

8.11.1929 423

LATVIJAS
ŪNIVERSITĀTES RAKSTI
ACTA UNIVERSITATIS LATVIENSIS

MATĒMATIKAS UN DABAS ZINĀTŅU
FAKULTĀTES SERIJA

TOM. I. SĒJUMS
№ 1—4
FASC. 1. BURTNĪCA

R Ī G Ā, 1 9 2 9

p 1116
144d

8

WILNIŲ UNIVERSITETINĖ
BIBLIOTEKA
642-14-88

Sur l'équation de Fredholm à noyau symétrique réel

Par *Ā. Lūsis*

Table des matières:

1. Quelques-unes de propriétés de l'équation de Fredholm régulière à noyau non symétrique.
2. Application de l'équation intégral-différentielle de la résolvante du noyau symétrique réel. Emploi de la formule de la résolvante, due à M. E. Schmidt.
3. Théorème sur les pôles de la résolvante du noyau symétrique.
4. Théorème sur le rang de la valeur singulière du noyau symétrique.
5. Sur la résolvante du noyau symétrisable de E. Schmidt.
6. Application de l'équation intégral-différentielle de la résolvante à la fonction de Green dans les problèmes aux limites des équations différentielles linéaires ordinaires et des équations aux dérivées partielles du second ordre et du type elliptique.

Dans cette note je montre le rôle de l'équation intégral-différentielle de la résolvante dans la théorie classique de l'équation de Fredholm à noyau symétrique réel et dans l'application à la théorie des équations différentielles linéaires.

1. Nous rappellerons quelques-unes de propriétés de l'équation de Fredholm régulière à noyau non symétrique.

L'équation de Fredholm

$$(1) \dots \varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x)$$

avec le paramètre λ et la fonction inconnue $\varphi(x)$ est dite régulière, si le noyau $K(x, y)$ est une fonction continue dans le domaine

$$(A) \dots \begin{cases} a \leq x \leq b \\ a \leq y \leq b \end{cases}$$

et si la fonction donnée $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b) . L'étude de l'équation (1) se ramène à celle du noyau résolvant ou de la résolvante $\Gamma(x, y; \lambda)$. Si le module du paramètre λ est assez petit, la résolvante est définie par la série de C. Neumann

$$(2) \dots \Gamma(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda K^{(2)}(x, y) + \dots + \lambda^n K^{(n+1)}(x, y) + \dots$$

uniformément convergente dans le domaine (A) avec les noyaux itérés

$$(3) \dots K^{(n+k)}(x, y) = \int_a^b K^{(n)}(x, s) K^{(k)}(s, y) ds = \int_a^b K^{(k)}(x, s) K^{(n)}(s, y) ds \dots$$

où

$$\begin{pmatrix} n = 1, 2, 3, \dots \\ k = 1, 2, 3, \dots \end{pmatrix} \quad \text{et } K^{(1)}(x, y) = K(x, y).$$

On sait que la résolvante est une fonction méromorphe du paramètre λ ayant pour les pôles les racines de l'équation $D(\lambda) = 0$ où $D(\lambda)$ est le déterminant de Fredholm

$$(4) \dots D(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{1!} \int_a^b K(s, s) ds + \frac{\lambda^2}{2!} \int_a^b \int_a^b \begin{vmatrix} K(s_1, s_1) & K(s_1, s_2) \\ K(s_2, s_1) & K(s_2, s_2) \end{vmatrix} ds_1 ds_2 - \dots$$

Dans les notes précédentes¹⁾ j'ai démontré que la définition du noyau résolvant $\Gamma(x, y; \lambda)$ par la série (2) de C. Neumann dans tout le domaine d'existence de cette fonction analytique par rapport à λ est équivalente à la définition par l'équation fonctionnelle de la résolvante, due à M. M. Hilbert et Plemelj, ou par l'équation intégral-différentielle

$$(5) \dots \frac{\partial \Gamma(x, y; \lambda)}{\partial \lambda} = \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) \Gamma(s, y; \lambda) ds,$$

jointe à la condition $\Gamma(x, y; 0) = K(x, y)$.

¹⁾ „Sur les fonctions permutable et l'équation intégrale de Volterra“, Acta Universitatis Latviensis, t. XVII, 1927 et „Sur l'équation de Fredholm“, id. t. XVIII, 1928.

Ajoutons la propriété: L'équation intégral-différentielle (5), jointe à la condition $\Gamma(x, y; 0) = K(x, y)$, a une solution analytique par rapport à paramètre λ et une seule. En effet, soit $\Gamma_1(x, y; \lambda)$ une autre solution de l'équation (5) qui satisfait à la relation

$$\frac{\partial \Gamma_1(x, y; \lambda)}{\partial \lambda} = \int_a^b \Gamma_1(x, s; \lambda) \Gamma_1(s, y; \lambda) ds$$

et à la même condition $\Gamma_1(x, y; 0) = K(x, y)$.

La fonction $\gamma(x, y; \lambda) = \Gamma_1(x, y; \lambda) - \Gamma(x, y; \lambda)$ satisfait à l'équation

$$\frac{\partial \gamma(x, y; \lambda)}{\partial \lambda} = \int_a^b [\Gamma(x, s; \lambda) \gamma(s, y; \lambda) + \gamma(x, s; \lambda) \Gamma(s, y; \lambda) + \gamma(x, s; \lambda) \gamma(s, y; \lambda)] ds$$

et à la condition $\gamma(x, y; 0) = \Gamma_1(x, y; 0) - \Gamma(x, y; 0) = 0$. De l'équa-

tion précédente on tire $\left(\frac{\partial \gamma(x, y; \lambda)}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0} = 0$

et les relations générales $\left(\frac{\partial^n \gamma(x, y; \lambda)}{\partial \lambda^n}\right)_{\lambda=0} = 0 \dots (n=1, 2, 3, \dots)$,

en dérivant tous les membres de l'équation par rapport à λ et en posant $\lambda = 0$. Donc, d'après le théorème de Taylor la fonction $\gamma(x, y; \lambda)$ est identiquement nulle, c.à.d. $\Gamma_1(x, y; \lambda) = \Gamma(x, y; \lambda)$.

Par emploi des fonctions itérées

$$\Gamma^{(n)}(x, y; \lambda) = \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) \Gamma^{(n-1)}(s, y; \lambda) ds = \int_a^b \Gamma^{(n-1)}(x, s; \lambda) \Gamma(s, y; \lambda) ds \dots$$

avec $n = 2, 3, \dots$ et $\Gamma^{(1)}(x, y; \lambda) = \Gamma(x, y; \lambda)$ on peut écrire l'équation (5) sous la forme

$$(5^1) \dots \frac{\partial \Gamma(x, y; \lambda)}{\partial \lambda} = \Gamma^{(2)}(x, y; \lambda)$$

En dérivant tous les membres de l'équation (5) par rapport à λ et en employant les propriétés des fonctions itérées $\Gamma^{(n)}(x, y; \lambda)$ analogues à (3), on obtient les relations générales

$$(6) \dots \frac{\partial^n \Gamma(x, y; \lambda)}{\partial \lambda^n} = n! \Gamma^{(n+1)}(x, y; \lambda) \dots (n = 1, 2, 3, \dots)$$

d'où en particulier

$$(6^1) \dots \left(\frac{\partial^n \Gamma(x, y; \lambda)}{\partial \lambda^n}\right)_{\lambda=0} = n! \Gamma^{(n+1)}(x, y; 0) = n! K^{(n+1)}(x, y)$$

avec $\Gamma^{(1)}(x, y; 0) = K^{(1)}(x, y) = K(x, y)$ et n entier positif.

Nous utiliserons dans la suite la relation

$$(7) \dots \frac{d}{d\lambda} \log D(\lambda) = - \int_a^b \Gamma(s, s; \lambda) ds,$$

due à J. Fredholm dans son mémoire classique (Acta Math. 1903).

En dérivant la relation précédente (7) par rapport à λ on obtient les relations générales

$$(8) \dots \frac{d^n}{d\lambda^n} \log D(\lambda) = - \int_a^b \frac{\partial^{n-1} \Gamma(s, s; \lambda)}{\partial \lambda^{n-1}} ds \dots \quad (n = 2, 3, \dots)$$

En vertu des relations (6), il vient finalement

$$(8^1) \dots \frac{d^n}{d\lambda^n} \log D(\lambda) = - (n-1)! \int_a^b \Gamma^{(n)}(s, s; \lambda) ds \dots \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Dans le cas particulier $\lambda=0$ on tire $\log D(0)=0$ et

$$\left(\frac{d^n}{d\lambda^n} \log D(\lambda) \right)_{\lambda=0} = - (n-1)! \int_a^b \Gamma^{(n)}(s, s; 0) ds = - (n-1)! p_n$$

avec les traces successives du noyau $K(x, y) = K^{(1)}(x, y)$

$$p_1 = \int_a^b K(s, s) ds, \dots, p_n = \int_a^b K^{(n)}(s, s) ds.$$

Par le théorème de Taylor on a le développement

$$(9) \dots \log D(\lambda) = - \left(p_1 \lambda + \frac{p_2}{2} \lambda^2 + \dots + \frac{p_n}{n} \lambda^n + \dots \right)$$

qu'on pourrait établir directement de la relation (7) et de la série (2) de C. Neumann.

2. Soit $K(x, y)$ un noyau symétriques réel

$$K(x, y) \equiv K(y, x).$$

Les noyaux itérés sont aussi symétriques

$$K^{(2)}(x, y) \equiv K^{(2)}(y, x), \dots, K^{(n)}(x, y) \equiv K^{(n)}(y, x), \dots$$

La structure de la série (2) de C. Neumann indique la symétrie du noyau résolvant $\Gamma(x, y; \lambda) \equiv \Gamma(y, x; \lambda)$.

Il est connu que toutes les traces p_1, \dots, p_n, \dots du noyau symétrique continu et réel sont différentes de zéro. Dans le cas contraire tel noyau serait identiquement nulle.

En posant $y=x$ dans l'équation intégral-différentielle (5) on obtient par emploi de la symétrie du noyau résolvant la relation

$$(9) \dots \frac{\partial \Gamma(x, x; \lambda)}{\partial \lambda} = \Gamma^{(2)}(x, x; \lambda) = \int_a^b [\Gamma(x, s; \lambda)]^2 ds.$$

Analogiquement, des relations générales (6) on tire

$$(10) \dots \frac{\partial^n \Gamma(x, x; \lambda)}{\partial \lambda^n} = n! \Gamma^{(n+1)}(x, x; \lambda) \dots \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

D'après la propriété (3) des fonctions itérées $\Gamma^{(n)}(x, y; \lambda)$ et leurs symétrie on a dans le cas d'ordre n paire ($n=2m$)

$$(11) \dots \Gamma^{(2m)}(x, x; \lambda) = \int_a^b [\Gamma^{(m)}(x, s; \lambda)]^2 ds \dots \quad (m=1, 2, 3, \dots)$$

Donc, cette fonction satisfait à l'inégalité

$$\Gamma^{(2m)}(x, x; \lambda) \geq 0 \dots \quad (m=1, 2, 3, \dots)$$

mais elle n'est pas identiquement nulle dans l'intervalle $a \leq x \leq b$.

D'après la relation (10) on a dans le cas n impaire

$\frac{\partial^n \Gamma(x, x; \lambda)}{\partial \lambda^n} \geq 0$, mais $\frac{\partial^n \Gamma(x, x; \lambda)}{\partial \lambda^n}$ n'est pas identiquement nulle dans l'intervalle ($a \leq x \leq b$).

Par la substitution de l'expression (11) dans la relation (8¹) avec $n=2m$ on tire la formule

$$\frac{d^{2m}}{d\lambda^{2m}} \log D(\lambda) = -(2m-1)! \int_a^b \Gamma^{(2m)}(s, s; \lambda) ds$$

d'où

$$(12) \dots \frac{d^{2m}}{d\lambda^{2m}} \log D(\lambda) = -(2m-1)! \int_a^b \int_a^b [\Gamma^{(m)}(s, t; \lambda)]^2 ds dt \dots$$

avec $m=1, 2, 3, \dots$

Donc, nous avons dans le cas du noyau symétrique réel l'inégalité

$$(12^1) \dots \frac{d^{2m}}{d\lambda^{2m}} \log D(\lambda) < 0 \dots \quad (m=1, 2, 3, \dots)$$

L'égalité

$$\frac{d^{2m}}{d\lambda^{2m}} \log D(\lambda) = 0$$

n'est pas possible parce que dans ce cas $\Gamma^{(2m)}(s, s; \lambda) \equiv 0$, c. à. d. une contradiction avec la remarque précédente. Aussi on aurait toutes les traces $p_{2m} = p_{2m+1} = \dots = 0$ et le noyau $K(x, y) \equiv 0$.

Nous allons vérifier les relations précédentes à l'aide de l'expression du noyau résolvant

$$(13) \dots \Gamma(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(y)}{\lambda_i (\lambda_i - \lambda)},$$

due à M. E. Schmidt. Dans cette expression les fonctions fondamentales $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_i(x), \dots$ du noyau symétrique $K(x, y)$, relatives aux valeurs singulières $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \dots$ forment un système orthogonal, normal et complet²⁾. Les conditions d'orthogonalité sont

$$(14) \dots \begin{cases} \int_a^b [\varphi_i(x)]^2 dx = 1 \dots & (i=1, 2, 3, \dots) \\ \int_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = 0 \dots & (i \neq j) \quad (j=1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

La série (13) est absolument et uniformément convergente dans le domaine

$$(A) \dots \begin{cases} a \leq x \leq b \\ a \leq y \leq b, \end{cases}$$

pourvu que $\lambda \neq \lambda_i$. En vertu de cette convergence on tire de l'expression (13) par la dérivation

$$(15) \dots \frac{\partial \Gamma(x, y; \lambda)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(y)}{(\lambda_i - \lambda)^2},$$

la série obtenue étant aussi absolument et uniformément convergente dans le domaine (A) sous la condition $\lambda \neq \lambda_i$.

En substituant l'expression (13) du noyau résolvant dans

$$\Gamma^{(2)}(x, y; \lambda) = \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) \Gamma(s, y; \lambda) ds$$

et en tenant compte des conditions d'orthogonalité (14) et du développement en série absolument et uniformément convergente dans le domaine (A) du noyau itéré

$$K^{(2)}(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(y)}{\lambda_i^2},$$

on obtient

$$\Gamma^{(2)}(x, y; \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(y)}{(\lambda_i - \lambda)^2}.$$

²⁾ Vollständiges normiertes Orthogonalsystem von Eigenfunktionen.

Donc, l'équation intégral-différentielle du noyau résolvant

$$\frac{\partial \Gamma(x, y; \lambda)}{\partial \lambda} = \Gamma^{(2)}(x, y; \lambda)$$

est vérifiée.

En général, par la dérivation de l'expression (15) par rapport à λ on tire

$$(16) \dots \frac{\partial^n \Gamma(x, y; \lambda)}{\partial \lambda^n} = n! \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(y)}{(\lambda_i - \lambda)^{n+1}} \dots (n=1, 2, 3, \dots),$$

la série précédente étant absolument et uniformément convergente dans le domaine (A) et sous la condition $\lambda \neq \lambda_i$.

En posant $y = x$ dans l'expression (16) on a

$$(16^1) \dots \frac{\partial^n \Gamma(x, x; \lambda)}{\partial \lambda^n} = n! \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\varphi_i(x))^2}{(\lambda_i - \lambda)^{n+1}} \dots (n=1, 2, 3, \dots).$$

Donc, $\frac{\partial^n \Gamma(x, x; \lambda)}{\partial \lambda^n} \geq 0 \dots (n \text{ impaire}),$

l'égalité étant seulement pour les points où toutes les fonctions fondamentales $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ s'annulent. Mais la fonction $\frac{\partial^n \Gamma(x, x; \lambda)}{\partial \lambda^n}$ n'est pas identiquement nulle dans l'intervalle $a \leq x \leq b$.

En comparant les formules (16) et (6), il vient

$$(17) \dots \Gamma^{(n)}(x, y; \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(y)}{(\lambda_i - \lambda)^n} \dots (n=2, 3, \dots),$$

d'où en particulier

$$(17^1) \dots \Gamma^{(n)}(x, x; \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\varphi_i(x))^2}{(\lambda_i - \lambda)^n} \dots (n=2, 3, \dots).$$

Par l'intégration de l'expression précédente par rapport à $s = x$ et par emploi des conditions d'orthogonalité (14) on tire

$$(18) \dots \int_a^b \Gamma^{(n)}(s, s; \lambda) ds = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_i - \lambda)^n} \dots (n=2, 3, \dots)$$

Dans le cas $\lambda = 0$ nous obtenons des expressions (17) et (18) les développements en séries classiques des noyaux itérés

$$K^{(n)}(x, y) = \Gamma^{(n)}(x, y; 0) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(y)}{\lambda_i^n} \dots (n=2, 3, \dots)$$

et les traces successives du noyau $K(x, y)$

$$p_n = \int_a^b K^{(n)}(s, s) ds = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^n} \dots \quad (n=2, 3, \dots)$$

Il est évident que

$$\int_a^b \Gamma^{(2m)}(s, s; \lambda) ds > 0,$$

ainsi que $p_{2m} > 0$ pour $m = 1, 2, 3, \dots$ et $\lambda \neq \lambda_i$.

Par la substitution de l'expression (18) dans la relation (8¹), il vient

$$(19) \dots \frac{d^n}{d\lambda^n} \log D(\lambda) = -(n-1)! \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_i - \lambda)^n} \dots \quad (n=2, 3, \dots)$$

d'où en particulier

$$(19^1) \dots \left(\frac{d^n}{d\lambda^n} \log D(\lambda) \right)_{\lambda=0} = -(n-1)! \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^n} = -(n-1)! p_n \dots \quad (n=2, 3, \dots)$$

Dans le cas $n=2$ on a

$$\left(\frac{d^2}{d\lambda^2} \log D(\lambda) \right)_{\lambda=0} = - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2} = - \int_a^b K^{(2)}(s, s) ds = - \int_a^b \int_a^b [K(s, t)]^2 ds dt,$$

la série étant absolument convergente d'après l'inégalité de Bessel. En général on a d'après l'expression (19) dans le cas n paire

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} \log D(\lambda) < 0 \dots \quad (n=2m, m=1, 2, 3, \dots),$$

conformément à l'inégalité (12¹).

Pour traiter le cas $n=1$ nous substituerons dans la relation (7) l'expression (13) de la résolvante et intégrons en tenant compte des conditions d'orthogonalité (14). Il vient

$$\frac{d}{d\lambda} \log D(\lambda) = -p_1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda_i (\lambda_i - \lambda)}$$

avec $p_1 = \int_a^b K(s, s) ds$ et $\lambda \neq \lambda_i$. Ceci nous donne d'après l'intégration par rapport à λ et d'après la démonstration de la convergence l'expression

$$D(\lambda) = e^{-p_1 \lambda} \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i} \right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_i}},$$

la constante d'intégration étant égale à $\log D(o) = 0$. L'expression précédente montre que le déterminant de Fredholm du noyau symétrique réel est au plus du premier genre³⁾.

3. D'après la théorie générale de l'équation de Fredholm à noyau non symétrique chaque valeur singulière $\lambda = \lambda_0$ du noyau est un pôle de la résolvante d'ordre $n \geq 1$. Soit

$$(20) \dots \Gamma(x, y; \lambda) = \frac{f_n(x, y)}{(\lambda_0 - \lambda)^n} + \dots + \frac{f_1(x, y)}{\lambda_0 - \lambda} + g_0(x, y) + \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x, y) (\lambda_0 - \lambda)^i$$

le développement du noyau résolvant dans le domaine du pôle $\lambda = \lambda_0$ avec les fonctions données $f_n(x, y), \dots, f_1(x, y), g_0(x, y), \dots$. Nous démontrons le théorème: la résolvante du noyau symétrique réel a les pôles simples, c. à d., $n=1$.

Pour la démonstration nous appliquerons l'équation intégral-différentielle

$$(5) \dots \frac{\partial \Gamma(x, y; \lambda)}{\partial \lambda} = \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) \Gamma(s, y; \lambda) ds$$

du noyau résolvant. Après avoir substitué l'expression (20) du noyau résolvant dans l'équation (5) il vient

$$(21) \dots \frac{n f_n(x, y)}{(\lambda_0 - \lambda)^{n+1}} + \dots + \frac{f_1(x, y)}{(\lambda_0 - \lambda)^2} + \dots = \frac{\int_a^b f_n(x, s) f_n(s, y) ds}{(\lambda_0 - \lambda)^{2n}} + \dots$$

En égalant les coefficients de $(\lambda_0 - \lambda)^{-2n}$ dans les deux membres, on obtient dans le cas $2n > n+1$, c. à d. $n > 1$, la relation

$$(22) \dots \int_a^b f_n(x, s) f_n(s, y) ds = 0 \dots (n > 1).$$

Donc, dans le cas d'un pôle multiple ($n > 1$) il existe l'orthogonalité précédente (22). Mais dans le cas d'un pôle simple de la résolvante

$$(23) \dots \Gamma(x, y; \lambda) = \frac{f(x, y)}{\lambda_0 - \lambda} + g_0(x, y) + \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x, y) (\lambda_0 - \lambda)^i$$

la fonction $f(x, y)$ satisfait à la relation

$$(24) \dots f(x, y) = \int_a^b f(x, s) f(s, y) ds,$$

³⁾ E. Goursat — Cours d'Analyse mathématique, t. III, p. 454, 1923.

obtenue par l'application de l'équation (21) dans le cas $n=1$. Les relations (22) et (24) subsistent pour tout noyau non symétrique. Dans le cas d'un noyau symétrique $K(x,y) \equiv K(y,x)$ la résolvante est aussi symétrique $\Gamma(x,y;\lambda) \equiv \Gamma(y,x;\lambda)$. Donc, on a la symétrie des fonctions

$$f_n(x,y) \equiv f_n(y,x), \dots f_1(x,y) \equiv f_1(y,x), g_0(x,y) \equiv g_0(y,x), g_1(x,y) \equiv g_1(y,x), \dots$$

Posons dans la relation (22) $y=x$. Il vient

$$\int_a^b f_n(x,s) f_n(s,x) ds = 0$$

d'où en vertu de la symétrie de la fonction $f_n(x,y)$

$$\int_a^b [f_n(x,s)]^2 ds = 0$$

Donc, dans le cas d'un noyau symétrique réel on a

$$f_n(x,y) \equiv 0 \dots (n > 1),$$

c.à.d. la résolvante a le développement (23) dans le domaine d'un pôle simple.

4. Soit $\lambda = \lambda_0$ une racine d'ordre m de multiplicité de l'équation $D(\lambda) = 0$.

On peut représenter $D(\lambda)$ sous la forme

$$(25) \dots D(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^m D_1(\lambda)$$

avec $D_1(\lambda_0) \neq 0$.

D'après la théorie de Fredholm il existe à chaque valeur singulière λ_0 du noyau q fonctions fondamentales linéairement distinctes. Ce nombre q est appelé le rang (index) de la valeur singulière λ_0 . D'après Fredholm on a dans le cas d'un noyau non symétrique la relation: $1 \leq q \leq m$.

Nous démontrons par une méthode directe le théorème⁴⁾: Le rang q de la valeur singulière du noyau symétrique réel est égal au degré m de multiplicité.

Dans la relation

$$(7) \dots \frac{d}{d\lambda} \log D(\lambda) = - \int_a^b \Gamma(s,s;\lambda) ds$$

nous substituerons les expressions (25) et (23). Il vient

⁴⁾ Horn — Partielle Differentialgleichungen, p. 220, 1910.

d'où

$$-\frac{m}{\lambda_0 - \lambda} + \frac{d}{d\lambda} \log D_1(\lambda) = -\frac{\int_a^b f(s, s) ds}{\lambda_0 - \lambda} - \dots$$

$$(26) \dots \int_a^b f(s, s) ds = m \dots \quad (m \text{ entier positif}).$$

Si nous écrivons l'équation intégrale du noyau résolvant

$$\Gamma(x, y; \lambda) - \lambda \int_a^b K(x, s) \Gamma(s, y; \lambda) ds = K(x, y)$$

sous la forme

$$\Gamma(x, y; \lambda) + (\lambda_0 - \lambda) \int_a^b K(x, s) \Gamma(s, y; \lambda) ds = \lambda_0 \int_a^b K(x, s) \Gamma(s, y; \lambda) ds + K(x, y)$$

et si nous substituons ici l'expression (23) de la résolvante, nous obtenons en égalant les coefficients de $(\lambda_0 - \lambda)^{-1}$ la relation

$$(27) \dots f(x, y) = \lambda_0 \int_a^b K(x, s) f(s, y) ds.$$

Nous allons établir⁵⁾ la structure de la fonction symétrique réelle $f(x, y) \equiv f(y, x)$ qui satisfait à l'équation

$$(24) \dots f(x, y) = \int_a^b f(x, s) f(s, y) ds$$

et à la condition (26) avec m entier positif.

Remarquons que d'après la symétrie $f(x, y) \equiv f(y, x)$ on a

$$f(x, x) = \int_a^b [f(x, s)]^2 ds,$$

obtenue de l'équation (24) en posant $y = x$. Donc, il existe au moins une valeur de $x = x_1$ dans l'intervalle (a, b) telle que

$$f(x_1, x_1) > 0.$$

Formons la fonction

$$f_1(x, y) = f(x, y) - \frac{f(x, x_1) f(y, x_1)}{f(x_1, x_1)}.$$

Par emploi de la fonction

$$\varphi_1(x) = \frac{f(x, x_1)}{\sqrt{f(x_1, x_1)}}$$

⁵⁾ Sur le cas général d'une fonction non symétrique, voir, T. Lalesco — Équations intégrales, p. 39, Paris, 1912.

on exprime la nouvelle fonction $f_1(x, y) = f(x, y) - \varphi_1(x) \varphi_1(y)$. Elle est évidemment symétrique $f_1(x, y) \equiv f_1(y, x)$.

Cette fonction satisfait aussi à l'équation (24). En effet, on a

$$\begin{aligned} \int_a^b f_1(x, s) f_1(s, y) ds &= \int_a^b [f(x, s) - \varphi_1(x) \varphi_1(s)] [f(s, y) - \varphi_1(s) \varphi_1(y)] ds = \\ &= f(x, y) - \varphi_1(x) \varphi_1(y) - \varphi_1(x) \varphi_1(y) + \varphi_1(x) \varphi_1(y) = \\ &= f(x, y) - \varphi_1(x) \varphi_1(y), \end{aligned}$$

parce que

$$\int_a^b f(x, s) f(s, y) ds = f(x, y), \quad \int_a^b f(x, s) \varphi_1(s) ds = \varphi_1(x) \quad \text{et} \quad \int_a^b [\varphi_1(s)]^2 ds = 1.$$

Donc, la vérification de la relation

$$f_1(x, y) = \int_a^b f_1(x, s) f_1(s, y) ds$$

est faite. Calculons

$$\int_a^b f_1(s, s) ds = \int_a^b f(s, s) ds - \int_a^b [\varphi_1(s)]^2 ds$$

En vertu de la condition (26) et $\int_a^b [\varphi_1(s)]^2 ds = 1$ on a

$$\int_a^b f_1(s, s) ds = m - 1.$$

Après avoir répété ce procédé m fois nous obtenons la fonction

$$r(x, y) = f(x, y) - \varphi_1(x) \varphi_1(y) - \dots - \varphi_m(x) \varphi_m(y)$$

symétrique réelle $r(x, y) \equiv r(y, x)$ qui satisfait à l'équation

$$r(x, y) = \int_a^b r(x, s) r(s, y) ds$$

et à la condition

$$\int_a^b r(s, s) ds = 0.$$

Or, cela est possible seulement pour $r(x, y) \equiv 0$ parce que

$$r(x, x) = \int_a^b [r(x, s)]^2 ds \quad \text{et} \quad \int_a^b r(s, s) ds = \int_a^b \int_a^b [r(s, t)]^2 ds dt = 0.$$

Donc, on a l'expression

$$(28) \quad \dots f(x, y) = \varphi_1(x) \varphi_1(y) + \dots + \varphi_m(x) \varphi_m(y)$$

où les fonctions $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ satisfont aux conditions

$$(29) \quad \dots \int_a^b [\varphi_i(s)]^2 ds = 1 \quad \dots \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Par la substitution de l'expression (28) dans l'équation (24) on tire

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \varphi_i(x) \varphi_j(x) \int_a^b \varphi_i(s) \varphi_j(s) ds \equiv 0 \dots \dots (i \neq j)$$

d'où

$$(30) \dots \dots \int_a^b \varphi_i(s) \varphi_i(s) ds = 0 \dots \dots (i \neq j; i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,m).$$

Sous les conditions (29) et (30) les fonctions $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ forment un système orthogonal et normal. Donc, les fonctions $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ sont linéairement indépendantes.

Celles-ci sont les fonctions fondamentales du noyau $K(x, y)$ correspondantes à la valeur singulière $\lambda = \lambda_0$. En effet, par la substitution de l'expression (28) dans l'équation (27) on a

$$\sum_{i=1}^m \varphi_i(x) \varphi_i(y) = \sum_{i=1}^m \left\{ \lambda_0 \int_a^b K(x, s) \varphi_i(s) ds \right\} \varphi_i(y)$$

d'où

$$(31) \dots \dots \varphi_i(x) = \lambda_0 \int_a^b K(x, s) \varphi_i(s) ds \dots \dots (i = 1, 2, \dots, m),$$

en vertu de l'indépendance linéaire des fonctions $\varphi_1(y), \dots, \varphi_m(y)$.

Les fonctions $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ forment un système fondamental du noyau $K(x, y)$ correspondant à la valeur singulière λ_0 parce qu'elles sont les solutions linéairement distinctes de l'équation de Fredholm homogène avec le paramètre $\lambda = \lambda_0$. Donc, dans le cas d'un noyau symétrique réel le rang q de la valeur singulière λ_0 est égal à m , et le théorème est démontré.

Le développement de la résolvante du noyau symétrique dans le domaine du pôle λ_0 simple est

$$(32) \dots \dots \Gamma(x, y; \lambda) = \frac{\varphi_1(x) \varphi_1(y) + \dots + \varphi_m(x) \varphi_m(y)}{\lambda_0 - \lambda} + g_0(x, y) + \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x, y) (\lambda_0 - \lambda)^i$$

conformément à la formule (13) de M. Schmidt.

5. L'équation intégral-différentielle de la résolvante est utile pour la démonstration du théorème suivant sur les noyaux symétrisables. Soit

$$(33) \dots \dots K(x, y) = \alpha(x) \beta(y) K_1(x, y)$$

un noyau de Schmidt⁶⁾ où le noyau $K_1(x, y)$ est symétrique $K_1(x, y) \equiv K_1(y, x)$ et les fonctions $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sont continues telles que dans l'intervalle (a, b)

$$\alpha(x) \beta(x) > 0.$$

On peut représenter le noyau

$$K(x, y) = \sqrt{\frac{\alpha(x) \beta(y)}{\alpha(y) \beta(x)}} K_*(x, y)$$

avec le noyau symétrique

$$K_*(x, y) = \sqrt{\alpha(x) \alpha(y) \beta(x) \beta(y)} \underline{K}(x, y).$$

Soit $\Gamma_*(x, y; \lambda)$ la résolvante du noyau $K_*(x, y)$. On a l'équation intégral-différentielle

$$\frac{\partial \Gamma_*(x, y; \lambda)}{\partial \lambda} = \int_a^b \Gamma_*(x, s; \lambda) \Gamma_*(s, y; \lambda) ds$$

et la condition $\Gamma_*(x, y; 0) = K_*(x, y)$.

Nous démontrons que la résolvante $\Gamma(x, y; \lambda)$ du noyau $K(x, y)$ est représentée par l'expression

$$(34) \dots \Gamma(x, y; \lambda) = \sqrt{\frac{\alpha(x) \beta(y)}{\alpha(y) \beta(x)}} \Gamma_*(x, y; \lambda)$$

En effet, la condition

$$\Gamma(x, y; 0) = \sqrt{\frac{\alpha(x) \beta(y)}{\alpha(y) \beta(x)}} \Gamma_*(x, y; 0) = K(x, y)$$

est vérifiée. En dérivant (34) par rapport à λ , il vient

$$\frac{\partial \Gamma(x, y; \lambda)}{\partial \lambda} = \int_a^b \left[\sqrt{\frac{\alpha(x) \beta(s)}{\alpha(s) \beta(x)}} \Gamma_*(x, s; \lambda) \right] \cdot \left[\sqrt{\frac{\alpha(s) \beta(y)}{\alpha(y) \beta(s)}} \Gamma_*(s, y; \lambda) \right] ds$$

en vertu de l'équation intégral-différentielle du noyau résolvant $\Gamma_*(x, y; \lambda)$.

Ceci nous montre que la fonction (34) satisfait à l'équation intégral-différentielle

$$\frac{\partial \Gamma(x, y; \lambda)}{\partial \lambda} = \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) \Gamma(s, y; \lambda) ds$$

⁶⁾ E. Goursat — Cours d'Analyse, t. III, p. 457.

qui, jointe à la condition $\Gamma(x, y; 0) = K(x, y)$, caractérise la résolvante du noyau $K(x, y)$.

6. On sait que les applications des équations intégrales à la théorie des équations différentielles sont très nombreuses. Nous montrerons dans la suite l'importance de l'équation intégral-différentielle du noyau résolvant dans les problèmes aux limites des équations différentielles linéaires.

Soit

$$(35) \dots L(u) = \frac{d}{dx} \left(p \frac{du}{dx} \right) + qu$$

l'expression différentielle linéaire du second ordre⁷⁾ où les fonctions $q(x)$, $p(x) > 0$ et $\frac{dp}{dx}$ sont continues dans l'intervalle $a \leq x \leq b$. On a la lemme⁸⁾: Si l'équation différentielle homogène $L(u) = 0$, jointe aux conditions aux limites $u(a) = u(b) = 0$, a la solution unique $u(x) \equiv 0$, continue ainsi que $\frac{du}{dx}$ et $\frac{d^2u}{dx^2}$ dans l'intervalle (a, b) , l'équation différentielle non homogène

$$(36) \dots L(u) + f(x) = 0$$

avec la fonction donnée $f(x)$ continue dans le même intervalle a une solution et une seule $u(x)$ continue ainsi que $\frac{du}{dx}$ et $\frac{d^2u}{dx^2}$ qui satisfait à la condition aux limites $u(a) = u(b) = 0$ et qui est exprimée par l'expression

$$(37) \dots u(x) = \int_a^b G(x, y) f(y) dy$$

Dans cette expression $G(x, y)$ est appelée la fonction de Green relative à l'expression différentielle $L(u)$ et à l'intervalle (a, b) . Elle est définie par les conditions suivantes:

1. $G(x, y)$ est une fonction continue dans le domaine

$$(A) \dots \begin{cases} a \leq x \leq b \\ a \leq y \leq b, \end{cases}$$

ayant les dérivées partielles $\frac{\partial G(x, y)}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial x^2}$ continues dans les intervalles partiels $a \leq x < y$ et $y < x \leq b$.

⁷⁾ Sich selbst adjungierter Differentialausdruck zweiter Ordnung.

⁸⁾ Horn — Partielle Differentialgleichungen, p. 248.

$$2. \left(\frac{\partial G(x, y)}{\partial x} \right)_{x=y+0} - \left(\frac{\partial G(x, y)}{\partial x} \right)_{x=y-0} = - \frac{1}{p(y)}$$

$$3. G(a, y) = G(b, y) = 0.$$

4. Dans les intervalles partiels $a \leq x < y$ et $y < x \leq b$ cette fonction satisfait par rapport à la variable x à l'équation différentielle linéaire $L(G(x, y)) = 0$.

Sous les conditions précédentes on démontre la symétrie de la fonction de Green

$$G(x, y) = G(y, x)$$

Nous démontrons le théorème⁹⁾: La fonction de Green $\Gamma(x, y; \lambda)$, relative à l'expression différentielle

$$(38) \dots \Delta(u) = L(u) + \lambda u = \frac{d}{dx} \left(p \frac{du}{dx} \right) + (q + \lambda) u,$$

est la résolvante de l'équation de Fredholm, si le noyau de cette équation est la fonction de Green $G(x, y)$, relative à l'expression différentielle $L(u)$ et aux mêmes conditions aux limites.

En effet, la fonction de Green $\Gamma(x, y; \lambda)$ satisfait aux conditions analogues à (1, 2, 3, 4) suivantes:

I. $\Gamma(x, y; \lambda)$ est une fonction continue dans le domaine (A) ayant les dérivées partielles $\frac{\partial \Gamma}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2}$ continues dans les intervalles partiels $a \leq x < y$ et $y < x \leq b$

$$II. \left(\frac{\partial \Gamma(x, y; \lambda)}{\partial x} \right)_{x=y+0} - \left(\frac{\partial \Gamma(x, y; \lambda)}{\partial x} \right)_{x=y-0} = - \frac{1}{p(y)}$$

$$III. \Gamma(a, y; \lambda) = \Gamma(b, y; \lambda) = 0$$

IV. Dans les intervalles partiels $a \leq x < y$ et $y < x \leq b$ on a par rapport à x

$$\Delta(\Gamma(x, y; \lambda)) = L(\Gamma(x, y; \lambda)) + \lambda \Gamma(x, y; \lambda) = 0.$$

En posant $\lambda = 0$ dans les conditions (I, II, III, IV) on obtient les conditions (1, 2, 3, 4) pour la fonction $\Gamma(x, y; 0)$. Mais par les conditions (1, 2, 3, 4) la fonction de Green est définie uniquement. Donc on a $\Gamma(x, y; 0) = G(x, y)$.

⁹⁾ Id. p. 254.

En dérivant tous les membres de l'équation (IV) par rapport à λ , on tire

$$(39) \dots L \left(\frac{\partial \Gamma(x, y; \lambda)}{\partial \lambda} \right) + \lambda \frac{\partial \Gamma(x, y; \lambda)}{\partial \lambda} + \Gamma(x, y; \lambda) = 0$$

et en général

$$(40) \dots L \left(\frac{\partial^n \Gamma(x, y; \lambda)}{\partial \lambda^n} \right) + \lambda \frac{\partial^n \Gamma(x, y; \lambda)}{\partial \lambda^n} + n \frac{\partial^{n-1} \Gamma(x, y; \lambda)}{\partial \lambda^{n-1}} = 0 \dots (n=2, 3, \dots)$$

Dans le cas où λ n'est pas une valeur singulière de l'équation différentielle

$$L(u) + \lambda u = 0$$

nous pouvons résoudre les équations (39) et (40) d'après la lemme précédente. En remarquant que dans ce cas la fonction de Green est $\Gamma(x, y; \lambda)$, relative à l'expression $L(u) + \lambda u$, et la fonction $f(x)$ est remplacée par

$$\Gamma(x, y; \lambda) \text{ ou } n \frac{\partial^{n-1} \Gamma(x, y; \lambda)}{\partial \lambda^{n-1}},$$

nous obtenons la solution de l'équation (39)

$$(41) \dots \frac{\partial \Gamma(x, y; \lambda)}{\partial \lambda} = \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) \Gamma(s, y; \lambda) ds$$

et celle de l'équation (40)

$$(42) \dots \frac{\partial^n \Gamma(x, y; \lambda)}{\partial \lambda^n} = n \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) \frac{\partial^{n-1} \Gamma(s, y; \lambda)}{\partial \lambda^{n-1}} ds.$$

La fonction $\Gamma(x, y; \lambda)$ qui satisfait à l'équation intégral-différentielle (41) et à la condition $\Gamma(x, y; 0) = G(x, y)$, est la résolvante de l'équation de Fredholm à noyau $G(x, y)$. Donc, le théorème est démontré.

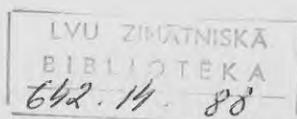
Par emploi de la relation (42) et les fonctions itérées

$$\Gamma^{(2)}(x, y; \lambda) = \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) \Gamma(s, y; \lambda) ds, \dots$$

nous exprimons la dérivée partielle $\frac{\partial^n \Gamma(x, y; \lambda)}{\partial \lambda^n}$. Si nous supposons

$$\frac{\partial^{n-1} \Gamma(x, y; \lambda)}{\partial \lambda^{n-1}} = (n-1)! \Gamma^{(n)}(x, y; \lambda) \dots (n \text{ entier positif}),$$

nous obtenons de la relation (42) l'égalité



$$\frac{\partial^n \Gamma(x, y; \lambda)}{\partial \lambda^n} = n! \int_a^b \Gamma(x, s; \lambda) \Gamma^{(n)}(s, y; \lambda) ds$$

Donc, l'expression

$$(43) \dots \frac{\partial^n \Gamma(x, y; \lambda)}{\partial \lambda^n} = n! \Gamma^{(n+1)}(x, y; \lambda) \dots \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

est générale.

Dans le cas $\lambda = 0$ on a

$$(43^1) \dots \left(\frac{\partial^n \Gamma(x, y; \lambda)}{\partial \lambda^n} \right)_{\lambda=0} = n! G^{(n+1)}(x, y)$$

avec le noyau itéré

$$G^{(n+1)}(x, y) = \int_a^b G(x, s) G^{(n)}(s, y) ds = \int_a^b G^{(n)}(x, s) G(s, y) ds$$

On peut obtenir d'après le théorème de Taylor

$$\Gamma(x, y; \lambda) = \Gamma(x, y; 0) + \frac{\lambda}{1!} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0} + \dots + \frac{\lambda^n}{n!} \left(\frac{\partial^n \Gamma}{\partial \lambda^n} \right)_{\lambda=0} + \dots$$

le développement classique de la résolvante en série de C. Neumann

$$\Gamma(x, y; \lambda) = G(x, y) + \lambda G^{(2)}(x, y) + \dots + \lambda^n G^{(n+1)}(x, y) + \dots$$

De la structure du développement précédent on voit la symétrie $\Gamma(x, y; \lambda) \equiv \Gamma(y, x; \lambda)$ parce que la fonction de Green $G(x, y)$ est symétrique.

Le théorème démontré a lieu pour les conditions aux limites plus larges¹⁰⁾, par exemple,

$$\begin{cases} Au(a) + Bu'(a) = 0 \\ Cu(b) + Du'(b) = 0 \end{cases}$$

où les constantes réelles A, B, C, D sont telles que $A^2 + B^2 \neq 0$ et $C^2 + D^2 \neq 0$.

Il est facile de généraliser ce théorème pour l'expression différentielle

$$\Delta_1(u) = L(u) + \lambda k(x) u = \frac{d}{dx} \left(p \frac{du}{dx} \right) + (q + \lambda k) u$$

où la fonction $k(x)$ continue garde le signe dans l'intervalle (a, b) , par exemple, $k(x) > 0$.

¹⁰⁾ Voir, D. Hilbert — Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, p. 41, 1912.

Soit $\Gamma_1(x, y; \lambda)$ la fonction de Green, relative à l'expression $\Lambda_1(u)$. Elle satisfait aux conditions analogues à (I, II, III,) et à l'équation différentielle

$$\Lambda_1[\Gamma_1(x, y; \lambda)] = L[\Gamma_1(x, y; \lambda)] + \lambda k(x) \Gamma_1(x, y; \lambda) = 0$$

par rapport à la variable x . Par la dérivation on établit les équations

$$(39^1) \dots L\left(\frac{\partial \Gamma_1(x, y; \lambda)}{\partial \lambda}\right) + \lambda k(x) \frac{\partial \Gamma_1(x, y; \lambda)}{\partial \lambda} + k(x) \Gamma_1(x, y; \lambda) = 0$$

et

$$(40^1) \dots L\left(\frac{\partial^n \Gamma_1(x, y; \lambda)}{\partial \lambda^n}\right) + \lambda k(x) \frac{\partial^n \Gamma_1(x, y; \lambda)}{\partial \lambda^n} + nk(x) \frac{\partial^{n-1} \Gamma_1(x, y; \lambda)}{\partial \lambda^{n-1}} = 0$$

avec $n = 2, 3, \dots$

D'après la lemme mentionnée on tire

$$(41^1) \dots \frac{\partial \Gamma_1(x, y; \lambda)}{\partial \lambda} = \int_a^b \Gamma_1(x, s; \lambda) \Gamma_1(s, y; \lambda) k(s) ds.$$

et

$$(42^1) \dots \frac{\partial^n \Gamma_1(x, y; \lambda)}{\partial \lambda^n} = n \int_a^b \Gamma_1(x, s; \lambda) \frac{\partial^{n-1} \Gamma_1(s, y; \lambda)}{\partial \lambda^{n-1}} k(s) ds.$$

Si nous introduisons la fonction

$$\Gamma_*(x, y; \lambda) = \Gamma_1(x, y; \lambda) \sqrt{k(x)k(y)}$$

nous obtenons des relations précédentes l'expression

$$(44) \dots \frac{\partial \Gamma_*(x, y; \lambda)}{\partial \lambda} = \int_a^b \Gamma_*(x, s; \lambda) \Gamma_*(s, y; \lambda) ds$$

et en général

$$(45) \dots \frac{\partial^n \Gamma_*(x, y; \lambda)}{\partial \lambda^n} = n! \Gamma_*^{(n+1)}(x, y; \lambda) \dots (n = 1, 2, 3, \dots)$$

avec la fonction itérée $\Gamma_*^{(n+1)}(x, y; \lambda)$.

L'équation (44), jointe à la condition

$$\Gamma_*(x, y; 0) = \Gamma_1(x, y; 0) \sqrt{k(x)k(y)} = G(x, y) \sqrt{k(x)k(y)}$$

nous montre que la fonction $\Gamma_*(x, y; \lambda)$ est la résolvante du noyau

$$G_*(x, y) = G(x, y) \sqrt{k(x)k(y)}.$$

De la symétrie de $\Gamma_*(x, y; \lambda)$ on tire celle-ci de la fonction de Green

$$\Gamma_1(x, y; \lambda) = \frac{\Gamma_*(x, y; \lambda)}{\sqrt{k(x)k(y)}}.$$

Donc, si $G(x, y)$ et $\Gamma_1(x, y; \lambda)$ sont les fonctions de Green, relatives respectivement à l'expression différentielle $L(u)$ ou $\Lambda_1(u) = L(u) + \lambda k(x)u$ et aux mêmes conditions aux limites, la fonction $\Gamma_*(x, y; \lambda) = \Gamma_1(x, y; \lambda) \sqrt{k(x)k(y)}$ est la résolvante de l'équation de Fredholm à noyau symétrique $G_*(x, y) = G(x, y) \sqrt{k(x)k(y)}$ et à paramètre λ .

Les théorèmes analogues subsistent pour les équations différentielles ordinaires d'ordre supérieur et pour les équations différentielles aux dérivées partielles.

Soit

$$L(u) = \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial u}{\partial y} \right) + qu$$

l'expression différentielle partielle du second ordre et du type elliptique¹¹⁾. Sous les hypothèses convenables il existe la fonction de Green $G(x, y; \xi, \eta)$ relative à l'expression $L(u)$. Elle est définie par les conditions analogues à (1, 2, 3, 4) où la condition aux limites peut être généralisée.

Sans emploi de la formule classique de Green on démontre, comme dans le cas précédent de l'équation différentielle ordinaire, le théorèmes¹²⁾ suivants:

I. La fonction de Green $\Gamma(x, y; \xi, \eta; \lambda)$, relative à l'expression différentielle $\Lambda(u) = L(u) + \lambda u$, est identique à la résolvante de l'équation de Fredholm à deux variables et à paramètre λ , si le noyau est $\frac{1}{2\pi} G(x, y; \xi, \eta)$ avec la fonction de Green $G(x, y; \xi, \eta)$, relative à l'expression $L(u)$ et aux mêmes conditions aux limites.

II. Si $G(x, y; \xi, \eta)$ et $\Gamma_1(x, y; \xi, \eta; \lambda)$ sont les fonctions de Green, relatives aux mêmes conditions aux limites et aux expressions différentielles $L(u)$ et $\Lambda_1(u) = L(u) + \lambda k(x, y)u$ où la fonction $k(x, y)$ garde le signe dans le domaine d'existence, la fonction $\Gamma_*(x, y; \xi, \eta; \lambda) = \Gamma_1(x, y; \xi, \eta; \lambda) \sqrt{k(x, y)k(\xi, \eta)}$ est la résolvante de l'équation de Fredholm à deux variables et à noyau

$$G_*(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} G(x, y; \xi, \eta) \sqrt{k(x, y)k(\xi, \eta)}.$$

Remarque: L'extension de ces théorèmes au cas de plusieurs variables est immédiate.

¹¹⁾ Sich selbst adjungierter partieller Differentialausdruck zweiter Ordnung von elliptischen Typus.

¹²⁾ D. Hilbert — Grundzüge etc. p. 63.

Fredholma vienādojums ar reālu simmetrisku kodolu

A. Lūsis

(Kopsavilkums)

Saturs:

1. Rēgulārā Fredholma vienādojuma dažas īpašības, ja kodols nesimmetrisks.
2. Reālā simmetriskā kodola resolventes raksturīgais integrodiferenciālais vienādojums. Resolventes E. Schmidt'a formulas izlietošana.
3. Teorēma par simmetriskā kodola resolventes poliem.
4. Teorēma par simmetriskā kodola raksturīgās konstantes rangū jeb indekšu.
5. Par E. Schmidt'a tipa simmetrizējamā kodola resolventi.
6. Resolventes integrodiferenciālā vienādojuma izlietošana Green'a funkcijai lineāro vienkāršo un parciālo diferenciālvienādojumu robežproblēmās.

Šajā darbā norādu uz resolventes integrodiferenciālā vienādojuma nozīmi Fredholma vienādojuma klasiskajā teorijā ar simmetrisku kodolu un izlietošanā lineāro diferenciālvienādojumu teorijā.

Darba 1. nodaļījumā papildinu manus iepriekšējos darbus¹⁾ ar šādas teorēmas pierādījumu: integrodiferenciālajam vienādojumam (5) kopā ar nosacījumu $\Gamma(x, y; 0) = K(x, y)$ eksistē viens vienīgs atrisinājums $\Gamma(x, y; \lambda)$, kas ir analītiskā funkcija relatīvi pret λ .

Šis atrisinājums ir Fredholma vienādojuma (1) resolvente $\Gamma(x, y; \lambda)$, dēfīnēta pietiekoši mazām λ absolūtām nozīmēm ar izvīrījumu C. Neuman'a rindā (2). Visā eksistences apgabalā tā ir parametra λ meromorfā funkcija, kurai poli ir Fredholma determinanta (4) $D(\lambda)$ saknes.

Ar diferencēšanu pēc λ atrod no (5) vispārīgu sakaru (6) ar saliktām funkcijām $\Gamma^{(n)}(x, y; \lambda)$. Tāpat no Fredholma sakara (7) uzstāda vispārīgās formulas (8) un (8¹). Minētās īpašības pastāv Fredholma vienādojumam ar nesimmetrisku kodolu.

¹⁾ Šo un turpmākos norādījumus sk. franču tekstā.

Darba 2. nodaļījumā vispirms atrodu sakarus (9) un (12), ko apmierina simmetriskā kodola $K(x, y) \equiv K(y, x)$ resolvente $\Gamma(x, y; \lambda)$ uz dēfīnīcijas kvadrāta diagonāles ($y = x$) un Fredholm a determinants $D(\lambda)$. Šo sakaru uzstādīšanai jāievēro, ka simmetriskā kodola $K(x, y)$ visi saliktie kodoli

$$K^{(2)}(x, y), \dots, K^{(n)}(x, y), \dots$$

un resolvente $\Gamma(x, y; \lambda)$ ir arī simmetriskas funkcijas. No (9) un (10) rodas simmetriskā kodola resolventes īpašība

$$\frac{\partial^n \Gamma(x, x; \lambda)}{\partial \lambda^n} \geq 0 \text{ gadījumā, kad } n \text{ ir nepāru skaitlis.}$$

Bet šī atvasinātā funkcija nav identiska nullei x nozīmēm intervālā (a, b) . Analogā kārtā atrod no (12) nevienādību (12¹), ja kodols simmetrisks.

Simmetriskā kodola resolventes integrodiferenciālo vienādojumu (5) viegli pārbauda ar resolventes E. Schmid't'a izteiksmi (13), kur $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ ir kodola raksturīgās konstantes un atbilstošās fundamentālfunkcijas $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$, veido ortogonālu un normētu sistēmu ²⁾ ar nosacījumiem (14). Tā kā konverģences nosacījumi par dabūtajām rindām ievēroti, tad, diferencējot pēc λ , rodas visparīgās izteiksmes (16) un (17). Šīs izteiksmes speciālā gadījumā, kad $y = x$, dod (16¹) un (17¹), kas tieši norāda uz nevienādībām

$$\frac{\partial^n \Gamma(x, x; \lambda)}{\partial \lambda^n} \geq 0 \dots (n - \text{nepāru skaitlis})$$

$$\text{un } \Gamma^{(n)}(x, x; \lambda) \geq 0 \dots (n - \text{pāru skaitlis}).$$

Abu funkciju nozīmes ir nulles tikai intervalla $a \leq x \leq b$ atsevišķos punktos, kur visu fundamentālfunkciju nozīmes ir nulles.

Ievietojot $s = x$ sakarā (17¹) un integrējot, atrod (18). Speciālā gadījumā $\lambda = 0$ rodas no (17) un (18) salikto kodolu

$$K^{(2)}(x, y), \dots, K^{(n)}(x, y), \dots \text{ un kodola } K(x, y) \text{ pēdu}$$

$$p_2 = \int_a^b K^{(2)}(s, s) ds, \dots, p_n = \int_a^b K^{(n)}(s, s) ds, \dots -$$

klasiskie izvīrījumi rindā.

Pēc izteiksmes (18) ievietošanas formulā (8¹) rodas sakars (19), kas tieši norāda nevienādības (12¹) pareizību.

Darba 3. nodaļījumā ar jaunu metodi pierādu t e o r ē m u: reālā simmetriskā kodola resolvente ir meromorfā funkcija ar vienkāršiem poliem.

Ja $\lambda = \lambda_0$ ir nesimetriskā kodola $K(x, y)$ raksturīgā konstante un resolventes $\Gamma(x, y; \lambda)$ pols ar kārtu $n \geq 1$, tad resolventi izteic šī pola apkārtņē ar rindu (20). Ievietojot šo izteiksmi resolventes integrodiferenciālā vienādojumā (5) un salīdzinot abās pusēs $(\lambda_0 - \lambda)^{-2n}$ koeficientus, atrod sakaru (22) vairākkārtējā ($n > 1$) pola gadījumā. Bet resolventei (23) ar vienkāršu polu eksistē īpašība (24).

Kodola $K(x, y) \equiv K(y, x)$ simmetrijas gadījumā arī funkcijas $f_n(x, y), \dots$ simmetriskas. Tādēļ pēc ievietošanas $y = x$ sakarā (22) atrod, ka simmetriskā kodola resolventei $f_n(x, y) \equiv 0$, ja $n > 1$, t. i. tai eksistē tikai vienkārši poli un izvirzījums (23).

Darba 4. nodaļījumā ar direkto metodi pierādu teorēmu⁴⁾: reālā simmetriskā kodola raksturīgās konstantes rangs jeb indekss q vienāds ar tās šķiru m , ar kādu tā noder par sakni Fredholma determinantam $D(\lambda)$.

Pierādījumam noteic⁵⁾ reālās simmetriskās funkcijas $f(x, y) \equiv f(y, x)$ struktūru, atrisinot vienādojumu (24) ar blakus nosacījumu (26). Ar rekurences slēdzienu atrod funkcijas $f(x, y)$ izteiksmi (28), kur pēc konstrukcijas funkcijas $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ apmierina nosacījumus (29). Pēc izteiksmes (28) ievietošanas vienādojumā (24) rodas ortogonālītātes nosacījumi (30). Konstruētās funkcijas $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ veido ortogonālu un normētu funkciju sistēmu, un tādēļ tās ir lineāri neatkarīgas. Ievietojot izteiksmi (28) sakarā (27) ar kodola raksturīgo konstanti λ_0 , atrod, ka konstruētās funkcijas ir kodola $K(x, y) \equiv K(y, x)$ lineāri neatkarīgas fundamentālfunkcijas konstantei λ_0 . Tādēļ funkcijas $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ veido raksturīgai konstantei λ_0 piederīgo fundamentālsistēmu t. i. konstantes λ_0 rangs jeb indekss $q = m$.

Darba 5. nodaļījumā ar resolventes integrodiferenciālā vienādojuma palīdzību pierādu, ka t. s. E. Schmidt'a tipa⁶⁾ simmetrizējamā kodola (33) resolvente ir (34). Šajās izteiksmēs funkcijas $\alpha(x)$ un $\beta(x)$ reālas un nepārtrauktas intervallā $a \leq x \leq b$ ar nosacījumu $\alpha(x)\beta(x) > 0$, kodols $K_1(x, y) \equiv K_1(y, x)$ simmetrisks un $\Gamma_*(x, y; \lambda)$ ir simmetriskā kodola

$$K_*(x, y) \equiv \sqrt{\alpha(x)\alpha(y)\beta(x)\beta(y)} K_1(x, y) \text{ resolvente.}$$

Darba 6. nodaļījumā izlietoju resolventes integrodiferenciālo vienādojumu šādas teorēmas⁹⁾ pierādījumam diferenciālvienādojumu robežproblēmās: Green'a funkcija $\Gamma(x, y; \lambda)$,

relatīva pret diferenciālizteiksmi (38), ir Fredholma vienādojuma resolvente, ja šī vienādojuma parametrs ir λ un kodols ir Green'a funkcija $G(x, y)$, relatīva pret diferenciālizteiksmi (35) un ar tiem pašiem robežnosacījumiem.

Diferenciālizteiksmēs $L(u)$ un $\Lambda(u)$ funkcijas $q(x), p(x) > 0$ un $\frac{dp}{dx}$ nepārtrauktas intervallā $a \leq x \leq b$. Green'a funkcijas $G(x, y)$ un $\Gamma(x, y; \lambda)$ dēfīnētas saskanīgi ar nosacījumiem (1, 2, 3, 4) un (I, II, III, IV).

Ievietojot $\lambda = 0$ nosacījumos (I, II, III, IV), atrod funkcijai $\Gamma(x, y; 0)$ nosacījumus (1, 2, 3, 4). Tā kā ar pēdējiem funkcija $G(x, y)$ viennozīmīgi dēfīnēta, tad $\Gamma(x, y; 0) = G(x, y)$.

Ar vienādojuma (IV) visu locekļu diferencēšanu pēc λ sastāda (39) un vispārīgi (40). Robežproblēmas (39) un (40) atrisināšanai lieto lemmu:⁸⁾ Ja homogenam diferenciālvienādojumam $L(u) = 0$ ar robežnosacījumiem $u(a) = u(b) = 0$ eksistē tikai triviālais atrisinājums $u(x) = 0$, kas ir nepārtraukta funkcija ar nepārtrauktiem atvasinājumiem $u'(x)$ un $u''(x)$ intervallā $a \leq x \leq b$, tad nehomogenam vienādojumam (36) ar doto nepārtraukto funkciju $f(x)$ intervallā (a, b) eksistē viens vienīgs atrisinājums (37), kas ir nepārtraukta funkcija ar nepārtrauktiem atvasinājumiem $u'(x)$ un $u''(x)$ intervallā (a, b) un apmierina robežnosacījumus $u(a) = u(b) = 0$.

Kad λ nav diferenciālvienādojuma $L(u) + \lambda u = 0$ parametra singulārā nozīme, tad pēc minētās lemmas atrod robežproblēmu (39) un (40) saskanīgos atrisinājumus (41) un (42). Vienādojums (41), kopā ar nosacījumu $\Gamma(x, y; 0) = G(x, y)$, raksturo funkciju $\Gamma(x, y; \lambda)$ kā Fredholma vienādojuma resolventi, ja parametrs ir λ un kodols ir $G(x, y)$. Ar rekurences slēdzienu no (42) uzstāda vispārīgo izteiksmi (43).

Minēto teorēmu var vispārināt diferenciālizteiksmei $\Lambda_1(u) = L(u) + \lambda k(x)u$ ar nepārtrauktu funkciju $k(x)$, kas nemaina zīmi intervallā (a, b) , šādā veidā: Ja $G(x, y)$ un $\Gamma_1(x, y; \lambda)$ ir diferenciālizteiksmēm $L(u)$ un $\Lambda_1(u)$ atbilstošas Green'a funkcijas ar kopējiem robežnosacījumiem, tad funkcija

$\Gamma_*(x, y; \lambda) = \Gamma_1(x, y; \lambda) \sqrt{k(x)k(y)}$ ir Fredholma vienādojuma resolvente, ja šī vienādojuma kodols ir

$G_*(x, y) = G(x, y) \sqrt{k(x)k(y)}$ un parametrs λ .

Analogas teorēmas pastāv augstākās šķiras līnēāriem vienkāršiem diferenciālvienādojumiem un ar plašākiem robežnosacījumiem.¹⁰⁾

Tāpat var pierādīt, nelietojot klasisko Green'a teorēmu, bet gan ar resolventes raksturīgā integrodiferenciālā vienādojuma palīdzību analogas teorēmas¹²⁾ parciālo diferenciālvienādojumu robežproblēmas:

I. Ja Fredholma vienādojumā parametrs ir λ un kodols

$$\frac{1}{2\pi} G(x, y; \xi, \eta) \text{ izteikts ar Green'a funkciju } G(x, y; \xi, \eta)$$

relatīvu pret elliptiskā tipa parciālo diferenciālizteiksmi

$$L(u) = \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial u}{\partial y} \right) + qu,$$

tad šī vienādojuma resolventi reprezentē Green'a funkcija $\Gamma(x, y; \xi, \eta; \lambda)$, relatīva pret diferenciālizteiksmi

$$\Lambda(u) = L(u) + \lambda u \text{ un tiem pašiem robežnosacījumiem.}$$

II. Ja $G(x, y; \xi, \eta)$ un $\Gamma_1(x, y; \xi, \eta; \lambda)$ ir ar kopējiem robežnosacījumiem Green'a funkcijas, relatīvas pret izteiksmēm $L(u)$ un $\Lambda_1(u) = L(u) + \lambda k(x, y)u$ ar funkciju $k(x, y)$, kas nemaina zīmi eksistences apgabalā, tad funkcija

$\Gamma_*(x, y; \xi, \eta; \lambda) = \Gamma_1(x, y; \xi, \eta; \lambda) / \overline{k(x, y)k(\xi, \eta)}$ ir Fredholma vienādojuma resolvente ar parametru λ un kodolu

$$G_*(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} G(x, y; \xi, \eta) / \overline{k(x, y)k(\xi, \eta)}.$$

Šīs teorēmas var analogā kārtā vispārināt ar vairāk mainīgiem.

Iesniegts fakultātei 1. augustā 1929. g.

...käsitys differentiaalilaskennan ja sen klassikoiden roolista...

Täältä varjolla nähdään, miten Greenin teoreemista...

...käsitys Greenin teoreemista ja sen sovellukset...

Zum Übergang der Glimmentladung in die Büschelentladung.

F. Trey.

Die Erforschung der Funkentladungen ist Dank den Arbeiten von Rogowski in ein ganz neues Stadium getreten. Es hat sich herausgestellt, dass der elektrische Durchschlag in Gasen nicht durch die Entstehung einer „Ionenlawine“ erklärt werden kann, da zur lawinenartigen Vermehrung der Elektronen und Ionen vermittelt Stossionisation eine beträchtlich grössere Zeit erforderlich wäre, als tatsächlich, wie die Versuche lehren, zur Bildung der Entladung verbraucht wird. Dadurch werden wir gezwungen auf die Stossionisation als Elementarprozess zu verzichten und nach neuen Elementarvorgängen zu suchen. Zu diesem Zweck isolierte Rogowski die ersten bei der Entstehung eines Funkens stattfindenden Vorgänge und fand, dass der Funke im I Stadium, innerhalb 10^{-7} sec, aus einer Glimmentladung (GE.) besteht, bei der die Vorgänge an der Kathode die Hauptrolle spielen, und dass erst im II Stadium, in etwa 10^{-5} sec, „Kanäle“ auftreten, die von der Anode ausgehen und die Funkenbahn vorbereiten. Die Photographien der leuchtenden Teile der Entladung in ihrem I und II Stadium, die in der erwähnten Arbeit von Rogowski unter b und c (S. 192) reproduciert sind, zeigen eine grosse Ähnlichkeit mit einigen Aufnahmen von GE. und positiven Büschelentladungen (BE.), die ich vor einiger Zeit gemacht habe (Fig. 1). Meine in Fig. 1 wiedergegebenen Bilder zeigen Entladungen zwischen einer positiven Kugel und einer negativen Platte bei verschiedenen Entfernungen eines Ra-präparates von der Entladungsstrecke, also bei verschiedenen Ionisationsgraden des Gases, und geben die Übergangsphasen zwischen einer reinen GE. und einer BE. wieder. Während also die Bilder von Rogowski den ganzen Übergang, die Glimmlichtphase

(Stadium I) und auch die Büschellichtphase (Stadium II) gleichzeitig enthalten, wobei nur die Weiterentwicklung der Entladung zum Funken künstlich abgebrochen ist, erscheinen auf meinen Bildern einzelne Phasen eines solchen Überganges isoliert. Man erkennt sowohl auf den Bildern von Rogowski, als auch auf meinen Photographien deutlich die am stärksten leuchtende positive Glimmschicht



Fig. 1.

Übergang der GE. in die BE. bei Veränderung der Ionisation. Druck 760 mm. Elektrodenabstand 14,5 mm. Stromstärke $7 \cdot 10^{-6}$ amp. Spannung 20 kv. a) Entfernung des Ra-präparates 9 cm; b) 22 cm; c) 60 cm; d) ohne Bestrahlung.

(Fig. 1 a, b, c) in einiger Entfernung vor der positiven Elektrode und die von einzelnen „Fusspunkten“ auf der Anode selbst (Fig. 1, c, d) ausgehenden Büschel, die von Rogowski „Kanäle“ genannt werden²⁾). Die Elektroden sind auf den Bildern nicht zu sehen. Die Grösse der positiven Kugel kann man aber leicht aus der leuchtenden Glimmhaube und ihre Lage aus den Ansatzstellen (Fusspunkten) der Büschel ersehen. Meine Versuche, bei denen der Übergang zwischen der GE. und BE. untersucht wurde und die bisher noch nicht veröffentlicht worden sind, gewinnen durch ihre, von Rogowski in ein neues Licht gesetzte Beziehung zum elektrischen Funken besonderes Interesse. Es handelte sich bei meinen Versuchen darum festzustellen, welche Bestimmungsstücke innerhalb der Entladungsstrecke diesen Übergang einer GE. in eine BE. fördernd bzw. hindernd oder verzögernd beeinflussen. Es wurden von mir zu diesem Zweck die Ionisation der Gasstrecke und die Gasfüllung verändert. Es kommt dabei stets auf eine Beeinflussung der GE. heraus, da die BE. eine diskontinuierliche Entladung ist und bei der Bildung eines jeden Büschels, wie auch aus den Versuchen von Rogowski folgt, jedesmal die Glimmlichtphase durchlaufen wird. Die GE. kommt also bei meinen Versuchsbedingungen sowohl als beständige Entladungsform, als auch als Übergangsphase der BE. vor, und es sollte gerade untersucht werden, bei welchen Bedingungen innerhalb der Entladungsstrecke die GE. unbeständig wird und

in die BE. übergeht. Umgekehrt kann dann auch eine BE. in eine GE. übergehen, wenn durch die entgegengesetzten Änderungen innerhalb der Entladungsstrecke die I Übergangsphase, die GE., begünstigt und in eine beständige Entladung übergeführt wird.

Die äusseren Versuchsbedingungen, die Spannung und die Stromstärke, sowie auch die Elektrodenform (vergl. S. 31) mussten, damit die Verwandlung stattfindet, so gewählt werden, dass die Entladung labil wird, d. h. dass schon durch geringfügige Veränderungen der Übergang in die GE. bzw. BE. herbeigeführt wird. Für das eine Bestimmungsstück, den Ionisationszustand der Entladungsstrecke, waren die günstigsten Versuchsbedingungen, bei denen also geringe Änderungen des Ionisationsgrades den Charakter der Entladung entscheidend beeinflussen, bereits bekannt³⁾. Dieselbe Entladungsstrecke verwandte ich dann auch für die Untersuchung des Einflusses des Gases, da ich annehmen konnte, dass eine Entladungsstrecke, bei der die Vorgänge von der Ionisation stark beeinflusst werden, auch gegenüber anderen Veränderungen innerhalb der Entladungsstrecke besonders empfindlich sein würde. Ich ging also bei meinen Untersuchungen stets von der bekannten Erscheinung aus, dass eine BE. an einer positivgeladenen Spitze oder kleinen Kugel, der eine grössere ebene Kathode gegenübersteht, durch eine Ionisation der Entladungsstrecke in eine GE. übergeführt wird, und umgekehrt, eine Verringerung der Ionisation wieder eine BE. hervorruft. Zuerst habe ich untersucht, wie sich dieser Übergang der einen Entladungsform in die andere gestaltet, wenn man die Änderung der Ionisation der Gasstrecke bei verschiedenen Gasfüllungen vornimmt. Als Elektrizitätsquelle diente mir hierbei ein Induktorium und als Kriterium für die Grösse der durch die Fremdionisation hervorgerufenen Wirkung benutzte ich die Stromstärke, da bei gleichen Bedingungen am Induktor die BE. eine grössere Elektrizitätsmenge befördert, als die GE., so dass nach den Zwischenwerten der Stromstärke beurteilt werden konnte, wie weit der Übergang fortgeschritten war. Es wurde also zuerst der Einfluss der Gasfüllung auf den Gang der Stromstärke bei allmählicher Veränderung der Ionisation beobachtet, und nicht direkt der Einfluss der Gasfüllung auf die Entladung selbst. Aus den erhaltenen Daten, bzw. aus den nach ihnen gezeichneten Kurven, konnte man leicht entnehmen, welche Gasfüllungen der GE. und welche der BE. günstig oder ungünstig sind. Die so erhaltenen Aufschlüsse wurden dann bei Verwendung einer Influenzmaschine verifiziert, indem nun direkt

die Entladungsarten bei konstantem Ionisationszustand lediglich durch Verändern der Gasfüllung ineinander übergeführt wurden.

Die Versuchsanordnung mit dem Induktor. Der eine Pol eines Induktoriums von 20 cm Schlagweite war geerdet, vom anderen führte eine Leitung zur Entladungsstrecke und von dieser ging die Leitung über ein Galvanometer zur Erde. Parallel zum Induktor lag eine Kapazität von 1500 cm und das Galvanometer war durch einen Block-Kondensator geschützt. Als Ionisator verwandte ich ein in einem Glasröhrchen eingeschlossenes Radiumpräparat, das 30 mg Ra-bromid enthielt. Es wurde in verschiedenen Entfernungen von der Funkenstrecke aufgestellt. Den Ionisationsgrad in 1 cm Entfernung vom Präparat nahm ich als Einheit an. Die Abnahme der Ionisierung mit der Entfernung war durch die quadratische Gesetzmässigkeit bestimmt. Auf den Diagrammen (Fig. 2—6) habe ich immer beide Angaben gemacht: die Entfernung des Präparates in cm und den Ionisationsgrad in % der angenommenen Einheit.

Als negative Elektrode der Entladungsstrecke diente eine ebene Kreisplatte, die positive bestand bei Verwendung des Induktors anstelle der Kugel aus einer Platinnadel, auf der eine kleine Metallscheibe vor- und zurückgeschoben werden konnte. Dadurch konnte nämlich das hervorragende Ende der Nadel länger und kürzer eingestellt werden, ohne dass dabei der Elektrodenabstand zwischen der Spitze und der Platte verändert zu werden brauchte. Mit Hilfe dieser Scheibe war der labile Zustand zwischen der GE. und der BE. am leichtesten einzustellen. Zu diesem Zweck wurde die Scheibe zuerst soweit vorgeschoben, dass nur ein kleines Ende der Nadel (+) hervorragte, und die Kreisplatte (—) soweit zurückgeschoben, d. h. der Elektrodenabstand soweit vergrössert, dass gerade keine Entladungen mehr stattfanden. Näherte man dann das Ra-präparat, so zeigten sich Funken oder Büschel, die umso intensiver wurden, je näher man das Präparat brachte. Wenn man aber die erwähnte Scheibe zurückschob, das hervorragende Ende der Nadel also verlängerte, und dann das Präparat näherte, so wurde die BE. nach einem ersten Anschwellen alsbald schwächer und blieb schliesslich, wenn das Präparat ganz nahe an die Entladungsstrecke herangebracht war, ganz aus: die Entladung bleibt bei der I Phase, der GE., stehen und es kommt überhaupt nicht zur BE. Bei einer solchen Einstellung konnten dann durch abwechselndes Nähern und Entfernen des Ra-präparates positive BE. und GE. beliebig ineinander übergeführt wer-

den. Zur Klärung der Wirkungsweise der Scheibe habe ich zuerst eine Reihe von Versuchen bei verschiedenen Stellungen der Scheibe gemacht. Ich beobachtete die Stromstärke, die sich bei bestimmten Entfernungen des Präparates einstellte. Die erhaltenen Daten sind in der Fig. 2 wiedergegeben. Als Abszisse ist der Ionisationsgrad auf-

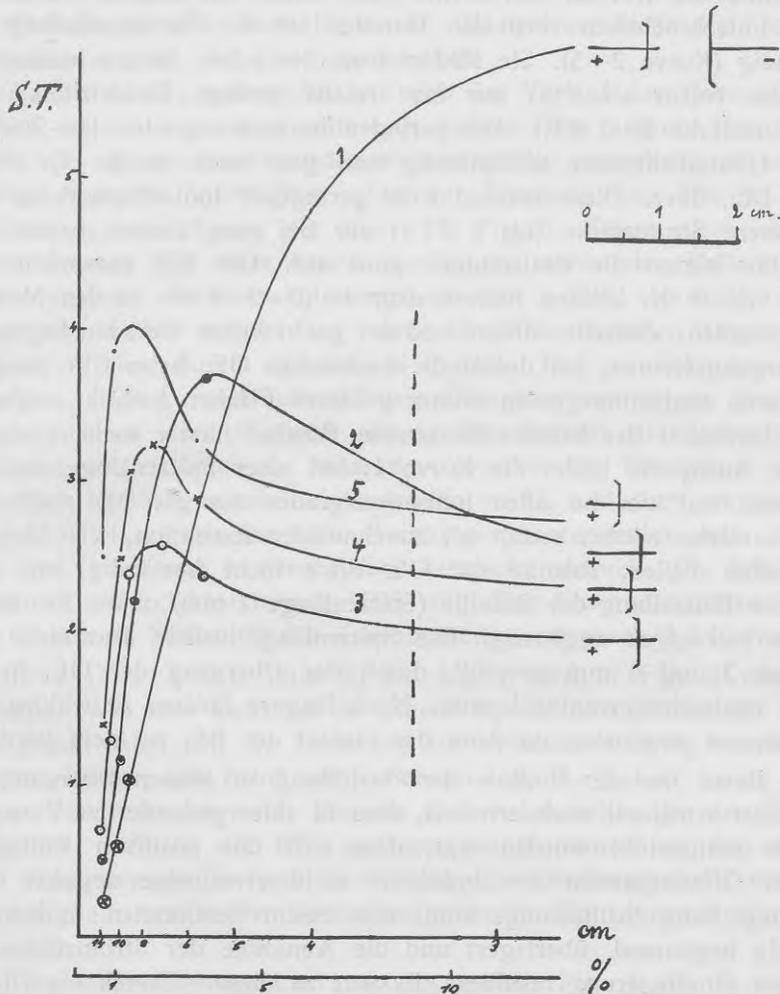


Fig. 2.

Stromstärke der Entladung in Luft bei Veränderung der Ionisation und bei verschiedenen Anoden. Länge der hervorragenden Spitze bei 1) 2,0 mm; 2) 2,6 mm; 3) 3,0 mm; 4) 3,7 mm; 5) 5,6 mm.

getragen und als Ordinate die Stromstärke in ST. ($1 \text{ ST.} = 1,5 \cdot 10^{-7} \text{ amp.}$). Zur Erleichterung der Übersicht sind auf der Abszisse noch die den jeweiligen Ionisationsgraden entsprechenden Entfernungen des Präparates in cm angegeben. Ausserdem ist am Schluss jeder Kurve die Entladungsstrecke in natürlicher Grösse aufgezeichnet. Wir betrachten die Kurven von rechts nach links. Im Gebiet rechts von der unterbrochenen vertikalen Geraden ist die Glimmentladung beständig (Kurve 2—5). Sie fördert trotz des relativ hohen Ionisationsgrades (mehr als 7%) nur eine relativ geringe Elektrizitätsmenge (Stromstärke 2—3 ST.). Bei geringen Ionisationsgraden (1—2%) ist die Glimmlichtphase unbeständig und geht stets in die II Phase, die BE., über. Diese erzeugt trotz geringeren Ionisationsgrades eine grössere Stromstärke (bis 4 ST.); nur bei ganz kleinen Ionisationsgraden hörten die Entladungen ganz auf. Der BE. entspricht also das Gebiet der kleinen Ionisationsgrade (0—2%) bis zu den Maxima der Kurven. Zwischen diesen und der gestrichelten Geraden liegen die Übergangsformen, bei denen die beständige GE. beim Übergang zu höheren Ionisationsgraden immer grössere Flächen bedeckt, während die Intensität der herauschiessenden Büschel immer mehr abnimmt. Eine Ausnahme bildet die Kurve 1: bei einer Spitzenlänge von nur 2 mm fand hier bei allen Ionisationsgraden nur die BE. statt. Ihre Stromstärke wächst stetig mit zunehmender Ionisation, wie übrigens in allen Fällen, solange die GE. noch nicht beständig ist. Eine solche Einstellung der Scheibe (Spitzenlänge 2 mm) wäre für meine Untersuchungen ungünstig. Die Spitzenlänge wurde also stets zwischen 3 und 6 mm gewählt, damit der Übergang der GE. in die BE. beobachtet werden konnte. Noch längere Spitzen zu wählen war wiederum ungünstig, da dann das Gebiet der BE. zu klein wird.

Bevor nun der Einfluss der Gasfüllung auf diesen Übergang betrachtet wird, sei noch erwähnt, dass in einer gesonderten Versuchsreihe festgestellt worden war, dass sich der positiven Entladung beim Öffnungsstrom des Induktors nicht etwa eine negative Entladung beim Schliessungsstrom, von einem bestimmten Ionisationsgrade beginnend, überlagert und die Abnahme der Stromstärke aus dieser Überlagerung resultiere. Es war zu diesem Zweck ein Gleichrichter eingeschaltet worden, der einen negativen Strom vollständig ausschaltete. Es erwies sich, dass die Stromstärke-Ionisationskurven mit und ohne Gleichrichter dieselben waren. — Ausserdem war festgestellt worden, dass die mit dem Übergang in die GE. verbundene

Abnahme der Stromstärke unabhängig davon ist, welche Teile der Elektroden oder des Elektrodenzwischenraumes bestrahlt werden. Das Ra-präparat war zu diesem Zweck in einen Bleiturm mit 5 cm dicken Wänden eingeschlossen worden und die Strahlung wurde nur durch einen schmalen Spalt hindurchgelassen. Die Wirkungen traten in gleicher Weise ein, sobald nur ein im übrigen ganz beliebiger Teil der Entladungsstrecke bestrahlt wurde. An welcher Stelle die Fremdionisation angreift, ist also unwesentlich.

Es wurde nun untersucht, wie sich der Verlauf der Stromstärke-Kurven ändert, wenn man statt Luft andere Gase nimmt. Die Luft, sowie alle anderen Gase wurden stets sorgfältig getrocknet, da schon geringe Mengen Feuchtigkeit sofort zur Büschelbildung führen, also nur Kurven vom Typus der Kurve 1, Fig. 2, liefern. Vor einem jeden Versuch mit einer neuen Gasfüllung wurde das Entladungsgefäß mehrere Male evakuiert und wieder gefüllt. Nach der Beobachtung in dem reinen Gas wurde ein Teil desselben abgesogen und der Verlust durch ein anderes ersetzt. Die so erhaltenen Mischungen stellten einen allmählichen Übergang von einem Gas zu einem anderen dar. Dadurch wurde die Realität der gefundenen Änderungen gewährleistet. Ausserdem wurden die Übergänge stets in beiden Richtungen, also etwa von N_2 zu O_2 und auch umgekehrt von O_2 zu N_2 , untersucht. Die Resultate stimmten miteinander überein. Der Druck war in allen Fällen Atmosphärendruck. Die Scheitelspannung am Induktor betrug 7500 volt. Der Elektrodenabstand betrug 6,5 mm. 1 Skalenteil des Galvanometers entsprach $1,5 \cdot 10^{-7}$ amp.

Der Übergang von N_2 zu Luft wird in Fig. 3 wiedergegeben. Wie man sieht, ist in reinem N_2 die Stromstärke der BE. sehr gross; daher tritt die Änderung der Stromstärke in N_2 besonders deutlich hervor, und wird mit zunehmendem O_2 Gehalt immer geringer. Nach der Lage der Maxima zu urteilen, tritt aber der Übergang der GE. in die BE. und umgekehrt immer bei den gleichen Ionisationsgraden ein: es ist also zur Erhaltung der I Phase, der GE., ein bestimmter Ionisationsgrad der Entladungsstrecke erforderlich.

Den Übergang von Luft zu O_2 enthält Fig. 4, die in einem grösseren Masstab als Fig. 3 gezeichnet ist. Bei grossem O_2 -Gehalt werden die Änderungen der Stromstärke immer geringer, trotzdem erkennt man deutlich, dass die GE. nicht nur als Übergangsphase, sondern auch in ihrer beständigen Form an der Entladung teilnimmt.

Erst bei 66% O_2 und reinem O_2 , denen die gestrichelten Kurven 5 und 6 entsprechen, haben wir es mit einer BE. zu tun, die von der Ionisation nur gefördert wird.

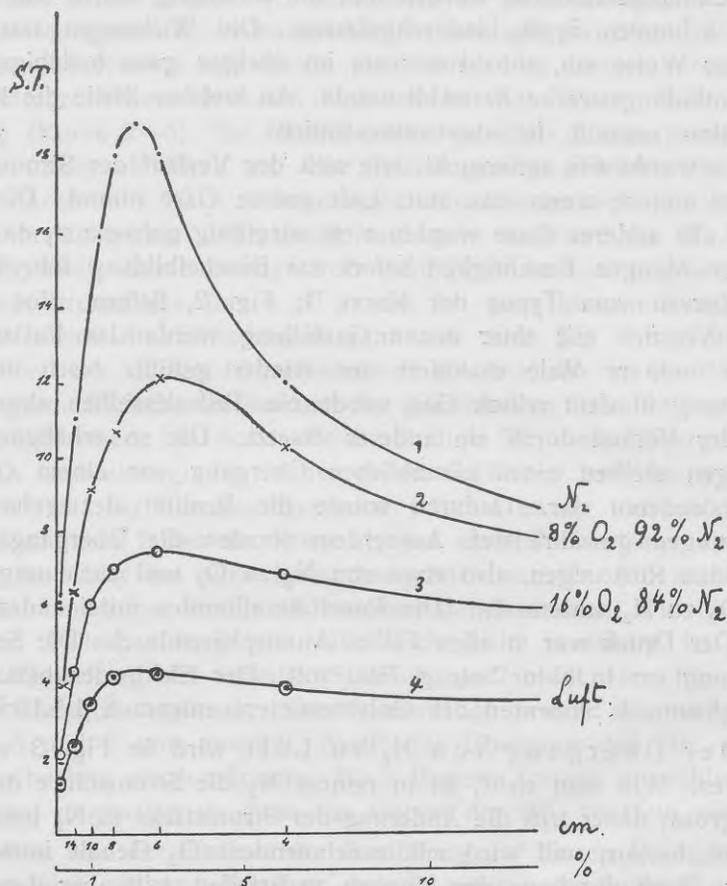


Fig. 3.

Stromstärke der Entladung bei Veränderung der Ionisation und bei verschiedenen Gasinhalten von N_2 bis Luft.

Den Übergang von Luft zu CO_2 gibt die Fig. 5 wieder. Schon geringe Mengen CO_2 (11%) verhindern die Bildung einer beständigen GE. als Anteil der Entladung. Die Stromstärke nimmt erst zu, bei Annäherung an reine CO_2 aber wieder stark ab, und ist bei 100% CO_2 gleich Null.

In H_2 und N_2 und allen Mischungen dieser Gase kommt es immer, wie aus Fig. 6 ersichtlich, zur Bildung einer beständigen GE., bei welcher die Stromstärke der Entladung geringer ist. Die Stromstärken sind in H_2 durchweg grösser als in N_2 , die Stromänderungen dagegen sind in H_2 geringer, da die Glimmentladung in H_2 unter gleichen Bedingungen eine grössere Stromintensität hat, als in N_2 .

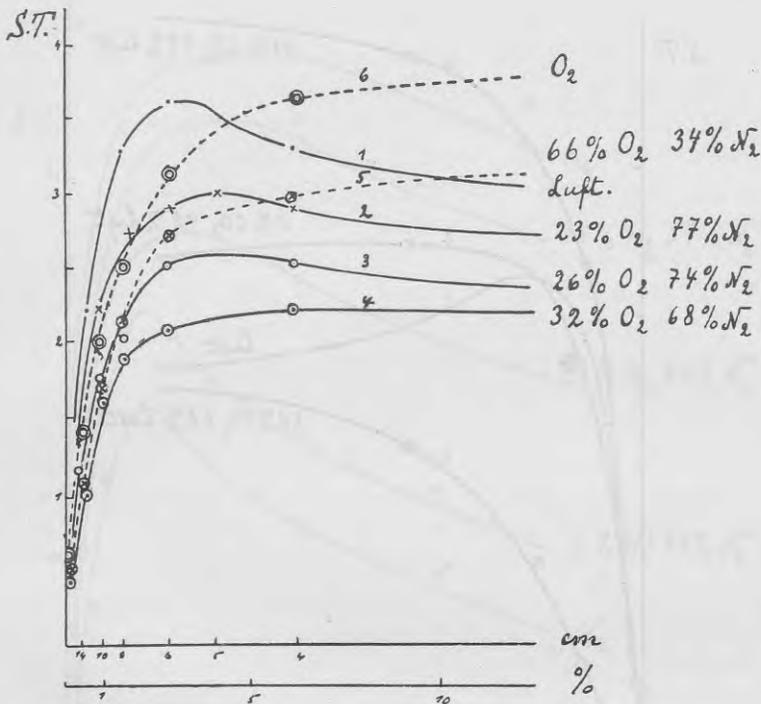


Fig. 4.

Stromstärke der Entladung bei Veränderung der Ionisation und bei verschiedenen Gasgehalten von Luft bis O_2 .

Die Beobachtungen bestätigen in ihrer Gesamtheit die gemachte Annahme, dass für Ionisationsänderungen empfindliche Entladungsstrecken auch durch Veränderungen anderer Eigenschaften der Gasstrecke stark beeinflusst werden. Man erkennt, dass O_2 und CO_2 die Bildung der beständigen GE. verhindern und damit die BE. begünstigen. H_2 und N_2 dagegen begünstigen die GE. und verzögern oder verhindern ihren Übergang in die BE. Diese Wirkungen sind

so stark, dass eine Verwandlung der Entladungsformen auch bei konstantem Ionisationsgrad lediglich durch Änderung der Gasfüllung möglich erscheint. Um diese Schlussfolgerung zu bestätigen, habe ich jedoch nicht mehr das Induktorium verwandt, sondern eine Influenzmaschine, da diese konstantere Verhältnisse liefert und eine Registrierung der Spannung und der Stromstärke ermöglicht.

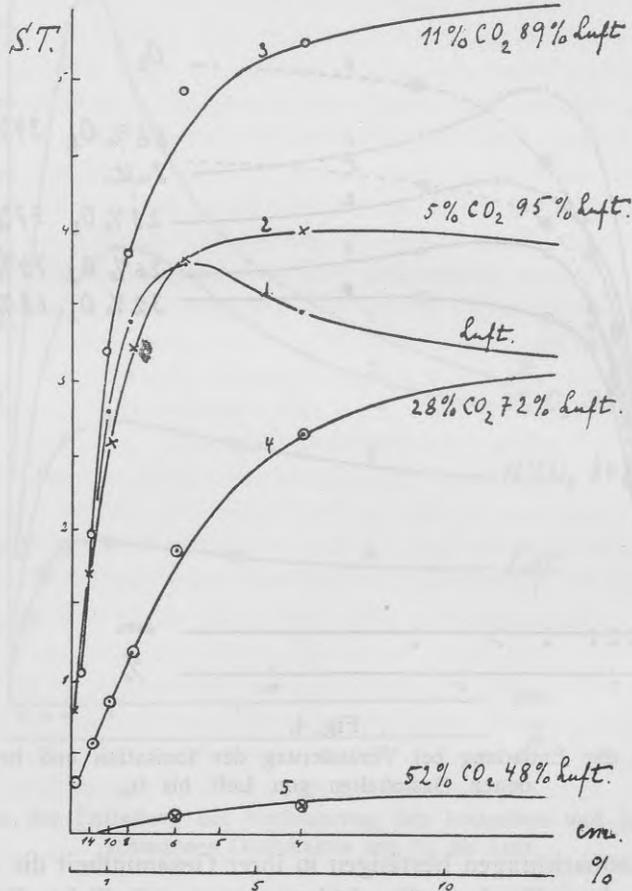


Fig. 5.

Stromstärke der Entladung bei Veränderung der Ionisation und bei verschiedenen Gasinhalten von Luft bis CO₂.

Die Versuchsanordnung mit der Influenzmaschine. Um beide Entladungsformen, d. h. also den labilen Zustand zwischen ihnen, zu erhalten, musste die bisherige Versuchsanordnung etwas verändert werden. Um den Übergang der Entladung in eine Funkenentladung zu vermeiden, wurde ein Widerstand eingeschaltet, ein Schiefergriffel von annähernd $5 \cdot 10^{-8}$ ohm. Ausserdem

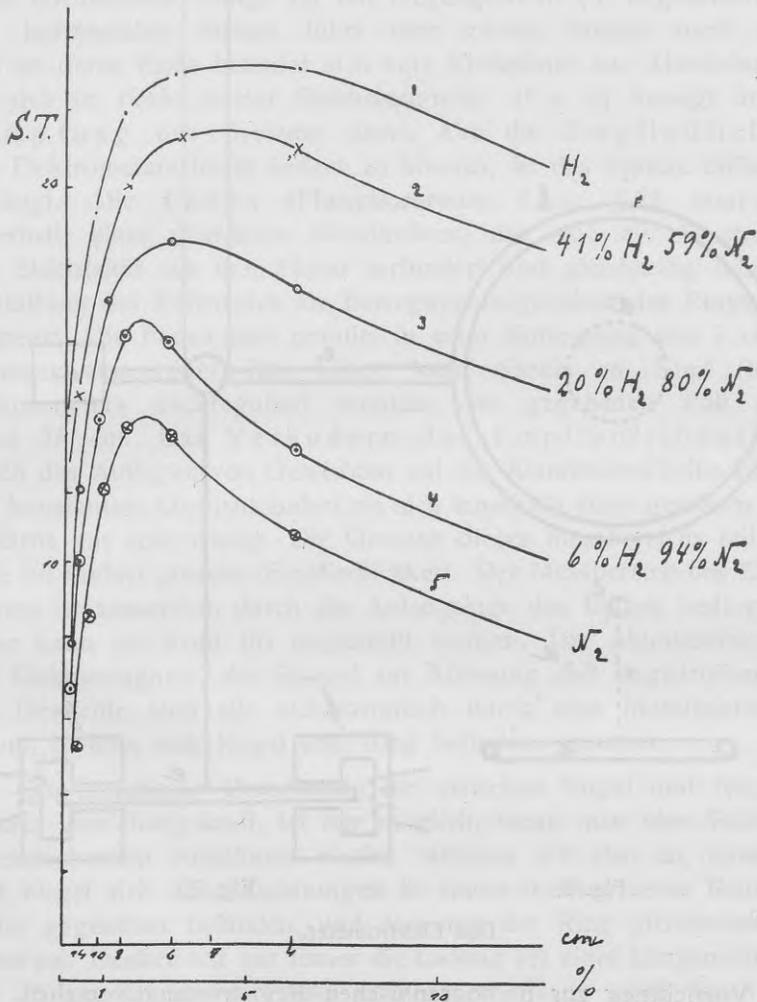


Fig. 6.

Stromstärke der Entladung bei Veränderung der Ionisation und bei verschiedenen Gasinhalten von H_2 bis N_2 .

erwies sich zur Erzielung des labilen Zustandes eine kleine Kugel geeigneter, als eine Spitze. Die Messvorrichtung habe ich noch durch ein Elektrometer ergänzt, das parallel der Entladungsstrecke eingeschaltet wurde. Beide, Galvanometer und Elektrometer, waren mit

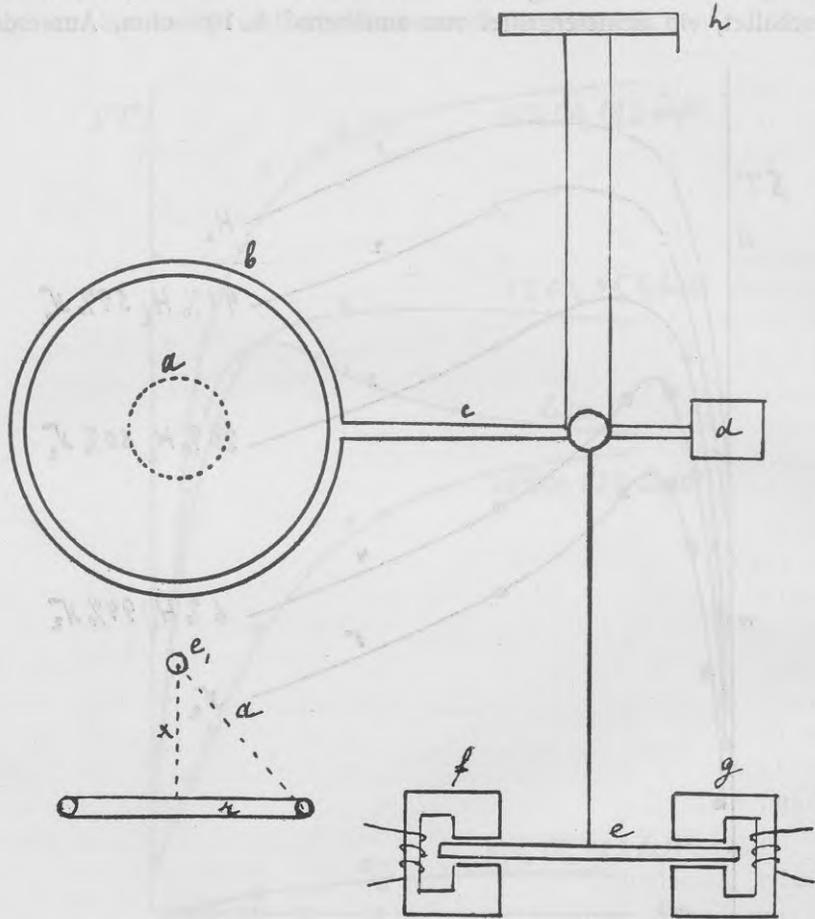


Fig. 8.

Fig. 7.

Das Elektrometer.

einer Vorrichtung zur photographischen Registrierung versehen. Das Elektrometer, dessen Kapazität möglichst klein sein musste, wurde für den vorliegenden Fall besonders konstruiert. Wie aus Fig. 7 und 8 ersichtlich, besteht das Elektrometer in der Hauptsache aus einer

Kugel (a) gegenüber einem beweglichen Metallring (b). Geladen wird nur die Kugel; der Ring und ein, das ganze Elektrometer umgebendes Gehäuse sind geerdet. Die Kugel befindet sich an einer kurzen Metallstange, die entsprechend der Kreislinie, auf der sich das Zentrum des Ringes bewegt, gekrümmt ist, und seitlich durch eine Bernsteinisolation nach aussen führt. Der bewegliche Ring ist an einer horizontalen Stange (c) mit Gegengewicht (d) angebracht. Von der horizontalen Stange führt eine zweite Stange nach unten, und an deren Ende befindet sich eine Kreisplatte aus Aluminium (e), die sich im Felde zweier Elektromagnete (f u. g) bewegt und zur Dämpfung des Systems dient. Um die Empfindlichkeit des Elektrometers leicht ändern zu können, ist das System bifilar aufgehängt. Die Fäden (Phosphorbronze $d = 0,75$ mm) laufen innerhalb eines geerdeten Metallrohres, das eine ev. Ausstrahlung der Elektrizität aus den Fäden verhindert und gleichzeitig durch die Gestaltung des Rohrendes die Bewegungsmöglichkeit des Ringsystems begrenzt. Die Fäden sind parallel in einer Entfernung von 1 cm von einander angeordnet, ihre Länge kann einzeln am Kopf (h) des Elektrometers nachreguliert werden; im gegebenen Fall betrug diese 18 cm. Das Verändern der Empfindlichkeit wird durch das Auflegen von Gewichten auf die Aluminiumscheibe bewirkt. Bei konstantem Gewicht ändert sie sich innerhalb eines gewissen Messbereichs nur sehr wenig. Die Grenzen dieses Messbereichs fallen gerade ins Gebiet grösster Empfindlichkeit. Der Messbereich des Elektrometers ist ausserdem durch die Anfangslage des Ringes bedingt, und diese kann am Kopf (h) eingestellt werden. Die Aluminiumscheibe, die Elektromagnete, der Spiegel zur Ablesung und Registrierung und die Gewichte sind alle elektrostatisch durch eine Metallplatte vom Raum, in dem sich Kugel und Ring befinden, getrennt.

Die theoretische Berechnung der zwischen Kugel und Ring wirkenden Anziehungskraft, ist nur möglich, wenn man eine Reihe von vereinfachenden Annahmen macht. Nehmen wir also an, dass Ring und Kugel sich ohne Zuleitungen in einem weiten leeren Raum einander gegenüber befänden, und dass nur der Ring gleichmässig geladen sei. Denken wir uns ferner die Ladung (e) eines Längenelementes des Ringes an einem Punkt konzentriert. Dann wird durch diese Ladung (e) nach Planck. Elektr. und Magnetismus, Gleichung (108) auf der Kugel die Elektrizitätsmenge (e_1) induziert: $e_1 = -e \frac{R}{a}$

wenn R — der Radius der geerdet gedachten Kugel, und a — die Entfernung des Kugelmittelpunktes vom Ringelement ist (Fig. 8). Die zwischen e und e_1 wirkende Anziehungskraft beträgt dann, wenn wir die Ladung in den Mittelpunkt der Kugel verlegen:

$$F = \frac{e_1 e}{a^2} = \frac{e^2 R}{a^3}$$

und der in der Richtung x wirkende Anteil dieser Kraft (Fig. 8)

$$F_x = \frac{e^2 R}{a^3} \cdot \frac{x}{a} = \frac{e^2 R x}{(r^2 + x^2)^2}$$

wenn r der Radius des Ringes ist.

Ist ferner D die Direktionskraft der bifilaren Aufhängung, b — die Entfernung: Kugel — Ring in der Nullage ($x_0 := b$), l — der Hebelarm des Ringes, und endlich y die durch die Anziehung hervorgerufene, hier geradlinig gedachte Annäherung des Ringes an die Kugel, so gilt, da $x = b - y$ ist, für den Gleichgewichtszustand bei kleinem y :

$$D \cdot \frac{y}{l} = \frac{e^2 \cdot R \cdot (b - y)}{[r^2 + (b - y)^2]^2} \quad \text{und daraus } e = \frac{r^2 + (b - y)^2}{\sqrt{l \cdot R}} \sqrt{\frac{D \cdot y}{b - y}}$$

Die Direktionskraft D der bifilaren Aufhängung wird unter Vernachlässigung der Fadensteifheit nach $D = g \cdot m \cdot \frac{L^2}{4h}$ berechnet, wo m — die Masse, L — die Länge und h den Fadenabstand bedeuten. Eine einfache Betrachtung lehrt, dass für den ganzen Ring die Formel beibehalten werden kann, wenn wir unter e die Gesamtladung des Ringes verstehen. Allerdings gilt das nur unter der Annahme, dass die Ladungen der Ringelemente das elektrische Feld ihrer Nachbarladungen nicht beeinflussen, was aber sicher der Fall ist. Wir nehmen nun an, dass wir diesen Einflüssen in der Formel durch Hinzufügen eines konstanten Faktors (C) genügen können. Wir schliessen in die Konstante auch noch den Ausdruck $\sqrt{l \cdot R}$ ein. So erhalten wir

$$e = C [r^2 + (b - y)^2] \sqrt{\frac{D \cdot y}{b - y}}$$

Um von der einem Ausschlag y entsprechenden Elektrizitätsmenge (e) zu der Spannung (E) überzugehen, muss die Kapazität der Anordnung Kugel Ring veranschlagt werden. Sie liegt zwischen der

Kapazität einer Kugel und der eines Kugelmkondensators, dessen äussere Kugeloberfläche den Radius des Ringes hat. Im gegebenen Fall bei $R = 1\frac{1}{2}$ cm und $r = 2\frac{1}{2}$ cm, betragen diese Grenzen: 0,5 cm und 0,62 cm. Beachten wir, dass die tatsächlichen Verhältnisse beide von diesen Grenzen nach innen abrücken, so können wir die bei einer Annäherung des Ringes erfolgenden Änderungen der Kapazität mit etwa 5% und jedenfalls weniger als 10% veranschlagen. Da es sich nur um eine Überschlagsrechnung handelt, setzen wir daher die Kapazität als konstant an. Dadurch werden die errechneten Spannungen bei Annäherung des Ringes etwas zu gross ausfallen. So erhalten wir nach Einführung einer neuen Konstante (C^1), welche auch die Kapazität einschliesst:

$$E = C^1 [r^2 + (b - y)^2] \sqrt{\frac{D \cdot y}{b - y}}$$

Obleich nun tatsächlich nicht der Ring, sondern die Kugel geladen wird, und die Formel für unsere Schaltung nur annähernd gelten dürfte, erwies es sich, dass der erste Teil der Eichkurven durch die Formel trotzdem gut wiedergegeben wird, und dass die Abhängigkeit von „D“ die in der Formel angeführte ist. Der weitere Verlauf der Eichkurve muss von dem theoretisch errechneten Verlauf abweichen, da y nicht mehr klein ist, wie angenommen wurde, und ausserdem der Einfluss der Zuleitung der Kugel hinzutritt. Es hat also in jedem Fall eine empirische Eichung zu erfolgen. Für die Ermittlung eines gewünschten Messbereichs kann die Formel jedoch gute Dienste erweisen.

Die Angaben des Elektrometers konnten auf einer rotierenden Trommel photographisch registriert werden. Die Eichung des Elektrometers erfolgte vermittelt einer Kugelfunkenstrecke mit Aluminiumkugeln von 2 cm. Durchmesser. Fig. 9 gibt eine so registrierte Eichung des Elektrometers wieder. Die Messfunkenstrecke wurde jeweilig auf bestimmte Elektrodenabstände eingestellt und die Influenzmaschine langsam gedreht. Dann wuchs die Spannung am Elektrometer allmählich bis zur jeweiligen Funkenspannung der Messfunkenstrecke. Sobald diese erreicht war, entlud sich die aufgespeicherte Elektrizität und das Elektrometer fiel; dann wurde ein anderer etwas grösserer Elektrodenabstand eingestellt, die Influenzmaschine lieferte wieder Strom nach, und die Spannung am Elektrometer stieg wieder. Jede Zacke in der Registrierung entspricht also einer bestimmten Funken-

länge bzw. Spannung. In der Fig. 9 ist die erhaltene Eichkurve aufgezeichnet.

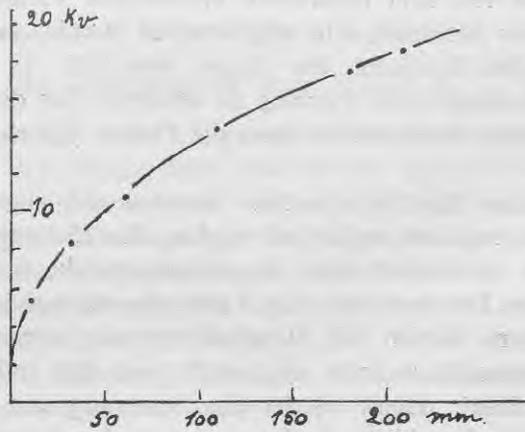
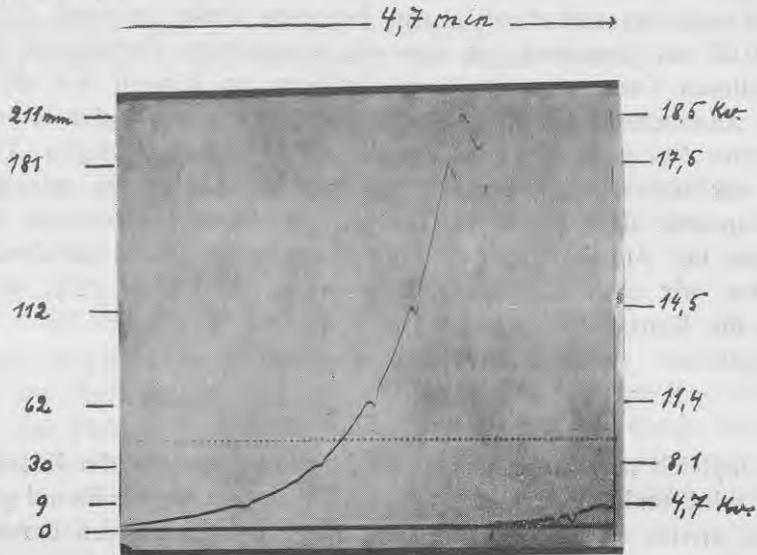


Fig. 9.

Das Photographum einer Registrierung und die Eichkurve des Elektrometers.

Die Beobachtungen. Das Ra-präparat befand sich bei diesen Versuchen in einem drehbaren Bleiturm mit 5 cm dicken Wänden.

Es wurde nur mit und ohne Fremdionisation beobachtet und auf ein allmähliches Nähern des Präparates aus sogleich anzuführenden Gründen verzichtet. Beim Entladungsgefäß, das aus Metall hergestellt war, wurde mittelst eines Schutzringes ein Abströmen der Ladung über die Isolation zum Galvanometer verhindert. Die Gase wurden durch das Entladungsgefäß in gleichmässigem, schwachem Strom hindurchgeleitet, um den Einfluss der durch die Entladung selbst verursachten Veränderungen der Gasfüllung zu vermeiden. Am günstigsten waren die Bedingungen für die Verwandlung der GE. in die BE. und umgekehrt bei etwa 19000 volt und 10 cm Elektrodenabstand. Das Ra brauchte nicht ganz nah an die Entladungsstrecke herangebracht zu werden, sondern es genügte, wenn ihr der Spalt im Bleiturm zugekehrt wurde. Bei jedem Übergang der GE. in die BE. stieg die Stromstärke; sie fiel beim Übergang in die beständige GE. In beiden Fällen waren die Änderungen der Stromstärke nur zeitweilige, da die von einem Motor betriebene Influenzmaschine konstanten Strom lieferte: sowohl bei der Büschelbildung, als auch beim Übergang zur GE. stellte sich aus diesem Grunde automatisch eine Spannungsänderung ein, durch welche die verursachte Änderung der Stromstärke wieder kompensiert wurde. Aus diesem Grunde verlor das Beobachten bei stufenweiser Annäherung des Ra-präparates hier seinen Sinn. Es wurde also beim Registrieren der Stromstärke nach jeder Veränderung der Bestrahlung (mit oder ohne) solange gewartet, bis sich die anfängliche von der Maschine gelieferte Stromstärke wieder eingestellt hatte. Die spontanen Änderungen der Stromstärke sind, wie Fig. 10 zeigt, sehr regelmässige. Auf der Registrierung, die in diesem Fall ein Zeitintervall von 1,5 min umfasst, bedeuten die Ausschläge nach links eine Abnahme der Stromstärke, die nach rechts — eine Zunahme. Einem Ausschlag von 1 mm entspricht $0,8 \cdot 10^{-8}$ amp. In Fig. 10 ist neben dem Photogramm vermerkt, welcher Entladungsform, GE. oder BE., die einzelnen Abschnitte der Registrierung entsprechen. Beim Übergang der einen Entladungsform in die andere macht die Stromstärke, wie man sieht, zuerst einen Sprung und geht dann langsam auf den mittleren durch den Gang der Influenzmaschine bedingten Wert zurück. Dass dies tatsächlich durch die Wirkung entsprechender Spannungsänderungen verursacht wird, konnte ich durch eine Registrierung der Spannung feststellen, von deren Veröffentlichung jedoch abgesehen werden mag, umsomehr als Fig. 11 einen ganz ähnlichen

Fall enthält. Beim Übergang in die Büschelentladung steigt der Strom und fast gleichzeitig beginnt die Spannung zu fallen, und das dauert solange an, bis die Stromstärke wieder auf ihren anfänglichen Wert zurückgegangen ist.

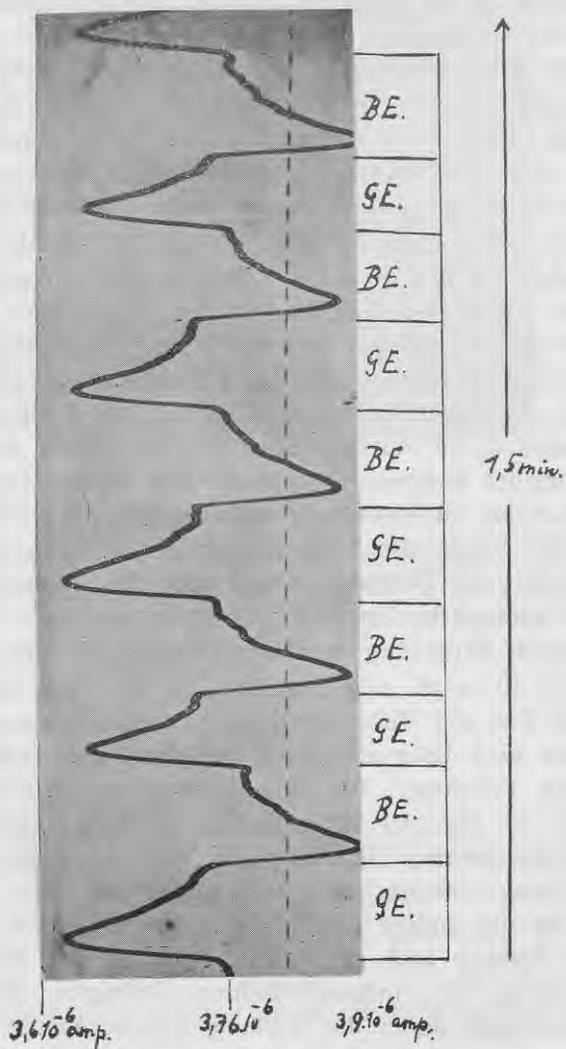


Fig. 10.

Spontane Änderungen der Stromstärke bei Ionisation der Entladungsstrecke.

Diese Versuchsanordnung wurde nun dazu benutzt, um die früheren Beobachtungen zu verifizieren: es sollten dieselben Verwandlungen durch abwechselndes Hindurchleiten verschiedener Gase hervorgerufen werden und durch die Stromspannungsregistrierung die Identität der Verwandlungen mit den durch eine Ionisationsänderung hervorgerufenen Verwandlungen bewiesen werden.

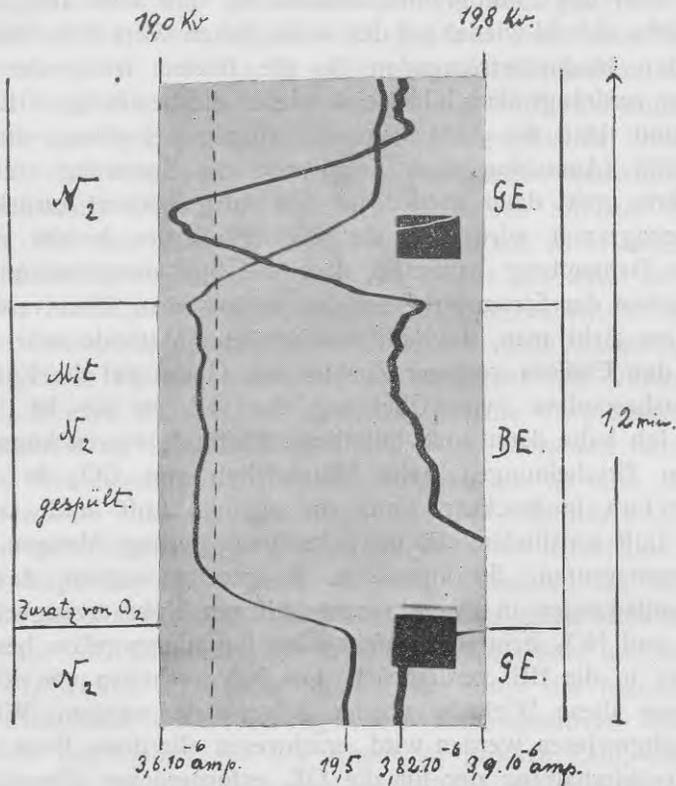


Fig. 11.

Spontane Änderungen der Stromstärke und der Spannung beim Hinzufügen von O_2 zu N_2 .

Abwechselndes Hindurchleiten von N_2 und O_2 . Bei diesem Versuch wurde von einer GE. ausgegangen und zu diesem Zweck das Entladungsgefäß zuerst mit reinem N_2 gefüllt. Solange N_2 hindurchströmte, bestand dann die GE. Wurde aber zu dem

hindurchströmenden N_2 etwas O_2 hinzugelassen, so bildete sich sofort die BE. Dann wurde wieder reiner N_2 hindurchgelassen, bis die GE. wieder einsetzte. Die diesen Vorgängen entsprechenden Strom- und Spannungsänderungen sind auf der Fig. 11 registriert. Von unten betrachtet, haben wir zuerst die GE. Beim Übergang in die BE. steigt die Stromstärke (Ausschlag nach rechts) und die Spannung beginnt zu fallen. Der Ausschlag des Galvanometers ist so gross, dass er über das Photogramm hinausführt, man sieht aber, dass die Stromstärke alsbald wieder auf den anfänglichen Wert fällt. Wenn dann durch den hindurchströmenden N_2 die letzten Reste der O_2 -Beimischung verdrängt sind, bildet sich wieder die beständige GE. zurück. Dabei sind dann die Ausschläge die entgegengesetzten: die Stromstärke fällt (Ausschlag nach links) und die Spannung steigt. Die Stromstärke geht dann wieder auf den Ausgangswert zurück. Durch das Photogramm wird also die Richtigkeit der bereits oben erwähnten Behauptung bewiesen, dass die Spannungsänderungen das Zurückgehen der Stromstärke auf den anfänglichen Wert verursachen. Ausserdem sieht man, dass die beschriebene Methode sehr geeignet ist, um den Einfluss geringer Zusätze von Gasen auf die Entladungsform, insbesondere beim Übergang der GE. in die BE., nachzuweisen. Ich habe dann auch mit dieser Methode zeigen können, dass dieselben Erscheinungen beim Hineinleiten von CO_2 in N_2 , von feuchter Luft in trockene Luft, von O_3 in Luft und auch von NO_2 in Luft stattfinden. Es genügten ganz geringe Mengen, um die BE. hervorzurufen. So konnte z. B. gezeigt werden, dass durch Funkenentladungen in einem vorgeschalteten Rohr erzeugte Mengen von O_3 und NO_2 beim Hineinleiten ins Entladungsgefäss bereits den Übergang in die BE. verursachen. Durch Vorschalten von KOH und KJ konnte diese Wirkung wieder aufgehoben werden. Wie unten noch nachgewiesen werden wird, erschweren alle diese Beimengungen die Aufrechterhaltung der für die GE. erforderlichen Raumladungen. Abwechselndes Hindurchleiten von H_2 und N_2 verändert, wie nach den früheren Versuchen zu erwarten war, die Art der Entladung nicht.

Erklärungen und Schlussfolgerungen. Es ist zuerst zu erklären, warum die untersuchte Beeinflussung einer Entladung nur bei ganz bestimmten Versuchsbedingungen, insbesondere nur bei ganz besonderen Elektrodenanordnungen zu beobachten ist. Die Stromdichte der positiven GE. ist bekanntlich begrenzt; wird die Grenze überschritten, so bildet sich an einer durch zufällige Um-

stände ausgezeichneten Stelle der Elektrodenoberfläche ein Krater, aus dem die BE. hervorschießt. Dieses kann beim Überschreiten der Grenzstromdichte nur dann verhindert werden, wenn die von der GE. bedeckte Fläche entsprechend der Stromzunahme vergrößert wird. Alle Ursachen, die solches hervorzurufen vermögen, können also den Übergang in die BE. verzögern, bzw. eine schon bestehende BE. wegen deren diskontinuierlichen Charakters in eine GE. verwandeln, sofern durch die Form der Elektroden die Bedingungen für eine solche Flächenvergrößerung der GE. gegeben sind. Dadurch wird erklärt, warum bei den Fig. 2 entsprechenden Versuchen die Ionisation nur dann die GE. aufrechterhalten oder fördern konnte, wenn das hervorragende Ende der Spitze bei der gegebenen Stromstärke länger als c. 3 mm war. Analoge Überlegungen motivieren auch die Verwendung einer Kugel bei den Versuchen mit der Influenzmaschine. Auf den Bildern der Fig. 1 ist deutlich zu erkennen, dass die BE. dann hervorschießt, wenn die Fläche der GE. durch Abnahme der Ionisation verringert wird, oder umgekehrt, die BE. verschwindet, wenn die Ionisation ausreicht, um eine beständige GE. von genügender Flächenausdehnung zu erzeugen. Die Verwandlung einer BE. in eine GE. ist von mir somit auf die Vergrößerung der Flächenausbreitung der beständigen GE. durch Ionisation oder Änderung der Gasfüllung zurückgeführt worden. Es ist also noch zu erklären, warum diese Ausbreitung der GE. stattfindet: Die GE. ist eine raumladungsbeschwerte Entladung und die leuchtende Schicht zeigt die Lage der Raumladung an. Alle Ursachen, die eine Vergrößerung der Raumladung veranlassen, fördern damit auch die Ausdehnung der GE. Die Ionisation der Entladungsstrecke und die Gase N_2 und H_2 wirken in diesem Sinne. Die durch die Ionisation erzeugten Elektronen erreichen wegen des elektropositiven Charakters dieser Gase das Gebiet vor der Anode in grosser Zahl, ohne sich ionenbildend an Atome anzulagern, und bilden die Raumladung, die sowohl für die Entstehung, als auch für das Fortbestehen der GE. erforderlich ist. Demgegenüber binden die elektronegativen Gase O_2 und CO_2 die freien Elektronen, verhindern also die Bildung oder Ausbreitung der Raumladung und fördern somit indirekt die BE. Die Richtigkeit dieser Erklärung wird durch die ganz gleiche Wirkung der so verschiedenartigen Veränderungen: des Ionisationszustandes und des Gasinhaltes, begründet. Ferner beweisen die Versuche, dass es sich beim „Verlöschen“ eines Büschels oder eines Funkens

durch Ionisation um die Erhaltung der I Funkenphase, der GE., handelt und nicht um ein völliges „Erlöschen“ der Entladung, wie man leicht aus den Beschreibungen dieser Vorgänge, z. B. auch bei Schumann⁴⁾, und deren Gegenüberstellung zum Hertzschcn Zündeffekt folgern kann. Es steht also endgültig fest, dass es sich beim „Erlöschen“ eines Funkens oder Büscheis um eine Überführung in eine GE. handelt und daher erscheint es geboten, den Ausdruck „Erlöschen“ bei der Beschreibung dieser Vorgänge ganz zu vermeiden. — Wie weit die hier beschriebenen Versuche bereits zur Erklärung des Überganges der GE-phase in die BE-phase bei allen Funken herangezogen werden können, lässt sich im einzelnen fürs erste noch nicht beurteilen, umsomehr, als wir ja noch der plötzlichen Entstehung der I Funkenphase, der GE., nach der Ausdrucksweise von Rogowski, ohne befriedigende Erklärung gegenüberstehen. Jedenfalls wird aber ein jeder Erklärungsversuch auch mit den hier mitgeteilten Tatsachen zu rechnen haben. Entspricht doch die Form einer sogenannten ebenen Elektrode gerade einer Platte, aus der eine oder mehrere Spitzen hervorrage, wenn man die molekularen Unebenheiten berücksichtigt, an denen, wie Schottky⁵⁾ nachweist, die Feldstärke um eine Zehnerpotenz grösser sein kann, als in der Umgebung, und an denen somit die Entladungsvorgänge beginnen.

Schliesslich sei noch erwähnt, dass meine Versuche eine von Przibram⁶⁾ bei Entladungen in Gasgemischen gemachte Beobachtung erklären, nämlich, dass die Anfangs- oder Durchschlagsspannung bei Entladungen von einer feinen Spitze mit zunehmendem CO₂-Gehalt ganz überraschender Weise zuerst fällt und dann steigt. Es geht aus einem Vergleich der Beschreibung der Przibramschen Versuche mit meinen hervor, dass Przibram damals als Beginn der Entladung die BE. angesehen hat, deren Entstehung, wie aus meinen Versuchen folgt, durch einen geringen Zusatz von CO₂ zu Luft erleichtert wird. In den Mischungen von N₂ und H₂ fand Przibram den Effekt nicht, was mit meinen Versuchen besonders gut übereinstimmt.

Physikalisches Institut der
Universität Lettlands.

Der Fakultät vorgelegt den 1. August 1929.

1) Rogovski. Probleme der modernen Physik. Sommerfeld - Band. 1928. S. 189.

2) Auf dem Bilde „Ra 22 cm“ (Fig. 1b) ist auf dem Original noch ein ganz kleiner Büschel zu sehen. Ausserdem erkennt man auf dem Original des Bildes „ohne Ra“ (Fig. 1d) einen feinen dunkeln Streifen, der dem Dunkelraum vor der Kathode entspricht. Auf den Bildern von Rogowski ist dieser Streifen infolge des geringeren Gasdrucks breiter und daher besser zu sehen.

3) Siehe z. B. Ries. Das Licht in seinen elektrischen und magnetischen Wirkungen. Barth. Leipzig. Dasselbst Litteraturangaben.

4) Schumann. Elektrische Durchbruchfeldstärke von Gasen. Springer. Berlin. S. 18.

5) Schottky. Z. f. Phys. 14. 105. 1923.

6) Przibram. Phys. Z. 4. 842.

Izlādēšanās pāreja no mirdzošās uz kūļa veida izlādēšanos.

F. Treijs.

Rogovska darbi noveda elektriskās dzirksteles pētīšanu uz izciliem jauniem ceļiem. Izrādījās, ka vairs nav iespējams izskaidrot gaisa „caursīšanu“ ar ionu „lavīnas“ rašanos. Atmetot trieciena ionizāciju kā elementāro procesu, mēs esam spiesti meklēt pēc jaunām pamatparādībām. Šinī nolūkā Rogovskis¹⁾ izpētījis parādības, kas notiek pašā dzirksteles rašanās momentā apm. 10^{-7} sec laikā. Izrādījās, ka pirmā attīstības stadijā notiek parādības, kas līdzīgas mirdzošai izlādēšanai. Otrā attīstības stadijā, pēc apm. 10^{-5} sec sāk rasties „kanāļi“, kas līdzinās „spīdošiem karogiem“ un iziet no anoda. Ja salīdzina Rogovska l. c. 192. l. p. publicētos uzņēmumus b un c ar šie ievietotām fotografijām (Fig. 1), tad redzams, ka mīnētā pāreja otrā attīstības stadijā sakrīt ar parasto mirdzošās izlādēšanās pāreju kūļa veida izlādēšanā. Tā tad šai pārejai ir svarīga loma dzirksteles rašanās gaitā un tamdēļ interesanti izpētīt, kā viņu iespaido gāzes ionizācija dzirkstelstarpā un pašas gāzes daba. Tam nolūkam bija jāuzmeklē apstākļi, kuŗos izlādēšanās ir „labila“ un mazas maiņas jau izsauc vienas izlādēšanās formas pāreju otrā. Izrādījās, ka tās pašas parādības, kuŗas var izsaukt, mainot ionizāciju, iespējams dabūt, mainot gāzes dabu dzirkstelstarpā. Tas konstatēts, fotografiski reģistrējot strāvas stiprumu un spraigumu. Novērojumi rāda, ka O_2 , O_3 , CO_2 , NO_2 un ūdens tvaiki izsauc kūļa veida izlādēšanos, H_2 un N_2 — mirdzošo izlādēšanos.

Latvijas Universitāte.
Fizikas Institūts.

On the emission of positive electricity from palladium.

By *Fr. Gulbis*.

Physical Laboratory of the University, Riga.

Introduction.

From both — the positive and negative emissions of electricity, given by hot metals and metallic salts, the better known is the negative or „thermoelectronic“ emission. There is no reason for doubt that the emission coming from metals at high temperatures is carried by pure electrons. Great number of investigators have studied the character of this emission, and shown its dependance on various circumstances of the experiment. These investigations have now proceeded so far that it has been possible to use the obtained results with considerable success even in the practice, e. g. in the radio and X-ray lamp construction. This technical application and the new observations and experiences connected with it, in its turn, have still more deepened the understanding of the thermoelectronic emission.

Far less understood is the positive or „thermionic“ emission, which occurs at relatively low temperatures, preceding the electronic emission. The investigations dealing with this emission are far less in number than those concerning the negative emission. The reason for this is that the positive emission is more complicated than the negative. While the thermoelectronic emission is a property of pure metals, the intensity of which is given mainly by temperature, and in which the matter, that may be included in the heated metal, does not take any part in it, the thermionic emission of metals, on the contrary, is given by the impurities alone which they may happen to include, except, probably, the case of very high temperature. Secondly, the thermionic emission, because of its feebleness and complex nature, up to this time has no application for technical

purposes. That is why it has never attracted so much interest as the emission of electrons.

The most investigated is the emission from platinum. As compared with other metals platinum has the priority to withstand high temperatures, and to be inert chemically. Its surface can be kept clean at high temperatures, even in the atmosphere of gases. The investigation of the positive emission from platinum, just as that of the electronic emission, was greatly helped by work of O. W. Richardson. His results and those of some other investigators have been collected in his excellent monograph¹⁾.

The emissions there described have been studied mainly at relatively low temperatures. Jenkins²⁾ has investigated the positive emission from tungsten, which occurs at considerably high temperatures as the result of an intensive electronic emission.

The chief results hitherto obtained can be briefly summarized as follows³⁾:

1) The thermionic emission is given by „fresh“ metals at the beginning of their heating. In some cases⁴⁾ it is observed even at the temperature as low as 200° C. 2) At a given particular temperature the emission i has its maximum at the beginning of the heating, then rapidly and later slowly decays with time, approaching asymptotically 0 or some small magnitude i_0 . This decay can be expressed by formula⁵⁾

$$i - i_0 = Ae^{-kt}$$

in which A and k are constants. By this the thermionic emission differs profoundly from the negative emission, which does not depend on time. 3) The metal that has lost through heating its power to emit positive ions can be „revived“ by keeping it in neighborhood of hot „fresh“ bodies, in a Bunsen flame or in compressed gases. Kept in vacuo or in some inactive gas at normal pressure it does not regain its power to emit ions but only when heated in a gaseous atmosphere. In this way revived the metal, when afterwards heated in vacuo, rapidly loses its power of emission. 4) The po-

¹⁾ O. W. Richardson, *The Emission of Electricity from Hot Bodies*, 2. ed. 1921.

²⁾ Jenkins, *Phil. Mag.* (6) 47, p. 1025., 1924.

³⁾ O. W. Richardson, *The Emission...*, Chapter VI.

⁴⁾ Strutt, *Phil. Mag.* (6) 4, p. 98, 1902.

⁵⁾ O. W. Richardson, *l. c.*, p. 197.

sitive emission almost in all cases consists of ions, the specific charges of which correspond to the atoms of alkaline metals — sodium and potassium. The presence of ions of the surrounding gas in the emission has not yet been noticed with certainty.

These facts have led to the conclusion that the positive emission is not given by pure metals, or gases included in them, but by some kind of alkaline impurities. When the metal is heated, these impurities are, so to speak, distilled off or evaporated from it; as the evaporation proceeds the source of the emission becomes feebler, and the emission ceases. Sheard and Woodburry⁶⁾ have been able to notice even two sources of emission, the one of which acts in the first stage of heating, and the other at higher temperatures. The unimportant part played in the act of emission by the occluded gases is shown by the results of O. W. Richardson⁷⁾, namely that the emission of platinum wire when electrolytically saturated with hydrogen, by no means differs from the emission when saturated with oxygen.

These hypotheses contain however in themselves many problems to be solved in the future, and require some additional hypotheses. First of all, it is hard to understand the way, in which an „old“ metal can be revived in a Bunsen flame or by heating in a gaseous atmosphere, which can not be regarded as a source of alkaline metals. Secondly, if the positive emission is to be regarded as a sort of evaporation of alkaline metals, then the question arises — in what way they are bound in the heated metal. Gases also may be occluded in metals and leave them at high temperatures. But while the alkaline metals are expelled in the form of positive ions, the gases are liberated as neutral atoms or even molecules. If the explanation of this difference could be expected to be found in the known fact that the ionisation potentials of the vapors of the alkaline metals are considerably lower than the ionisation potentials of the gases, then without any further hypothesis and further experimental data the question can not be answered.

Taking all this in consideration the writer some time ago undertook some experiments on the positive emission from metals. First of all emission from palladium was investigated. Although palladium

⁶⁾ Sheard and Woodburry, *Phys. Rev.*, Vol. 2., p. 228, 1913.

⁷⁾ O. W. Richardson, *Phys. Zeitschr.*, Vol. 6., p. 914, 1905.

is less adapted for this purpose than platinum, because of its lower melting point and its great tendency to sputter in vacuo, the writer hoped however to get with it a more substantial answer in that part of the problem, which concerns the influence of included gases. Indeed, if such an influence exists, we can expect that palladium being capable to occlude hydrogen thousandfold of its volume would show this most conspicuously. The experiments in their first stage are now achieved. As the literature, which was at the writer's disposal, gave no indications that the emission from palladium had been sufficiently investigated, it was thought that the results hitherto obtained would be of some interest.

Apparatus and method.

Fig. 1. shows diagrammatically the apparatus used. It is made entirely of „Pyrex“ glas so that at the beginning of the experiment it could be thoroughly outgased. The palladium to be investi-

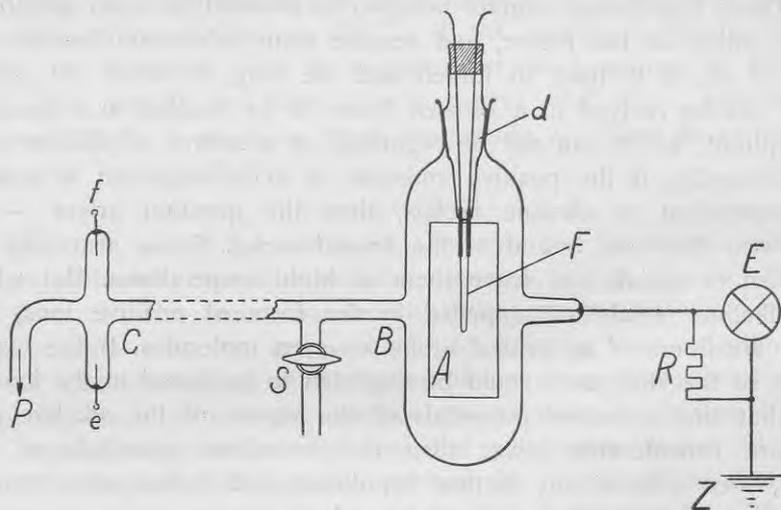


Fig. 1.

gated was taken in the form of a wire 0,01 cm in diameter. It was procured from Kahlbaum in Berlin as „chemically pure“. A piece of this wire, 57,5 mm long, was bent in a loop *F*, the ends of which were fastened to two platinum wires 0,5 mm thick. These

wires were fused in the ground-glas d and served as leadings for the heating current. Palladium and platinum can be easily fused together in the usual way, but in order to avoid an unnecessary heating of the wire before the experiment the ends of the loop were simply tightly wound around the platinum leads. In this way entirely satisfactory contact was obtained. The loop was held in the middle of the bulb B , and was surrounded by a cylindrical electrode A made of thin sheet of platinum, 2 cm in diameter. This electrode collects the positive ions emitted by the palladium filament and leads them to the electrometer E . From the bulb B a glas connection leads to the liquid air-trap and to the diffusion pump system P . Controlling experiments showed however that the liquid air in the trap could be replaced by ice mixed with common salt. The vacuum obtained was controlled by connecting the electrodes e, f to the poles of a small induction coil. The vacuum throughout the experiment was so high that a discharge, which was equivalent to a spark gap of 5 cm, gave not traces of luminosity in the apparatus. In order to avoid the polarizing of the walls of the bulb by the electric discharges, and so to protect the leadings to the electrometer from induced charges, the distance between B and C was made 70 cm long. The stopcock S served for the inlet of air or other desired gas into the apparatus.

The electrometer E was a quadrant electrometer of the Dolezalek pattern. It was shunted with a high resistance R (alcohol mixed with xylo) so that its volt-sensitivity was about 1500 scale divisions per volt. The natural leakage was checked by a small quantity of uranium oxyde placed between the leading to the insulated quadrant and a charged electrode. Large currents through the resistance R caused its polarization, by which an additional, steadily increasing current arose. By this cause it was made impossible to use the method of constant deflection in its usual form. Therefore it was proceeded as follows. The electrometer after each observation was earthed. Then in the next deflection the light spot moved on the scale first rapidly, then its velocity for a moment became 0, and then began to move again but with increasing velocity. The first movement corresponds to the action of the two currents together, the interruption of the movement gives the moment at which the emission current has reached its constant value, and the last movement is given by the polarization current alone. As the later,

compared with the emission current, is small, the scale division at which the interruption of the movement of the light spot occurred was taken as the measure for the intensity of the emission current.

The heating current was supplied by a 4-volt storage battery, which together with an ampermeter, voltmeter and two sliding rheostats, were mounted on an insulated table. The rheostats were connected in parallel. The voltmeter, with the scale divisions 0,02 V, measured directly the drop of potential across the filament. The scale divisions of the ampermeter were also 0,02.

The data found in the literature concerning the change of the resistance of the palladium with temperature are insufficient, therefore the temperature calculated from the observed resistances could not be of the desired precision. For this reason in the following, for every particular emission, are given also the numbers of watts passing through the filament. It should be mentioned, that the resistance of palladium, as the heating proceeds, sometimes changes very considerably, therefore by observing the drop of potential and the intensity of the heating current it was impossible to keep the temperature of the filament constant. It would be desirable to have for this purpose wattmeter with the range from 0 to 1 watts but such an instrument was not at the writer's disposal. But as it is seen from the curves obtained the little changes of the resistance, viz. temperature have not been of any serious importance.

The controlling experiments showed that at the emissions investigated the saturation of the current between the filament and the collecting electrode could be obtained with 50–100 volts. In order to be sure however that the current is saturated in all measured cases the potential of the filament was taken + 300 volts. The voltage was supplied by a battery of small storage cells.

With the experiment it was then proceeded as follows. The temperature of the palladium was increased until the first measurable emission was observed. From the measurements of the time t and the corresponding emission current i the it -curve was plotted. When the emission had reached 0, or the very small, just noticeable, magnitude i_0 , the heating current was increased, and the new it -curve plotted. So in this way it was proceeded until the filament melted. With the first filament this occurred at 0,56 watts corresponding to the temperature of 1100° C. The next filament was of the same length as the first, therefore its melting temperature, viz.

the number of watts at which its melting was to be expected was known.

After the wire had been thoroughly heated to the highest allowable temperature, and no emission was present at the lower temperatures, it was begun with the „reviving“, viz. saturation with gas. At first it was noticed that the filament held for a long time in a „good“ vacuum did not regain any appreciable emission. After this the apparatus was filled for a long time with dry air, then exhausted, and the emission of the filament measured. In the same way it was proceeded with dry hydrogen. The later was supplied by Kipp's apparatus, and dried by passing through concentrated sulphuric acid and glas wool.

The molecular hydrogen by palladium is occluded slowly. The union of both elements proceeds rapidly when the hydrogen is in the atomic state, as it, probably, is in some chemical processes (in statu nascendi), or at the cathode in electrolysis. Therefore the next step was to make the filament cathode in a feeble electrolyte. The removing and putting in of the filament in the apparatus was greatly facilitated by the method used, namely that the filament was not fused in the bulb *B* directly but by the ground joint *d*. In order to prevent the penetrating of mercury vapors into the apparatus the ground joint was made air-tight by picein. When warmed with a small gas flame the glas softened the picein, and the ground-glas with the palladium filament was easily to be removed.

Experimental results.

a. Decay of the emission with time. At first the change of the emission from the palladium wire with time was studied. Fig. 2. and 3. show the first five curves of a set obtained with the third wire investigated. They are typical for all other sets observed. The corresponding data are collected in the table I, the second column of which contains the intensities of the heating current in amperes, the third — the drops of potential *V* between the ends of the filament in volts, the fourth — its resistances in ohms as calculated from the values of *V* and *I*, and the fifth — the numbers of watts passing through the filament. *T*'s are the temperatures found by extrapolation from the data obtained pre-

viously⁸⁾. The sequence of the curves is given by the roman numerals in the first column of the table.

Table I.

Curve	I	V	R	W	T
I	0,240	0,54	2,25	0,130	650°
II	0,275	0,66	2,40	0,181	740
III	0,324	0,84	2,59	0,274	860
IV	0,366	1,00	2,73	0,366	950
V	0,420	1,20	2,86	0,536	1050

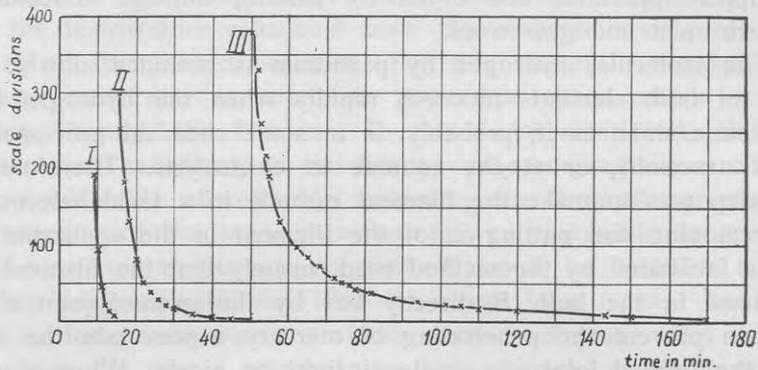


Fig. 2.

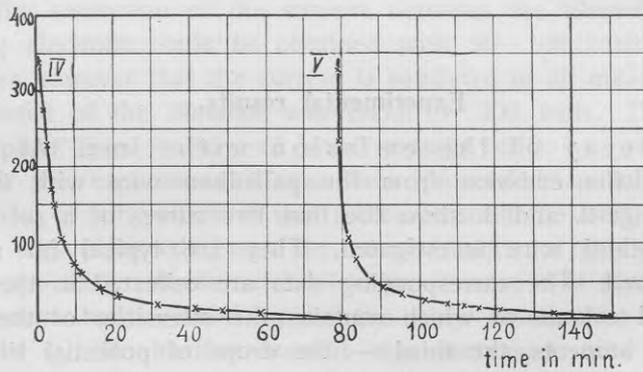


Fig. 3.

⁸⁾ L. Holborn, Ann. der. Phys., Bd. 59., p. 164, 1919.

The first point to be noticed is the remarkable regularity of the curves. They are of such smoothness, as if they would not be obtained by experiment but by plotting of some mathematical expression. Secondly, the curves at the beginning and at the end of the set are steeper than those for the medium temperatures. From this we can conclude, that the „positive matter“ leaves the heated metal first rapidly, then with rising temperature more slowly, and very rapidly at the highest temperatures.

As stated before, these curves are typical for a great number of other curves, therefore the law, which governs the decay of the emission with time, should be of a very definite character. From some recent experiments with platinum O. W. Richardson has drawn the conclusion that this law may be expressed by the above mentioned exponential function

$$i - i_0 = Ae^{-kt}$$

The curves obtained in the present work are of slightly different character however. This is shown in fig. 4., in which there are drawn the obtained curve IV from the fig. 3., and the corresponding exponential curve *B*, the constants *A* and *k* being computed from two pairs of *i*, *t*-values. As it is seen both curves coincide but only in those two points, for which the values of *A* and *k* are taken. In all other parts however they differ widely one from the other.

In the same fig. 4. there is drawn a third curve *C* corresponding to the hyperbolic expression

$$it = K = \text{const.}$$

The constant *K* was obtained from a particular pair of *i*, *t*. As it is seen, the agreement between this and the experimental curve *A* is more intimate than the agreement between *A* and *B*. The only difference is to be found at the beginning of the curves: the ends and the middle parts of them coincide very closely. The relation between the three curves is shown also by the table II, the first column of which contains time, the second, third and fourth the values of *i* for the experimental, hyperbolic and exponential curves.

Table II.

t	i_{exper}	i_{expon}	$i_{\text{hyperb.}}$
2	66	36	120
4	52	32,8	60
8	26	26,7	30
12	20	—	20
15	16,6	19,4	16
24	10,4	12,8	10
28	8,6	10,6	8,5
44	5,4	5,1	5,4
60	3,8	2,4	4,0
100	2,0	—	2,4

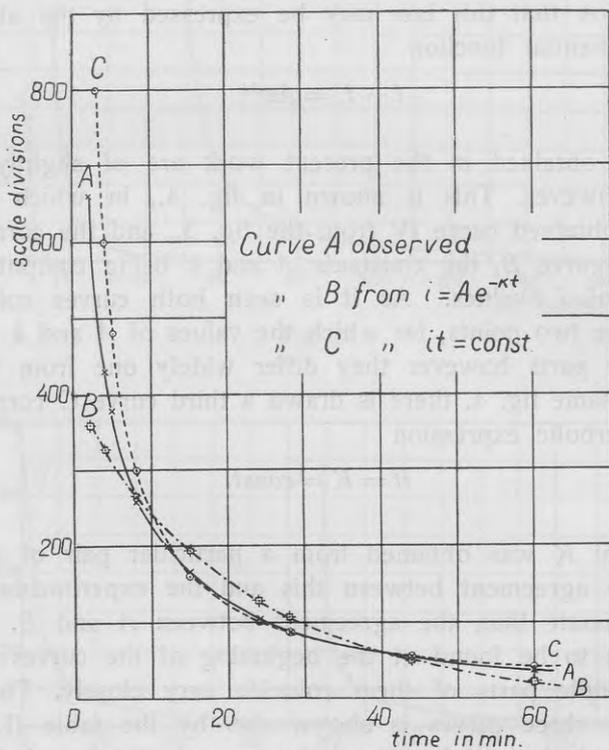


Fig. 4.

It should be noticed however that curves of described regularity are obtained only from filaments, the surfaces of which are clean and have not undergone great mechanical twistings before the heating.

Curves given by unclean filaments show some irregularities. This is seen from the fig. 5, 6 and 7, in which is given a complete set of curves obtained with the filament first used. While fastening to the platinum leads sufficient care was not taken to protect it from coming in contact with fingers and other objects by which it could be soiled. In these curves there are in many places irregularities. In the fifth curve one of the irregularities has the form of a distinct maximum. The distance *ab* in the curve II represents interruption

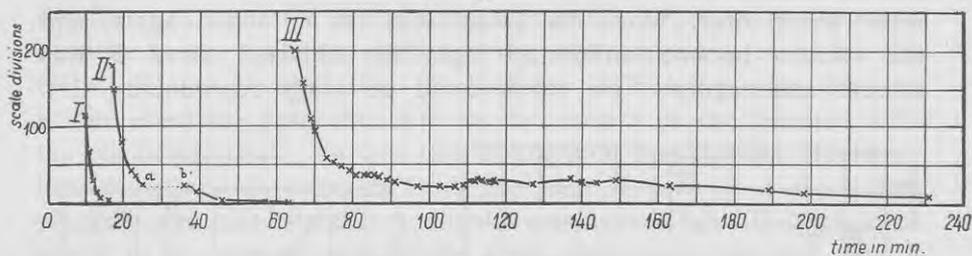


Fig. 5.

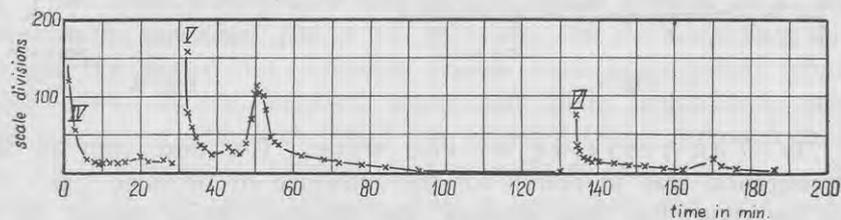


Fig. 6.

of the emission caused by suddenly increased resistance of the filament. This rapid change of resistance could not have any external cause. The increased resistance was observed about 10 minutes, after which time it regained its normal magnitude, and the emission proceeded in the regular way. Irregularities of this sort were not observed with any of the other filaments when in placing them due care was taken for the cleanliness. The view that the observed irregularities are not due to the metal itself but to some kind of impurities, is supported by the fact that towards the end of its heating, when the impurities have been distilled off, the first filament also gave smooth curves without irregularities, as it is seen from curves VII, VIII and IX, in fig. 7. Also in this set of curves

the hyperbolic character of the decay is clearly seen, and as in all other cases, the last curves are very much steeper than the middle ones.

All curves so far described are obtained with the wire heated in vacuo. When the wire is in a rarefied atmosphere of air, there appear some other irregularities in the character of the decay. This is shown by curves plotted in fig. 8. The curve *A* was taken when the diffusion pump, as it appeared later, has been for some time out of action, and therefore the vacuum was maintained by the water pump only. When the pump was set in action again, and the vacuum became sufficiently high, the obtained curve *B* was smooth and regular. This result could be easily reproduced.

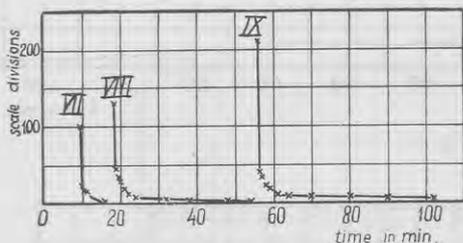


Fig. 7.

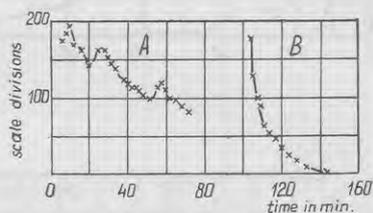


Fig. 8.

b. The reviving of the wire. The next step in the investigation was to search for the influence of occluded gases on the emission. For this purpose, the filament being heated till it did not give any more emission, the bulb *B* was filled for several hours with dry air, then exhausted, and the emission of the filament measured. This procedure was repeated several times with different intervals of time. The obtained results show that the wire does not regain its emission power in the atmosphere of air at normal pressure and temperature. The small increase of emission, which sometimes was observed, probably was caused not by the air itself but by the impurities, e. g. cock grease, dust particles, vapors of the H_2SO_4 from the drying vessel etc., that are brought in by it. The same procedure was then repeated with hydrogen, taken from Kipp's apparatus and dried as stated before. The results agree with those obtained with air: by standing in an atmosphere of dry hydrogen at normal pressure and temperature palladium does not regain its power of emission.

Suspecting that the hydrogen in atomic state is more rapidly occluded by palladium, than in the molecular state, the filament was removed from the apparatus and made cathode for a short time in a small alectrolytic cell. In this way it was then found that the emission power of the filament was increased enormously. The new set of curves thus obtained are similar to those obtained before, except that they are little steeper.

From this experiment we can not draw the conclusion however that the increased emission is due to the absorbed hydrogen, because the filament, saturated in the same way with oxygen, gave the same results. As no difference between the two emissions could be detected, it was thought that the increase of emission was due not to the absorbed gases but due to the contact of the filament with the electrolyte itself. To test this assumption, the filament, throughly heated again, was removed from the bulb *B* and for a short time plunged into the electrolyte (dilute sulphuric acid). The regained power of its emission was of the same order as in the two preceding cases.

From these observations the question arose, whether all liquids increase the emission power of palladium by the same amount. To get the answer the following liquids were investigated: toluol, xylol, ether, alkohol, distilled water and dilute hydrochloric acid. The experiment with each liquid was repeated twice. Although there are small differences between two consequent observations, the results in all are quite definite. This is seen from the next table:

Liquid	Emission
toluol	none
xylol	none
ether	small
alkohol	small
water	very large
<i>HCl</i>	enormous
<i>H₂SO₄</i>	enormous

The same results were obtained with other filaments, showing that they are reproducible.

Discussion of the results and conclusions.

The experiments described show that it is very hard, in the usual way, to get evidence, whether the gases, in particular hydrogen, absorbed by palladium, take any part in its positive emission. Indeed, as the hydrogen can be occluded by the palladium only when in the atomic state, we never can be sure that the emission of the wire is increased by the absorbed hydrogen, and not in the process, by which the hydrogen is made atomic. We can hope to solve this problem only by inventing a method to saturate palladium with atomic hydrogen without bringing it in contact with other bodies. It is intended to try one of the possible methods in the next future.

It is remarkable that only the electrolytes and liquids with small but noticeable conductivity increase the emission power of the filament; the dielectric liquids like xylol and toluol are inactive. Starting from this fact we can assume that the increasing of the emission is effectuated in one of the two ways: either 1) by the contact of the filament with the surrounding bodies only, or 2) by some kind of chemical process, which takes place between the wire and the surrounding bodies. In the first case we can suppose that the positive emission of metals is due to some „active matter“, which is widely distributed in the world, and can be transferred from one body to another. This matter is soluble in water or other solvents but not in the dielectric liquids. When an exhausted wire comes in contact with an electrolyte or a body containing it, the active matter goes from the liquid to the wire, and the wire becomes active. This means that the active matter easily becomes ionized. This would be in good agreement with the view proposed by Richardson (l. c.) that the positive emission of all metals consists of ions of alkaline metals. The dielectric liquids, containing no free ions, can not serve as sources of reviving for other bodies.

If the second assumption is true, the increased emission of a metal is due to some chemical substance, which is produced on its surface in the moment of contact with the electrolyte. During the next heating this substance is destroyed, and positive ions liberated. But it must be understood that in this case the ions can not be of the same nature for all metals. As this seems to be in contradiction with the observed facts, this „chemical“ hypothesis must be abandoned.

Whatever the way may be in which the metal has gained its power to emit positive ions, the more probable hypothesis is that the source of emission lies in the surface of the wire. Indeed, it would be difficult to suppose, that the active matter, adhering to the wire during its contact with the source, could penetrate into the metal, as the time between the moment of the contact and the next heating could be made short. Also the influence of the contamination, as it is seen from the figs. 5 and 6, shows that we have to do here with a surface effect. Similar conclusions have been drawn by Sheard and Woodburry⁹⁾ from their experiments with platinum.

On the other hand, this conclusion seems to be in contradiction with an other, which we can draw from the discrepance between the experimental curve *A* and the corresponding exponential curve *B*, as shown by the fig. 4. Supposing that the active matter is contained in the surface layer of the wire we can expect its emission obeying the strong exponential law. The obtained curves show however that at the beginning of the heating the emission decays more quickly and at the end more slowly, than the exponential law requires. This shows that either the emission is given not by the „evaporation“ of the active matter alone but that some other processes also take part in it, or that the ions are emitted not by the surface alone but also by the internal parts of the wire.

It seems to be possible to find expressions, the corresponding curves of which give satisfactory coincidence with the curves obtained experimentally. But it is very hard to find the logical, viz. physical significance of these expressions. Thus the hyperbola *C*, given in the fig. 4, fits quite well with the experimental curve *A*, but it is impossible to give any reason for this kind of connection between emission and time.

Similar difficulties arise if we want to explain the fact shown in the figs. 2 and 3, that at a given temperature only part of the active matter, present in the wire, is distilled away. If the emission would be similar to some kind of evaporation, it would be expected that at a given temperature it would proceed till all the active matter is evaporated. But as it is shown by the experiment, only a part of the matter is emitted, the remaining part

⁹⁾ Sheard and Woodburry, l. c.

does not change from continued heating and is independent from the previous temperatures. From all possible explanations the two following are to be mentioned. First: the ions of the active matter are bound in the metal by different kinds of forces, so that each group of them requires for its liberation definite energy, viz. temperature. The steep current-time curves then would correspond to small groups of ions, the slope curves — to groups of many ions. Second: the emission of the metal is due to some unknown process, the temperature being only a promoter of it. The process is maintained by itself and decays with time.

These two explanations are possible but not necessary. Without new experiments and more detailed investigation of the character of the decay-curves it is not possible to decide which of the two is to be retained.

As shown, it is not possible, in the usual way, to decide whether the gases occluded by the metals take any parts in the positive emission. But there is no reason to conclude that they can not do it. The only difference between the alkaline metals and the gases is to be looked for, probably, in the fact that the alkaline metals can be ionized at lower temperatures, than the gases. Therefore it is to be expected that gases expelled by metals at high temperatures would be ionized like the vapors of potassium or sodium in the ordinary emission. As the temperature of the used palladium wire was not known with certainty, it was not possible however to extend the present investigation in this direction. It is intended to do this in the next future.

Presented to the faculty, August 1, 1929.

Par palladija pozitīvās elektrības emisiju.

Fr. Gulbis.

Šinī darbā studēta pozitīvo ionu emisija, kas nāk no metaliem, kad tos karsē. Pētījums vērsts galvenā kārtā divos virzienos: 1) atrast, kā pozitīvā emisija mainās ar laiku, un 2) kā to var atjaunot, kad tā izbeigusies. Ir pamats domāt, ka pozitīvā emisijā jē m dalību arī tās gāzes, kas metālos var būt okludētas un nāk no tiem ārā, kad tos karsē. Tāpēc sevišķi labs pētīšanas objekts ir palladijs, jo tas var okludēt gāzes līdz tūkstoškārtīgam savam tilpumam. Ši iemesla dēļ tad arī šinī darbā pētīta palladija emisija.

Dabūtie rezultāti izteikti grafiski kā emisijas strāvas-laika liknes. Vispārīgā veidā tie saskan ar tiem, kas iegūti agrākos, galvenā kārtā ar platīnu taisītos eksperimentos. Tomēr varēts arī konstatēt, ka emisijas samazināšanās likums nav tīri eksponenciāls, bet ka karsēšanas sākumā un beigās emisija samazinās straujāki, pie vidējām temperatūrām turpretim lēnāki, nekā to prasa eksponenciālais likums.

Konstatēts, ka izkarsēts palladijs, kas savu emisijas spēju jau zaudējis, var „atjaunoties“ tikai tad, ja tas nāk sakarā ar apvidu, kas satur brīvus ionus. Tādi vispirmā kārtā ir elektrolīti. Dielektriskos apvidos, resp. gāzēs pie normāla spiediena palladijs savu emisijas spēju neatgūst. Tas saskan ar ieskatu, ko jau agrāki proponējis O. W. Richardson's, ka metālu pozitīvās emisijas cēlonis ir alkaļu metālu — kalija un natrija — piemaisījumi. Kad metālu karsē, šie piemaisījumi pamazām no tā iztvaiko, kāpēc pozitīvā emisija ar laiku samazinās.

Okludēto gāzu mazo iespaidu uz pozitīvo emisiju tad varētu izskaidrot ar to, ka alkaļu metālu tvaiku ionizācijas potenciāli ir daudz zemāki par gāzu, resp. ūdeņraža ionizācijas potenciāliem; tāpēc no metāliem nākošie alkaļu piemaisījumi ionizējas pie zemākām temperatūrām nekā gāzes. Tas nozīmē, ka pie eksperimentā lietotām temperatūrām praktiski ionizēti tikai alkaļu tvaiki. Bet līdz ar to sagaidāms, ka pie augstākām temperatūrām pozitīvā emisijā sāks jē m dalību arī okludētās gāzes. Tā kā palladija temperatūra tieši mērita

netika, bet literatūrā sastopamie dati par palladija pretestības atkarību no temperatūras ir nepietiekoši, lai tā temperatūru varētu izrēķināt, tad šī virzienā pētījumu laist nevarēja. Ir nodomāts to izdarīt tuvākā nākotnē.

Calpionella alpina Lorenz als „Leitfossil“.

Von E. Kraus, Riga.

Es ist ein Verdienst von Th. Lorenz sich 1901 auch an die nähere mikroskopische Durchforschung der, wie wir heute sagen, „unterostalpinen“ Gesteine des südwestlichen Rätikons gemacht zu haben. Die Stratigraphie dieser Zonen konnte namentlich durch W. v. Seidlitz, D. Truempy, Haefner, J. Cadisch weiter gestützt werden, doch liegt sie noch immer in mancher Beziehung im argen. Dies musste Verfasser aus der Untersuchung von vielen Hunderten von Dünnschliffen und von ausgedehnten Profilen und Karten-Aufnahmen in der Kreideflysch-Zone zwischen Iller und Rhein in Bayern, Vorarlberg und NO-Schweiz ableiten.

Es hat sich dabei herausgestellt, dass die Oberkreide (in Flyschfazies) der Oberstdorfer Decke, welche 1927, S. 271 (s. Lit.-Verz. Nr. 7), kurz als „Birnwangschichten“ bezeichnet worden war, eine Einlagerung von hellen, dichten, pelagischen Kalken mit Hornstein enthält. Wohl gemerkt: eine normale, konkordant-stratigraphische Einlagerung, wovon man sich an guten Aufschüssen wie etwa auf dem Grat südlich Riezlern, Kleines Walsertal, und anderwärts¹⁾ zweifelsfrei überzeugen kann. Der Horizont liegt in einem früher teilweise als „couches rouges“, „Leist- oder Seewenmergel“ (besser „Leimernmergel“), auch „Wildflysch“ z. T. bezeichneten Niveau, das im Flysch oft am Rande der Oberostalpinen Decke erscheint, mit den Diabasen in enger Beziehung steht und wegen dieser seiner Lagerung von mehreren Seiten nur als „Schubfetzen“, sogar als besondere „rhätische Decke“, bzw. „Aroser Schuppenzone“ bezeichnet worden ist. Jeder Beweis für die Notwendigkeit dieses Niveau herauszureissen aus dem natürlichen Flyschverband und es überall als tektonisch isoliert zu betrachten fehlt.

¹⁾ Herr Oberbergdirektor Dr. Reis, dem ich dies mitteilte, erklärte, dass er genau die gleiche Tatsache auch im Grüntengebiet festgestellt habe.

Verfasser hat 1927 auch die sogenannten „Juraklippenkalke“ mit Hornsteinen hiehergestellt, welche im Bereich der Balderschwanger Klippen neuerdings von H. P. Cornelius ausgezeichnet dargestellt wurden. J. Wanner hielt dem entgegen, dass er *Calpionella alpina* Lorenz in diesen Kalken am Feuerstätter Kopf gefunden habe. Es stehe folglich ausser Frage, dass wir hier Oberjura und nicht Oberkreide vor uns hätten. M. Richter hat dem Verfasser den Rat gegeben sich über die Möglichkeiten einer Unterscheidung von Seewenkalk und Malm-Aptychenkalk zu unterrichten, denn die vom Verfasser als Niveau der Seewenkalke angeführten Vorkommen von pelagischem Kalk am Rand der Oberostalpinen Decke seien ohne Zweifel Oberjura.

Dem stand aber das frühere Ergebnis von K. Reiser entgegen, welcher (1923, S. 10) Seewerkalkhabitus in den Balderschwanger Klippenkalken auch mikroskopisch erkannt hatte. Ausserdem hatte Verfasser den Beweis, dass die Birnwangschichten durch ihre Seewen-Foraminiferen, ihre Lage über der Gault-Quarzitgruppe, über Urgoaptgesteinen als Oberkreide unzweideutig definiert sind, und dass die diesen Birnwangschichten normal eingelagerten pelagischen Kalke ganz genau den Habitus der Balderschwanger Klippenkalke besaßen. Auch konnte man in ihnen mikroskopisch überall die gleichen Radiolarien und Foraminiferen, teilweise auch *Calpionella alpina* Lorenz auffinden. Dazu erschienen schon Gerölle von durchaus typischen Seewerkalken in dem mit den „Klippenkalken“ in engster Beziehung stehenden Bolgenkonglomeraten, sodass zum mindesten für diese ein vorturonisches Alter ausgeschlossen war (E. Kraus 1929).

Es war dem Verfasser schlechterdings unmöglich auf Grund der makro- und mikroskopischen Untersuchung irgend einen wesentlichen Unterschied zwischen pelagischen Hornsteinkalken von einerseits sicherem Oberjura-Alter, andererseits von ebenso sicherem Oberkreide-Alter zu finden. Aus allem musste er den Schluss ziehen, dass sich eben in der Zeit der Seewen-, allgemein der höheren Kreideschichten, ein Übergang aus dem helvetischen Faziesbereich des Nordwestens mit den bekannten Foraminiferen (*Orbulinaria sphaerica* und *ovalis* K., *Discorbina canaliculata* R., *Textularia globulosa* EHR., *Oligostegina laevigata* K. u. a.) hinüber in den ultra- oder osthelvetischen vollzog, in welchem das Meer viel unruhiger war, daher Flyschfazies bildete, und in dem zu Zeiten besonders tiefer Versenkung des Meeresbodens Tiefseerinnen mit dem sehr

feinen, pelagischen Schlamm entstanden. In Mengen wurden in diese Tiefseerinnen Radiolarien eingebettet, während die kalkigen Foraminiferenschalen beim Sinken und auf dem eingedeckten Sediment in der Hauptsache aufgelöst wurden. Auch wanderte die Kieselsäure in dem Kalk und schied sich nach Ausweis der Dünnschliffe unter Kalzit-Rhomböederbildung zu Hornsteinschmitzen und -Bänken aus.

Es ist bekannt und natürlich, dass man von jeher die Beobachtung der normalen Über- und Unterlagerung von Fossilien bergenden Horizonten im Gelände als selbstverständliche Grundlage für das relative Alter und den etwaigen Leitcharakter irgendeiner Fauna oder eines bestimmten Fossils angesehen hat oder doch hätte ansehen sollen. Wenn Verfasser die Tatsache des Vorkommens einer bisher als Leitfossil für Tithon (Lorenz), später auch für Unterkreide (z. B. Truempy) angesehenen Foraminifere wie der *Calpionella alpina* Lorenz auch in der Oberkreide im Gelände erkannt hat, so muss schon aus diesem Grunde das Dogma vom Leitcharakter dieser Form fallen.

Besteht die Annahme zu recht, dass Oberkreidehorizonte in Allgäu-Vorarlberg auch in Radiolarienfazies auftreten, so müsste man erwarten, dass hier tatsächlich in denjenigen Deckenteilen, welche für den ursprünglichen Ablagerungsraum den Übergang gegen die Radiolarienfazies im Südosten enthalten, Mischfazies zwischen der reinen Foraminiferen- und der reinen Radiolarien-Entwicklung sich auffinden liessen. Verfasser hat nach solchen Übergängen nicht vergeblich gesucht, sie sind in der Tat in ausgezeichneter Weise zu verfolgen. Als Beispiele seien die Dünnschliff-Beschreibungen folgender Vorkommen angeführt:

- 672.²⁾ Blaugrauer, etwas feinsandiger Mergelkalk, unterer Teil des Ragatzalp-Baches NW Damüls, Vorarlberg: In der mitunter kräftig umkristallisierten Kalkgrundmasse liegen öfter Schwammnadeln, *Orbulinaria sphaerica*, öfter *Calpionella*-artig, ? *Milioliden*, Reste von Radiolarienkugeln.
679. Seewerkalk mit schwarzem Hornstein, Grat-Oberkante westlich Sünser Joch, Vorarlberg: Radiolarienkugel-reicher Kalk mit *Lithocampe*, cf. *Tetracapsa*, *Orbulinaria sphaerica* K., davon eine deutlich *Calpionella*-artig geöffnet, wenig *Globigerina* cf.

²⁾ Die Nummern entsprechen der Nummerierung in der Dünnschliffsammlung des Verfassers.

- aequilateralis, *Oligostegina laevigata*, Umrisse der *Discorbina* cf. *canaliculata*.
714. Grauer pelagischer Birnwangfleysch-Kalk, grösserer Tobel hinter Schloss H. Liechtenstein; 830 m M.-H.: Sehr dichte, klüftig durchsetzte Grundmasse mit viel *Orbulinaria sphaerica*, gelegentlich offenen Schalen, auch einzelnen *O. ovalis*, *Radiolarien*resten.
767. Liebensteiner Fleckenmergelkalk, Gehänge OSO Wieden, an Bregenzer Ache: Stückchen von *Inoceramus*, *Discorbina canaliculata*, *Textularia globulosa*, *Orbulinaria sphaerica*, *O. ovalis*, „*Calpionella alpina* L.“, Gitterkugeln von *Radiolarien*.
769. Grauer Mergelkalk zwischen Breitachmergel und Leimernkalk Fundort wie 767: Wimmelt von *Orbulinaria sphaerica*, öfter geöffnet, fast nichts von *O. ovalis*; *Globigerina aequilateralis*, *Discorbina canaliculata* vereinzelt, öfter grössere Kugeln von *Radiolarien*, *Rhopalastrum*, Schwammnadeln.
784. Grauer, dichter Mergelkalk der Oberkreide, Strasse Au-Damüls westlich P. 1077 am Tobel: Die dichte, Seewenkalk-artige Grundmasse wimmelt von *Orbulinaria sphaerica*, fast nichts von *O. ovalis*, öfter „*Calpionella*“, einzelne *Globigerina aequilateralis*; ausserdem *Radiolarien*-Kugeln bis 0,2 mm Dicke.
786. Graugefleckter Mergelkalk, unterer Mitteltobelbach an Strasse Au-Damüls: Dichte Kalkmasse wimmelt von *Orbulinaria sphaerica*, auch reichlich *O. ovalis*, dick- oder dünnschalig, öfter „*Calpionella*“-artig geöffnet; *Oligostegina laevigata*, *Discorbina bosqueti*, *D. canaliculata*, *Globigerina* sp. u. a. Ausserdem reichlich *Radiolarien*kugeln, *Lithocampe* sp., cf. *Triactoma*.
962. Kräftig graugefleckter Liebensteiner Kalk östlich „am Schlieberg“, nördlich Hindelang: trüber Mergelkalk mit reichlich *Radiolarien*kugeln von rd. 0,25 mm Durchmesser, *Orbulinaria sphaerica*, gelegentlich „*Calpionella*“-artig geöffnet, *Globigerina cretacea*.
1032. Hellgelblichgrauer, splittriger, pelagischer Kalk, „Hangender Schrofen“ an der Vilstalstrasse: Enthält sehr dünne Schwammnadeln, Foraminiferenschalen, *Orbulinaria sphaerica*, *Globigerina cretacea*, *Gl. aequilateralis*, *Discorbina Schloenbachi*.
1033. Roter Kalk vom gleichen Fundort: Ähnlich wie vorher, einige *Radiolarien*- und Schwammrestchen.
1036. Weisser, pelagischer Porzellankalk vom gleichen Fundort: Sehr

zahlreiche *Orbulinaria sphaerica* und *O. ovalis*, geöffnet („Calpionellen“) oder geschlossen, meist sehr dünnchalig und von Kalkschlamm, nicht von Kalzit erfüllt. Radiolarienkugeln, *Lithocampe*, dünne Schwammnadeln.

Mit Entschiedenheit muss betont werden, dass auch die „couches rouges“ der Iberger Klippen und Freiburger Alpen pelagische Oberkreidekalke mit Radiolarien enthalten, dass auch die Seewenschichten von Balzers im südlichen Liechtenstein und bei Iberg Radiolarien führen (Lorenz 1901, S. 10).

Von der angedeuteten Übergangszone ab noch weiter im S kommt also zuerst die mächtigere Radiolarienfazies, dann aber wieder, jenseits der Tiefseerinne, der Übergang zum normalen Seewerkalk in der Falknisdecke:

738. Seewerkalk im Profil an der Strasse Triesen-Lavena bei 825 m M.-H.: Sehr grosse Foraminiferenmenge, besonders *Oligostegina laevigata*, *Orbulinaria sphaerica*, *Discorbina canaliculata*, *D. aequilateralis*, *D. cretacea*, *Textularia pygmaea*, *T. globulosa*, *Globigerina aequilateralis* u. a.

Die Beziehungen zwischen dem Unterostalpin und den Klippen erhalten damit eine neue Beleuchtung.

Die vorgebrachten Beobachtungen sind die Probe aufs Exempel. Damit³⁾ liegt der eindeutige Beweis vor, dass die ältere Oberkreide faziell aus dem Seewerkalk des helvetischen Bereichs tatsächlich über eine Mischfazies nach SO in den hornsteinführenden Radiolarienkalk (Feuerstätter und Oberstdorfer Decke) übergeht, um sich noch weiter im S wieder in den normaleren Seewerkalk der Unterostalpinen Falknisdecke zu verwandeln. Der bisher noch immer so rätselhafte „Klippenkalk“ von Balderschwang erhält dadurch mit vielen anderen entsprechenden Vorkommen seine Deutung.

Calpionella und Orbulinaria.

Dem Dogma vom Leitwert der Calpionella haben sich bereits früher verschiedene Beobachtungen anderer Verfasser nicht fügen wollen. Ich erwähne Aug. Rothpletz 1905 (S. 68), K. Boden 1916, C. F. Parona 1917. Für Rothpletz ist der Wert der

³⁾ Die tektonische und palaeogeographische Lage der Dinge ist im Teil II der „Geol. Forschungen im Allgäu“ „der nordalpine Kreideflysch“ vom Verfasser dargestellt.

Calpionella alpina als Leitfossil „mehr als zweifelhaft“; Boden findet *Calp. alpina* auch im Lias. Schon Heim, Blumer, G. Steinmann, Truempy hatten *Calp.* auch in der Unterkreide gefunden. Ich führe als Beleg für das Unterkreidealter folgende Dünschliffe an:

721. Hellgrauer, feinstgeschichteter Mergelkalk, Tristelkalkwand (nicht Jura!) 640—680 m NN am Weg Triesen-Lavena, Lichtenstein. In dem Kalk öfter *Orbulinaria sphaerica*, mitunter geöffnet wie „*Calpionella*“ und etwas breitgedrückt.
723. Grauer Mergelkalk vom gleichen Fundort, reichlich dünnschalige *Orbulinaria sphaerica*, geschlossen oder schmal oder breit kragenförmig geöffnet, „*Calpionella*“.
729. Sandiger Schrattenkalk, vom gleichen Fundort: calcitische Grundmasse mit viel Körnchen von dichtem *Calpionella*- (*Orbulinaria*-) Kalk, Ooiden, Sandkalk, Quarz, rundlichen Kieselkonkretionen, ähnlich 720, etwas Feldspat, Glimmer, Chlorit; die *Calpionellen* liegen öfter auch für sich, den dichten Mergelkalk noch einschliessend, aus dem sie beim Transport gelöst wurden. Ihr Gestein, das auch *Milioliden* enthält, war offenbar noch nicht ganz verfestigt.

Bei der genaueren Durchforschung der Dünschliffe von Allgäu-Vorarlberg hat sich nun ergeben, dass *Calpionella alpina* Lorenz nicht nur auf keinen Leitwert Anspruch hat, sondern überhaupt keine besondere Art oder gar Gattung darstellt.

Die Entstehungsgeschichte dieser „Gattung“ ist kurz folgende. Richtigerweise beobachtete Lorenz 1901 das so häufige, fast alleinige Vorkommen von „*Calpionella*“ mit Radiolarien, und zwar in Radiolarienkalken und Hornsteinen des oberen Weissen Jura. Er kannte kein Gestein mit „*Calpionella*“, das nicht oberjurassisch oder wahrscheinlich oberjurassisch war — was bei der geringen damaligen Erfahrung in mikroskopischer Hinsicht freilich nicht viel sagen will. Er glaubte Grund für seine Annahme zu haben, dass die eigenartige, mehr oder weniger breite Öffnung mit ihrer oft kragenförmigen Vorstülpung des Randes nach aussen an diesen kleinen Foraminiferen-Krügen etwas sei, das die Schale genetisch abtrenne von allen anderen bisher bekannten Foraminiferen-Gattungen. Die Grössen seiner „Krügchen“ (griechisch *Kalpion*) schienen ihm zwischen 0,07 und 0,09 mm zu schwanken.

Calpionella findet sich fast nicht (eine Ausnahme fand Verfasser nach H. Mylius an der Canisfluh) im flachermeerischen, helvetischen

Bezirk, wohl aber im tiefmeerischen und teilweise orogen beeinflussten (darum öfter klastischen) Jura der Ostalpen. Wo „Calpionella“ im Dünn-
schliff auftritt, sucht man aber oft lang vergebens nach der typischen,
kragenartigen Öffnung, obwohl jene kreisförmigen oder ovalen, zarten
Schalendurchschnitte meist in grösserer Anzahl vorhanden sind. Sehr
bezeichnend ist, dass die Schälchen im Gegensatz zu der nachfolgend
zu untersuchenden *Orbulinaria*-Schale meist nicht von Kalzit, sondern
von dem sedimentären Schlamm der Umgebung ausgefüllt sind. Die
Schlammfüllung hängt offenbar mit der grösseren Öffnung bei *Calpionella*
zusammen. Jedenfalls wäre auch das kein Grund, um nicht
die oft gleichfalls — wenn auch nicht so breite — Öffnungen auf-
weisenden *Orbulinaria*-Kugeln ohne Kragen-Vorstülpung oder mit nur
sehr schlechter Vorbiegung nicht als *Orbulinaria sphaerica* bzw. *O.*
ovalis zu bestimmen.

Calpionella alpina hat trotz der seit 1901 gewiss lebhaft fort-
gesetzten mikroskopischen Untersuchungen, abgesehen von *Orbulinaria*,
weder eine ihr näher verwandte Gattung, noch auch eine weitere
Art zu verzeichnen. Der Leitwert von *C. a.* wurde besonders von
G. Steinmann 1913 energisch betont. Andere Autoren, wie A. Buxtorf,
waren gleicher Ansicht.

Orbulinaria sphaerica. Am nächsten stand auch für
Lorenz die *Lagena sphaerica* Kaufmann oder „*Pithonella ovalis*“
Lorenz, deren Namen wir aber mit J. G. Egger, Arn. Heim
u. a. auf Grund der Beobachtung der rezenten *Orbulinaria* durch
Rhumbler im atlantischen Ozean besser mit „*Orbulinaria sphae-*
rica“, bzw. „*O. ovalis*“ vertauschen. Diese Formen sind durch ihre
oft gewaltige Masse für die Seewenschichten, namentlich für den
Seewenkalk besonders bezeichnend. Freilich kann aber nicht davon
gesprochen werden, dass sie „das Leitfossil für die Seewenschichten“
sind, wie sich Lorenz (1901, S. 14) ausgedrückt hat. Ich kenne
sie aus sehr vielen Schliffen nicht nur des Turons, des Senons und der
Dänischen Stufe, sondern auch aus der Unterkreide und aus dem Malm.

J. G. Egger 1909 verdanken wir eine genaue Untersuchung
der *Orbulinaria*, nachdem schon Kaufmann und besonders Heer
dieser „*Lagena*“ ihre Aufmerksamkeit gewidmet hatten. Egger (1909,
S. 46) führte an, dass auffälligerweise *Orbulinaria* sehr oft Risse und
Spalten an der Oberfläche wahrnehmen lasse, „als wären die mit
einer Flüssigkeit gefüllt gewesen Schalen bei der Petrifikation ge-
borsten und hätten durch die bei diesem Vorgange entstandenen

Risse die vorher eingeschlossene Flüssigkeit, den Schaleninhalt, austreten lassen“. Auch bildet er auf Tafel 5, Fig. 8, eine solche Orbulinaria mit heraustretendem Inhalt ab. Er betont, dass W. Fink's Anschauung über die Bildung des Tegernseer Erdöls aus Foraminiferen dadurch gestützt würde. Die von Heer und Lorenz für Mündungen gehaltenen Öffnungen sind nach Egger Defekte, dieser oft mit Rissen oder anderen Deformationen versehenen Schälchen.

Der Unterschied zwischen Orbulinaria sphaerica und ovalis hängt m. E. wohl auch zum grossen Teil mit Deformierung zusammen. O. ovalis ist die Form, welche meist auf den beiden Schmalseiten des Ovals geöffnet worden ist, an Stellen, welche deutlicher Weise zugleich die dünnsten der Schale waren. Nach Egger tritt die Lochbildung bei beiden Orbulinarien dort auf, wo die Schale am dünnsten ist. Dieser Wechsel der Schalendicke sei durch diagenetische Einflüsse zu erklären.

Besonders zu erwähnen ist hier noch die Tatsache, dass auch die O. sphaerica in ihren typischen Vorkommen häufig Öffnungen zeigt, die ein wenig Calpionella-artig ausgestülpt sind. Als Beispiele führe ich an:

- 650. Pelagischer Kalk, normal im Birnwangflynch, Seebergtobel bei 1135 m NN, Grosses Walsertal: viele O. sphaerica und ovalis, öfter geöffnet und zwar auch mit Kragen-Andeutung, vereinzelt Globigerina. Nichts von Radiolarien; Hornsteinstückchen.
- 658. Pelag. Kalk und Hornstein 12 m unter der oberostalpinen Überschiebung bei 1790 m NN im obersten Seebergtobel: im dichten Kalk sehr viel gegabelte Schwammnadeln. Reste von mehr oder weniger aufgeplatzten Orbulinarien; die Formen teilweise Calpionella-ähnlich.
- 664. Grantstein mit Kalkgeröllen, Kalkgruppe nördl. Türtschalpe, Gr. Walsertal: eines der Kalkgerölle grenzt nicht scharf gegen die Sandkörner und die Grundmasse ab, die Körner haben sich eingedrückt. Die Kalkgerölle enthalten viel Schwammnadeln; O. sphaerica, teilweise Calpionella-artig geöffnet.

Unter diesen Umständen ist es ganz unmöglich, eine Eigenschaft zu finden, welche die meisten Calpionella alpina-Formen, nämlich die ohne sichtbaren, starken Kragen, jedoch mit Öffnungen, abtrennen könnte von den meisten ganz ebenso aussehenden Orbulinarien.

Nur zwei Punkte könnten zur Not in Betracht kommen: erstens kann man sich bei der Durchsicht sehr vieler Dünnschliffe davon überzeugen, dass im Durchschnitt die Seewer-Orbulinarien, allgemein diejenigen, die nicht in der Radiolarien-Fazies auftreten, trotz bedeutenden Wechsels etwas dickere Schalen, seltener geöffnete Schalen und meist Schlamm-freie Schalen besitzen, während die Calpionellen im allgemeinen viel dünnschaliger sind, breitere Öffnungen und Schlamm-inhalt zeigen. 2) Die schon von Lo'rienZ und anderen betonte Verbreitung: Calpionellen gibt es weit überwiegend in der Radiolarien-Fazies, Orbulinarien aber in der gewöhnlichen Foraminiferen-Fazies.

Die überaus engen Zusammenhänge zwischen Calpionella und Orbulinaria lassen m. E. nur die nachfolgende Deutung für berechtigt erscheinen.

Deutung.

Stellen wir uns Orbulinaria-Kügelchen von normaler Dicke der Kalkschale vor, deren organischer Inhalt im Meere abstirbt. Je näher das Tier an der Wasseroberfläche war und je tiefer der betreffende Meeresteil, desto tiefer muss nun das Kügelchen niedersinken, umso länger wird es i. a. dauern, bis es in den Bodenschlamm zu liegen kommt. Während des Dahintreibens wird sich alsbald die Kalkschale durch das Kohlensäure-haltige Wasser von aussen her etwas auflösen beginnen. Ausserdem wird von innen her gegen die Schale, welche, wie Egger gezeigt hat, keine sichtbare grössere, für den in Zersetzung begriffenen, zähkolloidalen Inhalt passierbare Öffnung besitzt, ein mit Zunahme der Zersetzungsgase wachsender Druck ausgeübt werden. Tritt die Ablagerung verhältnismässig frühzeitig ein, so werden höchstens schwache, die Kügelchen gegeneinander reibende Wasserbewegungen am Boden oder diagenetische Auflösungen die Lochbildung ermöglichen oder es kommt überhaupt nicht zu einer solchen. Muss das Kügelchen aber in die Tiefsee sinken, so wird die oberflächliche Auflösung so weit die Schale schwächen, dass sie dem Innendruck nachgeben muss, und dass sich also an der dünnsten, schwächsten Stelle ein Loch bildet. Dabei tritt der Inhalt nach aussen und kann die dünn gewordenen Ränder ausfransen oder kragenförmig ausstülpfen.

Schwache Reibung durch hin und her schwingende Wasserbewegung am Meeresboden mag besonders auf hartem Untergrund, wie er trotz der wohl bedeutenden Wassertiefe, z. B. in der sandig-steinigen Falknisbrekzie, vorgelegen hat, zur Lochbildung beigetragen haben.

In den meisten Fällen enthalten die wirklich flachmarinen Sedimente vergleichbaren Aussehens (Schrattenkalk) keine *Calpionella*.

Nur selten sieht man, dass die dünnen Ränder nach innen etwas eingestülpt sind, was vielleicht auf ein ausnahmsweise sehr rasches Versinken und noch ungenügende Gasbildung in einer Zeit zusammenhängt, in welcher das Kügelchen schon in den Druckbereich des Tiefseewassers geraten ist.

Von der längere Zeit im Sediment bleibenden Menge organischer Substanz, die zur Bildung recht verschiedener Stoffe („Bitumen“, Naphta, Glaukonit, Pyrit, Achat u. a.) Anlass gibt bzw. dazu beiträgt, kann man sich in den meisten Schliffen durch bituminöse Foraminiferengesteine überzeugen. Ebenso kann man leicht feststellen, dass es jeweils die dünnsten Stellen der Schale sind, welche sich geöffnet oder vorgestülpt haben, dass die geöffneten Schalen immer mehr oder weniger deformiert sind. Die *Calpionella*-artig geöffneten Schälchen zeigen oft weit zurückgebogene Wandungen. (Vgl. z. B. Abb. 71, S. 288, im Alb. Heim, Geol. d. Schweiz, II, 1920).

Durch unsere Deutung werden alle diese Abwandlungen der Form ebenso leicht verständlich wie die durchschnittlich geringere Schalendicke der in tieferem Wasser länger aufgelösten „*Calpionellen*“, die wegen der dort im allgemeinen langsameren Sediment-Eindeckung auch am Boden länger der Auflösung unterliegen mussten. Wir verstehen die Tatsache, dass die kräftiger ausgestülpte „*Calpionella*“-Form mit nur wenig Orbularien, aber mit sehr vielen Radiolarien in den typischen Tiefsee-Radiolarienschlickern vergesellschaftet auftritt. Nicht weniger klar verständlich wird das starke Zurücktreten der mit kräftigem Kragen versehenen Orbularien in der sehr Radiolarien-armen Foraminiferen-Fazies geringerer Tiefe.

Das allzu schnell geglaubte Dogma vom Leitwert und von der systematischen Stellung der „*Calpionella alpina*“ war der selbstverständliche Grund, weshalb man in den Alpen bis heute fast immer Tiefseefazies und Alter verwechselt hat, weshalb man so ziemlich alles in Radiolarien-Hornstein-Fazies hier dem Oberjura zurechnete. J. Wanner's und M. Richter's oben angeführte Einwände sind hiefür ein Beispiel. Man übersah ganz das Tiefseestadium in der Oberkreide und es blieben die „Klippenkalke“, soweit sie nicht wirklich oberjurassisches Alter haben, ohne nähere Verknüpfung mit bekannten Serien in der Luft hängen.

Gewiss ist es nicht erfreulich, Versteinerungen aus Leitfossilien

zu Faziesfossilien „degradieren“ zu müssen; umso weniger, als wir nun für die Tiefsee-Fazies noch kein neues, Alters-charakteristisches Kennzeichen u. d. M. besitzen. Ob das in den so konservativen Sedimenten der Tiefsee überhaupt möglich sein wird, steht dahin. Auf keinen Fall ist es erlaubt, die alpine Stratigraphie und Tektonik, so weit sie sich einzig und allein auf den „Leitcharakter“ der *Calpionella alpina* Lorenz aufbaut, kritiklos zu übernehmen.

Es ist kein Zweifel, dass unsere paläogeographischen und tektonischen Anschauungen in den Alpen und anderwärts (Apennin!) mit Rücksicht hierauf noch mancher Revision zu unterziehen sein werden. Ich halte es mit W. Deecke, der 1914 in einem seiner scharf kritischen Aufsätze sagte: Nach dem Auftreten einzelner Foraminiferen in den Kalken der Schweizer Alpen zu sagen: „Das ist Jura oder Kreide“, halte ich für ganz ausgeschlossen. Darf man auch den Leitwert gewisser Foraminiferengruppen, die uns stratigraphisch öfter tatsächlich den einzigen Anhalt geben, keineswegs leugnen, so ist doch gerade hier die Kritik und Kontrolle im Gelände unumgänglich.“

Folgerung.

Als paläontologisch-stratigraphisches Ergebnis haben wir zu verzeichnen:

- 1) *Calpionella alpina* Lorenz ist als Gattung und Art zu streichen. Sie ist nur eine mechanisch deformierte *Orbulinaria sphaerica* Kaufmann sp.
- 2) Die früher „*Calpionella*“ genannte Form besitzt keinen Leitwert innerhalb von Jura und Kreide.
- 3) Auch bei der artmässigen Unterscheidung von *Orbulinaria sphaerica* K. und *O. ovalis* K. spielt wohl, teilweise wenigstens, eine nachträgliche Deformierung herein.
- 4) *Orbulinaria sphaerica* K. kommt auch im Oberjura vor, wo sie in der Tiefsee-Facies mit der dünn gewordenen Schale oft aufgeplatzt ist.
- 5) Horizonte, deren stratigraphische Stellung bisher nur aus dem Leitwert der *Calpionella alpina* abgeleitet war, sind zu revidieren.
- 6) Es eröffnen sich damit neue paläogeographische Zusammenhänge, wie an dem Beispiel des helvetisch-unterostalpinen Meeresraumes in den Nordalpen gezeigt werden kann.

Berührte Literatur.

- 1) Th. Lorenz, „Geologische Studien im Grenzgebiete zwischen helvetischer und ostalpiner Fazies. Teil II Südlicher Rhätikon“. Ber. Naturf. Ges. Freiburg i. B. **12**, 1901, S. 34 ff.
 - 2) W. v. Seidlitz, „Geol. Unters. im östl. Rätikon“, ebenda **16**, 1906, S. 232 ff.
 - 3) D. Truempp, „Geol. Unters. im westl. Rhätikon“. Beitrag zur geol. Karte der Schweiz N. F. 46. Lief. II, Abt. mit geol. Karte 1 : 25000, Bern 1916.
 - 4) W. Haefner, „Geologie des südwestl. Rätikon“, ebenda **54**, 1924.
 - 5) A. H. Stahel, „Geol. Untersuchungen im nordöstl. Rätikon“, Dissert. Universität Zürich 1926.
 - 6) I. Cadisch, „Geologie der Weissfluhgruppe“, Beitrag zur geol. Karte der Schweiz N. F. Lief. **49**, 1921.
 - 7) E. Kraus, „Neue Spezialforschungen im Allgäu (Molasse und Flysch)“, ein Beitrag zur Kenntnis geosynklinaler Vorgänge. Geol. Rundschau **18**, 1927, S. 189—221, 263—298.
 - 8) E. Kraus, „Westalpiner Flysch“, im Abriss der Geologie von Bayern (Piloty u. Löhle, München 1928, Abt. II). S. 112.
 - 9) E. Kraus, „Über Flysch und Molasse im Allgäu“, Geol. Rundsch. 1929.
 - 10) E. Kraus, „Geol. Forschungen im Allgäu II: der nordalpine Kreideflysch“, erscheint 1929.
 - 11) H. P. Cornelius, „Das Klippengebiet von Balderschwang im Allgäu“, Geol. Archiv **4**, 1926.
 - 12) J. Wanner, „Zur Altersfrage des oberjurassischen Aptychenkalkes im Balderschwanger Klippengebiet“, Geol. Rundschau **18**, 1927, S. 455.
 - 13) M. Richter, „Neue Spezialforschungen im Allgäu“, Geol. Rundschau **19**, 1928, S. 51—62.
 - 14) K. Reiser, „Geologie der Hindelanger und Pfrontener Berge im Allgäu“, Geognost. Jahresh. **33**, 1920, **35**, 1922, **36**, 1923.
 - 15) A. Rothpletz, „Geol. Alpenforschungen II“, München 1905, S. 68.
 - 16) K. Boden, „Geol. Untersuchungen am Geigerstein und Fockenstein usw. Geogn. Jahresh. **28**, 1916, S. 215.
 - 17) C. F. Parona, „Del contributo portato alla litogenesi dai piccoli organismi“, Natura **8**, 1917.
 - 18) G. Steinmann, „Über Tiefenabsätze des Oberjura im Apennin“, Geol. Rundschau **4**, 1913, S. 573 f.
 - 19) J. G. Egger, „Foraminiferen der Seewener Kreideschichten“, Sitz. Ber. k. Bayer. Akad. d. Wiss. math.-phys. Kl. Jg. 1909, 11. Abt.
 - 20) Arn. Heim in Alb. Heim, „Geologie der Schweiz“, II, 1920, S. 288, 315: Abb. von Calpionella und Orbulinaria.
 - 21) O. Heer, „Die Urwelt der Schweiz“.
 - 22) W. Deecke, „Paläontologische Betrachtungen. VI. Über Foraminiferen“, N. Jahrb. f. Min. etc. Jg. 1914, II, S. 21—43.
 - 23) A. Buxtorf, „Über ein Vorkommen von Malmkalk im subalpinen Flysch des Pilatusgebietes“, Verh. der Naturf. Ges. Basel. Bd. **28**, II, 1917, S. 436—438.
- Riga, Ende Januar 1929. Der Fakultät vorgelegt den 1. August, 1929.

Calpionella alpina Lorenz kā „vadošā fosilija“.

E. Krauss, Rīgā.

Kopsavilkums.

1) Ziemeļalpu fliša stratigrafijas noskaidrošanai autors izdarījis plašākus ģeoloģiskus kartēšanas darbus Allgau'ā, Forarlbergā (Vorarlberg). Pie tam izrādījās, ka Oberstдорfas klāja (Decke) fliša facijā virs apakšējā un vidējā krita nogulumiem sastopams augšējā krita flišs ar konkordantiem pelaģiska kaļķa ieslēgumiem apakšējās daļās. Šis gaišais, bieži iesārtais kaļķis līdz ar ragakmeni izveidojumā ir līdzīgs Balderschwang'as „klinšu kaļķim“ Feuerstätter'es klājā. Abos sastopama Calpionella alpina Lorenz.

2) Helvetiskajā apgabalā dienvidus austrumos no Forarlbergas ir pakāpeniskas pārejas no helvetisko Seewer'slāņu foraminiferu facijas ziemeļos un rietumos uz radiolāriju faciju ultrahelvetiskā augškrita flišā dienvidos un austrumos.

3) Kā pārejas, tā arī normālā radiolāriju facija satur foraminiferu Calpionella alpina Lorenz, kuņu līdz šim turēja par augšējās juras un apakšējā krita vadošo fosiliju. Dibinoties uz augšā minētiem novērojumiem [1) un 2)], šo uzskatu vairs nevar atzīt par pareizu. Tas jāatmet arī palaiontoloģisku iemeslu dēļ; jo

4) forma „Calpionella“ ir nepareizi nodalīta no Orbulinaria ģints, kas sastopama sevišķi bieži augšējā kritā. Starp abām ir visas pārejas. Pirmajai tipiskais cauruma apmales izcīlnis ir sekundāra parādība. Tā izcelšanās izskaidrojama ar nogrimušās čaulas šķīdināšanu un ar sadalījušās organiskā satura izspiešanos čaulas vājākās vietās. Ja Orbulinaria ir pārsvarā seklākas jūras kaļķu un foraminiferu dūņās, bet Calpionella's forma dziļjūras radiolāriju facijā, tad tas stāv sakarā ar šķīdinošās ogļskābes ilgāku iedarbību uz daudz dziļāk nogrimstošām „Calpionella“ čauliņām, kas arī jūras dibenā netika tik drīzi ar jauniem sedimentiem aizsargātas no pārvēršanās.

5) Tā kā „Calpionella's“ forma ir tikai sekundāri pārvērtusies Orbularia, tad tai no sistēmatikas kā tādai jāizzūd. Viņa ir tikai raksturīga dziļjūras facijai, bet vecuma noteikšanā tai nav nekādas nozīmes kā „vadošai fosilijai“. Stratigrafiski un tektoniski secinājumi, kas līdz šim izdarīti Alpos, Apenninos un c., dibinoties vienīgi uz šīs formas iedomāto „vadošo“ vērtību, revidejami.

LATVIJAS UNIVERSITĀTES BIBLIOTĒKA



0509079460

20 bibliotēka



220041767

249456

Nr. 1.	A. Lūsis — Sur l'équation de Fredholm à noyau symétrique réel . . .	1
	Fredholma vienādojums ar reālu simmetrisku kodolu (kopsavilkums) . .	21
Nr. 2.	F. Trey. Zum Übergang der Glimmentladung in die Büschelentladung .	27
	Izlādešanās pāreja no mirdzošās uz kūļa veida izlādešanos (kopsavilkums)	50
Nr. 3.	Fr. Gulbis. On the emission of positive electricity from palladium . .	51
	Par palladija pozitīvās elektrības emisiju (kopsavilkums)	67
Nr. 4.	E. Kraus. Calpionella alpina Lorenz als „Leitfossil“	69
	Calpionella alpina Lorenz kā „vadošā fosilija“ (kopsavilkums)	80a