

422

LATVIJAS  
ŪNIVERSITĀTES RAKSTI  
ACTA UNIVERSITATIS LATVIENSIS

---

MĒCHANIKAS FAKULTĀTES  
SERIJA

I SĒJUMS  
TOMUS

№ 8—11

LATVIJAS ŪNIVERSITĀTE

---

R I G Ā, 1 9 3 5

P. LU  
1442

LVU ZPĀTNISKĀ  
BIBLIOTĒKA  
641-29-88

Grafoanalītiska metode paātrinājuma centra un centroidu  
 noteikšanai komplānā kustībā.

*N. Rozenauers.*

Paātrinājuma centra koordinātas analītiski izpaužas ar samērā  
 sarežģītām formulām:

nekustošā plaknē:

$$x_{\gamma} = x_0 + \frac{\ddot{x}_0 \dot{\varphi}^2 - \ddot{y}_0 \ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2}$$

$$y_{\gamma} = y_0 + \frac{\ddot{x}_0 \ddot{\varphi} + \ddot{y}_0 \dot{\varphi}^2}{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2}$$

kustošā plaknē:

$$\xi_{\gamma} = \frac{(\ddot{x}_0 \dot{\varphi}^2 - \ddot{y}_0 \ddot{\varphi}) \cdot \cos \varphi + (\ddot{x}_0 \ddot{\varphi} + \ddot{y}_0 \dot{\varphi}^2) \cdot \sin \varphi}{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2}$$

$$\eta_{\gamma} = \frac{(\ddot{x}_0 \ddot{\varphi} + \ddot{y}_0 \dot{\varphi}^2) \cdot \cos \varphi - (\ddot{x}_0 \dot{\varphi}^2 - \ddot{y}_0 \ddot{\varphi}) \cdot \sin \varphi}{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2}$$

kur  $x_0$  un  $y_0$  apzīmē kustošās koordinātu sistēmas sākuma punkta  
 koordinātas,

$\varphi$  apzīmē leņķi starp kustošām un nekustošām koordinātu asīm,

$\dot{\varphi}$  ir kustošās plaknes leņķiskais ātrums,

$\ddot{\varphi}$  ir kustošās plaknes leņķiskais paātrinājums.

Bez tam vēl paātrinājuma centra noteikšanai ir vairākas grafiskas  
 konstrukcijas, atkarībā no dotiem lielumiem. Grafiskās konstrukcijas  
 kinēmatikā ir ērtas lietošanai un dod arī labus, pietiekoši precīzus  
 rezultātus, bet tikai tādos gadījumos, kad attiecīgas līnijas nekrustojas  
 zem maziem leņķiem un ja vajadzīgie krustšanās punkti neiznāk  
 ārpus zīmējuma robežām.

Šā darba mērķis — dot iespēju atrast punktu paātrinājumus un paātrinājuma centru arī tādos gadījumos, kad tie iznāk ārpus zīmējuma robežām un kad grafiskās konstrukcijas nedod pietiekoši precīzus rezultātus aiz taisņu krustošanās zem maziem leņķiem.

Ar minēto jautājumu ir nodarbojies arī O. Heks (O. Heck), kas ir devis atrisinājumu ar kompleksu skaitļu palīdzību savā darbā: „Darstellung von Beschleunigungsfeldern durch komplexe Zahlen“, kas iespiests 1932. g. žurnālā „Ingenieur-Archiv“, Band III, Heft 5.

Kompleksu skaitļu metode ir pati par sevi samērā vienkārša, bet, kā tas redzams Heka darbā apskatītos piemēros, dažreiz noved pie diezgan sarežģītām formulām. Minētais apstāklis pamudināja šā darba autoru meklēt citu atrisinājumu, un tas ir izdevies vēl vienkāršākā grafoanalitiskā ceļā. Atrastā metode ir nosaukta par grafoanalitisku tādēļ, ka tā apvieno grafiskās metodes vienkāršību ar analitiskās metodes precizitāti. Šās metodes ideja ir šāda:

*Pēc grafiskās konstrukcijas izteikt vajadzīgo lielumu analitiska veidā, tad atrastās formulas var lietot arī tādiem gadījumiem, kurus grafiski konstruēt neizdodas.*

Šinī darbā pēc grafoanalitiskās metodes ir noteiktas paātrinājuma centra koordinātas kustošā un nekustošā plaknē komplānā kustībā, pie kam rezultāti ir iegūstami tik vienkāršā ceļā, ka šī metode pilnīgi var atvietot grafisko konstrukciju, nerunājot jau par tīri analitiskiem atrisinājumiem.

Pats par sevi saprotams, ka to pašu ideju var izlietot ne tikai paātrinājuma centra noteikšanai, bet arī citu jautājumu atrisināšanai.

Grafiskā konstrukcija, uz kuŗas ir dibināts apskatāmā jautājuma atrisinājums, seko no vienas prof. Žukovska\*) teorēmas, kuŗa vācu literātūrā\*\*) nav atrodama un skan tā: komplānā kustībā divu punktu paātrinājumu ģeometriskā diference veido ar taisni, kuŗa savieno šos divus punktus, to pašu leņķi  $\gamma$ , kādu veido katra punkta paātrinājums ar radiju-vektoru, kas savieno šo punktu ar paātrinājuma centru  $\Gamma$ .

\*) Prof. Žukovskis: Теоретическая Механика.

\*\*) Kā piemēram: F. Reulaux: Theoretische Kinematik. 1875.

L. Burmester: Lehrbuch der Kinematik. 1888.

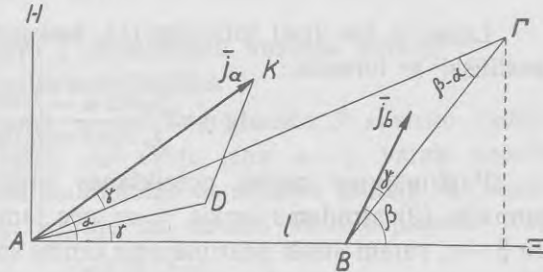
M. Grübler: Getriebelehre. 1917.

R. Beyer: Technische Kinematik. 1931.

T. Pöschl: Einführung in die ebene Getriebelehre. 1932.

**Grafoanalitiskā metode paātrinājuma centra noteikšanai  
kustošā plaknē.**

Kustošās plaknes paātrinājuma stāvoklis ir noteikts, ja ir zināmi paātrinājumi diviem punktiem. Pieņemsim, ka punktiem  $A$  un  $B$  ir doti paātrinājumi  $j_a$  un  $j_b$ , paātrinājumu virzieni doti ar leņķiem  $\alpha$  un  $\beta$ , kurus veido paātrinājumu vektori ar taisni  $AB$  un attālums  $AB = l$ .



1. zīm.

Konstruēsim paātrinājumu vektoru ģeometrisko diferenci, atliekot  $\overline{KD} = -\overline{j_b}$ , tad acīmredzot  $\overline{AD} = \overline{j_a} - \overline{j_b}$  un pēc Žukovska teorēmas  $\angle DAB = \gamma$ . Lai dabūtu paātrinājuma centru  $\Gamma$ , atlieksim no paātrinājumu vektoriem  $j_a$  un  $j_b$  leņķi  $\gamma$  tanī pašā virzienā, kādā no paātrinājumu ģeometriskās diferences  $\overline{AD}$  ir skaitīts leņķis  $\gamma$  līdz taisnei  $AB$ , t. i. mūsu gadījumā skat. 1. zīm., pulksteņa rādītāja virzienā. Tur, kur krustojas abas tādā kārtā konstruētas taisnes  $A\Gamma$  un  $B\Gamma$ , atradīsim paātrinājuma centru  $\Gamma$ .

Izvēloties kaut kādu koordinātu sistēmu, piemēram, koordinātu sākumu punktā  $A$ ,  $E$  ass  $AB$  virzienā un  $H$  ass  $\perp AB$ , varam izteikt punkta  $\Gamma$  koordinātas izvēlētajā sistēmā analitiski. Asu apzīmējumi ir pieņemti  $E$  un  $H$  tādēļ, ka tā ir kustošā koordinātu sistēma. Punkta  $\Gamma$  koordinātas, kā redzams 1. zīm., iznāk:

$$\xi_\gamma = A\Gamma \cdot \cos(\alpha - \gamma) \quad \text{un} \quad \eta_\gamma = A\Gamma \cdot \sin(\alpha - \gamma).$$

Attālumu  $A\Gamma$  varam dabūt no trijstūra  $A\Gamma B$ , lietojot sinu teorēmu:

$$\frac{A\Gamma}{\sin(\pi - \beta + \gamma)} = \frac{AB}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

Apzīmējot attālumu starp punktiem  $A$  un  $B$  ar  $l$ , atradīsim

$$A\Gamma = l \frac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

Paātrinājuma centra  $\Gamma$  koordinātas tad iznāk



Grafiskā ceļā kustošo centroidu varētu dabūt tikai konstruējot pietiekoši daudzus punktus, t. i. atkārtojot grafisko paātrinājuma centra konstrukciju ap 15 reizes dažādos kustošās plaknes stāvokļos, attiecīgos laika momentos.

### Paātrinājuma centra $\Gamma$ noteikšana kustošā plaknē polārkoordinātās.

Ievērojot, ka paātrinājuma centru  $\Gamma$  ar punktu  $A$  savieno radijsvektors  $A\Gamma$  un ka tas ar taisni  $AB$  veido leņķi  $\alpha - \gamma$ , varam noteikt paātrinājuma centru arī polārkoordinātās ar sākumu punktā  $A$ . Apzīmēsim radiju-vektoru  $A\Gamma$  ar  $r_{\gamma\sigma}$ , jo tas atrodas kustošā plaknē. Tad

$$r_{\gamma\sigma} = l \frac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin(\beta - \alpha)} \dots \dots \dots (3)$$

$$\varphi = \alpha - \gamma$$

reprezentēs paātrinājuma centra polārās koordinātas.

Gadījumā, ja leņķis  $\gamma$  iznāk negatīvs, sk. zīm. 2, formulās (3) jāmaina  $\gamma$  zīme, un mēs dabūsim

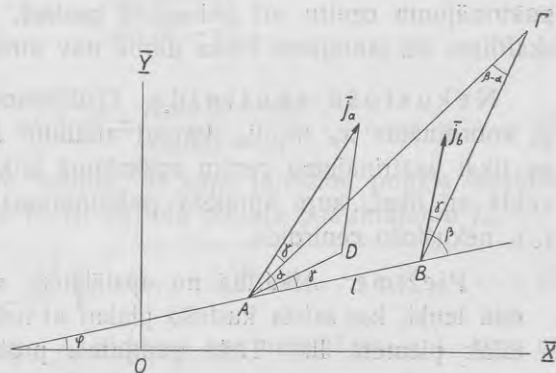
$$r_{\gamma\sigma} = l \frac{\sin(\beta + \gamma)}{\sin(\beta - \alpha)} \dots \dots \dots (3a)$$

$$\varphi = \alpha + \gamma$$

Tās pašas formulas (3) un (3a) dos arī parametra veidā kustošo centroidu, ja  $\alpha$ ,  $\beta$  un  $\gamma$  būs izteiktas kā  $f(t)$  jeb kā funkcijas no kāda cita parametra.

### Grafoanalitiskā metode paātrinājuma centra $\Gamma$ noteikšanai nekustošā plaknē.

Pieņemsim atkal, ka kustošā plaknē ir doti divu punktu  $A$  un  $B$  paātrinājumi  $j_a$  un  $j_b$ , kā arī leņķi  $\alpha$  un  $\beta$  starp paātrinājumu vektoriem un taisni  $AB$ . Bez tam arī ir zināmas punkta  $A$  koordinātas nekustošā plaknē  $x_a$  un  $y_a$ , attālums  $AB = l$  un  $\angle \varphi$ , ko veido taisne  $AB$  ar nekustošo  $O\bar{X}$  asi.



3. zīm.

Tāpat kā agrāk, sastādīsim abu punktu paātrinājumu ģeometrisku diferenci:

$$\bar{j}_a - \bar{j}_b = \overline{AD}.$$

Pēc Žukovska teorēmas  $AD$  ar  $AB$  veidos  $\angle DAB = \gamma$ . Konstruēsim paātrinājuma centru  $\Gamma$ , atliekot no paātrinājumu vektoriem  $\bar{j}_a$  un  $\bar{j}_b$  leņķi  $\gamma$  tanī pašā virzienā, kā tas ir atskaitīts no  $AD$  līdz  $AB$ , t. i. šinī gadījumā pulksteņrādītāja virzienā. Abas ievilktais taisnes krustojas punktā  $\Gamma$ , kas tādā kārtā ir noteikts. Izteiksim tagad analītiski punkta  $\Gamma$  koordinātas attiecībā uz nekustošām asīm  $O\bar{X}$  un  $O\bar{Y}$ .

Pēc sinu teorēmas:

$$\frac{A\Gamma}{\sin(\pi - \beta + \gamma)} = \frac{AB}{\sin(\beta - \alpha)},$$

no kurienes

$$A\Gamma = l \frac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

Ievērojot, ka  $A\Gamma$  ar  $O\bar{X}$  asi veido leņķi  $\varphi + \alpha - \gamma$ , meklējamās koordinātas izteiksies:

$$\begin{aligned} x_\gamma &= x_a + l \frac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin(\beta - \alpha)} \cos(\varphi + \alpha - \gamma) \\ y_\gamma &= y_a + l \frac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin(\beta - \alpha)} \sin(\varphi + \alpha - \gamma) \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (4)$$

Formulām (4) jāpievieno agrāk atrastā izteiksme  $\gamma$  noteikšanai, t. i. formula (2):

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{j_a \sin \alpha - j_b \sin \beta}{j_a \cos \alpha - j_b \cos \beta} \dots \dots \dots (2)$$

Kā redzams, pēc grafoanalītiskās metodes varam tikpat viegli noteikt paātrinājuma centru arī nekustošā plaknē, turpretim ar kompleksiem skaitļiem šis jautājums Heka darbā nav atrisināts.

Nekustošā centroida. Gadījumos, kad  $j_a, j_b$ , leņķi  $\alpha, \beta$  un  $\varphi$ , koordinātas  $x_a$  un  $y_a$ , kā arī attālums  $l$  ir  $f(t)$ , formulas (4) dod ne tikai paātrinājuma centru apskatāmā laika momentā, bet parametra veidā arī likni, kuŗu apraksta paātrinājuma centrs nekustošā plaknē, t. i. nekustošo centroidu.

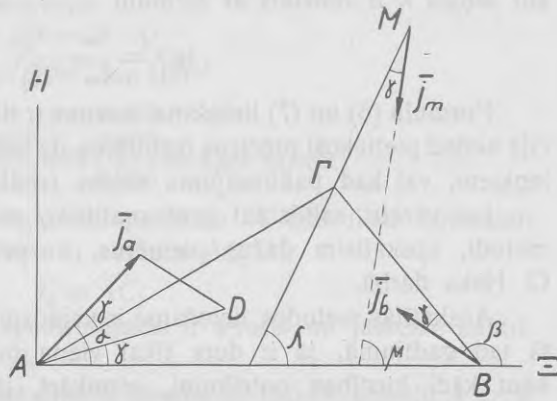
Piezīme. Atkarībā no apstākļiem var ar  $\varphi$  apzīmēt arī kādu citu leņķi, kas saista kustošo plakni ar nekustošo, kā tas būs redzams tālāk piemērā II. Tādā gadījumā, protams, formulas (4) mainīs savu veidu.



**Kustošas plaknes punkta  $M$  paātrinājuma noteikšana.**

Pieņemsim, ka attiecībā uz izvēlēto koordinātu sistēmu pēc divu punktu paātrinājumiem  $\vec{j}_a$  un  $\vec{j}_b$  ar formulu (1) palīdzību ir noteiktas paātrinājuma centra  $\Gamma$  koordinātas  $\xi_\gamma$  un  $\eta_\gamma$  un ir dotas kāda punkta  $M$  koordinātas  $\xi_m$  un  $\eta_m$ .

Jāatrod punkta  $M$  paātrinājums pēc lieluma un virziena.



4. zīm.

Kā zināms no kinēmatikas, katra punkta paātrinājums

$$j_m = \Gamma M \sqrt{\omega^4 + \tau^2},$$

kur  $\Gamma M$  ir punkta attālums līdz paātrinājuma centram. Izteiksmi  $\sqrt{\omega^4 + \tau^2}$ , kuŗa ir vienāda visiem punktiem, varam viegli atrast, ievērojot, ka arī punktam  $A$  paātrinājums

$$j_a = \Gamma A \sqrt{\omega^4 + \tau^2},$$

no kurienes

$$\sqrt{\omega^4 + \tau^2} = \frac{j_a}{\Gamma A},$$

bet  $\Gamma A$  bija jau agrāk atrasts:

$$\Gamma A = l \frac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin(\beta - \alpha)},$$

tā tad

$$\sqrt{\omega^4 + \tau^2} = \frac{j_a \sin(\beta - \alpha)}{l \sin(\beta - \gamma)} \dots \dots \dots (5)$$

Šis lielums reprezentē faktoru, ar kuŗu jāreizina punkta attālums līdz paātrinājuma centram  $\Gamma$ , lai dabūtu punkta paātrinājumu  $j_m$ .

$$j_m = \frac{j_a \sin(\beta - \alpha)}{l \sin(\beta - \gamma)} \sqrt{(\xi_m - \xi_\gamma)^2 + (\eta_m - \eta_\gamma)^2} \dots \dots (6)$$

Punkta  $M$  paātrinājuma  $j_m$  virzienu var noteikt ar  $\angle \mu$ , kuŗu tas veido ar  $X$  asi. Kā redzams 4. zīm.,



gonālo ātrumu  $V_b$ . Vilksim vēl  $BN \parallel AC_1$ , tad  $BM$  varēs atrast no trijstūra  $BNM$ , izlietojot sinu teorēmu:

$$\frac{V_b}{\sin 65^\circ} = \frac{V_a}{\sin 105^\circ}$$

no kurienes

$$V_b = V_a \frac{\sin 65^\circ}{\cos 15^\circ} = 5 \frac{0,906}{0,966} = 4,69 \text{ m/sec.}$$

Ja  $C_1A$  griežas vienmērīgi, tad punktam  $A$  būs tikai normālais paātrinājums, kas reprezentēsies ar vektoru  $AC_1$ :

$$\vec{j}_a = \overline{AC}_1.$$

Ar šo vienam punktam paātrinājums ir atrasts un jāmeklē paātrinājums vēl otram punktam  $B$ .

Loceklim  $AB$  varam atrast griezes ātrumu  $\omega$ , izdalot punktu  $A$  un  $B$  ātrumu ģeometrisko diferenci ar  $AB$  garumu, bet  $\vec{V}_a - \vec{V}_b = \overline{MN}$ , tā tad

$$\omega = \frac{MN}{l}.$$

$MN$  dabūsim no trijstūra  $BMN$ , izlietojot sinu teorēmu

$$\frac{MN}{\sin 10^\circ} = \frac{BN}{\sin 105^\circ}; \quad MN = a \frac{\sin 10^\circ}{\cos 15^\circ} = 5 \frac{0,1736}{0,966} = 0,8985 \text{ m. sec}^{-1}$$

un

$$\omega = \frac{MN}{l} = \frac{0,8985}{3} = 0,2995 \text{ sec}^{-1}.$$

Lai dabūtu punkta  $B$  paātrinājumu, atliekam pēc pazīstamās grafiskās konstrukcijas  $\overline{BN} = \vec{j}_a$  un  $NK = l\omega^2$  virzienā paralēli  $BA$ .

$$NK = l \cdot \omega^2 = 3 \cdot 0,2995^2 = 0,2691 \text{ m. sec}^{-2}.$$

Uz taisnes, kas vilkta caur punktu  $K$  normāli pret  $AB$ , atradīsies punkta  $B$  pilna paātrinājuma vektora gala punkts. Lai dabūtu otru tādu taisni, sastādīsim punkta  $B$  normālo paātrinājumu griezes kustībā ap  $C_2$ , tas būs

$$BH = \frac{V_b^2}{b} = \frac{4,69^2}{4,5} = 4,89 \text{ m. sec}^{-2}.$$

Atliksim  $BH$  un vilksim normāli pret  $BH$  punktā  $H$ . Paātrinājuma  $j_b$  vektora gala punkts atradīsies arī uz šīs taisnes, tā tad tas faktiski atradīsies abu minēto taisņu krustošanās punktā  $L$ .

$$\vec{j}_b = \overline{BL}$$

Lai dabūtu  $j_b$  skaitlisko vērtību, atradīsim pirmkārt  $HL$ , sastādot poligonu  $BNK$  un  $BHL$  projekcijas uz horizontālu virzienu:

$$a \cdot \cos 65^\circ + NK = BH \cdot \sin 15^\circ + HL \cdot \cos 15^\circ$$

$$HL = \frac{5 \cdot \cos 65^\circ + 0,2691 - 4,89 \cdot \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{5 \cdot 0,423 + 0,2691 - 4,89 \cdot 0,259}{0,966} =$$

$$= \frac{2,384 - 1,266}{0,966} = 1,157.$$

Paātrinājuma  $j_b$  projekcija  $j_{b\xi} = -5 \cdot \cos 65^\circ - NK$

$$j_{b\xi} = -5 \cdot \cos 65^\circ - 0,269 = -5 \cdot 0,423 - 0,269 = -2,115 - 0,269 =$$

$$= -2,384;$$

$$j_{b\eta} = -BH \cdot \cos 15^\circ + HL \cdot \sin 15^\circ = -4,89 \cdot 0,966 + 1,157 \cdot 0,259 =$$

$$= -4,724 + 0,300 = -4,424;$$

$$j_b = \sqrt{j_{b\xi}^2 + j_{b\eta}^2} = \sqrt{(-2,384)^2 + (-4,424)^2} = \sqrt{5,6834 + 19,5717} =$$

$$= \sqrt{25,2551} = 5,025 \text{ m sec}^{-2}.$$

Paātrinājuma vektors  $\bar{j}_b$  veidos ar  $\bar{E}$  asi leņķi, kuŗa tangenss

$$\operatorname{tg}(\bar{E}\bar{j}_b) = \frac{j_{b\eta}}{j_{b\xi}} = \frac{-4,424}{-2,384} = 1,855,$$

no kurienes  $(\bar{E}\bar{j}_b) = 61^\circ 40' + 180^\circ = 241^\circ 40'$ .

Tagad kustošā plaknē ir zināmi divu punktu paātrinājumi un viņu virzieni, tā tad varam paātrinājuma centra noteikšanai tieši lietot formulas (2) un (1).

Izejas skaitļi:

$$j_a = 5 \quad \alpha = 245^\circ$$

$$j_b = 5,025 \quad \beta = 241^\circ 40' \quad l = 3 \text{ m.}$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{j_a \sin \alpha - j_b \sin \beta}{j_a \cos \alpha - j_b \cos \beta} = \frac{5 \cdot \sin 245^\circ - 5,025 \cdot \sin 241^\circ 40'}{5 \cdot \cos 245^\circ - 5,025 \cdot \cos 241^\circ 40'} =$$

$$= \frac{-5 \cdot \cos 25^\circ + 5,025 \cdot \cos 28^\circ 20'}{-5 \cdot \sin 25^\circ + 5,025 \cdot \sin 28^\circ 20'} = \frac{-5 \cdot 0,906 + 5,025 \cdot 0,880}{-5 \cdot 0,422 + 5,025 \cdot 0,4746} =$$

$$= \frac{-4,53 + 4,422}{-2,110 + 2,385} = \frac{-0,108}{0,275} = -0,393; \quad \gamma = 158^\circ 30'.$$

$$\beta - \gamma = 83^\circ 10' \quad \beta - \alpha = -3^\circ 20'$$

$$\alpha - \gamma = 86^\circ 30'$$

$$\xi_\gamma = l \frac{\sin(\beta - \gamma) \cdot \cos(\alpha - \gamma)}{\sin(\beta - \alpha)} = 3 \frac{\sin 83^\circ 10' \cdot \cos 86^\circ 30'}{-\sin 3^\circ 20'} =$$

$$= -3 \frac{0,993 \cdot 0,0611}{0,0581} = -3,13 \text{ m.}$$

$$\eta_{\gamma} = l \frac{\sin(\beta - \gamma) \cdot \sin(\alpha - \gamma)}{\sin(\beta - \alpha)} = 3 \frac{\sin 83^{\circ} 10' \cdot \sin 86^{\circ} 30'}{-\sin 3^{\circ} 20'} =$$

$$= -3 \frac{0,993 \cdot 0,998}{0,0581} = -51,2 \text{ m.}$$

Iegūtie rezultāti  $\xi_{\gamma} = -3,13 \text{ m.}$  un  $\eta_{\gamma} = -51,2 \text{ m.}$  pietiekoši tuvu sakrīt ar Heka darbā atrastiem skaitļiem:  $-3,14 \text{ m.}$  un  $-51,74 \text{ m.}$  Nenožīmīga starpība izskaidrojama ar to, ka šinī kalkulācijā visi leņķi bija noteikti līdz  $10'$ . Šādu noteiktību grafiskā konstrukcijā, protams, nemaz nevar sasniegt.

## II. piemērs.

### Kloķa mēchanisma klaņa kustības paātrinājuma centroidu noteikšana.

Apzīmēsim kloķa mēchanismā ar  $r$  — kloķa gaŗumu, ar  $l$  — klaņa gaŗumu, ar  $\varphi$  — leņķi, kuŗu apskatāmā laika momentā veido kloķis ar  $CB$ . Pieņemsim, ka kloķis griežas vienmēŗīgi pret pulksteņa rādītāju, un vienkāršības dēļ liksim  $\omega = 1 \text{ sec}^{-1}$ .

Meklēsim paātrinājuma centru  $\Gamma$  klaņa kustībai.

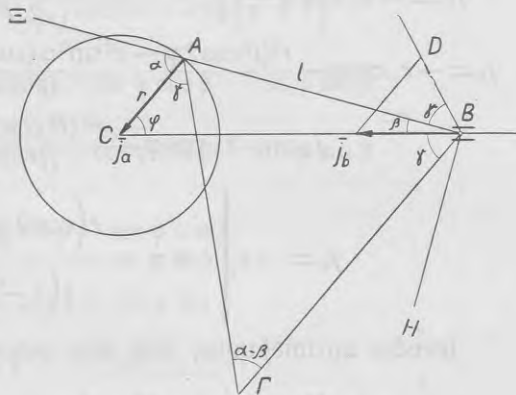
Ja kloķis griežas vienmēŗīgi un  $\omega = 1$ , tad punkta  $A$  ātrums

$$V_a = \omega \cdot r = r \text{ m. sec}^{-1} \text{ un paātrinājums}$$

$$j_a = r \omega^2 = r \text{ m. sec}^{-2}.$$

Ar šo paātrinājums vienam punktam  $A$  ir noteikts un jāmeklē vēl paātrinājums otram punktam  $B$ . Punkts  $B$  kustas taisnā virzienā, tā tad paātrinājuma vektors sakrītis ar to pašu taisni. Lai dabūtu šo paātrinājumu, sastādīsim attālumu  $CB$  un nodiferencēsim to divreiz pēc laika:

$$BC = r \cdot \cos \varphi + l \cos \beta, \text{ bet } r \cdot \sin \varphi = l \sin \beta; \sin \beta = \frac{r}{l} \sin \varphi;$$



6. zīm.

$$BC = r \cdot \cos \varphi + l \sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \varphi} = r \cdot \cos \varphi + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi};$$

$$V_b = \frac{dBC}{dt} = -r \cdot \sin \varphi \cdot \omega + \frac{-2r^2 \sin \varphi \cos \varphi \cdot \omega}{2\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}};$$

ievērojot, ka  $\omega = 1$

$$V_b = -r \cdot \sin \varphi - \frac{r^2 \sin 2\varphi}{2\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Zīme (—) šeit nozīmē tikai to, ka punkta  $B$  ātrums  $V_b$  ir virzīts no  $B$  uz  $C$ .

$$\text{Tālāk } j_b = \frac{dV_b}{dt} = -r \cdot \cos \varphi \cdot \omega -$$

$$- \frac{r^2 \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi} \cdot \cos 2\varphi \cdot 2 - \sin 2\varphi \cdot \frac{-2r^2 \sin \varphi \cos \varphi \cdot \omega}{2\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}}}{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}$$

$$j_b = -r \cdot \cos \varphi - \frac{r^2}{2} \frac{4(l^2 - r^2 \sin^2 \varphi) \cos 2\varphi + 4r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{2(l^2 - r^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$$

$$j_b = -r \cdot \cos \varphi - \frac{r^2 [l^2 \cos 2\varphi - r^2 \sin^2 \varphi (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi]}{(l^2 - r^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$$

$$j_b = -r \cdot \cos \varphi - \frac{r^2 (l^2 \cos 2\varphi + r^2 \sin^4 \varphi)}{(l^2 - r^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$$

$$j_b = -r \left[ \cos \varphi + \frac{r \left( \cos 2\varphi + \frac{r^2}{l^2} \sin^4 \varphi \right)}{l \left( 1 - \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \varphi \right)^{3/2}} \right]$$

Ievēdot apzīmējumus, kādi bija lietoti Heka darbā:

$$\frac{r}{l} = \lambda, \quad H = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi} \quad \text{un} \quad G = \cos 2\varphi + \lambda^2 \sin^4 \varphi,$$

dabūsim galīgi

$$j_b = -r \left[ \cos \varphi + \lambda \frac{G}{H^3} \right] \dots \dots \dots (8)$$

Atkal (—) zīme šeit tikai rāda, ka paātrinājums  $j_b$  ir virzīts no punkta  $B$  uz  $C$ .

### Paātrinājuma centra noteikšana kustošā plaknē.

Pēc tam, kad diviem punktiem  $A$  un  $B$  ir atrasti paātrinājumi un to virzieni, varam pāriet uz paātrinājuma centra noteikšanu pēc grafoanalitiskās metodes.

Izvēlēsim kustošu koordinātu sistēmu tāpat, kā Heka darbā, t. i. sākumu punktā  $B$  un  $\Xi$  asi virzienā  $BA$ , lai būtu iespējams salīdzināt rezultātus.

Pirmkārt, meklēsim pēc formulas (2)  $\operatorname{tg} \gamma$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{j_b \sin \beta - j_a \sin \alpha}{j_b \cos \beta - j_a \cos \alpha},$$

jo tagad koordinātu sākums ir izvēlēts punktā  $B$ .

Ievērojot, ka  $j_a = r$  un  $\alpha = \varphi + \beta$ , dabūsim

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{j_b \sin \beta - r \sin (\varphi + \beta)}{j_b \cos \beta - r \cos (\varphi + \beta)}.$$

Ievietosim šeit  $j_b$  pēc absolūta lieluma  $j_b = r \left( \cos \varphi + \lambda \frac{G}{H^3} \right)$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma &= \frac{r \left( \cos \varphi + \lambda \frac{G}{H^3} \right) \sin \beta - r \cdot \sin (\varphi + \beta)}{r \left( \cos \varphi + \lambda \frac{G}{H^3} \right) \cos \beta - r \cdot \cos (\varphi + \beta)} = \\ &= \frac{\cos \varphi \sin \beta + \lambda \frac{G}{H^3} \sin \beta - \sin \varphi \cos \beta - \cos \varphi \sin \beta}{\cos \varphi \cos \beta + \lambda \frac{G}{H^3} \cos \beta - \cos \varphi \cos \beta + \sin \varphi \sin \beta} = \\ &= \frac{\lambda \frac{G}{H^3} \sin \beta - \sin \varphi \cos \beta}{\lambda \frac{G}{H^3} \cos \beta + \sin \varphi \sin \beta}, \end{aligned}$$

bet  $\sin \beta = \lambda \sin \varphi$  un  $\cos \beta = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi} = H$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\lambda \frac{G}{H^3} \lambda \sin \varphi - H \cdot \sin \varphi \cdot (\lambda^2 G - H^4) \cdot \sin \varphi}{\lambda \frac{G}{H^3} H + \lambda \sin^2 \varphi \cdot (G + H^2 \sin^2 \varphi) \lambda H}$$

Ievietosim  $G = \cos 2\varphi + \lambda^2 \sin^4 \varphi$  un  $H^2 = 1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma &= \frac{\lambda^2 (\cos 2\varphi + \lambda^2 \sin^4 \varphi) - (1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi)^2 \cdot \sin \varphi}{\cos 2\varphi + \lambda^2 \sin^4 \varphi + (1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi) \sin^2 \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi}{\lambda H} = \\ &= \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi - \lambda^2 \sin^2 \varphi + \lambda^4 \sin^4 \varphi - 1 - \lambda^4 \sin^4 \varphi + 2\lambda^2 \sin^2 \varphi \cdot \sin \varphi}{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + \lambda^2 \sin^4 \varphi + \sin^2 \varphi - \lambda^2 \sin^4 \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi}{\lambda H} = \\ &= \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi + \lambda^2 \sin^2 \varphi - 1}{\cos^2 \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi}{\lambda H} = \frac{\lambda^2 - 1}{\cos^2 \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi}{\lambda H}. \end{aligned}$$

Ievērojot, ka  $\lambda < 1$ , rakstīsim šo formulu sekojošā veidā:

$$\operatorname{tg} \gamma = - \frac{(1 - \lambda^2) \sin \varphi}{\lambda H \cdot \cos^2 \varphi} \dots \dots \dots (9)$$

jeb kā  $f(\varphi)$ :

$$\operatorname{tg} \gamma = - \frac{(1 - \lambda^2) \sin \varphi}{\lambda \cos^2 \varphi \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}} \dots \dots \dots (9a)$$

Kad  $\operatorname{tg} \gamma$  ir atrasts, ņemsim tālāk paātrinājuma centra  $\Gamma$  koordinātu noteikšanai formulas (1), apmainot tanīs  $\angle \alpha$  un  $\angle \beta$ , jo 6. zīm. koordinātu sākums ņemts punktā  $B$ . Varētu ņemt arī formulas (1a), bet tad  $\operatorname{tg} \gamma$  un  $\gamma$  būtu jāņem pēc absolūtās vērtības.

$$\xi_\gamma = l \frac{\sin(\alpha - \gamma) \cdot \cos(\beta - \gamma)}{\sin \alpha - \beta},$$

$$\eta_\gamma = l \frac{\sin(\alpha - \gamma) \cdot \sin(\beta - \gamma)}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Kā redzams 6. zīm.,  $\alpha = \varphi + \beta$ , tā tad

$$\xi_\gamma = l \frac{\sin(\varphi + \beta - \gamma) \cdot \cos(\beta - \gamma)}{\sin \varphi} \dots \dots \dots (10)$$

$$\eta_\gamma = l \frac{\sin(\varphi + \beta - \gamma) \cdot \sin(\beta - \gamma)}{\sin \varphi}$$

Šīs formulas var vēl pārveidot, atklājot pirmo sin:

$$\xi_\gamma = l [\sin(\beta - \gamma) \operatorname{ctg} \varphi + \cos(\beta - \gamma)] \cdot \cos(\beta - \gamma) \dots \dots (10a)$$

$$\eta_\gamma = l [\sin(\beta - \gamma) \operatorname{ctg} \varphi + \cos(\beta - \gamma)] \cdot \sin(\beta - \gamma)$$

Formulas (9) un (10), kas atrastas pēc grafoanalitiskās metodes, nosaka šinī gadījumā paātrinājuma centra koordinātas kustošā plaknē. Heka darbā attiecīgās formulas, kas iegūtas ar kompleksu skaitļu palīdzību, ir daudz komplicētākas:

$$\xi_\gamma = r \frac{(1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi)^{3/2} \cos \varphi + \lambda (\cos 2\varphi + \lambda^2 \sin^4 \varphi)}{\lambda^2 (1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi) \cos^4 \varphi + (1 - \lambda^2)^2 \sin^2 \varphi} (\cos 2\varphi + \lambda^2 \sin^4 \varphi) \dots (16)$$

$$\eta_\gamma = r \frac{(1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi)^{3/2} \cos \varphi + \lambda (\cos 2\varphi + \lambda^2 \sin^4 \varphi)}{\lambda^2 (1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi) \cos^4 \varphi + (1 - \lambda^2)^2 \sin^2 \varphi} \cdot \frac{(1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi)^{3/2} \cdot \sin \varphi}{\lambda} \dots (17)$$

Heka darbā  $\xi_\gamma$  ir apzīmēts ar  $x_0$  un  $\eta_\gamma$  ar  $y_0$ . Šinī darbā ir izvēlēti citi apzīmējumi tādēļ, ka ar  $x$  un  $y$  ir apzīmētas koordinātas nekustošā plaknē.

Formulas (10) ir ērtākas par Heka formulām vēl tanī ziņā, ka pirmās ir izteiktas logaritmējamā veidā.



**Paātrinājuma centroidas noteikšana kustošā plaknē.**

Izlietosim formulas (9) un (10) konkrētam gadījumam  $\lambda = \frac{1}{3}$ , izvēlētam Heka darbā, un atradīsim  $\xi_\gamma$  un  $\eta_\gamma$ , atkarībā no lenķa  $\varphi$ , sākot no  $\varphi = 0^\circ$  līdz  $\varphi = 180^\circ$ . Rezultātus sastādīsim tabulas veidā.

Tabulā I. ir atrasti lenķi  $\beta$  un  $\gamma$ , ievērojot, ka pie  $\lambda = \frac{1}{3}$ ,

$$\operatorname{tg} \gamma = - \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{1}{3}} \cdot \frac{\sin \varphi}{H \cdot \cos^2 \varphi} = - \frac{8}{3} \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi \cdot \cos \beta}$$

Lai varētu salīdzināt pēc formulām (10a) iegūtos rezultātus ar tiem pašiem Heka darbā, mēs formulās (10a) aizvietosim  $l$  ar  $3r$ , jo pie  $\lambda = \frac{1}{3}$  iznāk  $\frac{r}{l} = \frac{1}{3}$ ; jeb  $l = 3r$  un izteiksim gala rezultātā attiecības

$$\frac{\xi_\gamma}{r} = \frac{r_{\gamma\sigma}}{r} \cos(\beta - \gamma) \text{ un } \frac{\eta_\gamma}{r} = \frac{r_{\gamma\sigma}}{r} \cdot \sin(\beta - \gamma),$$

kur  $r_{\gamma\sigma} = 3r [\sin(\beta - \gamma) \cdot \operatorname{ctg} \varphi + \cos(\beta - \gamma)]$ .

Formulas (10) un (10a) pie  $\varphi = 0^\circ$  un  $\varphi = 180^\circ$  dod lielumam  $\frac{\xi_\gamma}{r}$  nenoteiktu vērtību, jo iznāk

$$\frac{\xi_\gamma}{r} = 3 \left[ \sin(\beta - \gamma) \cdot \operatorname{ctg} \varphi + \cos(\beta - \gamma) \right] \cdot \cos(\beta - \gamma) = 3 \cdot [0 \cdot \infty + 1] \cdot 1.$$

Lai atrastu šīs nenoteiktības īsto vērtību pie  $\varphi = 0^\circ$  un  $\varphi = 180^\circ$ , sastādīsim

$$\frac{d \sin(\beta - \gamma)}{d \operatorname{tg} \varphi} = \frac{\cos(\beta - \gamma) (d\beta - d\gamma)}{\frac{1}{\cos^2 \varphi} \cdot d\varphi} = \cos(\beta - \gamma) \cos^2 \varphi \left( \frac{d\beta}{d\varphi} - \frac{d\gamma}{d\varphi} \right).$$

$$\frac{d\beta}{d\varphi} \text{ dabūsim, diferencējot formulu } \sin \beta = \lambda \sin \varphi;$$

$$\cos \beta \cdot d\beta = \lambda \cos \varphi \cdot d\varphi, \text{ no kurienes } \frac{d\beta}{d\varphi} = \lambda \frac{\cos \varphi}{\cos \beta};$$

$$\frac{d\gamma}{d\varphi} \text{ dabūsim, diferencējot } \operatorname{tg} \gamma \text{ pēc formulas (9a):}$$

I. tabula leŭku  $\beta$  un  $\gamma$  notelksanai.

Nr.	$\varphi$	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$\lambda \sin \varphi$	$\lambda^2 \sin^2 \varphi$	$1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi$	$\frac{\cos \beta =}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}}$	$\beta$	$\cos^2 \varphi$	$\operatorname{tg} \gamma = \frac{8 \sin \varphi}{3 \cos^2 \varphi \cdot \cos \beta}$	$\gamma$
1	0°	0	1	0	0	1	1	0°	1	0	0°
2	7° 30'	0,1305	0,991	0,0435	0,001892	0,998108	0,9991	2° 20'	0,9821	— 0,355	— 19° 30'
3	15°	0,259	0,966	0,086	0,0074	0,9926	0,9963	4° 50'	0,9331	— 0,7425	— 36° 40'
4	22° 30'	0,383	0,924	0,1276	0,01626	0,98374	0,9918	7° 20'	0,8538	— 1,208	— 50° 20'
5	30°	0,500	0,866	0,167	0,02789	0,97211	0,9860	9° 40'	0,7499	— 1,808	— 61°
6	45°	0,707	0,707	0,236	0,05567	0,94433	0,9722	13° 30'	0,4998	— 3,896	— 75° 40'
7	60°	0,866	0,500	0,289	0,08352	0,91648	0,9574	16° 50'	0,2500	— 9,650	— 83° 55'
8	75°	0,966	0,259	0,322	0,10368	0,89632	0,9473	18° 40'	0,0671	— 40,50	— 88° 40'
9	90°	1	0	0,333	0,11089	0,88911	0,9440	19° 20'	0	— ∞	— 90°
10	105°	0,966	— 0,259	0,322	0,10368	0,89632	0,9473	18° 40'	0,0671	— 40,50	— 88° 40'
11	120°	0,866	— 0,500	0,289	0,08352	0,91648	0,9574	16° 50'	0,2500	— 9,650	— 83° 55'
12	135°	0,707	— 0,707	0,236	0,05567	0,94433	0,9722	13° 30'	0,4998	— 3,896	— 75° 40'
13	150°	0,500	— 0,866	0,167	0,02789	0,97211	0,9860	9° 40'	0,7499	— 1,808	— 61°
14	157° 30'	0,383	— 0,924	0,1276	0,01626	0,98374	0,9918	7° 20'	0,8538	— 1,208	— 50° 20'
15	165°	0,259	— 0,966	0,086	0,0074	0,9926	0,9963	4° 50'	0,9331	— 0,7425	— 36° 40'
16	172° 30'	0,1305	— 0,991	0,0435	0,001892	0,998108	0,9991	2° 20'	0,9821	— 0,355	— 19° 30'
17	180°	0	— 1	0	0	1	1	0°	1	0	0°

II. tabula paātrinājuma centra koordinātu noteikšanai kustošā plāknē.

Punktu №.№.	$\varphi$	$\beta$	$\gamma$	$\beta - \gamma$	$\sin(\beta - \gamma)$	$\cos(\beta - \gamma)$	$\operatorname{ctg} \varphi$	$\frac{r_{\gamma\sigma}}{r}$	$\frac{\xi_{\gamma}}{r}$	$\frac{\eta_{\gamma}}{r}$
1	0°	0°	0°	0°	0	1	$\infty$	12	12	0
2	7° 30'	2° 20'	-19° 30'	21° 50'	0,372	0,928	7,596	11,28	10,49	4,20
3	15°	4° 50'	-36° 40'	41° 30'	0,663	0,749	3,732	9,672	7,25	6,42
4	22° 30'	7° 20'	-50° 20'	57° 40'	0,845	0,535	2,414	7,725	4,13	6,53
5	30°	9° 40'	-61°	70° 40'	0,944	0,331	1,732	5,898	1,952	5,56
6	45°	13° 30'	-75° 40'	89° 10'	0,99899	0,0145	1,000	3,013	0,0436	3,013
7	60°	16° 50'	-83° 55'	100° 45'	0,9824	-0,186	0,577	1,143	-0,213	1,124
8	75°	18° 40'	-88° 40'	107° 20'	0,954	-0,298	0,268	-0,126	0,0376	-0,1204
9	90°	19° 20'	-90°	109° 20'	0,9440	-0,331	0	-0,993	0,329	-0,938
10	105°	18° 40'	-88° 40'	107° 20'	0,954	-0,298	-0,268	-1,662	0,496	-1,587
11	120°	16° 50'	-83° 55'	100° 45'	0,9824	-0,186	-0,577	-2,259	0,42	-2,219
12	135°	13° 30'	-75° 40'	89° 10'	0,99989	0,0145	-1,000	-2,956	-0,0428	-2,956
13	150°	9° 40'	-61°	70° 40'	0,944	0,331	-1,732	-3,912	-1,295	-3,69
14	157° 30'	7° 20'	-50° 20'	57° 40'	0,845	0,535	-2,414	-4,515	-2,415	-3,81
15	165°	4° 50'	-36° 40'	41° 30'	0,663	0,749	-3,732	-5,178	-3,88	-3,69
16	172° 30'	2° 20'	-19° 30'	21° 50'	0,372	0,928	-7,596	-5,652	-5,26	-2,105
17	180°	0°	0°	0°	0	1	$-\infty$	-6,0	-6,0	0

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma &= -\frac{1-\lambda^2}{\lambda} \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 \varphi}} \\ \frac{d\gamma}{\cos^2 \gamma} &= -\frac{1-\lambda^2}{\lambda} d \left[ \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 \varphi}} \right] \\ \frac{d\gamma}{\cos^2 \gamma} &= -\frac{1-\lambda^2}{\lambda} \cdot \\ & \frac{\cos^2 \varphi \sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 \varphi} \cdot \cos \varphi - \sin \varphi \left[ \frac{-2\lambda^2 \sin \varphi \cos \varphi}{2\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 \varphi}} \cos^2 \varphi - 2 \cos \varphi \sin \varphi \sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 \varphi} \right]}{\cos^4 \varphi (1-\lambda^2 \sin^2 \varphi)} d\varphi; \\ \frac{d\gamma}{d\varphi} &= -\frac{1-\lambda^2}{\lambda} \cdot \cos^2 \gamma \cdot \\ & \frac{\cos^3 \varphi (1-\lambda^2 \sin^2 \varphi) - \sin \varphi [-\lambda^2 \sin \varphi \cos^3 \varphi - 2 \sin \varphi \cos \varphi (1-\lambda^2 \sin^2 \varphi)]}{\cos^4 \varphi (1-\lambda^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}; \end{aligned}$$

$$\text{pie } \varphi = 0^\circ$$

$$\frac{d\gamma}{d\varphi} = -\frac{1-\lambda^2}{\lambda} \cdot 1 \cdot \frac{1-0}{1} = -\frac{1-\frac{1}{9}}{1} = -\frac{8}{9};$$

$$\text{pie } \varphi = 180^\circ$$

$$\frac{d\gamma}{d\varphi} = -\frac{1-\lambda^2}{\lambda} \cdot 1 \cdot \frac{-1-0}{1} = +\frac{1-\frac{1}{9}}{1} = +\frac{8}{9};$$

$$\begin{aligned} \left[ \sin(\beta - \gamma) \operatorname{ctg} \varphi \right]_{\varphi=0^\circ} &= \left[ \cos(\beta - \gamma) \cos^2 \varphi \left( \lambda \frac{\cos \varphi}{\cos \beta} - \frac{d\gamma}{d\varphi} \right) \right]_{\varphi=0^\circ} = \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \left( \frac{1}{3} + \frac{8}{9} \right) = 3; \end{aligned}$$

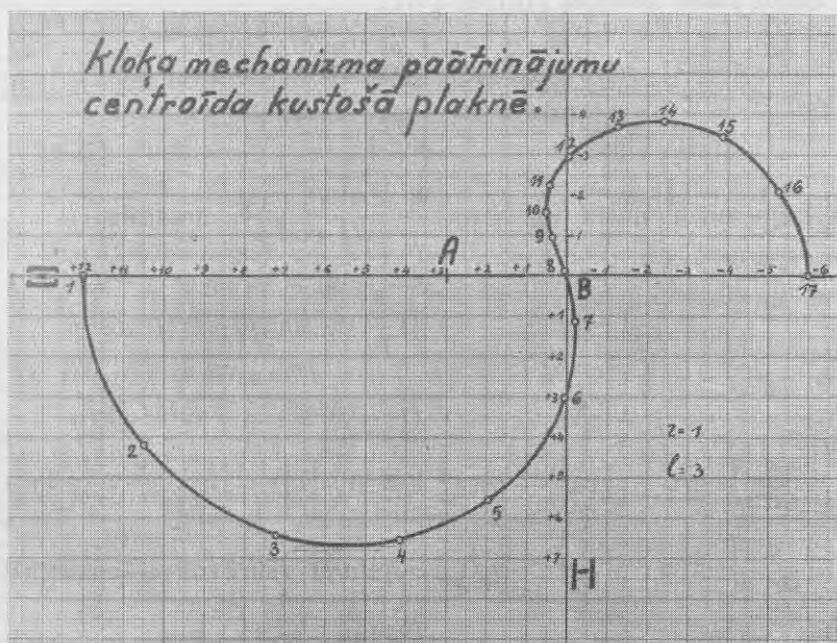
$$\begin{aligned} \left[ \sin(\beta - \gamma) \operatorname{ctg} \varphi \right]_{\varphi=180^\circ} &= \left[ \cos(\beta - \gamma) \cos^2 \varphi \left( \lambda \frac{\cos \varphi}{\cos \beta} - \frac{d\gamma}{d\varphi} \right) \right]_{\varphi=180^\circ} = \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \left( -\frac{1}{3} - \frac{8}{9} \right) = -3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\xi_\gamma}{r} \right]_{\varphi=0^\circ} &= 3 \left[ \sin(\beta - \gamma) \operatorname{ctg} \varphi + \cos(\beta - \gamma) \right]_{\varphi=0^\circ} \cdot \left[ \cos(\beta - \gamma) \right]_{\varphi=0^\circ} = \\ &= 3[3+1] \cdot 1 = 12; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\xi_\gamma}{r} \right]_{\varphi=180^\circ} &= 3 \left[ \sin(\beta - \gamma) \operatorname{ctg} \varphi + \cos(\beta - \gamma) \right]_{\varphi=180^\circ} \cdot \left[ \cos(\beta - \gamma) \right]_{\varphi=180^\circ} = \\ &= 3(-3+1) \cdot 1 = -6. \end{aligned}$$

Tabulā II. iegūtās skaitliskās vērtības, kā redzams, ļoti labi sakrīt ar Heka darbā atrastiem rezultātiem.

Pēc atrastām koordinātām 7. zīm. ir konstruēta līkne, kuŗu kustošā plaknē apraksta paātrinājuma centrs  $\Gamma$  jeb paātrinājuma centroida kustošā plaknē.



7. zīm.

To pašu varētu konstruēt arī polārkoordinātās, ievērojot, ka tabulā II. trešā iedalījumā no labās puses ir atrastas radija-vektora attiecības

$$\frac{r_{\gamma\sigma}}{r}$$

un ka šis radijs-vektors ar taisni  $AB$  veido leņķi  $(\beta - \gamma)$ .

Lai zīmējums paliktu skaidrāks, otra puse, priekš  $\varphi$  no  $180^\circ$  līdz  $360^\circ$ , kuŗa ir simmetriskā pirmajai pusei, nav šeit iezīmēta.

**Pāreja no grafoanalitiskā ceļā iegūtām formulām (10) uz Heka formulām kloķa mēchanismam.**

Šinī darbā iegūtās formulas (10) un Heka darbā atrastās formulas (16) un (17) reprezentē viena un tā paša punkta, proti, paātrinājuma

centra  $\Gamma$  koordinātas kustošā plaknē, tā tad jādomā, ka tās ir identiskas, bet tikai izteiktas citādā veidā.

Tiešām, izdarot attiecīgos pārveidojumus, var no formulām (10) un (9) dabūt Heka formulas (16) un (17):

$$\begin{aligned}\xi_\gamma &= l \frac{\sin(\beta - \gamma + \varphi) \cdot \cos(\beta - \gamma)}{\sin \varphi} \\ \eta_\gamma &= l \frac{\sin(\beta - \gamma + \varphi) \cdot \sin(\beta - \gamma)}{\sin \varphi} \dots \dots \dots (10)\end{aligned}$$

Izejot no formulas (9):  $\operatorname{tg} \gamma = -\frac{(1 - \lambda^2) \sin \varphi}{\lambda H \cdot \cos^2 \varphi}$ , atradīsim

$$\sin \gamma = \pm \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma}} = -\frac{(1 - \lambda^2) \sin \varphi}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 \sin^2 \varphi + H^2 \lambda^2 \cos^4 \varphi}};$$

$$\cos \gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma}} = +\frac{H \lambda \cos^2 \varphi}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 \sin^2 \varphi + H^2 \lambda^2 \cos^4 \varphi}};$$

$$\xi_\gamma = \frac{l}{\sin \varphi} \left[ \sin(\varphi + \beta) \cos \gamma - \cos(\varphi + \beta) \sin \gamma \right] \cdot \left[ \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \right];$$

$$\eta_\gamma = \frac{l}{\sin \varphi} \left[ \sin(\varphi + \beta) \cos \gamma - \cos(\varphi + \beta) \sin \gamma \right] \cdot \left[ \sin \beta \cos \gamma - \cos \beta \sin \gamma \right].$$

Pārveidosim katru izteiksmi iekavās atsevišķi, ievērojot, ka

$$\cos \beta = H,$$

$$\sin \beta = \lambda \sin \varphi \text{ un } H^2 = 1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi;$$

$$\cos 2 \varphi + \lambda^2 \sin^4 \varphi = G;$$

$$\begin{aligned}\frac{l}{\sin \varphi} \left[ \sin(\varphi + \beta) \cos \gamma - \cos(\varphi + \beta) \sin \gamma \right] &= \frac{l}{\sin \varphi} \left[ (\sin \varphi \cos \beta + \right. \\ &\quad \left. + \cos \varphi \sin \beta) \cos \gamma - (\cos \varphi \cos \beta - \sin \varphi \sin \beta) \sin \gamma \right] = \\ &= \frac{l}{\sin \varphi} \left[ (H \sin \varphi + \lambda \sin \varphi \cos \varphi) \cos \gamma - (H \cos \varphi - \lambda \sin^2 \varphi) \sin \gamma \right] = \\ &= \frac{l}{\sin \varphi} \left[ \frac{(H + \lambda \cos \varphi) \sin \varphi \cdot H \lambda \cos^2 \varphi}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 \sin^2 \varphi + H^2 \lambda^2 \cos^4 \varphi}} + \frac{(H \cos \varphi - \lambda \sin^2 \varphi) (1 - \lambda^2) \sin \varphi}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 \sin^2 \varphi + H^2 \lambda^2 \cos^4 \varphi}} \right] = \\ &= l \cdot \frac{H^2 \lambda \cos^2 \varphi + H \lambda^2 \cos^3 \varphi + H \cos \varphi - H \lambda^2 \cos \varphi - \lambda \sin^2 \varphi + \lambda^3 \sin^2 \varphi}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 \sin^2 \varphi + H^2 \lambda^2 \cos^4 \varphi}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= l \cdot \frac{(1-\lambda^2 \sin^2 \varphi) \lambda \cos^2 \varphi - H \lambda^2 \cos \varphi (1 - \cos^2 \varphi) + H \cos \varphi - \lambda \sin^2 \varphi + \lambda^3 \sin^2 \varphi}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 \sin^2 \varphi + H^2 \lambda^2 \cos^4 \varphi}} = \\
&= l \frac{\lambda \cos^2 \varphi - \lambda^3 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - H \lambda^2 \cos \varphi \sin^2 \varphi + H \cos \varphi - \lambda \sin^2 \varphi + \lambda^3 \sin^2 \varphi}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 \sin^2 \varphi + H^2 \lambda^2 \cos^4 \varphi}} = \\
&= l \frac{\lambda (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + \lambda^3 \sin^2 \varphi (1 - \cos^2 \varphi) + H \cos \varphi (1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi)}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 \sin^2 \varphi + H^2 \lambda^2 \cos^4 \varphi}} = \\
&= l \frac{\lambda (\cos 2\varphi + \lambda^2 \sin^4 \varphi) + H \cos \varphi \cdot H^2}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 \sin^2 \varphi + H^2 \lambda^2 \cos^4 \varphi}} = l \frac{\lambda \cdot G + H^3 \cos \varphi}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 \sin^2 \varphi + H^2 \lambda^2 \cos^4 \varphi}};
\end{aligned}$$

Tagad pārveidosim  $\cos(\beta - \gamma) = \cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma =$   
 $= H \cdot \cos \gamma + \lambda \sin \varphi \cdot \sin \gamma =$

$$\begin{aligned}
&= \frac{H^2 \lambda \cos^2 \varphi}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 \sin^2 \varphi + H^2 \lambda^2 \cos^4 \varphi}} - \frac{\lambda \sin \varphi (1 - \lambda^2) \sin \varphi}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 \sin^2 \varphi + H^2 \lambda^2 \cos^4 \varphi}} = \\
&= \frac{H^2 \lambda \cos^2 \varphi - \lambda \sin^2 \varphi + \lambda^3 \sin^2 \varphi}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 \sin^2 \varphi + H^2 \lambda^2 \cos^4 \varphi}} = \frac{(1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi) \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + \lambda^2 \sin^2 \varphi}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 \sin^2 \varphi + H^2 \lambda^2 \cos^4 \varphi}} \cdot \lambda = \\
&= \frac{\cos 2\varphi + \lambda^2 \sin^2 \varphi (1 - \cos^2 \varphi)}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 \sin^2 \varphi + H^2 \lambda^2 \cos^4 \varphi}} \lambda = \frac{\cos 2\varphi + \lambda^2 \sin^4 \varphi}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 \sin^2 \varphi + H^2 \lambda^2 \cos^4 \varphi}} \lambda = \\
&= \frac{G \lambda}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 \sin^2 \varphi + H^2 \lambda^2 \cos^4 \varphi}}.
\end{aligned}$$

Tālāk pārveidosim vēl:

$$\begin{aligned}
&\sin(\beta - \gamma) = \sin \beta \cos \gamma - \cos \beta \sin \gamma = \lambda \sin \varphi \cos \gamma - H \cdot \sin \gamma = \\
&= \frac{\lambda \sin \varphi \cdot H \lambda \cdot \cos^2 \varphi}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 \sin^2 \varphi + H^2 \lambda^2 \cos^4 \varphi}} + \frac{H(1-\lambda^2) \sin \varphi}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 \sin^2 \varphi + H^2 \lambda^2 \cos^4 \varphi}} = \\
&= \frac{H \lambda^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi + H \sin \varphi - H \lambda^2 \sin \varphi}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 \sin^2 \varphi + H^2 \lambda^2 \cos^4 \varphi}} = \frac{H \sin \varphi - H \lambda^2 \sin \varphi (1 - \cos^2 \varphi)}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 \sin^2 \varphi + H^2 \lambda^2 \cos^4 \varphi}} = \\
&= \frac{H \sin \varphi (1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi)}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 \sin^2 \varphi + H^2 \lambda^2 \cos^4 \varphi}} = \frac{H^3 \sin \varphi}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 \sin^2 \varphi + H^2 \lambda^2 \cos^4 \varphi}}.
\end{aligned}$$

Ievietojot pārveidotās izteiksmes  $\xi_\gamma$  un  $\eta_\gamma$  formulās, dabūsim Heka formulas (16) un (17):

$$\begin{aligned}
\xi_\gamma &= D \lambda \frac{(\lambda G + H^3 \cos \varphi) G}{(1-\lambda^2)^2 \sin^2 \varphi + H^2 \lambda^2 \cos^4 \varphi} = r \frac{H^3 \cos \varphi + \lambda G}{\lambda^2 H^2 \cos^4 \varphi + (1-\lambda^2)^2 \sin^2 \varphi} G; \\
\eta_\gamma &= l \frac{\lambda G + H^3 \cos \varphi}{(1-\lambda^2)^2 \sin^2 \varphi + H^2 \lambda^2 \cos^4 \varphi} H^3 \sin \varphi = r \frac{H^3 \cos \varphi + \lambda G}{\lambda^2 H^2 \cos^4 \varphi + (1-\lambda^2)^2 \sin^2 \varphi} \cdot \frac{H^3 \sin \varphi}{\lambda}.
\end{aligned}$$

**Kloča mēchanisma paātrinājuma centra noteikšana nekustošā plaknē.**

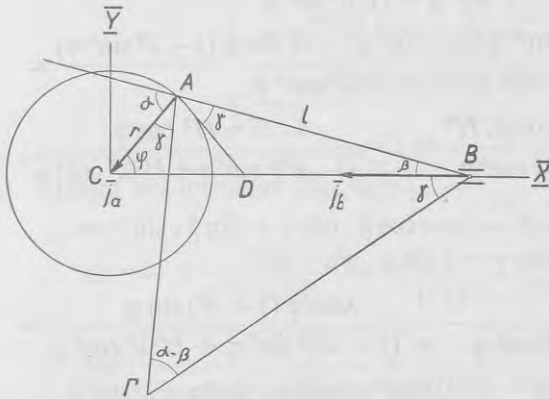
Izvēlēsim koordinātu sākumu kloča centrā  $C$  un  $\overline{X}$  asi  $CB$  virzienā.

Punkta  $B$  paātrinājums izpaužas pēc iepriekšējās formulas (8):

$$j_b = -r \left( \cos \varphi + \lambda \frac{G}{H^3} \right),$$

kur  $G = \cos 2\varphi + \lambda^2 \sin^4 \varphi$   
un  $H = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}$ .

Pie vienmērīgās griezes punkta  $A$  paātrinājuma vektora gala punkts arvienu sakritis ar punktu  $C$ .



8. zīm.

Konstruējot  $\overline{AD} = \overline{j_a} - \overline{j_b}$ , dabūsim leņķi  $\gamma$ , kuŗu veido  $AD$  ar taisni  $AB$ . Atliekot tanī pašā virzienā  $\angle \gamma$  no paātrinājumu vektoriem  $\overline{j_a}$  un  $\overline{j_b}$ , dabūsim krustošanās punktā paātrinājuma centru  $\Gamma$ .

Lai dabūtu punkta  $\Gamma$  koordinātas nekustošā sistēmā, atradīsim, pirmkārt, no trijstūra  $AB\Gamma$  pēc sinu teorēmas garumu  $A\Gamma$ :

$$\frac{A\Gamma}{\sin(\beta + \gamma)} = \frac{l}{\sin(\alpha - \beta)}, \text{ no kurienes } A\Gamma = l \frac{\sin(\beta + \gamma)}{\sin \varphi}$$

$A\Gamma$  veido ar nekustošo  $\overline{X}$  asi leņķi  $\varphi + \gamma$ , tā tad

$$x_\gamma = r \cdot \cos \varphi - A\Gamma \cos(\varphi + \gamma)$$

$$y_\gamma = r \cdot \sin \varphi - A\Gamma \sin(\varphi + \gamma)$$

un ievietojot  $A\Gamma$ , dabūsim galīgi:

$$x_\gamma = r \cdot \cos \varphi - l \frac{\sin(\beta + \gamma)}{\sin \varphi} \cos(\varphi + \gamma) \dots \dots \dots (11)$$

$$y_\gamma = r \cdot \sin \varphi - l \frac{\sin(\beta + \gamma)}{\sin \varphi} \sin(\varphi + \gamma)$$

Formulām (11) vēl jāpievieno  $\text{tg } \gamma$  izteiksme pēc formulas (9), kas nav atkarīga no koordinātu sistēmas izvēles un kas tagad jāraksta ar pozitīvo zīmi, jo formulās (11) leņķis  $\gamma$  ievests pēc absolūtā lieluma:



III. tabula paātrinājuma centra koordinātu noteikšanai nekustošā plaknē.

Nē	$\varphi$	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$\beta$	$\gamma$	$\beta + \gamma$	$\varphi + \gamma$	$\sin(\beta + \gamma)$	$\sin(\varphi + \gamma)$	$\cos(\varphi + \gamma)$	$\frac{x_{\gamma}}{r}$	$\frac{y_{\gamma}}{r}$
1	0°	0	1	0°	0°	0°	0°	0	0	1	-8	0
2	7° 30'	0,1305	0,991	2° 20'	19° 30'	21° 50'	27°	0,372	0,454	0,891	-6,629	-3,75
3	15°	0,259	0,966	4° 50'	36° 40'	41° 30'	51° 40'	0,663	0,784	0,620	-3,794	-5,761
4	22° 30'	0,383	0,924	7° 20'	50° 20'	57° 40'	72° 50'	0,845	0,955	0,295	-1,026	-5,937
5	30°	0,500	0,866	9° 40'	61°	70° 40'	91°	0,944	0,9998	-0,0174	+0,954	-5,16
6	45°	0,707	0,707	13° 30'	75° 40'	89° 10'	120° 40'	0,99989	0,860	-0,510	2,867	-2,941
7	60°	0,866	0,500	16° 50'	83° 55'	100° 45'	143° 55'	0,9824	0,589	-0,808	3,250	-1,140
8	75°	0,966	0,259	18° 40'	88° 40'	107° 20'	163° 40'	0,954	0,281	-0,960	3,102	+0,133
9	90°	1	0	19° 20'	90°	109° 20'	180°	0,9440	0	-1,000	2,832	1,000
10	105°	0,966	-0,259	18° 40'	88° 40'	107° 20'	193° 40'	0,954	-0,236	-0,972	2,621	1,666
11	120°	0,866	-0,500	16° 50'	83° 55'	100° 45'	203° 55'	0,9824	-0,405	-0,914	2,61	2,244
12	135°	0,707	-0,707	13° 30'	75° 40'	89° 10'	210° 40'	0,99989	-0,510	-0,860	2,943	2,868
13	150°	0,500	-0,866	9° 40'	61°	70° 40'	211°	0,944	-0,515	-0,857	3,994	3,42
14	157° 30'	0,383	-0,924	7° 20'	50° 20'	57° 40'	207° 50'	0,845	-0,467	-0,884	4,926	3,473
15	165°	0,259	-0,966	4° 50'	36° 40'	41° 30'	201° 40'	0,663	-0,369	-0,929	6,174	3,097
16	172° 30'	0,1305	-0,991	2° 20'	19° 30'	21° 50'	192°	0,372	-0,208	-0,978	7,38	1,91
17	180°	0	-1	0°	0°	0°	180°	0	0	-1	8	0

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{(1 - \lambda^2) \sin \varphi}{\lambda H \cdot \cos^2 \varphi} \dots \dots \dots (12)$$

Ar formulām (11) un (12) paātrinājuma centrs nekustošā plaknē ir pilnīgi noteikts.

### Paātrinājuma centroidas noteikšana nekustošā plaknē.

Izlietosim formulas (11) un (12) tam pašam konkrētam gadījumam:  $\lambda = \frac{1}{3}$  un atradīsim  $x_\gamma$  un  $y_\gamma$  atkarībā no leņķa  $\varphi$ , no  $\varphi = 0^\circ$  līdz  $\varphi = 180^\circ$ .

Ievērojot, ka sakars starp leņķiem  $\beta$  un  $\varphi$  ir izteikts ar tām pašām formulām, kā agrāk:

$\cos \beta = H = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}$  un  $\sin \beta = \lambda \sin \varphi$   
varam  $\beta$  vērtības paņemt no tabulas I.

Tas pats ir sakāms attiecībā uz  $\gamma$ , bet tikai tagad šis leņķis jāņem pēc absolūtas vērtības.

Tāpat kā agrāk, formulā (11) pie  $\varphi = 0^\circ$  un  $\varphi = 180^\circ$  lielums  $\frac{x_\gamma}{r}$  kļūst nenoteikts, jo

$$\frac{x_\gamma}{r} = \cos \varphi - 3 \frac{\sin(\beta + \gamma)}{\sin \varphi} \cos(\varphi + \gamma) = 1 - 3 \frac{0}{0} \cdot 1.$$

Lai atrastu šās nenoteiktības īsto vērtību pie  $\varphi = 0^\circ$  un  $\varphi = 180^\circ$ , sastādīsim

$$\frac{d \sin(\beta + \gamma)}{d \sin \varphi} = \frac{\cos(\beta + \gamma) (d\beta + d\gamma)}{\cos \varphi \cdot d\varphi} = \frac{\cos(\beta + \gamma)}{\cos \varphi} \left( \frac{d\beta}{d\varphi} + \frac{d\gamma}{d\varphi} \right).$$

$$\frac{d\beta}{d\varphi} \text{ dabūsim, diferencējot formulu } \sin \beta = \lambda \sin \varphi;$$

$$\cos \beta \cdot d\beta = \lambda \cos \varphi \cdot d\varphi, \text{ no kurienes } \frac{d\beta}{d\varphi} = \lambda \frac{\cos \varphi}{\cos \beta};$$

$$\frac{d\gamma}{d\varphi} \text{ dabūsim diferencējot formulu (12): } \operatorname{tg} \gamma = \frac{(1 - \lambda^2) \sin \varphi}{\lambda \cos^2 \varphi \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}},$$

no kurienes iznāk tāpat kā agrāk:

$$\frac{d\gamma}{d\varphi} = \frac{1 - \lambda^2}{\lambda} \cos^3 \gamma \cdot \frac{\cos^3 \varphi (1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi) - \sin \varphi [-\lambda^2 \sin \varphi \cos^3 \varphi - 2 \sin \varphi \cos \varphi (1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi)]}{\cos^4 \varphi (1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}};$$

pie  $\varphi = 0^\circ$

$$\frac{d\gamma}{d\varphi} = \frac{1-\lambda^2}{\lambda} \cdot 1 \cdot \frac{1-0}{1} = \frac{1-\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{8}{3};$$

pie  $\varphi = 180^\circ$

$$\frac{d\gamma}{d\varphi} = \frac{1-\lambda^2}{\lambda} \cdot 1 \cdot \frac{-1-0}{1} = -\frac{1-\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = -\frac{8}{3};$$

$$\left[ \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\varphi} \right]_{\varphi=0^\circ} = \left[ \frac{\cos(\beta+\gamma)}{\cos\varphi} \right]_{\varphi=0^\circ} \cdot \left[ \lambda \frac{\cos\varphi}{\cos\beta} + \frac{d\gamma}{d\varphi} \right]_{\varphi=0^\circ} = 1 \left( \frac{1}{3} + \frac{8}{3} \right) = 3;$$

$$\left[ \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\varphi} \right]_{\varphi=180^\circ} = \left[ \frac{\cos(\beta+\gamma)}{\cos\varphi} \right]_{\varphi=180^\circ} \cdot \left[ \lambda \frac{\cos\varphi}{\cos\beta} + \frac{d\gamma}{d\varphi} \right]_{\varphi=180^\circ} = -1 \left( -\frac{1}{3} - \frac{8}{3} \right) = 3;$$

$$\left[ \frac{x_\gamma}{r} \right]_{\varphi=0^\circ} = \left[ \cos\varphi - 3 \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\varphi} \cos(\varphi+\gamma) \right]_{\varphi=0^\circ} = 1 - 3 \cdot 3 \cdot 1 = -8;$$

$$\left[ \frac{x_\gamma}{r} \right]_{\varphi=180^\circ} = \left[ \cos\varphi - 3 \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\varphi} \cos(\varphi+\gamma) \right]_{\varphi=180^\circ} = -1 - 3 \cdot 3 \cdot (-1) = 8.$$

Pēc III. tabulā iegūtiem skaitļiem 9. zīm. ir konstruēta paātrinājuma centroida nekustošā plaknē. Turpat ir iezīmēta punkta  $A$  trajektorija, kas ir riņķis ar radiju  $r$ . Punkts  $B$  slīd uz  $\bar{X}$  ass. Tie paši punkti ir atzīmēti kustošā plaknē 7. zīm. Ja novietosim kustošās plaknes punktu  $A$  vienā no trajektorijas iedalījumiem, atstājot punktu  $B$  uz  $\bar{X}$  ass, tad 2 attiecīgie centroidu punkti, kas apzīmēti ar to pašu skaitli, sakrītīs.

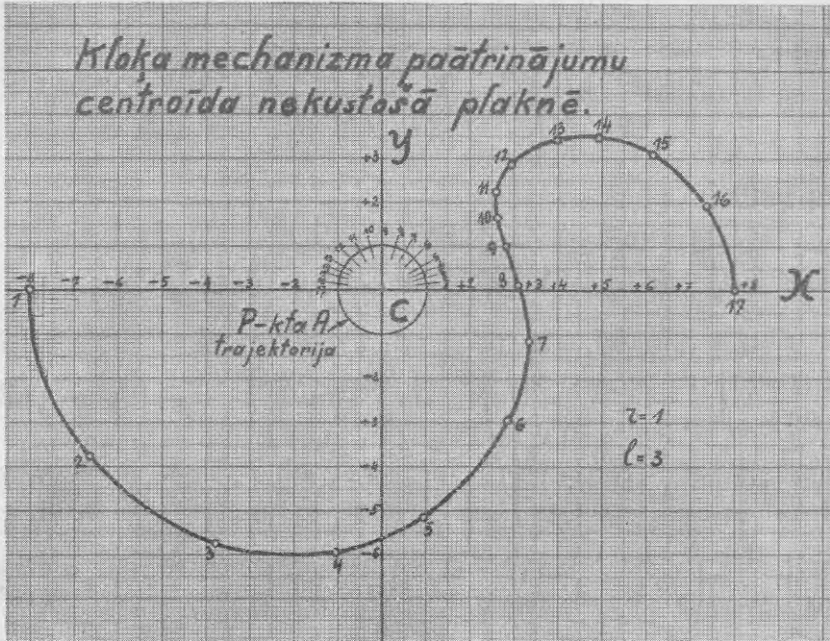
Salīdzinot ar grafisko konstrukciju, aprakstītās grafoanalītiskās metodes priekšrocības ir šādas:

1) rezultātu var atrast ar to pašu noteiktību, ar kuŗu doti punktu  $A$  un  $B$  paātrinājumi un to virzieni;

2) šie rezultāti ir neatkarīgi no zīmēšanas precizitātes;

3) iespējams atrast paātrinājuma centru tad, kad tas iznāk ārpus zīmējuma robežām;

4) dažos gadījumos var arī analītiski atrast likumu, pēc kuŗa pārvietojas paātrinājuma centrs ar laiku, neizvedot vairākkārtīgas paātrinājuma centra konstrukcijas.



9. zīm.

Salīdzinot ar kompleksu skaitļu metodi, grafoanalītiskās metodes priekšrocības ir šādas:

1) kā tas redzams II. piemērā, rezultātā iznāk daudz vienkāršākas formulas;

2) tikpat viegli var atrast pātrinājuma centroidu nekustošā plaknē, kā arī kustošā, kas ar kompleksu skaitļu metodi Heka darbā nemaz nav izdarīts.

Iesniegts fakultātei 1934. g. 21. septembrī.

# Eine graphoanalytische Methode zur Bestimmung des Beschleunigungszentrums in der komplanen Bewegung.

*N. Rosenauer.*

## **Autoreferat.**

Es ist bekannt, dass die rein analytische Bestimmung des Beschleunigungszentrums ziemlich umständlich ist. Die graphischen Konstruktionen sind viel einfacher, haben aber den Nachteil, dass sie nicht anwendbar sind, wenn der betreffende Punkt sich ausserhalb der Zeichnung befindet, und geben ungenaue Lösungen, falls sich die Geraden unter einem kleinen Winkel schneiden.

In der vorliegenden Arbeit ist eine graphoanalytische Methode entwickelt, die die Einfachheit der graphischen und die Genauigkeit der analytischen Methode besitzt. Die Idee, die dieser Methode zu Grunde liegt, besteht darin, dass aus einer graphischen Konstruktion die Koordinaten des Beschleunigungszentrums analytisch hergeleitet werden. Die gefundenen Formeln kann man auch dann anwenden, wenn die graphische Konstruktion kein befriedigendes Resultat gibt. Dieselbe Methode gibt auch die Möglichkeit, die Beschleunigungszentroiden in der beweglichen Ebene, sowie auch in der unbeweglichen Ebene zu bestimmen. Es ist selbstverständlich, dass man dieselbe Idee mit Erfolg nicht nur zur Bestimmung des Beschleunigungszentrums, sondern auch in anderen Fällen benutzen kann.

Zur Lösung der behandelten Frage wurde ein Satz von Žukovsky benutzt, welcher in der deutschen Literatur nicht bekannt ist und wie folgt lautet: „Die geometrische Differenz der Beschleunigungen zweier Punkte bildet mit der Geraden, welche diese beiden Punkte verbindet, denselben Winkel  $\gamma$ , welchen der Beschleunigungsvektor eines jeden Punktes mit der Geraden, die den Punkt mit dem Beschleunigungszentrum verbindet, bildet“. Aus den in der Arbeit betrachteten Beispielen ist es ersichtlich, dass es

viel einfacher ist, die Koordinaten des Beschleunigungszentrums aus den verhältnismässig einfachen Formeln zu errechnen, als die graphische Konstruktion viele Mal zu wiederholen.

Mit derselben Frage der Bestimmung des Beschleunigungszentrums hat sich auch O. Heck befasst, dessen Arbeit: „Darstellung von Beschleunigungsfeldern durch komplexe Zahlen“ im „Ingenieur-Archiv“, Bd. III, Heft 5 im Jahre 1932 veröffentlicht ist. O. Heck löst diese Frage mit Hilfe von komplexen Zahlen. Die Lösung (von O. Heck) ist nicht schwierig, jedoch sind die Endformeln, zum Beispiel für den Kurbelmechanismus, ziemlich kompliziert; ausserdem ist auch die Bestimmung der Beschleunigungszentroide in der unbeweglichen Ebene bei O. Heck nicht durchgeführt. Dagegen gibt die graphoanalytische Methode des Verfassers die Möglichkeit, die unbewegliche Zentroide ebenso einfach zu bestimmen wie die bewegliche. Auch sind die Endformeln, zum Beispiel für den Kurbelmechanismus, viel einfacher.

## Das Reziprozitätsgesetz in der Statik ebener Punkt- und Geradensysteme.

A. Labutīn.

Nach einem Fundamentalsatze der projektiven Geometrie sind Punkte und Gerade in der Ebene reziproke Begriffe und entspricht jedem geometrischen Satze, der sich auf ein ebenes Punktsystem bezieht, ein reziproker Satz für ein ebenes Geradensystem und umgekehrt. Wie weiter gezeigt werden soll, kann dieser reziproken Verwandtschaft zwischen Punkten und Geraden auch eine statische Deutung gegeben werden, so dass auch je zwei Sätze der Statik, die sich auf Punkte, resp. Gerade in der Ebene beziehen, in einem solchen reziproken Verhältnis zu einander stehen.

Die Spannung in einem Punkte des Querschnittes eines prismatischen Körpers, welcher durch eine äussere Kraft senkrecht zum Querschnitte exzentrisch beansprucht ist, berechnet sich bekanntlich nach der Formel:

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M_x y}{J_x} + \frac{M_y x}{J_y}.$$

In dieser Formel bezeichnen:

- $P$  — die äussere Kraft,
- $M_x, M_y$  — die Momente derselben in Bezug auf die Hauptachsen  $x$  und  $y$ ,
- $F$  — die Grösse des Querschnittes,
- $J_x, J_y$  — die Hauptträgheitsmomente desselben,
- $x, y$  — die auf die Hauptachsen bezogenen Koordinaten eines Punktes, in welchem die Spannung  $\sigma$  gesucht ist.

Ist der Querschnitt kein kontinuierlicher, sondern besteht er aus einzelnen kleinen Flächen, deren Querdimensionen im Verhältnis zu ihren gegenseitigen Abständen klein sind, so kann derselbe als ein

System einer begrenzten Anzahl von Punkten, in welchen die Massen der einzelnen kleinen Flächen konzentriert sind, aufgefasst werden. Es ist dann die auf einen Punkt entfallende Teilkraft:

$$N = P \frac{f}{\Sigma f} + M_x \frac{fy}{\Sigma fy^2} + M_y \frac{fx}{\Sigma fx^2},$$

wenn  $f$  — die Grösse der einem Punkte entsprechenden kleinen Fläche ist und  $\Sigma fy^2$ ,  $\Sigma fx^2$  — wie oben, die Hauptträgheitsmomente des Punktsystemes sind.

Diese Formel kann verallgemeinert werden, wenn in ihr anstatt  $f$  die Grössen  $u = \frac{Ef}{l}$  eingesetzt werden, was der Annahme entspricht, dass die als Punkte gedachten einzelnen kleinen Flächen Querschnitte prismatischer Körper mit Elastizitätskoeffizienten  $E$  und von Längen  $l$  sind;  $u$  ist eine Kraft, welche in der Achse eines solchen prismatischen Körpers wirkt und eine Änderung der ursprünglichen Länge desselben von der Grösse 1 hervorruft. Die Formel lautet dann:

$$N = P \frac{u}{\Sigma u} + M_x \frac{uy}{\Sigma uy^2} + M_y \frac{ux}{\Sigma ux^2} \dots \dots \dots 1.$$

Nach Teilung durch  $u$  ergibt sich die Verschiebung eines Punktes senkrecht zur Ebene des Punktsystemes:

$$\lambda = \frac{N}{u} = P \frac{1}{\Sigma u} + M_x \frac{y}{\Sigma uy^2} + M_y \frac{x}{\Sigma ux^2} \dots \dots \dots 1^a.$$

In diesen Formeln sind:

$\Sigma u$  — eine Kraft, welcher eine Verschiebung aller Punkte um die Grösse 1 entspricht,

$ux, uy$  — Kräfte, welche im Punkte  $x, y$  des Systemes angreifen und eine Verschiebung dieses Punktes hervorrufen, die dem Abstände desselben von der  $y$ , resp.  $x$  Achse  $\lambda = x$ , resp.  $\lambda = y$  gleich,

$ux^2 = ux \cdot x, uy^2$  — die Momente dieser Kräfte in Bezug auf die  $y$ , resp.  $x$  Achse,

$\Sigma ux^2, \Sigma uy^2$  — Momente, welche in allen Punkten eine Verschiebung gleich den Abständen derselben von den Hauptachsen erzeugen.

Es lässt sich natürlich auch für die Grössen  $u$ , ebenso wie für die Flächen  $f$ , in der Ebene des Punktsystemes ein Punkt finden, welcher dem Schwerpunkte entspricht und als „Hauptpunkt“ bezeichnet werden



soll. Ebenso kann ein Paar durch diesen Hauptpunkt gehende „Hauptachsen“  $x$  und  $y$  bestimmt werden, für welche das „Zentrifugalmoment“  $\Sigma uxy = 0$  ist, und schliesslich kann analog der Trägheitseellipse eine Ellipse konstruiert werden, deren Halbachsen  $\sqrt{\Sigma ux^2 : \Sigma u}$  und  $\sqrt{\Sigma uy^2 : \Sigma u}$  in den Hauptachsen  $x$  und  $y$  liegen. Für diese Ellipse soll auch weiterhin die Bezeichnung „Trägheitseellipse“ beibehalten werden.

Ein ebenes Pfahlssystem kann andererseits als ebenes Geradensystem aufgefasst werden, wenn man annimmt, dass die Massen der einzelnen Pfähle in ihren Achsen konzentriert sind. Ein solches Geradensystem ist in geometrischem Sinne das reziproke Gebilde des oben erwähnten Punktsystemes. Prof. Nökkentved hat nachgewiesen, dass auch für ein ebenes Pfahlssystem ein „Hauptpunkt“, ein Paar „Hauptachsen“ und eine „Trägheitseellipse“ gefunden werden können<sup>1)</sup>. Bezeichnet man mit  $r$  — die Länge der Lote aus dem Hauptpunkte auf die einzelnen Pfahlachsen,

$\varphi$  — die Winkel zwischen diesen Loten und der Hauptachse  $x$ , so sind die Halbachsen der Trägheitseellipse  $\sqrt{\Sigma ur^2 : \Sigma u \cos^2 \varphi}$  und  $\sqrt{\Sigma ur^2 : \Sigma u \sin^2 \varphi}$

und die in einer Pfahlachse wirkende Teilkraft berechnet sich nach der Formel<sup>2)</sup>:

$$N = P_x \frac{u \sin \varphi}{\Sigma u \sin^2 \varphi} + P_y \frac{u \cos \varphi}{\Sigma u \cos^2 \varphi} + M \frac{ur}{\Sigma ur^2} \dots \dots \dots 2.$$

Wenn ausser den schon erwähnten Bezeichnungen bedeuten:

$P_x, P_y$  — die Projektionen der in der Ebene der Pfahlachsen liegenden äusseren Kraft  $P$  auf die Hauptachsen  $x$ , resp.  $y$ ,  
 $M$  — das Moment dieser Kraft in Bezug auf den Hauptpunkt.

Dividiert man die Formel 2 durch  $u$ , so geht sie über in:

$$\lambda = P_x \frac{\sin \varphi}{\Sigma u \sin^2 \varphi} + P_y \frac{\cos \varphi}{\Sigma u \cos^2 \varphi} + M \frac{r}{\Sigma ur^2} \dots \dots \dots 2^a.$$

<sup>1)</sup> Dr. tech. Nökkentved, „Berechnung von Pfahlrosten“, Verlag von Wilhelm Ernst und Sohn, 1928.

<sup>2)</sup> A. Labutin, „Die graphische Berechnung von Pfahlrosten für Kaimauern“, Acta Universitatis Latviensis. 1933.

In diesen Formeln sind:

- $u \sin \varphi, u \cos \varphi$  — Kräfte, welche in einer Pfahlachse wirken und welchen eine Längenänderung derselben  $\lambda = 1 \cdot \sin \varphi$ , resp.  $\lambda = 1 \cdot \cos \varphi$  entspricht. Unter dem Einflusse dieser Kräfte verschiebt sich der Pfahlkopf um die Länge 1 in der Richtung der  $x$  resp.  $y$  Achse,
- $u \sin^2 \varphi, u \cos^2 \varphi$  — die Projektionen dieser Kräfte auf die Hauptachsen  $x$  und  $y$ ,
- $\Sigma u \sin^2 \varphi, \Sigma u \cos^2 \varphi$  — die Summen dieser Projektionen, welchen eine Verschiebung aller Pfahlköpfe um die Länge 1 in der Richtung der  $x$ , resp.  $y$  Achse entspricht,
- $ur$  — eine Kraft, welche in einer Pfahlachse, deren Abstand vom Hauptpunkte gleich  $r$  ist, wirkt und welcher eine Längenänderung dieser Pfahlachse  $\lambda = r$  entspricht.
- $\Sigma ur^2 = \Sigma ur \cdot r$  — ein Moment in Bezug auf den Hauptpunkt, welches in allen Pfahlachsen eine Längenänderung gleich den Abständen derselben vom Hauptpunkte erzeugt.

Eine Analogie im Aufbau der Formeln 1 und 2 kann nicht bestritten werden. Beide Formeln bestehen aus 3 Gliedern, die im ersten Falle den Einfluss eines der äusseren Kraft  $P$  gleichwertigen Kraftsystemes, und zwar einer im Hauptpunkte angreifenden gleichgrossen Kraft  $P$  und zweier Momente  $M_x$  und  $M_y$ , auf die Teilkraft  $N$ , resp. die Verschiebung  $\lambda$  darstellen, im zweiten Falle die Anteile an den Gesamtgrössen  $N$  und  $\lambda$  charakterisieren, welche auf die in den Hauptachsen wirkenden Projektionen  $P_x$  und  $P_y$  der äusseren Kraft und das Moment der letzteren in Bezug auf den Hauptpunkt entfallen. Im ersten Falle handelt es sich um ein paralleles Kraftsystem im Raume und das Punktsystem wird durch die Schnittpunkte der Wirkungslinien der Kräfte mit einer zu denselben senkrechten Ebene gebildet, während im zweiten Falle ein ebenes Kraftsystem vorliegt, und die Wirkungslinien der einzelnen Kräfte das Geradensystem ergeben. In beiden Fällen ist die Aufgabe statisch bestimmt, wenn die Zerlegung einer äusseren Kraft in 3 Teilkraft vorzunehmen ist, wobei:

bei einem Punktsysteme die Schnittpunkte der 3 Teilkräfte mit einer Ebene nicht in einer Geraden liegen dürfen.

bei einem Geradensystem die in einer Ebene liegenden Wirkungslinien der 3 Teilkräfte sich nicht in einem Punkte schneiden dürfen.

Schon in diesem einfachsten Falle tritt das reziproke Verhältnis zwischen diesen 2 Sätzen der Statik klar zu Tage. Für eine beliebige Anzahl von Punkten, resp. Geraden sind die Gesetze der Kraftverteilung unabhängig von einander aufgestellt und nachgewiesen worden, doch erweist es sich, dass ganz allgemein je 2 solche Sätze sich reziprok gegenüberstehen. Es ergeben sich auf diese Weise folgende Doppelsätze, deren linke Seite sich auf ein ebenes Punktsystem bezieht und aus der Formel 1 abgeleitet werden kann, während die rechte Seite für ein ebenes Geradensystem gilt und eine Folgerung der Formel 2 ist:

1. Fällt der Angriffspunkt der äusseren Kraft mit dem Hauptpunkte des Punktsystemes zusammen, so sind in Punkten mit gleich grossen  $u$  die Teilkräfte gleich gross und unabhängig von der Entfernung dieser Punkte vom Hauptpunkte.

2. Fällt ein Punkt des Systemes mit dem Hauptpunkte zusammen, so ist die Teilkraft in demselben unabhängig von der Entfernung des Angriffspunktes der äusseren Kraft vom Hauptpunkte.

3. Unter der Einwirkung einer äusseren Kraft dreht sich die Ebene des Punktsystemes um eine in ihr belegene Achse, welche die Antipolare des An-

1. Geht die Wirkungslinie der äusseren Kraft durch den Hauptpunkt des Geradensystemes, so sind in Geraden mit gleich grossen  $u$  und  $\varphi$  die Teilkräfte gleich gross und unabhängig von der Entfernung dieser Geraden vom Hauptpunkte.

2. Geht eine Gerade des Systemes durch den Hauptpunkt, so ist die Teilkraft in derselben unabhängig von der Entfernung der Wirkungslinie der äusseren Kraft vom Hauptpunkte.

3. Unter der Einwirkung einer äusseren Kraft dreht sich die Ebene des Geradensystemes um einen in ihr belegenen Punkt, welcher der Antipol der

griffspunktes der äusseren Kraft ist, oder, was dasselbe ist, für welche dieser Angriffspunkt der Antipol in Bezug auf die Trägheitsellipse des Punktesystemes ist.

4. Die Teilkraft in einem Punkte ist proportional der Entfernung desselben von der Antipolare des Angriffspunktes der äusseren Kraft. Die Richtung der Teilkraft bestimmt sich daraus, dass der Sinn der Drehmomente derselben und der äusseren Kraft um diese Antipolare ein gleicher sein muss. Die Teilkraften in allen Punkten des Systemes haben daher ein und denselben Drehungssinn um diese Antipolare. Für Punkte, die auf der Antipolare des Angriffspunktes der äusseren Kraft liegen, ist die Teilkraft gleich Null.

5. Die Teilkraft in einem Punkte ist proportional der Entfernung des Angriffspunktes der äusseren Kraft von der Antipolare dieses Punktes. Die Richtung der Teilkraft bestimmt sich daraus, dass der Sinn der Drehmomente derselben und der äusseren Kraft um diese Antipolare ein gleicher sein muss. Eine äussere Kraft, deren Angriffspunkt auf der Antipolare eines Punktes liegt, erzeugt in diesem Punkte keine Kraft.

Wirkungslinie der äusseren Kraft ist, oder, was dasselbe ist, für welchen diese Wirkungslinie die Antipolare in Bezug auf die Trägheitsellipse des Geradensystemes ist.

4. Die Teilkraft in einer Geraden ist proportional der Entfernung derselben vom Antipole der Wirkungslinie der äusseren Kraft. Die Richtung der Teilkraft bestimmt sich daraus, dass der Sinn der Drehmomente derselben und der äusseren Kraft um diesen Antipol ein gleicher sein muss. Die Teilkraften in allen Geraden des Systemes haben daher ein und denselben Drehungssinn um diesen Antipol. Für Gerade, die durch den Antipol der Wirkungslinie der äusseren Kraft gehen, ist die Teilkraft gleich Null.

5. Die Teilkraft in einer Geraden ist proportional der Entfernung der Wirkungslinie der äusseren Kraft vom Antipole dieser Geraden. Die Richtung der Teilkraft bestimmt sich daraus, dass der Sinn der Drehmomente derselben und der äusseren Kraft um diesen Antipol ein gleicher sein muss. Eine äussere Kraft, deren Wirkungslinie durch den Antipol einer Geraden geht, erzeugt in dieser Geraden keine Kraft.

Aus der Theorie des exzentrischen Druckes ist der Kern eines Querschnittes ein wohlbekannter Begriff und versteht man unter demselben ein Vieleck, welches die Eigenschaft hat, dass eine senkrecht zum Querschnitte wirkende äussere Kraft, deren Angriffspunkt innerhalb dieses Vieleckes belegen ist, in allen Punkten des Querschnittes gleichartige, d. h. entweder nur Druck-, oder nur Zugspannungen erzeugt. Für ein ebenes Punktsystem soll nun dieser Begriff des Kernes erweitert werden und als Kern ein jedes Vieleck bezeichnet werden, welchem Teilkräfte in den einzelnen Punkten mit bestimmtem, gegebenem resp. gewünschtem Richtungssinn entsprechen. Man kann sich nämlich vorstellen, dass die Ebene des Punktsystemes nicht in allen Punkten gestützt, sondern in einem, oder mehreren Punkten an elastischen, nicht biegsamen Fäden aufgehängt ist, und ein Vieleck so bestimmen, dass einer äusseren Kraft, deren Angriffspunkt innerhalb dieses Vieleckes belegen ist, Teilkräfte von einer Richtung in den gestützten, und entgegengesetzter Richtung in den aufgehängten Punkten entsprechen. Es wirken dann wieder in allen Punkten des Systemes nur gleichartige, d. h. nur Druck-, oder nur Zugkräfte. Bei dieser Auffassung des Kernes braucht derselbe durchaus nicht ein von allen Seiten begrenztes Vieleck zu sein, und es gibt auch Fälle, für welche überhaupt kein Kern gefunden werden kann.

Der so erweiterte Begriff des Kernes kann dann auch auf ein ebenes Geradensystem übertragen werden, indem man als Kern ein Vieleck bezeichnet, welchem Teilkräfte von bestimmtem gegebenem Richtungssinn in den Geraden des Systemes entsprechen, wenn die Wirkungslinie der äusseren Kraft innerhalb dieses Vieleckes belegen ist. In diesem Falle kann der Kern nur ein offenes Vieleck sein, denn sonst könnte die Wirkungslinie der äusseren Kraft, welche als eine nach beiden Seiten bis in die Unendlichkeit sich erstreckende Gerade aufzufassen ist, nicht in ihrer ganzen Länge innerhalb des Kernes verlaufen.

Auch die Kerne von Punkt- und Geradensystemen stehen in einem reziproken Verhältnis zu einander und können folgendermassen definiert werden.

Der geometrische Ort der Angriffspunkte einer senkrecht zur Ebene eines Punktsystemes wirkenden äusseren Kraft,

Der geometrische Ort der Wirkungslinien einer in der Ebene eines Geradensystemes wirkenden äusseren Kraft, wel-

welche in den einzelnen Punkten des Systemes Teilkräfte mit bestimmtem gegebenem Richtungssinn hervorruft, ist der Kern des Punktsystemes für diesen Richtungssinn der Teilkräfte.

che in den einzelnen Geraden des Systemes Teilkräfte mit bestimmtem gegebenem Richtungssinn hervorruft, ist der Kern des Geradensystemes für diesen Richtungssinn der Teilkräfte.

Einige für die Konstruktion des Kernes wichtige Eigenschaften desselben sind im Folgenden unter Wahrung des Reziprozitätsprinzips erwähnt:

1. Der Kern eines Punktsystemes ist ein Vieleck, dessen Seiten Antipolaren von Punkten des Systemes sind, und dessen Eckpunkte daher Antipole von Verbindungslinien der Punkte des Systemes sind.

2. In Bezug auf die Trägheitsellipse des Punktsystemes ist der Kern die reziproke Figur derjenigen Fläche, innerhalb welcher die Antipolare des Angriffspunktes der äusseren Kraft belegen sein muss. Diese Fläche kann als Kern eines Geradensystemes aufgefasst werden, welches aus den Antipolaren der gegebenen Punkte besteht, wobei diese Punkte die Antipole der Geraden sind. Alle auf den Kern eines Geradensystemes sich beziehenden Sätze gelten daher auch für diese Fläche.

3. Eine jede zur Begrenzung des Kernes gehörende Antipolare ist der Träger einer Punktreihe, welche durch die

1. Der Kern eines Geradensystemes ist ein Vieleck, dessen Eckpunkte Antipole von Geraden des Systemes sind, und dessen Seiten daher Antipolaren von Schnittpunkten der Geraden des Systemes sind.

2. In Bezug auf die Trägheitsellipse des Geradensystemes ist der Kern die reziproke Figur derjenigen Fläche, innerhalb welcher der Antipol der Wirkungslinie der äusseren Kraft belegen sein muss. Diese Fläche kann als Kern eines Punktsystemes aufgefasst werden, welches aus den Antipolen der gegebenen Geraden besteht, wobei diese Geraden die Antipolaren der Punkte sind. Alle auf den Kern eines Punktsystemes sich beziehenden Sätze gelten daher auch für diese Fläche.

3. Ein jeder zur Begrenzung des Kernes gehörende Antipol ist das Zentrum eines Strahlenbüschels, welches durch die

Schnittpunkte mit den übrigen Antipolaren des Systemes in Strecken zerlegt wird, und für die Begrenzung des Kernes kann nur eine Strecke zwischen 2 benachbarten Schnittpunkten in Betracht kommen<sup>3)</sup>. Würde nämlich innerhalb einer den Kern begrenzenden Strecke ein Schnittpunkt mit einer der übrigen Antipolaren belegen sein, so würde eine solche Antipolare den Kern schneiden und es entstünden in dem ihr entsprechendem Punkte des Systemes, je nach der Lage des Angriffspunktes einer äusseren Kraft innerhalb des Kernes, Teilkräfte mit verschiedenem Richtungssinn.

4. Eine innerhalb des Kernes verlaufende Gerade schneidet 2 Seiten desselben.

Verbindungslinien mit den übrigen Antipolen des Systemes in vollkommene Winkel<sup>4)</sup> zerlegt wird, und für die Erzeugung des Kernes kann nur ein Winkel zwischen 2 benachbarten Verbindungslinien in Betracht kommen. Würde nämlich innerhalb eines den Kern erzeugenden vollkommenen Winkels eine Verbindungslinie mit einem der übrigen Antipole belegen sein, so würde ein solcher Antipol innerhalb des Kernes liegen und es entstünden in der ihm entsprechenden Geraden des Systemes, je nach der Lage der Wirkungslinie einer gerichteten äusseren Kraft innerhalb des Kernes, Teilkräfte mit verschiedenem Richtungssinn.

4. Ein innerhalb des Kernes belegener Punkt liegt innerhalb 2 vollkommener Winkel desselben.

<sup>3)</sup> Zu beachten ist, dass durch 2 Punkte eine Gerade in 2 Strecken zerlegt wird, von welchen die eine Strecke eine endliche Länge hat, während die zweite unendlich lang ist und den unendlich fernen Punkt der Geraden enthält. Man kann von einem Punkte zum zweiten gelangen, nicht nur indem man die endliche Strecke in der Richtung vom ersten Punkte zum zweiten durchläuft, sondern auch indem man sich vom ersten Punkte in entgegengesetzter Richtung fortbewegt, um nach Überschreitung des unendlich fernen Punktes der Geraden zum zweiten zu gelangen. Für die Begrenzung des Kernes kann je nach den Umständen wie die endliche, so auch die unendlich lange Strecke zwischen 2 Punkten einer Antipolare in Frage kommen.

<sup>4)</sup> Zwei Gerade, welche sich in einem Punkte schneiden, bestimmen 2 Paare gegenüberliegender Winkel. Unter einem vollkommenen Winkel versteht man die zwischen beiden Geraden belegene Fläche innerhalb eines Paares gegenüberliegender Winkel. Zwei sich schneidende Gerade erzeugen daher 2 vollkommene Winkel.

Die Konstruktion des Kernes für einen beliebig gegebenen Richtungssinn der Teilkräfte ist an folgenden Beispielen eines ebenen Systemes von 4 Punkten, resp. 4 Geraden näher erläutert. Voraussetzung ist dabei, dass bei dem Punktsysteme keine 3 Punkte auf einer Geraden liegen, bei dem Geradensysteme keine 3 Geraden sich in einem Punkte schneiden. Beiläufig zeigt es sich, dass bei einem Systeme von 4 Punkten, resp. von 4 Geraden die Antipolaren der Punkte und die Antipole der Geraden auch ohne vorhergehende Bestimmung des Hauptpunktes, der Hauptachsen und der Trägheitsellipse ermittelt werden können, wenn die Grössen  $u$  für die einzelnen Punkte, resp. Geraden bekannt sind.

Sind nämlich in einem Punktsysteme aus 4 Punkten die Teilkräfte in 2 Punkten, z. B. in den Punkten I und II gleich Null, so ist die Verbindungslinie I—II die Antipolare des Angriffspunktes der äusseren Kraft. Dieser Angriffspunkt muss auf der Verbindungslinie der übrigen 2 Punkte III und IV liegen, denn sonst können die Teilkräfte in den Punkten I und II nicht beide gleichzeitig Null sein. Unter dem Einflusse der äusseren Kraft dreht sich die Ebene des Punktsystemes um die Gerade I—II und die Verschiebungen  $\lambda_{III}$  und  $\lambda_{IV}$  der Punkte III und IV sind den Entfernungen  $p_{III}$  und  $p_{IV}$  derselben von der Geraden I—II proportional, oder, da  $\lambda_{III} = N_{III} : u_{III}$ ,  $\lambda_{IV} = N_{IV} : u_{IV}$  ist,

$$N_{III} : N_{IV} = p_{III} u_{III} : p_{IV} u_{IV}.$$

Da ausserdem die äussere Kraft die Resultierende der Kräfte  $N_{III}$  und  $N_{IV}$  ist, so ist die Lage des

Sind nämlich in einem Geradensysteme aus 4 Geraden die Teilkräfte in 2 Geraden, z. B. in den Geraden 1 und 2 gleich Null, so ist der Schnittpunkt 1—2 der Antipol der Wirkungslinie der äusseren Kraft. Diese Wirkungslinie muss durch den Schnittpunkt der übrigen 2 Geraden 3 und 4 gehen, denn sonst können die Teilkräfte in den Geraden 1 und 2 nicht beide gleichzeitig Null sein. Unter dem Einflusse der äusseren Kraft dreht sich die Ebene des Geradensystemes um den Punkt 1—2 und die Längenänderungen  $\lambda_3$  und  $\lambda_4$  der Geraden 3 und 4 sind den Entfernungen  $p_3$  und  $p_4$  derselben von dem Punkte 1—2 proportional, oder, da  $\lambda_3 = N_3 : u_3$ ,  $\lambda_4 = N_4 : u_4$  ist,

$$N_3 : N_4 = p_3 u_3 : p_4 u_4.$$

Da ausserdem die äussere Kraft die Resultierende der Kräfte  $N_3$  und  $N_4$  ist, so ist die Richtung der



Angriffspunktes der äusseren Kraft, also der Antipol der Geraden I—II bestimmt. Dabei ist zu beachten, dass dieser Angriffspunkt und der Schnittpunkt der Geraden III—IV mit der Geraden I—II durch die Punkte III und IV von einander getrennt sind, denn sonst können beide Teilkräfte  $N_{III}$  und  $N_{IV}$  nicht denselben Drehungssinn um die Gerade I—II haben, wie die äussere Kraft.

In derselben Weise können die Antipole der übrigen 5 Verbindungslinien der gegebenen 4 Punkte bestimmt werden. Da durch jeden Punkt 3 solche Verbindungslinien gehen, z. B. durch den Punkt I die Geraden I—II, I—III und I—IV, so liegen die Antipole dieser 3 Geraden ebenfalls auf einer Geraden, nämlich der Antipolare des Punktes I.

Wirkungslinie der äusseren Kraft, also die Antipolare des Punktes 1—2 bestimmt. Dabei ist zu beachten, dass diese Wirkungslinie und die Verbindungslinie des Punktes 3—4 mit dem Punkte 1—2 durch die Geraden 3 und 4 von einander getrennt sind, denn sonst können beide Teilkräfte  $N_3$  und  $N_4$  nicht denselben Drehungssinn um den Punkt 1—2 haben, wie die äussere Kraft.

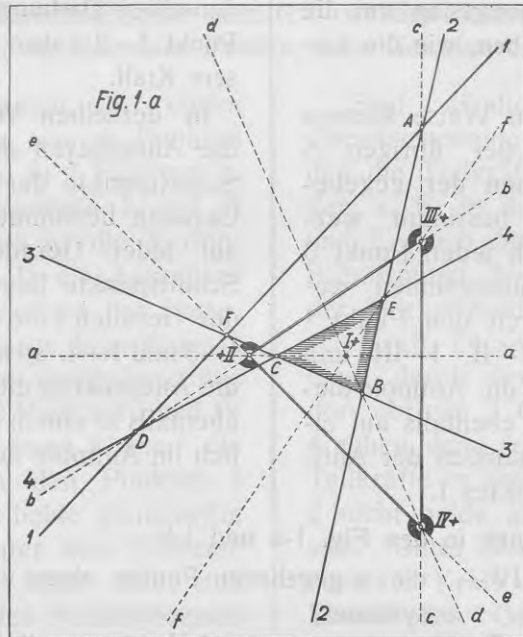
In derselben Weise können die Antipolaren der übrigen 5 Schnittpunkte der gegebenen 4 Geraden bestimmt werden. Da auf jeder Geraden 3 solche Schnittpunkte liegen, z. B. auf der Geraden I die Punkte 1—2, 1—3 und 1—4, so schneiden sich die Antipolaren dieser 3 Punkte ebenfalls in einem Punkte, nämlich im Antipole der Geraden I.

Es bezeichnen in den Fig. 1-a und 1-b:

- I, II, III, IV — die 4 gegebenen Punkte eines ebenen Punktsystemes,
- A, B, C, D, E, F — die Antipole der 6 Verbindungslinien *a, b, c, d, e, f* dieser Punkte,
- 1, 2, 3, 4 — die Antipolaren der Punkte I, II, III, IV.

Gesucht ist der Kern für den Fall, dass die Teilkräfte in allen 4 Punkten gleich gerichtet (+) sein sollen (Fig. 1-a). Da der Drehungssinn der äusseren Kraft und der Teilkraft in einem Punkte um die Antipolare dieses Punktes ein gleicher ist, so muss, um gleichgerichtete Teilkräfte in allen Punkten zu erhalten, der Angriffspunkt der äusseren Kraft mit jedem Punkte des Systemes auf einer Seite von deren Antipolaren liegen. Den Kern bildet daher in diesem Falle das aus den Antipolaren 2, 3 und 4 gebildete

Dreieck BCE. Soll dagegen die Richtung der Teilkraft in einem Punkte, z. B. im Punkte III (Fig. 1-b) derjenigen in den übrigen Punkten entgegengesetzt sein, so muss der Angriffspunkt der äusseren Kraft entweder von diesem Punkte durch deren Antipolare getrennt sein, während er mit den übrigen Punkten, wie im ersten Falle, auf einer Seite von deren Antipolaren liegt, oder aber umgekehrt, vom Punkte III durch dessen Antipolare nicht getrennt, mit den Punkten I, II und IV aber auf verschiedenen Seiten



von deren Antipolaren liegen. Diesen Bedingungen genügen folgende Flächen: 1. die bis in die Unendlichkeit sich erstreckende Fläche im unteren Teil der Fig. 1-b, welche von den Antipolaren 1, 4, 3 und 2 eingeschlossen ist, und 2. die ebenfalls in die Unendlichkeit verlaufende Fläche im oberen Teil der Fig. 1-b zwischen den Antipolaren 1 und 2. Diese zwei Flächen zusammen bilden daher jetzt den Kern des Punktsystemes.

Diese Art der Bestimmung des Kernes eines Punktsystemes könnte unter Berücksichtigung des Reziprozitätsgesetzes modifiziert werden und dann für die Ermittlung des Kernes eines Ge-

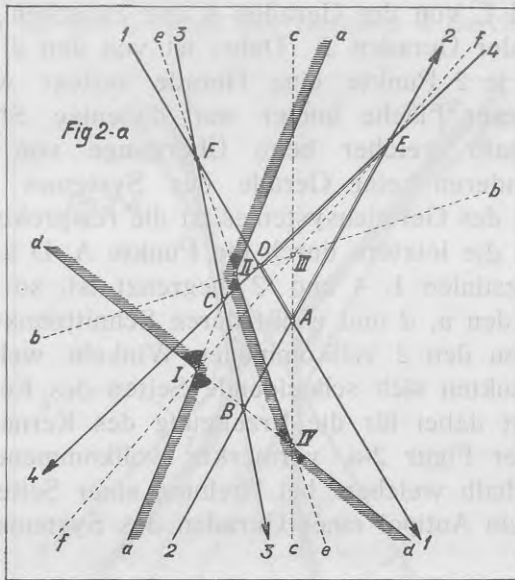
radensystemes verwandt werden. Das reziproke Verfahren erweist sich aber als nicht genügend übersichtlich, um empfohlen werden zu können. Es soll daher noch ein zweiter Weg für die Auffindung des Kernes eines Punktsystemes beschrrieben werden, welcher auch nicht kompliziert ist, dessen reziproke Umkehrung aber für ein Geradensystem es ermöglicht, in einfacher klarer Weise den Kern des letzteren zu bestimmen.

Sollen die Teilkräfte in allen 4 Punkten gleichgerichtet sein (Fig. 1-a), so kann die Antipolare des Angriffspunktes der äusseren Kraft nur ausserhalb des Dreieckes II-III-IV liegen, da sonst nicht alle Teilkräfte denselben Drehungssinn um diese Antipolare haben können. Die Fläche, innerhalb welcher diese Antipolare belegen sein muss, ist daher die gesamte allseitig bis in die Unendlichkeit sich erstreckende Ebene des Punktsystemes mit Ausnahme des Dreieckes II-III-IV und sie wird durch folgende in der Fig. 1-a vermerkte vollkommene Winkel erzeugt: zwischen den Geraden e und b mit dem Scheitel im Punkte II, zwischen den Geraden b und c mit dem Scheitel im Punkte III und zwischen den Geraden c und e mit dem Scheitel im Punkte IV. Dabei ist von den 2 vollkommenen Winkeln, welche durch je 2 Gerade gebildet werden, für die Erzeugung der Fläche immer nur derjenige Winkel massgebend, innerhalb welchem bei einer Drehung einer Geraden in die Lage der anderen kein Punkt des Systemes überschritten wird. Der Kern des Punktsystemes ist die reziproke Figur dieser Fläche, und da die letztere durch die Geraden e, b und c mit deren Schnittpunkten II, III und IV begrenzt ist, so ist der Kern durch die Punkte E, B, C mit deren Verbindungslinien 2, 3 und 4 begrenzt. Von den 2 Strecken, in welche eine jede von diesen Geraden durch 2 Eckpunkte des Kernes zerlegt wird, kommt dabei für die Begrenzung des Kernes diejenige Strecke in Betracht, innerhalb welcher beim Übergange von einem Eckpunkte zum anderen keine Antipolare eines Punktes des Systemes überschritten wird.

Ist die Richtung der Teilkraft im Punkte III entgegengesetzt derjenigen in den übrigen Punkten (Fig. 1-b), so muss der Punkt III von den Punkten I, II und IV durch die Antipolare des Angriffspunktes der äusseren Kraft getrennt sein, damit alle Teilkräfte den gleichen Drehungssinn um diese Antipolare haben. Im Grenzfall kann diese Antipolare mit den Verbindungslinien von 2



wenn die Richtung der Teilkraft im Punkte I entgegengesetzt der Richtung der Kräfte in den übrigen Punkten sein soll. Es kann nämlich keine Gerade so gezogen werden, dass der Punkt I von den Punkten II, III und IV durch dieselbe getrennt ist; daher kann es auch keinen Angriffspunkt einer äusseren Kraft geben, dessen Antipolare dieser Forderung entspricht. Für diesen Fall ist daher auch kein Kern des Punktsystemes vorhanden.



Das beschriebene Verfahren zur Ermittlung des Kernes eines Punktsystemes soll nun jetzt mit Hilfe des Reziprozitätsgesetzes auf die Konstruktion des Kernes eines Geradensystemes übertragen werden.

In den Fig. 2-a und 2-b bezeichnen:

- 1, 2, 3, 4 — die 4 gegebenen Geraden eines ebenen Geradensystemes,
- $a, b, c, d, e, f$  — die Antipolaren der 6 Schnittpunkte  $A, B, C, D, E, F$  dieser Geraden,
- I, II, III, IV — die Antipole der Geraden 1, 2, 3, 4.

Sollen die Teilkräfte in den 4 Geraden die in der Fig. 2-a angegebenen Richtungen haben, oder aber alle gleichzeitig in entgegengesetzter Richtung wirken, so kann der Antipol der Wirkungslinie der äusseren Kraft nur innerhalb des Dreieckes 1-4-2 liegen, da sonst nicht alle Teilkräfte denselben Drehungssinn um diesen Antipol haben können. Die Fläche, innerhalb welcher dieser Antipol belegen sein muss, wird durch folgende Strecken begrenzt: zwischen den Punkten A und D von der Geraden 1, zwischen den Punkten D und E von der Geraden 4 und zwischen den Punkten E und A von der Geraden 2. Dabei ist von den 2 Strecken, in welche durch je 2 Punkte eine Gerade zerlegt wird, für die Begrenzung dieser Fläche immer nur diejenige Strecke massgebend, innerhalb welcher beim Übergange von einem Endpunkte zum anderen keine Gerade des Systemes überschritten wird. Der Kern des Geradensystemes ist die reziproke Figur dieser Fläche, und da die letztere durch die Punkte A, D und E mit deren Verbindungslinien 1, 4 und 2 begrenzt ist, so ist der Kern durch die Geraden a, d und e mit deren Schnittpunkten I, IV und II begrenzt. Von den 2 vollkommenen Winkeln, welche durch je 2 in diesen Punkten sich schneidende Seiten des Kernes gebildet werden, kommt dabei für die Erzeugung des Kernes immer nur derjenige in der Figur 2-a vermerkte vollkommene Winkel in Betracht, innerhalb welchem bei Drehung einer Seite in die Lage der anderen kein Antipol einer Geraden des Systemes überschritten wird.

Als Kontrolle der Richtigkeit dieser Konstruktion des Kernes kann folgendes dienen. Da der Sinn der Drehmomente einer äusseren Kraft und der Teilkraft in einer Geraden um den Antipol dieser Geraden ein gleicher ist, so erkennt man sofort, dass, solange die Wirkungslinie der äusseren Kraft innerhalb des Kernes belegen ist, die Teilkräfte in den 4 Geraden die in der Fig. 2-a angenommenen Richtungen haben müssen, oder aber alle gleichzeitig in entgegengesetzter Richtung wirken, je nach dem angenommenen Richtungssinn und der Lage der äusseren Kraft.

In der Fig. 2-b ist die Konstruktion des Kernes für den Fall wiederholt, dass die Richtung der Teilkraft in der Geraden 2 derjenigen in der Fig. 2-a entgegengesetzt ist, während die Richtungen der Teilkräfte in den Geraden 1, 3 und 4 nicht geändert sind. Nach einiger Überlegung erkennt man, dass der Antipol der



möglich, nämlich, wenn die Richtungen der Teilkräfte folgende sind: in der Geraden 1 — von F über D nach A, in der Geraden 2 — von B über A nach E, in der Geraden 3 — von B über C nach F und in der Geraden 4 — von E über D nach C. Bei diesen Richtungen der Teilkräfte kann kein Punkt gefunden werden, in Bezug auf welchem der Sinn der Drehmomente aller 4 Kräfte ein gleicher ist. Dasselbe ist natürlich auch der Fall, wenn alle 4 Kräfte in der entgegengesetzten Richtung wirken. Unter Berücksichtigung der elastischen Eigenschaften des Geradensystemes ist es daher nicht möglich, eine äussere Kraft in Teilkräfte mit solchen Richtungen in den Geraden zu zerlegen.

\* \* \*

Zum Schluss noch eine praktische Anwendung des entwickelten Verfahrens zur Bestimmung des Kernes eines Geradensystemes, und zwar sei auf das in meiner Schrift<sup>5)</sup> behandelte Beispiel eines Pfahlrostes mit 8 Pfählen noch einmal eingegangen und angenommen, dass dieser Pfahlrost ausserdem durch einen Anker gegen Verschiebungen in horizontaler Richtung verstärkt ist (Fig. 3). Es ist erwünscht, dass in allen Pfählen Druckkräfte, im Anker dagegen eine Zugkraft wirkt. Diese Kraftrichtungen sind in der Fig. 3 eingetragen, aus welcher ausserdem die Lage des Hauptpunktes, die Richtung der Hauptachsen und die Lage der Antipole der Pfahlachsen zu ersehen sind. Die Antipole der Pfahlachse 4 und des Ankers 9 liegen ausserhalb der Grenzen der Zeichnung und haben in Bezug auf die Hauptachsen die Koordinaten

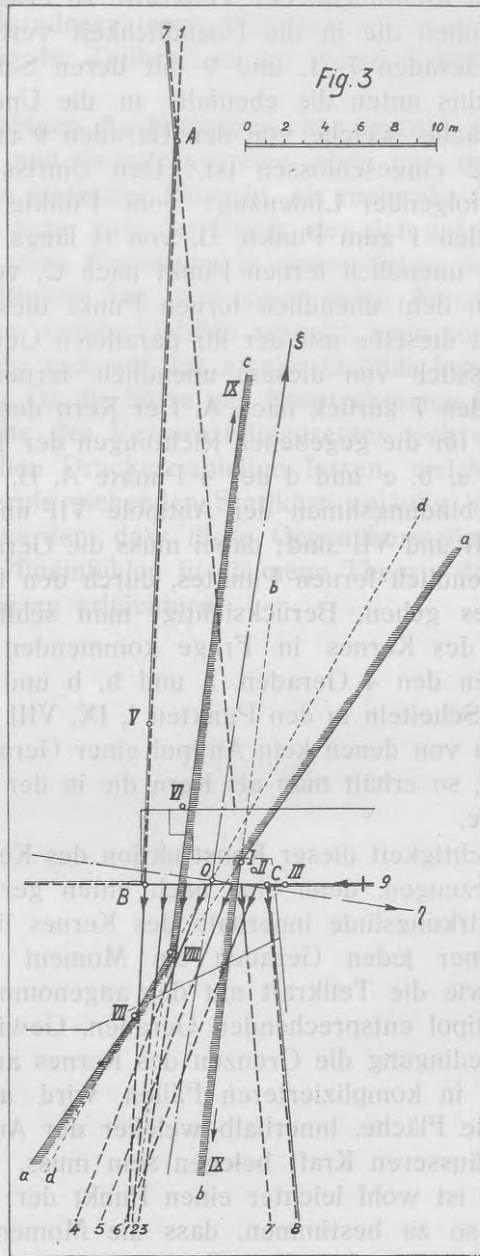
$$\eta_4 = +41,20 \text{ m}, \xi_4 = -71,90 \text{ m}, \eta_9 = -4,10 \text{ m}, \xi_9 = +201,90 \text{ m}.$$

Der in meiner Abhandlung eingeschlagene Weg zur Bestimmung des Kernes führt wohl in den dort besprochenen Beispielen zum Ziele; das Verfahren ist aber nicht allgemein genug gehalten, um in allen möglichen Fällen angewandt werden zu können. So versagt es z. B. beim Vorhandensein eines horizontalen Ankers.

Auf Grund der oben gegebenen Erläuterungen lassen sich aber die Flächen angeben, innerhalb welcher der Antipol der Wirkungslinie der äusseren Kraft liegen muss, um in den Geraden 1 bis 9

<sup>5)</sup> S. die in der Fussnote 2 erwähnte Abhandlung.





die gewünschten Richtungen der Teilkräfte zu erhalten, und zwar sind es: links oben die in die Unendlichkeit verlaufende Fläche zwischen den Geraden 7, 1, und 9 mit deren Schnittpunkten A und B, und rechts unten die ebenfalls in die Unendlichkeit sich erstreckende Fläche, welche von den Geraden 9 und 8 mit ihrem Schnittpunkte C eingeschlossen ist. Den Umriss dieser beiden Flächen bildet folgender Linienzug: vom Punkte A ausgehend, längs der Geraden 1 zum Punkte B, von B längs der Geraden 9 und über deren unendlich fernen Punkt nach C, von C längs der Geraden 8 nach dem unendlich fernen Punkt dieser Geraden D, in welchem sich dieselbe mit der ihr parallelen Geraden 7 schneidet, und schliesslich von diesem unendlich fernen Schnittpunkt längs der Geraden 7 zurück nach A. Der Kern des Geradensystemes wird daher für die gegebenen Richtungen der Teilkräfte durch die Antipolaren a, b, c und d der 4 Punkte A, B, C, D begrenzt, welche die Verbindungslinien der Antipole VII und I, I und IX, IX und VIII, VIII und VII sind; dabei muss die Gerade d, als Antipolare eines unendlich fernen Punktes, durch den Hauptpunkt des Geradensystemes gehen. Berücksichtigt man schliesslich die für die Erzeugung des Kernes in Frage kommenden vollkommenen Winkel zwischen den 4 Geraden, a und b, b und c, c und d, d und a, mit den Scheiteln in den Punkten I, IX, VIII und VII, innerhalb eines jeden von denen kein Antipol einer Geraden des Systemes liegen darf, so erhält man als Kern die in der Fig. 3 gekennzeichnete Fläche.

Von der Richtigkeit dieser Konstruktion des Kernes kann man sich leicht überzeugen, denn eine nach unten gerichtete äussere Kraft, deren Wirkungslinie innerhalb des Kernes liegt, ergibt um den Antipol einer jeden Geraden ein Moment mit demselben Drehungssinn, wie die Teilkraft mit der angenommenen Richtung in der dem Antipol entsprechenden Geraden. Gewiss könnten auf Grund dieser Bedingung die Grenzen des Kernes auch direkt festgelegt werden; in komplizierteren Fällen wird aber wohl der Umweg über die Fläche, innerhalb welcher der Antipol der Wirkungslinie der äusseren Kraft belegen sein muss, der übersichtlichere sein. Es ist wohl leichter einen Punkt der Ebene des Geradensystemes so zu bestimmen, dass die Momente aller Teilkräfte in den Geraden denselben Drehungssinn um diesen Punkt haben, als eine Gerade zu finden, welche eine solche Lage hat,

dass eine in ihr wirkende äussere Kraft in Bezug auf die einzelnen Antipole des Geradensystemes Momente mit demselben Drehungsinn ergibt, wie die Teilkraft in der jedem Antipole entsprechenden Geraden.

Wie aus obigen Ausführungen zu ersehen ist, stehen sich ebene Punkt- und Geradensysteme nicht nur in geometrischer, sondern auch in statischer Hinsicht, als reziproke Gebilde einander gegenüber. Ein jeder Satz der Statik, der sich auf ein Punktsystem bezieht, findet seine Ergänzung in einem Satze, der für ein Geradensystem Gültigkeit hat, und einer jeden Konstruktion, welche von einem dieser beiden Gebilde ausgeht, kann eine entsprechende Konstruktion, die sich auf das zweite Gebilde bezieht, gegenübergestellt werden. Da die Sätze und Konstruktionen für ein Geradensystem mit Hilfe des Reziprozitätsgesetzes sich aus der Theorie des exzentrischen Druckes ableiten lassen, welche ja allen im praktischen Berufe stehenden Statikern geläufig ist, so darf wohl angenommen werden, dass diese Gegenüberstellung dazu beitragen wird, das Hineinfühlen in die neue Theorie der Statik ebener Geradensysteme zu erleichtern.

## Reciprocitātes likums plakānu punktu un taisņu sistēmu statikā.

*A. Labutins.*

Formulu vienāda uzbūve sprieguma aplēsei ekscentriski noslodzīta prizmatiska ķermeņa šķērsgrīzumā un darbojošos spēku noteikšanai plakānā pāļu režģī, deva iemeslu tālāk izsekot analogiju starp abām teorijām. Atvietojojot šķērsgrīzumu ar ierobežotu punktu skaitu, kas sastāda plakānu punktu sistēmu, un ņemot vērā, ka pāļu ass veido plakānu taisņu sistēmu, tās ģeometriskā ziņā padotas reciprocitātes likumam un katrai konstrukcijai, kas attiecas uz vienu sistēmu, var uziet atbilstošu konstrukciju otrai sistēmai. Šai reciprocai radniecībai starp abām sistēmām ir ne tikai ģeometrisks, bet arī statisks saturs, kādēļ arī katram statiskam likumam ekscentriskā noslodzījuma teorijā atbilst zināms likums pāļu režģa teorijā, pie kam reciproku likumu var izvest, apmainot vārdus: punktu ar taisni; punktu virkni ar staru šķipsnu; taisni, kas savieno divus punktus, ar punktu, kurā krustojas divas taisnes, taisnes atgriezumam starp diviem punktiem ar pilno leņķi starp divām taisnēm, u. t. t. Beigās līdzīgi šķērsgrīzuma kodolam noteikts pāļu režģa kodols, t. i. laukums, kā robežās jāatrodas ārējā spēka darbības līnijai, lai atsevišķos pāļos darbotos spēki ar zināmiem dotiem virzieniem. Kodola atrašanai vajadzīgās konstrukcijas paskaidrotas dažos piemēros. Tādā veidā var jaunos vēl samērā maz izplatītos likumus par spēku sadalīšanu pāļu režģī tieši atvasināt ar reciprocitātes principa palīdzību no sen jau pazīstamas ekscentriskā noslodzījuma teorijas.

## Matériaux

concernant la construction d'une station hydroélectrique sur le fleuve de Daugava: contribution à la question du profil du barrage au point de vue hydraulique.

Par Alfrēds Vītols.

Gutta cavat lapidem

Non vi sed saepe cadendo.

Quand on procède au projet d'une station hydroélectrique, on se voit toujours mis vis-à-vis d'une foule de questions qui ne peuvent être envisagées comme résolues définitivement. Parmi ces questions se trouve toujours la question du profil hydraulique du barrage. On sait que le choix mal réussi du profil amène en général aux conséquences suivantes:

1) Le vacuum qui se produit sous la lame liquide passant par le déversoir, augmente la pression du côté de l'amont; cette augmentation varie dans les limites d'une atmosphère, ce qui fait une augmentation assez considérable si l'on tient compte que la hauteur barométrique d'une atmosphère est de 10 mètres environ;

2) Le vacuum a pour conséquence une désagrégation locale du matériel du barrage, grâce à une action très intensive des particules d'eau mises en mouvement énergique par le vacuum intermittent, sur la superficie mouillée du barrage;

3) L'adhésion et le détachement successifs du courant produisent une série de chocs qui met toute la construction dans un état de vibrations menaçant l'intégrité de la construction.

Que les phénomènes mentionnés atteignent parfois des dimensions considérables, des exemples de constructions exécutées et déjà fonctionnant le montrent.

L'honorable ingénieur américain, vice-président de la „Foundation Company“ à qui la Lettonie doit le projet de la construction de la station hydroélectrique Kegums sur le fleuve Daugava, nous a informé de l'effet du vacuum dont il a été témoin lors de sa visite à quelques stations hydroélectriques: les vibrations du barrage produites par le vacuum, se transmettaient même au territoire de la station en produisant ici la sensation du tremblement de terre. Il est évident que ces vibrations ne pouvaient être sans conséquences sur l'intégrité de la construction et c'est pour cela que les pays qui se trouvent vis-à-vis de l'exploitation de leurs forces hydrauliques, sont amenés à étudier sérieusement le problème du vacuum sous la lame liquide du déversoir.

Je ne voudrais pas m'arrêter longtemps au débrouillement du grand rôle du vacuum qui peut se produire sous la lame liquide passant sur le déversoir, et je passe à l'analyse théorique et hydraulique du phénomène.

### I. Critique des méthodes proposées.

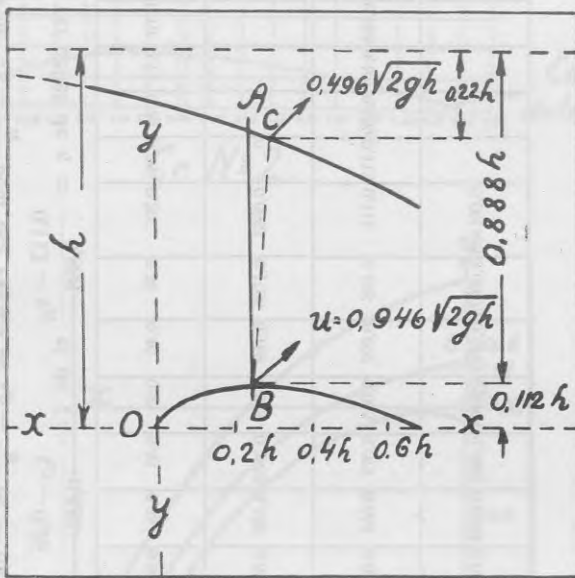
La méthode la plus connue du calcul du profil du barrage date du temps de la publication de Creager „Engineering for masonry Dams“, New-York 1917, p. 105. Creager, ainsi que d'autres ingénieurs (Parker, Miller etc.) ont adopté pour la partie supérieure de la lame liquide, dans les limites de  $\xi_{\beta} = \frac{x_{\beta}}{h} = -3$  jusqu'à  $\xi_{\beta} = \frac{x_{\beta}}{h} = 0,7$  (voir le croquis № 1) où  $h$  est la différence d'hauteur entre la crête du déversoir et le point du niveau du courant où l'abaissement de celui-ci se sent à peine, la forme fixée par les expériences de Bazin (voir la table № 1 empruntée de l'article de Bazin publié dans les Annales des ponts et chaussées (6) 19 (1890) page 56). Je me borne ici à traiter le déversoir à paroi verticale. La hauteur du seuil de maquettes de Bazin a été de 1,13 m et de 0,35 m. Les profils des lames ayant été à peu près similaires, les coordonnées des points des surfaces des lames liquides sont données pour les valeurs des rapports  $\xi_{\beta} = \frac{x}{h}$  et  $\eta_{\beta} = \frac{y}{h}$ .

La partie supérieure de la lame de Bazin est esquissée ci-après (voir le croquis № 1). N'oublions pas que la lame de Bazin est libre, aérée. La marque hydraulique de cette lame aérée est la pression atmosphérique sur les surfaces extérieures de celle-ci.

Les données caractérisant la lame ayant été régistrees jusqu'à la valeur de  $x_{\beta} = 0,70 \cdot h$  par la voie de l'expérience de Bazin, tous les

efforts des auteurs avaient en vue d'établir la forme de la lame au delà de la limite de  $x_\beta = 0,70 h$ . Parmi les auteurs qui ont établi la forme de la lame pour les valeurs de  $\frac{x_\beta}{h} > 0,7$  nous avons déjà mentionné Creager. Son principe est le suivant. Une particule de la lame est supposée libre, se mouvant comme un point matériel, écartée de l'influence qu'exercent

*Paroi verticale. Lame aérée.*

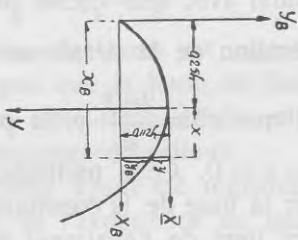


*Cr. N° 1*

sur elle les particules voisines. Ce mouvement se compose du mouvement horizontal avec une vitesse initiale  $v_0$  et du mouvement vertical avec l'accélération de la pesanteur  $g$ . Alors  $x = v_0 t$ ,  $y = \frac{gt^2}{2}$ , d'où,  $t$  exclu, suit que  $x^2 = \frac{2v_0^2}{g} \cdot y$ , la particule ayant au moment  $t=0$  la position  $x=y=0$ . Cette particule, dont la trajectoire parabolique est adoptée pour la base de la construction du profil du barrage, est prise distante d'un tiers de l'épaisseur de la surface inférieure de la lame,

Table I.  
 Coordonnées de la surface inférieure de la lame liquide données par Bazin (9 expériences). Voir Annales des ponts et chaussées (6) 19 (1890) page 56.

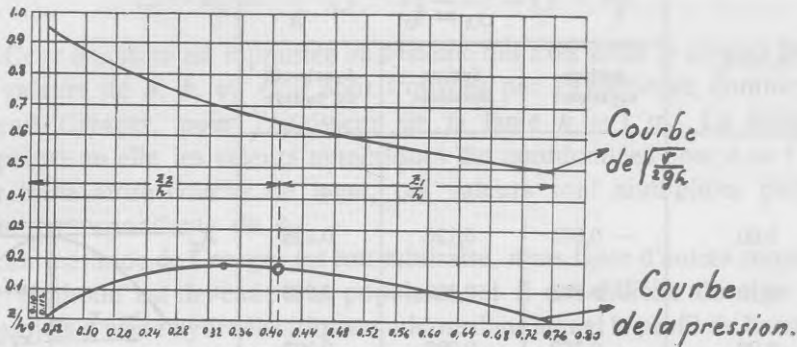
Hauteur du déversoir a paroi verticale = 1,13 m.	Valeurs de $\eta_B = \frac{y_B}{h}$ pour des valeurs de $\xi_B = \frac{x_B}{h}$ de $-3a + 0,7$ et celles de $\eta = \frac{0,112 - \eta_B}{0,888}$ et de $\xi = \frac{\xi_B - 0,25}{0,888}$																	
	$\xi_B$	-3	-1	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70
$\eta_B$	$h = 0,15 - 0,45$ metr.																	
$\eta$	$h = 0,15 - 0,45$ metr.																	
				0	0,059	0,085	0,101	0,109	0,112	0,111	0,106	0,097	0,085	0,071	0,054	0,035	0,013	0,009
									0,001126	0,00675	0,0169	0,0304	0,0467	0,0653	0,0867	0,1115		
										0,0563	0,1126	0,169	0,225	0,2815	0,338	0,395	0,450	0,506



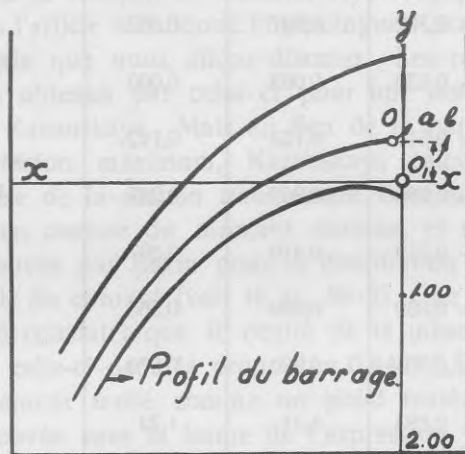
$$\begin{aligned}
 x_B - x &= 0,25h \\
 y_B + y &= 0,112h, \\
 \text{d'où il suit que:} \\
 \frac{x_B}{h} - \frac{x}{h} &= \frac{H_0}{H_0} = \\
 &= \xi_B - \xi = 0,888 = 0,25 \\
 \xi &= \frac{\xi_B - 0,25}{0,888} \\
 \frac{y_B}{h} + \frac{y}{h} &= \frac{H_0}{H_0} = \\
 &= \eta_B + \eta = 0,888 = 0,112 \\
 \eta &= \frac{0,112 - \eta_B}{0,888}
 \end{aligned}$$



*Courbes de Bazin pour la section  
AB de la lame.*



*Cr. N° 2.*

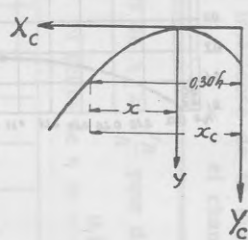


*Cr. N° 3.*

de sorte que le profil de la surface supérieure de la lame se trace à la distance de  $\frac{2}{3}$  de l'épaisseur de la lame en partant de cette parabole. Si l'on demande quels sont les motifs qui ont conduit l'auteur à supposer la particule libre au point dont nous venons de noter les coordonnées (le tiers de l'épaisseur de la lame), on ne trouve aucune autre raison sinon que cette particule — comme le montre l'expérience de Bazin — est soumise à la pression maximum. (Voir le croquis N° 2.)

Table II. de Creager.  
 Pour  $h=1$  en mesures quelconques.

$x_c = \xi_c$	$y_h = \eta_h$		
	Surface supérieure	Surface inférieure	Avantprofil du barrage
0,00	- 0,831	0,126	0,126
0,10	- 0,803	0,036	0,036
0,20	- 0,772	0,007	0,007
0,30	- 0,740	0,000	0,000
0,40	- 0,702	0,007	0,007
0,60	- 0,620	0,063	0,060
0,80	- 0,511	0,153	0,142
1,00	- 0,380	0,267	0,257
1,20	- 0,219	0,410	0,397
1,40	- 0,030	0,590	0,565
1,70	+ 0,305	0,920	0,870
2,00	+ 0,693	1,31	1,22
2,50	+ 1,50	2,10	1,96
3,00	+ 2,50	3,11	2,82
3,50	+ 3,66	4,26	3,82
4,00	+ 5,00	5,61	4,93
4,50	+ 6,54	7,15	6,22



$$x_c - x = 0,30h$$

$$\frac{x_c}{h} - \frac{x}{h} =$$

$$= \xi_c - \xi_h = 0,30$$

$$\xi_h = \xi_c - 0,30.$$

L'équation de la parabole de Creager, la trajectoire de la particule supposée libre, est:

$$(x - a)^2 = \frac{2v_0^2}{g}(y + b) = 2.732(y + b).$$

Cette équation est rapportée au système des axes selon le croquis № 3. Les valeurs de  $a$ ,  $b$ ,  $v_0$  et  $g$  sont trouvées par l'expérience, comme le prétend Creager, pour l'épaisseur de la lame  $h = 1$  m. La table II comprend en elle les valeurs numériques des coordonnées pour  $h = 1$  m. Pour toute autre couche de lame, ces valeurs sont multipliées par la valeur correspondante de  $h$ .

La méthode de Creager est fort arbitraire, mais faute d'autres moyens cette méthode est devenue très populaire, et il est difficile de citer un des projets d'usine hydroélectrique moderne dans lequel le profil du barrage ne serait pas motivé par la méthode de Creager. On trouve une critique bien argumentée de la méthode de Creager dans l'article de L. V. Kazanskaya publié dans le Bulletin de l'Institut Hydrologique, № 20, Leningrad 1927. Dans l'article mentionné l'hydrologue Kazanskaya a proposé sa propre méthode que nous allons discuter. Les résultats des expériences de Bazin obtenus par celui-ci pour une lame liquide servent aussi de base à Kazanskaya. Mais au lieu de la particule de Creager, soumise à la pression maximum, Kazanskaya calcule avant tout le centre de la masse de la section transversale du courant en recourant à l'expression bien connue du moment statique, et en profitant de la loi empirique trouvée par Bazin pour la distribution des vitesses dans la section verticale du courant (voir le cr. № 2). Le calcul de Kazanskaya a abouti à constater que le centre de la masse dans la section verticale répartit celle-ci dans la proportion 0,444 : 0,556. Le point ainsi trouvé est également traité comme un point matériel libre, mais sa trajectoire est trouvée sous la forme de l'expression  $y = a + bx + cx^2$ , en se servant des valeurs de Bazin pour la partie supérieure de la lame et en appliquant la méthode des carrés minimum pour le calcul des coefficients. L'équation de Kazanskaya est

$$(x - 0,1014)^2 = 2.049(y + 0,419).$$

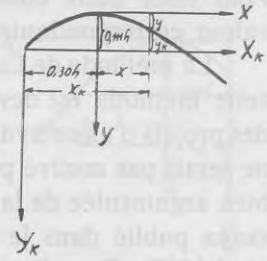
Les coordonnées de la suite du courant de Bazin calculée par Kazanskaya sont groupées dans la table № III.

M. Kazanskaya a certes amélioré la méthode de Creager, mais cette méthode reste malgré tout assez arbitraire et peu hydraulique. Pour en finir avec la critique des moyens mis à la disposition des

Table III. (de Kazanskaya).

Coordonnées de la suite du couraut de Bazin pour  $h=1$  (en mesures quelconques).

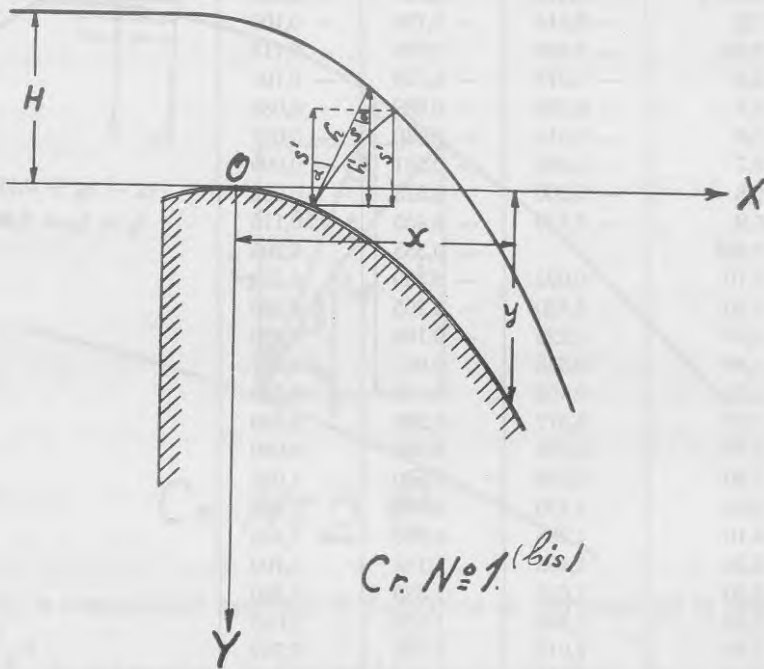
$x_k = \xi_k$	$y_k = \eta_k$		
	Trajectoire du centre de masse	Surface supérieure de la lame	Surface inférieure de la lame
0	—	— 0,851	0
0,1014	— 0,419	— 0,826	— 0,085
0,20	— 0,414	— 0,795	— 0,109
0,30	— 0,400	— 0,762	— 0,111
0,40	— 0,375	— 0,724	— 0,097
0,50	— 0,341	— 0,680	— 0,071
0,60	— 0,298	— 0,627	— 0,035
0,70	— 0,244	— 0,569	+ 0,009
0,80	— 0,181	— 0,505	+ 0,070
0,90	— 0,108	— 0,440	+ 0,150
1,028	0	— 0,330	0,240
1,10	+ 0,0676	— 0,270	0,335
1,20	+ 0,166	— 0,170	0,445
1,30	+ 0,282	— 0,058	0,561
1,40	+ 0,422	+ 0,065	0,680
1,50	0,536	+ 0,208	0,809
1,60	0,673	+ 0,345	0,952
1,70	0,827	0,490	1,100
1,80	0,986	0,650	1,257
2,00	1,34	1,000	1,615
2,10	1,516	1,20	1,800
2,20	1,728	1,395	1,950
2,30	1,938	1,600	2,220
2,40	2,159	1,830	2,435
2,50	2,387	2,050	2,668
2,60	2,628	2,295	2,910
2,70	2,877	2,530	3,158
2,80	3,191	2,795	3,415
2,90	3,401	3,080	3,680
3,00	3,679	3,365	3,950
3,10	3,969	3,645	4,230
3,20	4,269	3,940	4,540
3,30	4,581	4,240	4,840
3,40	4,89	4,570	5,150
3,50	5,231	4,910	5,500



$$\eta_h = \eta_k + 0,111$$

$$\xi_h = \xi_k - 0,30.$$

ingénieurs par différents auteurs, il faut mentionner la proposition de mon ancien maître, l'honorable professeur à Leningrad M. Pouzirevsky, qui traite également le mouvement d'un point libre, mais qui opère avec une certaine force de pression de la lame contre la surface du barrage. Les équations différentielles à intégrer sont assez compliquées et elles sont établies sous l'aspect de deux hypothèses: 1) la pression  $p$  contre le massif de barrage est constante et 2) celle-là est variable suivant une certaine loi établie d'avance. Les coordonnées de M. Pouzirevsky sont contenues dans la table IV. Pour plus de détails les lecteurs sont renvoyés à l'article de M. Kazanskaya.



## II. La méthode de l'auteur.

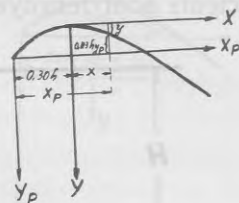
Il est évident que les méthodes que nous venons d'examiner sont peu hydrauliques et que des hypothèses fort arbitraires leur adhèrent qui réduisent leur valeur tant théorique que pratique. La condition nécessaire est que toute méthode quelle qu'elle soit, ait une base hydraulique plus ou moins solide.

Je pars de l'équation de Bernoulli (voir le croquis N° 1<sup>bis</sup>).

Table IV. (de M. Pouzirevsky).

Coordonnées des surfaces de la lame à condition que la pression contre le barrage ait lieu pour  $h = 1$  (en mesures quelconques) et pour le coef. de réserve  $\beta = 0,1$ .

$x_p = \xi_p$	$y_p = \eta_p$		
	Trajectoire du point libre	Surface supérieure	Surface inférieure
0	—	— 0,851	0
0,1014	— 0,419	— 0,826	— 0,085
0,2	— 0,414	— 0,795	— 0,109
0,30	— 0,400	— 0,768	— 0,113
0,4	— 0,377	— 0,728	— 0,105
0,5	— 0,350	— 0,689	— 0,085
0,6	— 0,315	— 0,640	— 0,052
0,7	— 0,262	— 0,581	— 0,090
0,8	— 0,200	— 0,525	0,050
0,9	— 0,130	— 0,455	0,115
1,028	—	— 0,355	0,205
1,10	0,025	— 0,300	0,292
1,20	0,120	— 0,205	0,389
1,30	0,220	— 0,105	0,490
1,40	0,335	0,05	0,607
1,50	0,452	0,130	0,710
1,60	0,577	0,260	0,830
1,70	0,705	0,390	0,960
1,80	0,848	0,530	1,098
2,00	1,130	0,828	1,380
2,10	1,288	0,990	1,535
2,20	1,455	1,148	1,700
2,30	1,635	1,320	1,880
2,40	1,830	1,510	2,065
2,50	2,015	1,705	2,262
2,60	2,220	1,915	2,465
2,70	2,415	2,125	2,670
2,80	2,625	2,335	2,895
2,90	2,850	2,545	3,105
3,00	3,100	2,790	3,365
3,10	3,350	3,030	3,600
3,20	3,600	3,295	3,858
3,30	3,875	3,572	4,120
3,40	4,125	3,840	4,90



$$\eta_h = \eta_h + 0,113;$$

$$\xi_h = \xi_p = 0,30.$$

$$\frac{\nu_0 v_0^2}{2g} + H = H_0 = \frac{\nu v^2}{2g\varphi^2} - y + \int_0^s \cos \alpha' ds - \frac{1}{g} \int_0^s \frac{v'^2}{r'} ds,$$

(1) dans laquelle sont:

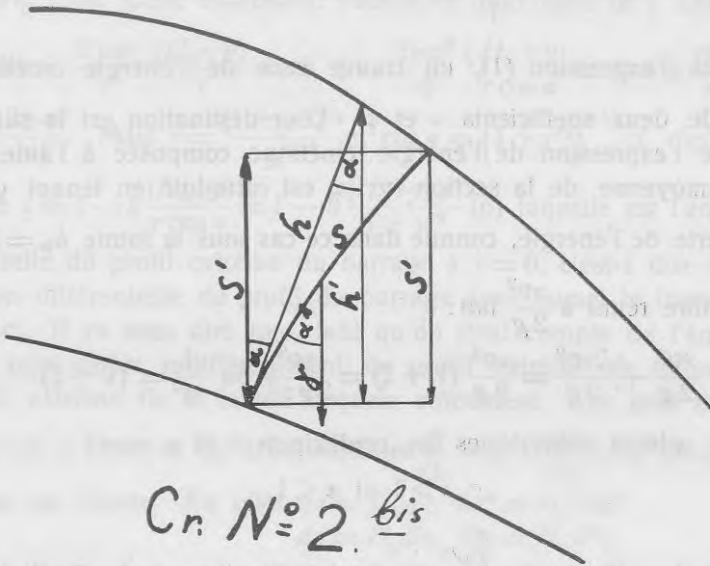
$\nu$ , le coefficient de Coriolis;

$\varphi$ , le coefficient connu de la vitesse;

$\alpha'$ , l'angle d'inclinaison de la tangente à un point quelconque sur la courbe „s“ (voir le croquis N<sup>o</sup> 2<sup>bis</sup>);

$v'$ , la vitesse locale d'une particule d'eau traversant la section „s“;

$r'$ , le rayon de courbure d'un filet.



Ici, le complément essentiel de l'équation de Bernoulli est le membre

$\frac{1}{g} \int_0^s \frac{v'^2}{r'} ds$  qui exprime l'influence de la force centrifuge due à la liaison

imposée à la lame liquide par le profil du barrage avec lequel celle-là doit garder un contact continu. Cette force joue le rôle capital dans la création du vacuum que nous tâchons de combattre. Expliquons la

valeur de l'intégrale  $\int_0^s \cos \alpha' ds$  où  $\alpha'$  est l'angle d'inclinaison de la tangente à la courbe  $s$  à un point quelconque de celle-ci. (Voir le

croquis 2<sup>bis</sup>.) On peut évidemment écrire:  $dp$  (la pression hydrostatique)  $= \frac{dp}{ds} ds = \bar{\gamma} \cdot \bar{ds} = \gamma ds \cos(\bar{\gamma}, \bar{ds}) = \gamma ds \cdot \cos \alpha'$  où  $\gamma$  est le poids spécifique de l'eau. (Voir le croquis 2<sup>bis</sup>.)

D'autre part,

$$\int_0^s dp = p = \gamma \int_0^s \cos \alpha' ds = \gamma \int_0^{s'} ds' = \gamma s' = \gamma h' \beta = \gamma h \cos \alpha \cdot \beta,$$

d'où il suit que

$$\int_0^s \cos \alpha' ds = h \cos \alpha \cdot \beta = \frac{p}{\gamma} \text{ où } \beta \text{ est un coefficient numérique.}$$

Dans l'expression (1), on trouve celle de l'énergie cinétique  $\frac{v^2}{2g}$  munie de deux coefficients  $\nu$  et  $\varphi$ . Leur destination est la suivante:  $\nu$  corrige l'expression de l'énergie cinétique composée à l'aide de la vitesse moyenne de la section  $v$ ;  $\varphi$  est introduit en tenant compte de la perte de l'énergie, connue dans ce cas sous la forme  $h_w = \zeta \cdot \frac{\nu v^2}{2g}$ .

Ce membre réuni à  $\frac{\nu v^2}{2g}$  fait:

$$\frac{\nu v^2}{2g} + \zeta \frac{\nu v^2}{2g} = \frac{\nu v^2}{2g} (1 + \zeta) = \frac{\nu v^2}{2g \varphi^2} \text{ où } \frac{1}{\varphi^2} = (1 + \zeta).$$

Les valeurs numériques des coefficients  $\nu$  et  $\varphi$  sont:

$$\nu > 1 \text{ et } \varphi < 1.$$

Calculons l'intégrale  $\int_0^s \frac{v'^2}{r'} ds$  où  $v'$  est la vitesse individuelle (locale)

du filet de courant correspondant,  $r'$  est le rayon individuel de la trajectoire de la particule. On peut évidemment poser (voir le cr. N<sup>o</sup> 2<sup>bis</sup>)

$$\int_0^s \frac{v'^2}{r'} ds = \frac{v^2}{r} \mu s = \frac{v^2}{r} \mu h$$

où  $\mu$  est un coefficient numérique de passage de la valeur de  $s$  à celle de  $h$  (voir le cr. N<sup>o</sup> 2<sup>bis</sup>),  $v$  est la vitesse moyenne de la section du courant et  $r$  est le rayon de courbure de la surface mouillée du barrage, ou bien de la surface inférieure de la lame.



L'équation de Bernoulli établie pour la lame liquide passant sur le déversoir, a maintenant la forme :

$$(H_0 + y) = \frac{\nu}{\varphi^2} \frac{v^2}{2g} + h \left( \beta \cos \alpha - \frac{\mu v^2}{rg} \right) \quad (5) \text{ ou } \Pi = h \left( \beta \cos \alpha - \frac{\mu v^2}{rg} \right) = h\epsilon$$

est la hauteur présométrique dans un point du profil inférieur de la lame. Pour que la lame liquide ne se détache pas de la surface mouillée du barrage, il faut que  $\Pi = 0$ ,  $\beta \cos \alpha - \frac{\mu v^2}{rg} = \epsilon = 0$  ce qui a

pour conséquence que  $(H_0 + y) = \frac{\nu}{\varphi^2} \frac{v^2}{2g}$  d'où il résulte que  $\frac{v^2}{g} = \frac{2\varphi^2}{\nu} (H_0 + y)$ . Cette expression substituée dans celle de  $\epsilon$  amène à :

$$\epsilon = \beta \cos \alpha - \frac{2\mu\varphi^2}{\nu} \frac{(H_0 + y)}{r} = 0, \quad 1 - \frac{2\mu\varphi^2}{\nu\beta} \frac{(H_0 + y)}{r \cos \alpha} = 1 - k \frac{(H_0 + y)}{r \cos \alpha}$$

où  $k = \frac{2\mu\varphi^2}{\nu\beta}$ . Mais  $r = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$  et  $\cos \alpha = (1 + y'^2)^{-1/2}$  et c'est pour

cela que  $\epsilon = 1 - k \frac{(H_0 + y)}{r \cos \alpha} = 1 - k \frac{(H_0 + y)y''}{1 + y'^2}$  (6) laquelle est l'équation

différentielle du profil extrême du barrage à  $\epsilon = 0$ , c'est-à-dire (6) est l'équation différentielle du profil du barrage avec lequel la lame garde le contact. Il va sans dire que, tant qu'on tient compte de l'équation (6), on peut parler indifféremment du profil extrême du barrage ou du profil extrême de la lame, lesquels coïncident. On peut montrer

que le profil à chercher est dépendant des  $\frac{x}{H_0} = \xi$  et  $\frac{y}{H_0} = \eta$ , une qualité constatée par Bazin. En effet  $dx = H_0 d\xi$ ,  $dx^2 = H_0^2 d\xi^2$

$$dy = H_0 d\eta, \quad d^2y = H_0 d^2\eta,$$

$$y' = \frac{d\eta}{d\xi} = \eta', \quad y'' = \frac{H_0 d^2\eta}{H_0^2 d\xi^2} = \frac{\eta''}{H_0} \text{ et } 1 - k \frac{(H_0 + y)y''}{1 + y'^2} =$$

$$= 1 - k \frac{(H_0 + H_0\eta) \frac{\eta''}{H_0}}{1 + \eta'^2} = 1 - k \frac{(1 + \eta) \eta''}{1 + \eta'^2} = 0. \quad \dots (6^{\text{bis}})$$

Ici,  $k$  est un coefficient numérique dont le rôle est double: ce coefficient cache en lui la valeur du coefficient hydraulique  $\varphi$ , mais cette valeur est masquée par toute une série de coefficients de nature géométrique, ainsi que nous avons pu le constater, et c'est pour cela qu'il serait inutile de faire l'essai de le taxer sommairement, en s'appuyant sur des valeurs numériques citées dans les cours d'hydraulique.

Notons ici quelques qualités spécifiques de l'équation différentielle (6<sup>bis</sup>). En réalité  $k$  n'est pas un coefficient constant, et on peut le déterminer en fonction de  $\eta$  c'est-à-dire, on peut poser  $k = k(\eta)$ . Une de nos tâches capitales sera de trouver cette fonction en nous basant sur les expériences de Bazin. Or, pour trouver cette fonction, on pourra compter  $k$  constant ce qui amènera à tout un système des courbes lesquelles seront croisées par le vrai profil extrême à chercher du barrage. La fonction de  $k$  trouvée, on pourra l'introduire dans l'équation (6<sup>bis</sup>) qui fournira alors l'équation du profil extrême du barrage. On peut résumer ainsi tout ce que nous venons de dire à l'égard de l'équation (6<sup>bis</sup>): l'intégration de l'équation (6<sup>bis</sup>),  $k$  compté constant, ne fournira pas le profil extrême du barrage, mais amènera à une série de courbes à l'aide desquelles on pourra trouver les valeurs numériques de  $k$ . Mais ces valeurs trouvées, on pourra établir la fonction  $k = k(\eta)$ , laquelle substituée dans l'équation (6<sup>bis</sup>), amènera à l'équation différentielle du profil extrême du barrage même. En réalité, cette équation n'est pas indispensable et nous montrons dans ce qui suit comment trouver le profil à chercher à l'aide du système de courbes, en attribuant à  $k$  des valeurs correspondantes. Remarquons encore que dans ce qui suit  $k$  sera remplacé par  $k = \frac{2}{n}$ .

Notons ici encore une qualité caractéristique de l'équation (6<sup>bis</sup>). On voit aisément que  $\eta''$  ne peut s'annuler pour aucune valeur finie de  $\eta$ , c'est-à-dire, le profil à chercher n'aura pas de points de flexion pour aucune valeur finie de  $\eta$  ce qui correspond parfaitement à la forme naturelle du profil qu'on observe en réalité.

Pour intégrer l'équation (6<sup>bis</sup>), introduisons une nouvelle variable

$$\eta' = \frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{d\eta}{dx} \cdot \frac{dx}{d\xi}; \quad \eta'' = \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{d}{d\xi} (\operatorname{tg} \alpha) = \frac{\frac{d\alpha}{d\xi}}{\cos^2 \alpha} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg} \alpha \frac{d\alpha}{d\eta}}{\cos^2 \alpha}. \quad \text{Alors } 1 - k \frac{(1 + \eta) \eta''}{1 + \eta'^2} =$$

$$= 1 - \frac{k(1 + \eta) \operatorname{tg} \alpha \frac{d\alpha}{d\eta}}{\cos^2 \alpha \left(1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}\right)} = 1 - k(1 + \eta) \operatorname{tg} \alpha \frac{d\alpha}{d\eta} = 0.$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot dx = \frac{d\eta}{k(1 + \eta)} = -d \ln \cos \alpha = \frac{1}{k} d \ln (1 + \eta), \quad \text{ou bien:}$$

$d \ln [(1 + \eta) \cos \alpha^k] = 0$ .  $\ln [(1 + \eta) \cos \alpha^k] = C_1$ .  $(\eta)_{\alpha=0} = 0$  et c'est pour cela que  $\ln 1 = 0 = C_1$  et  $\ln (1 + \eta) \cos \alpha^k = 0 = \ln 1$  et  $(1 + \eta) \cos \alpha^k = 1$ ,  $(1 + \eta) = \cos \alpha^{-k} = (1 + \eta'^2)^{k/2}$  ou bien:  $1 + \eta'^2 = (1 + \eta)^{2/k}$ ;  $\eta' = \frac{d\eta}{d\xi} = \sqrt{(1 + \eta)^{2/k} - 1}$ . . . . . (7)

L'avantage de cette forme est celui de l'absence de la dérivée de second degré, donc on a maintenant obtenu une équation différentielle de premier degré.

Introduisons la nouvelle désignation  $\frac{2}{k} = n$ , alors  $\eta' = \frac{d\eta}{d\xi} = \sqrt{(1 + \eta)^n - 1}$ . . . . . (7bis)

Pour deux valeurs numériques de  $k=2$  et  $k=1$  on peut aisément trouver les intégrales correspondantes.

a)  $k = 2, n = 1$ .

$\eta' = \frac{d\eta}{d\xi} = \sqrt{1 + \eta - 1} = \sqrt{\eta} = \eta^{1/2}$ ;  
 $\eta^{-1/2} d\eta = 2 d\eta^{1/2} = d\xi \cdot 2\eta^{1/2} = \xi + C_1 : (\eta)_{\xi=0} = 0, C_1 = 0$   
 et  $\eta = \frac{\xi^2}{4}$  (parabole) . . . . . (8)

b)  $k = 1, n = 2$ .

$\frac{d\eta}{d\xi} = \eta' = \sqrt{(1 + \eta)^2 - 1} = \sqrt{1 + 2\eta + \eta^2 - 1} = \sqrt{2\eta + \eta^2}$ ;  
 $\frac{d\eta}{\sqrt{2\eta + \eta^2}} = d \ln [(1 + \eta) + \sqrt{(1 + \eta)^2 - 1}] = d\xi$  et  $\xi = \ln [(1 + \eta) + \sqrt{(1 + \eta)^2 - 1}] + C_3$ . Puisque  $(\eta)_{\xi=0} = 0, C_3 = 0$  et  $\xi = \ln [(1 + \eta) + \sqrt{(1 + \eta)^2 - 1}]$  . . . . . (9)

Etudions un mouvement plan déterminé par les circonstances suivantes: l'accélération horizontale est:

$j_x = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = 0$ ,

l'accélération verticale est:

$j_y = \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} = g = \frac{dv_y}{dt}$ ,

la vitesse initiale est:

$v_{ox} = \sqrt{2gH_0}, v_{oy} = 0$ ,

la position initiale du point matériel est:

$x_0 = y_0 = 0$ . Alors:  $\frac{dv_x}{dt} = 0, v_x = \text{Const} = v_{ox}$ ;

$\frac{dv_y}{dt} = g$ ,  $v_y = gt + \text{Const}_2$ ,  $(v_y)_{t=0}$  étant:  $(v_y)_{t=0} = v_{oy} = 0$ ,  $\text{Const}_2 = 0$  et  $v_y = gt$ , après quoi  $v_y = \frac{dy}{dt} = gt$ ,  $y = \frac{gt^2}{2} + \text{Const}_3$ ,  $(y)_{t=0}$  étant  $(y)_{t=0} = y_0 = 0$ ,  $\text{Const}_3 = 0$  et  $y = \frac{gt^2}{2}$ ;  $v_x = v_{ox} = \frac{dx}{dt}$ ,  $dx = v_{ox} dt$ ,  $x = v_{ox} t + \text{Const}_4$ ,  $(x)_{t=0}$  étant  $(x)_{t=0} = x_0 = 0$ ,  $\text{Const}_4 = 0$  et  $x = v_{ox} t$ . La trajectoire du mouvement est  $y = \frac{g}{2} \frac{x^2}{v_{ox}^2}$ . Si l'on pose  $v_{ox} = \sqrt{2gH_0}$ ,

$$\text{on a: } y = \frac{g x^2}{2 \cdot 2gH_0} = \frac{x^2}{4H_0} \text{ ou bien } \frac{y}{H_0} = \eta = \frac{x^2}{4H_0^2} = \frac{\xi^2}{4},$$

c'est-à-dire, l'équation (8) représente la trajectoire du mouvement du point matériel lancé avec la vitesse horizontale initiale  $v_{ox} = \sqrt{2gH_0}$ . On pourra montrer qu'à cette courbe adhère un degré exagéré de sécurité contre le vacuum et c'est pour cela que cette courbe doit être écartée.

Pour une valeur quelconque de  $n$ , différant de  $n = 2$  et  $n = 1$ , on a recours au développement de la fonction  $\sqrt{(1 + \eta)^n - 1}$  en série et on a:

$$\begin{aligned} \eta' &= \frac{d\eta}{d\xi} = \left\{ (1 + \eta)^n - 1 \right\}^{1/2} = \left\{ 1 + n\eta + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \eta^2 + \dots - 1 \right\}^{1/2} = \\ &= \left\{ n\eta + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \eta^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \eta^3 + \dots \right\}^{1/2} = \\ &= (n\eta)^{1/2} \left\{ 1 + \frac{(n-1)}{2} \eta + \frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} \eta^2 + \dots \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Cette série est bien convergente pour les valeurs de  $\eta$  de la partie supérieure de la lame (voir le tableau de Bazin) parce que  $\max \eta < 1$  et outre cela le coefficient

$$a_m = \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-m)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m(m+1)} = \frac{\left(\frac{n}{1} - 1\right) \left(\frac{n}{2} - 1\right) \dots \left(\frac{n}{m} - 1\right)}{m+1} \text{ et}$$

$\lim (a_m)_{m \rightarrow \infty} = 0$ . Les membres de cette série changent de signe: pour  $1 < n < 2$ , à partir de  $\frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$  et pour  $2 < n < 3$  (cette condition aura lieu comme nous le verrons), à partir du membre suivant. C'est de cette manière qu'on peut se borner à la somme des deux membres en acceptant  $\frac{d\eta}{d\xi} = (n\eta)^{1/2} \cdot \left(1 + \frac{(n-1)}{2} \eta\right)$  après quoi l'erreur

de la valeur de  $\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2$  ne dépassera pas la valeur de  $\frac{(n-1)(n-2)}{6}\eta^2$ .

C'est pour cela que la valeur de  $\frac{d\eta}{d\xi} = (n\eta)^{1/2} \left(1 + \frac{n-1}{2}\eta\right)^{1/2}$  sera assez exacte pour qu'on puisse baser sur celle-ci l'intégration de

$\frac{d\eta}{d\xi} = \sqrt{(1+\eta)^n - 1}$  pour  $\eta < 1$ . La valeur approximative de  $\frac{d\eta}{d\xi}$  adoptée, on aura

$$\begin{aligned} & \frac{d\eta}{\sqrt{\eta + \frac{(n-1)\eta^2}{2}}} = \\ & = \sqrt{\frac{2}{n-1}} \ln \left[ \frac{1}{2} + \frac{(n-1)}{2}\eta + \sqrt{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\eta + \frac{n-1}{2}\eta^2} \right] = \\ & \quad = \sqrt{n} \cdot d\xi \text{ et} \\ & \sqrt{\frac{2}{n-1}} \ln \left[ \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2}\eta + \sqrt{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\eta + \frac{n-1}{2}\eta^2} \right] + C' = \sqrt{n} \cdot \xi. \end{aligned}$$

Puisque  $(\eta)_{\xi=0}$  on a pour la détermination de  $C'$  l'équation  $0 =$

$$\begin{aligned} & = \sqrt{\frac{2}{n-1}} \ln \frac{1}{2} + C', \quad C' = \sqrt{\frac{2}{n-1}} \ln \frac{1}{2} \text{ et } \sqrt{n} \cdot \xi = \\ & \quad \sqrt{\frac{2}{n-1}} \ln \left[ \frac{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\eta + \frac{n-1}{2}\eta^2}}{\frac{1}{2}} \right] = \\ & = \sqrt{\frac{2}{n-1}} \ln \left[ 1 + (n-1)\eta + \sqrt{n-1} \cdot \sqrt{2\eta + (n-1)\eta^2} \right] \text{ ou bien:} \\ & \xi = \sqrt{\frac{2}{n(n-1)}} \ln \left[ 1 + (n-1)\eta + \sqrt{n-1} \cdot \sqrt{2\eta + (n-1)\eta^2} \right] \quad (10) \end{aligned}$$

On peut aisément constater que les équations (8) et (9) représentent des cas particuliers du cas général (10). En effet, pour la valeur de  $n=2$ ,  $k=1$ , l'équation (10) passe en:

$$\begin{aligned} \xi & = \sqrt{\frac{2}{n(n-1)}} \ln \left[ 1 + (n-1)\eta + \sqrt{(n-1)} \sqrt{2\eta + (n-1)\eta^2} \right]_{n=2} = \\ & = \ln [1 + (n-1)\eta + \sqrt{2\eta + \eta^2}] = \ln [1 + (n-1)\eta + \sqrt{(1+\eta)^2 - 1}] \quad (9) \end{aligned}$$

Pour  $n=1$  et  $k=2$ , on aurait :

$$\xi = \sqrt{\frac{2}{0}} \ln 1 = \frac{0}{0}.$$

D'une manière bien connue on parvient à constater que :

$$\begin{aligned} \xi &= \lim_{n \rightarrow 1} \sqrt{2 \cdot \frac{d}{dn} \ln \left[ 1 + (n-1)\eta + \sqrt{(n-1)} \sqrt{2\eta + (n-1)\eta^2} \right]} = \\ &= \lim_{n \rightarrow 1} \frac{\frac{d}{dn} \sqrt{n(n-1)}}{\sqrt{2 \left[ \eta + \frac{1}{2} (n-1)^{-1/2} \sqrt{2\eta + (n-1)\eta^2} + \frac{1}{2} \sqrt{(n-1)} \left\{ 2\eta + (n-1)\eta^2 \right\}^{-1/2} \eta^2 \right]}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2} \left[ \eta \sqrt{n-1} + \frac{1}{2} \sqrt{2\eta + (n-1)\eta^2} \cdot \frac{1}{2} (n-1) \left\{ 2\eta + (n-1)\eta^2 \right\}^{-1/2} \eta^2 \right]}{\left[ 1 + (n-1)\eta + \sqrt{(n-1)} \sqrt{2\eta + (n-1)\eta^2} \right] \frac{1}{2} n^{-1/2} (2n-1)} = \\ &= 2 \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2\eta} = 2\sqrt{\eta} \text{ ce qui correspond à l'équation déjà établie} \\ &(8) \text{ dont la forme était } \eta = \frac{\xi^2}{4}. \end{aligned}$$

L'équation (10) établie, on passe au calcul du coefficient  $n$  en se servant des valeurs numériques de Bazin. Avant de procéder à cette opération, on développe la fonction

$\ln [1 + (n-1)\eta + \sqrt{(n-1)} \sqrt{2\eta + (n-1)\eta^2}]$  en série d'après la formule connue  $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left( x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right)$  pour  $-1 < x < 1$ . Cette série est très convergente pour des valeurs de  $x$  assez petites. En posant  $(n-1)\eta + \sqrt{(n-1)} \sqrt{2\eta + (n-1)\eta^2} = A$  on a :  $\frac{1+x}{1-x} = 1+A$ ,

$$1+x = 1+A-x-xA, \quad x(2+A) = A \text{ d'où } x = \frac{A}{2+A} \dots (11)$$

et  $\xi = 2 \sqrt{\frac{2}{n(n-1)}} \cdot x \left( 1 + \frac{x^2}{3} + \dots \right)$ . En se bornant à deux membres de cette série rapidement convergente pour des valeurs de  $x$  assez petites, on aura finalement la formule de calcul :

$$\xi = 2 \sqrt{\frac{2}{n(n-1)}} x \cdot \left( 1 + \frac{x^2}{3} \right) \dots \dots \dots (12)$$

La suite du calcul est la suivante: pour une certaine valeur de  $\eta$ , prise de la table de Bazin, on adopte une certaine valeur de  $n$  et on calcule la valeur de  $\xi$  d'après la formule (12). La coïncidence satisfaisante de la valeur calculée de  $\xi$  avec celle qui est observée par Bazin, servira de symptôme du bon choix de  $n$ .

#### Calcul des valeurs numériques du coefficient $n$ .

Il serait inutile de calculer les valeurs numériques pour toutes les valeurs de  $\xi$  et de  $\eta$  de la table I (de Bazin), car c'est la loi de changement de  $n$  en fonction de  $\eta$  qui nous intéresse surtout. S'il en est ainsi, la partie initiale de la lame, où la divergence de filets est considérable, est sans importance et on peut se borner au calcul de quelques valeurs de  $n$  déterminant la partie finale de la lame de Bazin.

La calcul se fait sur la base de l'équation (10)

$$\xi = \sqrt{\frac{2}{n(n-1)}} \ln \left[ 1 + (n-1) \eta + \sqrt{(n-1)} \sqrt{2\eta + (n-1)\eta^2} \right],$$

laquelle, les valeurs de  $\xi$  et de  $\eta$  de Bazin substituées et  $n$  convenablement choisi, passe en identité.

La formule (12)  $\xi = 2 \sqrt{\frac{2}{n(n-1)}} \cdot x \left( 1 + \frac{x^2}{3} \right)$  dans laquelle  $x = \frac{A}{2+A}$ , mais  $A = (n-1)\eta + \sqrt{(n-1)} \sqrt{2\eta + (n-1)\eta^2}$ , est la formule de calcul. Celui-ci est exécuté à l'aide de la règle logarithmique.

Le point d'observation 13 (voir la table № 1).

Pour  $\xi = 0,2815$  et  $\eta = 0,0462$ , acceptons  $n = 2,32$ ;  $\sqrt{(n-1)} = \sqrt{1,32} = 1,15$ .

$$\begin{aligned} \text{Alors } \sqrt{\frac{2}{n(n-1)}} &= \frac{1}{n(n-1)} \sqrt{2n(n-1)} = \\ &= \frac{1}{2,32 \times 1,32} \sqrt{4,64 \times 1,32} = \frac{1}{3,0624} \sqrt{6,1248} = \frac{2,4748}{3,0624} = 0,81; \\ 2 \sqrt{\frac{2}{n(n-1)}} &= 2 \times 0,81 = 1,62. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A &= 10^{-3} (46,2 \times 1,32 + 1,15 \sqrt{92400 + 1,32 \times 46,2^2}) = \\
 &= 10^{-3} (60,984 + 1,15 \sqrt{92400 + 1,32 \times 2134,44}) = \\
 &= 10^{-3} (60,984 + 1,15 \sqrt{92400 + 2817,4608}) = \\
 &= 10^{-3} (60,984 + 1,15 \sqrt{95217,46}) = 10^{-3} (60,984 + 1,15 \times 308,6) = \\
 &= 10^{-3} (60,984 + 354,890) = 10^{-3} \times 415,874 = 0,41587;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{A}{2+A} = \frac{0,41587}{2,41587} = 0,172; \quad \xi = 2 \sqrt{\frac{2}{n(n-1)}} \cdot x \left(1 + \frac{x^2}{3}\right) = \\
 &= 1,62 \times 0,172 \left(1 + \frac{0,029584}{3}\right) = 1,62 \times 0,172 \times 1,00986 = 0,2814,
 \end{aligned}$$

la valeur observée de  $\xi$  étant  $\xi = 0,2815$  ce qui permet d'accepter la valeur de  $n = 2,32$  comme satisfaisante.

Le point d'observation № 14.

$\xi = 0,338$ ,  $\eta = 0,0653$ ; acceptons  $n = 2,24$ .

$$\begin{aligned}
 \text{Alors: } \sqrt{\frac{2}{n(n-1)}} &= \sqrt{\frac{2}{2,24 \times 1,24}} = \sqrt{\frac{1}{1,12 \times 1,24}} = \\
 &= \frac{1}{1,12 \times 1,24} \sqrt{1,12 \times 1,24} = \frac{1}{1,3888} \sqrt{1,3888} = \frac{1,177}{1,3888} = 0,841; \\
 \sqrt{(n-1)} &= \sqrt{1,24} = 1,11355. \quad \eta^2 = 10^{-6} \times 4264,09;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A &= 10^{-3} (65,3 \times 1,24 + 1,11355 \sqrt{130600 + 1,24 \times 4264,09}) = \\
 &= 10^{-3} (80,972 + 1,11355 \times \sqrt{130600 + 5287,5}) = 10^{-3} (80,972 + \\
 &+ 1,11355 \sqrt{135887,50}) = 10^{-3} (80,972 + 1,11355 \times 368,6) = \\
 &= 10^{-3} (80,972 + 410) = 10^{-3} \times 490,972 = 0,490972;
 \end{aligned}$$

$$x = \frac{0,490972}{2,490972} = 0,197;$$

$$\begin{aligned}
 \xi &= 2 \times 0,841 \times 0,197 \times \left(1 + \frac{0,197^2}{3}\right) = 1,682 \times 0,197 \left(1 + \frac{0,038809}{3}\right) = \\
 &= 1,682 \times 0,197 \times 1,013 = 0,336 \text{ (valeur observée} = 0,338).
 \end{aligned}$$

La valeur plus précise de  $n$  doit être un peu moindre que  $n = 2,24$ . Mais il ne vaut pas la peine d'aspirer à une coïncidence des valeurs de  $\xi$  plus parfaite.



Le point d'observation № 15.

$\xi = 0,395$ ,  $\eta = 0,0867$ ; acceptons  $n = 2,2$ .

$$\begin{aligned} \text{Alors: } \sqrt{\frac{2}{n(n-1)}} &= \sqrt{\frac{2}{2,2 \times 1,2}} = \frac{1}{1,1 \times 1,2} \sqrt{1,1 \times 1,2} = \\ &= \frac{\sqrt{1,32}}{1,32} = \frac{1,14891}{1,32} = 0,87; \sqrt{(n-1)} = \sqrt{1,20} = 1,10. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= 10^{-3} (86,7 \times 1,2 + 1,10 \sqrt{173400 + 1,2 \times 86,7^2}) = \\ &= 10^{-3} (86,7 \times 1,2 + 1,10 \sqrt{173400 + 1,2 \times 7516,89}) = \\ &= 10^{-3} (104,04 + 1,10 \sqrt{173400 + 9020,27}) = \\ &= 10^{-3} (104,04 + 1,10 \sqrt{182420,27}) = 10^{-3} (104,04 + 1,10 \times 427,10) = \\ &= 10^{-3} (104,04 + 469,81) = 10^{-3} \times 573,85 = 0,57385. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{0,57385}{2,57385} = 0,223; \xi = 2 \times 0,87 \times 0,223 \left(1 + \frac{0,223^2}{3}\right) = \\ &= 2 \times 0,87 \times 0,223 \left(1 + \frac{0,049729}{3}\right) = 1,74 \times 0,223 \times 1,0166 = \\ &= 0,394 \text{ (la valeur observée de } \xi = 0,394). \end{aligned}$$

Le point d'observation № 16.

$\xi = 0,450$ ,  $\eta = 0,1115$ ; acceptons  $n = 2,10$ .

$$\sqrt{\frac{2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{2}{2,1 \times 1,1}} = \frac{1}{2,31} \sqrt{4,62} = \frac{2,14942}{2,31} = 0,93.$$

$$\begin{aligned} A &= 10^{-3} (111,5 \times 1,1 + 1,04881 \sqrt{223000 + 1,1 \times 12442,25}) = \\ &= 10^{-3} (122,65 + 1,04881 \sqrt{223000 + 13686,475}) = \\ &= 10^{-3} (122,65 + 1,04881 \sqrt{236686,475}) = \\ &10^{-3} (122,65 + 1,04881 \times 486,5) = 10^{-3} (122,65 + 508) = 10^{-3} 630,65 = \\ &= 0,6306; x = \frac{0,6306}{2,6306} = 0,239; \xi = 2 \times 0,93 \times 0,239 \left(1 + \frac{0,057121}{3}\right) = \\ &= 1,86 \times 0,239 \times 1,019 = 0,452 \text{ (valeur observée } \xi = 0,450) \text{ c'est-à-dire,} \\ &\text{la valeur plus précise de } n \text{ dépasse très peu la valeur acceptée} \\ &\text{pour } n = 2,10. \end{aligned}$$

La loi  $n = n(\eta)$ .

En nous basant sur les 4 valeurs de  $n$ , tâchons d'établir la loi de changement de  $n$  en fonction de  $\eta$ . Si l'on trace les 4 valeurs en fonction de  $\eta$  on parvient à une courbe qui diffère peu de la droite. En réalité, la loi de  $n$  ne peut être représentée par une droite, parce que, dans ce cas, la droite passerait par la valeur extrême de  $n = 1$  pour une valeur finie de  $\eta$  ce qui n'est pas possible. La loi hyperbolique donc s'impose et la fonction à chercher doit se distinguer par les qualités:  $n(\eta)_{\eta \rightarrow \infty} = 1$ . Les 4 valeurs de  $n$  étant données, on pourrait écrire:  $(n - 1) = \frac{a}{\eta^4} + \frac{b}{\eta^3} + \frac{c}{\eta^2} + \frac{d}{\eta}$ . Mais la loi de  $n$  trouvée pouvant à peu près être représentée par une droite, nous déterminons l'hyperbole à chercher par les conditions: 1) la droite passant par les valeurs trouvées, de  $n$  est la tangente de l'hyperbole au point final  $\xi = 0,450$ ,  $\eta = 0,1115$ ; 2)  $n(\eta)_{\eta \rightarrow \infty} = 1$  et 3) l'hyperbole doit passer par le point final  $n(\eta)_{\eta} = 0,1115$ . Il est évident que cette loi de  $n$  garantira même une certaine réserve contre le vacuum, parce qu'en réalité la valeur  $n(\eta)_{\eta \rightarrow \infty} > 1$  en vertu de la résistance intérieure de la lame et extérieure de l'air laquelle ne permettra pas à  $n$  d'atteindre sa valeur extrême  $n = 1$ .

Pour correspondre aux deux conditions adoptées, il faudra poser:

$$(n - 1) = \frac{a}{\eta} + \frac{b}{\eta^2} \quad (13) \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des coefficients à déterminer.}$$

Pour le calcul des coefficients  $a$  et  $b$  on a les conditions:

$$1) (n - 1)_{n=2,12} = 1,12 = \left( \frac{a}{\eta} + \frac{b}{\eta^2} \right)_{\eta=0,1115} = \frac{a}{0,1115} + \frac{b}{0,1115^2}$$

$$\text{et } 2) \left( \frac{dn}{d\eta} \right)_{\eta=0,1115} = \frac{d}{d\eta} \left( \frac{a}{\eta} + \frac{b}{\eta^2} \right)_{\eta=0,1115} = - \left( \frac{a}{\eta^2} + \frac{2b}{\eta^3} \right)_{\eta=0,1115}$$

$$\text{ou bien: } \left\{ \left( \frac{dn}{d\eta} \right) \cdot \eta \right\}_{\eta=0,1115} = - \left( \frac{a}{\eta} + \frac{2b}{\eta^2} \right)_{\eta=0,1115} =$$

$$= - \left( \frac{a}{0,1115} + \frac{2b}{0,1115^2} \right). \text{ En ce qui concerne } \left( \frac{dn}{d\eta} \right)_{\eta=0,1115} \text{ on peut}$$

$$\text{approximativement accepter: } \left( \frac{dn}{d\eta} \right)_{\eta=0,1115} = - \frac{2,32 - 2,12}{0,1115 - 0,0462} =$$

$$= - \frac{0,2000}{0,0653} = - \frac{2000}{653}. \text{ Alors on aura le système d'équations, provi-}$$

soirement posé  $\frac{a}{0,1115} = a'$  et  $\frac{b}{0,1115^2} = b'$ :  $1,12 = a' + b'$

$$\frac{2000 \times 0,1115}{653} = a' + 2b'$$

d'où il suit que  $b' = \frac{b}{0,1115^2} = \frac{2000 \times 0,1115}{653} - 1,12 = \frac{223 - 731,36}{653}$ ;

$$b = \frac{(223 - 731,36)}{653} 0,1115^2 = -\frac{508,36}{653} \times 0,01243225 = -0,00965;$$

$$a' = 1,12 - b' = 1,12 - \frac{2000 \times 0,1115}{653} + 1,12 = \frac{2,24 \times 653 - 2000 \times 0,1115}{653} =$$

$$\frac{1462,72 - 223}{653} = \frac{1239,72}{653}; \quad a = a' \cdot 0,1115 = \frac{1239,72}{653} \times 0,1115 = 0,212 \text{ et}$$

$$\text{finalement } (n-1) = \frac{0,212}{\eta} - \frac{0,00965}{\eta^2} \dots \dots (14)$$

Il faut traiter l'équation (14) comme une équation provisoire, approximative, dont l'expression peut être précisée ensuite par un calcul plus soigné et plus minutieux que celui qui était exécuté à l'aide de la règle logarithmique.

La courbe de réserve contre le vacuum.

Etudions la question de la réserve contre le vacuum. Cette réserve est déterminée par la condition que  $\beta \cos \alpha_1 - \frac{\mu v_1^2}{gr} = \varepsilon > 0$  ou bien:

$$1 - \frac{k(1+\eta)\eta_1''}{1+\eta_1'^2} > 0 \text{ ce qui amène à conclure que } \frac{\eta_1''}{1+\eta_1'^2} < \frac{1}{k(1+\eta)}$$

ou bien la courbe à chercher est:  $\frac{\eta_1''}{1+\eta_1'^2} = \frac{a}{k(1+\eta)}$  où  $a < 1$ .

Alors:  $1 - \frac{k}{a} \cdot \frac{(1+\eta)\eta_1''}{1+\eta_1'^2} = 0$  dont la première intégrale, suivant l'expression (7<sup>bis</sup>), est  $\eta_1' = \frac{d\eta}{d\xi_1} = \sqrt{(1+\eta)^{n_1} - 1}$  où  $n_1 = \frac{2}{k} a < n$ .

C'est-à-dire que toute courbe déterminée par l'expression (7<sup>bis</sup>), mais à condition que  $n_1 < n$  où  $n$  est la valeur extrême de ce coefficient, assurera une certaine réserve contre le vacuum. Il faut s'avouer que cette réduction de  $n$  équivaut à la réduction correspondante de l'angle  $\alpha$  lequel est lié à  $\eta'$  par  $\eta' = \text{tg } \alpha$ .

C'est de cette manière qu'on a montré le moyen de créer une réserve contre le vacuum, en réduisant la valeur de  $\alpha$  par la réduction du coefficient  $n$ . Il faut, toutefois, constater que cette réduction, assurant une réserve contre le vacuum, a pour conséquence la réduction du coefficient du déversoir: la couche  $H_0$  augmente en même temps que le profil du barrage devient plus épais (voir les expériences exécutées par le Dipl. Ingen. Ottmar Dillmann: Mitteilungen des Hydraulischen Instituts der Technischen Hochschule München, Heft 7, 1933), abstraction faite de l'augmentation des frais des travaux. Toutes ces considérations amènent à conclure que la réserve contre le vacuum doit être modérée et c'est pour cela que la courbe parabolique (8), obtenue pour la valeur de  $n=1$ , adoptée par plusieurs auteurs, et ayant pris naissance dans l'idée du mouvement libre d'un point matériel, doit être rejetée comme irrationnelle.

Construction de la suite de la courbe de Bazin sur la base des formules (10), (12) et (14).

Adoptons  $\eta = 0,50$  pour laquelle conformément à la formule (14):

$$(n-1) = \frac{0,212}{\eta} - \frac{0,00965}{\eta^2} = \frac{0,212}{0,50} - \frac{0,00965}{0,25} = 0,4240 - 0,0386 = 0,3854, \quad n = 1 + 0,3854 = 1,3854.$$

D'après (12) on a:

$$\xi = 2 \sqrt{\frac{2}{n(n-1)}} \cdot x \left(1 + \frac{x^2}{3}\right); \quad x = \frac{A}{2+A}, \quad A =$$

$$(n-1)\eta + \sqrt{(n-1)\sqrt{2\eta + (n-1)\eta^2}} = 0,3854 \cdot 0,50 + \sqrt{0,3854 \cdot \sqrt{1+0,385 \times 0,25}} = 0,1927 + 0,621 \cdot \sqrt{1,09635} = 0,1927 + 0,621 \times 1,047 = 0,1927 + 0,650 = 0,8427; \quad x = \frac{0,8427}{2,8427} = 0,296;$$

$$2 \sqrt{\frac{2}{n(n-1)}} = \frac{2\sqrt{2 \times 1,3854 \times 0,3854}}{1,3854 \times 0,3854} = \frac{2\sqrt{1,070}}{0,535} = \frac{2 \times 1,03441}{0,535} = 3,87; \quad \xi = 3,87 \times 0,296 \left(1 + \frac{0,087616}{3}\right) = 3,87 \times 0,296 \times 1,0292 = 1,175.$$

Pour des valeurs de  $\eta \geq 0,50$ , transcrivons l'expression

$$\eta' = \sqrt{(1+\eta)^n - 1} \text{ sous la forme } \frac{d\eta}{\sqrt{(1+\eta)^n - 1}} =$$

$$d\eta \cdot \left\{ (1+\eta)^n - 1 \right\}^{-1/2} = d\xi; \left\{ (1+\eta)^n - 1 \right\}^{-1/2} \text{ est développée en une série}$$

$$\text{convergente } \left\{ (1+\eta)^n - 1 \right\}^{-1/2} = (1+\eta)^{-n/2} \left\{ 1 - \frac{1}{(1+\eta)^n} \right\}^{-1/2} =$$

$$= (1+\eta)^{-n/2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{(1+\eta)^n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \frac{1}{2(1+\eta)^{2n}} + \frac{1}{2} \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 3} \frac{1}{(1+\eta)^{3n}} + \dots \right.$$

$$\left. + \dots \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1)}{2^m \cdot m!} \frac{1}{(1+\eta)^{n \cdot m}} \right\}.$$

$$\text{Alors: } \int_{0,50}^{\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{(1+\eta)^n - 1}} = \int_{0,50}^{\eta} (1+\eta)^{-n/2} d\eta + \frac{1}{2} \int_{0,50}^{\eta} (1+\eta)^{-3n/2} d\eta +$$

$$+ \dots \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1)}{2^m \cdot m!} \int_{0,50}^{\eta} (1+\eta)^{-\frac{(1+2m)n}{2}} d\eta =$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}n} \left| (1+\eta)^{1-n/2} \right|_{0,50}^{\eta} + \frac{1}{2 \left( 1 - \frac{3n}{2} \right)} \left| (1+\eta)^{1-3n/2} \right|_{0,50}^{\eta} + \dots$$

$$\dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1)}{2^m 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m \left[ 1 - \frac{2m+1}{2}n \right]} \left| (1+\eta)^{1 - \frac{2m+1}{2}n} \right|_{0,50}^{\eta} =$$

$$= \frac{2}{2-n} \left[ (1+\eta)^{\frac{2-n}{2}} - (1,5)^{\frac{2-n}{2}} \right] + \frac{2}{2(2-3n)} \left[ (1+\eta)^{\frac{2-3n}{2}} - (1,5)^{\frac{2-3n}{2}} \right] + \dots$$

$$+ \dots \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1) \cdot 2}{2^m 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m \left[ 2 - (2m+1)n \right]} \left[ (1+\eta)^{\frac{2-(2m+1)n}{2}} - 1,5^{\frac{2-(2m+1)n}{2}} \right] =$$

$$= (\xi)_{\eta} - (\xi)_{\eta=0,50} \dots \dots \dots (15)$$

Calcul de  $\xi$  d'après la formule (15).

Acceptons  $\eta=1$  à laquelle correspond  $(n-1) = \left(\frac{0,212}{\eta} - \frac{0,00965}{\eta^2}\right)_{\eta=1} = 0,212 - 0,00965 = 0,20$ ,  $n = 1 + 0,20 = 1,20$ .

D'après les formules (10) et (12) on a :

$$(\xi)_{\eta=0,50} - (\xi)_{\eta=0} = \sqrt{\frac{2}{n(n-1)}} \ln \left[ 1 + (n-1)\eta + \sqrt{n-1} \cdot \sqrt{2\eta + (n-1)\eta^2} \right]_{\eta=0,50} = 2 \sqrt{\frac{2}{n(n-1)}} x \left( 1 + \frac{x^2}{3} \right)_{\eta=0,50}$$

$$\text{où } x = \frac{A}{2+A} = \frac{(n-1)\eta + \sqrt{n-1} \cdot \sqrt{2\eta + (n-1)\eta^2}}{2 + (n-1)\eta + \sqrt{n-1} \cdot \sqrt{2\eta + (n-1)\eta^2}}$$

$$A = 0,10 + 0,44721 \sqrt{1+0,05} = 0,10 + 0,44721 \sqrt{1,05} = 0,10 + 0,44721 \cdot 1,02470 = 0,10 + 0,46 = 0,56; \quad x = \frac{0,56}{2,56} = 0,219.$$

$$\sqrt{\frac{2}{n(n-1)}} = \frac{1}{1,20 \cdot 0,20} \sqrt{0,48} = \frac{0,69282}{0,240} = 2,89$$

$$\text{et } (\xi)_{\eta=0,50} - (\xi)_{\eta=0} = 2 \sqrt{\frac{2}{n(n-1)}} \cdot x \left( 1 + \frac{x^2}{3} \right) = 2 \cdot 2,89 \cdot 0,219 \left( 1 + \frac{0,047961}{3} \right) = 5,78 \cdot 0,219 \cdot 1,016 = 1,28. \quad \text{La même}$$

valeur calculée d'après la formule (8)  $\eta = \frac{\xi^2}{4}$  est :  $\xi = \sqrt{4\eta} = 2\sqrt{\eta} = 2\sqrt{0,50} = 2 \cdot 0,70711 = 1,41422 > 1,28$  — ce qui était à prévoir.

A partir de ce point, on calcule d'après la formule (15), dans laquelle est :

$$\frac{2-n}{2} = \frac{2-1,20}{2} = \frac{0,80}{2} = 0,40;$$

$$\frac{2-3n}{2} = \frac{2-3,6}{2} = -\frac{1,6}{2} = -0,80;$$

$$\frac{2-5n}{2} = \frac{2-6}{2} = -\frac{4}{2} = -2;$$

$$\frac{2-7n}{2} = \frac{2-8,4}{2} = -\frac{6,4}{2} = -3,2.$$

$$\ln(1+\eta)_{\eta=1} = \ln 2 = 0,69315.$$

$$\ln 1,5 = \ln 15 - \ln 10 = 2,70805 - 2,30259 = 0,40546.$$

$$\frac{2-n}{2} = 0,40; \quad \left( 1 + \eta \right)_{\eta=1}^{\frac{2-n}{2}} = 2^{0,40}; \quad 1,5^{\frac{2-n}{2}} = 1,5^{0,40}.$$

$$\begin{aligned}
0,40 \ln 2 &= 0,40 \cdot 0,69315 = 0,27726; \quad 0,40 \ln 2 + \ln 100 = \\
&= 0,27726 + 4,60517 = 4,88243 \sim 4,88280 = \ln 132, \quad 2^{0,40} = 1,32. \\
0,40 \ln 1,5 + \ln 100 &= 0,40 \cdot 0,40546 + \ln 100 = 0,162184 + 4,60517 = \\
&= 4,767354 = \ln(117 + \beta) \\
&\quad - 4,76217 = -\ln 117 \\
&\quad \quad \quad \underline{\quad \quad \quad} \\
&\quad \quad \quad 5184
\end{aligned}$$

$$\beta = \frac{4,767354 - 4,76217}{4,77068 - 4,76217} = \frac{518,4}{851} = 0,61 \text{ et } 1,5^{0,40} = 1,176.$$

$$\frac{2}{2-n} \left[ 2^{\frac{2-n}{2}} - 1,5^{\frac{2-n}{2}} \right] = \frac{1}{0,40} (1,32 - 1,176) = 2,50 \cdot 0,144 = 0,360.$$

$$\begin{aligned}
\frac{2-3n}{2} &= -0,80; \quad \frac{2}{2(2-3n)} \left[ 2^{\frac{2-3n}{2}} - 1,5^{\frac{2-3n}{2}} \right] = -\frac{1}{1,6} \left[ 2^{-0,80} - 1,5^{-0,80} \right] = \\
&= -\frac{1}{1,6} \left[ \frac{1}{2^{0,40 \cdot 2}} - \frac{1}{1,5^{0,40 \cdot 2}} \right] = -\frac{1}{1,6} \left( \frac{1,5^{0,40 \cdot 2} - 2^{0,40 \cdot 2}}{2^{0,40 \cdot 2} \cdot 1,5^{0,40 \cdot 2}} \right) = \\
&= \frac{1}{1,6} \left( \frac{1,7424 - 1,382976}{1,7424 \cdot 1,382976} \right) = \frac{0,36}{1,6 \cdot 2,41} = 0,0935.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{2-5n}{2} &= -2; \quad \frac{1 \cdot 3 \cdot 2}{2^2 \cdot 1 \cdot 2(2-5n)} \left[ 2^{-2} - 1,5^{-2} \right] = \frac{3}{16} \left[ \frac{4 - 2,25}{4 \cdot 2,25} \right] = \frac{3 \cdot 1,75}{16 \cdot 9} = \\
&= \frac{1,75}{48} = 0,0364.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{et } (\xi)_{\eta=1} - (\xi)_{\eta=0,50} &= 0,360 + 0,0935 + 0,0364 = 0,4899 \sim 0,49 \text{ et} \\
(\xi)_{\eta=1} - (\xi)_{\eta=0} &= (\xi)_{\eta=0,50} - (\xi)_{\eta=0} + (\xi)_{\eta=1} - (\xi)_{\eta=0,50} = 1,28 + 0,49 = 1,77.
\end{aligned}$$

La même valeur d'après la formule (8) est  $\xi = 2\sqrt{\eta_{\eta=1}} = 2 > 1,77$ .

$$\begin{aligned}
\text{Ensuite acceptons } \eta = 2; \text{ alors } (n-1) &= \frac{0,212}{2} - \frac{0,00965}{4} = \\
&= 0,106 - 0,0024 = 0,1036 \sim 0,10 \text{ et } n = 1,1.
\end{aligned}$$

$$\sqrt{\frac{2}{n(n-1)}} = \frac{1}{1,1 \cdot 0,10} \sqrt{0,22} = \frac{0,46904}{0,11} = 4,26.$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{n-1} &= \sqrt{0,10} = 0,31623; \quad A = 0,10 \cdot 0,50 + 0,31623 \sqrt{1 + 0,025} = \\
&= 0,05 + 0,31623 \sqrt{1,025} = 0,05 + 0,31623 \cdot 1,012 = 0,05 + 0,32 = 0,37;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x = \frac{0,37}{2,37} &= 0,156, \quad (\xi)_{0,50} - (\xi)_{\eta=0} = 2 \cdot 4,26 \cdot 0,156 \left( 1 + \frac{0,024336}{3} \right) = \\
&= 8,52 \cdot 0,156 \cdot 1,008 = 1,34 < 1,41422.
\end{aligned}$$

$$\frac{2-n}{2} = \frac{2-1,10}{2} = 0,45.$$

$$\frac{2-3n}{2} = \frac{2-3,3}{2} = -0,65.$$

$$\frac{2-5n}{2} = \frac{2-5,5}{2} = -1,75.$$

$$(1+\eta)_{\eta=2} = 3; \ln 3 = 1,09861.$$

$$\begin{aligned} 0,45 \ln 3 + \ln 100 &= 1,09861 \cdot 0,45 + 4,60517 = 0,4943745 + 4,60517 = \\ &= 5,09954 = \ln(163 + \alpha) \\ &\quad - 5,09375 = -\ln 163 \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{579}{509987 - 509375} = \frac{579}{612} = 0,945; 3^{0,45} = 1,63945 \sim 1,64.$$

$$\begin{aligned} 0,45 \ln 1,5 + \ln 100 &= 0,45 \cdot 0,40546 + 4,60517 = 0,182457 + 4,60517 = \\ &= 4,787627 = \ln(120 + \beta) \\ &\quad - 4,78749 = -\ln 120 \end{aligned}$$

$$\beta = \frac{13,7}{479579 - 478749} = \frac{13,7}{830} = 0,0165; 1,5^{0,45} = 1,200.$$

$$\frac{2}{2-n} \left[ 3^{0,45} - 1,5^{0,45} \right] = \frac{1}{0,45} (1,64 - 1,200) = \frac{0,44}{0,45} = 0,98.$$

$$\begin{aligned} -0,65 \ln 3 + \ln 100 &= 4,60517 - 0,65 \cdot 1,09861 = 4,60517 - 0,7150 = \\ &= 3,89017 = \ln(48 + \alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3,87120 &= -\ln 48 \\ \frac{1897}{389182 - 387120} &= \frac{1897}{2062} = \\ &= 0,92; 3^{-0,65} = 0,489. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -0,65 \ln 1,5 + \ln 100 &= \ln 100 - 0,65 \cdot 0,40546 = 4,60517 - 0,26400 = \\ &= 4,34117 = \ln(76 + \beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -4,33073 &= -\ln 76 \\ \frac{1044}{434381 - 433073} &= \frac{1044}{1308} = 0,8; \end{aligned}$$

$$1,5^{-0,65} = 0,768;$$

$$\frac{2}{2(2-3n)} \left[ 3^{\frac{2-3n}{2}} - 1,5^{\frac{2-3n}{2}} \right] = \frac{1}{2 \cdot 0,65} (0,768 - 0,489) = \frac{0,279}{1,3} = 0,214.$$



$$-1,75 \ln 3 + \ln 100 = 4,60517 - 1,75 \cdot 1,09861 = 4,60517 - 1,92225 =$$

$$= 2,68292 = \ln(14 + \alpha)$$

$$-2,63906 = -\ln 14$$

$$4361; \alpha = \frac{4361}{270805 - 263906} = \frac{4361}{6899} = 0,63$$

$$\text{et } 3^{-1,75} = 0,1463.$$

$$\ln 100 - 1,75 \ln 1,5 = 4,60517 - 1,75 \cdot 0,40546 = 4,60517 - 0,7100 =$$

$$= 3,89517 = \ln(49 + \beta)$$

$$-3,89182 = -\ln 49$$

$$335; \beta = \frac{335}{391202 - 389182} = \frac{335}{2020} = 0,16$$

$$\text{et } 1,5^{-1,75} = 0,4916.$$

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 2}{2^2 \cdot 1 \cdot 2 (2 - 5n)} \left[ 3^{\frac{2-5n}{2}} - 1,5^{\frac{2-5n}{2}} \right] = \frac{3}{8 \cdot 1,75} (0,4916 - 0,1463) = \frac{3}{14} \times$$

$$\times 0,3453 = \frac{1,0359}{14} = 0,0835 \text{ et enfin } (\xi)_{\eta=2} - (\xi)_{\eta=0,50} = 0,98 + 0,214 +$$

$$+ 0,083 = 1,277 \text{ et } (\xi)_{\eta=2} - (\xi)_{\eta=0} = 1,340 + 1,277 = 2,617.$$

$$\text{D'après (8) on a: } (\xi)_{\eta=2} - (\xi)_{\eta=0} = (2\sqrt{\eta})_{\eta=2} = 2 \cdot 1,41422 =$$

$$= 2,82844 > 2,617.$$

$$\text{Pour } \eta = 3 \text{ on a: } (n-1) = \frac{0,212}{3} - \frac{0,00965}{9} = 0,07 - 0,001 =$$

$$= \sim 0,07, n = 1 + 0,07 = 1,07.$$

$$\sqrt{\frac{2}{n(n-1)}} = \frac{1}{1,07 \cdot 0,07} \sqrt{0,1498} = \frac{0,387}{0,0749} = 5,17.$$

$$\sqrt{n-1} = \sqrt{0,07} = 0,26458; A = 0,07 \cdot 0,50 + 0,26458 \sqrt{1 + 0,07 \cdot 0,25} =$$

$$= 0,035 + 0,26458 \sqrt{1,0175} = 0,035 + 0,26458 = 0,30.$$

$$x = \frac{0,30}{2,30} = 0,130; (\xi)_{\eta=0,50} - (\xi)_{\eta=0} = 2 \cdot 5,17 \cdot 0,13 \left( 1 + \frac{0,0169}{3} \right) =$$

$$= 10,34 \cdot 0,13 \cdot 1,0056 = 1,35 < 1,41422.$$

$$\frac{2-n}{2} = \frac{2-1,07}{2} = \frac{0,93}{2} = 0,465;$$

$$\frac{2-3n}{2} = \frac{2-3,21}{2} = -\frac{1,21}{2} = -0,605;$$

$$\frac{2-5n}{2} = \frac{2-5,35}{2} = -\frac{3,35}{2} = -1,675.$$

$$(1 + \eta)_{\eta=3} = 4. \quad \ln 4 = 1,38629; \quad \ln 1,5 = 0,40546.$$

$$\begin{aligned} 0,465 \ln 4 + \ln 100 &= 0,465 \cdot 1,38629 + 4,60517 = 0,645 + 4,60517 = \\ &= 5,25017 = \ln(190 + \alpha) \\ &\quad - 5,24762 = -\ln 190 \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{255}{525227 - 524702} = \frac{255}{525} = 0,485; \quad 4^{0,465} = 1,90485.$$

$$\begin{aligned} 0,465 \ln 1,5 + \ln 100 &= 0,465 \cdot 0,40546 + 4,60517 = 0,1880 + 4,60517 = \\ &= 4,79317 = \ln(120 + \beta) \\ &\quad - 4,78749 = -\ln 120 \end{aligned}$$

$$\beta = \frac{568}{479579 - 478749} = \frac{568}{830} = 0,685; \quad 1,5^{0,465} = 1,20685.$$

$$\frac{2}{2-n} \left[ 4^{0,465} - 1,5^{0,465} \right] = \frac{1,90485 - 1,20685}{0,465} = \frac{0,698}{0,465} = 1,50.$$

$$\begin{aligned} -0,605 \ln 4 + \ln 100 &= 4,60517 - 0,605 \cdot 1,38629 = 4,60517 - 0,840 = \\ &= 3,7617 = \ln(43 + \alpha) \\ &\quad - 3,7612 = -\ln 43 \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{5}{378419 - 376120} = \frac{5}{2299} \approx 0; \quad 4^{-0,605} = 0,43.$$

$$\begin{aligned} \ln 100 - 0,605 \ln 1,5 &= 4,60517 - 0,605 \cdot 0,40546 = 4,60517 - 0,2450 = \\ &= 4,36017 = \ln(78 + \beta) \\ &\quad - 4,35671 = -\ln 78 \end{aligned}$$

$$\beta = \frac{346}{436945 - 435671} = \frac{346}{1274} = 0,271 \text{ et } 1,5^{-0,605} = 0,78271.$$

$$\frac{1,2}{2(2-3n)} \left[ 4^{\frac{2-3n}{2}} - 1,5^{\frac{2-3n}{2}} \right] = \frac{1}{2,605} (0,78271 - 0,4300) = \frac{0,3527}{1,21} = 0,292.$$

$$\begin{aligned} -1,675 \ln 4 + \ln 100 &= 4,60517 - 1,675 \cdot 1,38629 = 4,60517 - 2,320 = \\ &= 2,28517 = \ln(11 + \alpha) \\ &\quad - 2,22400 = -\ln 11 \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{6117}{22894 - 22240} = \frac{6117}{654} = 0,935 \text{ et } 4^{-1,675} = 0,11935.$$

$$\begin{aligned} \ln 100 - 1,675 \ln 1,5 &= 4,60517 - 1,675 \cdot 0,40546 = 4,60517 - 0,6800 = \\ &= 3,92517 = \ln(50 + \beta) \\ &\quad - 3,91202 = -\ln 50 \end{aligned}$$

$$\beta = \frac{1315}{393183 - 391202} = \frac{1315}{1981} = 0,663 \text{ et } 1,5^{-1,675} = 0,5663;$$

$$\frac{1.3.2}{2^2 \cdot 1.2(2-5n)} \left[ 4^{-1.675} - 1.5^{-1.675} \right] = \frac{3}{8 \cdot 1.675} (0.5663 - 0.11935) = \\ = \frac{3 \cdot 0.447}{8 \cdot 1.675} = 0.10,$$

$$\text{et } (\xi)_{\eta=3} - (\xi)_{\eta=0.5} = 1.50 + 0.292 + 0.10 = 1.892,$$

$$(\xi)_{\eta=3} - (\xi)_{\eta=0} = 1.350 + 1.892 = 3.24; \text{ d'après (8) on a :}$$

$$(\xi)_{\eta=3} - (\xi)_{\eta=0} = (2\sqrt{\eta})_{\eta=3} = 2 \cdot 1.7321 = 3.4642 > 3.240.$$

$$\text{Pour } \eta = 4, \text{ on a : } (n-1) = \frac{0.212}{4} - \frac{0.00965}{16} = 0.05,$$

$$n = 1.05; \sqrt{\frac{2}{n(n-1)}} = \frac{1}{1.05 \cdot 0.05} \sqrt{0.1050} = \frac{0.324}{0.0525} = 6.17.$$

$$\sqrt{(n-1)} = \sqrt{0.05} = 0.22361; A = 0.05 \cdot 0.50 + 0.22361 \times \\ \sqrt{1+0.05 \cdot 0.25} = 0.025 + 0.22361 \sqrt{1.0125} = 0.025 + 0.22361 = 0.24861;$$

$$x = \frac{0.24861}{2.24861} = 0.1105; (\xi)_{\eta=0.50} - (\xi)_{\eta=0} = 2 \cdot 6.17 \cdot 0.1105 \left( 1 + \frac{0.0121}{3} \right) = \\ = 12.34 \cdot 0.1105 \cdot 1.004 = 1.365 < 1.41422.$$

$$\frac{2-n}{2} = \frac{2-1.05}{2} = 0.475;$$

$$\frac{2-3n}{2} = \frac{2-3.15}{2} = -\frac{1.15}{2} = -0.5575.$$

$$\frac{2-5n}{2} = \frac{2-5.25}{2} = -\frac{3.25}{2} = -1.625.$$

$$(1+\eta)_{\eta=4} = 5; \ln 5 = 1.60944.$$

$$\ln 1.5 = 0.40546.$$

$$\ln 100 + 0.475 \ln 5 = 4.60517 + 0.475 \cdot 1.60944 = 4.60517 + 0.76450 = \\ = 5.36967 = \ln(214 + \alpha) \\ - 5.36598 = -\ln 214$$

$$\alpha = \frac{369}{537064 - 536598} = \frac{369}{466} = 0.79 \\ 5^{0.475} = 2.1479.$$

$$\ln 100 + 0.475 \ln 1.5 = 4.60517 + 0.475 \cdot 0.40546 = 4.60517 + 0.1930 = \\ = 4.79817 = \ln(121 + \beta) \\ - 4.79579 = -\ln 121$$

$$\beta = \frac{238}{480402 - 479579} = \frac{238}{823} = 0.289. \\ 1.5^{0.475} = 1.21289.$$

$$\frac{2}{2-n} (5^{0,475} - 1,5^{0,475}) = \frac{2,1479 - 1,21289}{0,475} = \frac{0,935}{0,475} = 1,97.$$

$$\begin{aligned} \ln 100 - 0,5575 \ln 5 &= 4,60517 - 0,5575 \cdot 1,60944 = 4,60517 - 0,8960 = \\ &= 3,70917 = \ln(40 + \alpha) \\ &\quad - 3,68888 = -\ln 40 \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{2029}{371357 - 368888} = \frac{2029}{2469} = 0,82; \quad 5^{-0,5575} = 0,482.$$

$$\begin{aligned} \ln 100 - 0,5575 \ln 1,5 &= 4,60517 - 0,5575 \cdot 0,40546 = 4,60517 - 0,2260 = \\ &= 4,37917 = \ln(79 + \beta) \\ &\quad - 4,36945 = -\ln 79 \end{aligned}$$

$$\beta = \frac{972}{438203 - 436945} = \frac{972}{1258} = 0,773; \quad 1,5^{-0,5575} = 0,79773.$$

$$\frac{2}{2(2-3n)} (5^{-0,5575} - 1,5^{-0,5575}) = \frac{0,79773 - 0,4820}{2 \cdot 0,5575} = \frac{0,3157}{1,115} = 0,282.$$

$$\begin{aligned} \ln 100 - 1,625 \ln 5 &= \ln 100 - 1,625 \cdot 1,60944 = 4,60517 - 2,620 = \\ &= 1,98517 = \ln(7 + \alpha) \\ &\quad - 1,94591 = -\ln 7 \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{4926}{207944 - 194591} = \frac{4926}{13353} = 0,369; \quad 5^{-1,625} = 0,07369.$$

$$\begin{aligned} \ln 100 - 1,625 \ln 1,5 &= 4,60517 - 1,625 \cdot 0,40546 = 4,60517 - 0,6600 = \\ &= 3,94517 = \ln(52 + \beta) \\ &\quad - 3,93183 = -\ln 52 \end{aligned}$$

$$\beta = \frac{1334}{395124 - 393183} = \frac{1334}{1941} = 0,688; \quad 1,5^{-1,625} = 0,52688;$$

$$\begin{aligned} \frac{1 \cdot 3 \cdot 2}{2^2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (2 - 5n)} (5^{-1,625} - 1,5^{-1,625}) &= \frac{3 \cdot (0,52688 - 0,07369)}{8 \cdot 1,625} = \\ &= \frac{3 \cdot 0,4532}{8 \cdot 1,625} = 0,1045. \end{aligned}$$

$$(\xi)_{\eta=4} - (\xi)_{\eta=0,5} = 1,97 + 0,282 + 0,1045 = 2,356,$$

$$(\xi)_{\eta=4} - (\xi)_{\eta=0} = 1,365 + 2,356 = 3,7210.$$

$$\text{D'après (8): } (\xi)_{\eta=4} - (\xi)_{\eta=0} = (2\sqrt{\eta})_{\eta=4} = 4 > 3,7210.$$

Pour  $\eta = 5$ , on a :  $(n-1) = \frac{0,212}{5} - \frac{0,00965}{25} = 0,0424 - 0,00038 = 0,042$ .

$$n = 1,04; \sqrt{\frac{2}{n(n-1)}} = \frac{1}{1,04 \cdot 0,4} \sqrt{0,0832} = \frac{1}{0,416} \sqrt{0,0832} =$$

$$= \frac{1}{0,416} \cdot 0,288444 = 6,94; \sqrt{n-1} = \sqrt{0,04} = 0,20.$$

$$A = 0,04 \cdot 0,50 + 0,20 \sqrt{1 + 0,04 \cdot 0,25} = 0,020 + 0,20 \sqrt{1,01} =$$

$$= 0,020 + 0,20 \cdot 1,01 = 0,020 + 0,202 = 0,222; x = \frac{0,222}{2,222} = 0,10.$$

$$(\xi)_{\eta=0,50} - (\xi)_{\eta=0} = 2 \cdot 6,94 \cdot 0,10 \left(1 + \frac{0,01}{3}\right) = 13,88 \cdot 0,10 \cdot 1,003 =$$

$$= 1,39 < 1,41422.$$

$$\frac{2-n}{2} = \frac{2-1,04}{2} = \frac{0,96}{2} = 0,48;$$

$$\frac{2-3n}{2} = \frac{2-3,12}{2} = -\frac{1,12}{2} = -0,56;$$

$$\frac{2-5n}{2} = \frac{2-5,20}{2} = -\frac{3,20}{2} = -1,60.$$

$$(1+\eta)_{\eta=5} = 6; \ln 6 = 1,79176.$$

$$\ln 1,5 = 0,40546.$$

$$\ln 100 + 0,48 \ln 6 = 4,60517 + 0,48 \cdot 1,79176 = 4,60517 + 0,8600 =$$

$$= 5,46517 = \ln(236 + \alpha)$$

$$- 5,46383 = -\ln 236$$

$$\frac{134}{5,46806 - 5,46383} = \frac{134}{423} = \alpha = 0,316; 6^{0,48} = 2,36316.$$

$$\ln 100 + 0,48 \ln 1,5 = 4,60517 + 0,48 \cdot 0,40546 = 4,60517 + 0,1950 =$$

$$= 4,80017 = \ln(121 + \beta)$$

$$- 4,79579 = -\ln 121$$

$$\beta = \frac{438}{4,80402 - 4,79579} = \frac{438}{823} = 0,53; 1,5^{0,48} = 1,2153.$$

$$\frac{2}{2-n} (6^{0,48} - 1,5^{0,48}) = \frac{0,236316 - 0,12153}{0,48} = \frac{1,14786}{0,48} = 2,39.$$

$$\begin{aligned} \ln 100 - 0,56 \ln 6 &= 4,60517 - 0,56 \cdot 1,79176 = 4,60517 - 1,0050 = \\ &= 3,60017 = \ln(36 + \alpha) \\ &\quad - 3,58352 = -\ln 36 \end{aligned}$$

$$\frac{665}{3,61092 - 3,58352} = \frac{665}{2740} = 0,243 = \alpha, \quad 6^{-0,56} = 0,36243;$$

$$\begin{aligned} \ln 100 - 0,56 \ln 1,5 &= 4,60517 - 0,56 \cdot 0,40546 = 4,60517 - 0,2270 = \\ &= 4,37817 = \ln(79 + \beta) \\ &\quad - 4,36945 = -\ln 79 \end{aligned}$$

$$\beta = \frac{872}{4,38203 - 4,36945} = \frac{872}{1258} = 0,693; \quad 1,5^{-0,56} = 0,79693.$$

$$\frac{2}{2(2-3)n} \left( 6^{-0,56} - 1,5^{-0,56} \right) = \frac{0,36243 - 0,79693}{2 \cdot 0,56} = \frac{0,4345}{1,12} = 0,388.$$

$$\begin{aligned} \ln 100 - 1,60 \ln 6 &= 4,60517 - 1,60 \cdot 1,79176 = 4,60517 - 2,8700 = \\ &= 1,73517 = \ln(5 + \alpha) \\ &\quad - 1,60944 = -\ln 5 \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{12573}{1,79176 - 1,60944} = \frac{12573}{18232} = 0,69; \quad 6^{-1,60} = 0,0569.$$

$$\begin{aligned} \ln 100 - 1,60 \ln 1,5 &= 4,60517 - 1,60 \cdot 0,40546 = 4,60517 - 0,6500 = \\ &= 3,95517 = \ln(52 + \beta) \\ &\quad - 3,95124 = -\ln 52 \end{aligned}$$

$$\beta = \frac{393}{3,97029 - 3,95124} = \frac{393}{1905} = 0,206; \quad 1,5^{-1,60} = 0,52206.$$

$$\begin{aligned} \frac{1 \cdot 3 \cdot 2}{2^2 \cdot 1 \cdot 2(2-5)n} \left( 6^{-1,60} - 1,5^{-1,60} \right) &= \frac{3 \cdot (0,52206 - 0,0569)}{8 \cdot 1,60} = \\ &= \frac{3 \cdot 0,46516}{8 \cdot 1,60} = 0,109. \end{aligned}$$

$$(\xi)_{\eta=5} - (\xi)_{\eta=0,50} = 2,39 + 0,388 + 0,109 = 2,887.$$

$$\begin{aligned} (\xi)_{\eta=5} - (\xi)_{\eta=0} &= (\xi)_{\eta=0,50} - (\xi)_{\eta=0} + (\xi)_{\eta=5} - (\xi)_{\eta=0,50} = \\ &= 1,390 + 2,887 = 4,277 < 2\sqrt{5} = 4,4722. \end{aligned}$$

Voir la table V.

Table V. de Vitols.

Coordonnées de la surface inférieure de la lame.

D'après les formules (12) et (15)				D'après la formule (8) (parabole)			
$\frac{x}{H_0}$	$\frac{y}{H_0}$	$\xi_h = 0,888\xi$	$\eta_h = 0,888\eta$	$\frac{x}{H_0}$	$\frac{y}{H_0}$	$\xi_h = 0,888\xi$	$\eta_h = 0,888\eta$
0	0	0	0	0	0	0	0
0,0563	0,001126	0,05	0,001	0,20	0,01	0,1776	0,0888
0,1126	0,00675	0,100	0,006	0,40	0,04	0,3552	0,03552
0,1690	0,0169	0,150	0,015	0,60	0,09	0,5328	0,07992
0,2250	0,0304	0,200	0,027	0,80	0,16	0,7104	0,14208
0,2815	0,0462	0,250	0,041	1,00	0,25	0,888	0,222
0,3380	0,0653	0,300	0,058	1,20	0,36	1,0656	0,3200
0,395	0,0867	0,350	0,077	1,40	0,49	1,2432	0,435
0,450	0,1115	0,400	0,099	1,60	0,64	1,4208	0,5683
1,175	0,50	1,0434	0,444	1,80	0,81	1,5984	0,7200
1,77	1,00	1,57176	0,888	2,00	1,00	1,776	0,888
2,617	2,00	2,324	1,776	2,8284	2	2,512	1,776
3,240	3,00	2,877	2,664	3,4642	3	3,076	2,664
3,721	4,00	3,320	3,552	4	4	3,552	3,552
4,277	5	3,800	4,440	4,4722	5	3,960	4,440



## Corollaire.

Dans ce qui précède, on a examiné les courbes de la surface inférieure de la lame liquide données par Craeger, Kazanskaya, Pouzirevsky et par l'auteur. Les systèmes des coordonnées étant différents pour chaque auteur, on a dû les réduire à un seul système, pour pouvoir comparer les différentes courbes. Les formules de la réduction des coordonnées sont données dans les tables I, II, III et IV. Les coordonnées sont rapportées au système des axes tracés par la cime de la courbe (voir le cr. № 1<sup>bis</sup>) et sont mesurées avec  $h \left( \eta_h = \frac{y}{h}, \xi_h = \frac{x}{h} \right)$ .

Les coordonnées de l'auteur étant  $\xi = \frac{x}{H_0}$  et  $\eta = \frac{y}{H_0}$ , on voit que la

relation est:  $\xi = \frac{x h}{H_0 \cdot h} = \frac{x}{h} \cdot \frac{h}{H_0} = \frac{\xi_h}{0,888}$ ,  $\xi_h = 0,888 \xi$  et  $\eta = \frac{y h}{H_0 \cdot h} = \frac{y}{h} \cdot \frac{h}{H_0} = \frac{\eta_h}{0,888}$ ,  $\eta_h = 0,888 \eta$ . On a montré dans ce qui précède que

la courbe de l'auteur cache en elle un certain degré de sécurité et c'est pour cela que les expériences s'imposent pour trouver vers quelle valeur converge la valeur de  $n$  en réalité c'est-à-dire, qu'il s'agit de trouver par l'expérience la valeur de  $n_0$  dans la formule  $(n - n_0) = \frac{a}{\eta} + \frac{b}{\eta^2}$ , cette valeur devant quelque peu dépasser la valeur de  $n = 1$  qui correspond au mouvement du point matériel libre dans un milieu sans résistance.



## Ķeguma stacijas sprostā hidrauliskais profils.

A. Vītols.

### Autoreferāts.

Faktors, kas noteic sprostā hidraulisko profilu, ir vakuums, kas nedrīkst rasties zem strāvas, jo pēdējā gadījumā strāva sāk vibrēt, pielīpot sprostā virsmai un atkal atlecot. Mēchaniska šīs parādības analīze noved pie konstatējuma, ka strāvas ietekme šinī gadījumā izpaužas triecienos, kas rada sprostā masas vibrācijas. Lai gan sprostā deformācijas, saistītas ar viņa masas vibrācijām, ir niecīgas, tad tomēr otrie atvasinātie no sprostā ķermeņa daļiņu pārvietojumiem (daļiņu pātrinājumi) var izrādīties diezgan ievērojami, līdz ar ko sprostā ķermenis tiek pakļauts diezgan ievērojamai inerces spēku ietekmei, pie kam vibrāciju ļaunā ietekme izpaužas apmēram sekojošos virzienos:

Vieta, kur norisinās triecienu process, ir sprostā apslāpinātā virsma. Še notiek materiāla vietēja destrukcija, jo: „Gutta cavat lapidem non vi sed saepe cadendo“. Tālāk caur vibrācijām sprostā ķermenī modinātie inerces spēki rada šē papildu spraugumus, kuŗu kaitīgumu pavairo šo spraugumu zīmju maiņa (no + uz — un atpakaļ). Bez tam vēl viens nelabvēlīgs vakuuma faktors pievienojas minētam viņa kaitīgas ietekmes parādību kompleksam: spiede uz sprostā pakalējo sienu iegūst papildu komponentu, kas vakuuma gadījumā no priekšpuses vairs netiek līdzsvarots. Visas šīs ietekmes spiež ļoti uzmanīgi un nopietni studēt problēmu par sprostā hidraulisko profilu.

Valstīs, kur attīstās intensīva hidrauliskas enerģijas izmantošana, kā piem. Padomju Krievijā, ar šo jautājumu nodarbojas ļoti nopietni. Krievu sasniegumi atspoguļojas hidrologa L. V. Kazanskajas rakstā, kas ievietots Bulletin de l'Institut Hydrologique № 20, Leningrad 1927. Tāpat var minēt Dipl. Ing. Otto Dillmann'a plašos pētījumus: Mitteilungen des Hydraulischen Instituts der Technischen Hochschule München, Heft 7, 1933.

Iepriekšējā, franču tekstā ir uzrādīta literatūrā pazīstamo atrisinājumu kritika, un tiek atzīts, ka šiem atrisinājumiem nav zinātniska pamata. Tiek aizrādīts, ka atrisinājumam jāuzmeklē solida bāze. Šādu

bazi autors iedomājas nolīdzinājumu (1) veidā, kurā ietelp spiedes izteiksme uz apslapināto virsmu zem strāvas. Šī izteiksme nolīdzinājuma (5<sup>bis</sup>) veidā tiek pielīdzināta 0, caur ko iegūst sprosta apslapinātas virsmas otras kārtas diferenciālnolīdzinājumu (6<sup>bis</sup>) veidā. Caur šo nolīdzinājumu noteiktai profila līknei piemīt tā īpašība, ka viņa ir robežlīkne, novirzīšanās no kuņas uz iekšpusi tūlīt izsauc vakuumu. Šis nolīdzinājums pēc pirmās integrācijas gūst beidzot (7<sup>bis</sup>) veidu, kurš satur vienu empīrisku koeficientu  $n$ . Nolīdzinājumu (7<sup>bis</sup>) var integrēt slēgtā formā; ja  $n=1$ , līkne ir parabola (sk. formulu (8)); ja  $n=2$ , līkne ir logaritmiska (sk. formulu (9)). Tālāk, tāpat kā visi pētītāji, arī autors balstās uz pazīstamiem klasiskiem Bazin'a strāvas augšējās daļas pētījumiem, kuņu rezultāti publicēti „Annales des ponts et chaussées“ (6) 19 (1890) page 56. Priekš  $n$  nozīmēm, kuņas atšķiras no  $n=1$  un  $n=2$ , nolīdzinājuma (7<sup>bis</sup>) funkcija  $\eta' = \sqrt{(1+\eta)^n - 1}$  tiek izvirzīta bezgalīgā konverģējošā rindā (sk. franču tekstu), pēc kam tiek vēlēta tuvīnfunkcija, kuņas integrāls ir (10). Ar šī integrāla un Bazin'a tabulas datu palīdzību tiek meklētas empīriskā koeficienta  $n$  skaitliskās nozīmes. Tālāk tiek pierādīts, ka  $n$  asimptotiski jātuvojas kādai noteiktai vērtībai un ka šī vērtība atrodas robežās:  $1 \nabla n \nabla 2$ . Tikai eksperiments var dot drošu  $n$  skaitlisko vērtību likumu.

Autors pierāda, ka šī likumība ir saistīta ar „ $n_0$ “ uziešanu formulā  $(n - n_0) = \frac{a}{\eta} + \frac{b}{\eta^2}$ , pie kam  $n_0=1$  ir galējā nozīme, kuņa garantē zināmu hidrauliska profila drošību.

Beidzot ir uzskicētas dažādu autoru sprostā profila līknes, no kuņām ir redzams, ka šī publicējuma autora līkne (sk. uz. skices „Vitols“) klāj visu iepriekšējo pētītāju līkņu grupu, pie kam par autora līkni var teikt, ka tā ir droša, kamēr par parējām līknēm to pašu teikt nevarētu. Ir iespējams, ka vēlāka šīs līknes saskaņošana ar eksperimentu šīs līknes apakšējo daļu atbaidīs drusku atpakaļ, kam tomēr, rādās, lielas praktiskas nozīmes nebūs. Skice arī rāda, ka dažu autoru ieteikta parabola dod pārspilētu drošību pret vakuumu, kas tanī pašā laikā rada caurteces koeficienta samazināšanos un sprostā iebūvēta materiāla daudzuma palielināšanos, kas nav vēlams.

Eine Verallgemeinerung der Sätze von der potentiellen  
 Energie elastischer Körper.

Von Prof. Dr. A. Vītols, Riga.

Im Gegensatz zu der üblichen Beweisführung der Sätze von der potentiellen Energie elastischer Körper, die sich auf das sogenannte Superpositionsgesetz, wie auch auf eine Reihe von Hypothesen und Voraussetzungen stützt, soll hier ein Beweis dieser Sätze erörtert werden, der kein Superpositionsgesetz als Vorbedingung verlangt.

Wolle man z. B. den Zusammenhang zwischen der Verschiebung  $y_i$  des Punktes  $i$  eines elastischen Körpers unter der Einwirkung der Kräfte  $P_1, P_2, \dots, P_k, \dots, P_i, \dots, P_n$  in der Integralform aufschreiben, so würde man sofort das „Superpositionsgesetz“ anwenden müssen. Die Differentialform irgendwelcher Gesetzmässigkeit zwischen der Verschiebung und den einwirkenden Kräften geht dagegen nur von der Annahme aus, dass  $y_i$  eine kontinuierliche Funktion der entsprechenden Kräfte ist, d. h. man kann immer schreiben:

$$dy_i = \frac{\partial y_i}{\partial P_1} dP_1 + \dots + \frac{\partial y_i}{\partial P_k} dP_k + \dots + \frac{\partial y_i}{\partial P_i} dP_i + \dots + \frac{\partial y_i}{\partial P_n} dP_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial y_i}{\partial P_k} dP_k \quad (1).$$

Die Integralform dieses Ausdruckes besteht nicht immer und ist mit der Bedingung verbunden:

$$\frac{\partial^2 y_i}{\partial P_k \partial P_m} = \frac{\partial^2 y_i}{\partial P_m \partial P_k} \dots \dots \dots (1^{bis}),$$

wo  $m$  und  $k$  alle Werte zwischen 1 und  $n$  annehmen.

Die Eigenschaft (1<sup>bis</sup>) ist die funktionentheoretische Basis der vom Autor hier entwickelten Methode.

Von den möglichen Ausdrücken der partiellen Derivierten der Gleichung (1), welche der Bedingung (1<sup>bis</sup>) entsprechen, wollen wir die folgenden in Betracht ziehen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial P_k} = \alpha_{ik} = C_1 \text{onstans} \\ \frac{\partial y_i}{\partial P_m} = \alpha_{im} = C_2 \text{onstans} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Lösung (a)} \\ \text{(das Gesetz von Hooke)} \end{array}$$

und

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial P_k} = \varphi_i(P_k) \text{ und } \frac{\partial y_i}{\partial P_m} = \varphi_i(P_m) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Lösung (b)} \\ \text{(das Potenzgesetz: Zement, Gusseisen),} \end{array}$$

denn für diese Lösungen ist:  $\frac{\partial^2 y_i}{\partial P_k \partial P_m} = 0 = \frac{\partial^2 y_i}{\partial P_m \partial P_k} = 0$ .

Hier bezeichnet  $\varphi_i$  die entsprechende Funktion.

Die beiden Lösungen (a) und (b) sind in der Hinsicht wichtig, dass hier die partiellen Derivierten entweder ganz unabhängig sind von den auf den Körper einwirkenden Kräften (Lösung = (a)), oder sie sind abhängig nur von einer einzigen Kraft, die die gleiche Verschiebung des Punktes  $i$  hervorgerufen hätte, wenn sie allein auf den Körper eingewirkt hätte. Mit anderen Worten, repräsentiert der Ausdruck (1) in beiden Fällen in seiner Differentialform das sogenannte Superpositionsgesetz, das von vielen Forschern als Erfahrungsgesetz angenommen wird.

Wie in dem Folgenden dargelegt werden soll, lässt sich diese Annahme umgehen.

Wir wollen annehmen, dass auf einen Träger eine Kraft  $P_i$  in normaler Richtung zur Achse schon eingewirkt und eine gewisse Ausbiegung der Achse hervorgerufen hat. Dann wird die nächste Kraft  $P_k$  auf einen schon gebogenen Stab einwirken, und der Differentialausdruck für die Verschiebung eines Punktes wird dann von der schon vorhandenen Verschiebung resp. von der schon angebrachten Kraft abhängig sein. Wenn nun aber diese Verschiebung verhältnismässig klein ist im Vergleich zu den anderen in dem Differentialausdruck für die Verschiebung vorkommenden Grössen, so kann man sie vernachlässigen und einen Ausdruck erhalten, der dem Falle der Einwirkung einer einzigen Kraft  $P_k$  entsprechen wird, als ob diese Kraft auf einen ganz geraden Stab eingewirkt hätte. Dieser Gesichtspunkt ist bequem und er lässt sofort die Fälle erkennen, die ausserhalb des quasi Superpositionsgesetzes stehen. Z. B. fallen in der bekannten Differentialgleichung für die Ausbiegung der Stabachse durch Querkräfte die verhältnismässig kleinen von den Verschiebungen anderer Kräfte abhängigen Grössen weg, denn diese sind verhältnismässig klein im Vergleich zu  $x_i$ , den Abständen der Kräfte vom Stützpunkte. Dagegen kann von

dieser Vernachlässigung für den Fall der Knickausbiegung kein Gebrauch gemacht werden, da der Hebelarm der in der Richtung der unausgebogenen Stabachse wirkenden Kraft gleich 0 ist und keine Grösse, so klein sie auch sein mag, im Vergleich zu 0 vernachlässigt werden kann. Zu bemerken wäre also, dass laut den Lösungen (a) und (b) das sogenannte Superpositionsgesetz nicht nur für Körper gilt, deren Deformation dem Hooke'schen Gesetz folgt, sondern auch für jedes andere Deformationsgesetz, darunter auch für das in der Festigkeitslehre bekannte Potenzgesetz (Zement, Gusseisen u. s. w.).

Es ist nun klar, dass für die Lösungen (a) und (b) die entsprechende Integralform besteht, deren konventioneller Ausdruck in der Gestalt  $y_i = F_i(P_1 \dots P_k \dots P_n)$  gegeben werden kann. Der Ausdruck (1) zeigt, dass für die Lösungen (a) und (b)  $y_i$  eine algebraische Summe ist, welche bekanntlich dem kommutativen und dem assoziativen Gesetzen folgt, was gleichbedeutend ist mit der Unabhängigkeit der Deformation  $y_i$  von der Reihenfolge der Einwirkung der Kräfte, wie auch von dem Gesetze des Anwachsens derselben.

### Der Maxwell'sche Satz.

Der Maxwell'sche Satz ist der grundlegende Satz der vom Autor entwickelten Beweisführung der Sätze. Es soll hier gezeigt werden, dass die funktionentheoretische Behandlung des Ausdruckes für die Deformationsarbeit der äusseren Kräfte einen ganz allgemeinen Beweis des Maxwell'schen Satzes liefert, ohne dass man zu irgendwelchen anderen, weniger überzeugenden Voraussetzungen Zuflucht zu nehmen braucht. Wir schreiben den Ausdruck für die partielle elementare Arbeit einer Kraft  $P_i$ , die im Punkte  $i$  angreift, auf:

$$dA_i = P_i dy_i = P_i \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial y_i}{\partial P_k} dP_k = \sum_{k=1}^{k=n} P_i \frac{\partial y_i}{\partial P_k} dP_k.$$

Die elementare Arbeit aller Kräfte ist dann:

$$dA = \sum_{i=1}^{i=n} dA_i = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} P_i \frac{\partial y_i}{\partial P_k} dP_k \dots \dots \dots (2).$$

Es handelt sich jetzt um die Frage, ob die Funktion  $A$  überhaupt existieren kann. Wenn sie aber überhaupt existiert, so ist dann:

$$dA = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial A}{\partial P_i} dP_i = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial A}{\partial P_k} dP_k.$$

Da jede Summe unabhängig ist von der Ordnung des Summierens, so kann man schreiben:

$$dA = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} P_i \frac{\partial y_i}{\partial P_k} dP_k = \sum_{k=1}^{k=n} dP_k \sum_{i=1}^{i=n} P_i \frac{\partial y_i}{\partial P_k} = \sum_{k=1}^{k=n} dP_k \frac{\partial A}{\partial P_k}.$$

Diesen Ausdruck kann man umschreiben:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial A}{\partial P_k} dP_k - \sum_{k=1}^{k=n} dP_k \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial y_i}{\partial P_k} P_i = \sum_{k=1}^{k=n} \left( \frac{\partial A}{\partial P_k} - \sum_{i=1}^{i=n} P_i \frac{\partial y_i}{\partial P_k} \right) dP_k = 0 \quad (3)$$

woraus folgt, dass:

$$\frac{\partial A}{\partial P_k} - \sum_{i=1}^{i=n} P_i \frac{\partial y_i}{\partial P_k} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial P_k} = \sum_{i=1}^{i=n} P_i \frac{\partial y_i}{\partial P_k} \dots \dots \dots (4)$$

weil die Differentiale  $dP_k$  u. s. w. unabhängige Grössen sind, und die Gleichung (3) keinen Zusammenhang zwischen den von einander unabhängigen Differentialen bedeuten soll. In ganz ähnlicher Weise kann man zum Zusammenhange

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = \sum_{k=1}^{k=n} P_k \frac{\partial y_k}{\partial P_i} \dots \dots \dots (5)$$

gelangen.

Weiter folgt aus (4):

$$\frac{\partial^2 A}{\partial P_k \partial P_i} = \frac{\partial y_i}{\partial P_k} + \sum_{i=1}^{i=n} P_i \cdot \frac{\partial^2 y_i}{\partial P_k \partial P_i}$$

und aus (5):

$$\frac{\partial^2 A}{\partial P_i \partial P_k} = \frac{\partial y_k}{\partial P_i} + \sum_{k=1}^{k=n} P_k \cdot \frac{\partial^2 y_k}{\partial P_i \partial P_k}$$

Da aber für die Lösungen (a) und (b)  $\frac{\partial^2 y_i}{\partial P_k \partial P_i} = 0$  und  $\frac{\partial^2 y_k}{\partial P_i \partial P_k} = 0$  und ausserdem  $\frac{\partial^2 A}{\partial P_k \partial P_i} = \frac{\partial^2 A}{\partial P_i \partial P_k}$  sein muss, so folgt, dass  $\frac{\partial y_i}{\partial P_k} = \frac{\partial y_k}{\partial P_i}$  sein muss (6).

Man sieht nun, dass von den Lösungen (a) und (b) einzig das Hooke'sche Gesetz diese Identität befriedigt, wenn man  $\frac{\partial y_i}{\partial P_k} = \alpha_{ik} = \text{const.}$  und  $\frac{\partial y_k}{\partial P_i} = \alpha_{ki} = \text{const.}$  setzt, was den Maxwell'schen Satz beweist.

Merkwürdig ist es, dass die zweite Lösung (b), die auch dem „SuperpositionsGesetze“ entspricht, jetzt keine Geltung mehr hat, denn für (b) würde (6) heissen:

$$\varphi_i(P_k) = \varphi_k(P_i),$$

was wegen der Unabhängigkeit der Grössen  $P_k, P_i$  u. s. w. nicht möglich ist.

### Die Differentialform der Sätze von Castigliano und Ménabréa.

Nach dem Beweise des Maxwell'schen Satzes lassen sich auch alle übrigen bekannten Sätze sehr leicht beweisen.

Zu diesem Zwecke betrachten wir von neuem den Ausdruck (5), den wir jetzt auf Grund des Maxwell'schen Satzes in folgender Gestalt schreiben:

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = \sum_{k=1}^{k=n} P_k \frac{\partial y_k}{\partial P_i} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial y_i}{\partial P_k} P_k. \text{ Da nun aber } \frac{\partial y_i}{\partial P_k} = \alpha_{ik} \text{ Constans ist, so}$$

ist  $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial y_i}{\partial P_k} P_k$  das Integral von dem Ausdruck (1), denn:  $\int_0^{y_i} \partial y_i = y_i =$

$$\int_0^{P_k} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial y_i}{\partial P_k} dP_k = \sum_{k=1}^{k=n} \int_0^{P_k} \frac{\partial y_i}{\partial P_k} dP_k = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial y_i}{\partial P_k} \int_0^{P_k} dP_k = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial y_i}{\partial P_k} P_k = \frac{\partial A}{\partial P_i}$$

und der Satz von Castigliano  $\frac{\partial A}{\partial P_i} = y_i$  u. s. w. ist bewiesen. Zu betonen ist nur, dass die Kräfte  $P_i$  u. s. w. nach denen die Derivierten  $\frac{\partial A}{\partial P_i}$  u.

s. w. gefunden werden, unabhängig sein müssen, denn gerade diese Eigenschaft führte zu Ausdrücken von der Art wie (4). Der Sonderfall

des Satzes von Castigliano  $\frac{\partial A}{\partial P_i} = y_i = 0$  ist bekanntlich der Satz von

Ménabréa, dem man eine mathematische Deutung zuschreiben kann,

denn  $\frac{\partial A}{\partial P_i} = y_i = 0$  heisst: die Kräfte  $P_i$  u. s. w. sollen Werte annehmen, die

der Funktion  $A$ , dem Ausdrucke der Deformationsarbeit, einen Extremwert verleihen. Die Art des Extremwertes (max. oder min.) entscheidet das

Vorzeichen des Ausdruckes für  $\frac{\partial^2 A}{\partial P_i^2} = \frac{\partial}{\partial P_i} \left( \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_{ik} P_k \right) = \alpha_{ii}$ . Dieser letz-

tere ist aber immer positiv, was bedeutet, dass der Extremwert von  $A$  ein Minimum ist.

## Die Integralform der Sätze:

## der Satz von Clapeyron und der Satz von Rayleigh und Betti.

Wir wollen wieder vom Ausdruck (2):

$$dA = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} P_i \frac{\partial y_i}{\partial P_k} dP_k \text{ ausgehen. Ebenso kann man schreiben } dA = \\ = \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{i=1}^{i=n} P_k \frac{\partial y_k}{\partial P_i} dP_i = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} P_k \frac{\partial y_k}{\partial P_i} dP_i.$$

Wenn man diese Ausdrücke summiert, so gelangt man zum Ausdruck:

$$2 dA = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} P_i \frac{\partial y_i}{\partial P_k} dP_k + \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} P_k \frac{\partial y_k}{\partial P_i} dP_i = \\ = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \left( P_i \frac{\partial y_i}{\partial P_k} dP_k + P_k \frac{\partial y_k}{\partial P_i} dP_i \right) = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_{ik} (P_i dP_k + P_k dP_i) = \\ = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_{ik} d(P_i P_k), \text{ und nach Integrierung:}$$

$$2 A = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} (\alpha_{ik} P_k) P_i = \sum_{i=1}^{i=n} P_i \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_{ik} P_k = \sum_{i=1}^{i=n} P_i y_i \dots \dots (6)$$

(Der Satz von Clapeyron, der von vielen Autoren [Timoschenko, Föppl] als Ausgangssatz zum Beweise der übrigen Sätze angenommen wird.)

Der Ausdruck  $2 A = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_{ik} P_k P_i$  lässt sich in folgender konventionellen Form umschreiben:

$$2 A = \left( \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i P_i \right)^2 \dots \dots \dots (7),$$

wenn man sich einigt zu setzen  $\alpha_i^2 = \alpha_{ii}$ ,  $\alpha_i \alpha_k = \alpha_{ik}$  u. s. w.

Der Ausdruck (7) ist besonders geeignet zu zeigen, dass  $A$  durch ein homogenes Polynom zweiten Grades repräsentiert ist; derselbe lässt auch sehr leicht erkennen, dass das Superpositions-gesetz für die Arbeit nicht mehr besteht, denn ausser den Gliedern der Art  $\alpha_{ii} P_i^2$ , die dem Superpositions-gesetze entsprechen würden, enthält der Ausdruck (7) auch Produkte der Art  $\alpha^{ik} P^k P^i$ , die mit diesem Gesetze nicht verträglich sind. Ausserdem ist noch zu bemerken, dass der Ausdruck (7),



der Endwerte der Produkte der erwähnten Art enthält, auch unabhängig ist von dem Gesetze des Anwachsens und der Anordnung der Kräfte, ebenso, wie dieses in bezug auf die Verschiebungen der Fall ist.

Aus dem Ausdrucke (6) kann sehr leicht der Satz von Lord Rayleigh und Betti abgeleitet werden:

Für zwei Systeme von Kräften ( $P_{Ii}$ ) und ( $P_{IIi}$ ), für die die entsprechenden Einflusszahlen dieselben bleiben, ergibt sich ohne weiteres:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_{ik} P_{Ii} P_{IIk} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} P_{Ii} \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_{ik} P_{IIk} = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} P_{Ii} y_{IIi} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} P_{IIk} \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_{ki} P_{Ii} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} P_{IIk} y_{Ik} \dots \dots (8)
 \end{aligned}$$

und der Satz ist bewiesen.

Im vorausgehenden Texte wurde der Ausdruck „potentielle Energie“ nicht gebraucht.

Dieser Umstand lässt eine Verallgemeinerung der bekannten Sätze zu. Die in der Literatur bekannten Beweisführungen der Sätze stützen sich auf die Gleichheit der Arbeit der äusseren Kräfte und der der potentiellen Energie, woraus auch die Unabhängigkeit der Deformationsarbeit von der Reihenfolge des Anbringens der Kräfte und vom Gesetze des Anwachsens ihrer Werte gefolgert wird, da der Ausdruck der potentiellen Energie, der gleich ist der Arbeit der inneren Kräfte, von diesen Faktoren (Reihenfolge und Gesetz des Anwachsens der Kräfte) unabhängig sei und die Endform der Deformationen die potentielle Energie eindeutig dadurch bestimmt sei.

Diese Voraussetzungen sind für die hier vom Verfasser vorgeschlagene Beweisführung der Sätze nicht mehr nötig, was sofort zu der folgenden Verallgemeinerung führt.

Die Deformationsarbeit der äusseren Kräfte für kleine Deformationen ist gleich der Summe der potentiellen Energie des Körpers und der von inneren Reibungskräften verbrauchten Energie, welche hauptsächlich die irreversiblen, plastischen Deformationen bestimmt. Das heisst, man kann die bewiesenen Sätze auch für plastische irreversible (nicht elastische) oder nicht vollkommen elastische Deformationen anwenden. Der Sonderfall dieses Satzes ist: Die Deformationsarbeit der äusseren Kräfte ist gleich der potentiellen Energie vollkommen elastischer Körper.

## Uz elastīgo ķermeņu potenciālo enerģiju attiecošos teorēmu apvienošana.

A. Vītols.

### Autoreferāts.

Līdz šim minētās teorēmas ir pierādījuši dažādi autori, neatkarīgi vienu no otras, balstoties galvenā kārtā uz tā saucamo superpozīcijas principu, kuŗu daži autori skaita par empīrisku likumu. Šā apcerējuma autoram, turpretim, ir radusies doma izlietot zināmu nepārtraukto analītisko funkciju īpašību, proti, ka funkcijas augstāko kārtu atvasināto vērtība ir neatkarīga no atvasināto ņemšanas kārtības (sk. iepriekšējā vācu teksta nol. (1<sup>bis</sup>)), lai iegūtu visu elastības teorijā par ķermeņu potenciālo enerģiju pazīstamo teorēmu pierādījumu bez atsaukšanās uz kādu superpozīcijas principu. Beidzamais autora domu gājienā nepavisam nav vajadzīgs; pie tam, gaŗāmejot, autors rāda, ka šo principu var aizstāt ar deduktīvā ceļā pierādāmo teorēmu par dažādu mēchanisku lielumu superpozīciju. Autora ceļš tūlīt pieļauj slēgt, ka pārvietojumu superpozīcija ir iespējama ne tikai attiecībā uz ķermeņiem, kuŗi seko Hooke'a likumam, bet arī attiecībā uz ķermeņiem, kuŗu elastīgas deformācijas seko tā saucamam potences likumam (trausli ķermeņi: cements, ķets, stikls u. t. t.). Abi šie likumi (Hooke'a un potences) pielaiž diferenciālā veidā uzstādīta pārvietojumu nolīdzinājuma (1) integrāciju (sk. iepriekšējo tekstu), kuŗa izteiksme līdz šim tika uzstādīta ar superpozīcijas principa palīdzību.

Lai pierādītu pazīstamo Maxwell'a teorēmu, autors atkal neizlieto nekādu hipotezi par spēku deformācijas darba neatkarību no spēku iedarbes kārtības, kā to parasti dara, bet izmanto jau minēto nepārtraukto analītisko funkciju īpašību par augstākas kārtas atvasinātās vērtības neatkarību no šās atvasinātās sastādīšanas kārtības (sk. nolidz. 5 un tālāk līdz Maxwell'a teorēmas pierādījuma galam).

Ļoti skaidri tagad ir redzams, ka spēku deformācijas darba izteiksmi var sastādīt vienīgi ķermeņiem, kuŗi seko Hooke'a likumam; turpretim, potenclikums vairs nepieļauj sastādīt deformācijas darba izteiksmi, neskatoties uz to, ka pārvietojuma izteiksmi integrālā veidā šim likumam varēja uzrakstīt.

Kad Maxwell'a teorēma ir pierādīta, tad tūlīt viņai seko teorēmu diferenciālforma (Castigliano un Ménabréa teorēmas).

Tālāk seko teorēmu integrālfoma (Clapeyron'a, Rayleigh'a un Betti teorēmas). Par Clapeyron'a teorēmu jāmin, ka līdz šim šo teorēmu daži autori pierādīja diezgan mākslīgi: tika pieņemts, ka uz ķermeni iedarbojošies spēki pieauga no 0 līdz viņu galīgām vērtībām tā, ka katrā momentā starp spēkiem pastāv tā pati attiecība, kas starp viņu galīgām vērtībām; piemēram, ja kāda spēka galīgā vērtība ir 2 reizes lielāka par kāda cita spēka galīgo vērtību, tad arī katrā momentā starp vēl līdz galam nepieaugušām vērtībām pastāv tā pati attiecība. Kad tādā ceļā tika izvesta izteiksme (6), tad tālāk tika secināts, ka, tā kā spēku deformācijas darbs (6) ir pārgājis kermeņa potenciālā enerģijā, kuņas izteiksme ir viennozīmīga, neatkarīga no spēku iedarbes kārtības (superpozīcijas princips latentā veidā!), tad arī spēku deformācijas darbs vienmēr, — arī pie cita spēku pieauguma likuma — gūst to pašu izteiksmes veidu (6). Kā redzams, šē spēku deformācijas darba izteiksmes neatkarība tiek motivēta ar potenciālas enerģijas izteiksmes viennozīmīgumu, t. i. min. autori aprobežo problēmu ar deformācijām elastības robežās. Turpretim, šā apcerējuma autoram izdodas min. teorēmas paplašināt arī ārpus minētām robežām, jo viņam viņa teorēmu pierādījumā nepavisam nav vajadzīgs jēdziens par potenciālo enerģiju, un viņa teorēmas attiecas tikai uz deformācijas darbu. Ja tas ir tā, tad min. teorēmas var attiecināt arī uz neelastīgām, plastiskām deformācijām, ar noteikumu, ka šīs deformācijas ir relatīvi mazas, jeb šīs teorēmas var lietot arī ārpus ķermeņu elastības robežām, kad iesākas nelielas paliekošas deformācijas. Atsevišķs gadījums ir: „Ārējo spēku deformācijas darbs ir vienāds ar pilnīgi elastīgu kermeņu potenciālo enerģiju“, uz kuņu līdz šim attiecās min. teorēmas.



LU bibliotēka



220041002

246698

LŪR. mēch. I.	AUL. mech. I.
Nr. 8. N. Rozenauers (Rosenauer). Grafoanalītiska metode pātrinājuma centra un centroidu noteikšanai komplānā kustībā . . . . .	249
Eine graphoanalytische Methode zur Bestimmung des Beschleunigungszentrums in der komplänen Bewegung . . . . .	275
Nr. 9. A. Labutin. Das Reziprozitätsgesetz in der Statik ebener Punkt- und Geradensysteme .	277
Reciprocitātes likums plakanu punktu un taisņu sistēmu statikā . . . . .	298
Nr. 10. Alfrēds Vītols. Matériaux concernant la construction d'une station hydroélectrique sur le fleuve de Daugava: contribution à la question du profil du barrage au point de vue hydraulique	299
Ķeguma stacijas sprosta hidrauliskais profils	335
Nr. 11. A. Vītols. Eine Verallgemeinerung der Sätze von der potentiellen Energie elastischer Körper	337
Uz elastīgo ķermeņu potenciālo enerģiju attiecošos teorēmu apvienošana . . . . .	344