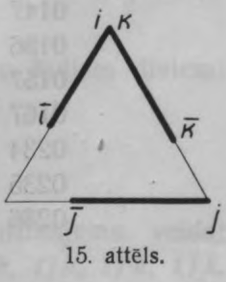
a) 1256 vai 0347,
b) 1346 „ 0257,
c) 2345 „ 0167.



13. attēls.



14. attēls.



15. attēls.

Izlīdzinājumu veids: a) ijk, $\bar{i}jk$, $\bar{i}\bar{j}\bar{k}$; b) ijk, $i\bar{j}k$, $\bar{i}\bar{j}\bar{k}$; un c) ijk, $ij\bar{k}$, $\bar{i}\bar{j}\bar{k}$. Divi pamatpunkti a) j, k; b) i, k; c) i, j savietoti ar kritiskiem punktiem, kas iespējams divējādi. (Att. 13.—14., apakšgadījumam a.)

III) Koeficientu indeki visi trīs pilnīgi ietilpst vienā vai otrā no šādām kombinācijām (bet nav sadalīti abās):

a) 0124 vai 3567,
b) 0135 „ 2467,
c) 0236 „ 1457.

Viens pamatpunkts piedalās visos trīs izlīdzinājumos. Izlīdzinājumu veids: a) ijk, $i\bar{j}k$, $ij\bar{k}$; b) ijk, $\bar{i}jk$, $ij\bar{k}$; un c) ijk, $\bar{i}jk$, $i\bar{j}k$. Trīs pamatpunkti savietoti ar divi kritiskiem punktiem. (Att. 15., apakšgadījumam a).

C. Četri koeficienti izzūd. Četri koeficienti no 8 var izzust pavisam $C_8^4 = 70$ dažādos kopojumos. Kopojumu tabula (C) dabūta no (B), ikvienai trīs indeku kombinācijai pievienojot pēc kārtas pa vienam visus lielākos indekus.

0123	V	0237	II*c*	1235	II*b*	1567	III*c*
0124	VI	0245	II*a*	1236	II*c*	2345	IV*c*
0125	III*a*	0246	V	1237	I	2346	III*b*
0126	III*c*	0247	III*a*	1245	III*c*	2347	II*b*
0127	II*a*	0256	II*c*	1246	III*a*	2356	III*c*
0134	III*a*	0257	IV*b*	1247	V	2357	II*a*
0135	VI	0267	III*b*	1256	IV*a*	2367	V
0136	III*b*	0345	II*b*	1257	II*c*	2456	II*b*
0137	II*b*	0346	II*c*	1267	II*b*	2457	III*b*
0145	V	0347	IV*a*	1345	III*b*	2467	VI
0146	II*a*	0356	V	1346	IV*b*	2567	III*a*
0147	III*c*	0357	III*a*	1347	II*c*	3456	II*a*
0156	II*b*	0367	III*c*	1356	III*a*	3457	III*c*
0157	III*b*	0456	I	1357	V	3467	III*a*
0167	IV*c*	0457	II*c*	1367	II*a*	3567	VI
0234	III*c*	0467	II*b*	1456	II*c*	4567	V
0235	III*b*	0567	II*a*	1457	VI		
0236	VI	1234	II*a*	1467	III*b*		

. . . (C)

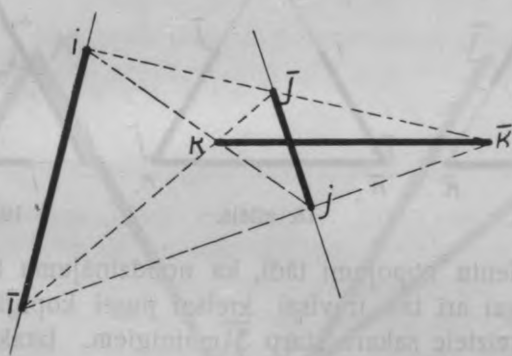
Ar permūtāciju metodi noskaidrots, ka šiem kopojumiem atbilst 6 dažādi skālu pamatpunktu konfigūrācijas gadījumi, kas apzīmēti ar I, II, . . . VI. Īss gadījumu raksturojums:

I) Koeficientu indeki: 1237 un 0456 (tikai divi kopojumi). Izlīdzinājumu veids: ijk, $\bar{i}\bar{j}k$, $\bar{i}j\bar{k}$, $i\bar{j}\bar{k}$. Ik divi izlīdzinājumiem viens pamatpunkts kopīgs. Savietotu pamat- un kritisko punktu nav. (Att.16.)

II) Koeficientu indeku kopojumus var veidot no šādiem diviem:

a) 1237 un 5604
b) 1237 „ 4065
c) 1237 „ 0456

apmainot savā starpā vienādu vietu elementus, t. i. pirmo ar pirmo, vai otro ar otro un t. t. Izlīdzinājumu veids: a) ijk, $ij\bar{k}$, $i\bar{j}k$, $i\bar{j}\bar{k}$; b) ijk, $ij\bar{k}$, $\bar{i}jk$, $\bar{i}j\bar{k}$; c) ijk, $i\bar{j}k$, $\bar{i}jk$, $\bar{i}\bar{j}k$. Viens pamatpunkts kopīgs 3 izlīdzinājumiem: a) i, b) j, c) k.



16. attēls.

Viens izlīdzinājums (proti, $\bar{i}\bar{j}\bar{k}$) ir n o r m ā l s, t. i. tas neiet caur vairākkārtīgiem punktiem un nav savietots ar skālas atbalstu. Pamatpunkti i, j, k ir viena atbalsta kritiskos punktos. Att. 8.—9. parādīts viens no gadījumiem a).

III) Koeficientu indeku kopojumus var veidot no šādiem diviem:

a) 1256 un 7340,
b) 1346 „ 2705,
c) 2345 „ 7160,

pārmijot savā starpā vienādu vietu indekus. Izlīdzinājumu veids: a) ijk, $\bar{i}jk$, $\bar{i}j\bar{k}$, $\bar{i}\bar{j}\bar{k}$; b) ijk, $i\bar{j}k$, $\bar{i}\bar{j}k$, $\bar{i}\bar{j}\bar{k}$; c) ijk, $\bar{i}jk$, $i\bar{j}k$, $\bar{i}\bar{j}k$.

Četri pamatpunkti, kas pieder 3 skālām, savietoti ar kritiskiem punktiem. Divi **ne**savietotie piedalās tikai vienā izlīdzinājumā, proti: a) i, $\bar{j}$, b) j, $\bar{k}$, c) i, $\bar{k}$. (Att. 17.—18., apakšgad. a).

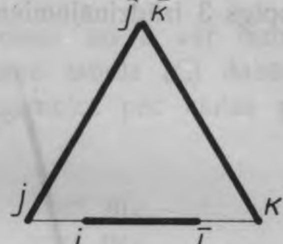
IV) Koeficientu indeki: a) 1256 un 0347, b) 1346 un 0257, c) 2345 un 0167. Ikviens pamatpunkts piedalās divi izlīdzinājumos. Izlīdzinājumu vispārīgais veids: a) ijk, $\bar{i}jk$, $i\bar{j}\bar{k}$, $\bar{i}\bar{j}\bar{k}$; b) ijk, $i\bar{j}k$,

$\bar{i}j\bar{k}$, $\bar{i}\bar{j}k$; c) ijk, $ij\bar{k}$, $\bar{i}\bar{j}k$, $\bar{i}\bar{j}\bar{k}$. Četri pamatpunkti, kas pieder divi skālām, savietoti ar kritiskiem punktiem. (Att. 19., apakšgad. a.)

V) Koeficientu indeku kopojumus var veidot no šādiem diviem: 1237 un 6540, pārmijot savā starpā vienādu vietu elementus. Izlīdzinājumu veids: ijk, $\bar{i}jk$, $i\bar{j}k$, $ij\bar{k}$ (pirmam ar ikvienu pārējo divi kopīgi punkti). Skālu atbalsti iet caur kopīgu punktu; šinī kopīgā punktā savietoti skālu pamatpunkti ijk.

17. attēls.

18. attēls.



19. attēls.

VI) Koeficientu kopojumi tādi, ka nolīdzinājuma kreisā daļā nav viena mainīgā vai arī tas ir visai kreisai pusei kopīgā faktorā, tā ka nolīdzinājums neizteic sakaru starp 3 mainīgiem. Izrakstot koeficientu attiecīgos trīsciparu indekus, redzam, ka viens pamatpunkts kopīgs visiem 4 izlīdzinājumiem. Tas iespējams tikai tā, ka divi skālām ir kopīgs atbalsts. Šiem gadījumiem nav praktiskas nozīmes.

D. Pieci koeficienti izzūd. Pieci koeficienti no 8 var izzust pavisam $C_8^5 = 56$ dažādos kopojumos, bet no tiem tikai 32 gadījumiem ir praktiska nozīme. Šo gadījumu tabula:

01237	II	01467	I*c*	03456	II	12357	II	
01256	I*a*	01567	I*c*	03457	I*a*	12367	II	
01257	I*b*	02345	I*c*	03467	I*a*	12456	I*a*	
01267	I*c*	02347	I*a*	04567	II	12567	I*a*	
01346	I*b*	02357	I*b*	12345	I*c*	13456	I*b*	. . . (D)
01347	I*a*	02456	II	12346	Ib	13467	I*b*	
01367	I*c*	02457	I*b*	12347	II	23456	I*c*	
01456	II	02567	I*b*	12356	I*a*	23457	I*c*	

Gadījumu raksturojums:

I) Indeku kopojumus var dabūt no šādiem diviem:

a) 1256 un 0347,
b) 1346 „ 0257,
c) 2345 „ 0167,

pierakstot ikvienam ciparus, kas ir otrā. Izlīdzinājumu veids:

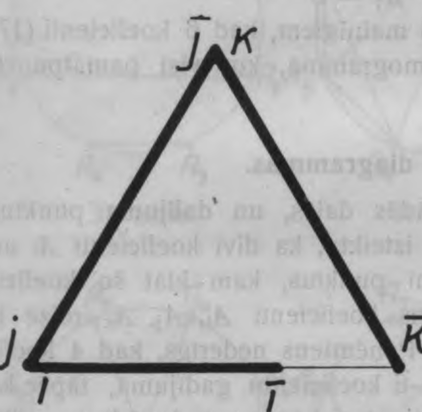
a) $ijk,\ ij\bar{k},\ i\bar{j}k,\ \bar{i}j\bar{k},\ \bar{i}\bar{j}k$;

b) $ijk,\ ij\bar{k},\ i\bar{j}k,\ \bar{i}j\bar{k},\ \bar{i}\bar{j}\bar{k}$; un

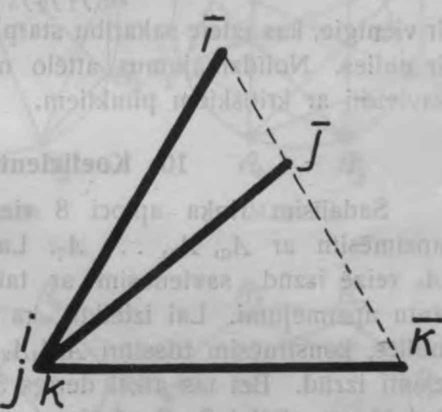
c) $ijk,\ ij\bar{k},\ i\bar{j}k,\ \bar{i}\bar{j}k,\ \bar{i}\bar{j}\bar{k}$.

Skālas veido trīsstūri, un visi pamatpunkti, izņemot vienu, savietoti ar kritiskiem. (Att. 20., apakšgadījums a.)

II) Indeku kopojumus var dabūt no 0456 un 1237, pierakstot tiem pēc kārtas ciparus, kas ir otrā. Koeficientiem, kas nav nulles, visi indeki reizē ietilpst vienā vai otrā no kopojumiem 0456 un 1237.



20. attēls.



21. attēls.

Izlīdzinājumu veids: $ijk,\ ij\bar{k},\ i\bar{j}k,\ \bar{i}jk,\ \bar{i}\bar{j}\bar{k}$. Skālu atbalstiem ir kopīgs punkts, kur novietoti trīs pamatpunkti (i, j, k); pārējie ($\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$) veido normālu izlīdzinājumu. (Att. 21.)

Tabulā (D) nav 24 indeku kopojumu, kuŗus var veidot no divi šādiem:

a) 0124 un 3567,
b) 0135 „ 2467,
c) 0236 „ 1457,

pierakstot ikvienam pēc kārtas otra ciparus. Ja nolīdzinājumā (17) izzūd koeficienti, kam indeki ir veidotie kopojumi, nolīdzinājums neizteic sakarību starp 3 mainīgiem, tā kā šiem gadījumiem nav praktiskas nozīmes.

Izlīdzinājumu analize rāda, ka šinīs gadījumos divu skālu atbalstiem un diviem to pamatpunktiem (no abām pa vienam) jābūt savietotiem. Vienam trešās skālas pamatpunktam jābūt uz pārējo divu kopīgā atbalsta.

Gadījumos a), b), c) šī trešā skāla ir attiecīgi $1\bar{1}$, $2\bar{2}$, $3\bar{3}$.

E. Seši koeficienti izzūd. Seši koeficienti no 8 var izzust pavisam $C_8^6 = 28$ kopojumos. No tiem tikai 4 gadījumiem ir praktiska nozīme, kad izzūd koeficienti, kuŗu indeki ir 012567, 013467, 023457 un 123456. Paliek tikai tie locekļi nolīdzinājumā (17), kuŗu koeficientiem ir indeki 34, 25, 16, 07, t. i. neizzūd koeficienti vienādos atstatumos no nolīdzinājuma (17) kreisās puses galiem. Attiecīgie nolīdzinājumi:

$$A_3 f_2 f_3 + A_4 f_1 = 0,$$
$$A_2 f_1 f_3 + A_5 f_2 = 0,$$
$$A_1 f_1 f_2 + A_6 f_3 = 0,$$
$$A_0 f_1 f_2 f_3 + A_7 = 0$$

ir vienīgie, kas izteic sakarību starp 3 mainīgiem, kad 6 koeficienti (17) ir nulles. Nolīdzinājumus attēlo nomogramma, kur visi pamatpunkti savietoti ar kritiskiem punktiem.

10. Koeficientu diagrammas.

Sadalīsim riņķa aploci 8 vienādās daļās, un dalījuma punktus apzīmēsim ar A_0, A_1, ... A_7. Lai izteiktu, ka divi koeficienti A_i un A_k reizē izzūd, savienosim ar taisni punktus, ķam klāt šo koeficientu apzīmējumi. Lai izteiktu, ka trīs koeficienti A_i, A_j, A_k reizē ir nulles, konstruēsim trīsstūri $A_iA_jA_k$. Paņēmiens nederīgs, kad 4 koeficienti izzūd. Bet tas atkal derīgs 5—6 koeficientu gadījumā, tāpēc ka tad tā var attēlot 2—3 pārējos koeficientus, kas n a v vienādi ar nulli.

Ja vispārīgā nolīdzinājumā (17) divi koeficienti ir nulles, atkarībā no attiecīgā koeficientu kopojuma, nomografiskam attēlam var būt trejāda pamatpunktu konfigūrācija:

(A I), kad divi izlīdzinājumos piedalās visi 6 pamatpunkti (att. 10.);
(A II), kad divi izlīdzinājumos piedalās 5 pamatpunkti (att. 11.); un
(A III), kad divi izlīdzinājumos piedalās tikai 4 pamatpunkti (att. 2.—3.).

Attēli 22.—24. ir gadījumiem atbilstošās koeficientu diagrammas. Pamatpunktu novietojumam (A I) atbilst nolīdzinājums (17), kam izzūd koeficienti vienādos atstatumos no nolīdzinājuma kreisās puses galiem. Pamatpunktu novietojumam (A II) atbilst divu koeficientu anullēšanās kopojumos $A_1A_2A_3A_7$ vai $A_0A_4A_5A_6$.

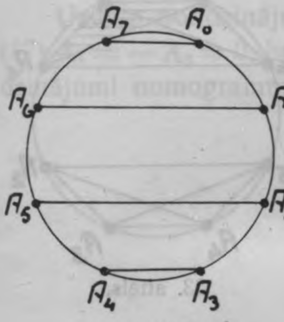
Konfigūrācijas (A II) un (A III) ikviena aptveŗ 3 apakšgadījumus (*a*, *b*, *c*), kuŗus dabū, pārmijot skālu nosaukumus. Att. 25.—30. ir koeficientu diagrammas apakšgadījumiem. Savietojot pirmās (vai beidzamās) trīs dabū attiecīgās pilnīgās diagrammas.

Ja nolīdzinājumā (17) 3 koeficienti izzūd, nomografiskam attēlam var būt trejāds pamatpunktu novietojums:

(B I), kad neviens pamatpunkts nav savietots ar kritisko punktu (att. 12.);

(B II), kad divi pamatpunkti savietoti ar kritiskiem punktiem (att. 13.—14.);

(B III), kad trīs pamatpunkti savietoti ar kritiskiem punktiem (att. 15.).

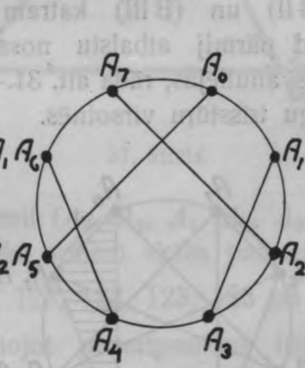


22. attēls.

23. attēls.

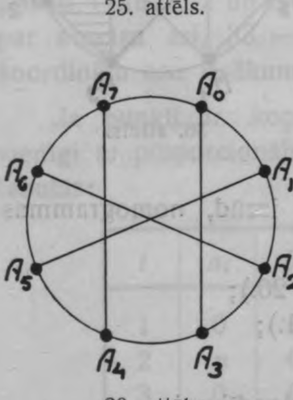
24. attēls.

25. attēls.

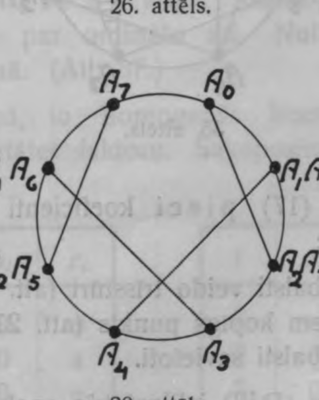


26. attēls.

27. attēls.



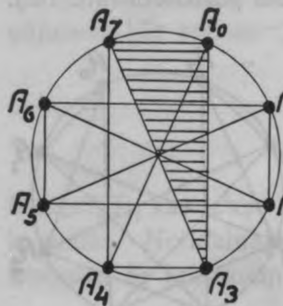
28. attēls.



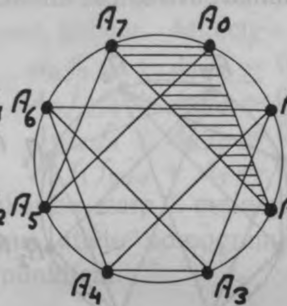
29. attēls.

30. attēls.

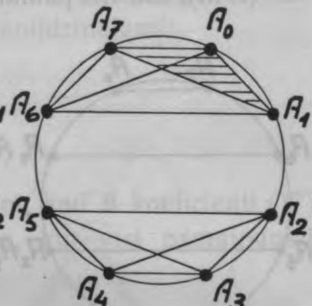
Pieņemsim, ka nomogrammas pamatpunktu novietojums ir (B I). Koeficientus, kas šinī gadījumā anullējas, rāda att. 23; diagrammu šoreiz lietā tā, ka meklē koeficientu nosaukumus slēgta trīsstūŗa virsotnēs.



31. attēls.

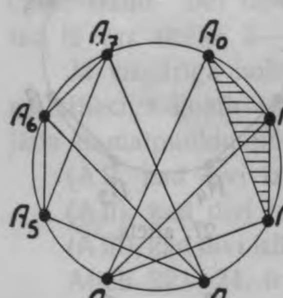


32. attēls.

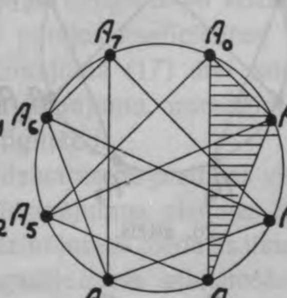


33. attēls.

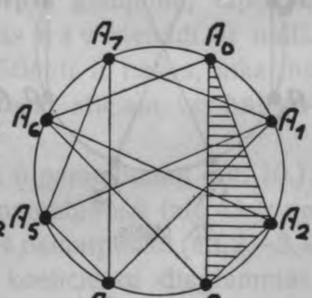
Novietojumiem (B II) un (B III) katram ir trīs apakšgadījumi (*a*, *b*, *c*), ko dabū, kad pārmij atbalstu nosaukumus. Koeficientus, kas šinīs apakšgadījumos anullējas, rāda att. 31.—36., kur jāņem koeficientu apzīmējumi pilnīgu trīsstūŗu virsotnēs.



34. attēls.



35. attēls.



36. attēls.

Ja nolīdzinājumā (17) pieci koeficienti izzūd, nomogrammas iekārta var būt trejāda:

(D I), kad skālu atbalsti veido trīsstūri (att. 20.);

(D II), kad atbalstiem kopīgs punkts (att. 21.);

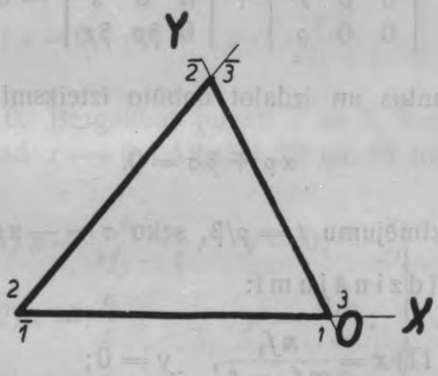
(D III), kad divi atbalsti savietoti.

Gadījumos (D I) un (D III) ietilpst trīs apakšgadījumi.

Koeficientu diagrammas šinīs gadījumos attiecas uz koeficientiem, kas n a v nulles. Nolasīšanas princips: slēgts trīsstūris. Pamatpunktu novietojumam (D II) koeficientu diagramma ir att. 23.; novietojumiem (D I) un (D III) atbilst att. 31.—36.

11. Piemērs I: $f_3 = f_1 f_2$.

Uzdoto nolīdzinājumu dabū pieņemot, ka vispārīgā nolīdzinājumā (17) $A_1 = -A_6 \neq 0$, bet pārējie koeficienti ir nulles. Jāatrod skālu nolīdzinājumi nomogrammai, kas attēlo uzdoto sakarību.



37. attēls.

Tā kā seši koeficienti (A_0, A_2, A_3, A_4, A_5, A_7) ir nulles, saskaņā ar tabulu (T) jābūt spēkā sešiem skālu pamatpunktu izlīdzinājumiem:

$$\bar{1}\bar{2}\bar{3},\ \bar{1}2\bar{3},\ 1\bar{2}\bar{3},\ \bar{1}23,\ 1\bar{2}3 \text{ un } 123,$$

kas reālizējami, novietojot pamatpunktus trīsstūŗa virsotnēs tā, lai punkti $\bar{1}$ un 2, $\bar{2}$ un $\bar{3}$, 3 un 1 ir kopā. Skālas atbalstu $1\bar{1}$ pieņemsim par abscīzu asi, $3\bar{3}$ — par ordinātu asi. Nullpunkti 1 un 3 tad ir koordinātu asu iesākumā. (Att. 37.)

Ja punkti ir kopā, to homogenās koordinātas var atšķirties vienīgi ar proporcionālitātes faktoru. Sakoposim tās (to apzīmējumus) tabulās:

i	a_i	b_i	c_i
1	0	0	σ
2	n	0	s
3	0	0	ρ

$\bar{\imath}$	$\bar{a}_i$	$\bar{b}_i$	$\bar{c}_i$
$\bar{1}$	αn	0	αs
$\bar{2}$	0	p	r
$\bar{3}$	0	βp	βr

α un β ir patvaļīgi koeficienti, kas atšķiras no nulles ($\alpha\beta \neq 0$). Pieņemsim, ka neviena skāla nesaraucas punktā, tā tad, arī $n \neq 0$, $p \neq 0$.

Pamatpunktu homogenām koordinātām jābūt tādām, ka $A_1 + A_6 = 0$, vai arī trīs indeku apzīmējumos:

$$\Delta(\bar{1}23) + \Delta(12\bar{3}) = 0.$$

Pilnīgā veidā:

$$\begin{vmatrix} \alpha n & 0 & \alpha s \\ 0 & p & r \\ 0 & 0 & \rho \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \sigma \\ n & 0 & s \\ 0 & \beta p & \beta r \end{vmatrix} = 0.$$

Izvirzot determinantus un izdalot dabūto izteiksmi ar np ($\neq 0$) atrod noteikumu:

$$\alpha\rho + \beta\sigma = 0.$$

Pieņemot apzīmējumu $t = \rho/\beta$, seko $\sigma = -\alpha t$.

Skālu nolīdzinājumi:

$$\left.\begin{aligned} &1\bar{1})\; x = \frac{nf_1}{sf_1 - t}, && y = 0; \\ &2\bar{2})\; x = \frac{n}{rf_2 + s}, && y = \frac{pf_2}{rf_2 + s}; \\ &3\bar{3})\; x = 0, && y = \frac{pf_3}{rf_3 + t}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (18)$$

Skālu nolīdzinājumos ir 5 patvaļīgas konstantas n, p, r, s, t. To izvēli ierobežo vienīgi anullēšanās noteikumi: n, p, t nekad nav nulles, bet r un s drīkst izzust tikai pa vienai, nevis abas reizē. Ja tās izzūd abas reizē, skāla $2\bar{2}$ ar visiem saviem punktiem aiziet bezgalībā.

f_1, f_2, f_3 ir funkcijas, kas atkarājas attiecīgi no mainīgiem z_1, z_2, z_3, un šo mainīgo vērtības ir piekārtotas attiecīgo skālu punktiem. Šķelsim skālas ar patvaļīgu taisni un apskatīsim skālu atzīmes z_1, z_2, z_3 punktos, kur vilktā sekante sastop skālas. Šīs atzīmes saista sakarība:

$$\begin{vmatrix} nf_1 & 0 & sf_1 - t \\ n & pf_2 & rf_2 + s \\ 0 & pf_3 & rf_3 + t \end{vmatrix} = 0,$$

kuŗu viegli pārveidot uzdotā: $f_1 f_2 - f_3 = 0$.

Skālu konstrukcija top vienkāršaka, ja konstantas r vai s izzūd. Apskatīsim atsevišķi abus gadījumus:

I) $r \neq 0$, $s = 0$. Punkti 2 un $\bar{1}$, kuŗu abscīza ir n/s, aiziet bezgalībā, kad $s \longrightarrow 0$, un atbalsts $2\bar{2}$ top parallēls atbalstam $1\bar{1}$. Skālu nolīdzinājumi:

$$\left.\begin{array}{ll} 1\bar{1})\ x = -\dfrac{nf_1}{t}, & y = 0; \\[2ex] 2\bar{2})\ x = \dfrac{n}{rf_2}, & y = \dfrac{p}{r}; \\[2ex] 3\bar{3})\ x = 0, & y = \dfrac{pf_3}{rf_3 + t}. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (18')$$

II) $r = 0$, $s \neq 0$. Bezgalības punkti $\bar{2}$ un $\bar{3}$, kuŗu ordināta ir p/r, aiziet bezgalībā, kad $r \longrightarrow 0$. Atbalsti $2\bar{2}$ un $3\bar{3}$ top parallēli. Skālu nolīdzinājumi:

$$\left.\begin{array}{ll} 1\bar{1})\ x = \dfrac{nf_1}{sf_1 - t}, & y = 0; \\[2ex] 2\bar{2})\ x = \dfrac{n}{s}, & y = \dfrac{pf_2}{s}; \\[2ex] 3\bar{3})\ x = 0, & y = \dfrac{pf_3}{t}. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (18'')$$

Beidzamā gadījumā tikai viena skāla ($1\bar{1}$) ir projektīva, tā kā nomogrammas reālizēšanai šis gadījums visizdevīgāks. (Att. 38.)

Apzīmēsim ar λ un μ gaŗumus (moduļus, milimetros), kas attēlo attiecīgi abscīzas un ordinātas vienību. Pusatstatumu starp punktiem 1 un $\bar{1}$ nosauksim par δ:

$$\delta = \frac{1}{2}\overline{0_3 0_2} = \frac{\lambda n}{2s}(mm).$$

Atstatumi no skālas iesākuma līdz punktam, kam klāt atzīme z_i $(i = 1, 2, 3)$, saskaņā ar (18''):

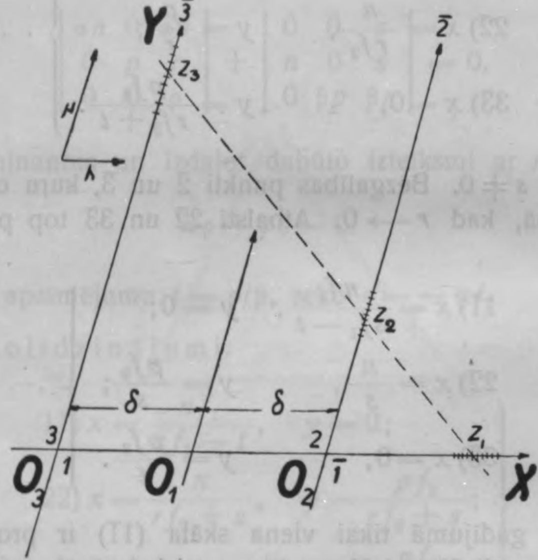
$$\overline{0_3 z_1} = \frac{\lambda n f_1}{sf_1 - t},$$

$$\overline{0_2 z_2} = \frac{\mu p f_2}{s} = m_2 f_2,$$

$$\overline{0_3 z_3} = \frac{\mu p f_3}{t} = m_3 f_3.$$

Tie ir skālu nolīdzinājumi vienā dimensijā, skaitot atstatumus gar skālas atbalstu. Pirmai skālai iesākumu var izvēlēt vidū starp $\bar{1}$ un $\bar{1}$ (vai 0_3 un 0_2); šo punktu nosauksim par 0_1. Atstatums no 0_1 līdz z_1:

$$\overline{0_1 z_1} = \overline{0_3 z_1} - \delta = \delta \frac{2sf_1}{sf_1 - t} - \delta = \delta \cdot \frac{sf_1 + t}{sf_1 - t}.$$



38. attēls.

Kārtula. Lai attēlotu nomogrammā sakarību $f_3 = f_1 f_2$ izvēlam taisni, uz tās pozitīvu virzienu un iesākuma punktu 0_1. Pieņemot patvaļīgu nogriezni δ par moduli konstruējam skālu

$$\overline{0_1 z_1} = \delta \frac{sf_1 + t}{sf_1 - t},$$

kur s un t — patvaļīgi skaitļi, kas nav nulles ($st \neq 0$). Atliekot pa skālas atbalstu no iesākuma 0_1 nogriezni δ pozitīvā virzienā dabū punktu 0_2, bet atliekot negātīvā virzienā — punktu 0_3. Tie ir iesākumi divi paralēlām skālām, kuŗu pozitīvie virzieni vērsti uz vienu pusi un kuŗu nolīdzinājumi:

$$\overline{0_2 z_2} = m_2 f_2, \quad \overline{0_3 z_3} = m_3 f_3.$$

Še m_2 un m_3 ir moduļi funkcijām f_2 resp. f_3. Tos nevar izvēlēt patvaļīgi, jo jāievēro, ka $m_2 : m_3 = t : s$.

Skālu moduļi atkarājas no funkciju variācijas robežām, no vēlamās nolasījumu pareizības un no tā, cik liela drīkst būt nomogramma. Saskaņā ar šīm prasībām noteic moduļus m_2 un m_3. Ja tos uzskata par uzdotiem, tad trešo skālu nevar konstruēt ar patvaļīgiem s un t, bet tie jāaizvieto ar proporcionāliem m_3 un m_2:

$$\overline{0_1 z_1} = \delta \frac{m_3 f_1 + m_2}{m_3 f_1 - m_2}.$$

12. Piemērs II: $f_1 f_2 f_3 = 1$.

Ja abas puses izdala ar f_3 un pieņem $1/f_3 = \varphi_3$, tad seko $\varphi_3 = f_1 f_2$, t. i. sakarība, kuŗas attēlošana nomogrammā jau apskatīta. Tā tad, uzdotam piemēram viegli pielāgot formulas (18), (18') un (18''), liekot tur f_3 vietā $1/f_3$. Tomēr, lai pārrunājamo metodi vispusīgāki parādītu, apskatīsim uzdevumu neatkarīgi no iepriekšējā.

Nolīdzinājumu $f_1 f_2 f_3 = 1$ dabū no vispārīgā (17), pieņemot tur $A_0 = - A_7 \neq 0$, bet pārējos koeficientus pielīdzinot nullei:

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = 0.$$

Šo koeficientu izzušanai atbilst nomogrammā seši skālu pamatpunktu izlīdzinājumi

$$\bar{1}23,\ \bar{1}2\bar{3},\ 1\bar{2}\bar{3},\ \bar{1}\bar{2}3,\ 1\bar{2}3 \text{ un } 12\bar{3},$$

ko var reālizēt, pieņemot patvaļīgi izvēlēta trīsstūŗa malas par skālu atbalstiem un tā stūŗus par skālu pamatpunktiem. Stūŗos jābūt kopā pamatpunktiem 1 ar $\bar{2}$, 2 ar $\bar{3}$, 3 ar $\bar{1}$ (pirmais variants), vai arī $\bar{1}$ ar 2, $\bar{2}$ ar 3, $\bar{3}$ ar 1 (otrais variants).

Abu variantu līdzvērtība skaidra no tā, ka nolīdzinājums nemainās, ja visu f_i vietā liek to ačgārnās vērtības $1/f_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

Koordinātu asu, kuŗām nav nepieciešami jābūt ortogonālām, iesākumā savietosim punktus 1 un $\bar{2}$, uz abscīzu ass — punktus $\bar{1}$ un 3, uz ordinātu ass — punktus 2 un $\bar{3}$.

Skālu pamatpunktu homogenās koordinātas ir pa daļai noteiktas ar to, ka punkti izvēlēti uz koordinātu asīm:

i	a_i	b_i	c_i
1	0	0	c_1
2	0	b_2	c_2
3	a_3	0	c_3

$\bar{i}$	$\bar{a}_i$	$\bar{b}_i$	$\bar{c}_i$
$\bar{1}$	$\bar{a}_1$	0	$\bar{c}_1$
$\bar{2}$	0	0	$\bar{c}_2$
$\bar{3}$	0	$\bar{b}_3$	$\bar{c}_3$

Pārējās, vēl nezināmās, koordinātas jānoteic tā, lai ar šīm konstantām veidotās skālas kollīneāru punktu nomogrammā atbilstu uzdotai sakarībai.

Lai vajadzīgā atbilstība būtu spēkā, konstantām jāizpilda šādi noteikumi:

1) Neviena no konstantām $\bar{a}_1$, c_1; b_2, $\bar{c}_2$; a_3, $\bar{b}_3$ nedrīkst būt nulle.

Patiešām, tā kā uzdotais nolīdzinājums sastāv no konstantā locekļa un trīs funkciju reizinājuma, tad vispārīgā nolīdzinājumā (17) $A_0 \neq 0$, $A_7 \neq 0$:

$$A_0 = \Delta(\bar{1}\bar{2}\bar{3}) = \begin{vmatrix} \bar{a}_1 & 0 & \bar{c}_1 \\ 0 & 0 & \bar{c}_2 \\ 0 & \bar{b}_3 & \bar{c}_3 \end{vmatrix} = -\bar{a}_1\bar{b}_3\bar{c}_2 \neq 0,$$

$$A_7 = \Delta(123) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ a_3 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = -a_3 b_2 c_1 \neq 0.$$

Ja reizinājums nav nulle, tad arī neviens faktors nav nulle:

$$\bar{a}_1 \neq 0,\ c_1 \neq 0;\ b_2 \neq 0,\ \bar{c}_2 \neq 0;\ a_3 \neq 0,\ \bar{b}_3 \neq 0.$$

2) Tā kā $A_0 = -A_7$ vai $A_0 + A_7 = 0$, tad jābūt spēkā sakarībai

$$\bar{a}_1 \bar{b}_3 \bar{c}_2 + a_3 b_2 c_1 = 0. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

3) Savietotu punktu homogenās koordinātas atšķiŗas tikai ar neizzūdošu proporcionālitātes faktoru. Attiecībā uz punktiem 1 un $\bar{2}$ tas ir izpildīts, jo par divi skaitļiem c_1 un $\bar{c}_2$, kas abi nav nulles, vienmēr var apgalvot, ka $\bar{c}_2 = \lambda c_1$, kur $\lambda \neq 0$.

Ja punkts $\bar{1}$ savietots ar 3 un 2 ar $\bar{3}$, to homogenām koordinātām jābūt tādām, ka

$$\bar{c}_1 = \mu c_3, \qquad \bar{a}_1 = \mu a_3;$$
$$\bar{c}_3 = \nu c_2, \qquad \bar{b}_3 = \nu b_2,$$

kur $\mu \neq 0$ (jo $a_3 \neq 0$, $\bar{a}_1 \neq 0$), $\nu \neq 0$ (jo $b_2 \neq 0$, $\bar{b}_3 \neq 0$).

Secinājums I: Konstantas $\bar{c}_1$, c_2, c_3, $\bar{c}_3$ drīkst būt arī nulles, proti, pāŗos: $\bar{c}_1$ reizē ar c_3, c_2 reizē ar $\bar{c}_3$, bet ne visas reizē.

Pāŗveidīgā izzušana tieši seko no beidzamām sakarībām augšā. Tomēr tikai viens pāris drīkst izzust. Pretējo pieņemot $c_3 = 0$ un reizē $\bar{c}_3 = 0$, t. i. skālai $3\bar{3}$ abi pamatpunkti un reizē ar to visi skālas punkti ir bezgalībā, tā tad, skālas praktiski nemaz nav.

Secinājums II: Katra konstantu $\bar{c}_1$, c_3 un c_2, $\bar{c}_3$ pāŗa neizzušana uzliek skālu parametriem vienu jaunu noteikumu, proti:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{ja } c_3 \neq 0: & \dfrac{\bar{c}_1}{c_3} = \dfrac{\bar{a}_1}{a_3} (= \mu); \\ (\bar{c}_1 \neq 0) & \\ \text{ja } \bar{c}_3 \neq 0: & \dfrac{\bar{c}_3}{c_2} = \dfrac{\bar{b}_3}{b_2} (= \nu). \\ (c_2 \neq 0) & \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

Secinājums III: Proporcionālitātes reizuļus λ, μ, ν saista sakarība

$$\lambda\mu\nu + 1 = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

ko tai gadījumā, kad visi pamatpunkti ir galīgā atstatumā, var pārrakstīt šā:

$$\frac{\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3}{c_1 c_2 c_3} + 1 = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Pirmā formula seko no (19), ievietojot no 3) noteikuma $\bar{c}_2 = \lambda c_1$, $\bar{a}_1 = \mu a_3$ un $\bar{b}_3 = \nu b_2$, un dalot iznākumu ar $a_3 b_2 c_1 (\neq 0)$. Formula (22) seko no (21), ja tur ievieto: $\lambda = \bar{c}_2/c_1$, $\mu = \bar{c}_1/c_3$, $\nu = \bar{c}_3/c_2$; sal. (20), (20').

Skālu nolīdzinājumi gadījumā, kad neviens pamatpunkts nav bezgalībā ($c_i \neq 0$, $\bar{c}_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3$):

$$\bar{1})\quad x=\frac{\bar{a}_1 f_1}{\bar{c}_1 f_1+c_1},\qquad y=0;$$

$$\bar{2})\quad x=0,\qquad y=\frac{b_2}{\bar{c}_2 f_2+c_2};$$

$$\bar{3})\quad x=\frac{a_3}{\bar{c}_3 f_3+c_3},\qquad y=\frac{\bar{b}_3 f_3}{\bar{c}_3 f_3+c_3}.$$

Skālu konstantas izpilda noteikumus (19) un (20), pavisam — 3 noteikumus, bet vienu no tiem, piem. (19), var aizvietot ar (22):

$$\frac{\bar{c}_1}{c_3}=\frac{\bar{a}_1}{a_3}\,(=\mu),\qquad \frac{\bar{c}_3}{c_2}=\frac{\bar{b}_3}{b_2}\,(=\nu),\qquad \frac{\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3}{c_1c_2c_3}+1=0.$$

Proporcijās malu locekļus apmainīsim savā starpā un attiecību kopīgās vērtības nosauksim par a un b:

$$\frac{\bar{a}_1}{\bar{c}_1}=\frac{a_3}{c_3}=a,\qquad \frac{b_2}{c_2}=\frac{\bar{b}_3}{\bar{c}_3}=b,\qquad \frac{c_1c_2c_3}{\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3}+1=0.$$

$-c_i/\bar{c}_i$ nosauksim par u_i:

$$u_1=-c_1/\bar{c}_1,\quad u_2=-c_2/\bar{c}_2,\quad u_3=-c_3/\bar{c}_3.$$

Acīm redzot, $u_1u_2u_3=1$, t. i. konstantas u_i, ja tās ievieto uzdotā nolīdzinājumā f_i vietā, apmierina šo nolīdzinājumu.

Dalot skālu nolīdzinājumos skaitītājus un saucējus attiecīgi ar $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$, $\bar{c}_3$ pārliecināmies, ka visus nolīdzinājumus var izteikt konstantās a, b un u_i $(i=1, 2, 3)$.

Skālu nolīdzinājumi:

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{1})\quad x_1=\frac{af_1}{f_1-u_1}, && y_1=0;\\
&\bar{2})\quad x_2=0, && y_2=\frac{-bu_2}{f_2-u_2};\\
&\bar{3})\quad x_3=\frac{-au_3}{f_3-u_3}, && y_3=\frac{bf_3}{f_3-u_3}.
\end{aligned}\right\}\quad \ldots\ldots (23)$$

Skālu konstantas $(u_1u_2u_3=1)$:

i	a_i	b_i	c_i
1	0	0	$-u_1$
2	0	$-bu_2$	$-u_2$
3	$-au_3$	0	$-u_3$

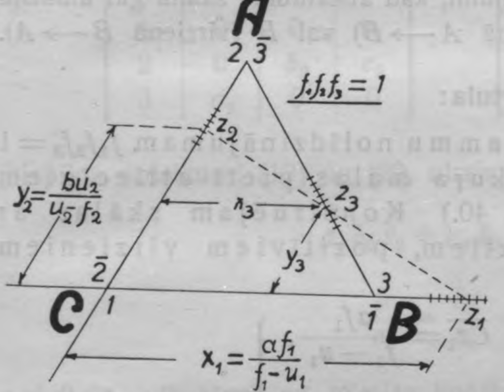
$\bar{i}$	$\bar{a}_i$	$\bar{b}_i$	$\bar{c}_i$
$\bar{1}$	a	0	1
$\bar{2}$	0	0	1
$\bar{3}$	0	b	1

Dabūtā nomogramma (att. 39.) sastāv no 3 skālām, kuŗu atbalsti veido trīsstūri ABC. Punktā C (koordinātu asu iesākumā) savietoti skālu pamatpunkti 1 un $\bar{2}$, punktā B (uz abscīzu ass) — $\bar{1}$ un 3, punktā A (uz ordinātu ass) — 2 un $\bar{3}$. No skālu konstantu tabulām nolasa:

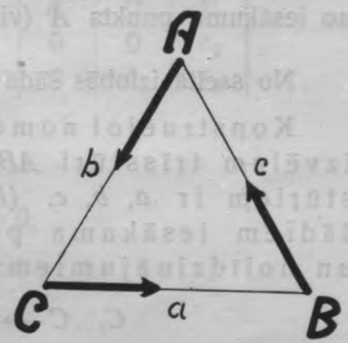
$$a = \text{absc. p. } 3 = \text{absc. p. } \bar{1} = \overline{BC},$$
$$b = \text{ord. p. } 2 = \text{ord. p. } \bar{3} = \overline{CA}.$$

Tā tad, a un b ir skaitliski vienlīdzīgi trīsstūŗa malu gaŗumiem:

$$a = \text{atstat. } 1\bar{1}, \quad b = \text{atstat. } 2\bar{2}.$$



39. attēls.



40. attēls.

Pirmai skālai (uz atbalsta $1\bar{1}$) iesākuma punkts ir C, pozitīvais virziens $C \longrightarrow B$ un nolīdzinājums

$$\overline{Cz_1} = \frac{af_1}{f_1 - u_1}.$$

Tai pašai skālai, ja atstatumus skaita no B un par pozitīvo virzienu pieņem $B \longrightarrow C$, ir nolīdzinājums

$$\overline{Bz_1} = a - \frac{af_1}{f_1 - u_1} = \frac{au_1}{u_1 - f_1}.$$

Tāpat noskaidrojam nolīdzinājuma veidu otrai skālai (uz atbalsta $2\bar{2}$):

skālas iesākums	pozitīvais virziens	skālas nolīdzinājums
C	$C \longrightarrow A$	$\overline{Cz_2} = \dfrac{bu_2}{u_2 - f_2}$
A	$A \longrightarrow C$	$\overline{Az_2} = \dfrac{bf_2}{f_2 - u_2}$

Trešai skālai, saskaņā ar (23), atstatumi jāskaita koordinātu asu virzienos, nevis gar atbalstu. Sameklēsim skālas nolīdzinājumu, skaitot atstatumus vienā dimensijā. Pieņemsim, ka trīsstūŗa ABC trešā mala $\overline{AB} = c$. No līdzīgiem trīsstūŗiem seko:

$$\frac{\overline{Az_3}}{x_3} = \frac{c}{a}, \quad \frac{\overline{Bz_3}}{y_3} = \frac{c}{b},$$

tā tad:

$$\overline{Az_3} = \frac{c}{a} x_3 = \frac{cu_3}{u_3 - f_3}, \quad \overline{Bz_3} = \frac{c}{b} y_3 = \frac{cf_3}{f_3 - u_3},$$

un tie ir trešās skālas nolīdzinājumi, kad atstatumus skaita gar atbalstu no iesākuma punkta A (virzienā $A \longrightarrow B$) vai B (virzienā $B \longrightarrow A$).

No sacītā izlobās šāda **kārtula:**

Konstruējot nomogrammu nolīdzinājumam $f_1 f_2 f_3 = 1$ izvēlam trīsstūri ABC, kuŗa malas pretī attiecīgiem stūŗiem ir a, b, c. (Att. 40.) Konstruējam skālas ar šādiem iesākuma punktiem, pozitīviem virzieniem un nolīdzinājumiem:

$$\left.\begin{array}{lll} C, & C \longrightarrow B, & \overline{Cz_1} = \dfrac{af_1}{f_1 - u_1}, \\[2ex] A, & A \longrightarrow C, & \overline{Az_2} = \dfrac{bf_2}{f_2 - u_2}, \\[2ex] B, & B \longrightarrow A, & \overline{Bz_3} = \dfrac{cf_3}{f_3 - u_3}; \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (24)$$

vai arī no otra punkta pretējā virzienā šādas:

$$\left.\begin{array}{lll} B, & B \longrightarrow C, & \overline{Bz_1} = \dfrac{au_1}{u_1 - f_1}, \\[2ex] C, & C \longrightarrow A, & \overline{Cz_2} = \dfrac{bu_2}{u_2 - f_2}, \\[2ex] A, & A \longrightarrow B, & \overline{Az_3} = \dfrac{cu_3}{u_3 - f_3}. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (24')$$

Konstantas u_i ir tādas, ka $u_1 u_2 u_3 = 1$.

(24) atbilst gadījumam, kad par skālu iesākuma punktiem pieņemti to nulles punkti. (24′) atbilst gadījumam, kad atstatumus skaita no

bezgalības punktiem. Pozitīvais virziens abos gadījumos ir no tā pamatpunkta, kas izvēlēts par iesākuma punktu, vērsts pret otru tās pašas skālas pamatpunktu.

Īpaši gadījumi: I) $\bar{c}_1=0$, $c_3=0$. Divkāršais punkts $\bar{1}$, 3 (punkts B) abscīzu ass virzienā pārvietots bezgalībā. Atbalsts $3\bar{3}$ ir paralēls atbalstam $1\bar{1}$.

Skālu konstantām

i	a_i	b_i	c_i
1	0	0	c_1
2	0	b_2	c_2
3	a_3	0	0

$\bar{i}$	$\bar{a}_i$	$\bar{b}_i$	$\bar{c}_i$
$\bar{1}$	$\bar{a}_1$	0	0
$\bar{2}$	0	0	$\bar{c}_2$
$\bar{3}$	0	$\bar{b}_3$	$\bar{c}_3$

jāizpilda noteikumi (19) un (20, otrais):

$$\bar{a}_1 \bar{b}_3 \bar{c}_2 + a_3 b_2 c_1 = 0,$$

$$\frac{b}{c_2} = \frac{\bar{b}_3}{\bar{c}_3} = b.$$

$c_2 \neq 0$, $\bar{c}_3 \neq 0$, tāpat arī pārējās konstantas šinīs formulās nav nulles. No abiem noteikumiem seko

$$-\frac{c_2}{\bar{c}_2} = \frac{\bar{a}_1 \bar{c}_3}{c_1 a_3} = \frac{\bar{a}_1}{c_1} \Big/ \frac{a_3}{\bar{c}_3} = u.$$

Pieņemsim vēl apzīmējumu

$$\frac{\bar{a}_1}{c_1} = k, \text{ tad } \frac{a_3}{\bar{c}_3} = k/u.$$

Atzīmēsim vēl, ka

$$\frac{b_2}{\bar{c}_2} = \frac{b_2}{c_2}\,\frac{c_2}{\bar{c}_2} = -bu.$$

Skālu nolīdzinājumus var izteikt konstantās k, u, b, turklāt šīs konstantas vairs nav pakļautas nekādiem principiāliem ierobežojumiem, izņemot to, ka neviena no tām nedrīkst anullēties:

$$\left.\begin{array}{lll} 1\bar{1})\ x = kf_1, & y = 0; \\ 2\bar{2})\ x = 0, & y = \dfrac{bu}{u - f_2}; \\ 3\bar{3})\ x = \dfrac{k}{uf_3}, & y = b. \end{array}\right\} \ldots\ldots (25)$$

II) $c_2 = 0$, $\bar{c}_3 = 0$. ($c_3 \neq 0$, $\bar{c}_1 \neq 0$.) Divkāršais punkts $2\bar{3}$ pārvietots bezgalībā ordinātu ass virzienā. Atbalsts $3\bar{3}$ ir paralēls atbalstam $2\bar{2}$. Šinī gadījumā, pieņemot

$$\frac{\bar{b}_3}{c_3} = k, \quad \frac{\bar{a}_1}{\bar{c}_1} = \frac{a_3}{c_3} = a, \quad u = -\frac{c_1}{\bar{c}_1} = \frac{\bar{b}_3}{c_3} \Big/ \frac{b_2}{\bar{c}_2}$$

dabū skālu nolīdzinājumus:

$$\left.\begin{array}{lll} 1\bar{1})\ x = \dfrac{af_1}{f_1 - u}, & y = 0; \\ 2\bar{2})\ x = 0, & y = \dfrac{k}{uf_2}; \\ 3\bar{3})\ x = a, & y = kf_3. \end{array}\right\} \ldots\ldots (25')$$

13. Piemērs III: $f_3 = f_1 + f_2$.

Šis nolīdzinājums rodas no vispārīgā (17), ja tur pieņem:

$$A_0 = A_1 = A_2 = A_3 = A_7 = 0, \text{ bet}$$

$$A_4 = A_5 = -A_6 \neq 0.$$

Ja pieminētie pieci koeficienti ir nulles, nomogrammas pamatpunkti veido 5 izlīdzinājumus:

$$\bar{1}2\bar{3},\ \bar{1}\bar{2}3,\ \bar{1}2\bar{3},\ 1\bar{2}\bar{3} \text{ un } 123.$$

Tādi izlīdzinājumi, kā sīkāka analize rāda, reālizējami savietojot visus bezgalības punktus (trīskārtīgs punkts) un nulles punktus novietojot taisnā līnijā.

Pirmais paņēmiens: divi atbalsti pieņemti par koordinātu asīm.

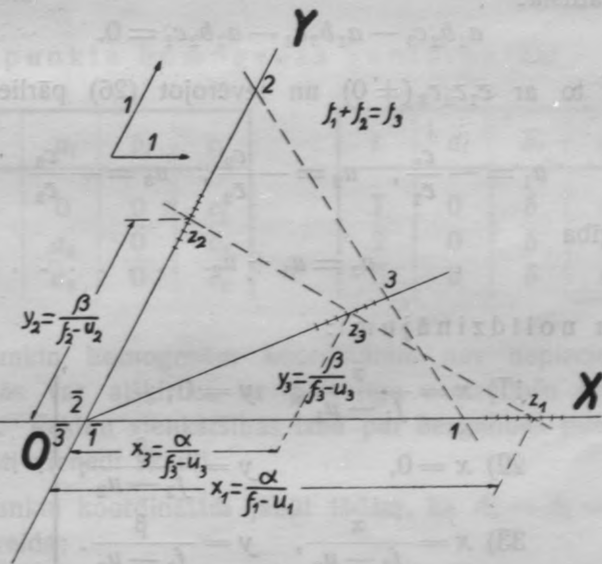
Atbalstu $1\bar{1}$ pieņemsim par abscīzu asi, $2\bar{2}$ — par ordinātu asi (att. 41.); koordinātu asu iesākumā savietoti punkti 1,2,3. Punkti 1, 2, 3 ir katrs par sevi un veido parasto (normālo) izlīdzinājumu. Skālu pamatpunktu homogenās koordinātas:

i	a_i	b_i	c_i
1	a_1	0	c_1
2	0	b_2	c_2
3	a_3	b_3	c_3

$\bar{i}$	$\bar{a}_i$	$\bar{b}_i$	$\bar{c}_i$
$\bar{1}$	0	0	$\bar{c}_1$
$\bar{2}$	0	0	$\bar{c}_2$
$\bar{3}$	0	0	$\bar{c}_3$

atbilst šādiem noteikumiem:

1) Konstantas a_1, b_2, a_3, b_3 neviena nav nulle, jo neapskatīsim gadījumus, kad kāda skāla saraucas punktā vai arī divi skālas savietojas atbalstiem.



41. attēls.

2) Pamatpunktu koordinātas ir tādas, ka $A_4 = A_5 = -A_6 \neq 0$. Vai arī pilnīgā veidā, izteicot nolīdzinājuma koeficientus skālu konstantās:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \bar{c}_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & \bar{c}_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & 0 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & \bar{c}_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Attīstot determinantus dabū

$$-a_3 b_2 \bar{c}_1 = -a_1 b_3 \bar{c}_2 = -a_1 b_2 \bar{c}_3 \neq 0,$$

no kurienes seko, ka visi $\bar{c}_i$ atšķiras no nulles, tā kā $\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3 \neq 0$, un tālāk:

$$\frac{a_1}{\bar{c}_1} = \frac{a_3}{\bar{c}_3} = \alpha, \qquad \frac{b_2}{\bar{c}_2} = \frac{b_3}{\bar{c}_3} = \beta. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26)$$

3) Nulles punkti ir taisnā līnijā, tā tad, šo punktu homogeno koordinātu determinants ir nulle:

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

vai arī, ja attīsta:

$$a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_3 b_2 c_1 = 0.$$

Izdalot to ar $\bar{c}_1\bar{c}_2\bar{c}_3 (\neq 0)$ un ievērojot (26) pārliecināmies, ka lielumus

$$u_1 = -\frac{c_1}{\bar{c}_1}, \quad u_2 = -\frac{c_2}{\bar{c}_2}, \quad u_3 = -\frac{c_3}{\bar{c}_3}$$

saista sakarība

$$u_3 = u_1 + u_2. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27)$$

S k ā l u n o l ī d z i n ā j u m i:

$$\left.\begin{array}{ll} \bar{1}\bar{1})\ x = \dfrac{\alpha}{f_1 - u_1}, & y = 0; \\ \bar{2}\bar{2})\ x = 0, & y = \dfrac{\beta}{f_2 - u_2}; \\ \bar{3}\bar{3})\ x = \dfrac{\alpha}{f_3 - u_3}, & y = \dfrac{\beta}{f_3 - u_3}. \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (28)$$

Še α un β ir gluži patvaļīgas neizzūdošas konstantas. Konstantas u_i divas var izvēlēt pilnīgi pēc patikas, trešo noteic sakarība (27). V i e n a no tām vai arī v i s a s t r ī s drīkst būt nulles. Pēdējā gadījumā s k ā l u n o l ī d z i n ā j u m i:

$$\left.\begin{array}{ll} \bar{1}\bar{1})\ x = \dfrac{\alpha}{f_1}, & y = 0; \\ \bar{2}\bar{2})\ x = 0, & y = \dfrac{\beta}{f_2}; \\ \bar{3}\bar{3})\ x = \dfrac{\alpha}{f_3}, & y = \dfrac{\beta}{f_3}. \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (28')$$

Visi nulles punkti pārvietoti bezgalībā. Trešās skālas virzienu noteic α un β, jo visos šīs skālas atbalsta punktos

$$\frac{x}{y} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Otrais paņēmiens: nulles punktu izlīdzinājums un viens atbalsts pieņemti par koordinātu asīm.

Tādai koordinātu asu izvēlei, salīdzinot ar iepriekšējo paņēmienu, ir tā priekšrocība, ka trīskārtīgo punktu $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$ var pārvietot bezgalībā. Ņemsim, piemēram, atbalstu $1\bar{1}$ par ordinātu asi un izlīdzinājumu 123 par abscīzu asi.

Pamatpunktu homogenās koordinātas:

i	a_i	b_i	c_i
1	0	0	c_1
2	a_2	0	c_2
3	a_3	0	c_3

$\bar{\imath}$	$\bar{a}_i$	$\bar{b}_i$	$\bar{c}_i$
$\bar{1}$	0	$\bar{b}$	$\bar{c}$
$\bar{2}$	0	$\bar{b}$	$\bar{c}$
$\bar{3}$	0	$\bar{b}$	$\bar{c}$

Savietotu punktu homogenām koordinātām nav nepieciešami jābūt vienādām, tās var atšķirties ar patvaļīgu neizzūdošu proporcionālitātes faktoru. Rēķinu vienkāršības labā par bezgalības punktu koordinātām izvēlēti vienādi skaitļi.

Pamatpunktu koordinātām jābūt tādām, ka $A_4 = A_5 = -A_6 \neq 0$, vai pilnīgā veidā:

$$\begin{vmatrix} 0 & \bar{b} & \bar{c} \\ a_2 & 0 & c_2 \\ a_3 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & c_1 \\ 0 & \bar{b} & \bar{c} \\ a_3 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & c_1 \\ a_2 & 0 & c_2 \\ 0 & \bar{b} & \bar{c} \end{vmatrix} \neq 0,$$

tā tad, izvirzot determinantus un izdalot ar $\bar{b}$ ($\bar{b} \neq 0$, pretējā gadījumā 1 un $\bar{1}$ būtu kopā):

$$a_2 c_3 - a_3 c_2 = a_3 c_1 = a_2 c_1 \neq 0,$$

no kurienes seko, vispirms, ka c_1, a_2 un a_3 neviens nav nulle ($c_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $a_3 \neq 0$), un tālāk:

$$a_2 = a_3, \quad c_3 = c_1 + c_2 \quad \text{. . . . . (29)}$$

Gadījums I: $\bar{c} \neq 0$. Bezgalības punkti galīgā atstatumā. Pieņemsim apzīmējumus:

$$u_1 = -\frac{c_1}{\bar{c}}, \quad u_2 = -\frac{c_2}{\bar{c}}, \quad u_3 = -\frac{c_3}{\bar{c}},$$

un tāļāk:

$$a = \frac{a_2}{\bar{c}} = \frac{a_3}{\bar{c}}, \quad b = \frac{\bar{b}}{\bar{c}}.$$

Skālu nolīdzinājumi:

$$\left.\begin{array}{lll} 1\bar{1}) & x = 0, & y = \dfrac{bf_1}{f_1 - u_1}; \\ 2\bar{2}) & x = \dfrac{a}{f_2 - u_2}, & y = \dfrac{bf_2}{f_2 - u_2}; \\ 3\bar{3}) & x = \dfrac{a}{f_3 - u_3}, & y = \dfrac{bf_3}{f_3 - u_3}. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (30)$$

Šādas skālas, kā kollīneāru punktu nomogramma, atbilst nolīdzinājumam $f_3 = f_1 + f_2$, ja konstantas u_i tādas, ka $u_3 = u_1 + u_2$.

Gadījums II: $\bar{c} = 0$. Bezgalības punkti ordinātu ass virzienā pārvietoti bezgalībā. Nomogramma sastāv no 3 parallēlām skālām, kuŗu nolīdzinājumi:

$$\left.\begin{array}{lll} 1\bar{1}) & x_1 = 0, & y_1 = \dfrac{\bar{b}f_1}{c_1}; \\ 2\bar{2}) & x_2 = \dfrac{a_2}{c_2}, & y_2 = \dfrac{\bar{b}f_2}{c_2}; \\ 3\bar{3}) & x_3 = \dfrac{a_3}{c_3}, & y_3 = \dfrac{\bar{b}f_3}{c_3}. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (30')$$

Tādas skālas, kā kollīneāru punktu nomogramma, atbilst uzdotam nolīdzinājumam, ja konstantas apmierina noteikumus (29).

Praksē, kad konstruē nomogrammu, skaitļu grafiskai attēlošanai vajadzīgs gaŗums (modulis), kas apzīmē vienību. Pieņemsim, ka abscīzas vienību attēlo λ mm, bet ordinātas vienību — μ mm. Apzīmēsim ar X_i un Y_i gaŗumus (mm), kas attēlo x_i un y_i. Skālu nolīdzinājumus (30′) var pārrakstīt šā:

$$X_i = \lambda \frac{a_i}{c_i}, \quad Y_i = \mu \frac{\bar{b}}{c_i} f_i,$$

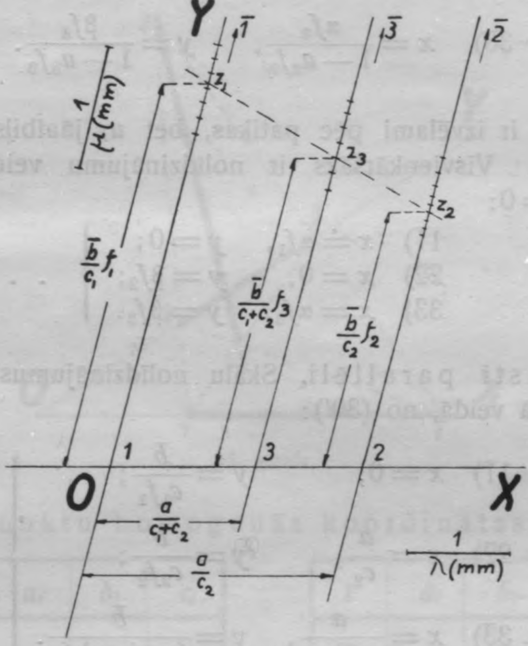
kur $i = 1, 2, 3$ un $a_1 = 0$, $a_2 = a_3 = a$, $c_3 = c_1 + c_2$. Var teikt: y_i attēlo ar moduli μ, bet f_i ar moduli $m_i = \mu\bar{b}/c_i$.

Moduļus

$$m_1 = \mu \frac{\bar{b}}{c_1}, \quad m_2 = \mu \frac{\bar{b}}{c_2}, \quad m_3 = \mu \frac{\bar{b}}{c_1 + c_2}$$

saista sakarība

$$\frac{1}{m_3} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$



42. attēls.

Skālu iesākuma punkti 1, 2, 3 ir uz vienas taisnes tādos atstatumos (uz vienu pusi no 1), ka

$$\frac{\text{atstatums } 12}{\text{atstatums } 13} = \frac{X_2}{X_3} = \frac{m_2}{m_3}$$

Pozitīvais virziens visām trim skālām ir vērsts uz vienu pusi. (Att. 42.)

14. **Piemērs IV:** $\dfrac{1}{f_3} = \dfrac{1}{f_1} + \dfrac{1}{f_2}$

Šis nolīdzinājums rodas no iepriekš apskatītā ($f_3 = f_1 + f_2$), ja tur f_i vietā ieliek $1/f_i$ Izdarot tādu pat apmaiņu skālu nolīdzinājumos (28), (28′), (30), (30′) dabū nomogrammas, kas attēlo uzdoto sakarību.

I) Atbalsti caur kopīgu punktu. Attiecīgos skālu nolīdzinājumus dabū no (28):

$$\left.\begin{array}{lll} 1\bar{1}) & x=\dfrac{\alpha f_1}{1-u_1 f_1}, & y=0; \\ 2\bar{2}) & x=0, & y=\dfrac{\beta f_2}{1-u_2 f_2}; \\ 3\bar{3}) & x=\dfrac{\alpha f_3}{1-u_3 f_3}, & y=\dfrac{\beta f_3}{1-u_3 f_3}. \end{array}\right\} \quad \ldots (31)$$

Še α un β ir izvēlami pēc patikas, bet u_i jāatbilst noteikumam $u_3 = u_1 + u_2$. Visvienkāršāks ir nolīdzinājumu veids, ja pieņem $u_1 = u_2 = u_3 = 0$:

$$\left.\begin{array}{lll} 1\bar{1}) & x=\alpha f_1, & y=0; \\ 2\bar{2}) & x=0, & y=\beta f_2; \\ 3\bar{3}) & x=\alpha f_3, & y=\beta f_3. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (31')$$

II) Atbalsti paralēli. Skālu nolīdzinājumus dabū no (30) vai, vienkāršākā veidā, no (30'):

$$\left.\begin{array}{lll} 1\bar{1}) & x=0, & y=\dfrac{b}{c_1 f_1}; \\ 2\bar{2}) & x=\dfrac{a}{c_2}, & y=\dfrac{b}{c_2 f_2}; \\ 3\bar{3}) & x=\dfrac{a}{c_1+c_2}, & y=\dfrac{b}{(c_1+c_2) f_3}. \end{array}\right\} \quad \ldots (31'')$$

15. Piemērs V: $f_1 f_2 f_3 + \alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 = 0.$

Uzdotais nolīdzinājums rodas no vispārīgā (17), ja tur pieņem

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_7 = 0,$$

bet pārējie koeficienti nav nulles:

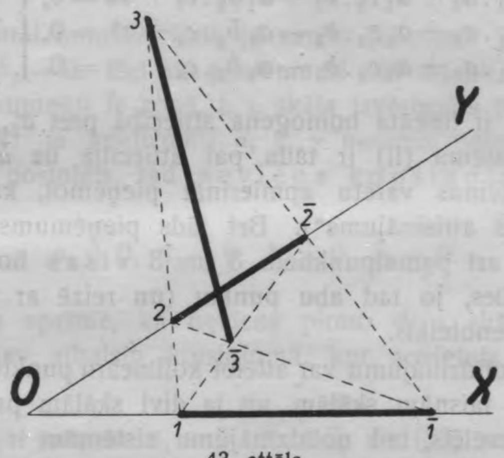
$$A_0 = \sigma,\ A_4 = \alpha\sigma,\ A_5 = \beta\sigma,\ A_6 = \gamma\sigma,$$

kur $\sigma (\neq 0)$ — patvaļīgs proporcionālitātes faktors.

Ja uzdotā nolīdzinājumā izzūd augšā uzskaitītie 4 koeficienti, tad nomogrammā, kas to attēlo, ir spēkā 4 skālu pamatpunktu izlīdzinājumi:

$$\bar{1}23,\quad \bar{1}2\bar{3},\quad 1\bar{2}\bar{3},\quad 123.$$

Izvēlēsim patvaļīgi punktus 1, $\bar{1}$ un 2, $\bar{2}$. Atbalstu $1\bar{1}$ uzskatīsim par abscīzu asi, bet $2\bar{2}$ — par ordinātu asi. Trešās skālas pamatpunkti reizē ar to ir noteikti. Punkts 3 ir tur, kur krustojas taisnes $\bar{1}\bar{2}$ un 12 (izlīdzinājumi $\bar{1}\bar{2}3$ un 123); punkts $\bar{3}$ ir tur, kur krustojas taisnes $\bar{1}2$ un $1\bar{2}$ (izlīdzinājumi $\bar{1}2\bar{3}$ un $1\bar{2}\bar{3}$). Att. 43. rāda schēmatiski pamatpunktu novietojumu.



43. attēls.

Pamatpunktu homogenās koordinātas:

i	a_i	b_i	c_i
1	a_1	0	c_1
2	0	b_2	c_2
3	a_3	b_3	c_3

$\bar{i}$	$\bar{a}_i$	$\bar{b}_i$	$\bar{c}_i$
$\bar{1}$	$\bar{a}_1$	0	$\bar{c}_1$
$\bar{2}$	0	$\bar{b}_2$	$\bar{c}_2$
$\bar{3}$	$\bar{a}_3$	$\bar{b}_3$	$\bar{c}_3$

Vispārīgā nolīdzinājuma (17) koeficientus var šķirot divi grupās atkarībā no tā, vai attiecīgā trīsciparu indekā ir 3 vai $\bar{3}$:

$$\text{(I)}\left\{\begin{aligned}\Delta(\bar{1}\bar{2}\bar{3}) &= A_0 = \sigma,\\ \Delta(\bar{1}2\bar{3}) &= A_2 = 0,\\ \Delta(1\bar{2}\bar{3}) &= A_3 = 0,\\ \Delta(12\bar{3}) &= A_6 = \sigma\gamma;\end{aligned}\right. \qquad \text{(II)}\left\{\begin{aligned}\Delta(\bar{1}\bar{2}3) &= A_1 = 0,\\ \Delta(\bar{1}23) &= A_4 = \sigma\alpha,\\ \Delta(1\bar{2}3) &= A_5 = \sigma\beta,\\ \Delta(123) &= A_7 = 0.\end{aligned}\right.$$

Šie 8 nolīdzinājumi izteic visus noteikumus, kas skālu pamatpunktu koordinātām jāizpilda, ja nomogramma attēlo uzdoto sakarību. Rakstot koeficientus A_i determinantu veidā un pēdējos attīstot, dabū divi nolīdzinājumu sistēmas:

$$\left.\begin{array}{l}
\bar{b}_2\bar{c}_1 . \bar{a}_3 + \bar{a}_1\bar{c}_2 . \bar{b}_3 - \bar{a}_1\bar{b}_2 . \bar{c}_3 + \sigma = 0, \\
b_2\bar{c}_1 . \bar{a}_3 + \bar{a}_1 c_2 . \bar{b}_3 - \bar{a}_1 b_2 . \bar{c}_3 = 0, \\
\bar{b}_2 c_1 . \bar{a}_3 + a_1\bar{c}_2 . \bar{b}_3 - a_1\bar{b}_2 . \bar{c}_3 = 0, \\
b_2 c_1 . \bar{a}_3 + a_1 c_2 . \bar{b}_3 - a_1 b_2 . \bar{c}_3 + \sigma\gamma = 0;
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{I})$$

un

$$\left.\begin{array}{l}
\bar{b}_2\bar{c}_1 . a_3 + \bar{a}_1\bar{c}_2 . b_3 - \bar{a}_1\bar{b}_2 . c_3 = 0, \\
b_2\bar{c}_1 . a_3 + \bar{a}_1 c_2 . b_3 - \bar{a}_1 b_2 . c_3 + \sigma\alpha = 0, \\
\bar{b}_2 c_1 . a_3 + a_1\bar{c}_2 . b_3 - a_1\bar{b}_2 . c_3 + \sigma\beta = 0, \\
b_2 c_1 . a_3 + a_1 c_2 . b_3 - a_1 b_2 . c_3 = 0
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{II})$$

Sistēma (I) ir līneāra homogena attiecībā pret $\bar{a}_3$, $\bar{b}_3$, $\bar{c}_3$ un σ kā nezināmiem; sistēma (II) ir tāda pat attiecībā uz a_3, b_3, c_3 un σ. Formāli šīs sistēmas varētu apmierināt pieņemot, ka nezināmie ir nulles („triviālais atrisinājums"). Bet tāds pieņēmums ir nelikumīgs, jo $\sigma \neq 0$, tāpat arī pamatpunktiem 3 un $\bar{3}$ visas homogenās koordinātas nav nulles, jo tad abu punktu (un reizē ar to visas skālas) stāvoklis kļūst nenoteikts.

Ja uzdoto nolīdzinājumu var attēlot kollīneāru punktu nomogrammā, kas sastāv no 3 taisnām skālām, un ja divi skālām pamatpunktu stāvoklis pareizi izvēlēts, tad nolīdzinājumu sistēmām ir netriviāli atrisinājumi, kas noteic trešās skālas pamatpunktu koordinātas.

Lai sistēmām (I) un (II) tādi atrisinājumi būtu, nepieciešamais un pietiekošais noteikums tam ir tas, ka:

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{vmatrix}
\bar{b}_2\bar{c}_1 & \bar{a}_1\bar{c}_2 & \bar{a}_1\bar{b}_2 & 1 \\
b_2\bar{c}_1 & \bar{a}_1 c_2 & \bar{a}_1 b_2 & 0 \\
\bar{b}_2 c_1 & a_1\bar{c}_2 & a_1\bar{b}_2 & 0 \\
b_2 c_1 & a_1 c_2 & a_1 b_2 & \gamma
\end{vmatrix} = 0, \ldots\ldots\ldots (32)$$

un

$$(\mathrm{II}) \quad \begin{vmatrix}
\ldots & \ldots & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \alpha \\
\ldots & \ldots & \ldots & \beta \\
\ldots & \ldots & \ldots & 0
\end{vmatrix} = 0, \ldots\ldots\ldots (32')$$

kur otrā determinantā pirmos 3 stabiņos tie paši elementi tādā pat sakārtojumā, kā pirmā determinantā.

Minoriem, kas iepriekšējos determinantos piekārtoti ceturto stabiņu elementiem, ir kopīgs faktors

$$\begin{vmatrix} \bar{a}_1 & \bar{c}_1 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \bar{b}_2 & \bar{c}_2 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

kas nav nulle, ja pieņem, ka neviena skāla neizvēršas punktā. Ar šo faktoru drīkst nolīdzinājumus (32) un (32′) dalīt. Ja tā — pēc iepriekšējas determinantu izvirzīšanas — dara, dabū (32) un (32′) vietā šādas ļoti vienkāršas sakarības:

$$\left.\begin{aligned} a_1 b_2 + \bar{a}_1 \bar{b}_2 \gamma = 0, \\ \alpha a_1 \bar{b}_2 + \bar{a}_1 b_2 \beta = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (33)$$

Abi noteikumi būtu izpildīti, ja varētu pieņemt: 1) $a_1 = 0$, $\bar{a} = 0$ vai 2) $b_2 = 0$, $\bar{b}_2 = 0$. Bet šie pieņēmumi nav atļauti, jo tie izteic, ka skālai abi pamatpunkti ir kopā, t. i. skāla izvērtusies punktā. Var pierādīt vēl vairāk: ja koeficienti α, β, γ neviens neizzūd, kā tas jau pašā iesākumā postulēts, tad **neviena konstanta** a_1, $\bar{a}_1$, b_2, $\bar{b}_2$ nav nulle:

$$a_1 \neq 0, \quad \bar{a}_1 \neq 0, \quad b_2 \neq 0, \quad \bar{b}_2 \neq 0.$$

Ģeometriski tas apzīmē, ka neviens pirmo divu skālu pamatpunkts $(1, \bar{1};\ 2, \bar{2})$ nav atbalstu krustojumā, kur novietots koordinātu asu iesākums.

Patiešām, jā pieņem $a_1 = 0$, $\bar{a}_1 \neq 0$, no (33) seko: $\bar{a}_1 \bar{b}_2 \gamma = 0$, $\bar{a}_1 b_2 \beta = 0$, tā tad, ievērojot to, ka $\bar{a}_1 \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$, seko $b_2 = 0$, $\bar{b}_2 = 0$, t. i. pamatpunkti 2 un $\bar{2}$ ir savietoti, kas nav pieļauts. Līdzīgā kārtā var pārbaudīt pārējās konstantas $\bar{a}_1$, b_2, $\bar{b}_2$.

Saskaņā ar sacīto, noteikumos (33) neviens lielums nav nulle. No tā seko:

$$\frac{a_1}{\bar{a}_1} \cdot \frac{b_2}{\bar{b}_2} = -\gamma, \quad \frac{a_1}{\bar{a}_1} : \frac{b_2}{\bar{b}_2} = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots (34)$$

Tā tad:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{a_1}{\bar{a}_1}\right)^2 = \frac{\beta\gamma}{\alpha}, \quad \frac{a_1}{\bar{a}_1} = \frac{\pm\sqrt{\alpha\beta\gamma}}{\alpha} = \frac{k}{\alpha}; \\ \left(\frac{b_2}{\bar{b}_2}\right)^2 = \frac{\alpha\gamma}{\beta}, \quad \frac{b_2}{\bar{b}_2} = \frac{\mp\sqrt{\alpha\beta\gamma}}{\beta} = \frac{-k}{\beta}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (35)$$

$$(k = + \text{ vai } - \sqrt{\alpha\beta\gamma}).$$

Zīmes + un — jāņem tā, lai (35) saskan ar (34), tā tad, augšējā ar augšējo vai apakšējā ar apakšējo. k apzīmē pēc patikas vienu vai otru no $+\sqrt{\alpha\beta\gamma}$ un $-\sqrt{\alpha\beta\gamma}$. (**Divi atrisinājumi.**)

No (35) seko:

Ja reizinājums $\alpha\beta\gamma$ ir negatīvs ($\alpha\beta\gamma<0$), attiecības $a_1/\bar{a}_1$ un $b_2/\bar{b}_2$ top imāginaras, t. i. tādā gadījumā uzdoto nolīdzinājumu nemaz nevar attēlot nomogrammā, kas sastāv no taisnām skālām.

Ja sistēmas (I) un (II) izpilda noteikumus (32), (32') vai tiem līdzvērtīgos (33) vai (35), viens nolīdzinājums ikvienā sistēmā ir lieks. Atmetīsim pirmā sistēmā beidzamo, bet otrā — priekšpēdējo nolīdzinājumu. Pārējos var atrisināt attiecībā uz nezināmiem. Atrisinājumiem ir proporciju veids:

$$\left.\begin{aligned} \bar{a}_3:\bar{b}_3:\bar{c}_3:\sigma &= Ma_1\bar{a}_1:Nb_2\bar{b}_2:P:MN\bar{a}_1\bar{b}_2; \\ a_3:b_3:c_3:\alpha\sigma &= Ma_1\bar{a}_1:-Nb_2\bar{b}_2:Q:MN\bar{a}_1b_2. \end{aligned}\right\} \quad \ldots . \quad (36)$$

Še

$$M=\begin{vmatrix} \bar{b}_2 & \bar{c}_2 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \qquad P=\begin{vmatrix} \bar{a}_1c_2 & b_2\bar{c}_1 \\ a_1\bar{c}_2 & \bar{b}_2c_1 \end{vmatrix},$$

$$N=\begin{vmatrix} \bar{a}_1 & \bar{c}_1 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}, \qquad Q=\begin{vmatrix} a_1c_2 & b_2c_1 \\ \bar{a}_1\bar{c}_2 & \bar{b}_2\bar{c}_1 \end{vmatrix}.$$

Apskatot gadījumu, kad s k ā l u b e z g a l ī b a s p u n k t i i r g a l ī g ā a t s t a t u m ā ($\bar{c}_1 \neq 0$, $\bar{c}_2 \neq 0$, $\bar{c}_3 \neq 0$), pieņemsim apzīmējumus:

$$u_1=-\frac{c_1}{\bar{c}_1}, \quad u_2=-\frac{c_2}{\bar{c}_2}, \quad u_3=-\frac{c_3}{\bar{c}_3}. \quad \ldots\ldots (37)$$

Lielumi u_i nav neatkarīgi. Proporcijas (36) rāda, ka $c_3:\alpha\sigma = Q:MN\bar{a}_1b_2$ un $\bar{c}_3:\sigma=P:MN\bar{a}_1\bar{b}_2$.

Tā tad, ievērojot (35) un (37):

$$u_3=-\frac{c_3}{\bar{c}_3}=-\alpha\frac{\bar{b}_2}{b_2}\frac{Q}{P}=-\frac{\alpha u_1+\beta u_2}{u_1u_2+\gamma},$$

vai arī:

$$u_1u_2u_3+\alpha u_1+\beta u_2+\gamma u_3=0. \quad \ldots\ldots\ldots (38)$$

Šis iznākums radās P un Q vietā liekot to izteiksmes skālu konstantās, un attiecības P/Q skaitītāju un saucēju dalot ar bezgalības punktiem atbilstošo konstantu reizinājumu $\bar{a}_1\bar{c}_1\bar{b}_2\bar{c}_2$ ($\neq 0$).

Izlietājot (36) atrodam tālāk:

$$\left.\begin{aligned}\frac{a_3}{\bar{a}_3}&=\alpha\frac{a_3}{\alpha\sigma}:\frac{\bar{a}_3}{\sigma}=\alpha\frac{\bar{b}_2}{b_2}=-\frac{k}{\gamma};\\ \frac{b_3}{\bar{b}_3}&=\alpha\frac{b_3}{\alpha\sigma}:\frac{\bar{b}_3}{\sigma}=-\alpha\frac{\bar{b}_2}{b_2}=\frac{k}{\gamma}.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(39)$$

Beidzot:

$$\bar{a}_3:\bar{b}_3:\bar{c}_3=\left(\gamma-\frac{k}{\alpha}u_2\right)\frac{\bar{a}_1}{\bar{c}_1}:\left(\gamma+\frac{k}{\beta}u_1\right)\frac{\bar{b}_2}{\bar{c}_2}:(\gamma+u_1u_2),$$

$$a_3:b_3:c_3=\left(-\gamma+\frac{k}{\alpha}u_2\right)\frac{\bar{a}_1}{\bar{c}_1}:\left(\gamma+\frac{k}{\beta}u_1\right)\frac{\bar{b}_2}{\bar{c}_2}:\frac{k}{\alpha\beta}(\alpha u_1+\beta u_2).\quad .\ (40)$$

Šinīs proporcijās ieviešas bezgalības punktu $\bar{1}$ un $\bar{2}$ nehomogenās koordinātas:

$$\frac{\bar{a}_1}{\bar{c}_1}=a,\qquad \frac{\bar{b}_2}{\bar{c}_2}=b.$$

Uzrakstīsim arī trešam bezgalības punktam $\bar{3}$ tā nehomogenās koordinātas (c, d):

$$c=\frac{\bar{a}_3}{\bar{c}_3}=\frac{\gamma-\frac{k}{\alpha}u_2}{\gamma+u_1u_2}a,\quad d=\frac{\bar{b}_3}{\bar{c}_3}=\frac{\gamma+\frac{k}{\beta}u_1}{\gamma+u_1u_2}b.\ .\ .\ .\ (41)$$

Klusu ciešot pieņemts, ka $\gamma+u_1u_2 \neq 0$. Lai tas tā tiešām būtu, **izvēlot konstantas** u_1 **un** u_2 **jāraugās, lai** $u_1u_2 \neq -\gamma$.

Gala iznākumā mums ir šādas skālu pamatpunktu koordinātas:

$\bar{\imath}$	$\bar{a}_i$	$\bar{b}_i$	$\bar{c}_i$
$\bar{1}$	a	0	1
$\bar{2}$	0	b	1
$\bar{3}$	c	d	1

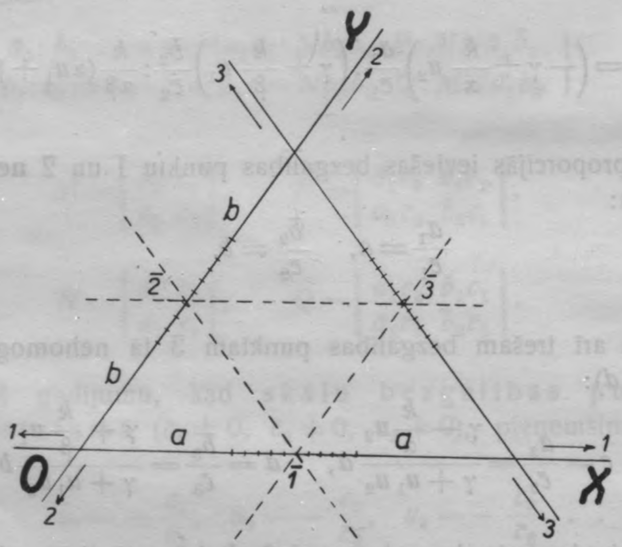
i	a_i	b_i	c_i
1	$\frac{k}{\alpha}a$	0	$-u_1$
2	0	$-\frac{k}{\beta}b$	$-u_2$
3	$-\frac{k}{\gamma}c$	$\frac{k}{\gamma}d$	$-u_3$

T a b u l u   v e i d o š a n a s   k ā r t ī b a:

a, b, u_1 un u_2 — izvēlēti patvaļīgi, tomēr tā, ka $u_1 u_2 + \gamma \neq 0$. u_3 seko no (38).

Izrēķinātas trešā bezgalības punkta koordinātas (c, d) ar formulām (41). $k = +\sqrt{\alpha\beta\gamma}$ vai $-\sqrt{\alpha\beta\gamma}$ (viena no šīm vērtībām).

Otra tabula piepildīta, pamatojoties uz sakarībām (35), (37) un (39).



44. attēls.

S k ā l u   n o l ī d z i n ā j u m i:

$$\left.\begin{array}{ll}
1\bar{1})\ x = a\,\dfrac{f_1 + \dfrac{k}{\alpha}}{f_1 - u_1}, & y = 0; \\[2ex]
2\bar{2})\ x = 0, & y = b\,\dfrac{f_2 - \dfrac{k}{\beta}}{f_2 - u_2}; \\[2ex]
3\bar{3})\ x = c\,\dfrac{f_3 - \dfrac{k}{\gamma}}{f_3 - u_3}, & y = d\,\dfrac{f_3 + \dfrac{k}{\gamma}}{f_3 - u_3}.
\end{array}\right\} \quad \ldots \ldots (42)$$

Nolīdzinājums (38) būs izpildīts, pieņemot $u_1 = u_2 = u_3 = 0$, vai arī, kas tam līdzvērtīgi, pieņemot visus $c_i = 0$. Ģeometriski tas nozīmē novietot visus nulles punktus bezgalībā. Šinī gadījumā saskaņā ar (41) $c = a$, $d = b$.

Skālu nolīdzinājumi:

$$\left.\begin{array}{lll} \bar{1}\bar{1})\ x = a\left(1 + \dfrac{k}{\alpha f_1}\right), & y = 0; \\ \bar{2}\bar{2})\ x = 0, & y = b\left(1 - \dfrac{k}{\beta f_2}\right); \\ \bar{3}\bar{3})\ x = a\left(1 - \dfrac{k}{\gamma f_3}\right), & y = b\left(1 + \dfrac{k}{\gamma f_3}\right). \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; (42')$$

Attēls 44. rāda nomogrammas schēmu. Nehomogenās koordinātas bezgalības punktiem: $\bar{1}\,(a, 0)$; $\bar{2}\,(0, b)$; $\bar{3}\,(a, b)$. Trešā atbalsta nogriežņi koordinātu asīm ir $2a$ un $2b$. Taisne $\bar{1}\bar{2}$ parallēla atbalstam $3\bar{3}$, tā tad, sastop bezgalībā punktu 3 (izlīdzinājums $\bar{1}\bar{2}3$); taisnes $\bar{1}\bar{3}$ un $\bar{2}\bar{3}$ parallēlas attiecīgi ordinātu un abscīzu asīm, tā tad, sastop bezgalībā nulles punktus 2 un 1 (izlīdzinājumi $\bar{1}2\bar{3}$ un $1\bar{2}\bar{3}$). Punkti 123 pieder bezgalīgi tālai taisnei un uzskatāmi par ceturto izlīdzinājumu.

16. Attēlojamības kritērijs.

Ikviena kollineāru punktu nomogramma, kas sastāv no 3 taisnām projektīvām skālām, attēlo sakarību, ko var izteikt šādā vispārīgā veidā:

$$A_0 f_1 f_2 f_3 + A_1 f_1 f_2 + A_2 f_1 f_3 + A_3 f_2 f_3 + A_4 f_1 + A_5 f_2 + A_6 f_3 + A_7 = 0, \quad (17)$$

kur visi A_i ir determinanti, kas veidoti no skālu pamatpunktu homogenām koordinātām, kā tas № 5. noskaidrots.

Apgriesto problēmu nevar ikreiz atrisināt. Ja uzdota formula

$$A f_1 f_2 f_3 + B_1 f_2 f_3 + B_2 f_3 f_1 + B_3 f_1 f_2 + C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_3 f_3 + D = 0, \quad (17')$$

un to grib attēlot nomogrammā, kas sastāv no taisnām skālām, tad izrādās, ka tas nav katrreiz iespējams. Tā, piemērā V, neraugoties uz samērā vienkāršo nolīdzinājuma veidu, attēlošana bija neiespējama, ja koeficientu reizinājums $\alpha\beta\gamma < 0$.

Ja uzdotais nolīdzinājums nav visai vienkāršs, tā attēlošana nomogrammā vienmēr prasa zināmas pūles. Lai tās nebūtu veltīgas, der jau iepriekš zināt, vai attēlošana vēlamā veidā ir vai nav iespējama. Vajadzīgs kritērijs, kas izšķiŗ jautājumu par uzdotā nolīdzinājuma attēlošanas iespējamību.

Tāds kritērijs pazīstams jau kopš 40 gadiem. *M. d'Ocagne* jau citētā darbā (Acta mathematica, t. XXI, 1897) pierāda, ka nolīdzinājumu (17′) nevar attēlot kollīneāru punktu nomogrammā, kas sastāv no taisnām skālām, ja šāda koeficientu funkcija (diskriminants)

$$\Delta = (B_1C_1 + B_2C_2 + B_3C_3 - AD)^2 - 4\,(B_1C_1B_2C_2 + B_2C_2B_3C_3 + \\ + B_3C_3B_1C_1 - AC_1C_2C_3 - B_1B_2B_3D)$$

ir negātiva, t. i. ja $\Delta < 0$. Citos gadījumos ($\Delta = 0$ vai $\Delta > 0$) tāda attēlošana iespējama. Ja $\Delta = 0$, visas trīs skālas krustojas kopīgā punktā; ja $\Delta > 0$, skālu atbalsti veido trīsstūri.

Parādīsim, kā d'Okaņa attēlojamības kritēriju dabū.

Ja uzdoto nolīdzinājumu (17′) var attēlot kollīneāru punktu nomogrammā, kuŗai visas skālas taisnas, tad tas tikai ar konstantu proporcionālitātes reizuli $\sigma\,(\neq 0)$ var atšķirties no (17). Salīdzinot koeficientus pie vienādām funkcijām dabūjam 8 nolīdzinājumus:

$$\text{(I)}\ \begin{cases} \Delta(\bar{1}2\bar{3}) = A_0 = A\sigma, \\ \Delta(\bar{1}2\bar{3}) = A_2 = B_2\sigma, \\ \Delta(1\bar{2}\bar{3}) = A_3 = B_1\sigma, \\ \Delta(12\bar{3}) = A_6 = C_3\sigma; \end{cases} \qquad \text{(II)}\ \begin{cases} \Delta(\bar{1}23) = A_1 = B_3\sigma, \\ \Delta(\bar{1}23) = A_4 = C_1\sigma, \\ \Delta(1\bar{2}3) = A_5 = C_2\sigma, \\ \Delta(123) = A_7 = D\sigma, \end{cases}$$

kuŗos ietilpst visi noteikumi, kas skālu pamatpunktu koordinātām jāizpilda.

Tāpat kā iepriekšējā piemērā V, izvēlēsim slīpleņķīgas koordinātu asis un pieņemsim tās par divu skālu atbalstiem. Homogeno koordinātu apzīmējumi paliek tie paši, kas bija pieminētā piemērā:

i	a_i	b_i	c_i
1	a_1	0	c_1
2	0	b_2	c_2
3	a_3	b_3	c_3

$\bar{i}$	$\bar{a}_i$	$\bar{b}_i$	$\bar{c}_i$
$\bar{1}$	$\bar{a}_1$	0	$\bar{c}_1$
$\bar{2}$	0	$\bar{b}_2$	$\bar{c}_2$
$\bar{3}$	$\bar{a}_3$	$\bar{b}_3$	$\bar{c}_3$

Pirmo divu skālu pamatpunktus nevienu nenovietosim kritiskā punktā (atbalstu krustojumā), t. i. pieņemsim, ka konstantas a_1, $\bar{a}_1$, b_2, $\bar{b}_2$

neviena nav nulle; citādā ziņā, kamēr vēl nav noskaidroti noteikumi, kas šo punktu izvēli ierobežo, uzskatīsim tos par patvaļīgi izvēlētiem un zināmiem. Trešai skālai pamatpunktu koordinātas jāatrod, atrisinot augšējās sistēmas (I) un (II) attiecībā uz nezināmiem: (I) $\bar{a}_3$, $\bar{b}_3$, $\bar{c}_3$, σ un (II) a_3, b_3, c_3, σ.

Sistēmas (I) un (II) atšķiras no līdzīgām sistēmām piemērā V ar labās puses locekļiem: (I) tur σ, 0, 0, $\gamma\sigma$, še — tai vietā $A\sigma$, $B_2\sigma$, $B_1\sigma$, $C_3\sigma$; (II) tur 0, $\alpha\sigma$, $\beta\sigma$, 0, še — tai vietā $B_3\sigma$, $C_1\sigma$, $C_2\sigma$, $D\sigma$. Kreisās puses neatšķiras nemaz, jo determinanti ir tie paši un veidojas no tām pašām pamatpunktu koordinātām. Tāpēc, izdarot norādīto apmaiņu, tur dabūtie iznākumi paliek arī še spēkā, proti:

Lai sistēmām (I) un (II), kas ir lineāras homogenas attiecībā uz nezināmiem, būtu netriviāli atrisinājumi, nepieciešamais un pietiekošais noteikums tam ir tas, ka:

$$\begin{vmatrix} \bar{b}_2\bar{c}_1 & \bar{a}_1\bar{c}_2 & \bar{a}_1\bar{b}_2 & A \\ b_2\bar{c}_1 & \bar{a}_1 c_2 & \bar{a}_1 b_2 & B_2 \\ \bar{b}_2 c_1 & a_1\bar{c}_2 & a_1\bar{b}_2 & B_1 \\ b_2 c_1 & a_1 c_2 & a_1 b_2 & C_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots (43)$$

un, atkārtojot pirmos 3 stabiņus:

$$\begin{vmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & B_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & C_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & C_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & D \end{vmatrix} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots (43')$$

Visiem minoriem, kas piekārtoti ceturtā stabiņa elementiem, ir kopīgs dalītājs. Ja ar to izdala, dabū (43) un (43′) vietā:

$$\left.\begin{aligned} Aa_1b_2 - B_2a_1\bar{b}_2 - B_1\bar{a}_1b_2 + C_3\bar{a}_1\bar{b}_2 = 0, \\ B_3a_1b_2 - C_1a_1\bar{b}_2 - C_1\bar{a}_1b_2 + D\bar{a}_1\bar{b}_2 = 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (44)$$

vai arī, izdalot abus nolīdzinājumus ar $\bar{a}_1\bar{b}_2\,(\neq 0)$ un pieņemot apzīmējumus $\xi = a_1/\bar{a}_1$, $\eta = b_2/\bar{b}_2$:

$$\begin{aligned} A\xi\eta - B_2\xi - B_1\eta + C_3 = 0, \\ B_3\xi\eta - C_1\xi - C_2\eta + D = 0. \end{aligned}$$

Tā tad:

$$\eta = \frac{B_2\xi - C_3}{A\xi - B_1} = \frac{C_1\xi - D}{B_3\xi - C_2}, \quad \ldots\ldots (44')$$

vai otrādi:

$$\xi = \frac{B_1\eta - C_3}{A\eta - B_2} = \frac{C_2\eta - D}{C_3\eta - C_1}. \quad \ldots\ldots (44'')$$

Secinājums: Pamatpunktu koordinātas a_1, $\bar{a}_1$, b_2, $\bar{b}_2$ nevar izvēlēt pilnīgi pēc patikas, jo to attiecības $\xi = a_1/\bar{a}_1$ un $\eta = b_2/\bar{b}_2$ atkarājas no uzdotā nolīdzinājuma koeficientiem.

Divas no uzskaitītām koordinātām var izvēlēt pilnīgi pēc patikas, piem., a_1 un b_2, bet pārējās $\bar{a}_1 = \xi a_1$, $\bar{b}_2 = \eta b_2$, kur ξ un η ir noteikti skaitļi, kas jāatrod no (44') vai (44''). Pēdējie ir kvadrātnolīdzinājumi.

$$(B_2B_3 - AC_1)\xi^2 - (B_3C_3 + B_2C_2 - B_1C_1 - AD)\xi + \\ + (C_2C_3 - B_1D) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

$$(B_1B_3 - AC_2)\eta^2 - (B_3C_3 - B_2C_2 + B_1C_1 - AD)\eta + \\ + (C_1C_3 - B_2D) = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (45')$$

Atrisinot pirmo dabū zem kvadrātsaknes izteiksmi (diskriminantu):

$$\Delta = (B_3C_3 + B_2C_2 - B_1C_1 - AD)^2 - 4(B_2B_3 - AC_1).(C_2C_3 - B_1D),$$

bet atrisinot otru:

$$\Delta = (B_3C_3 - B_2C_2 + B_1C_1 - AD)^2 - 4(B_1B_3 - AC_2).(C_1C_3 - B_2D),$$

un šīs izteiksmes neatšķiras viena no otras, kā arī neatšķiras īstenībā no tās, kas dota citētā d'Okaņa rakstā.

Ja $\Delta < 0$, attiecības $a_1/\bar{a}_1$ un $b_2/\bar{b}_2$ nav reālas, t. i. praktiski nav iespējams izvēlēt pirmo divu skālu pamatpunktus tā, kā to prasa attēlojamais nolīdzinājums. Nomogrammas trīs taisnu skālu veidā šim nolīdzinājumam nav.

Ja $\Delta = 0$ vai $\Delta > 0$, vienas skālas pamatpunktus pieņem patvaļīgi, otrās — apleš no (44') (44''), trešās — dabū atrisinot sistēmas (I) un (II)

Iesniegts fakultātei 1937. g. 10. decembrī.

Les nomogrammes d'alignement à trois échelles projectives

par le priv.-doc. *Kārlis Zalts.*

Introduction.

Dans les recherches sur la représentation nomographique des équations on peut faire appel à deux méthodes différentes. La première méthode consiste à choisir les éléments d'un nomogramme, à étudier l'équation représentée par celui-ci et à en déduire des règles applicables dans la construction des nomogrammes. La seconde méthode part de l'équation donnée et s'occupe de la mettre sous une forme telle que les éléments nécéssaires pour l'établissement du nomogramme correspondant soient évidents. La seconde méthode traîte le problème tel qu'il se présente dans les applications; on peut l'appeller méthode directe.

Le problème de la représentation des équations par les nomogrammes à points alignés dans le cas de trois échelles rectilignes est complètement résolu depuis longtemps par la méthode directe dans un mémoire de *M. d'Ocagne* (publié dans les Acta mathematica, t. 21, 1897). Après dix années ce savant a traîté le même problème sous un autre point de vue, sa théorie des valeurs critiques lui permettant d'introduire dans la discussion algébrique de notables simplifications (Bulletin de la Société Mathématique de France, t. 35, 1907).

Dans ce qui va suivre nous nous proposons d'établir un nouveau principe que l'on peut appliquer à la construction des nomogrammes constitués d'échelles rectilignes. Le principe s'appuie sur la notion des points fondamentaux de l'échelle, pour lesquels la fonction qui définit l'échelle devient zéro ou l'infini.

Les idées que nous allons résumer étaient exposées pour la première fois en 1926 dans un manuscrit intitulé „Nomogrammes à trois échelles rectilignes" et présenté pro venia legendi à la Faculté du Génie civil de l'Université de Lettonie.

1. Notion de l'échelle projective. Points fondamentaux.

Soient (x, y) les coordonnées cartésiennes inhomogènes et $f(z)$ une fonction du paramètre réel z, supposée continue et uniforme au moins dans les intervalles que nous avons à considérer. Les équations:

$$x = \frac{\bar{a}f(z)+a}{\bar{c}f(z)+c}, \quad y = \frac{\bar{b}f(z)+b}{\bar{c}f(z)+c} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

définissent une échelle, dite projective de $f(z)$, pourvu que la matrice des constantes

$$\left\| \begin{matrix} \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \\ a & b & c \end{matrix} \right\|$$

soit du deuxième rang.

L'échelle définie par (1) a pour support une droite dont on déduit facilement l'équation en éliminant le paramètre z entre les équations (1). La droite passe par deux points remarquables appelés points fondamentaux de l'échelle projective et que l'on définit en coordonnées cartésiennes homogènes par les nombres $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ (point de l'infini) et a, b, c (point de zéro).

Les termes sont justifiés par le fait que l'on obtient les coordonnées inhomogènes de ces points lorsque dans (1) la fonction $f(z)$ devient infinie ou disparaît.

Le point de l'unité $(\bar{a}+a, \bar{b}+b, \bar{c}+c)$ divise la distance entre le point de l'infini et celui du zéro dans le rapport $c:\bar{c}$.

2. Trois échelles projectives. Conventions.

Soient données les équations:

$$x_i = \frac{\bar{a}_i f_i + a_i}{\bar{c}_i f_i + c_i}, \quad y_i = \frac{\bar{b}_i f_i + b_i}{\bar{c}_i f_i + c_i} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

définissant trois échelles projectives $(i = 1, 2, 3)$. Les fonctions f_i sont trois fonctions des paramètres $z_i : f_i = f_i(z_i)$. A propos de ces fonctions et des constantes $\bar{a}_i, a_i, \ldots \bar{c}_i, c_i$ les remarques faites au commencement du numéro précédent restent en vigueur.

Considérons l'echelle cotée de z_i; désignons ses points principaux par i (point de zéro) et $\bar{\imath}$ (point de l'infini). En tout nous avons trois couples de points fondamentaux, dont voici le tableau complet des coordonnées homogènes:

$$\left.\begin{array}{lll}
\text{point } \bar{1} & \ldots\ldots & \bar{a}_1\ \bar{b}_1\ \bar{c}_1 \\
\text{,, } 1 & \ldots\ldots & a_1\ b_1\ c_1 \\
\text{,, } \bar{2} & \ldots\ldots & \bar{a}_2\ \bar{b}_2\ \bar{c}_2 \\
\text{,, } 2 & \ldots\ldots & a_2\ b_2\ c_2 \\
\text{,, } \bar{3} & \ldots\ldots & \bar{a}_3\ \bar{b}_3\ \bar{c}_3 \\
\text{,, } 3 & \ldots\ldots & a_3\ b_3\ c_3
\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Convenons de dénoter par $\Delta\,(ijk)$ le déterminant du troisième ordre que l'on compose de lignes ijk du tableau ci-dessus, en les écrivant dans l'ordre indiqué par ijk. Par exemple:

$$\Delta\,(\bar{1}\bar{2}\bar{3}) = \begin{vmatrix} \bar{a}_1 & \bar{b}_1 & \bar{c}_1 \\ \bar{a}_2 & \bar{b}_2 & \bar{c}_2 \\ \bar{a}_3 & \bar{b}_3 & \bar{c}_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta\,(\bar{1}23) = \begin{vmatrix} \bar{a}_1 & \bar{b}_1 & \bar{c}_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

3. Valeurs critiques.

On appelle, d'après *M. d'Ocagne,* valeurs critiques des variables servant à graduer les échelles d'un nomogramme à points alignés les valeurs que ces variables prennent aux points d'intersection des échelles et l'on étend cette désignation aux variables correspondantes des fonctions de ces variables; les points de rencontre des échelles sont nommés points critiques.

Adoptons la notation $(f_i)_k$ pour la valeur de la fonction f_i au point de rencontre des échelles, cotées de z_i et z_k. Il s'ensuit:

$$(f_i)_k = \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_k & b_k & c_k \\ \bar{a}_k & \bar{b}_k & \bar{c}_k \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \bar{a}_i & \bar{b}_i & \bar{c}_i \\ \bar{a}_k & \bar{b}_k & \bar{c}_k \\ a_k & b_k & c_k \end{vmatrix} = \frac{\Delta\,(ik\bar{k})}{\Delta\,(\bar{i}\bar{k}k)} \ldots\ldots \quad (4)$$

En cas des échelles concourantes les deux valeurs critiques de chaque fonction deviennent identiques, ce qui permet d'omettre ici le deuxième indice de la notation $(f_i)_k$. On obtient, d'après (4), les expressions suivantes pour les valeurs critiques:

$$\left.\begin{array}{l}
(f_1) = \dfrac{\Delta\,(12\bar{2})}{\Delta\,(\bar{1}\bar{2}2)} = \dfrac{\Delta\,(13\bar{3})}{\Delta\,(\bar{1}\bar{3}3)}, \\[2ex]
(f_2) = \dfrac{\Delta\,(23\bar{3})}{\Delta\,(\bar{2}\bar{3}3)} = \dfrac{\Delta\,(21\bar{1})}{\Delta\,(\bar{2}\bar{1}1)}, \\[2ex]
(f_3) = \dfrac{\Delta\,(31\bar{1})}{\Delta\,(\bar{3}\bar{1}1)} = \dfrac{\Delta\,(32\bar{2})}{\Delta\,(\bar{3}\bar{2}2)}.
\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

4. L'équation générale, représentée par un nomogramme à trois échelles projectives.

Étant données trois échelles projectives (2), si l'on considère les trois cotes z_1, z_2, z_3, leurs points correspondants constituant un alignement, celles-ci satisfont à l'équation:

$$\begin{vmatrix} \bar{a}_1 f_1 + a_1 & \bar{b}_1 f_1 + b_1 & \bar{c}_1 f_1 + c_1 \\ \bar{a}_2 f_2 + a_2 & \bar{b}_2 f_2 + b_2 & \bar{c}_2 f_2 + c_2 \\ \bar{a}_3 f_3 + a_3 & \bar{b}_3 f_3 + b_3 & \bar{c}_3 f_3 + c_3 \end{vmatrix} = 0 \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

En augmentant l'ordre du déterminant, on obtient facilement:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \bar{a}_1 & \bar{b}_1 & \bar{c}_1 \\ f_1 & 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & -1 & 0 & \bar{a}_2 & \bar{b}_2 & \bar{c}_2 \\ 0 & f_2 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & -1 & \bar{a}_3 & \bar{b}_3 & \bar{c}_3 \\ 0 & 0 & f_3 & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

d'où il suit, en développant le déterminant par la règle de Laplace ou autrement:

$$\Delta(\bar{1}\bar{2}\bar{3}) f_1 f_2 f_3 + \Delta(\bar{1}\bar{2}3) f_1 f_2 + \Delta(\bar{1}2\bar{3}) f_1 f_3 + \Delta(1\bar{2}\bar{3}) f_2 f_3 +$$
$$+ \Delta(\bar{1}23) f_1 + \Delta(1\bar{2}3) f_2 + \Delta(12\bar{3}) f_3 + \Delta(123) = 0, \; . \; . \; . \; (7)$$

les coefficients $\Delta(ijk)$ étant formés de coordonnées cartésiennes homogènes des points fondamentaux ijk d'après la règle exposée dans le numéro deux, voir tableau (3).

Dans ce qui va suivre on aura également besoin d'une notation plus concise, permettant de spécifier par un seul indice le coefficient dont il s'agit. Désignons les déterminants $\Delta(ijk)$, dans l'ordre dans lequel ils sont écrits dans l'équation (7), par A_0, A_1, ... A_7:

$$\begin{matrix} \Delta(\bar{1}\bar{2}\bar{3}) = A_0 & \Delta(\bar{1}23) = A_4 \\ \Delta(\bar{1}\bar{2}3) = A_1 & \Delta(1\bar{2}3) = A_5 \\ \Delta(\bar{1}2\bar{3}) = A_2 & \Delta(12\bar{3}) = A_6 \\ \Delta(1\bar{2}\bar{3}) = A_3 & \Delta(123) = A_7 \end{matrix} \; . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

L'équation générale, représentée par un nomogramme à trois échelles projectives (2), revêt alors la forme:

$$A_0 f_1 f_2 f_3 + A_1 f_1 f_2 + A_2 f_1 f_3 + A_3 f_2 f_3 +$$
$$+ A_4 f_1 + A_5 f_2 + A_6 f_3 + A_7 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

5. La disparition des coefficients et son interprétation géométrique.

Il peut arriver que trois points fondamentaux, se rapportant tous aux échelles différentes, constituent un alignement. Supposons, par exemple, que les trois points de zéro (123) sont alignés. Dans ce cas le déterminant des coordonnées s'annule et l'on a:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta(123) = 0, \quad A_7 = 0.$$

C'est-à-dire l'alignement des trois points de zéro (123) fait disparaître dans (7), (9) le dernier coefficient. De même, on voit immédiatement que l'alignement des trois points de l'infini ($\overline{1}\overline{2}\overline{3}$) fait disparaître le premier coefficient, ayant dans (7) l'indice $\overline{1}\overline{2}\overline{3}$.[1]

En général, l'alignement des trois points fondamentaux ijk fait s'annuler dans (7) le coefficient, affecté de l'indice ijk. ($i = 1, \overline{1}$; $j = 2, \overline{2}$; $k = 3, \overline{3}$.)

6. L'étude des cas particuliers.

La règle que nous venons d'énoncer permet d'étudier la correspondance entre la forme particulière de l'équation (9) et la disposition relative des points fondamentaux des échelles (2).

Dans cette étude il est avantageux d'adopter une notation généralisée des points fondamentaux. Désignons par i l'un des points 1 ou $\overline{1}$ et par $\overline{i}$ l'autre, la différence entre une lettre ordinaire et la même lettre surmontée d'un trait servant seulement à distinguer les deux points fondamentaux d'une même échelle; également, soit $j, \overline{j} = 2, \overline{2}$ et $k, \overline{k} = 3, \overline{3}$.

A) Deux coefficients s'annulent.

Pour que deux coefficients A_λ et A_μ soient égaux à zéro (28 cas), il faut et il suffit que les points fondamentaux forment deux alignements tels que les trois points de chaque alignement appartiennent à des échelles différentes.

I) Les alignements n'ont aucun point fondamental commun. Le nombre total des points fondamentaux formant les alignements est de six. Les alignements sont de la forme générale: ijk et $\overline{i}\overline{j}\overline{k}$. (Voir fig. 10 du texte letton) Ces alignements font évanouir dans l'équation (7) ou (9) deux coefficients équidistants des extrémités du premier membre.

Divisons la circonférence d'un cercle en 8 segments égaux et marquons les points de division par $A_0 A_1 \ldots A_7$. En menant les cordes $A_\lambda A_\mu$ $(\lambda + \mu = 7)$ on obtient le diagramme des coefficients qui disparaissent simultanément. (Voir fig. 22.)

II) Les alignements ont un point fondamental commun. Le nombre total des points fondamentaux formant les alignements est de cinq. Les alignements sont de la forme générale: a) ijk et $\bar{i}\bar{j}k$, b) ijk et $\bar{i}j\bar{k}$, c) ijk et $i\bar{j}\bar{k}$; voir la fig. 11.

Ces alignements font évanouir dans l'équation (9) deux coefficients, à savoir, ceux dont les indices interviennent dans l'une ou l'autre des combinaisons 0456 ou 1237. (Fig. 23.)

III) Les alignements ont deux points fondamentaux communs. Le nombre total des points fondamentaux formant les alignements est de quatre. Les alignements sont de la forme générale: a) ijk et $\bar{i}jk$, b) ijk et $\bar{i}\bar{j}k$, c) ijk et $ij\bar{k}$; leur réalisation est possible de deux manières différentes. (Voir les fig. 2– 3.)

Ces alignements font évanouir dans (9) deux coefficients A_λ et A_μ dont l'indice $\lambda = 1, 2, 3, 7$ et $\mu = 0, 4, 5, 6$ $(\lambda + \mu \neq 7)$. (Fig. 24.)

B) Trois coefficients s'annulent.

I) Les points fondamentaux ne coïncident pas avec les points critiques. Les alignements sont de la forme générale: $\bar{i}jk$, $i\bar{j}k$, $ij\bar{k}$. (Fig. 12.) Ils font disparaître dans (9) trois coefficients dont les indices figurent tous dans l'une ou dans l'autre des combinaisons 0456 et 1237.

La fig. 23 résume ce résultat sous la forme graphique; les coefficients qui disparaissent simultanément sont indiqués par les lettres A_λ, A_μ, A_ν aux sommets d'un triangle.

II) Deux points fondamentaux coïncident avec des points critiques. Les alignements sont de la forme générale: a) ijk, $\bar{i}jk$, $\bar{i}j\bar{k}$; b) ijk, $i\bar{j}k$, $\bar{i}\bar{j}k$; c) ijk, $ij\bar{k}$, $\bar{i}\bar{j}k$. Les points fondamentaux a) j, k; b) i, k; c) i, j coïncident avec les points critiques, ce qui est possible de deux manières différentes (fig. 13—14.) Les alignements de cette forme font évanouir dans (9) trois coefficients dont les indices interviennent tous dans l'une ou l'autre des combinaisons suivantes: a) 1256 ou 0347; b) 1346 ou 0257; c) 2345 ou 0167.

Les figures 31—33 représentent ces résultats sous la forma graphique; les points A_λ, A_μ, A_ν qui sont disposés aux sommets d'un triangle indiquent les coefficients $A_\lambda = A_\mu = A_\nu = 0$.

III) Trois points fondamentaux coïncident avec deux points critiques. Les alignements sont de la forme générale: a) ijk, $i\bar{j}k$, $ij\bar{k}$; b) ijk, $\bar{i}jk$, $ij\bar{k}$; c) ijk, $\bar{i}jk$, $i\bar{j}k$. (Fig. 15.) Ces alignements font disparaître dans (9) trois coefficients dont les indices interviennent tous dans les combinaisons: a) 0124 ou 3567, b) 0135 ou 2467, c) 0236 ou 1457. Les figures 34—36 représentent ces résultats sous la forme graphique.

C) Quatre coefficients s'annulent.

I) Les points fondamentaux ne coïncident pas avec les points critiques. Les alignements sont de la forme générale: ijk, $\bar{i}\bar{j}k$, $\bar{i}j\bar{k}$, $i\bar{j}\bar{k}$. (Fig. 16.) Ils font disparaître les coefficients ayant des indices 1237 et 0456 (deux cas seulement).

II) Trois points fondamentaux coïncident avec deux points critiques. Les alignements sont de la forme générale: a) ijk, $ij\bar{k}$, $i\bar{j}k$, $\bar{i}\bar{j}\bar{k}$; b) ijk, $ij\bar{k}$, $\bar{i}jk$, $\bar{i}\bar{j}\bar{k}$; c) ijk, $i\bar{j}k$, $\bar{i}jk$, $\bar{i}\bar{j}\bar{k}$. (Fig. 8—9.) Ils font disparaître dans (9) quatre coefficients; les indices de ceux-ci s'obtiennent en remplaçant un élément dans une des deux combinaisons suivantes

$$\text{a)}\ \frac{1237}{5604} \qquad \text{b)}\ \frac{1237}{4065} \qquad \text{c)}\ \frac{1237}{0456}$$

par l'élément correspondant de la seconde combinaison. (Voir tableau (*C*), p. 92 du texte letton.)

III) Quatre points fondamentaux qui appartiennent à trois échelles coïncident avec des points critiques. La forme générale des alignements: a) ijk, $\bar{i}jk$, $\bar{i}j\bar{k}$, $\bar{i}\bar{j}\bar{k}$; b) ijk, $i\bar{j}k$, $\bar{i}\bar{j}k$, $\bar{i}\bar{j}\bar{k}$; c) ijk, $\bar{i}jk$, $\bar{i}\bar{j}k$, $\bar{i}\bar{j}\bar{k}$. (Fig. 17—18.) Les indices des coefficients qui disparaissent s'obtiennent en remplaçant un élément dans une des deux combinaisons suivantes

$$\text{a)}\ \frac{1256}{7340} \qquad \text{b)}\ \frac{1346}{2705} \qquad \text{c)}\ \frac{2345}{7160}$$

par l'élément correspondant de la seconde combinaison.

IV) Quatre points fondamentaux qui appartiennent à deux échelles coïncident avec des points critiques. (Fig. 19.) On peut faire disparaître de cette manière six combinaisons des $A\lambda$, déterminées par les indices

$$\text{a)}\ \frac{1256}{0347} \qquad \text{b)}\ \frac{1346}{0257} \qquad \text{c)}\ \frac{2345}{0167}$$

V) Trois points fondamentaux coincïdent. Ce n'est possible, que si les supports des échelles sont concourants. On obtient les indices des coefficients qui s'annulent simultanément en remplaçant dans 1237 un élément quelconque par l'élément correspondant de 6540 ou réciproquement.

D. Cinq coefficients s'annulent.

Des 8 coefficients A_λ $(\lambda = 0, 1, \ldots 7)$, en les prenant cinq à cinq, on peut former 56 combinaisons différentes, dont 32 cas seulement ont de l'importance pratique.

I) Les échelles ne sont pas concourantes. Tous les points fondamentaux, à l'exception d'un, coïncident avec des points critiques. (Fig. 20.) Dans l'équation (9) cinq coefficients disparaissent, et l'on obtient leurs indices dans toutes les combinaisons possibles par la règle suivante:

On prend les combinaisons a) 1256 et 0347, b) 1346 et 0257, c) 2345 et 0167 et l'on ajoute les numéros 0, 1, ... 7 qui n'y figurent pas.

Les fig. 31—33 représentent les cas a) b) c) sous la forme graphique; les points A_λ, A_μ, A_ν dans les sommets d'un triangle indiquent les coefficients qui ne disparaissent pas.

II) Les échelles sont concourantes. Trois points fondamentaux coïncident dans le point commun des échelles; les trois autres points son alignés. (Fig. 21.) On obtient les indices des cinq coefficients qui disparaissent simultanément en ajoutant à 0456 et 1237 les numéros 0, 1, ... 7 qui n'y figurent pas. La fig. 23 représente le résultat obtenu sous la forme graphique, les points A_λ, A_μ, A_ν aux sommets d'un triangle indiquant les coefficients qui ne disparaissent pas simultanément.

E. Six coefficients s'annulent.

Six alignements étant nécessaires tous les points fondamentaux coïncident avec les points critiques. Les coefficients qui ne s'annulent pas sont équidistants des extrémités du premier membre de l'equation (9). Voir la fig. 22.

Remarque.

La deuxième partie du mémoire (№ 11—16 du texte letton) contient les applications de la notion des points fondamentaux aux cas canoniques des équations. Les règles généralement connues y sont déduites pour être suivies dans la construction pratique des nomogrammes.

SATURA RĀDĪTĀJS.

LATVIJAS ŪNIVERSITĀTES RAKSTI
ACTA UNIVERSITATIS LATVIENSIS

INŽENIERZINĀTŅU FAKULTĀTES SERIJA II. 5.

Mainīgo šķiršanas problēma nomografijā.

Privātdocents *Kārlis Zalts.*

Ievads.

1. Nomografija un tās pamatuzdevums. Nomografija ir mācība par matēmatisku sakarību attēlošanu grafiskā veidā, turklāt sakarības attēlam (grafiskai tabulai jeb nomogrammai) jābūt derīgam ātrai skaitliskai rēķināšanai.

Vispārīgais uzdevums, kas nomografijai jāatrisina, ir šāds: zinot likumu (gr. nomos = likums) jeb sakarību, kas saista mainīgos lielumus $z_1, z_2, \ldots z_n$:

$$F(z_1, z_2, \ldots z_n) = 0, \quad \ldots \ldots \ldots (1)$$

gādāt palīglīdzekli viena mainīgā vērtību nolasīšanai, kad pārējo mainīgo vērtības uzdotas.

Pietiek aprobežoties ar gadījumu, kad mainīgo skaits $n = 3$. Ja mainīgo skaits $n > 3$, kā tas bieži gadās, tad uzdoto sakarību (1), pieņemot pietiekošu, pēc iespējas mazu skaitu palīglielumu, cenšas pārveidot sistēmā tā, ka katrā sistēmas nolīdzinājumā darīšana tikai ar 3 mainīgiem lielumiem.

Piemēram, ja $n = 4$ un uzdoto sakarību var uzrakstīt šādā veidā: $F(z_1, z_2) = G(z_3, z_4)$, pieņem palīglielumu, kas apzīmē abu funkciju kopīgo vērtību, un uzdoto sakarību aizvieto ar līdzvērtīgu sistēmu

$$F(z_1, z_2) = u, \quad G(z_3, z_4) = u,$$

kur katrā nolīdzinājumā tikai 3 mainīgie.

Ja $n = 5$ un uzdotai sakarībai ir šāds veids:

$$F[f(z_1, z_2), \varphi(z_3, z_4), z_5] = 0,$$

to aizvieto ar ekvivalentu sistēmu:

$$f(z_1, z_2) = u, \quad \varphi(z_3, z_4) = v, \quad F(u, v, z_5) = 0,$$

kur katrā nolīdzinājumā 3 mainīgie.

To ievērojot, turpinājumā nodarbosimies tikai ar to gadījumu, kad jāattēlo nomogrammā nolīdzinājums, kas saista 3 mainīgus.

2. Saīsināts funkciju rakstības veids. Jēdziens par nolīdzinājumu kārtu. Lai iegūtu viegli pārredzamas formulas, nomografijā bieži atmet mainīgo apzīmējumus, aizvietojot tos ar funkcijas simbolam piespraustu indeku. Piem., f_1 apzīmē funkciju, kas atkarājas no z_1, f_{23} apzīmē funkciju, kas atkarājas no z_2 un z_3 un t. t.

Nolīdzinājumu $F_{12\ldots m} = 0$ sauc par nomografiskā ziņā racionālu, ja to var pārrakstīt šādi:

$$f_1 f_2 \ldots f_m + g_1 g_2 \ldots g_m + \ldots + l_1 l_2 \ldots l_m = 0,$$

un to sauc par nomografiski sakārtotu attiecībā uz mainīgo z_1, ja to var rakstīt

$$f_1 \,.\, F_{23\ldots m} + g_1 \,.\, G_{23\ldots m} + \ldots l_1 \,.\, L_{23\ldots m} = 0,$$

kur funkcijas $f_1, g_1, \ldots l_1$ — lineāri neatkarīgas. Ja šādi sakārtotam nolīdzinājumam ir $n_1 + 1$ locekļu, saka, ka tas ir n_1-ās kārtas (fr. ordre) attiecībā uz mainīgo z_1.

Ja tā pat noteic nolīdzinājuma kārtu n_i attiecībā uz visiem mainīgiem z_i, tad tā kopīgā (jeb totālā) nomografiskā kārta $n = \Sigma n_i$.

Kārtas jēdzienu nomografijā iesāka lietāt R. Soreau memuārā „Nouveaux types d'abaques" (1906.).

Nolīdzinājuma kopīgā kārta raksturo funkciju minimālo skaitu nolīdzinājumā un var mainīties, kad nolīdzinājumu pārveido. Piem., sakarību

$$f_1 f_2 + \sqrt{1 + f_1^2} \cdot \sqrt{1 + f_2^2} = f_3$$

var pārveidot šādā:

$$\log(f_1 + \sqrt{1 + f_1^2}) + \log(f_2 + \sqrt{1 + f_2^2}) = \log(f_3 + \sqrt{f_3^2 + 1}\,.$$

Pirmais veids ir 5-ās, bet otrais — 3-ās kārtas.

3. Skāla. Kad skālas atbalsts ir taisne? Uzdotas sakarības grafiskam attēlam var būt dažādi veidi, no kuŗiem vismodernākais un praktiskā ziņā vissvarīgākais ir tas, kas sastāv no skālām.

Vispārīgi, skāla ir skaitlisku vērtību piekārtojums līnijas punktiem. Tādu piekārtojumu gādā līknes nolīdzinājuma parametriskais veids

$$x = \frac{f(t)}{h(t)}, \quad y = \frac{g(t)}{h(t)}, \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

kur x, y— Dekarta koordinātas, ja konstruējot līkni iekārto tā, ka ikvienā līknes punktā var nolasīt attiecīgo paramētra t vērtību. To sasniedz apzīmējot ar šķērsšvīkām punktus uz līknes, kas atbilst apaļām aritmētiskā progresijā pieaugošām parametra vērtībām, un pierakstot šīs vērtības pietiekošam šķērsšvīku skaitam.

Šķērsšvīku kopumu apzīmē par skālas iedalījumu, ar iedalījuma un uzrakstu palīdzību līnijas punktiem piekārtotos skaitļus — par skālas atzīmēm, bet pašu līniju — par skālas atbalstu.

Teōrēma. Nepieciešamais un pietiekošais noteikums tam, ka skāla (2) taisna, ir tas, ka identiski

$$af(t) + bg(t) + ch(t) = 0, \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

kur konstantas a, b, c visas reizē nav nulles, t. i. funkcijām $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ jābūt lineāri atkarīgām.

Attiecībā uz skālu (2) pieņemsim, ka tā tiešām ir, kā noteikts līnijas punktu kopums, tā tad nedeģenerē punktā un neaiziet bezgalībā. Tā tad, katrā ziņā $h(t) \neq 0$, un attiecības $f(t) : h(t)$ un $g(t) : h(t)$ abas nav konstantas reizē. To pieņemot, viegli seko teōrēmas pierādījums.

Ja skāla (2) ir taisna, tās punktu koordinātas saista lineāra sakarība:

$$ax + bx + c = 0. \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Ievietojot še x un y vietā to izteiksmes (2) un pareizinot ar $h(t)$ dabū (3).

Otrādi, ja noteikums (3) izpildīts, skāla ir taisna. Vienādību (3) izdalām ar $h(t) \neq 0$. Ievērojot (2) dabū lineāru sakarību starp koordinātām, t. i. seko (4).

Atvasinām (3) divreiz:

$$af'(t) + bg'(t) + ch'(t) = 0,$$
$$af''(t) + bg''(t) + ch''(t) = 0.$$

Šie nolīdzinājumi ir homogēni un lineāri attiecībā uz a, b, c. Kopā ar (3) tie veido sistēmu, kuŗai ir netriviāls atrisinājums, jo a, b, c visi reizē nav nulles. Tā tad:

$$\begin{vmatrix} f(t) & g(t) & h(t) \\ f'(t) & g'(t) & h'(t) \\ f''(t) & g''(t) & h''(t) \end{vmatrix} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Secinājums. Nepieciešamais un pietiekošais noteikums tam, ka skāla (2) taisna, ir tas, ka no funkcijām $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ veidotais Vronska determinants ir vienlīdzīgs nullei.

4. Trīs skālas, kā kollīneāru punktu nomogramma. Pieņemsim, ka aprakstītā kārtā konstruētas 3 skālas ($i = 1, 2, 3$):

$$x_i = \frac{f_i(z_i)}{h_i(z_i)}, \quad y_i = \frac{g_i(z_i)}{h_i(z_i)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Apskatīsim skālu atzīmes z_1, z_2, z_3 punktos, kas ir uz vienas taisnes. (Kollīneāru punktu princips.)

Ja punkti (x_i, y_i) ($i = 1, 2, 3$) ir uz vienas taisnes, tad

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ievietojot šo Dekarta koordinātu vietā to izteiksmes (6), dabū sakarību starp skālu atzīmēm punktos (x_i, y_i):

$$\begin{vmatrix} \frac{f_1}{h_1} & \frac{g_1}{h_1} & 1 \\ \frac{f_2}{h_2} & \frac{g_2}{h_2} & 1 \\ \frac{f_3}{h_3} & \frac{g_3}{h_3} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

vai arī:

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

kur determinantu raksturo tas, ka mainīgie atšķirti katrs savā rindā.

Izvirzot determinantu dabū (7) vietā

$$F_{123} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Tā tad, atzīmes, ko nolasa skālām (6) vienas taisnes punktos, atbilst nolīdzinājumam (7) jeb (8). Šīs skālas var lietāt nolīdzinājuma (8) grafiskai atrisināšanai: zinot z_1 un z_2 sameklē punktus uz attiecīgām skālām, kuŗiem atbilst tādas atzīmes, savieno šos punktus ar taisni un raugās, kur taisne krusto trešo skālu. Krustpunktā nolasa mainīgā z_3 vērtību.

5. Nomogrammas suga. Par nomogrammas sugu (fr. genre, angl. genus) sauc līko skālu skaitu nomogrammā. Ja nomogrammai visas skālas taisnas, saka, ka tā ir 0-ās sugas. Ja viena skāla ir līka, pārējās — taisnas, nomogrammu sauc par pirmās sugas. Vispārīgi, ja nomogrammai p skālas ir līkas, pārējās — taisnas, to sauc par p-ās sugas.

Nomogramma, kas sastāv no 3 līkām skālām ($p = 3$), attēlo nolīdzinājumu

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0,$$

kur visās rindās funkcijas lineāri neatkarīgas. Tāds nolīdzinājums attiecībā pret kādu vienu mainīgo ir 2-ās kārtas, bet tā kopīgā kārta $n = 6$. (Sk. nolīdzinājuma nomografiskās kārtas definīciju.) Tā tad, šinī gadījumā $n = p + 3$.

Ja kādā vienā rindā funkcijas f, g, h ir lineāri atkarīgas, nomogrammas suga pamazinās par 1 (jo viena skāla tad ir taisna), bet par tikpat pamazinās arī nolīdzinājuma kārta. Ja $p = 0$ (visas skālas taisnas), $n = 3$.

Vispārīgi, p-ās sugas nomogrammai atbilst nolīdzinājums, kuŗa nomografiskā kārta $n = p + 3$.

6. Vispārīgā homografiskā transformācija. Trīs skālas, ko definē nolīdzinājumi (6), ir kollineāru punktu nomogramma, kas attēlo sakarību (7) jeb (8). Parādīsim, ka minētās trīs skālas nav vienīgās derīgās; gluži otrādi, to pašu sakarību var attēlot ar skālu trijotnēm bezgala dažādos citos veidos.

No uzdotām funkcijām f_i, g_i, h_i ($i = 1, 2, 3$) lineāri sakombinēsim 9 citas:

$$\begin{aligned} F_i &= a_1 f_i + b_1 g_i + c_1 h_i, \\ G_i &= a_2 f_i + b_2 g_i + c_2 h_i, \quad (i = 1, 2, 3) \quad \ldots\ldots (9) \\ H_i &= a_3 f_i + b_3 g_i + c_3 h_i, \end{aligned}$$

kur a_i, b_i, c_i — patvaļīgi izvēlētas konstantas, kas ierobežotas vienīgi ar to noteikumu, ka no tām veidotais determinants nav nulle:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Ievērojot lielo nenoteiktību, kāda pieļauta konstantu a_i, b_i, c_i izvēlē, var ļoti dažādi izveidot funkcijas (9). Bet skālas

$$x_i = \frac{F_i}{H_i}, \quad y_i = \frac{G_i}{H_i}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

kā kollīneāru punktu nomogramma attēlo sakarību

$$\begin{vmatrix} F_1 & G_1 & H_1 \\ F_2 & G_2 & H_2 \\ F_3 & G_3 & H_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 f_1 + b_1 g_1 + c_1 h_1 & a_2 f_1 + b_2 g_1 + c_2 h_1 & a_3 f_1 + b_3 g_1 + c_3 h_1 \\ a_1 f_2 + b_1 g_2 + c_1 h_2 & a_2 f_2 + b_2 g_2 + c_2 h_2 & a_3 f_2 + b_3 g_2 + c_3 h_2 \\ a_1 f_3 + b_1 g_3 + c_1 h_3 & a_2 f_3 + b_2 g_3 + c_2 h_3 & a_3 f_3 + b_3 g_3 + c_3 h_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

kas, ievērojot (10), neatšķiras no (7).

Tā kā nomogramma, ko veido skālas (6), attēlo to pašu sakarību starp mainīgiem kā nomogramma (11), tad seko, kā punkti ar atzīmēm z_1, z_2, z_2, kas pirmā nomogrammā ir uz taisnes, tāpat arī otrā ir uz taisnes. Ievērojot (9) taisne pārveidojas taisnē. Transformāciju, kuŗai tāda īpašība, sauc par homografisku jeb projektīvu.

7. Mainīgo šķiršanas problēma. Ja kollīneāru punktu nomogrammai zina skālu nolīdzinājumus, nav grūti atrast, kādu sakarību tā attēlo. Praksē jāatrisina tieši pretējs uzdevums. Uzdotai sakarībai

$$F_{123} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

jāatrod nomografiskais attēls, t. i. skālu nolīdzinājumi un pašas skālas.

Acīm redzot, uzdevums ir atrisināts, ja uzdoto sakarību izdodas uzrakstīt ekvivalentā veidā tā, ka kreisā pusē ir dēterminants, kur mainīgie atšķirti katrs savā rindā

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (13)$$

Ar parallēlo stabiņu pieskaitīšanu vai arī ar vispārīgo homografisko transformāciju vienmēr var sasniegt to, ka beidzamajā stabiņā nav nevienas nulles. Tā tad, var pieņemt, ka $h_i \neq 0$ $(i = 1, 2, 3)$. Ja tas tā, nolīdzinājumu attēlo nomogramma, kas sastāv no skālām

$$x_i = \frac{f_i}{h_i}, \quad y_i = \frac{g_i}{h_i}. \quad (i = 1, 2, 3)$$

Ja sakarība, ko grib attēlot nomogrammā, uzdota speciālizētā veidā un atbilst kādai no parastajām fizikas vai technikas formulām, dēterminanta (t. i. determinantā ietilpstošo funkciju) veidošana, ko M. d'Ocagne savos darbos apzīmē par mainīgo šķiršanu (fr. disjonction des variables), bieži izdodas samērā vienkāršiem līdzekļiem. Grūtāks ir uzdevums, ja attēlojamā sakarība uzdota gluži vispārīgā veidā; še izvirzās arī jautājums, kā pazīt, ka uzdotais nolīdzinājums pieļauj vai nepieļauj mainīgo šķiršanu.

Pieminētajiem jautājumiem, pēc pirmiem nepilnīgiem mēģinājumiem, kuŗu autori ir de Saint-Robert (1871), Massau (1884), Lecornu (1885), Duporcq (1898), plašus memuārus veltī Boulad (1910—11), Gronwall (1912), Kellogg (1914). Soreau savā kursā Nomographie ou Traité des Abaques., 2-e éd., (1921) veltī mainīgo šķiršanai lielu daļu otrā sējuma. Nomogrammu konstruktori no šiem pētījumiem gaida pietiekami vispārīgu un reizē no pārmērīgām analitiskām grūtībām brīvu metodi mainīgo šķiršanai īpašos prakses gadījumos.

I. Duporcq'a funkcionālvienādojumi.

Parīzes zinātņu akadēmijas iesniegtās piezīmēs (C. R., t. CXXVII, 1898) E. Duporcq nodarbojas ar jautājumu, kā pazīt, ka uzdotu funkciju $F(x, y, z)$ iespējams uzrakstīt determinanta veidā tā, ka mainīgie atšķirti katrs savā rindā, un ja tāda uzrakstīšana iespējama, kā noteikt determinanta elementus. Jautājumu pilnīgi atrisinot iznākumi, kuŗus autors nodod akadēmijai („La question est résolue complètement au moyen des resultats que j'ai l'honneur de soumettre à l'Académie dans cette Note").

Pieņemsim, ka uzdotu funkciju $F(x, y, z)$ var identiski pārveidot determinantā:

$$F(x, y, z) = \begin{vmatrix} f_1(x) & g_1(x) & h_1(x) \\ f_2(y) & g_2(y) & h_2(y) \\ f_3(z) & g_3(z) & h_3(z) \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

kur f_i, g_i, h_i $(i = 1, 2, 3)$ ir nezināmas funkcijas. Apzīmēsim minorus, kas tām atbilst, ar attiecīgiem lieliem burtiem F_i, G_i, H_i. Tad seko vienādības:

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= F_1 f_1(x) + G_1 g_1(x) + H_1 h_1(x) \\ F(x, y, z) &= F_2 f_2(y) + G_2 g_2(y) + H_2 h_2(y) \quad \ldots\ldots (2) \\ F(x, y, z) &= F_3 f_3(z) + G_3 g_3(z) + H_3 h_3(z) \end{aligned}$$

Tā kā determinantā (1) mainīgie atšķirti katrs savā rindā, tad funkcijas F_i, G_i, H_i atkarājas no tiem mainīgiem, kuŗus attiecīgās funkcijas f_i, g_i, h_i sevī **neietveŗ**.

Vienādība nezaudē spēku, ja mainīgo aizvieto ar skaitliskām vērtībām. Pirmā vienādībā (2) var x vietā ievietot patvaļīgi izvēlētas dažādas skaitliskas vērtības a, a', a'' $(a \neq a',\ a \neq a'',\ a' \neq a'')$:

$$\begin{aligned} F(a, y, z) &= F_1 f_1(a) + G_1 g_1(a) + H_1 h_1(a), \\ F(a', y, z) &= F_1 f_1(a') + G_1 g_1(a') + H_1 h_1(a'), \quad \ldots\ldots (3) \\ F(a'', y, z) &= F_1 f_1(a'') + G_1 g_1(a'') + H_1 h_1(a''). \end{aligned}$$

No šīm vienādībām, kopā ar pirmo (2), kad eliminē F_1, G_1, H_1, seko:

$$\begin{vmatrix} F(x, y, z) & f_1(x) & g_1(x) & h_1(x) \\ F(a, y, z) & f_1(a) & g_1(a) & h_1(a) \\ F(a', y, z) & f_1(a') & g_1(a') & h_1(a') \\ F(a'', y, z) & f_1(a'') & g_1(a'') & h_1 a'') \end{vmatrix} = 0.$$

Apzīmēsim minorus, kas atbilst pirmā stabiņa elementiem, ar A, B, C, D. Tajos nav ne y, ne z. Tāpēc vienādībā

$$AF(x, y, z) + BF(a, y, z) + CF(a', y, z) + DF(a'', y, z) = 0 \quad \ldots (4)$$

koeficienti A, B, C, D nemainās, ja y un z aizvieto ar patvaļīgi izvēlētām d a ž ā d ā m skaitliskām vērtībām b, b', b'' attiec. c, c', c'':

$$\begin{aligned} &AF(x, b, c) + BF(a, b, c) + CF(a', b, c) + DF(a'', b, c) = 0, \\ &AF(x, b', c') + BF(a, b', c') + CF(a', b', c') + DF(a'', b', c') = 0, \quad (4') \\ &AF(x, b'', c'') + BF(a, b'', c'') + CF(a', b'', c'') + DF(a'', b'', c'') = 0. \end{aligned}$$

Mums ir 4 nolīdzinājumi, kas attiecībā uz A, B, C, D ir lineāri un homogeni. Viegli noskaidrot, ka A, B, C, D nevar visi reizē būt nulles. Ja pieņem, ka $A = 0$, tad seko, ka vienādībām (3) labās puses ir lineāri atkarīgas, tā tad, lineāri atkarīgām jābūt arī kreisām pusēm, t. i. starp y un z jāpieņem sakarība. Bet tāds pieņēmums ir neatļauts, jo vienādībā (1) mainīgie jāuzskata kā neatkarīgi. Tā tad, jāpieņem, ka $A \neq 0$.

Ja sistēmai (4), (4′) ir netriviāls atrisinājums, tad jāizzūd determinantam, ko veido izteiksmes pie A, B, C, D:

$$\begin{vmatrix} F(x,y,z) & F(x,b,c) & F(x,b',c') & F(x,b'',c'') \\ F(a,y,z) & F(a,b,c) & F(a,b',c') & F(a,b'',c'') \\ F(a',y,z) & F(a',b,c) & F(a',b',c') & F(a',b'',c'') \\ F(a'',y,z) & F(a'',b,c) & F(a'',b',c') & F(a'',b'',c'') \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

Tādā pat kārtā, ievietojot otrā vienādībā (2) y vietā b, b', b'' un trešā (z vietā) c, c', c'' seko:

$$\begin{vmatrix} F(x,y,z) & F(a,y,c) & F(a',y,c') & F(a'',y,c'') \\ F(x,b,z) & F(a,b,c) & F(a',b,c') & F(a'',b,c'') \\ F(x,b',z) & F(a,b',c) & F(a',b',c') & F(a'',b',c'') \\ F(x,b'',z) & F(a,b'',c) & F(a',b'',c') & F(a'',b'',c'') \end{vmatrix} = 0, \quad (5')$$

$$\begin{vmatrix} F(x,y,z) & F(a,b,z) & F(a',b',z) & F(a'',b'',z) \\ F(x,y,c) & F(a,b,c) & F(a',b',c) & F(a'',b'',c) \\ F(x,y,c') & F(a,b,c') & F(a',b',c') & F(a'',b'',c') \\ F(x,y,c'') & F(a,b,c'') & F(a',b',c'') & F(a'',b'',c'') \end{vmatrix} = 0. \quad (5'')$$

Secinājums. Funkcija $F(x, y, z)$, ja to var uzrakstīt determinanta veidā tā, ka mainīgie atšķirti katrs savā rindā, atbilst trīs funkcionālvienādojumiem (5), (5′), (5″).

Minorus, kas vienādībās (5), (5′), (5″) atbilst elementam $F(x, y, z)$, apzīmēsim pēc kārtas ar Δ, Δ', Δ''. Tie atkarājas no konstantām a, a', a'' (x vērtības), b, b', b'' (y vērtības) un $c, c' c''$ (z vērtības), kuŗu izvēle ierobežota ar prasību, ka vienam tam pašam mainīgam jāņem dažādas vērtības. Ievērojot konstantu patvaļību vienmēr var iekārtot tā, ka

$$\Delta \neq 0, \quad \Delta' \neq 0, \quad \Delta'' \neq 0. \quad \ldots \ldots \ldots (6)$$

Ja tas tā, vienādības (5), (5′), (5″), kad izvirza determinantus pēc pirmās rindas elementiem, var pārveidot šādās:

$$\left.\begin{aligned} F(x,y,z) &= uF(x,b,c) + vF(x,b',c') + wF(x,b'',c'') \\ F(x,y,z) &= u'F(a,y,c) + v'F(a',y,c') + w'F(a'',y,c'') \\ F(x,y,z) &= u''F(a,b,z) + v''F(a',b',z) + w''F(a'',b'',z) \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

kur

$$u,\ v,\ w \text{ — atkarājas no } (y,\ z),$$
$$u',\ v',\ w' \text{ — } \text{„ „ } (z,\ x),$$
$$u'',v'',w'' \text{ — } \text{„ „ } (x,\ y).$$

No tā secina (sk. *H. Schwerdt*, Lehrbuch der Nomographie, 1924, 139. lp. p.), ka funkciju $F(x, y, z)$ var uzrakstīt determinanta veidā, kuŗa elementi tikai ar konstantiem proporcionālitātes faktoriem var atšķirties no $F(x, b, c)$, $F(x, b', c')$,...

Tā tad identiski:

$$F(x,y,z) = \begin{vmatrix} \lambda F(x,b,c) & \lambda' F(x,b',c') & \lambda'' F(x,b'',c'') \\ \mu F(a,y,c) & \mu' F(a',y,c') & \mu'' F(a'',y,c'') \\ \nu F(a,b,c) & \nu' F(a',b',z) & \nu'' F(a'',b'',z) \end{vmatrix} \quad . \ . \ (8)$$

kur λ, λ', λ''; μ, μ', μ'', ... — konstantas.

R e i z ē a r t o m a i n ī g o š ķ i r š a n a s p r o b l ē m a i r n o v e s t a p i e n e n o t e i k t o k o e f i c i e n t u a t r a š a n a s u z d e v u m a.

II. Boulad'a metode mainīgo šķiršanai.

Mainīgo šķiršanas problēmai F. Boulad's, iesākot ar 1910. g. (C. R., T. CL), veltī vairāk darbu, par kuŗiem M. d'Ocagne* saka, ka to kopums esot „viens no vislabākiem un vissvarīgākiem vispārīgās nomografijas veicinājumiem".

1. M e t o d e s p r i n c i p s. Uzdots nolīdzinājums $F_{123} = 0$, kam kreisā puse atkarājas no mainīgiem z_1, z_2, z_3. Pieņemsim, ka tam, kad to nomografiski sakārto attiecībā uz mainīgo z_1, ir šāds veids:

$$F_1 F_{23} + G_1 G_{23} + H_1 H_{23} = 0. \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (1)$$

Jāatrod, ja iespējams, 6 funkcijas F_i, G_i, H_i ($i = 2$, 3) tādas, ka identiski

$$F_1 F_{23} + G_1 G_{23} + H_1 H_{23} = \begin{vmatrix} F_1 & G_1 & H_1 \\ F_2 & G_2 & H_2 \\ F_3 & G_3 & H_3 \end{vmatrix}$$

Ja tāda vienādība iespējama un tur F_1, G_1, H_1 apmaina attiecīgi pret F_2, G_2, H_2 vai F_3, G_3, H_3, dabū labā pusē nulli:

$$\left.\begin{aligned} F_2 F_{23} + G_2 G_{23} + H_2 H_{23} = 0, \\ F_3 F_{23} + G_3 G_{23} + H_3 H_{23} = 0, \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

jo tādas apmaiņas dēļ divi rindas determinantā top vienādas. Liela nozīme metodē ir tam, ka (2) ir v i e n ā d ī b a s.

* Calcul graphique et Nomographie, 2-e éd., 1914, 258. lpp. (piez.).

Ja nolīdzinājumā (1) funkcijas F_1, G_1, H_1 apmaina pret simboliem F_2, G_2, H_2 vai F_3, G_3, H_3, dabū vienādības (identitātes), kas spēkā neatkarīgi no mainīgo vērtībām.

F_2, G_2, H_2 atrod no pirmās vienādības (2), sakārtojot to attiecībā pret mainīgo z_3. Pieņemsim, ka pēc pārkārtošanas ir:

$$f_3\Psi_2 + g_3\Phi_2 + \ldots + t_3\Theta_2 = 0,$$

kur f_3, g_3, ... t_3 ir zināmas funkcijas. Nezināmās F_2, G_2, H_2 ir ietvertas simbolos Ψ_2, Φ_2, ... Θ_2.

Pārkārtošanas iznākums ir vienādība, kas spēkā neatkarīgi no mainīgā z_3 vērtībām. Tas tā var būt vienīgi tad, ja

$$\Psi_2 = 0, \quad \Phi_2 = 0, \ldots \Theta_2 = 0.$$

Vispirms jāpārliecinās, ka šie nolīdzinājumi nerunā viens otram pretim. Ja tajos ir pretruna, mainīgo šķiršana nodomātā veidā nav iespējama. Ja pretrunas nav, nolīdzinājumi der F_2, G_2, H_2 atrašanai.

F_3, G_3, H_3 atrod līdzīgā kārtā no otrās vienādības (2), sakārtojot to attiecībā pret mainīgo z_2. Pieņemsim, ka pēc pārkārtošanas iznāk:

$$f_2\Psi_3 + g_2\Phi_3 + \ldots t_2\Theta_3 = 0.$$

Tā kā tas ir spēkā identiski, neatkarīgi no z_2 vērtībām, tad jābūt

$$\Psi_3 = 0, \quad \Phi_3 = 0, \ldots \Theta_3 = 0,$$

no kurienes dabū F_3, G_3, H_3, pieņemot, ka sistēmā nav pretrunas.

2. **Vispārīgais ceturtās un trešās nomografiskās kārtas nolīdzinājums ar 3 mainīgiem.** Tāda nolīdzinājuma veids ir:

$$\begin{aligned} &F_3(a_0f_1f_2 + a_1f_1 + a_2f_2 + a_3) + \\ &+ G_3(b_0f_1f_2 + b_1f_1 + b_2f_2 + b_3) + \ldots\ldots\ldots (3) \\ &+ H_3(c_0f_1f_2 + c_1f_1 + c_2f_2 + c_3) = 0, \end{aligned}$$

kur a_i, b_i, c_i — konstantas.

Ja F_3, G_3, H_3 lineāri neatkarīgi, nolīdzinājums attiecībā uz z_3 ir otrās (pretējā gadījumā — pirmās) kārtas. Attiecībās uz pārējiem mainīgiem tas ir pirmās kārtas, tā kā kopīgā kārta $n = 3$ vai 4.

Gribot nolīdzinājuma kreiso pusi uzrakstīt determinanta veidā, kur mainīgie atšķirti katrs savā rindā:

$$\begin{vmatrix} F_1 & G_1 & H_1 \\ F_2 & G_2 & H_2 \\ F_3 & G_3 & H_3 \end{vmatrix} = 0,$$

aizvietojam uzdotā nolīdzinājumā (3) F_3, G_3, H_3 (uzdotās funkcijas) ar simboliem F_1, G_1, H_1 un F_2, G_2, H_2. Seko vienādības, kuŗas sakārtojam attiecībā pret z_2 un z_1:

$$f_2[F_1(a_0f_1+a_2)+G_1(b_0f_1+b_2)+H_1(c_0f_1+c_2)]+$$
$$+[F_1(a_1f_1+a_3)+G_1(b_1f_1+b_3)+H_1(c_1f_1+c_3)]=0,$$

un tāpat:

$$f_1[F_2(a_0f_2+a_1)+G_2(b_0f_2+b_1)+H_2(c_0f_2+c_1)]+$$
$$+[F_2(a_2f_2+a_3)+G_2(b_2f_2+b_3)+H_2(c_2f_2+c_3)]=0.$$

Tās ir vienādības, kas spēkā neatkarīgi no mainīgo vērtībām. Pirmai jābūt spēkā neatkarīgi no z_2, otrai — neatkarīgi no z_1. Tāpēc:

$$\left.\begin{aligned} F_1(a_0f_1+a_2)+G_1(b_0f_1+b_2)+H_1(c_0f_1+c_2)=0,\\ F_1(a_1f_1+a_3)+G_1(b_1f_1+b_3)+H_1(c_1f_1+c_3)=0,\end{aligned}\right\} \quad \ldots (4)$$

un

$$\left.\begin{aligned} F_2(a_0f_2+a_1)+G_2(b_0f_2+b_1)+H_2(c_0f_2+c_1)=0,\\ F_2(a_2f_2+a_3)+G_2(b_2f_2+b_3)+H_2(c_2f_2+c_3)=0.\end{aligned}\right\} \quad \ldots (4')$$

No šejienes seko:

$$F_1:G_1:H_1=$$
$$\begin{vmatrix} b_0f_1+b_2 & c_0f_1+c_2 \\ b_1f_1+b_3 & c_1f_1+c_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_0f_1+c_2 & a_0f_1+a_2 \\ c_1f_1+c_3 & a_1f_1+a_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_0f_1+a_2 & b_0f_1+b_2 \\ a_1f_1+a_3 & b_1f_1+b_3 \end{vmatrix}$$

$$F_2:G_2:H_2=$$
$$\begin{vmatrix} b_0f_2+b_1 & c_0f_2+c_1 \\ b_2f_2+b_3 & c_2f_2+c_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_0f_2+c_1 & a_0j_3+a_1 \\ c_2f_2+c_3 & a_2f_2+a_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_0f_2+a_1 & b_0f_2+b_1 \\ a_2f_2+a_3 & b_2f_2+b_3 \end{vmatrix}$$

Funkcijas F_1, G_1, H_1 noteic skālu. Kāds nolīdzinājums ir līknei, uz kuŗas skāla atbalstās? Punktā, kam atbilst atzīme z_1, koordinātas ir

$$x=\frac{F_1}{H_1},\quad y=\frac{G_1}{H_1},$$

tā tad, $F_1:G_1:H_1=x:y:1$.

Ja nolīdzinājumos (4) funkcijas F_1, G_1, H_1 aizvieto ar proporcionāliem lielumiem x, y, 1, dabū:

$$(a_0f_1+a_2)x+(b_0f_1+b_2)y+(c_0f_1+c_2)=0,$$
$$(a_1f_1+a_3)x+(b_1f_1+b_3)y+(c_1f_1+c_3)=0,$$

vai, pārkārtojot:

$$(a_0x+b_0y+c_0)f_1+(a_2x+b_2y+c_2)=0,$$
$$(a_1x+b_1y+c_1)f_1+(a_3x+a_3y+c_3)=0,$$

Eliminējot no beidzamiem nolīdzinājumiem f_1 atrod skālas atbalsta nolīdzinājumu:

$$\frac{a_0x+b_0y+c_0}{a_1x+b_1y+c_1}=\frac{a_2x+b_2y+c_2}{a_3x+b_3y+c_3}\quad\ldots\ldots\ (5)$$

Ja to pašu rēķinu atkārto attiecībā pret otru skālu, ko noteic funkcijas F_2, G_2, H_2, dabū to pašu nolīdzinājumu (5).

Tā tad:

Vispārīgam ceturtās un trešās kārtas nolīdzinājumam (3) atbalsts divi skālām ir kopīga otrās kārtas līkne (5).*

3 Piemērs. Šķirt nomografiski mainīgos nolīdzinājumam:

$$h^2(1+l)-hl(1+p)-\frac{1}{3}(1-l)\,(1+2p)=0$$

Nolīdzinājums ir nomografiski sakārtots attiecībā uz h. Pieņemsim:

$$F_1=h^2,\quad G_1=-h,\quad H_1=-\frac{1}{3}.$$

Ja šo funkciju vietā raksta F_i, G_i, H_i ($i=2, 3$), dabū vienādības:

$$F_2(1+l)+G_2l(1+p)+H_2(1-l)\,(1+2p)=0,$$
$$F_3(1+l)+G_3l(1+p)+H_3(1-l)\,(4+2p)=0.$$

Pieņemot, ka F_2, G_2, H_2 atkarājas no l un F_3, G_3, H_3 no p, sakārtosim pirmo vienādību attiecībā uz p, otru — attiecībā uz l:

$$p\,[G_2l+2H_2(1-l)]+[F_2(1+l)+G_2l+H_2(1-l)]=0,$$
$$l\,[F_3+G_3(1+p)-H_3(1+2p)]+[F_3+H_3(1+2p)]=0.$$

Abām jābūt spēkā neatkarīgi no mainīgo vērtībām: pirmai neatkarīgi no p, otrai — neatkarīgi no l. Tas iespējams tikai tad, ja funkcijas F_i, G_i, H_i ir tādas, ka visas stūrainās iekavas izzūd. No tā seko divi sistēmas nezināmo funkciju aprēķināšanai:

$$G_2l+2H_2(1-l)=0,$$
$$F_2(1+l)+G_2l+H_2(1-l)=0;$$

un:

$$F_3+G_3(1+p)-H_3(1+2p)=0,$$
$$F_3\qquad\qquad+H_3(1+2p)=0.$$

Tā tad:

$$F_2:G_2:H_2=l(1-l):2(l^2-1):l(l+1);$$
$$F_3:G_3:H_3=-(1+2p)\,(1+p):2(1+2p):(1+p).$$

* Īpašos gadījumos līkne var deģenerēt divi taisnēs.

III. Vispārīgās homografiskās transformācijas diferenciālinvarianti. (Gronwall'a metode.)

1. Divi skālas un sekante. Gronwall's 1912. g. publicēja memuāru, kur mainīgo sķiršanas problēma apskatīta visai sīki un plaši. Vēlāk būs minēti daži šī pētījuma iznākumi. Bet pa priekšu, kā sagatavojums turpmākam, šāds viekāršs ģeometrijas uzdevums:

Ortogonālās Dekarta koordinātu asīs uzdotas divi skālas, sekante savieno kādus divus skālu punktus. Izpētīt šīs sekantes īpašības.

Apzīmējumi:

ξ, η — Dekarta koordinātas,
x, y — skālu atzīmes,
u — sekantes virziena koeficients,
v — nogrieznis ordinātu asij,
w — „ abscīzu asij.

Skālu nolīdzinājumi:

$$\xi_i = \frac{f_i}{h_i}, \quad \eta_i = \frac{g_i}{h_i}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

($i = 1, 2$). Indeks 1 apzīmē, ka funkcija atkarājas no x, 2 — ka tā atkarājas no y:

$$f_1 = f_1(x), \quad g_1 = g_1(x), \quad h_1 = h_1(x);$$
$$f_2 = f_2(y), \quad g_2 = g_2(y), \quad h_2 = h_2(y).$$

Caur punktiem (ξ_1, η_1) un (ξ_2, η_2) vilkta taisne, kuŗas nolīdzinājums:

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & 1 \\ \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(\eta_1 - \eta_2)\,\xi - (\xi_1 - \xi_2)\,\eta + (\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2) = 0. \ldots \ldots (2)$$

Gadījumiem, kad abas skālas ir uz kopīgas taisnes, kas parallēla vienai vai otrai koordinātu asij, apskatāmā problēmā nav ne teōrētiskas, ne praktiskas intereses. Tāpēc pieņemsim, ka, vispārīgi, $\xi_1 \neq \xi_2$, $\eta_1 \neq \eta_2$. Tad no (2) seko vilktās taisnes (sekantes) virziena koeficients un asu nogriežņi:

$$\left.\begin{aligned} u&=\frac{\eta_1-\eta_2}{\xi_1-\xi_2}=\frac{g_1h_2-h_1g_2}{f_1h_2-h_1f_2},\\ v&=\frac{\xi_1\eta_2-\eta_1\xi_2}{\xi_1-\xi_2}=\frac{f_1g_2-g_1f_2}{f_1h_2-h_1f_2},\\ w&=-\frac{\xi_1\eta_2-\eta_1\xi_2}{\eta_1-\eta_2}=-\frac{f_1g_2-g_1f_2}{g_1h_2-h_1g_2}.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ (3)$$

No šīm formulām, vai arī tieši ģeometriski redzams, ka identiski

$$uw+v=0.\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (4)$$

Funkcijas u, v, w atkarājas no x un y. To parciālās atvasinātās:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-h_2D_1}{(f_1h_2-h_1f_2)^2},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{f_2D_1}{(f_1h_2-h_1f)^2};\\ &\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{-g_2D_1}{(g_1h_2-h_1g_2)^2}=\frac{-g_2D_1}{u^2(f_1h_2-h_1f_2)^2};\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (5)$$

Tāpat:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-h_1D_2}{(f_1h_2-h_1f_2)^2},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{f_1D_2}{(f_1h_2-h_1f_2)^2};\\ &\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{-g_1D_2}{(g_1h_2-h_1g_2)^2}=\frac{-g_1D_2}{u^2(f_1h_2-h_1f_2)^2}.\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (5')$$

Šinīs formulās:

$$D_i=\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1\\ f_2 & g_2 & h_2\\ f_i' & g_i' & h_i'\end{vmatrix}.\quad (i=1,\,2)\ \ldots\ldots\ (6)$$

No (5) un (5′) seko:

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{\partial v}{\partial y}:u^2\frac{\partial w}{\partial y}:\frac{\partial u}{\partial y}=f_1:g_1:h_1;\\ \text{un}\quad &-\frac{\partial v}{\partial x}:u^2\frac{\partial w}{\partial x}:\frac{\partial u}{\partial x}=f_2:g_2:h_2.\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ (7)$$

Funkcijas u, v, w saista identiska sakarība (4), tāpēc proporcijās (7) vienu lielumu, piem. w, var eliminēt. Seko:

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial v}{\partial y}:\left(v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}\right):\frac{\partial u}{\partial y}=f_1:g_1:h_1;\\ &-\frac{\partial v}{\partial x}.\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right):\frac{\partial u}{\partial x}=f_2:g_2:h_2.\end{aligned}\quad\ldots\ (7')$$

Tā tad:

Funkcijas f_i, g_i, h_i $(i=1, 2)$, kas ar savām attiecībām noteic skālu nolīdzinājumus (1), var saskaņā ar (7) vai (7′) līdz proporcionālitātes faktoram dabūt no sekantes elementiem u, v, w $(uw+v=0)$ un to parciāliem atvasinājumiem.

Šis iznākums ierosina pretēju uzdevumu: pieņemot divi zināmas funkcijas $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$ par nezināmu skālu sekantes elementiem (u — virziena koeficients, v — nogrieznis ordinātu asij), atrast skālu nolīdzinājumus.

Uzdevumu var atrisināt, ja uzdotās funkcijas u, v ir tādas, ka attiecības

$$\frac{\partial v}{\partial y} : \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right) : \frac{\partial u}{\partial y};$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} : \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) : \frac{\partial u}{\partial x}$$

atkarājas tikai no viena mainīgā (pirmās — no x, beidzamās — no y) Tā tad, jābūt

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y} : \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) : \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x} : \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) : \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0,$$

vai arī:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

Viegli konstatēt, ja (8) izpildīts, ka tad visas attiecības, kas ir formulās (7′) kreisā pusē, atkarājas tikai no viena mainīgā.

Kāds veids ir funkcijām u, v, kas izpilda noteikumus (8)? Tos var pārrakstīt šā:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{vmatrix} = 0, \quad \ldots\ldots (8')$$

un determinantus uztvert kā Vronska determinantus attiecībā uz divām divu mainīgu lielumu funkcijām. (8') izteic, ka attiecīgie parciālie atvasinājumi ir lineāri atkarīgi:

$$F_1 \frac{\partial u}{\partial y} + H_1 \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$F_2 \frac{\partial u}{\partial x} + H_2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Integrējot:

$$F_1 u + H_1 v = G_1,$$

$$F_2 u + H_2 v = G_2,$$

kur F_i, G_i, H_i ir patvaļīgas no x (indeks 1) vai y (indeks 2) atkarīgas funkcijas.

Atrisinot sistēmu, dabū

$$u = \frac{G_1 H_2 - H_1 G_2}{F_1 H_2 - H_1 F_2}, \quad v = \frac{F_1 G_2 - G_1 F_2}{F_1 H_2 - H_1 F_2},$$

kas īstenībā neatšķiras no pirmām (3) izteiksmēm.

Piemērs. Divi skālu sekantei virziena koeficients $u = f_1 + f_2$, nogrieznis ordinātu asij $v = -f_1 f_2$. Atrast skālas. ($f_1 = f_1(x)$, $f_2 = f_2(y)$.)

Pa priekšu jāpārliecinās, ka uzdotās funkcijas atbilst noteikumiem (8):

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_1'(-f_1'' f_2) - (-f_1' f_2) f_1'' = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f_2'(-f_1 f_2'') - (-f_1 f_2') f_2'' = 0.$$

Aprēķinām:

$$u^2 \frac{\partial w}{\partial x} = v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} = f_1' f_2^2,$$

$$u^2 \frac{\partial w}{\partial y} = v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} = f_1^2 f_2'.$$

Tā tad:

$$-\frac{\partial v}{\partial x} : u^2 \frac{\partial w}{\partial x} : \frac{\partial u}{\partial x} = f_1' f_2 : f_1' f_2 : f_1' = f_2 : f_2^2 : 1,$$

$$-\frac{\partial v}{\partial y} : u^2 \frac{\partial w}{\partial y} : \frac{\partial u}{\partial y} = f_1 f_2' : f_1^2 f_2' : f_2' = f_1 : f_1^2 : 1.$$

Skālu nolīdzinājumi: $\xi_i = f_i$, $\eta_i = f_i^2$ $(i = 1, 2)$. Abām skālām atbalsts kopīgs (parabola $\eta = \xi^2$).

2. Homografiskās transformācijas diferenciālinvarianti. No uzdotām funkcijām f, g, h, kas atkarīgas no kopīga mainīgā, ar veselas lineāras transformācijas palīdzību veidosim jaunas funkcijas:

$$\begin{aligned} \bar{f} &= a_1 f + b_1 g + c_1 h, \\ \bar{g} &= a_2 f + b_2 g + c_2 h, \\ \bar{h} &= a_3 f + b_3 g + c_3 h, \end{aligned} \qquad \ldots\ldots\ldots (9)$$

Ja atbilstība starp funkcijām f, g, h un $\bar{f}, \bar{g}, \bar{h}$ ir apgriežami viennozīmīga, koeficientu determinantam jāatšķiras no nulles:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (9')$$

Tad sistēmu (9) var atrisināt attiecībā uz f, g, h. Jāpiezīmē, ka šinī atrisināšanā svarīga loma ir apakšdeterminantiem, kas piekārtoti augšējā determinanta elementiem. Transformācijas determinanta apakšdeterminantus (minorus) apzīmēsim attiecīgiem lieliem burtiem:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

$$(A_1 = b_2 c_3 - c_2 b_3, \quad A_2 = -b_1 c_3 + c_1 b_3, \quad \ldots)$$

Funkcijas f, g, h un $\bar{f}, \bar{g}, \bar{h}$ lietāsim skālu punktu noteikšanai Dekarta koordinātu asīs. Šo funkciju vērtību trijotnes, kas atbilst kādai noteiktai kopīga parametra vērtībai, var uztvert kā koordinātu plāknes punktu homogēnās koordinātas pirms transformācijas un pēc tās. No tām seko nehomogēnās Dekarta koordinātas:

$$\text{I)} \quad \xi = \frac{f}{h}, \quad \eta = \frac{g}{h}; \qquad \text{II)} \quad \bar{\xi} = \frac{\bar{f}}{\bar{h}}, \quad \bar{\eta} = \frac{\bar{g}}{\bar{h}}.$$

Transformācija (9) punktam (ξ, η) piekārto punktu $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$. Abu punktu nehomogēnās koordinātas saistītas ar sakarībām:

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= \frac{\bar{f}}{\bar{h}} = \frac{a_1 f + b_1 g + c_1 h}{a_3 f + b_3 g + c_3 h} = \frac{a_1 \xi + b_1 \eta + c_1}{a_3 \xi + b_3 \eta + c_3}, \\ \bar{\eta} &= \frac{\bar{g}}{\bar{h}} = \frac{a_2 f + b_2 g + c_2 h}{a_3 f + b_3 g + c_3 h} = \frac{a_2 \xi + b_2 \eta + c_2}{a_3 \xi + b_3 \eta + c_3}, \end{aligned} \qquad \ldots (10)$$

t. i. p ā r e j u n o p u n k t a (ξ, η) p u n k t ā $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ n o t e i c v i s p ā r ī g ā h o m o g r a f i s k ā t r a n s f o r m ā c i j a.

Iedomāsimies figūru, kas sastāv no koordinātu asīm, attiecībā pret kuŗām uzdotas divi skālas (1). Caur to punktiem (ξ_1, η_1) un (ξ_2, η_2) vilkta taisne, kuŗas virziena koeficients ir u, nogrieznis orḓinātu asij v, abscīzu asij — w. Transformācija (9) jeb (10) skālas un taisni pārvieto citā stāvoklī, kur taisnes dati ir $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$. K ā s a i s t ā s $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ a r u, v, w?

Pamatojoties uz (3) un (9), pierāda

$$\bar{u}=\frac{\bar{g}_1\bar{h}_2-\bar{h}_1\bar{g}_2}{\bar{f}_1\bar{h}_2-\bar{h}_1\bar{f}_2}=-\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{vmatrix}, \quad . \; . \; (11)$$

kur A_i, B_i, C_i ir transformācijas determinanta minori, kas atbilst attiecīgi a_i, b_i, c_i. Tādas pat formulas, kas noteic asu nogriežņus v un w, atšķiŗas tikai ar konstantu indekiem, tā ka iznākumus pietiks atzīmēt saīsinātā veidā, izrakstot tikai pirmās determinantu rindas:

$$\begin{aligned} \bar{v}&=-\,|\,A_3\;B_3\;C_3\,|\,:\,|\,A_2\;B_2\;C_2\,|, \\ \bar{w}&=-\,|\,A_3\;B_3\;C_3\,|\,:\,|\,A_1\;B_1\;C_1\,|. \end{aligned} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (11')$$

Izvirzot determinantus pēc pirmās rindas un ievērojot (3), dabū:

$$\begin{aligned} \bar{u}&=-\frac{A_1u+C_1v-B_1}{A_2u+C_2v-B_2}, \\ \bar{v}&=-\frac{A_3u+C_3v-B_3}{A_2u+C_2v-B_2}. \end{aligned} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (12)$$

J a u n i e s e k a n t i n o t e i c ē j i e l e m e n t i i z c e ļ a s n o v e c a j i e m a r v i s p ā r ī g a s h o m o g r a f i s k ā s t r a n s f o r m ā c i j a s p a l ī d z ī b u.

Tāpēc izdarot vienas tās pašas darbības ar lielumiem

$$\begin{aligned} u&=u(x, y) \\ v&=v(x, y) \end{aligned} \quad \text{un} \quad \begin{aligned} \bar{u}&=\bar{u}(x, y) \\ \bar{v}&=\bar{v}(x, y) \end{aligned}$$

dabū, vispārīgi, d a ž ā d u iznākumu. Ja tomēr gadās, ka kādai funkcijai F ir tāda īpašība, ka identiski

$$F(u, v)=F(\bar{u}\;\bar{v}),$$

tad tādu funkciju sauc par i n v a r i a n t u, un īpaši — ja darbību simbolā F ietverta arī atvasināšana — par d i f e r e n c i ā l i n v a r i a n t u.

Gronwall'a metode mainīgo šķiršanai galvenām kārtām pamatojas uz divi izteiksmēm, kuŗu struktūru vislabāk pārredz, uzrakstot tās determinantos:

$$C=\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x}\\ \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}}, \quad \ldots\ldots (13)$$

$$D=\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}} \quad \ldots\ldots (13')$$

Izteiksmju saucējā ir lielumu u, v funkcionāldeterminants, kas nav vienlīdzīgs nullei, jo sekantei, ar kuŗas palīdzību nomogrammā izdara nolasījumus, virziena koeficients u ir neatkarīgs no v.

Gronwall's* pieņem

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}=e^{\Theta} \quad \ldots\ldots (14)$$

un raksta

$$C=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial y}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}-2\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right)e^{-\Theta}, \quad (15)$$

$$D=\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial v}{\partial x}+2\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)e^{-\Theta}. \quad (15')$$

Ka izteiksmes C un D invariantas attiecībā uz ikvienu homografisku transformāciju, kas skaŗ lielumus u un v, pierādījuši E. Goursat un P. Painlevé (C. R., t. CIV, 1887.).

Diferencējot (14) parciāli pēc x un y un izmantojot iznākumu kopā ar (15) kā arī ievērojot (8), dabū diferenciālvienādojumu sistēmu:

---

* Journal de Math. pures et appliquées, t. VIII, 1912, 64. lpp.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=\frac{1}{3}\left(2\frac{\partial\Theta}{\partial x}+C\right)\frac{\partial u}{\partial x},\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}&=\frac{1}{3}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}-D\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{3}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}-C\right)\frac{\partial u}{\partial y},\\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}&=\frac{1}{3}\left(2\frac{\partial\Theta}{\partial y}+D\right)\frac{\partial u}{\partial y},\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ (16)$$

u n t a i s n i t ā d u p a t s i s t ē m u v n o t e i k š a n a i.

Tālāk veido sistēmas integrabilitātes noteikumus, dabūtās izteiksmēs aizvieto otrās atvasinātās ar to vērtībām (16), un secina, ievērojot u un v neatkarību, ka

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}&=\frac{1}{3}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}-C\right)\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}+2C\right)+\frac{\partial C}{\partial x},\\ \frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial y}&=\frac{1}{3}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial x}-C\right)\left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}-D\right)+\frac{\partial C}{\partial y}+\frac{\partial D}{\partial x},\\ \frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2}&=\frac{1}{3}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}-D\right)\left(\frac{\partial\Theta}{\partial y}+2D\right)+\frac{\partial D}{\partial y}.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ (17)$$

No (16), pieņemot tur

$$u=\omega e^{\frac{1}{3}\Theta},\quad\ldots\ldots\ldots\ (18)$$

seko vēl viena sistēma:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}&=\frac{1}{3}C\frac{\partial\omega}{\partial x}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}C^2-\frac{\partial C}{\partial x}\right)\omega,\\ \frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}&=\frac{-1}{3}D\frac{\partial\omega}{\partial x}-\frac{1}{3}C\frac{\partial\omega}{\partial y}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}CD+\frac{\partial C}{\partial y}+\frac{\partial D}{\partial x}\right)\omega,\\ \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}&=\frac{1}{3}D\frac{\partial\omega}{\partial y}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}D^2-\frac{\partial D}{\partial y}\right)\omega.\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

Abām sistēmām (17) un (19) izrādās kopīgi integrabilitātes noteikumi, kuŗus izteic divi diferenciālvienādojumi:

$$\left.\begin{aligned}2\frac{\partial^2 C}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}-C\left(2\frac{\partial C}{\partial y}+\frac{\partial D}{\partial x}\right)&=0,\\ \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial y}-D\left(\frac{\partial C}{\partial y}+2\frac{\partial D}{\partial x}\right)&=0.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ (20)$$

3. M a i n ī g o š ķ i ŗ a m ī b a s n e p i e c i e š a m i e u n p i e t i e k o š i e n o t e i k u m i. Pieņemsim, ka uzdotu nolīdzinājumu

$$F(x,y,z)=0\quad\ldots\ldots\ldots\ (21)$$

var pārveidot tam līdzvērtīgā citā, kur kreisā pusē determinants, turklāt mainīgie determinantā atšķirti katrs savā rindā:

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & g_1(x) & h_1(x) \\ f_2(y) & g_2(y) & h_2(y) \\ f_3(z) & g_3(z) & h_3(z) \end{vmatrix} = 0.$$

Vienmēr var iekārtot tā, ka beidzamā stabiņā neviens elements nav nulle. To stabiņu, kuŗā nav nevienas nulles, raksta kā beidzamo. Ja katrā stabiņā ir nulle, pietiek beidzamam stabiņam pieskaitīt vienu no parallēliem stabiņiem. Tā tad, pieņemsim, ka visi $h_i \neq 0$, un izdalīsim katras rindas elementus ar attiecīgo h_i. Tad beidzamā stabiņā visur būs 1.

Tāpēc nolīdzinājumam (21) mainīgo šķiršanas iznākumu, ja šķiršana iespējama, vienmēr var rakstīt šādā veidā, kas seko, ja iepriekšējā determinantā pieņem $h_1 = h_2 = h_3 = 1$:

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & g_1(x) & 1 \\ f_2(y) & g_2(y) & 1 \\ f_3(z) & g_3(z) & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (21')$$

Līdzvērtīgus, tādā pat veidā uzrakstītus nolīdzinājumus:

$$\begin{vmatrix} \bar{f}_1(x) & \bar{g}_1(x) & 1 \\ \bar{f}_2(y) & \bar{g}_2(y) & 1 \\ \bar{f}_3(z) & \bar{g}_3(z) & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (21'')$$

dabū pielietājot funkcijām f_i, g_i, vispārīgo homografisko transformāciju, tā kā

$$\left.\begin{aligned} \bar{f}_i &= \frac{a_1 f_i + b_1 g_i + c_1}{a_3 f_i + b_3 g_i + c_3}, \\ \bar{g}_i &= \frac{a_2 f_i + b_2 g_i + c_2}{a_3 f_i + b_3 g_i + c_3}, \end{aligned}\right\} (i = 1, 2, 3) \quad \ldots\ldots (22)$$

kur transformācijas konstantas a_i, b_i, c_i atbilst noteikumam (9').

Agrāk dabūtās formulas, ja tur pieņem $h_1 = h_2 = 1$, paliek spēkā arī tagad. Piem., no (3) seko, ka apskatāmā gadījumā

$$u = \frac{g_1 - g_2}{f_1 - f_2}, \quad v = \frac{f_1 g_2 - g_1 f_2}{f_1 - f_2}. \quad \ldots\ldots\ldots (23)$$

Ja nolīdzinājumā (21') determinantu izvirza vadoties no trešās rindas, dabū:

$$g_3(z) = u f_3(z) + v. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

To atvasinām parciāli pēc x un y:

$$\frac{dg_3}{dz}\frac{\partial z}{\partial x}=u\frac{df_3}{dz}\frac{\partial z}{\partial x}+f_3\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{dg_3}{dz}\frac{\partial z}{\partial y}=u\frac{df_3}{dz}\frac{\partial z}{\partial y}+f_3\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Ja beidzamo nolīdzinājumu pareizina ar $\partial z/\partial x$, bet iepriekšējo — ar $\partial z/\partial y$ un vienu reizinājumu atskaita otram, seko:

$$f_3\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial z}{dy}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0,$$

vai arī:

$$f_3\frac{\partial(u,z)}{\partial(x,y)}+\frac{\partial(v,z)}{\partial(x,y)}=0. \qquad (25)$$

Abi funkcionāldeterminanti beidzamā formulā atšķiŗas no nulles. Ja pieņem, ka viens ir nulle, tad arī otrs ir nulle. Ja abi ir nulles, seko, ka $u=u(z)$ un $v=v(z)$, tā tad nolīdzinājumā (24) ir tikai z. Bet tas tā nevar būt, jo (24) ir līdzvērtīgs (21), kas izteic sakaru starp 3 mainīgiem. Tā tad atliek tikai pieņemt, ka neviens no abiem funkcionāldeterminantiem nav nulle.

Tāpēc (25) var atrisināt attiecībā uz f_3; iznākumā dabū:

$$f_3(z)=-\frac{\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{\partial z}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial z}{\partial x}}=-\frac{M\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}}{M\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}}, \qquad (26)$$

pieņemot apzīmējumu

$$M=-\frac{\partial z}{\partial y}:\frac{\partial z}{\partial x}. \qquad (27)$$

Vēl viens apzīmējums:

$$N=\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial y}=$$

$$=\frac{\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2\dfrac{\partial z}{\partial y}} \qquad (27')$$

Starp izteiksmēm, M, N un diferenciālinvariantiem C, D Gronwall's konstatē sakarību:

$$D=MC+N. \qquad (28)$$

Sekas ir tās, ka diferenciālvienādojumos (20), kuŗiem C un D atbilst, vienu no šīm funkcijām var eliminēt, piemēram, D. Tad otra (C) apmierina reizē divi nolīdzinājumus. Un ja tas tā ir, top pierādīts tālāk, var atrast u, v, Θ un funkcijas f_i, g_i.

Gronwall'a teōrēma: Nepieciešamais un pietiekošais noteikums tam, ka uzdoto nolīdzinājumu (21) var pārveidot nolīdzinājumā (21'), ir tas, ka divi parciāliem diferenciālvienādojumiem ir kopīgs integrālis C.

Visus nolīdzinājumus, kas atbilst vienai tai pašai C vērtībai, var dabūt no kāda viena ar homografijas (22) palīdzību, un otrādi, divi homografiski saistītiem nolīdzinājumiem ir kopīga C vērtība.

4. Dažas Gronwall'a teōrēmas, kas attiecas uz skālu atbalsta veidu.

Teōrēma I.

Nepieciešamais un pietiekošais noteikums tam, ka skāla argumentam x ir taisna, ir tas, ka

$$\frac{\partial C}{\partial y} + 2\frac{\partial D}{\partial x} = 0,$$

kopā ar (20) un (28).

Teōrēma II.

Nepieciešamais un pietiekošais noteikums tam, ka skāla argumentam y ir taisna, ir tas, ka

$$2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x} = 0$$

kopā ar (20) un (28)

Teōrēma III.

Nepieciešamais un pietiekošais noteikums tam, ka skāla mainīgam z ir taisna, ir tas, ka

$$\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial D}{\partial x} + 3\frac{\partial^2 \log M}{\partial x \partial y} = 0,$$

kopā ar (20) un (28).

Teōrēma IV.

Nepieciešamais un pietiekošais noteikums tam, ka nomogrammai visas 3 skālas taisnas, ir tas, ka

$$\frac{\partial^2 \log M}{\partial x \partial y} = 0.$$

(*De Saint-Robert,* 1871.)

Teōrēma V.

Nepieciešamais un pietiekošais noteikums tam, ka skālas x un y ir taisnas, bet skāla z — līka, ir tas, ka izteiksme

$$C = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{M}\frac{\partial N}{\partial x}\right) : \frac{\partial^2 \log M}{\partial x \partial y} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (29)$$

apmierina vienādojumus

$$\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(MC + N) = 0.$$

Šinī teōrēmā ietilpstošo uzdevumu pirmo reizi atrisina *Massau* (1884.) un *Lecornu* (1885.).

Teōrēma VI.

Nepieciešamais un pietiekošais noteikums tam, ka uzdotu nolīdzinājumu (21) var pārveidot šādā:

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_1^2(x) & 1 \\ f_2(y) & f_2^2(y) & 1 \\ f_3(z) & g_3(z) & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ir tas, ka izteiksme (29) atbilst vienādojumiem:

$$\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(MC + N) = \frac{\partial D}{\partial x} \neq 0,$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} = C\frac{\partial C}{\partial y}.$$

IV. Funkciju līneārās atkarības princips mainīgo šķiršanā. (Kellogg'a metode.)

1. Vronska determinanti. Pieņemsim, ka uzdotas n funkcijas $f_1(x)$, $f_2(x)$, . . . $f_n(x)$, kuŗām apskatāmā argumenta maiņas intervallā ir 1-ās, 2-ās, . . . $(n-1)$-ās kārtas atvasinātās. Vronska (*Hoëné Wronski,* Réfutation de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange, 1812) vārdā sauc determinantus, kas veidoti rakstot pirmā rindā pašas funkcijas, otrā rindā — to pirmās atvasinātās, nākošās rindās — otrās, trešās, . . . $(n-1)$-ās atvasinātās.

Tā tad:

$$
W = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & \ldots & f_n(x) \\ f'_1(x) & f'_2(x) & \ldots & \ldots & f'_n(x) \\ f''_1(x) & f''_2(x) & \ldots & \ldots & f''_n(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \ldots & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \quad \ldots (1)
$$

ir Vronska determinants.

2. Funkciju lineārā atkarība viena mainīgā gadījumā. Funkcijas $f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x)$ sauc par lineāri atkarīgām, ja tās identiski izpilda noteikumu

$$
c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x) = 0, \quad \ldots \ldots (2)
$$

kur konstantas $c_1, c_2 \ldots c_n$ visas nav nulles. Ja, turpretim, noteikumu (2) nevar identiski izpildīt citādi, kā pieņemot, ka $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$, tad funkcijas sauc par lineāri neatkarīgām

Ja funkcijām $f_i (i = 1, 2, \ldots n)$ ir 1-ās, 2-ās, $(n-1)$-ās kārtas atvasinātās, no (2) seko:

$$
\begin{aligned}
&c_1 f'_1(x) + c_2 f'_2(x) + \ldots + c_n f'_n(x) = 0, \\
&c_1 f''_1(x) + c_2 f''_2(x) + \ldots + c_n f''_n(x) = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&c_1 f_1^{(n-1)}(x) + c_2 f_2^{(n-1)}(x) + \ldots + c_n f_n^{(n-1)}(x) = 0.
\end{aligned}
$$

Šie nolīdzinājumi, kopā ar (2) veido sistēmu, kas attiecībā uz konstantām c_i ir lineāra un homogēna. Ja pieņem, ka visi c_i nav nulles, seko

$$
\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & \ldots & f_n(x) \\ f'_1(x) & f'_2(x) & \ldots & \ldots & f'_n(x) \\ f''_1(x) & f''_2(x) & \ldots & \ldots & f''_n(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \ldots & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = 0. \quad \ldots (3)
$$

Tā tad, ja funkcijas $f_1, f_2, \ldots f_n$ ir lineāri atkarīgas, no tām veidotais Vronska determinants identiski izzūd.

Apgrieztā teorēma attiecībā uz analītiskām funkcijām arī ir spēkā: ja Vronska determinants izzūd, funkcijas, no kuŗām tas veidots, ir lineāri atkarīgas. To viegli parādīt, ja funkcijas ir divas. Pieņemsim:

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} = f_1 f_2' - f_2 f_1' = 0, \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

tad, saskaņā ar determinantu atvasināšanas kārtulu, būs

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1'' & f_2'' \end{vmatrix} = f_1 f_2'' - f_2 f_1'' = 0. \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Ja viena funkcija ir konstanta, tad no (4) seko, ka arī otra ir konstanta. Šo gadījumu nepieņemot $f_1' \neq 0$, $f_2' = 0$. No (4) seko

$$f_2 = \frac{f_2'}{f_1'} f_1 = c_1 f_1$$

($c_1 \neq 0$), tāpēc ka, saskaņā ar (5):

$$\frac{d}{dx}\frac{f_2'}{f_1'} = \frac{f_1' f_2'' - f_2' f_1''}{f_1'^2} = 0.$$

Apzīmēsim apakšdeterminantus, kas kreisā pusē (3) atbilst beidzamās rindas elementiem ar $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$, ... $\omega_n(x)$. Tālāk ievērosim, ka identitātē (3) beidzamo rindu determinantā var aizvietot ar kādu no pārējām rindām. Izvirzīsim attiecībā pret beidzamās rindas elementiem tiklab vienādību (3), kā arī pārējās vienādības, kas dabūtas no tās, aizvietojot beidzamo rindu ar parallēlām rindām:

$$\begin{aligned} &\omega_1 f_1 + \omega_2 f_2 + \ldots + \omega_n f_n = 0, \\ &\omega_1 f_1' + \omega_2 f_2' + \ldots + \omega_n f_n' = 0, \\ &\omega_1 f_1'' + \omega_2 f_2'' + \ldots + \omega_n f_n'' = 0, \qquad \ldots\ldots (6) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\omega_1 f_1^{(n-1)} + \omega_2 f_2^{(n-1)} + \ldots + \omega_n f_n^{(n-1)} = 0, \end{aligned}$$

no kurienes seko, ka $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 : \ldots : \omega_n =$ kā determinanti, ko dabū dzēšot matricā

$$\begin{Vmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & \ldots & f_n \\ f_1' & f_2' & \ldots & \ldots & f_n' \\ f_1'' & f_2'' & \ldots & \ldots & f_n'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1^{(n-2)} & f_2^{(n-2)} & \ldots & \ldots & f_n^{(n-2)} \end{Vmatrix} \ldots\ldots\ldots (7)$$

pirmo, otro, trešo ... stabiņus un dzēšanas iznākumam pievienojot pārmaiņām pozitīvu un negātīvu zīmi.

Ja vienādības (6) atvasina pēc kārtas un ievēro nākošo, dabū sistēmu:

$$\begin{aligned}
\omega_1' f_1 + \omega_2' f_2 + \ldots + \omega_n' f_n &= 0,\\
\omega_1' f_1' + \omega_2' f_2' + \ldots + \omega_n' f_n' &= 0,\\
\omega_1' f_1'' + \omega_2' f_2'' + \ldots + \omega_n' f_n'' &= 0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
\omega_1' f_1^{(n-2)} + \omega_2' f_2^{(n-2)} + \ldots + \omega_n' f_n^{(n-2)} &= 0,
\end{aligned}$$

no kurienes seko, ka $\omega_1' : \omega_2' : \omega_3' : \ldots : \omega_n' =$ kā determinanti, kas veidoti augšā aprakstītā kārtā no matricas (7).

No tā redzams, ka

$$\omega_1 : \omega_2 : \ldots : \omega_n = \omega_1' : \omega_2' : \ldots : \omega_n';$$

$$\frac{\omega_1'}{\omega_1} = \frac{\omega_2'}{\omega_2} = \ldots = \frac{\omega_n'}{\omega_n}.$$

Tā tad:

$$\frac{d}{dx} ln\omega_1 = \frac{d}{dx} ln\omega_2 = \ldots = \frac{d}{dx} ln\omega_n = \rho(x),$$

$$\omega_1 = c_1 e^{\int \rho dx}, \quad \omega_2 = c_2 e^{\int \rho dx}, \quad \ldots \quad \omega_n = c_n e^{\int \rho dx}.$$

Ievietojot šīs izteiksmes pirmā vienādībā (6) un ievērojot to, ka eksponenciālā funkcija nav nulle, dabū pēc izdalīšanas ar to:

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n = 0,$$

t. i., ka funkcijas $f_1, f_2 \ldots f_n$ ir lineāri atkarīgas.

3. Funkciju lineārā atkarība vairāk mainīgu gadījumā.

Kellogg'a teorēma.

Nepieciešamais un pietiekošais noteikums tam, ka starp četrām analitiskām funkcijām $f_1(y, z)$, $f_2(y, z)$, $f_3(y, z)$ un $f_4(y, z)$ ir lineārs homogens nolīdzinājums

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 + c_4 f_4 = 0, \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

kur koeficienti c_1, c_2, c_3, c_4 neatkarīgi no y un z un nav visi nulles, ir tas, ka matricai

$$M = \left\| \begin{matrix} f_1 & f_{1y} & f_{1z} & f_{1yy} & f_{1yz} & f_{1zz} & f_{1yyy} & f_{1yyz} & f_{1yzz} & f_{1zzz} \\ f_2 & f_{2y} & f_{2z} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_3 & f_{3y} & f_{3z} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_4 & f_{4y} & f_{4z} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right\| \quad \ldots (9)$$

rangs ir mazāks par 4. Matricas rangs ir vienlīdzīgs līneāri neatkarīgo funkciju skaitam.

Burti x, y, z funkciju indekos apzīmē parciālo atvasināšanu.

Teorēma vienkāršības labā formulēta attiecībā uz 4 funkcijām, bet tā paliek līdzīgā veidā derīga arī vispārīgā gadījumā, kad funkciju skaits ir n. Matricai tad ir n rindu un stabiņi nobeidzas ar (n—1)-ās kārtas parciālām atvasinātām.

Noteikums ir nepieciešams, par ko pārliecinās parciāli diferencējot (8) un eliminējot c_1, c_2. c_3, c_4. Ka tas arī pietiekošs, viegli pārliecināties, kad funkcijas ir divas. Pieņemsim, ka matricai

$$M' = \begin{Vmatrix} f_1 & f_{1y} & f_{1z} \\ f_2 & f_{2y} & f_{2z} \end{Vmatrix}$$

rangs ir mazāks par 2. Pierādīsim, ka tādā gadījumā funkcijas ir līneāri atkarīgas.

Tā kā matrices rangs ir mazāks par 2, tad visi determinanti, ko no matricas var veidot, svītrojot stabiņus, ir nulles:

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_{1y} \\ f_2 & f_{2y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 & f_{1z} \\ f_2 & f_{2z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_{1y} & f_{1z} \\ f_{2y} & f_{2z} \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

No tā seko, pieņemot, ka neviena no funkcijām nav konstanta nulle

$$\frac{f_{1y}}{f_1} = \frac{f_{2y}}{f_2}, \quad \frac{f_{1z}}{f_1} = \frac{f_{2z}}{f_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

No pirmā nolīdzinājuma (11), ko var rakstīt šādi:

$$\frac{\partial}{\partial y}(lnf_1) = \frac{\partial}{\partial y}(lnf_2),$$

integrējot seko, ka $f_2 = C_1 f$, kur $C_1 = C_1(z)$. Iznākumu pārbaudot, otrā nolīdzinājumā (11) dabū, ka $C_1 = \text{const.} = c_1$. Tā tad, $f_2 = c_1 f_1$, kur c_1 neatkarājas ne no y, ne no z, t. i. funkcijas f_1 un f_2 ir līneāri atkarīgas.

Pieņemsim, ka teorēma pareiza attiecībā uz $n = 3$ funkcijām; pierādīsim, ka tad tā pareiza arī attiecībā uz $n + 1 = 4$ funkcijām.

Dota ir matrica M, kuŗas rangs ir 3, t. i. no nulles atšķiŗas vismaz viens trīsrindu determinants, ko var veidot, izdzēšot tai rindas un stabiņus. Ar rindu pārmaiņu vienmēr var sasniegt to, ka neizzūdošo dēterminantu veido elementi, kas ir matricas pirmajās 3 rindās. Sameklēsim stabiņus matricai M, no kuŗu rindām veidojas neizzūdošais determinants. Teiksim, tie veido matricu M''. Apskatīsim 4 rindu determinantu, ko dabū pievienojot matricai M'' vienu stabiņu no M, piem.:

$$\begin{vmatrix} f_1 & \\ f_2 & M'' \\ f_3 & \\ f_4 & \end{vmatrix} \qquad \ldots \ldots \ldots (12)$$

Divi gadījumi iespējami: 1) matricā M'' nav pievienotā stabiņa un 2) pievienotais stabiņš tur ir. Abos gadījumos determinants ir nulle: pirmajā gadījumā tāpēc, ka matricai M rangs ir 3, otrā gadījumā tāpēc, ka determinantā divi stabiņiem attiecīgie elementi ir vienādi. Determinantā (12) pirmā stabiņa vietā tikpat labi var ņemt citu matricas M stabiņu; visi determinanti, ko šā dabū, ir nulles.

Apzīmēsim apakšdeterminantus, kas atbilst pirmā stabiņa elementiem determinantā (12), attiecīgi ar A, B, C, D. Lai dabūtu A, matricā M'' jāizdzēš pirmā rinda. Lai dabūtu B, jāizdzēš otrā rinda, un dabūtais determinants jāņem ar negātīvu zīmi. Līdzīgā kārtā tālāk. Vismaz $D \neq 0$.

Izvirzīsim determinantu (12) pēc pirmā stabiņa elementiem, tāpat izvirzīsim determinantus, ko dabū apmainot pirmo stabiņu. Seko vienādības:

$$\left.\begin{array}{l} Af_1 + Bf_2 + Cf_3 + Df_4 = 0 \\ Af_{1y} + Bf_{2y} + Cf_{3y} + Df_{4y} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Af_{1yz} + Bf_{2yz} + Cf_{3yz} + Df_{4yz} = 0 \\ Af_{1zz} + Bf_{2zz} + Cf_{3zz} + Df_{4zz} = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (13)$$

$$\left.\begin{array}{l} Af_{1yyy} + Bf_{2yyy} + Cf_{3yyy} + Df_{4yyy} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Af_{1zzz} + Bf_{2zzz} + Cf_{3zzz} + Df_{4zzz} = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (13')$$

Koeficienti A, B, C, D vispārīgi atkarājas no y, z, bet to attiecības no šiem mainīgiem neatkarājas. Lai to parādītu, atvasināsim vienādības (13) parciāli pēc y, un iznākumu vienkāršošanai izlietāsim sakarības (13) un (13').

Seko, ka vienādības (13) paliek spēkā, ja A, B, C, D vietā liek šo funkciju parciālās atvasinātās A_y, B_y, C_y, D_y. Tā tad

$$A : B : C : D = A_y : B_y : C_y : D_y,$$

vai arī

$$\frac{A_y}{A}=\frac{B_y}{B}=\frac{C_y}{C}=\frac{D_y}{D},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(lnA)=\frac{\partial}{\partial y}(lnB)=\frac{\partial}{\partial y}(lnC)=\frac{\partial}{\partial y}(lnD).$$

Integrējot, seko, ka

$$lnA-lnB=lnB-lnb=lnC-lnc=lnD-lnd,$$

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}=\frac{D}{d},$$

kur integrācijas konstantas a, b, c, d no y neatkarājas. Tā tad attiecības

$$\frac{A}{D},\ \frac{B}{D},\ \frac{C}{D}$$

neatkarājas no y.

Līdzīgā kartā pierādām, ka tās neatkarājas no z. Tā tad, tās ir konstantas, un sakarību

$$Af_1+Bf_2+Cf_3+Df_4=0,$$

izdalot to ar D, var pārrakstīt šādi:

$$f_4=c_1f_1+c_2f_2+c_3f_3,$$

kur c_i — konstantas.

4. L i e t ā j u m i m a i n ī g o š ķ i r š a n a s p r o b l ē m ā. Kellogg's sava darba ievadā (Zeitschr. f. Math. u. Phys., 63. Bd., 1914, 159. lpp.), atzīmējis Gronwall'a u. c. nopelnus mainīgo šķiršanas problēmas atrisināšanā, saka: „Es iedrošinos dot rakstu par šo tematu vienīgi tāpēc, ka kritēriji, kuŗus es esmu atradis, kā šķiet, maz atstāj ko vēlēties lietāšanas vienkāršības ziņā, jo tie ietveŗ sevī tikai diferencēšanas un matricu rangu noteikšanu."

Ja funkciju $g(x, y, z)$ var pārveidot determinantā, kam mainīgie atšķirti katrs savā rindā, tad jāsecina, ka

$$g(x, y, z)=F_1X_1+F_2X_2+F_3X_3, \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

kur F_i atkarājas no y, z, bet X_i — tikai no x. Pieņemsim, ka funkcijas F_i ir savā starpā līneāri neatkarīgas; tāpat X_i. K ā p a z ī t, k a u z d o t a i f u n k c i j a i $g(x, y, z)$ i r t ā d s v e i d s (14)?

Atvasinot vienādību (14) parciāli, kad mainās x, dabū:

$$\begin{aligned} g_x &= F_1X_1'+F_2X_2'+F_3X_3',\\ g_{xx} &= F_1X_1''+F_2X_2''+F_3X_3'',\\ g_{xxx} &= F_1X_1'''+F_2X_2'''+F_3X_3'''. \end{aligned}$$

No šīm vienādībām kopā ar (14) var eliminēt F_i; tad redz, ka $g(x, y, z)$ atbilst diferenciālvienādojumam

$$\begin{vmatrix} g & X_1 & X_2 & X_3 \\ g_x & X_1' & X_2' & X_3' \\ g_{xx} & X_1'' & X_2'' & X_3'' \\ g_{xxx} & X_1''' & X_2''' & X_3''' \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots (15)$$

tā tad, funkcijas g, g_x, g_{xx}, g_{xxx} attiecībā uz y un z ir lineāri neatkarīgas, jo to koeficienti atkarājas tikai no x. Saskaņā ar Kellogg'a teorēmu par lineāri atkarīgām funkcijām, nepieciešamais un pietiekošais noteikums diferenciālvienādojuma (15) eksistēšanai ir tas, ka matricai

$$N = \left\| \begin{matrix} g & g_y & g_z & g_{yy} & \ldots & g_{zzz} \\ g_x & g_{xy} & g_{xz} & g_{xyy} & \ldots & g_{xzzz} \\ g_{xx} & g_{xxy} & g_{xxz} & g_{xxyy} & \ldots & g_{xxzzz} \\ g_{xxx} & g_{xxxy} & g_{xxxz} & g_{xxxyy} & \ldots & g_{xxxzzz} \end{matrix} \right\| \quad \ldots (16)$$

rangs ir mazāks par 4. Tas ir nepieciešamais noteikums tam, ka funkciju $g(x, y, z)$ var pārveidot determinantā

$$g(z, y, x) = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix} \quad \ldots \ldots \ldots (17)$$

kur mainīgie atšķirti katrs savā rindā.

$$X_i = X_i(x), \quad Y_i = Y_i(y), \quad Z_i = Z_i(z);$$

$$(i = 1, 2, 3).$$

Tālākais uzdevums ir atrast funkcijas, kas ir labajā pusē formulās (14) un (17).

a) Atrast X_1, X_2, X_3.

Pieņemot, ka nepieciešamais noteikums (16) izpildīts, visi matricā N ietelpstošie 4-rindu determinanti ir nulles. Sameklējam matricā N trīs stabiņus, no kuŗu rindām var veidot vienu neizzūdošu trīsrindu determinantu. Šos trīs stabiņus apzīmēsim ar N'.

$$\begin{vmatrix} g & \vdots & \\ g_x & \vdots & N' \\ g_{xx} & \vdots & \\ g_{xxx} & \vdots & \end{vmatrix} = 0.$$

Attīstot pēc pirmā stabiņa elementiem determinantu, dabū

$$Ag + Bg_x + Cg_{xx} + Dg_{xxx} = 0.$$

Viens no koeficientiem nav nulle, teiksim $D \neq 0$. Ja ar to izdala, dalījumos

$$\frac{A}{D},\ \frac{B}{D},\ \frac{C}{D}$$

izzūd y un z. Paliek

$$\bar{A}g + \bar{B}g_x + \bar{C}g_{xx} + g_{xxx} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

kur $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ — atkarājas no x.

Vienādojumam (18) jāatrod trīs neatkarīgi atrisinājumi; tie ir X_1, X_2, X_3.

b) Atrast F_1, F_2, F_3.

Uzskatot $X_i\,(i = 1, 2, 3)$ par zināmām funkcijām, atvasinām (14) divreiz parciāli pēc x:

$$\begin{aligned} g_x &= F_1 X_1' + F_2 X_2' + F_3 X_3' \\ g_{xx} &= F_1 X_1'' + F_2 X_2'' + F_3 X_3''. \end{aligned}$$

Attiecībā uz F_i tā ir nehomogenu līneāru nolīdzinājumu sistēma, no kuŗas kopā ar (14) seko:

$$F_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} g & X_2 & X_3 \\ g_x & X_2' & X_3' \\ g_{xx} & X_2'' & X_3'' \end{vmatrix} = F_1(y, z),$$

$$F_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} X_1 & g & X_3 \\ X_1' & g_x & X_3' \\ X_1'' & g_{xx} & X_3'' \end{vmatrix} = F_2(y, z),$$

$$F_3 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & g \\ X_1' & X_2' & g_x \\ X_1'' & X_2'' & g_{xx} \end{vmatrix} = F_3(y, z),$$

kur determinants

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_1' & X_2' & X_3' \\ X_1'' & X_2'' & X_3'' \end{vmatrix} \neq 0,$$

jo funkcijas X_1, X_2, X_3, saskaņā ar iesākumā pieņemto, ir līneāri neatkarīgas.

c) Atrast Y_i un Z_i $(i=1, 2, 3)$.

Salīdzinot (14) ar (17) redz, ka

$$F_1X_1+F_2X_2+F_3X_3=\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix};$$

tā tad, ievietojot abās pusēs X_i vietā Y_i un Z_i $(i=1, 2, 3)$:

$$F_1Y_1+F_2Y_2+F_3Y_3=0,$$
$$F_1Z_1+F_2Z_2+F_3Z_3=0.$$

Funkcijas F_i saista lineāras sakarības, kuŗu koeficienti atkarājas vienā gadījumā tikai no y, otrā — tikai no z.

Nepieciešamie un pietiekošie noteikumi tam, ka tādas sakarības ir spēkā, ir divu Vronska determinantu izzušana:

$$\begin{vmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ F_{1z} & F_{2z} & F_{3z} \\ F_{1zz} & F_{2zz} & F_{3zz} \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ F_{1y} & F_{2y} & F_{3y} \\ F_{1yy} & F_{2yy} & F_{3yy} \end{vmatrix}=0. \quad \ldots (19)$$

Y_1, Y_2, Y_3 ir proporcionāli vienas rindas minoriem pirmā determinantā (19); Z_1, Z_2, Z_3 ir proporcionāli vienas rindas minoriem otrā determinantā (19).

V. Mainīgo šķiršana funkcijai $F_1K_{23}+G_1L_{23}+H_1M_{23}$.

Pieņemsim, ka uzdotu funkciju, kas atkarājas no 3 mainīgiem z_1, z_2, z_3, var uzrakstīt divējādi:

$$F(z_1, z_2, z_3)=F_1K_{23}+G_1L_{23}+H_1M_{23}=\begin{vmatrix} F_1 & G_1 & H_1 \\ F_2 & G_2 & H_2 \\ F_3 & G_3 & H_3 \end{vmatrix}$$

Uzdevums ir atrast $F_i, G_i, H_i (i=2, 3)$.

No abu veidu vienādības seko, ka K, L, M ir minori, kas atbilst determinanta pirmai rindai:

$$\left.\begin{aligned} K_{23}&=\begin{vmatrix} G_2 & H_2 \\ G_3 & H_3 \end{vmatrix}=G_2H_3-H_2G_3, \\ L_{23}&=-\begin{vmatrix} F_2 & H_2 \\ F_3 & H_3 \end{vmatrix}=H_2F_3-F_2H_3, \\ M_{23}&=\begin{vmatrix} F_2 & G_2 \\ F_3 & G_3 \end{vmatrix}=F_2G_3-G_2F_3, \end{aligned}\right\} \quad \ldots (1)$$

No šīm vienādībām, kur K, L, M ir zināmas, no z_2 un z_3 atkarīgas funkcijas, jāatrod 6 nezināmas funkcijas. Ja vienadības (1) pareizina pēc kārtas ar F_i, G_i, H_i $(i = 2, 3)$ un reizinājumus saskaita, dabū vienādības

$$\left.\begin{aligned} F_2K_{23} + G_2L_{23} + H_2M_{23} = 0, \\ F_3K_{23} + G_3L_{23} + H_3M_{23} = 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

kuŗas var likt divu vienādību vietā sistēmā (1).

Lai atrastu F_2, G_2, H_2, ņemsim pirmo vienādību (2) un atvasināsim to parciāli pēc z_3. Tā dabūsim nolīdzinājumus ar nezināmiem F_2, G_2, H_2:

$$\left.\begin{aligned} F_2K_{23} + G_2L_{23} + H_2M_{23} &= 0, \\ F_2K_3' + G_2L_3' + H_2M_3' &= 0, \\ F_2K_3'' + G_2L_3'' + H_2M_3'' &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Simboli $K_3^{(i)}$, $L_3^{(i)}$, $M_3^{(i)}$ apzīmē i-tos parciālos atvasinājumus pēc z_3 funkcijām K_{23}, L_{23}, M_{23}.

Trīs homogeniem nolīdzinājumiem ar 3 nezināmiem, kā zināms, ir netriviāls atrisinājums tikai tai gadījumā, ja koeficientu determinants identiski ir nulle. Tā tad, lai nolīdzinājumiem (3) būtu atrisinājums, kas atšķiŗas no $F_2 = G_2 = H_2 = 0$, funkcijām K, L, M jābūt tādām, ka

$$\begin{vmatrix} K_{23} & L_{23} & M_{23} \\ K_3' & L_3' & M_3' \\ K_3'' & L_3'' & M_3'' \end{vmatrix} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Ja noteikums (4) ir spēkā, tad nezināmo funkciju F_2, G_2, H_2 aprēķināšanai var ņemt ikkatrus divus sistēmas (3) nolīdzinājumus, piemēram, divus pirmos. No tiem seko:

$$F_2 : G_2 : H_2 = \begin{vmatrix} L_{23} & M_{23} \\ L_3' & M_3' \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} K_{23} & M_{23} \\ K_3' & M_3' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} K_{23} & L_{23} \\ K_3' & L_3' \end{vmatrix}. \quad . \; . (5)$$

Determinantus proporcijas labā pusē var dabūt no tabulas

$$\left\| \begin{matrix} K_{23} & L_{23} & M_{23} \\ K_3' & L_3' & M_3' \end{matrix} \right\|,$$

nostrīpojot pēc kārtas pirmo, otro un trešo stabiņu, un iznākumu ņemot pārmijus ar $+$ un $-$ zīmēm.

Pārliecināsimies, ka attiecības $F_2 : G_2 : H_2$, kas aprēķinātas saskaņā ar priekšrakstu (5), atkarājas tikai no z_2. Atvasināsim tās parciāli pēc z_3:

$$\frac{\partial}{\partial z_3}\frac{F_2}{H_2}=\frac{\partial}{\partial z_3}\left\{\begin{vmatrix} L_{23} & M_{23} \\ L_3' & M_3' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} K_{23} & L_{23} \\ K_3' & L_3' \end{vmatrix}\right\},$$

$$\frac{\partial}{\partial z_3}\frac{G_2}{H_2}=-\frac{\partial}{\partial z_3}\left\{\begin{vmatrix} K_{23} & M_{23} \\ K_3' & M_3' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} K_{23} & L_{23} \\ K_3' & L_3' \end{vmatrix}\right\}.$$

Izdarot atvasināšanu un nokārtojot iznākumu atrodam galīgi:

$$\frac{\partial}{\partial z_3}\frac{F_2}{H_2}=L_{23}\begin{vmatrix} K_{23} & L_{23} & M_{23} \\ K_3' & L_3' & M_3' \\ K_3'' & L_3'' & M_3'' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} K_{23} & L_{23} \\ K_3' & L_3' \end{vmatrix}^2$$

$$\frac{\partial}{\partial z_3}\frac{G_2}{H_2}=-K_{23}\begin{vmatrix} K_{23} & L_{23} & M_{23} \\ K_3' & L_3' & M_3' \\ K_3'' & L_3'' & M_3'' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} K_{23} & L_{23} \\ K_3' & L_3' \end{vmatrix}^2$$

No funkcijām F_2, G_2, H_2 tikai viena drīkst būt nulle. Pieņemsim, ka H_2 (daļu saucējs) nav nulle; pretējā gadījumā par dalītāju jāņem F_2 vai G_2. Tā kā determinants (4) ir nulle, tad

$$\frac{\partial}{\partial z_3}\frac{F_2}{H_2}=0,\quad \frac{\partial}{\partial z_3}\frac{G_2}{H_2}=0,$$

t. i. attiecības $F_2 : G_2 : H_2$ atkarīgas tikai no z_2.

Tādā pašā kārtā atrodam $F_3 : G_3 : H_3$. No vienādībām (2) ņemam pēdējo un atvasinām parciāli pēc z_2:

$$\begin{aligned} F_3K_{23} + G_3L_{23} + H_3M_{23} &= 0, \\ F_3K_2' + G_3L_2' + H_3M_2' &= 0, \quad \ldots\ldots\ldots (5') \\ F_3K_2'' + G_3L_2'' + H_3M_2'' &= 0. \end{aligned}$$

F_3, G_3, H_3 ir nezināmās funkcijas; K, L, M un to atvasinājumi — zināmās. Ja uzskatām F_3, G_3, H_3 par nezināmiem, tad (5′) ir homogenu līneāru nolīdzinājumu sistēma, kuŗai meklējam netriviālu atrisinājumu. Tā tad

$$\begin{vmatrix} K_{23} & L_{23} & M_{23} \\ K_2' & L_2' & M_2' \\ K_2'' & L_2'' & M_2'' \end{vmatrix}=0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Ja noteikums (6) izpildīts, tad var aprēķināt attiecības:

$$F_3 : G_3 : H_3 : = \begin{vmatrix} L_{23} & M_{23} \\ L_2' & M_2' \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} K_{23} & M_{23} \\ K_2' & M_2' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} K_{23} & L_{23} \\ K_2' & L_2' \end{vmatrix} \quad \ldots (7)$$

un tās atkarājas tikai no z_3.

Determinantiem (5) un (7) ir kopīgi dalītāji λ vai attiecīgi μ. Atmetot šos „liekos" dalītājus (izdalot ar tiem determinantus), atrodam nezināmās funkcijas:

$$\left.\begin{aligned} F_2 &= \frac{1}{\lambda}\begin{vmatrix} L_{23} & M_{23} \\ L'_3 & M'_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda}(L_{23}M'_3 - M_{23}L'_3), \\ G_2 &= -\frac{1}{\lambda}\begin{vmatrix} K_{23} & M_{23} \\ K'_3 & M'_3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\lambda}(K_{23}M'_3 - M_{23}K'_3), \\ H_2 &= \frac{1}{\lambda}\begin{vmatrix} K_{23} & L_{23} \\ K'_3 & L'_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda}(K_{23}L'_3 - L_{23}K'_3), \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (8)$$

un tāpat:

$$\left.\begin{aligned} F_3 &= \frac{1}{\mu}\begin{vmatrix} L_{23} & M_{23} \\ L'_2 & M'_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu}(L_{23}M'_2 - M_{23}L'_2), \\ G_3 &= -\frac{1}{\mu}\begin{vmatrix} K_{23} & M_{23} \\ K'_2 & M'_2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\mu}(K_{23}M'_2 - M_{23}K'_2), \\ H_3 &= \frac{1}{\mu}\begin{vmatrix} K_{23} & L_{23} \\ K'_2 & L'_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu}(K_{23}L'_2 - L_{23}K'_2). \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (9)$$

Funkcijas λ un μ saista vienkārša sakarība, ko atrodam, ievietojot funkcijas (8) un (9) kādā no vienādībām (1), piem., pirmā:

$$K_{23} = \begin{vmatrix} G_2 & H_2 \\ G_3 & H_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda\mu}\begin{vmatrix} M_{23}K'_3 - K_{23}M'_3 & K_{23}L'_3 - L_{23}K'_3 \\ M_{23}K'_2 - K_{23}M'_2 & K_{23}L'_2 - L_{23}K'_2 \end{vmatrix}$$

No tā seko:

$$\lambda\mu = -\begin{vmatrix} K_{23} & L_{23} & M_{23} \\ K'_2 & L'_2 & M'_2 \\ K'_3 & L'_3 & M'_3 \end{vmatrix} \quad \ldots \quad (10)$$

Tā kā neviens no dalītājiem λ un μ nedrīkst būt nulle, tad noteikumiem (4) un (6) jāpievieno vēl trešais:

$$\begin{vmatrix} K_{23} & L_{23} & M_{23} \\ K'_2 & L'_2 & M'_2 \\ K'_3 & L'_3 & M'_3 \end{vmatrix} \neq 0. \quad \ldots \quad (11)$$

VI. Mainīgo šķiršana dažiem kanoniskiem funkciju tipiem.

Piemērs I. $F_{123} = f_1 + f_2 + f_3$. Funkciju var uzrakstīt nomografiski sakārtotā veidā pieņemot:

$$F_1 = f_1, \quad G_1 = 1, \quad H_1 = 1;$$
$$K_{23} = 1, \quad L_{23} = f_2, \quad M_{23} = f_3.$$

Tā izpilda prasības, kas izteiktas iepriekšējā nodaļā formulās (4), (6) un (11):

$$\begin{vmatrix} 1 & f_2 & f_3 \\ 0 & f_2' & 0 \\ 0 & f_2'' & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & f_2 & f_3 \\ 0 & 0 & f_3' \\ 0 & 0 & f_3'' \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda\mu = -\begin{vmatrix} 1 & f_2 & f_3 \\ 0 & f_2' & 0 \\ 0 & 0 & f_3' \end{vmatrix} = -f_2'f_3' \neq 0,$$

tā tad, to var uzrakstīt determinanta veidā. Nezināmās funkcijas:

$$\begin{Vmatrix} 1 & f_2 & f_3 \\ 0 & 0 & f_3' \end{Vmatrix}$$

$$F_2 : G_2 : H_2 = f_2 f_3' : -f_3' : 0 = f_2 - 1 : 0 \, (\lambda = f_3')$$

$$\begin{Vmatrix} 1 & f_2 & f_3 \\ 0 & f_2' & 0 \end{Vmatrix}$$

$$F_3 : G_3 : H_3 = -f_2' f_3 : 0 : f_2' = f_3 : 0 : -1 \, (\mu = -f_2').$$

Tā tad:

$$F_{123} = f_1 + f_2 + f_3 = \begin{vmatrix} f_1 & 1 & 1 \\ f_2 & -1 & 0 \\ f_3 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Iznākuma pareizību var pārbaudīt izvirzot determinantu. Nolīdzinājumu $F_{123} = 0$ šinī gadījumā attēlo nomogramma, kas sastāv no 3 parallēlām skālām.

To pašu funkciju var pakļaut vispārīgam tipam, rakstot:

$$F_{123} = f_1 + f_2 + f_3 = f_1 \,.\, 1 + 1 \,.\, (f_2 + f_3) + 0 \,.\, M_{23},$$

tā tad, pieņemot:

$$F_1 = f_1, \quad G_1 = 1, \quad H_1 = 0;$$
$$K_{23} = 1, \quad L_{22} = f_2 + f_3, \quad M_{23} \text{ — nenoteikta.}$$

Funkcija M_{23} jāizvēl tā, lai būtu izpildītas 3 prasības.

Vispirms

$$\begin{vmatrix} 1 & f_2+f_3 & M_{23} \\ 0 & f_3' & M_3' \\ 0 & f_3'' & M_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_3' & M_3' \\ f_3'' & M_3'' \end{vmatrix} = 0.$$

No tā seko integrējot, ka

$$M_{23} = A_2 f_3 + B_2, \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

kur A_2 un B_2 — funkcijas z_2.

Saskaņā ar otru prasību, funkcijai M_{23} jābūt tādai, ka

$$\begin{vmatrix} 1 & f_2+f_3 & M_{23} \\ 0 & f_2' & M_2' \\ 0 & f_2'' & M_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_2' & M_2' \\ f_2'' & M_2'' \end{vmatrix} = 0.$$

Izvirzot beidzamo determinantu un liekot M_{23} vietā izteiksmi (1), dabū:

$$f_2'(A_2''f_3 + B_2'') - f_2''(A_2'f_3 + B_2') = 0,$$

$$f_3(f_2'A_2'' - f_2''A_2') + (f_2'B_2'' - f_2''B_2') = 0.$$

Šī vienādība ir spēkā neatkarīgi no z_3, tāpēc abām iekavām identiski jāizzūd:

$$f_2'A_2'' - f_2''A_2' = 0, \text{ tā tad } A_2 = af_2 + c;$$

$$f_2'B_2'' - f_2''B_2' = 0, \text{ „ „ } B_2 = bf_2 + d.$$

Tā tad:

$$M_{23} = A_2 f_3 + B_2 = af_2 f_3 + bf_2 + cf_3 + d \quad \ldots\ldots (2)$$

Integrācijas konstantas a, b, c, d nedrīkst būt pretrunā trešajam noteikumam:

$$-\begin{vmatrix} 1 & f_2+f_3 & M_{23} \\ 0 & f_2' & M_2' \\ 0 & f_3' & M_3' \end{vmatrix} = f_3'M_2' - f_2'M_3' \neq 0.$$

Ieliekam M vietā izteiksmi (2):

$$-f_2'f_3'[a(f_2 - f_3) + (c - b)] \neq 0. \quad \ldots\ldots (3)$$

Tas ir izpildīts, ja a, b un c ir tādi, ka stūrainā iekava nav nulle. Iekava var būt nulle tikai tad, ja $a = 0$ un reizē $b = c$, tā tad, ja pieņem $M_{23} = c(f_2 + f_3) + d$. Šo gadījumu neapskatot, aprēķinām:

$$F_2 : G_2 : H_2 \text{ no } \begin{Vmatrix} 1 & f_2+f_3 & M_{23} \\ 0 & f_3' & M_3' \end{Vmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} F_2 &= af_2^2 + (c-b)f_2 - d \\ G_2 &= -(af_2 + c) \\ H_2 &= -1 \end{aligned}\right\} (\lambda = f_3') \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

$$F_3 : G_3 : H_3 \text{ no } \left\| \begin{matrix} 1 & f_2 + f_3 & M_{23} \\ 0 & f_2' & M_2' \end{matrix} \right\|$$

$$\left.\begin{aligned} F_3 &= -af_3^2 + (c-b)f_3 + d \\ G_3 &= af_3 + b \\ H_3 &= -1 \end{aligned}\right\} (\mu = -f_2') \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Funkcijas F_i, G_i, H_i $(i = 2, 3)$ uzrakstītas, atmetot λ un μ, kas kopīgi visiem attiecību $F_i : G_i : H_i$ locekļiem. Salīdzinot (3) ar $\lambda\mu$ redzam, ka vēl ir faktors

$$\nu = a(f_2 - f_3) + (c - b), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

ar kuŗu nav dalīts. Ar šo atlikušo faktoru, kad rakstām uzdoto funkciju determinanta veidā, izdalām visu determinantu.

$$F_{123} = f_1 + f_2 + f_3 = \frac{1}{\nu} \begin{vmatrix} f_1 & 1 & 0 \\ F_2 & G_2 & 1 \\ F_3 & G_3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\nu} \begin{vmatrix} 0 & 1 & f_1 \\ -1 & G_2 & F_2 \\ 1 & G_3 & F_3 \end{vmatrix}$$

kur F_i, G_i, $(i = 2, 3)$ un ν vietā jāliek atrastās funkcijas (4), (5) un (6).

Determinants beidzamā veidā noteic trīs skālas, no kuŗām pirmā $(x_1 = 0, y_1 = 1 : f_1)$ ir taisna un atrodas uz ordinātu ass. Otrā jākonstruē saskaņā ar priekšrakstu:

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= -\frac{1}{F_2} = \frac{-1}{af_2^2 + (c-b)f_2 - d}, \\ y_2 &= \frac{G_2}{F_2} = \frac{-(af_2 + c)}{af_2^2 + (c-b)f_2 - d}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

un trešā saskaņā ar priekšrakstu:

$$x_3 = \frac{1}{F_3}, \quad y_3 = \frac{G_3}{F_3}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7')$$

Abas beidzamās skālas ir uz kopīgas kōniskās līknes, par ko pārliecināmies eliminējot no (7) un (7′) parametrus f_2 vai f_3. Eliminācija dod kōniskās līknes nolīdzinājumu:

$$(bc - ad)x^2 - (b + c)xy + y^2 + ax = 0.$$

Lai līkne būtu plāknē simmetriska pret abscīzu asi, pieņemsim, ka $b+c=0$. Tādā gadījumā mums ir

$$\begin{aligned} &\text{elīpse,} && \text{ja } bc-ad>0, \\ &\text{hiperbola} && \text{,, } bc-ad<0, \\ &\text{parabola} && \text{,, } bc-ad=0. \end{aligned}$$

Pieņēmums $bc-ad=1$ pārvērš elīpsi riņķī. Līkne sadalās divās taisnēs, ja $a=0$.

Piemērs II. $F_{123}=f_1+f_2h_3$.

Uzdoto funkciju var uzrakstīt sekojošā sakārtotā veidā:

$$F_{123}=f_1\,.\,1+1\,.\,f_2h_3-0\,.\,M_{23},$$

tā tad, pieņemot

$$F_1=f_1,\quad G_1=1,\quad H_1=0;$$
$$K_{23}=1,\quad L_{23}=f_2h_3,\quad M_{23}\text{ — nenoteikts.}$$

Funkcijas M_{23} aprēķināšanai mums ir vispirms noteikums:

$$\begin{vmatrix} 1 & f_2h_3 & M_{23} \\ 0 & f_2h_3' & M_3' \\ 0 & f_2h_3'' & M_3'' \end{vmatrix} = f_2 \begin{vmatrix} h_3' & M_3' \\ h_3'' & M_3'' \end{vmatrix} = 0,$$

un tā tad:

$$M_{23}=A_2h_3+B_2, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

kur integrācijas konstantas A_2 un B_2 atkarājas no z_2. Otrs noteikums:

$$\begin{vmatrix} 1 & f_2h_3 & M_{23} \\ 0 & f_2'h_3 & M_2' \\ 0 & f_2''h_3 & M_2'' \end{vmatrix} = h_3 \begin{vmatrix} f_2' & M_2' \\ f_2'' & M_2'' \end{vmatrix} = 0,$$

$$f_2'M_2''-f_2''M_2'=0.$$

Ieliekot M vietā izteiksmi (8), redzam, ka

$$h_3(f_2'A_2''-f_2''A_2')+(f_2'B_2''-f_2''B_2')=0.$$

Šai prasībai jābūt izpildītai identiski, tāpēc iekavas ir nulles. No tā seko:

$$A_2=af_2+c,\quad B_2=bf_2+d,$$
$$M_{23}=A_2h_3+B_2=af_2h_3+bf_2+ch_3+d. \quad \ldots \ldots \quad (8')$$

Integrācijas konstantām a, b, c, d jābūt tādām, ka lieko faktoru reizinājums

$$\lambda\mu\nu = -\begin{vmatrix} 1 & f_2h_3 & M_{23} \\ 0 & f_2'h_3 & M_2' \\ 0 & f_2h_3' & M_3' \end{vmatrix} = f_2'h_3'(bf_2 - ch_3) \neq 0,$$

tā tad, b un c nedrīkst izzust reizē.

Pieņemot, ka šis noteikums izpildīts, aprēķinām:

$$F_2 : G_2 : H_2 \text{ no } \begin{Vmatrix} 1 & f_2h_3 & M_{23} \\ 0 & f_2h_3' & M_3' \end{Vmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} F_2 &= f_2(bf_2 + d) \\ G_2 &= af_2 + c \\ H_2 &= -f_2 \end{aligned}\right\} (\lambda = -h_3')$$

$$F_3 : G_3 : H_3 \text{ no } \begin{Vmatrix} 1 & f_2h_3 & M_{23} \\ 0 & f_2'h_3 & M_2' \end{Vmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} F_3 &= h_3(ch_3 + d) \\ G_3 &= ah_3 + b \\ H_3 &= -h_3 \end{aligned}\right\} (\mu = -f_2').$$

Tā tad:

$$F_{123} = f_1 + f_2h_3 = \frac{1}{bf_2 - ch_3}\begin{vmatrix} f_1 & 1 & 0 \\ f_2(bf_2 + d) & af_2 + c & -f_2 \\ h_3(ch_3 + d) & ah_3 + b & -h_3 \end{vmatrix}.$$

Vai arī, pareizinot trešo stabiņu ar d (a) un reizinājumu pieskaitot pirmam (otram):

$$F_{123} = f_1 + f_2h_3 = \frac{1}{bf_2 - ch_3}\begin{vmatrix} f_1 & 0 & 1 \\ bf_2^2 & f_2 & c \\ ch_3^2 & h_3 & b \end{vmatrix}.$$

Lai palielinātu determinantā patvaļīgo konstantu skaitu, uzrakstīsim to šādi:

$$\begin{vmatrix} f & 0 & 1 + mf_1 \\ bf_2^2 & f_2 & c + mbf_2^2 \\ ch_3^2 & h_3 & b + mch_3^2 \end{vmatrix},$$

kur m — izvēlēts pēc patikas. Konstruēsim trīs skālas:

$$\text{I)}\quad x_1 = \frac{f_1}{1 + mf_1}, \quad y_1 = 0;$$

šī ir taisna un uz abscīzu ass.

$$\text{II)}\quad x_2 = \frac{bf_2^2}{c + mbf_2^2}, \quad y_2 = \frac{f_2}{c + mbf_2^2}$$

$$\text{III)}\quad x_3 = \frac{ch_3^2}{b + mch_3^2},\quad y_3 = \frac{h_3}{b + mch_3^2};$$

tās ir līkas un uz kopīgas kōniskās līknes, kuŗas nolīdzinājumu atrod eliminējot f_2 un h_3 no skālu nolīdzinājumiem:

$$mx^2 + bcy^2 - x = 0.$$

Līkne, kuŗu šis nolīdzinājums izteic, ir simmetriska pret abscīzu asi un iet caur koordinātu asu iesākumu. Tā būs vispārīgi

elīpse	ja	$mbc > 0,$
hiperbola	„	$mbc < 0,$
parabola	„	$mbc = 0\ (bc \neq 0).$

Speciāli tā pārvēršas

riņķī	ja	$bc = m,$
divās taisnēs	„	$bc = 0\ (m \neq 0).$

Piemērs III. $F_{123} = f_1 f_3 + f_2\varphi + \psi_3$. Mainīgos šinī gadījumā visvieglāk atšķirt, ja funkciju sakārto nomografiski attiecībā pret trešo mainīgo, t. i. pieņemot

$$F_3 = f_3,\quad G_3 = \varphi_3,\quad H_3 = \psi_3;$$
$$K_{12} = f_1,\quad L_{12} = f_2,\quad M_{12} = 1.$$

Viegli pārliecināties, ka K, L, M apmierina visus noteikumus:

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & 1 \\ f_1' & 0 & 0 \\ f_1'' & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & 1 \\ 0 & f_2' & 0 \\ 0 & f_2'' & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda\mu = -\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & 1 \\ f_1' & 0 & 0 \\ 0 & f_2' & 0 \end{vmatrix} = -f_1' f_2' \neq 0.$$

Nezināmo funkciju attiecības:

$$F_1 : G_1 : H_1 = -f_2' : 0 : f_1 f_2'$$
$$F_2 : G_2 : H_2 = 0 : f_1' : -f_2 f_1'.$$

Pašas funkcijas:

$$F_1 = 1,\quad G_1 = 0,\quad H_1 = -f_1;\quad (\lambda = -f_2')$$
$$F_2 = 0,\quad G_2 = 1,\quad H_2 = -f_2.\quad (\mu = f_1').$$

Tā tad:

$$F_{123} = f_1 f_3 + f_2\varphi + \psi_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -f_1 \\ 0 & 1 & -f_2 \\ f_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots (9')$$

Nolīdzinājumu $F_{123} = 0$ attēlo nomogramma, kas sastāv no vienas līkas un divām taisnām skālām.

Sakārtosim funkciju vēl attiecībā pret kādu citu mainīgo (piem., z_1):

$$F_{123} = f_1 \cdot f_2 + 1 \cdot (f_2 \varphi_3 + \psi_3) + 0 \cdot M_{23},$$

tā kā

$$F_1 = f_1, \quad G_1 = 1, \quad H_1 = 0;$$
$$K_{23} = f_3, \quad L_{23} = f_2 \varphi_3 + \psi_3, \quad M_{23} \text{ — nenoteikta.}$$

Funkcijām K, L, M jābūt tādām, ka to Vronska determinanti attiecībā pret abiem mainīgiem identiski izzūd. Šie noteikumi palīdz atrast M. No noteikuma

$$\begin{vmatrix} f_3 & f_2\varphi_3 + \psi_3 & M_{23} \\ 0 & f_2'\varphi_3 & M_2' \\ 0 & f_2''\varphi_3 & M_2'' \end{vmatrix} = f_2\varphi_3 \begin{vmatrix} f_2' & M_2' \\ f_2'' & M_2'' \end{vmatrix} = 0.$$

seko, ka M ir lineāra funkcija f_2:

$$M_{23} = A_3 f_2 + B_3, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (9)$$

kur integrācijas konstantas A un B vispārīgi atkarājas no z_3. No otra noteikuma

$$\begin{vmatrix} f_3 & f_2\varphi_3 + \psi_3 & M_{23} \\ f_3' & f_2\varphi_3' + \psi_3' & M_3' \\ f_3'' & f_2\varphi_3'' + \psi_3'' & M_3'' \end{vmatrix} = 0,$$

ieliekot M vietā augšā atrasto izteiksmi (9) un tā iegūto determinantu uzrakstot summas veidā, seko:

$$f_2^2 \cdot \Delta_0 + f_2 \cdot (\Delta_1 + \Delta_2) + \Delta_3 = 0, \quad \ldots \ldots (10)$$

kur:

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} f_3 & \varphi_3 & A_3 \\ f_3' & \varphi_3' & A_3' \\ f_3'' & \varphi_3'' & A_3'' \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} f_3 & \varphi_3 & B_3 \\ f_3' & \varphi_3' & B_3' \\ f_3'' & \varphi_3'' & B_3'' \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} f_3 & \psi_3 & A_3 \\ f_3' & \psi_3' & A_3' \\ f_3'' & \psi_3'' & A_3'' \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} f_3 & \psi_3 & B_3 \\ f_3' & \psi_3' & B_3' \\ f_3'' & \psi_3'' & B_3'' \end{vmatrix}.$$

Vienādībai (10) jābūt spēkā identiski, kas iespējams tikai, ja

$$\Delta_0 = 0, \quad \Delta_1 + \Delta_2 = 0, \quad \Delta_3 = 0.$$

No tā, ka $\Delta_0 = \Delta_3 = 0$, seko, ka A_3 un B_3 ir lineāras funkcijas, kas atkarājas no f_3, φ_3 vai f_3, ψ_3:

$$A_3 = af_3 + b\varphi_3, \quad B_3 = cf_3 + d\psi_3.$$

Ieliekot šīs vērtības determinantos Δ_1 un Δ_2, pārliecināmies, ka $\Delta_1 + \Delta_2$ var identiski izzust tikai tad, ja $d = b$. To ievērojot

$$M_{23} = A_3 f_2 + B_3 = af_2 f_3 + bf_2\varphi_3 + cf_3 + b\psi_3$$

Liekie faktori nedrīkst būt nulles:

$$\lambda\mu = -\begin{vmatrix} f_3 & f_2\varphi_3 + \psi_3 & M_{23} \\ 0 & f_2'\varphi_3 & M_2' \\ f_3' & f_2\varphi_3' + \psi_3' & M_3' \end{vmatrix} = af_2' f_3 \begin{vmatrix} f_3 & f_2\varphi_3 + \psi_3 \\ f_3' & f_2\varphi_3' + \psi_3' \end{vmatrix} \neq 0,$$

tā tad, a neizzūd ($a \neq 0$).

Aprēķinām tagad funkcijas, no kuŗām sastāv meklētais determinants:

$$F_2 : G_2 : H_2 \text{ no } \begin{Vmatrix} f_3 & f_2\varphi_3 + \psi_3 & M_{23} \\ f_3' & f_2\varphi_3' + \psi_3' & M_3' \end{Vmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} F_2 &= -(af_2 + c) \\ G_2 &= -b \\ H_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \left(\lambda = \begin{vmatrix} f_3 & f_2\varphi_3 + \psi_3 \\ f_3' & f_2\varphi_3' + \psi_3' \end{vmatrix} \right)$$

$$F_3 : G_3 : H_3 \text{ no } \begin{Vmatrix} f_3 & f_2\varphi_3 + \psi_3 & M_{23} \\ 0 & f_2'\varphi_3, & M_2' \end{Vmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} F_3 &= a\psi_3 - c\varphi_3 \\ G_3 &= -(af_3 + b\varphi_3) \\ H &= \varphi_3 \end{aligned}\right\} (\mu = f_2' f_3)$$

Tā tad:

$$F_{123} = f_1 f_3 + f_2\varphi_3 + \psi_3 = \frac{1}{a} \begin{vmatrix} f_1 & 1 & 0 \\ -(af_2 + c) & -b & 1 \\ a\psi_3 - c\varphi_3 & -(af_3 + b\varphi_3) & \varphi_3 \end{vmatrix}$$

vai arī, pareizinot trešo stabiņu ar c (un b) un reizinājumu pieskaitot pirmajam (otram) stabiņam:

$$F_{123} = f_1 f_3 + f_2\varphi_3 + \psi_3 = \frac{1}{a} \begin{vmatrix} f_1 & 1 & 0 \\ -af_2 & 0 & 1 \\ a\psi_3 & -af_3 & \psi_3 \end{vmatrix}$$

Šis rakstības veids īstenībā neatšķiŗas no iesākumā atrastā (9′). Nomogramma, kas gadījumam atbilst, sastāv no divi taisnām un vienas līkas skālas. Šo funkciju, tā tad, nevar attēlot ar vairākiem principiāli dažādiem paņēmieniem, kā tas bija pirmos divos piemēros.

Piemērs IV. $F_{123} = f_1 f_2 f_3 + (f_1 + f_2)\varphi_3 + \psi_3$.

Uzrakstīsim funkciju šādā veidā (sakārtotā attiecībā pret mainīgo z_1):

$$F_{123} = f_1 (f_2 f_3 + \varphi_3) + 1 \, . \, (f_2 \varphi_3 + \psi_3) + 0 \, . \, M_{23},$$

tā tad, pieņemsim:

$$\begin{array}{lll} F_1 = f_1 & G_1 = 1 & H_1 = 0 \\ K_{23} = f_2 f_3 + \varphi_3 & L_{23} = f_2 \varphi_3 + \psi_3 & M_{23} \text{ — nenoteikts} \end{array}$$

un aprēķināsim funkciju M tā, kā prasa mainīgo atšķiršanas noteikumi. No (6) nod. VI. seko, tāpat kā iepriekšējā piemērā, ka funkcija M lineāri atkarīga no f_2, un tās vispārīgo veidu izteic formula (9). No (4) nod. VI. seko, ka

$$f_2^3 \Delta_0 + f_2^2 (\Delta_1 + \Delta_2) + f_2 (\Delta_3 + \Delta_4) + \Delta_5 = 0,$$

kur Δ_0, Δ_1, Δ_2 un Δ_3 apzīmē to pašu, ko vienādībā (10), bet

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} \varphi_3 & \psi_3 & A_3 \\ \varphi_3' & \psi_3' & A_3' \\ \varphi_3'' & \psi_3'' & A_3'' \end{vmatrix} \quad \text{un} \quad \Delta_5 = \begin{vmatrix} \varphi_3 & \psi_3 & B_3 \\ \varphi_3' & \psi_3' & B_3' \\ \varphi_3'' & \psi_3'' & B_3'' \end{vmatrix}.$$

Tā kā jābūt $\Delta_0 = \Delta_5 = 0$, tad A un B ir izteiksmes, kā iepriekšējā piemērā. Divi pārējie noteikumi ($\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta_3 + \Delta_4 = 0$) tomēr ierobežo konstantu izvēli un spiež pieņemt $c = a$, $d = b$, un beidzot

$$M_{23} = a f_2 f_3 + b f_2 \varphi_3 + a \varphi_3 + b \psi_3.$$

Izrādās, ka šinī gadījumā, lai apmierinātu noteikumus (4) un (6) nod. VI., jāpieņem, ka funkcija M lineāri atkarīga no K un $L (M = aK + bL)$. Tāds pieņēmums runā pretīm noteikumam (11) nod. VI., tāpēc ka tad reizinājums $\lambda\mu$ ir nulle. Tā tad, funkciju F šinī gadījumā nevar attēlot nomografiski, izejot no augšējā sakārtojuma ($F_1 = f_1$, $G_1 = 1$, $H_1 = 0$).

Tā kā f_1 un f_2 stāvoklis funkcijā F_{123} ir simmetrisks, tad secinājums attiecas arī uz mainīgo z_2. Atliek sakārtojums

$$\begin{array}{lll} F_3 = f_3 & G_3 = \varphi_3 & H_3 = \psi_3 \\ K_{12} = f_1 f_2 & L_{12} = f_1 + f_2 & M_{12} = 1 \end{array}$$

Šie K, L, M apmierina visus nepieciešamos noteikumus:

$$\begin{vmatrix} f_1 f_2 & f_1 + f_2 & 1 \\ f_1' f_2 & f_1' & 0 \\ f_1'' f_2 & f_1'' & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 f_2 & f_1 + f_2 & 1 \\ f_1 f_2' & f_2' & 0 \\ f_1 f_2'' & f_2'' & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\lambda\mu\nu = -\begin{vmatrix} f_1 f_2 & f_1 + f_2 & 1 \\ f_1' f_2 & f_1' & 0 \\ f_1 f_2' & f_2' & 0 \end{vmatrix} = f_1' f_2' (f_1 - f_2) \neq 0.$$

Aprēķinām vajadzīgā determinanta elementus:

$$F_1 : G_1 : H_1 \text{ no } \begin{Vmatrix} f_1 f_2 & f_1 + f_2 & 1 \\ f_1 f_2' & f_2' & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= 1 \\ G_1 &= -f_1 \\ H_1 &= f_1^2 \end{aligned}\right\} (\lambda = -f_2')$$

$$F_2 : G_2 : H_2 \text{ no } \begin{Vmatrix} f_1 f_2 & f_1 + f_2 & 1 \\ f_1' f_2 & f_1' & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} F_2 &= 1 \\ G_2 &= -f_2 \\ H_2 &= f_2^2 \end{aligned}\right\} (\mu = -f_1').$$

Tā tad

$$F_{123} = f_1 f_2 f_3 + (f_1 + f_2)\varphi_3 + \psi_3 = \frac{1}{f_1 - f_2} \begin{vmatrix} 1 & -f_1 & f_1^2 \\ 1 & -f_2 & f_2^2 \\ f_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix}.$$

Nomografiskais attēls vispārīgā gadījumā, kad funkcijas f_3, φ_3, ψ_3 nav lineāri atkarīgas, sastāv no 3 līkām skālām, no kuŗām divas ir uz kopīgas kōniskās līknes. Kāds cits, principiāli citāds attēlošanas veids šinī piemērā n a v i e s p ē j a m s.

VII. Trešās nomografiskās kārtas nolīdzinājumi ar 3 mainīgiem vispārīgā veidā.

Trešās nomografiskās kārtas nolīdzinājumu ar 3 mainīgiem R. Soreau un M. d'Ocagne raksta vispārīgā veidā šādi:

$$A f_1 f_2 f_3 + \Sigma B_i f_j f_k + \Sigma C_i f_i + D = 0,$$

kur A, B, C, D — konstantas un i, j, k — ciparu 1, 2, 3 cikliskās permūtācijas. Lai determinanti būtu simmetriski, rakstīsim nolīdzinājuma kreiso pusi citādos koeficientu apzīmējumos, proti šādā sakārtotā veidā:

$$\begin{aligned} F_{123} = f_1(A f_2 f_3 + B f_2 + C f_3 + D) + \\ + (A_0 f_2 f_3 + B_0 f_2 + C_0 f_3 + D_0). \end{aligned} \quad \text{. . . . . . (1)}$$

Apzīmēsim izteiksmi pirmā iekavā ar K_{23}, otrā iekavā — ar L_{23}. Pieņemot apzīmējumus:

$$
\begin{aligned}
A_{II} &= Af_2 + C, & a_{II} &= Bf_2 + D, \\
B_{II} &= A_0 f_2 + C_0, & b_{II} &= B_0 f_2 + D_0, \\
A_{III} &= Af_3 + B, & a_{III} &= Cf_3 + D, \\
B_{III} &= A_0 f_3 + B_0, & b_{III} &= C_0 f_3 + D_0,
\end{aligned}
$$

seko:

$$
\begin{aligned}
K_{23} &= f_3 A_{II} + a_{II} = f_2 A_{III} + a_{III}, \\
L_{23} &= f_3 B_{II} + b_{II} = f_2 B_{III} + b_{III}.
\end{aligned}
$$

Lai funkciju (1) pārveidotu determinantā, kam mainīgie atšķirti rindās, rakstām papriekšu

$$
F_{123} = f_1 K_{23} + 1 \, . \, L_{23} + 0 \, . \, M_{23}, \quad \ldots \ldots \quad (1')
$$

un meklējam tādu funkciju M_{23}, kas kopā ar zināmām K_{23} un L_{23} apmierina trīs nepieciešamos un pietiekamos noteikumus. Divi noteikumi ir šādi:

$$
\begin{vmatrix} K_{23} & L_{23} & M_{23} \\ K_2' & L_2' & M_2' \\ K_2'' & L_2'' & M_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{III} f_2 + a_{III} & B_{III} f_2 + b_{III} & M_{23} \\ A_{III} f_2' & B_{III} f_2' & M_2' \\ A_{III} f_2'' & B_{III} f_2'' & M_2'' \end{vmatrix} = 0,
$$

$$
\begin{vmatrix} K_{23} & L_{23} & M_{23} \\ K_3' & L_3' & M_3' \\ K_3'' & L_3'' & M_4'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{II} f_3 + a_{II} & B_{II} f_3 + b_{II} & M_{23} \\ A_{II} f_3' & B_{II} f_3' & M_3' \\ A_{II} f_3'' & B_{II} f_3'' & M_3'' \end{vmatrix} = 0;
$$

no tiem seko:

$$
\begin{vmatrix} a_{III} & b_{III} \\ A_{III} & B_{III} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} f_2' & M_2' \\ f_2'' & M_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{II} & b_{II} \\ A_{II} & B_{II} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} f_3' & M_3' \\ f_3'' & M_3'' \end{vmatrix} = 0. \quad \ldots (2)
$$

Determinanti, kuŗu elementiem latīņu indeki, neviens nedrīkst izzust, jo pretējā gadījumā funkcija F_{123} sadalās reizinātājos tā, ka pielīdzinot to nullei, vairs nedabūjam sakaru starp 3 mainīgajiem. Lai to parādītu, pieņemsim, ka

$$
\begin{vmatrix} a_{II} & b_{II} \\ A_{II} & B_{II} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Bf_2 + D & B_0 f_2 + D_0 \\ Af_2 + C & A_0 f_2 + C_0 \end{vmatrix} = 0, \quad \ldots (3)
$$

vai arī izvirzītā veidā:

$$
f_2^2 \, . \begin{vmatrix} A & B \\ A_0 & B_0 \end{vmatrix} + f_2 \left\{ \begin{vmatrix} A & B \\ C_0 & D_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C & D \\ A_0 & B_0 \end{vmatrix} \right\} + \begin{vmatrix} C & D \\ C_0 & D_0 \end{vmatrix} = 0.
$$

Šai vienādībai jābūt spēkā neatkarīgi no z_2, tā tad, koeficientiem, kas ir pie f_2^2 un f_2, kā arī no f_2 neatkarīgam loceklim, visiem reizē jāizzūd. Tas iespējams divos gadījumos, proti, ja

$$\frac{A}{A_0}=\frac{B}{B_0}=\frac{C}{C_0}=\frac{D}{D_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

vai arī, ja

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}=\frac{A_0}{B_0}=\frac{C_0}{D_0}. \quad \ldots\ldots\ldots (4')$$

To pašu proporciju (4) vai arī tās vietā šādu

$$\frac{A}{C}=\frac{B}{D}=\frac{A_0}{C_0}=\frac{B_0}{D_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4'')$$

dabū meklējot noteikumus, kad determinants

$$\begin{vmatrix} a_{\text{III}} & b_{\text{III}} \\ A_{\text{III}} & B_{\text{III}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Cf_3+D & Cf_3+D_0 \\ Af_3+B & A_0f_3+B_0 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots (3')$$

var identiski būt vienlīdzīgs nullei.

Proporcija (4) izteic to, ka sakārtojumā $f_1 . K_{23}+L_{23}$ funkcijas K un L atšķiŗas tikai ar konstantu faktoru. To pašu izteic (4′) un (4″) par sakārtojumiem attiecībā uz f_3 vai f_2. Visos gadījumos $L_{jk}=\alpha . K_{jk}$, un F_{123} sadalās divi faktoros:

$$F_{123}=(f_i+\alpha) . K_{jk}, \quad (i, j, k = 1, 2, 3),$$

tā ka pielīdzinot to nullei, mēs neđabūjam sakaru (nolīdzinājumu) starp 3 mainīgajiem.

Pieņemsim, tā tad, ka no proporcijām (4) (4′) (4″) neviena nav spēkā. Tad determinanti (3) un (3′) nav nulles, un noteikumi (2), no kuŗiem jāaprēķina M_{23}, ir šādi:

$$\begin{vmatrix} f_2' & M_2' \\ f_2'' & M_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_3' & M_3' \\ f_3'' & M_3'' \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2')$$

No tā redzams (sk. pirmo piemēru iepriekšējā nodaļā), ka

$$M_{23}=af_2f_3+bf_2+cf_3+d.$$

Še a, b, c, d ir integrācijas konstantas, kuŗu izvēli ierobežo prasība, ka liekie faktori nedrīkst būt nulles. Pēc nelieliem pārveidojumiem dabūjam:

$$\lambda\mu\nu = -f_2'f_3' \begin{vmatrix} Cf_3+D & C_0f_3+D_0 & cf_3+d \\ Af_3+B & A_0f_3+B_0 & af_3+b \\ Af_2+C & A_0f_2+C_0 & af_2+c \end{vmatrix} \neq 0, \quad . (5)$$

kur pirmajā rindā var rakstīt arī

$$Bf_2 + D \quad B_0 f_2 + D_0 \quad bf_2 + d.$$

No tā seko

$$\lambda\mu\nu = f_2' f_3' \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A_0 & B_0 & C_0 & D_0 \\ a & b & c & d \\ 1 & -f_3 & -f_2 & f_2 f_3 \end{vmatrix} \neq 0. \quad . \quad . \quad . \quad (5')$$

Lai šo noteikumu izpildītu, ceturtajai rindai atbilstošie apakšdeterminanti nedrīkst visi reizē būt nulles, t. i. matricai

$$\begin{Vmatrix} A & B & C & D \\ A_0 & B_0 & C_0 & D_0 \\ a & b & c & d \end{Vmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

jābūt trešā ranga.

Pieņemsim, ka noteikums (5), (5′) ir spēkā, un aprēķināsim F_i, G_i, H_i $(i = 2, 3)$.

$$F_2 : G_2 : H_2 \text{ seko no } \begin{Vmatrix} Bf_2 + D & B_0 f_2 + D_0 & bf_2 + d \\ Af_2 + C & A_0 f_2 + C_0 & af_2 + c \end{Vmatrix}$$

$$(\lambda = f_3')$$

$$F_3 : G_3 : H_3 \text{ seko no } \begin{Vmatrix} Cf_3 + D & C_0 f_3 + D_0 & cf_3 + d \\ Af_3 + B & A_0 f_3 + B_0 & af_3 + b \end{Vmatrix}$$

$$(\mu = f_2')$$

Matricām dzēš pirmo, otro, trešo stabiņu, un tā dabūtos determinantus ņem ar pārmijus zīmēm $(+ - +)$ un tā dabū lielumus, kas proporcionāli F_i, G_i, H_i. To pašu sasniedz izejot no schēmām

$$\begin{matrix} F_2 \\ -G_2 = \\ H_2 \end{matrix} \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A_0 & B_0 & C_0 & D_0 \\ a & b & c & d \\ 0 & -1 & 0 & f_2 \\ -1 & 0 & f_2 & 0 \end{vmatrix} ; \; (\lambda = f_3') \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

$$\begin{matrix} F_3 \\ -G_3 = \\ H_3 \end{matrix} \begin{vmatrix} A & C & B & D \\ A_0 & C_0 & B_0 & D_0 \\ a & c & b & d \\ 0 & -1 & 0 & f_2 \\ -1 & 0 & f_3 & 0 \end{vmatrix} \; (\mu = f_2') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7')$$

un dzēšot labajā pusē vienu no pirmām trīs rindām saskaņā ar kārtulu:

$$\text{lai atrastu}\quad \begin{matrix} F_i \\ -G_i, \\ H_i \end{matrix}\quad \text{jādzēš labajā pusē}\quad \begin{matrix} \text{pirmā} \\ \text{otrā} \\ \text{trešā} \end{matrix}\quad \text{rinda.}$$

Jāpiezīmē, ka schēmu (7′) var dabūt no (7), rakstot pēdējā B, B, b vietā attiecīgi C, C, c un indeku 2 aizvietojot ar 3.

Pieņemsim šādus saīsinātus apzīmējumus:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \begin{vmatrix} A_0 & B_0 \\ a & b \end{vmatrix}, & q_1 &= \begin{vmatrix} A_0 & B_0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_0 & D_0 \\ a & b \end{vmatrix}, & r_1 &= \begin{vmatrix} C_0 & D_0 \\ c & d \end{vmatrix}, \\ p_2 &= \begin{vmatrix} A & B \\ a & b \end{vmatrix}, & q_2 &= \begin{vmatrix} A & B \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C & D \\ a & b \end{vmatrix}, & r_2 &= \begin{vmatrix} C & D \\ c & d \end{vmatrix}, \\ p_3 &= \begin{vmatrix} A & B \\ A_0 & B_0 \end{vmatrix}, & q_3 &= \begin{vmatrix} A & B \\ C_0 & D_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C & D \\ A_0 & B_0 \end{vmatrix}, & r_3 &= \begin{vmatrix} C & D \\ C_0 & D_0 \end{vmatrix}; \end{aligned}\right. \quad \ldots (8)$$

$$\left.\begin{aligned} (p_1) &= \begin{vmatrix} A_0 & C_0 \\ a & c \end{vmatrix}, & (q_1) &= \begin{vmatrix} A_0 & C_0 \\ b & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_0 & D_0 \\ a & c \end{vmatrix}, & (r_1) &= \begin{vmatrix} B_0 & D_0 \\ b & d \end{vmatrix}, \\ (p_2) &= \begin{vmatrix} A & C \\ a & c \end{vmatrix}, & (q_2) &= \begin{vmatrix} A & C \\ b & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B & D \\ a & c \end{vmatrix}, & (r_2) &= \begin{vmatrix} B & D \\ b & d \end{vmatrix}, \\ (p_3) &= \begin{vmatrix} A & C \\ A_0 & C_0 \end{vmatrix}, & (q_3) &= \begin{vmatrix} A & C \\ B_0 & D_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B & D \\ A_0 & C_0 \end{vmatrix}, & (r_3) &= \begin{vmatrix} B & D \\ B_0 & D_0 \end{vmatrix}. \end{aligned}\right. \quad \ldots (8')$$

Tad varam uzrakstīt:

$$\left.\begin{aligned} -F_2 &= f_2^2 p_1 + f_2 q_1 + r_1, \\ G_2 &= f_2^2 p_2 + f_2 q_2 + r_2, \\ -H_2 &= f_2^2 p_3 + f_2 q_3 + r_3, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

un tāpat

$$\left.\begin{aligned} -F_3 &= f_3^2 (p_1) + f_3 (q_1) + (r_1), \\ G_3 &= f_3^2 (p_2) + f_3 (q_2) + (r_2), \\ -H_3 &= f_3^2 (p_3) + f_3 (q_3) + (r_3). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (9')$$

Pēc šo funkciju atrašanas mums ir visi dati, kas nepieciešami F uzrakstīšanai determinantā, kam atšķirti mainīgie. No (1′) zinām, ka $F_1 = f_1$, $G_1 = 1$, $H_1 = 0$. To ievērojot:

$$F_{123} = \frac{1}{\gamma} \begin{vmatrix} f_1 & 0 & 1 \\ F_2 & H_2 & G_2 \\ F_3 & H_3 & G_3 \end{vmatrix}$$

vai arī, pārmijot otro un trešo stabiņu, lai beidzamajā stabiņā nebūtu nulles:

$$F_{123} = \frac{-1}{\nu} \begin{vmatrix} f_1 & 0 & 1 \\ F_2 & H_2 & G_2 \\ F_3 & H_3 & G_3 \end{vmatrix}$$

ν apzīmē tā saukto anamorfozējošo faktoru (R. Soreau), kas vienlīdzīgs determinantam (5').

Nolīdzinājuma nomogramma sastāv no vienas taisnas skālas, kas ir uz abscīzu ass ($x = f_1$, $y = 0$), un divām līkām skālām:

$$\left.\begin{matrix} x = F_2/G_2 \\ y = H_2/G_2 \end{matrix}\right\} (z_2) \qquad \left.\begin{matrix} x = F_3/G_3 \\ y = H_3/G_3 \end{matrix}\right\} (z_3)$$

Lai atrastu līknes nolīdzinājumu, uz kuras ir kāda no skālām (piem., tā, kas atbilst mainīgam z_2), jāelimine parametrs f_2 no skālas nolīdzinājumiem:

$$x = \frac{F_2}{G_2} = -\frac{f_2^2 p_1 + f_2 q_1 + r_1}{f_2^2 p_2 + f_2 q_2 + r_2},$$

$$y = \frac{H_2}{G_2} = -\frac{f_2^2 p_3 + f_2 q_3 + r_3}{f_2^2 p_2 + f_2 q_2 + r_2},$$

jeb no nolīdzinājumiem;

$$f_2^2(p_2 x + p_1) + f_2(q_2 x + q_1) + (r_2 x + r_1) = 0,$$
$$f_2^2(p_2 y + p_3) + f_2(q_2 y + q_3) + (r_2 y + r_3) = 0.$$

Eliminācija dod sakarību starp x un y (t. i. līknes nolīdzinājumu) determinanta veidā:

$$\begin{vmatrix} p_2 x + p_1 & q_2 x + q_1 & r_2 x + r_1 & 0 \\ p_2 y + p_3 & q_2 y + q_3 & r_2 y + r_3 & 0 \\ 0 & p_2 x + p_1 & q_2 x + q_1 & r_2 x + r_1 \\ 0 & p_2 y + p_3 & q_2 x + q_3 & r_2 y + r_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \ldots \quad (10)$$

vai arī izvirzītā veidā:

$$A_{14} x^2 + (A_{16} + A_{34}) xy + A_{36} y^2 +$$
$$+ (A_{15} + A_{24}) x + (A_{26} + A_{35}) y + A_{25} = 0. \quad \ldots \quad (11)$$

Koeficienti A_{ik} ir vienlīdzīgi determinantiem, kuŗus dabū, dzēšot sekojošā schēmā labā pusē divas rindas, proti:

$$A_{ik}=\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 & 0 \\ p_2 & q_2 & r_2 & 0 \\ p_3 & q_3 & r_3 & 0 \\ 0 & p_1 & q_1 & r_1 \\ 0 & p_2 & q_2 & r_2 \\ 0 & p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

kur labā pusē jādzēš, skaitot no augšas, rindas i un k.

Gaŗaki aprēķini, kuŗu kodols ir tas, ka p_i, q_i, r_i vietā liek to izteiksmes (8), rāda, ka visiem A_{ik} nolīdzinājumā (11) ir kopīgs faktors

$$\Omega = \Delta_1 \Delta_4 - \Delta_2 \Delta_3.$$

Še Δ_i ir determinants, kuŗu dabū, ja matricai

$$\begin{Vmatrix} A & B & C & D \\ A_0 & B_0 & C_0 & D_0 \\ a & b & c & d \end{Vmatrix}$$

izdzēš i-to stabiņu.

Pēc kopīgā faktora atmešanas, (11) vietā stājas nolīdzinājums

$$B_{11}x^2 + 2B_{12}xy + B_{22}y^2 + 2B_{13}x + 2B_{23}y + B_{33} = 0, \quad . \quad . \quad (13)$$

kur koeficientiem ir šādas nozīmes:

$$\left.\begin{aligned} 2B_{12} &= Bc - Ad + Cb - Da; & B_{11} &= BC - AD; \\ 2B_{13} &= BC_0 - AD_0 + CB_0 - DA_0; & B_{22} &= bc - ad; \\ 2B_{23} &= B_0c - A_0d + C_0b - D_0a; & B_{33} &= B_0C_0 - A_0D_0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (14)$$

Nolīdzinājumu (13) var uzrakstīt proporcijas veidā:

$$\frac{Ax + ay + A_0}{Bx + by + B_0} = \frac{Cx + cy + C_0}{Dx + dy + D_0}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13')$$

kā viegli pārliecināties, pareizinot šķērsām proporcijas locekļus un reizinājumus atņemot vienu otram.

Nolīdzinājums (11) ir otrās pakāpes, skāla mainīgam z_2 ir uz kōniskās līknes. Meklējot atbalsta nolīdzinājumu skālai z_3 atrod tāpat veidotas formulas kā (10), (11), (12), tikai agrāko p_i, q_i, r_i vietā tagad jāliek (p_i), (q_i), (r_i). Tā tad skāla z_3 arī ir uz koniskās līknes. Pāreju no $z_2 \longrightarrow z_3$ jeb no p_i, q_i, $r_i \longrightarrow (p_i)$, (q_i), (r_i), kā rāda izteiksmju (8) un (8') veids, var izdarīt, pārmijot B, B_0, b attiecīgi pret C, C_0, c un otrādi. Tāda pārmaiņa nemaina koeficientus (14) nolīdzinājumā (13). No tā seko, ka līknei, uz kuŗas ir skāla z_3, ir tāds pats nolīdzinājums kā otras skālas atbalstam, t. i. abas skālas ir uz kopīgas kōniskās līknes.

Nolīdzinājumā (13) daži koeficienti atkarājas no nenoteiktām konstantām a, b, c, d, kuŗas var izvēlēt pēc patikas, bet, protams, saskaņā ar prasību (6). Brīvību minēto konstantu izvēlē var izlietāt, lai padarītu līknes nolīdzinājumu vienkāršāku vai arī lai dotu pašai līknei vēlamu veidu. Izvēlēsim tās tā, lai nolīdzinājumā (13) izzūd loceklis ar mainīgo lielumu reizinājumu.

$$2B_{12} = Bc - Ad + Cb - Da = 0.$$

Tad līknes veids atkarājas no atlikušo kvadrātlocekļu koeficientiem, un proti, mums būs

elīpse, ja $B_{11}B_{22} = (BC - AD)(bc - ad) > 0$,
hiperbola, „ „ „ $=$ „ „ < 0,
parabola, „ „ „ $=$ „ „ $= 0$,

pieņemot, ka $B_{11} = BC - AD \neq 0$. Elīpse pārvērtīsies par riņķi, ja abu kvadrātlocekļu koeficienti vienādi, t. i. ja $bc - ad = BC - AD$.

Ja matricā (6) kāda stabiņa elementi visi ir nulles, tad nolīdzinājumā (13′) viens proporcijas loceklis ir nulle, un nolīdzinājums izteic divi taisnes. Tā, piem., ja $A = A_0 = a = 0$, tad no (13′) seko

$$Bx + by + B_0 = 0, \quad Cx + cy + C_0 = 0,$$

t. i. divu taišņu nolīdzinājumi.

Nenoteiktās konstantas var izvēlēt tā, ka visi koeficienti, kuŗi no tām atkarājas (B_{12}, B_{22}, B_{23}), izzūd:

$$\left.\begin{aligned} Bc - Ad + Cb - Da &= 0, \\ B_0c - A_0d + C_0b - D_0a &= 0, \\ bc - ad &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

No beidzamā nolīdzinājuma seko:

$$b : a = d : c = \Theta,$$

no diviem pārējiem:

$$(p_3)\Theta^2 - (q_3)\Theta + (r_3) = 0.$$

Dabū divas vērtības parametram Θ, kuŗas ir dažādas un reālas, ja

$$(q_3)^2 - 4(p_3)(r_3) > 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Nolīdzinājuma (13) vietā stājas

$$B_{11}x^2 + 2B_{13}x + B_{33} = 0,$$

tas izteic **divas taisnes**, kas **parallēlas ordinātu asij**. Tās ir dažādas un reālas, ja

$$B_{13}^2 - B_{11}B_{33} > 0. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

Tā tad, ja nomogrammā divi skalām jābūt parallēlām ordinātu asij, funkcijā (1) konstantām jāapmierina prasība (16), vai attiecīgi (17). Jāpiezīmē, ka abas prasības īstenībā neatšķiras, jo abu nevienādību kreisās puses var padarīt identiskas, ņemot palīgā (8) un (14).

VIII. Ceturtās nomografiskās kārtas nolīdzinājumi ar 3 mainīgiem vispārīgā veidā.

Šīs šķiras nolīdzinājumiem kreisai pusei ir šāds vispārīgais veids:

$$\begin{aligned} F_{123} = & F_3(a_0 f_1 f_2 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3) + \\ & + G_3(b_0 f_1 f_2 + b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3) + \quad \ldots \ldots (1) \\ & + H_3(c_0 f_1 f_2 + c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3), \end{aligned}$$

kur a_i, b_i, c_i — konstantas. Apzīmēsim iekavas pēc kārtas ar K, L, M, un bez tam, īsuma dēļ, pieņemsim apzīmējumus:

$$\begin{array}{lll} A_{\mathrm{I}} = a_0 f_1 + a_2 & B_{\mathrm{I}} = b_0 f_1 + b_2 & C_{\mathrm{I}} = c_0 f_1 + c_2 \\ a_{\mathrm{I}} = a_1 f_1 + a_3 & b_{\mathrm{I}} = b_1 f_1 + b_3 & c_{\mathrm{I}} = c_1 f_1 + c_3 \\ A_{\mathrm{II}} = a_0 f_2 + a_1 & B_{\mathrm{II}} = b_0 f_2 + b_1 & C_{\mathrm{II}} = c_0 f_2 + c_1 \\ a_{\mathrm{II}} = a_2 f_2 + a_3 & b_{\mathrm{II}} = b_2 f_2 + b_3 & c_{\mathrm{II}} = c_2 f_2 + c_3 \end{array}$$

Funkcijas K, L, M varam sakārtot tiklab attiecībā uz mainīgo z_1, kā arī z_2:

$$\begin{aligned} K_{12} &= f_1 A_{\mathrm{II}} + a_{\mathrm{II}} = f_2 A_{\mathrm{I}} + a_{\mathrm{I}} \\ L_{12} &= f_1 B_{\mathrm{II}} + b_{\mathrm{II}} = f_2 B_{\mathrm{I}} + b_{\mathrm{I}} \\ M_{12} &= f_1 C_{\mathrm{II}} + c_{\mathrm{II}} = f_2 C_{\mathrm{I}} + c_{\mathrm{I}} \end{aligned}$$

Lai F_{123} varētu uzrakstīt determinanta veidā ar atšķirtiem mainīgiem, funkcijām K, L, M jābūt tādām, ka divi Vronska determinanti identiski izzūd. Jābūt:

$$\begin{vmatrix} K_{12} & L_{12} & M_{12} \\ K_1' & L_1' & M_1' \\ K_1'' & L_1'' & M_1'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 A_{\mathrm{II}} + a_{\mathrm{II}} & f_1 B_{\mathrm{II}} + b_{\mathrm{II}} & f_1 C_{\mathrm{II}} + c_{\mathrm{II}} \\ f_1' A_{\mathrm{II}} & f_1' B_{\mathrm{II}} & f_1' C_{\mathrm{II}} \\ f_1'' A_{\mathrm{II}} & f_1'' B_{\mathrm{II}} & f_1'' C_{\mathrm{II}} \end{vmatrix} = 0$$

un

$$\begin{vmatrix} K_{12} & L_{12} & M_{12} \\ K_2' & L_2' & M_2' \\ K_2'' & L_2'' & M_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_2 A_{\mathrm{I}} + a_{\mathrm{I}} & f_2 B_{\mathrm{I}} + b_{\mathrm{I}} & f_2 C_{\mathrm{I}} + c_{\mathrm{I}} \\ f_2' A_{\mathrm{I}} & f_2' B_{\mathrm{I}} & f_2' C_{\mathrm{I}} \\ f_2'' A_{\mathrm{I}} & f_2'' B_{\mathrm{I}} & f_2'' C_{\mathrm{I}} \end{vmatrix} = 0,$$

kas tā tiešām arī ir, tāpēc ka abos determinantos divu beidzamo rindu elementus atšķir tikai proporcionālitātes faktori.

Abu iepriekšējo noteikumu izpildīšana vēl nenodrošina mainīgo atšķiršanas iespējamību. Funkcijām K, L, M vēl jābūt tādām, ka neviens no liekajiem faktoriem nav nulle. Aprēķinām šo faktoru reizinājumu:

$$\lambda\mu\nu = -f_1'f_2' \begin{vmatrix} a_0f_2 + a_1 & b_0f_2 + b_1 & c_0f_2 + c_1 \\ a_0f_1 + a_2 & b_0f_1 + b_2 & c_0f_1 + c_2 \\ a_if_i + a_3 & b_if_i + b_3 & c_if_i + c_3 \end{vmatrix}, \quad (i = 1,2)$$

vai arī pēc pārveidojumiem:

$$\lambda\mu\nu = f_1'f_2' \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 1 & -f_2 & -f_1 & f_1f_2 \end{vmatrix} = f_1'f_2'\nu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Tā kā $\lambda\mu\nu$ nedrīkst būt nulle, tad seko, ka determinantiem, kuŗus dabū nodzēšot matricai

$$\begin{Vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{Vmatrix}$$

kādu vienu stabiņu, nav visiem reizē jābūt nullēm, t. i. matricai jābūt trešā ranga.

Ja šis noteikums ir spēkā, var aprēķināt F_i, G_i, H_i $(i = 1, 2)$. Atmetot kopīgos faktorus $\lambda = f_2'$ un $\mu = f_1'$, atrodam parastā kārtā

$$F_1 : G_1 : H_1 \text{ no } \begin{Vmatrix} a_1f_1 + a_3 & b_1f_1 + b_3 & c_1f_1 + c_3 \\ a_0f_1 + a_2 & b_0f_1 + b_2 & c_0f_1 + c_2 \end{Vmatrix}, \quad (\lambda = f_2')$$

un tāpat

$$F_2 : G_2 : H_2 \text{ no } \begin{Vmatrix} a_2f_2 + a_3 & b_2f_2 + b_3 & c_2f_2 + c_3 \\ a_0f_2 + a_1 & b_0f_2 + b_1 & c_0f_2 + c_1 \end{Vmatrix}, \quad (\mu = f_1')$$

Var arī, tāpat kā iepriekšējā nodaļā, iziet no schēmām

$$\begin{matrix} F_1 \\ -G_1 = \\ H_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & -1 & 0 & f_1 \\ -1 & 0 & f_1 & 0 \end{vmatrix}; \quad (\lambda = f_2') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$\begin{array}{c} F_2 \\ -G_2 = \\ H_2 \end{array} \begin{vmatrix} a_0 & a_2 & a_1 & a_3 \\ b_0 & b_2 & b_1 & b_3 \\ c_0 & c_2 & c_1 & c_3 \\ 0 & -1 & 0 & f_2 \\ -1 & 0 & f_2 & 0 \end{vmatrix}; \quad (\mu = f_1) \quad \ldots\ldots (3')$$

un dabūt F_i, $-G_i$, H_i, dzēšot attiecīgi labajā pusē pirmo, otro, trešo rindu. Jāpiezīmē, ka viena schēma pārvēršas otrā, ja kādā no tām pārmij savā starpā indekus 1 un 2.

Pieņemot saīsinātus apzīmējumus:

$$\begin{aligned} p_1 &= \begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ c_0 & c_1 \end{vmatrix}, & q_1 &= \begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 \end{vmatrix}, & r_1 &= \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \\ p_2 &= \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ c_0 & c_1 \end{vmatrix}, & q_2 &= \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_0 & c_1 \end{vmatrix}, & r_2 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \ldots (4) \\ p_3 &= \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}, & q_3 &= \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}, & r_3 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (p_1) &= \begin{vmatrix} b_0 & b_2 \\ c_0 & c_2 \end{vmatrix}, & (q_1) &= \begin{vmatrix} b_0 & b_2 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_0 & c_2 \end{vmatrix}, & (r_1) &= \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}, \\ (p_2) &= \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ c_0 & c_2 \end{vmatrix}, & (q_2) &= \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_0 & c_2 \end{vmatrix}, & (r_2) &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \ldots (4') \\ (p_3) &= \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}, & (q_3) &= \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}, & (r_3) &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

funkcijas F_i, G_i, H_i varam uzrakstīt izvirzītā veidā

$$\left.\begin{aligned} -F_1 &= p_1 f_1^2 + q_1 f_1 + r_1 \\ G_1 &= p_2 f_1^2 + q_2 f_1 + r_2 \\ -H_1 &= p_3 f_1^2 + q_3 f_1 + r_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (5)$$

un tāpat

$$\left.\begin{aligned} -F_2 &= (p_1) f_2^2 + (q_1) f_2 + (r_1) \\ G_2 &= (p_2) f_2^2 + (q_2) f_2 + (r_2) \\ -H_2 &= (p_3) f_2^2 + (q_3) f_2 + (r_3) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (5')$$

Tagad var uzrakstīt funkciju (1) determinanta veidā ar atšķirtiem mainīgiem:

$$F_{123} = \frac{1}{\nu} \begin{vmatrix} F_1 & G_1 & H_1 \\ F_2 & G_2 & H_2 \\ F_3 & G_3 & H_3 \end{vmatrix},$$

kur Δ vienlīdzīgs determinantam (2). Attiecīgā nomogramma vispārīgā gadījumā sastāv no 3 līkām skālām:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{F_1}{H_1} \\ y &= \frac{G_1}{H_1} \end{aligned}\right\} (z_1) \qquad \left.\begin{aligned} x &= \frac{F_2}{H_2} \\ y &= \frac{G_2}{H_2} \end{aligned}\right\} (z_2) \qquad \left.\begin{aligned} x &= \frac{F_3}{H_3} \\ y &= \frac{G_3}{H_3} \end{aligned}\right\} (z_3).$$

Divas pirmās skālas ir uz kopīgas kōniskās līknes, kuŗas nolīdzinājums proporcijas veidā:

$$\frac{a_0 x + b_0 y + c_0}{a_1 x + b_1 y + c_1} = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3}.$$

Iesniegts fakultātei 1937. g. 10. decembrī.

Le problème de la disjonction des variables en nomographie.

Par le priv.-doc. *Kārlis Zalts.*

Introduction.

Le problème de la disjonction des variables, tel qu'il est posé depuis longtemps par *M. d'Ocagne,* est celui-ci: ramener une relation $F_{123}=0$ entre trois variables z_1, z_2, z_3, quand c'est possible, à la forme:

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0,$$

où f_i, g_i, h_i sont fonctions de la seule variable z_i. La difficulté théorique principale qui s'y rattache consiste à trouver les conditions nécessaires et suffisantes de cette transformation.

Les premières solutions du problème principal de la nomographie sont dues au comte *P. de Saint-Robert* (1871), puis à *Massau* (1884) et *Lecornu* (1886). En 1898, dans une note, présentée à l'Académie des Sciences de Paris (C. R., t. CXXVII, p. 265), *E. Duporcq* donna sa solution sous la forme d'équations fonctionelles. *F. Boulad* a publié depuis 1910 une série de mémoires traitant le problème de la disjonction des variables; l'ensemble de ses recherches, d'après les mots de *M. d'Ocagne,* „constitue une des meilleures et des plus importantes contributions qui aient été faites à la nomographie générale". (Calcul graphique et Nomographie, 1914, p. 258, note.)

Cependant la solution complète n'a été obtenue qu'en 1912 par *T. H. Gronwall* („Sur les équations représentables par des nomogrammes à points alignés", Journal de Mathém. pures et appliquées, t. 8). L'auteur y démontre que la condition nécessaire et suffisante pour que la disjonction des variables de l'équation $F_{123}=0$ soit possible consiste dans l'existence d'une intégrale commune à deux équations aux dérivées partielles.

Deux années après un autre savant américain, *O. Kellogg*, a réussi de trouver une solution plus simple, sa méthode n'impliquant que des différenciations et la détermination du rang des matrices. Son mémoire est intitulé „Nomograms with Points in Alignment" et publié dans le „Zeitschrift f. Mathematik u. Physik" (t. 63, 1914, p 159).

Enfin, il faut mentionner l'ouvrage capital de *R. Soreau* „Nomographie ou Traité des Abaques" (1921), en deux gros volumes, dont le second est consacré aux théories générales.

Une théorie élémentaire.

Nous considérons ici le plus simple cas de la disjonction des variables. Soit donnée une fonction à trois variables indépendantes z_1, z_2, z_3:

$$F_{123} = F_1 K_{23} + G_1 L_{23} + H_1 M_{23}.$$

Supposons qu'on peut la mettre sous la forme du déterminant à variables séparées suivant les lignes:

$$F_1 K_{23} + G_1 L_{23} + H_1 M_{23} = \begin{vmatrix} F_1 & G_1 & H_1 \\ F_2 & G_2 & H_2 \\ F_3 & G_3 & H_3 \end{vmatrix}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

à trouver les fonctions F_i, G_i, H_i $(i = 2, 3)$.

Pour plus de simplicité nous omettons dans la suite les indices doubles en supposant $K = K(z_2, z_3) = K_{23}$, $L = L(z_2, z_3) = L_{23}$, $M = M(z_2, z_3) = M_{23}$, et nous adoptons la notation K'_2, K'_3, K''_3, $K'''_3 \ldots$ pour exprimer les dérivées partielles des fonctions K, L, M.

La résolution du problème proposé consiste à déterminer 6 fonctions inconnues remplissant les conditions suivantes:

$$\left.\begin{aligned} G_2 H_3 - H_2 G_3 &= K, \\ H_2 F_3 - F_2 H_3 &= L, \\ F_2 G_3 - G_2 F_3 &= M. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Il en suit par simples multiplications et additions:

$$\begin{aligned} F_2 K + G_2 L + H_2 M &= 0, \\ F_3 K + G_3 L + H_3 M &= 0. \end{aligned} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

En dérivant la première de ces identités par rapport à z_3 et la seconde — par rapport à z_2 on obtient deux systèmes homogènes:

$$\left.\begin{array}{l} F_iK + G_iL + H_iM = 0, \\ F_iK'_j + G_iL'_j + H_iM'_j = 0, \\ F_iK''_j + G_iL''_j + H_iM''_j = 0, \end{array}\right\} (i, j = 2, 3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

d'où il suit:

$$\begin{array}{l} F_2 : G_2 : H_2 = \begin{vmatrix} L & M \\ L'_3 & M'_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} M & K \\ M'_3 & K'_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} K & L \\ K'_3 & L'_3 \end{vmatrix}, \\ F_3 : G_3 : H_3 = \begin{vmatrix} L & M \\ L'_2 & M'_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} M & K \\ M'_2 & K'_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} K & L \\ K'_2 & L'_2 \end{vmatrix}, \end{array} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

pourvu que les conditions de la compatibilité des systèmes (4)

$$\begin{vmatrix} K & L & M \\ K'_2 & L'_2 & M'_2 \\ K''_2 & L''_2 & M''_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K & L & M \\ K'_3 & L'_3 & M'_3 \\ K''_3 & L''_3 & M''_3 \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

soient remplies. (Voir *O. Kellogg*, Mémoire précité, p. 163.)

On s'assure facilement que les rapports $F_i : G_i : H_i$ ne dépendent que de $z_i (i = 2, 3)$. Par exemple, en supposant $H_2 \neq 0$, on trouve:

$$\frac{\partial}{\partial z_3}\left(\frac{F_2}{H_2}\right) = \frac{\partial}{\partial z_3}\left\{\begin{vmatrix} L & M \\ L'_3 & M'_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} K & L \\ K'_3 & L'_3 \end{vmatrix}\right\} =$$

$$= L \begin{vmatrix} K & L & M \\ K'_3 & L'_3 & M'_3 \\ K''_3 & L''_3 & M''_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} K & L \\ K'_3 & L'_3 \end{vmatrix}^2 = 0,$$

ce qui veut dire, que le rapport $F_2 : H_2$ est indépendant de la variable z_3. Par conséquent, cette variable intervient dans un facteur parasite commun des déterminants qui définissent le rapport.

Désignons par $\lambda = \lambda(z_3)$ et $\mu = \mu(z_2)$ les facteurs parasites des déterminants (5). En les omettant, posons:

$$\left.\begin{array}{ll} F_2 = \frac{1}{\lambda}(LM'_3 - ML'_3), & F_3 = \frac{1}{\mu}(LM'_2 - ML'_2), \\ G_2 = \frac{1}{\lambda}(MK'_3 - KM'_3), & G_3 = \frac{1}{\mu}(MK'_2 - KM'_2), \\ H_2 = \frac{1}{\lambda}(KL'_3 - LK'_3); & H_3 = \frac{1}{\mu}(KL'_2 - LK'_2). \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (7)$$

Le fonctions λ et μ sont liées par une simple relation que l'on obtient en substituant les expressions (7) dans une des égalités (2), par exemple, dans la premiére:

$$K=\begin{vmatrix} G_2 & H_2 \\ G_3 & H_3 \end{vmatrix}=\frac{1}{\lambda\mu}\begin{vmatrix} MK_3'-KM_3' & KL_3'-LK_3' \\ MK_2'-KM_2' & KL_2'-LK_2' \end{vmatrix};$$

il en suit le produit des facteurs parasites:

$$\lambda\mu=-\begin{vmatrix} K & L & M \\ K_2' & L_2' & M_2' \\ K_3' & L_3' & M_3' \end{vmatrix}\neq 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

R. Soreau (Nomographie, t. II, p. 55) appelle le déterminant (8) caractéristique d'une équation ordonnée

$$F_1K_{23}+G_1L_{23}+H_1M_{23}=0.$$

Marche à suivre pour effectuer la disjonction des variables:

On s'assure d'abord que les fonctions données K, L, M satisfont aux conditions (6). Puis il faut que le déterminant (8) soit différent de zéro et égal à un produit de deux facteurs à variables séparées:

$$-\begin{vmatrix} K & L & M \\ K_2' & L_2' & M_2' \\ K_3' & L_3' & M_3' \end{vmatrix}=\lambda(z_3)\,.\,\mu(z_2)\neq 0.$$

Alors les formules (7) donnent les fonctions F_i, G_i, H_i $(i=2,3)$, et la disjonction des variables sous la forme voulue (1) est finie.

Facteur anamorphosant.

Dans certains cas la disjonction des variables n'est possible qu'après la multiplication de la fonction donnée par un facteur convenablement choisi que l'on a appelé facteur anamorphosant (*R. Soreau*). On sait le facteur anamorphosant dans divers cas spéciaux de la fonction donnée, mais on ne connaît pas une méthode directe pour le trouver. Nous allons montrer que la théorie élémentaire esquissée précédemment nous donne la solution de ce problème.

Soit donnée une fonction à trois variables indépendantes z_1, z_2, z_3:

$$F_{123}=F_1K_{23}+G_1L_{23}+H_1M_{23}.$$

Supposons qu'on peut la mettre sous la forme de déterminant moyennant l'introduction du facteur anamorphosant $\nu=\nu(z_2, z_3)$:

$$\nu(F_1K_{23}+G_1L_{23}+H_1M_{23})=\begin{vmatrix} F_1 & G_1 & H_1 \\ F_2 & G_2 & H_2 \\ F_3 & G_3 & H_3 \end{vmatrix}; \quad . \ . \ . \ . \ (9)$$

d é t e r m i n e r l e f a c t e u r ν e t l e s f o n c t i o n s F_i, G_i, H_i $(i=2,3)$.

Au lieu de (2) nous avons:

$$\left.\begin{aligned} G_2H_3-H_2G_3&=\nu K, \\ H_2F_3-F_2H_3&=\nu L, \\ F_2G_3-G_2F_3&=\nu M. \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (10)$$

Les formules (3) restent en vigueur, ainsi que celles qui en sont déduites, à savoir, (4), (5), (6) et (7). La formule (8) est remplacée par la suivante:

$$\lambda\mu\nu=-\begin{vmatrix} K & L & M \\ K_2' & L_2' & M_2' \\ K_3' & L_3' & M_3' \end{vmatrix} \neq 0, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (11)$$

c'est-à-dire, i l f a u t c h e r c h e r l e f a c t e u r a n a m o r p h o s a n t e n t r e l e s d i v i s e u r s d u d é t e r m i n a n t

$$\begin{vmatrix} K & L & M \\ K_2' & L_2' & M_2' \\ K_3' & L_3' & M_3' \end{vmatrix}.$$

Les facteurs parasites λ, μ et les fonctions F_i, G_i, H_i $(i=2,3)$ sont déterminées par les proportions (5).

Exemple 1. $F_{123}=f_1f_2f_3+(f_1+f_2)\varphi_3+\psi_3$.

Ordonnons la fonction donnée par rapport à la variable z_3 et posons:

$$F_3=f_3, \qquad G_3=\varphi_3, \qquad H_3=\psi_3;$$
$$K_{12}=f_1f_2, \quad L_{12}=f_1+f_2, \quad M_{12}=1.$$

Les conditions (6) sont satisfaites:

$$\begin{vmatrix} f_1f_2 & f_1+f_2 & 1 \\ f_1'f_2 & f_1' & 0 \\ f_1''f_2 & f_1'' & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} f_1f_2 & f_1+f_2 & 1 \\ f_1f_2' & f_2' & 0 \\ f_1f_2'' & f_2'' & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Le produit des facteurs parasites et du facteur anamorphosant:

$$\lambda\mu\nu=-\begin{vmatrix} K & L & M \\ K_1' & L_1' & M_1' \\ K_2' & L_2' & M_2' \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} f_1f_2 & f_1+f_2 & 1 \\ f_1'f_2 & f_1' & 0 \\ f_1f_2' & f_2' & 0 \end{vmatrix}=f_1'f_2'(f_1-f_2);$$

par conséquent, on peut poser:

$$\lambda = -f_2', \quad \mu = -f_1', \quad \nu = f_1 - f_2.$$

Finalement:

$$F_{123} = f_1 f_2 f_3 + (f_1 + f_2)_3 + \psi_3 = \frac{1}{f_1 - f_2} \begin{vmatrix} 1 & -f_1 & f_1^2 \\ 1 & -f_2 & f_2^2 \\ f_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix}$$

Exemple 2. $F_{123} = (a_0 f_1 f_2 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3) F_3 +$
$+ (b_0 f_1 f_2 + b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3) G_3 +$
$+ (c_0 f_1 f_2 + c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3) H_3.$

La fonction donnée est ordonnée par rapport à la variable z_3. Désignons les expressions entre les paranthèses par K, L, M:

$$\begin{aligned} K &= K_{12} = a_0 f_1 f_2 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3, \\ L &= L_{12} = b_0 f_1 f_2 + b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3, \\ M &= M_{12} = c_0 f_1 f_2 + c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3. \end{aligned}$$

Les wronskiens de ces fonctions s'annulent (voir les calculs sur la p. 191 du texte letton):

$$\begin{vmatrix} K & L & M \\ K_1' & L_1' & M_1' \\ K_1'' & L_1'' & M_1'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} K & L & M \\ K_2' & L_2' & M_2' \\ K_2'' & L_2'' & M_2'' \end{vmatrix} = 0.$$

Le produit des facteurs parasites et du facteur anamorphosant

$$\lambda\mu\nu = - \begin{vmatrix} K & L & M \\ K_1' & L_1' & M_1' \\ K_2' & L_2' & M_2' \end{vmatrix} = f_1' f_2' \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 1 & -f_2 & -f_1 & f_1 f_2 \end{vmatrix} \quad . \; . \; . \; (12)$$

doit être différent de zéro. Donc, la matrice

$$\begin{Vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{Vmatrix}$$

doit être du troisième rang.

Le facteur parasite $\lambda = f_2'$ et $\mu = f_1'$; le facteur anamorphosant ν et égal au déterminant du quatrième ordre dans l'égalité (12). La fonction donnée s'écrit en forme du déterminant, divisé par le facteur anamorphosant:

$$F_{123} = \frac{1}{\nu} \begin{vmatrix} F_1 & G_1 & H_1 \\ F_2 & G_2 & H_2 \\ F_3 & G_3 & H_3 \end{vmatrix},$$

où les fonctions composantes F_i, G_i, H_i $(i = 1, 2)$ résultent du schéma suivant:

$$\begin{matrix} F_1 \\ -G_1 = \\ H_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & -1 & 0 & f_1 \\ -1 & 0 & f_1 & 0 \end{vmatrix}, \quad (\lambda = f_2)$$

en y appliquant la règle:

On reçoit F_1, $-G_1$, H_1 en effaçant respectivement la première, la seconde, la troisième ligne du tableau. Pour trouver F_2, $-G_2$, H_2 on a un schéma analogue, en permutant dans celui qui précède les indices 1 et 2.

LITERĀTŪRA.

Boulad, F. Sur la disjonction des variables des équations nomographiquement rationnelles d'ordre supérieur. C. R., t. CL, 1910, p. 379.

— — — Application de la notion des valeurs critiques à la disjonction des variables dans les équations d'ordre nomographique supérieur. Bulletin de la Soc. mathém. de France, t. XXXIX, 1911, p. 105.

— — — Sur les équations à quatre variables d'ordre nomographique supérieur. Bulletin de la Soc. mathém. de France, t. XL, 1912, p. 383.

Clark, J. Théorie générale des abaques d'alignement de tout ordre. Revue de Mécanique, t. XXI, 1907, p. 321.

Duporcq, E. Sur la théorie des abaques à alignements. C. R., t. CXXVII, 1898, p. 265.

Gronwall, T.-H. Sur les équations entre trois variables représentables par des nomogrammes à points alignés. Journal de Mathém. pures et appliquées, 6. série, t. VIII, 1912, p. 59.

Kellogg, O. D. Nomograms with Points in Alignment. Zeitschrift für Math. u. Physik, Bd. 63, 1914, p. 159.

Ocagne, M. d'. Traité de Nomographie. Paris, 1899. Otrs izdevums 1921. (Grāmatas ievadā pilnīgs saraksts autora darbiem par nomografiju.)

— — — Calcul graphique et Nomographie. Paris, 1908. 2-e éd., 1914.

Schwerdt, H. Lehrbuch der Nomographie. Berlin, 1924.

Soreau, R. Nomographie ou Traité des Abaques. 2-e éd. I—II. Paris, 1921. (Otrā sējumā sakopotas vispārīgās teōrijas.)

— — — Nouveaux types d'abaques. La capacité et la valence en Nomographie. Mém. et comptes rendus de la Soc. des Ing. civils, 1906.

— — — Réduction de $F_{123}=0$ à la forme $f_1 f_3 + f_2 g_3 + h_3 = 0$. C. R., t. CLV, 1912.

SATURA RĀDĪTĀJS.

Iespiests Valsts papīru spiestuvē un naudas kaltuvē, Rīgā, Puškina ielā 12.