

422

LATVIJAS  
ŪNIVERSITĀTES RAKSTI  
ACTA UNIVERSITATIS LATVIENSIS

---

MĒCHANIKAS FAKULTĀTES  
SERIJA

I SĒJUMS  
TOMUS

№ 12—15

LATVIJAS ŪNIVERSITĀTE

---

R Ī G Ā, 1 9 3 6

p 22  
1448

LVU ZINĀTNISKĀ  
BIBLIOTĒKA  
641-30-88

## Analītiskais un grafoanalītiskais atrisinājums šarniru četrstūŗa kustības noteikšanai.

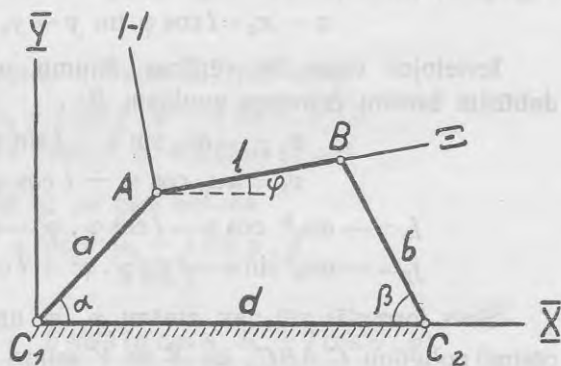
Prof. Dr. ing. N. Rozenauers.

Šarniru četrstūŗis ir pamata mēchanisms visām mašīnām, bet teorētiskas un arī tehniskas mēchanikas grāmatās šarniru četrstūŗa kustība parasti nemaz netiek apskatīta un „Mēchanismu kustības mācības“ grāmatās ir doti tikai grafiskie atrisinājumi, kuŗiem piemīt zināmi trūkumi: 1) pie taisnu krustošanas zem maziem leņķiem atrisinājumi ir neprecīzi, 2) ja kāda konstrukcijas daļa iznāk ārpus zīmējuma, atrisinājumu nevar dabūt. Ievērojot augšā sacīto, šīnī darbā attīstītas citas metodes ātruma un paātrinājuma noteikšanai šarniru četrstūŗi.

Parasti šarniru četrstūŗi piedzen viens loceklis, kas atrodas vienmēŗīgā griezes kustībā. Pieņemsim, ka šīs loceklis ir  $AC_1$ , kas griežas vienmēŗīgi ap punktu  $C_1$ , ar doto ātrumu  $\omega_0$ .

Apzīmēsim šarniru četrstūŗa  $C_1ABC_2$  malu garumus:  $AC_1 = a$ ,  $BC_2 = b$ ,  $AB = l$  un nekustošas malas  $C_1C_2 = d$ . Leņķi  $AC_1C_2$ , kas nosaka locekļa  $C_1A$  stāvokli, apzīmēsim ar  $\alpha$  un  $\angle BC_2C_1 = \beta$ . Dotais griezes ātrums  $\omega_0 = \dot{\alpha}$ . Jāatrod ātrums un paātrinājums punktam  $B$ .

Šo jautājumu atrisināsim divējādi: analītiski un grafoanalītiski, lai būtu iespējams salīdzināt abas metodes.



1. zīm.

Analitiska metode. Izvēlēsim nekustošo un kustošo koordinātu sistēmas, kā parādīts 1. zīm., un apzīmēsim leņķi starp nekustošo X-asi un kustošo  $\Xi$ -asi ar  $\varphi$ .

Punkta  $B$  ātruma noteikšanai analitiskā ceļā jālieto pazīstamas formulas:

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x}_0 - (y - y_0) \dot{\varphi} \\ v_y &= \dot{y}_0 + (x - x_0) \dot{\varphi}. \end{aligned}$$

Tā paša punkta  $B$  paātrinājuma noteikšanai jālieto formulas:

$$\begin{aligned} j_x &= \ddot{x}_0 - (x - x_0) \ddot{\varphi} - (y - y_0) \dot{\varphi}^2 \\ j_y &= \ddot{y}_0 - (y - y_0) \ddot{\varphi} + (x - x_0) \dot{\varphi}^2, \end{aligned}$$

kur  $x_0$  un  $y_0$  ir punkta  $A$  koordinātas, bet  $x$  un  $y$  ir punkta  $B$  koordinātas,  $\dot{x}_0$  un  $\dot{y}_0$  ir punkta  $A$  ātruma projekcijas,  $\ddot{x}_0$  un  $\ddot{y}_0$  ir punkta  $A$  paātrinājuma projekcijas, kuŗas, ievērojot, ka punkts  $A$  griežas vienmērīgi ap punktu  $C_1$ , iznāk:

$$\begin{array}{l|l} \dot{x}_0 = -a\omega_0 \sin \alpha & \ddot{x}_0 = -a\omega_0^2 \cos \alpha \\ \dot{y}_0 = a\omega_0 \cos \alpha & \ddot{y}_0 = -a\omega_0^2 \sin \alpha \end{array}$$

Bez tam, kā redzams 1. zīm.,

$$x - x_0 = l \cos \varphi \text{ un } y - y_0 = l \sin \varphi.$$

Ievietojot visas šīs vērtības ātrumu un paātrinājumu formulās, dabūsim šarniru četrstūra punktam  $B$ :

$$\left. \begin{aligned} v_x &= -a\omega_0 \sin \alpha - l \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} \\ v_y &= a\omega_0 \cos \alpha + l \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} j_x &= -a\omega_0^2 \cos \alpha - l \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - l \sin \varphi \cdot \ddot{\varphi} \\ j_y &= -a\omega_0^2 \sin \alpha - l \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + l \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi} \end{aligned} \right\} \dots \dots (2)$$

Šinīs formulās vēl nav zināmi  $\varphi$ ,  $\dot{\varphi}$  un  $\ddot{\varphi}$ , lai dabūtu tos, projicēsim poligōnu  $C_1ABC_2$  uz  $\bar{X}$  un  $\bar{Y}$  asīm.

$$\left. \begin{aligned} a \cos \alpha + l \cos \varphi + b \cos \beta &= d \\ a \sin \alpha + l \sin \varphi - b \sin \beta &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Izslēdzot no nol-miem (3)  $\angle \beta$ , dabūsim  $f(\alpha\varphi) = 0$ , no kuŗas varēs atrast leņķi  $\varphi$  atkarībā no argumenta  $\alpha$ .

$$\begin{array}{l} \text{Nemsim} \\ a \cos \alpha + l \cos \varphi - d = -b \cos \beta \\ a \sin \alpha + l \sin \varphi = b \sin \beta \end{array}$$

celsim kvadrātā un summēsim

$$\begin{aligned}
 a^2 + l^2 + d^2 + 2al \cos \alpha \cos \varphi - 2ad \cos \alpha - 2ld \cos \varphi + \\
 + 2al \sin \alpha \sin \varphi = b^2 \\
 a^2 + l^2 + d^2 - b^2 + 2l(a \cos \alpha - d) \cos \varphi + \\
 + 2al \sin \alpha \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} - 2ad \cos \alpha = 0 \quad \dots \quad (4)
 \end{aligned}$$

Nol-ms (4) reprezentē  $f(\alpha, \varphi) \stackrel{=}{=} 0$ , un no tā, atrisinot kvadrātnol-mu, var atrast  $\cos \varphi$  un pēc tam arī  $\sin \varphi$ , bet tās izteiksmes atklātā veidā iznāks diezgan sarežģītas.

Analogiskā kārtā, izslēdzot  $\varphi$  no nol-miem (3), var atrast sakaru starp leņķiem  $\beta$  un  $\alpha$ .

$$\begin{aligned}
 a \cos \alpha + b \cos \beta - d &= -l \cos \varphi \\
 a \sin \alpha - b \sin \beta &= -l \sin \varphi,
 \end{aligned}$$

celsim abus nol-mus kvadrātā un summēsīm tos

$$\begin{aligned}
 a^2 + b^2 + d^2 + 2ab \cos \alpha \cos \beta - 2ad \cos \alpha - 2bd \cos \beta - \\
 - 2ab \sin \alpha \sin \beta = l^2.
 \end{aligned}$$

Šis nol-ms atkal dod kvadrātnol-mu  $f(\alpha, \beta) = 0$  leņķa  $\beta$  noteikšanai:

$$\begin{aligned}
 a^2 + b^2 + d^2 - l^2 + 2b(a \cos \alpha - d) \cos \beta - 2ab \sin \alpha \sqrt{1 - \cos^2 \beta} - \\
 - 2ad \cos \alpha = 0. \quad \dots \quad (5)
 \end{aligned}$$

Tālāk meklēsīm ātruma un paātrinājuma noteikšanai vajadzīgos  $\dot{\varphi}$  un  $\ddot{\varphi}$ .

Lai dabūtu  $\dot{\varphi}$  diferencēsīm nol-mus (3) pēc laika.

$$\begin{aligned}
 -a \sin \alpha \cdot \omega_0 - l \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} - b \sin \beta \cdot \dot{\beta} &= 0 \\
 a \cos \alpha \cdot \omega_0 + l \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} - b \cos \beta \cdot \dot{\beta} &= 0
 \end{aligned}$$

Izslēgsīm šeit  $\dot{\beta}$ , ņemot to no otra nol-ma

$$\dot{\beta} = \frac{a \cos \alpha \cdot \omega_0 + l \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}}{b \cos \beta}$$

un ievietojot pirmā

$$a \sin \alpha \cdot \omega_0 + l \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} + \frac{b \sin \beta (a \cos \alpha \cdot \omega_0 + l \cos \varphi \cdot \dot{\varphi})}{b \cos \beta} = 0$$

$$a \omega_0 (\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha) = -l \dot{\varphi} (\sin \beta \cos \varphi + \cos \beta \sin \varphi),$$

$$\text{no kurienes} \quad \dot{\varphi} = -\frac{a \omega_0 \cdot \sin(\alpha + \beta)}{l \cdot \sin(\beta + \varphi)} \quad \dots \quad (6)$$

(—) zīme (6) formulā nozīmē, ka locekļa  $AB$  grieze notiks pretējā virzienā locekļa  $AC_1$  griezei. Pirms  $\dot{\varphi}$  skaitliskas vērtības noteikšanas pie dota  $\angle \alpha$ , ir vajadzīgs ar formulu (4) un (5) palīdzību atrast izvēlētam argumentam  $\alpha$  atbilstošus leņķus  $\varphi$  un  $\beta$ .

Meklēsim tagad punkta  $B$  ātruma projekciju izteiksmes, ievietojot formulās (1) atrasto  $\varphi$ .

$$v_x = -a \omega_0 \sin \alpha + l \sin \varphi \cdot \frac{a}{l} \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\beta + \varphi)} \cdot \omega_0$$

$$v_y = a \omega_0 \cos \alpha - l \cos \varphi \cdot \frac{a}{l} \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\beta + \varphi)} \cdot \omega_0$$

$$v_x = a \omega_0 \left[ -\sin \alpha + \sin \varphi \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\beta + \varphi)} \right]$$

$$v_y = a \omega_0 \left[ \cos \alpha - \cos \varphi \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\beta + \varphi)} \right].$$

Pēc projekcijām sastādīsim ātruma izteiksmi

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} =$$

$$= a \omega_0 \sqrt{1 + \frac{\sin^2(\alpha + \beta)}{\sin^2(\beta + \varphi)} - 2 \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\beta + \varphi)} (\sin \alpha \sin \varphi + \cos \alpha \cos \varphi)}$$

$$v = \frac{a \omega_0}{\sin(\beta + \varphi)} \sqrt{\sin^2(\beta + \varphi) + \sin^2(\alpha + \beta) - 2 \sin(\alpha + \beta) \sin(\beta + \varphi) \cdot \cos(\alpha - \varphi)}.$$

Šo formulu var vienkāršot, pārveidojot izteiksmi zem saknes.

$$\begin{aligned} & \sin^2(\beta + \varphi) + \sin^2(\alpha + \beta) - 2 \sin(\alpha + \beta) \sin(\beta + \varphi) \cdot \cos(\alpha - \varphi) = \\ & = \sin(\beta + \varphi) [\sin(\beta + \varphi) - \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \varphi)] + \\ & \quad + \sin(\alpha + \beta) [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\beta + \varphi) \cos(\alpha - \varphi)] = \\ & = \sin(\beta + \varphi) [\sin \beta \cos \varphi + \cos \beta \sin \varphi - \sin \alpha \cos \beta \cos \alpha \cos \varphi - \\ & \quad - \cos^2 \alpha \sin \beta \cos \varphi - \sin^2 \alpha \sin \varphi \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \sin \alpha \sin \varphi] + \\ & \quad + \sin(\alpha + \beta) [\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha - \sin \beta \cos^2 \varphi \cos \alpha - \\ & \quad - \cos \beta \sin \varphi \cos \alpha \cos \varphi - \sin \beta \cos \varphi \sin \alpha \sin \varphi - \cos \beta \sin^2 \varphi \cdot \sin \alpha] = \\ & = \sin(\beta + \varphi) [\sin \beta \cos \varphi \cdot \sin^2 \alpha + \cos \beta \sin \varphi \cos^2 \alpha - \\ & \quad - \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta \cos \varphi - \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta \sin \varphi] + \\ & \quad + \sin(\alpha + \beta) [\sin \beta \cos \alpha \cdot \sin^2 \varphi + \sin \alpha \cos \beta \cos^2 \varphi - \\ & \quad - \sin \varphi \cos \varphi \sin \alpha \sin \beta - \sin \varphi \cos \varphi \cos \alpha \cos \beta] = \\ & = \sin(\beta + \varphi) [\sin \varphi \cos \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) - \sin \alpha \cos \varphi \cos(\alpha + \beta)] + \\ & \quad + \sin(\alpha + \beta) [\sin \alpha \cos \varphi \cdot \cos(\beta + \varphi) - \sin \varphi \cos \alpha \cos(\beta + \varphi)] = \\ & = \sin(\beta + \varphi) \cos(\alpha + \beta) \cdot \sin(\varphi - \alpha) + \sin(\alpha + \beta) \cos(\beta + \varphi) \sin(\alpha - \varphi) = \\ & = \sin(\alpha - \varphi) [\sin(\alpha + \beta) \cos(\beta + \varphi) - \sin(\beta + \varphi) \cos(\alpha + \beta)] = \\ & = \sin(\alpha - \varphi) \cdot \sin(\alpha + \beta - \beta - \varphi) = \sin(\alpha - \varphi) \cdot \sin(\alpha - \varphi) = \\ & = \sin^2(\alpha - \varphi). \end{aligned}$$

Ievietojot pārveidoto izteiksmi, dabūsim galīgā veidā ātruma formulu:

$$v = a \omega_0 \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin(\beta + \varphi)} \dots \dots \dots (7)$$

Ātruma virziens, ievērojot, ka tam jābūt perpendikulāram loceklim  $BC_2$ , būs noteikts ar  $\angle \beta$  tādā kārtā, ka

$$\operatorname{tg}(\overline{XV}) = \frac{v_y}{v_x} = \operatorname{ctg} \beta$$

kas ir arī redzams, izdalot izteiksmes  $v_y$  ar  $v_x$ .

Paātrinājuma projekcijās, kā redzams formulās (2), ieiet vēl  $\ddot{\varphi}$ ; lai dabūtu to, diferencēsim formulu (6) pēc laika.

$$\ddot{\varphi} = -\frac{a \omega_0}{l} \cdot \frac{\sin(\beta + \varphi) \cos(\alpha + \beta) (\omega_0 + \dot{\beta}) - \sin(\alpha + \beta) \cos(\beta + \varphi) \cdot (\dot{\beta} + \dot{\varphi})}{\sin^2(\beta + \varphi)}$$

Šinī formulā ieliksīm agrāk atrasto

$$\dot{\beta} = \frac{a \omega_0 \cos \alpha + l \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}}{b \cos \beta}$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{a \omega_0}{l \sin^2(\beta + \varphi)} \left[ \sin(\beta + \varphi) \cos(\alpha + \beta) \left( \omega_0 + \frac{a \omega_0 \cos \alpha + l \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}}{b \cos \beta} \right) - \right. \\ \left. - \sin(\alpha + \beta) \cos(\beta + \varphi) \left( \frac{a \omega_0 \cos \alpha + l \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}}{b \cos \beta} + \dot{\varphi} \right) \right] =$$

$$= -\frac{a \omega_0}{b l \cos \beta \sin^2(\beta + \varphi)} \left[ \sin(\beta + \varphi) \cos(\alpha + \beta) \left\{ \omega_0 (b \cos \beta + a \cos \alpha) + \right. \right. \\ \left. \left. + l \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} \right\} - \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\beta + \varphi) \cdot \left\{ a \omega_0 \cos \alpha + \right. \right. \\ \left. \left. + (l \cos \varphi + b \cos \beta) \dot{\varphi} \right\} \right] = -\frac{a \omega_0}{b l \cos \beta \sin^2(\beta + \varphi)}$$

$$\cdot \left[ \sin(\beta + \varphi) \cos(\alpha + \beta) \omega_0 (b \cos \beta + a \cos \alpha) - l \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} \sin(\alpha - \varphi) - \right. \\ \left. - \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\beta + \varphi) (a \omega_0 \cos \alpha + b \cos \beta \cdot \dot{\varphi}) \right].$$

$$\text{Tagad ievietosim } \dot{\varphi} = -\frac{a \omega_0}{l} \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\beta + \varphi)} \dots \dots \dots (6)$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{a \omega_0}{b l \cos \beta \sin^2(\beta + \varphi)} \left[ \omega_0 \sin(\beta + \varphi) \cos(\alpha + \beta) (b \cos \beta + a \cos \alpha) + \right. \\ \left. + l \cos \varphi \frac{a \omega_0}{l} \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\beta + \varphi)} \sin(\alpha - \varphi) - \right.$$

$$\left. - \sin(\alpha + \beta) \cos(\beta + \varphi) (a \omega_0 \cos \alpha - b \cos \beta \frac{a \omega_0}{l} \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\beta + \varphi)}) \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{a \omega_0^2}{b l \cos \beta \sin^3 (\beta + \varphi)} \left[ \sin^2 (\beta + \varphi) \cos (\alpha + \beta) b \cos \beta + \right. \\
&+ \sin^2 (\beta + \varphi) \cos (\alpha + \beta) a \cos \alpha + a \cos \varphi \sin (\alpha + \beta) \sin (\alpha - \varphi) - \\
&- a \cos \alpha \sin (\alpha + \beta) \sin (\beta + \varphi) \cos (\beta + \varphi) + \\
&\quad \left. + \frac{a b}{l} \cos \beta \sin^2 (\alpha + \beta) \cos (\beta + \varphi) \right] = \\
&= -\frac{a \omega_0^2}{b l \cos \beta \sin^3 (\beta + \varphi)} \left[ b \cos \beta \sin^2 (\beta + \varphi) \cos (\alpha + \beta) - \right. \\
&- a \cos \alpha \sin (\beta + \varphi) \sin (\alpha - \varphi) + a \cos \varphi \sin (\alpha + \beta) \sin (\alpha - \varphi) + \\
&\quad \left. + \frac{a b}{l} \cos \beta \sin^2 (\alpha + \beta) \cos (\beta + \varphi) \right] = \\
&= -\frac{a \omega_0^2}{b l \cos \beta \sin^3 (\beta + \varphi)} \left[ b \cos \beta \{ \sin^2 (\beta + \varphi) \cos (\alpha + \beta) + \right. \\
&+ \frac{a}{l} \sin^2 (\alpha + \beta) \cos (\beta + \varphi) \} - a \sin (\alpha - \varphi) \{ \cos \alpha \sin (\beta + \varphi) - \\
&- \cos \varphi \sin (\alpha + \beta) \} \left. \right] = -\frac{a \omega_0^2}{b l \cos \beta \sin^3 (\beta + \varphi)} \left[ b \cos \beta \{ \sin^2 (\beta + \varphi) \cos (\alpha + \beta) + \right. \\
&+ \frac{a}{l} \sin^2 (\alpha + \beta) \cos (\beta + \varphi) \} + a \sin^2 (\alpha - \varphi) \cdot \cos \beta \left. \right].
\end{aligned}$$

Un galīgi  $\ddot{\varphi}$  iegūst šādu izteiksmi:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{a \omega_0^2}{b l \sin^3 (\beta + \varphi)} \left[ a \sin^2 (\alpha - \varphi) + b \sin^2 (\beta + \varphi) \cos (\alpha + \beta) + \right. \\
\left. + \frac{a b}{l} \sin^2 (\alpha + \beta) \cdot \cos (\beta + \varphi) \right] \dots \dots \dots (8)$$

Atrastos  $\dot{\varphi}$  un  $\ddot{\varphi}$  ievietosim formulās (2) un tādā kārtā dabūsim punkta  $B$  paātrinājuma projekcijas uz nekustošām asīm.

$$\begin{aligned}
j_x &= -a \omega_0^2 \cos \alpha - l \cos \varphi \dot{\varphi}^2 - l \sin \varphi \cdot \ddot{\varphi} \\
j_x &= -a \omega_0^2 \cos \alpha - l \cos \varphi \frac{a^2 \omega_0^2}{l^2} \cdot \frac{\sin^2 (\alpha + \beta)}{\sin^2 (\beta + \varphi)} + \\
&+ \frac{l \sin \varphi a \omega_0^2}{b l \sin^3 (\beta + \varphi)} \left[ a \sin^2 (\alpha - \varphi) + b \sin^2 (\beta + \varphi) \cos (\alpha + \beta) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{a b}{l} \sin^2 (\alpha + \beta) \cos (\beta + \varphi) \right] = -a \omega_0^2 \cos \alpha - \\
&- \frac{a \omega_0^2}{\sin^3 (\beta + \varphi)} \left[ \frac{a}{l} \cos \varphi \sin^2 (\alpha + \beta) \sin (\beta + \varphi) - \frac{a}{b} \sin \varphi \sin^2 (\alpha - \varphi) - \right.
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& - \sin \varphi \sin^2 (\beta + \varphi) \cos (\alpha + \beta) - \frac{a}{l} \sin \varphi \sin^2 (\alpha + \beta) \cos (\beta + \varphi) \Big] = \\
& = - a \omega_0^2 \left[ \cos \alpha - \frac{\sin \varphi \cos (\alpha + \beta)}{\sin (\beta + \varphi)} \right] - \\
& - \frac{a \omega_0^2}{\sin^3 (\beta + \varphi)} \left[ \frac{a}{l} \sin^2 (\alpha + \beta) \{ \cos \varphi \sin (\beta + \varphi) - \sin \varphi \cos (\beta + \varphi) \} - \right. \\
& \left. - \frac{a}{b} \sin \varphi \sin^2 (\alpha - \varphi) \right] = - a \omega_0^2 \frac{\sin \beta \cos (\alpha - \varphi)}{\sin (\beta + \varphi)} - \\
& - \frac{a \omega_0^2}{\sin^3 (\beta + \varphi)} \left[ \frac{a}{l} \sin^2 (\alpha + \beta) \cdot \sin \beta - \frac{a}{b} \sin \varphi \sin^2 (\alpha - \varphi) \right]
\end{aligned}$$

un galīgā veidā iznāk

$$j_x = - \frac{a \omega_0^2}{\sin^3 (\beta + \varphi)} \left[ \sin \beta \cos (\alpha - \varphi) \sin^2 (\beta + \varphi) + \frac{a}{l} \sin \beta \sin^2 (\alpha + \beta) - \right. \\
\left. - \frac{a}{b} \sin \varphi \sin^2 (\alpha - \varphi) \right] \dots \dots \dots (9)$$

Ņemsim otru paātrinājuma projekciju uz  $\bar{Y}$ -asi

$$j_y = - a \omega_0^2 \sin \alpha - l \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + l \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi}$$

$$j_y = - a \omega_0^2 \sin \alpha - l \sin \varphi \frac{a^2 \omega_0^2}{l^2} \cdot \frac{\sin^2 (\alpha + \beta)}{\sin^2 (\beta + \varphi)} -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{l \cos \varphi a \omega_0^2}{b l \sin^3 (\beta + \varphi)} \left[ a \sin^2 (\alpha - \varphi) + b \sin^2 (\beta + \varphi) \cos (\alpha + \beta) + \right. \\
& \left. + \frac{a b}{l} \sin^2 (\alpha + \beta) \cos (\beta + \varphi) \right] = - a \omega_0^2 \sin \alpha -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{a \omega_0^2}{\sin^3 (\beta + \varphi)} \left[ \frac{a}{l} \sin \varphi \sin^2 (\alpha + \beta) \sin (\beta + \varphi) + \frac{a}{b} \cos \varphi \sin^2 (\alpha - \varphi) + \right. \\
& \left. + \cos \varphi \sin^2 (\beta + \varphi) \cos (\alpha + \beta) + \frac{a}{l} \cos \varphi \sin^2 (\alpha + \beta) \cos (\beta + \varphi) \right] =
\end{aligned}$$

$$= - a \omega_0^2 \left[ \sin \alpha + \frac{\cos \varphi \cos (\alpha + \beta)}{\sin (\beta + \varphi)} \right] -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{a \omega_0^2}{\sin^3 (\beta + \varphi)} \left[ \frac{a}{l} \sin^2 (\alpha + \beta) \{ \sin \varphi \sin (\beta + \varphi) + \cos \varphi \cos (\beta + \varphi) \} + \right. \\
& \left. + \frac{a}{b} \cos \varphi \sin^2 (\alpha - \varphi) \right] = - a \omega_0^2 \frac{\cos \beta \cos (\alpha - \varphi)}{\sin (\beta + \varphi)} -
\end{aligned}$$

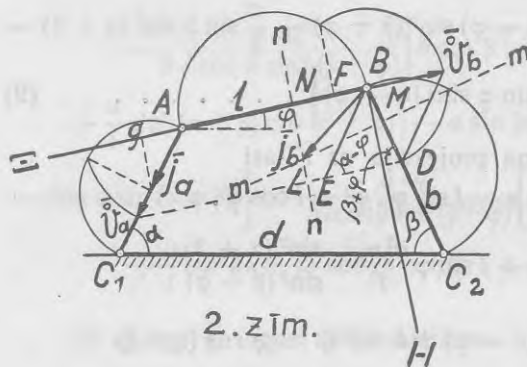
$$- \frac{a \omega_0^2}{\sin^3 (\beta + \varphi)} \left[ \frac{a}{l} \sin^2 (\alpha + \beta) \cos \beta + \frac{a}{b} \cos \varphi \cdot \sin^2 (\alpha - \varphi) \right]$$

un galīgā veidā iznāk

$$j_y = -\frac{a \omega_0^2}{\sin^3(\beta + \varphi)} \left[ \cos \beta \cos(\alpha - \varphi) \sin^2(\beta + \varphi) + \right. \\ \left. + \frac{a}{l} \cos \beta \sin^2(\alpha + \beta) + \frac{a}{b} \cos \varphi \sin^2(\alpha - \varphi) \right] \dots (10)$$

Ar formulām (9) un (10) paātrinājuma noteikšanas jautājums šarnīru četrstūrī ir atrisināts, tikai skaitliskās vērtības noteikšanai vajadzīgs iepriekš ar formulu (4) un (5) palīdzību atrast izvēlētam argumentam  $\alpha$  atbilstošus leņķus  $\varphi$  un  $\beta$ .

Tālāk apskatīsim to pašu jautājumu grafoanalītiskā ceļā.



Grafoanalītiskā metode. Ņemsim to pašu šarnīru četrstūrī  $C_1ABC_2$  un paturēsim tos pašus apzīmējumus:  $AC_1 = a$ ,  $BC_2 = b$ ,  $AB = l$ ,  $C_1C_2 = d$ ,  $\angle AC_1C_2 = \alpha$ ;  $\angle BC_2C_1 = \beta$  un locekļa  $C_1A$  griezes ātrums:  $\dot{\alpha} = \omega_0$ .

Atliksim punkta  $A$  ātrumu, kas līdzinās  $v_a = a \omega_0$  ortogonālā virzienā.

Velkot caur  $\bar{v}_a$  gala punktu taisni paralēli  $AB$ , nogriezīsim uz  $BC_2$  punkta  $B$  ortogonālo ātrumu  $\bar{v}_b = \overline{BD}$ . Kā zināms, komplānā kustībā katra punkta ātrums līdzinās kāda otra punkta ātrumam ģeometriski saskaitītam ar pirmā punkta ātrumu griezes kustībā ap otro. Tamdēļ sadalot  $\bar{v}_b$  divos komponentos, no kuriem viens ir  $\bar{v}_a$ , dabūsim kā otro komponentu  $\bar{v}_b^a$  t. i. punkta  $B$  ātrumu kustībā pret punktu  $A$ .

Ātrumu vektoru  $\bar{v}_b$  un  $\bar{v}_b^a$  lielumus dabūsim no  $\triangle BDE$ , izlietojot sinusu teorēmu:

$$\frac{v_a}{\sin(\beta + \varphi)} = \frac{v_b}{\sin(\alpha - \varphi)} = \frac{v_b^a}{\sin(\pi - \alpha + \varphi - \beta - \varphi)}$$

$$\text{no kurienes } v_b = \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin(\beta + \varphi)} \cdot v_a \text{ un } v_b^a = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\beta + \varphi)} \cdot v_a$$

Ievērojot, ka  $v_a = a\omega_0$ , dabūjam to pašu jau agrāk analitiski atrasto formulu (7), bet daudz vienkāršākā ceļā.

$$v_b = a\omega_0 \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin(\beta + \varphi)} \dots \dots \dots (7)$$

Lai dabūtu  $\dot{\varphi}$ , jāizdala  $v_b^a$  ar garumu  $AB = l$

$$\dot{\varphi} = -\frac{v_b^a}{l} = -\frac{v_a}{l} \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\beta + \varphi)},$$

ievietojot atkal  $v_a = a\omega_0$ , dabūjam jau pazīstamo formulu (6):

$$\dot{\varphi} = -\frac{a\omega_0}{l} \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\beta + \varphi)} \dots \dots \dots (6)$$

(—) zīme jāņem tādēļ ka  $\vec{v}_b^a$  ir virzīts no centra  $A$ , bet  $\vec{v}_a$  pozitīvais virziens bija izvēlēts uz centru  $C_1$ .

Tālāk ar pazīstamo konstrukciju, atrodam normālo paātrinājumu punkta  $B$  kustībā ap  $A$ , tas būs  $BF$ :

$$j_{bn}^a = BF = l\dot{\varphi}^2 = \frac{a^2\omega_0^2}{l} \cdot \frac{\sin^2(\alpha + \beta)}{\sin^2(\beta + \varphi)}$$

Ievērojot, ka katra punkta paātrinājums komplānā kustībā līdzinās otra punkta paātrinājumam, ģeometriski saskaitītam ar pirmā punkta paātrinājumu kustībā ap otro, varam rakstīt

$$\vec{j}_b = \vec{j}_a + \vec{j}_b^a$$

Projecēsim šo nol-mu uz  $BA$  virzienu, izvēlot  $\Xi$ -asi virzienā no  $B$  uz  $A$ .

$$j_{\xi} = j_a \cos(\alpha - \varphi) + j_{bn}^a, \text{ bet } j_a = a\omega_0^2, \text{ tā tad}$$

$$j_{\xi} = a\omega_0^2 \cos(\alpha - \varphi) + \frac{a^2\omega_0^2}{l} \cdot \frac{\sin^2(\alpha + \beta)}{\sin^2(\beta + \varphi)}$$

un galīgi

$$j_{\xi} = a\omega_0^2 \left[ \cos(\alpha - \varphi) + \frac{a}{l} \cdot \frac{\sin^2(\alpha + \beta)}{\sin^2(\beta + \varphi)} \right] \dots \dots \dots (11)$$

Ģeometriski  $\vec{j}_{\xi} = \vec{BF} + \vec{AG}$ , atlikšim  $\vec{FN} = \vec{AG}$ , tad  $\vec{j}_{\xi} = \vec{BF} + \vec{FN}$   $j_{\xi} = \vec{BN}$  un pilna paātrinājuma vektora gala punkts atradīsies uz normāles  $n-n$ , vilkta pret  $AB$  punktā  $N$ .

No otras puses punkts  $B$  atrodas arī griezes kustībā ap  $C_2$  ar ātrumu  $v_b$  un šinī kustībā normālais paātrinājums būs:

$$j_{bn}^{c_2} = BM = \frac{v_b^2}{b}$$

Velkot caur punktu  $M$  normāli  $m-m$  pret  $BC_2$ , dabūsim otru taisni, uz kuŗas atrodas paātrinājuma  $\bar{j}_b$  vektora gala punkts. Galīgi tā tad  $\bar{j}_b$  vektora gala punkts atradīsies normāļu  $n-n$  un  $m-m$  krustošanās punktā  $L$ .

$$\bar{j}_b = \overline{BL}.$$

Lai dabūtu  $j_b$  no šās geometriskās konstrukcijas analitiskā veidā, meklēsim otru  $j_b$  projekciju uz  $H$ -asi, vilktu caur punktu  $B$  perpendikulāri  $B\Xi$ . Šo projekciju apzīmēsim:  $j_\eta$ . Projecēsim poligōnu  $BML$  uz  $H$ -asi, tad

$$j_\eta = BM \sin(\beta + \varphi) + ML \cos(\beta + \varphi).$$

Šeit  $BM$  ir jau zināms, bet lai dabūtu  $ML$ , projecēsim poligōnu  $BMLN$  uz  $\Xi$ -asi:

$$j_\xi = BN = -BM \cos(\beta + \varphi) + ML \sin(\beta + \varphi)$$

no kurienes  $ML = \frac{j_\xi + BM \cos(\beta + \varphi)}{\sin(\beta + \varphi)}$  un tālāk

$$j_\eta = BM \sin(\beta + \varphi) + \frac{j_\xi + BM \cos(\beta + \varphi)}{\sin(\beta + \varphi)} \cdot \cos(\beta + \varphi) =$$

$$= \frac{BM + j_\xi \cos(\beta + \varphi)}{\sin(\beta + \varphi)} = \frac{BM}{\sin(\beta + \varphi)} + j_\xi \operatorname{ctg}(\beta + \varphi)$$

$$\text{bet } BM = \frac{v_b^2}{b} = \frac{v_a^2}{b} \cdot \frac{\sin^2(\alpha - \varphi)}{\sin^2(\beta + \varphi)} = \frac{a^2 \omega_0^2}{b} \cdot \frac{\sin^2(\alpha - \varphi)}{\sin^2(\beta + \varphi)}$$

no kurienes galīgi:

$$j_\eta = \frac{a^2 \omega_0^2}{b} \cdot \frac{\sin^2(\alpha - \varphi)}{\sin^3(\beta + \varphi)} +$$

$$+ a \omega_0^2 \left[ \cos(\alpha - \varphi) + \frac{a}{l} \frac{\sin^2(\alpha + \beta)}{\sin^2(\beta + \varphi)} \right] \operatorname{ctg}(\beta + \varphi) \quad \dots (12).$$

Formulas (11) un (12), iegūtas grafoanalitiskā ceļā, dod punkta  $B$  paātrinājuma projekcijas uz  $AB$  un uz virzienu perpendikulāru  $AB$ , ar ko paātrinājuma vektors  $\bar{j}_b$  ir pilnīgi noteikts.

Sakars starp atrastām formulām. Grafoanalitiskā ceļā atrastas formulas (11) un (12) var dabūt arī no analitiskā ceļā atrastām formulām (9) un (10), izlietojot pazīstamo sakaru starp kāda vektora projekcijām:

$$j_\xi = -(j_x \cos \varphi + j_y \sin \varphi)$$

$$j_\eta = -(j_y \cos \varphi - j_x \sin \varphi)$$

(—) zīmes šīs formulās jāņem tamdēļ, ka 1. un 2. zīm. abas  $\Xi$ -asis un abas  $H$ -asis ir ņemtas pretējos virzienos.

$$j_{\xi} = \frac{a\omega_0^2}{\sin^3(\beta + \varphi)} \left[ \cos \varphi \sin \beta \cos(\alpha - \varphi) \sin^2(\beta + \varphi) + \right. \\ \left. + \frac{a}{l} \cos \varphi \sin \beta \sin^2(\alpha + \beta) - \frac{a}{b} \cos \varphi \sin \varphi \sin^2(\alpha - \varphi) + \right. \\ \left. + \sin \varphi \cos \beta \cos(\alpha - \varphi) \sin^2(\beta + \varphi) + \frac{a}{l} \sin \varphi \cos \beta \sin^2(\alpha + \beta) + \right. \\ \left. + \frac{a}{b} \sin \varphi \cos \varphi \sin^2(\alpha - \varphi) \right] \\ j_{\xi}^- = \frac{a\omega_0^2}{\sin^3(\beta + \varphi)} \left[ \cos(\alpha - \varphi) \sin^2(\beta + \varphi) \cdot \sin(\beta + \varphi) + \right. \\ \left. + \frac{a}{l} \sin^2(\alpha + \beta) \cdot \sin(\beta + \varphi) \right]$$

no kurienes dabūjam formulu (11):

$$j_{\xi} = a\omega_0^2 \left[ \cos(\alpha - \varphi) + \frac{a \sin^2(\alpha + \beta)}{l \sin^2(\beta + \varphi)} \right] \dots \dots (11) \\ j_{\eta} = \frac{a\omega_0^2}{\sin^3(\beta + \varphi)} \left[ \cos \varphi \cos \beta \cos(\alpha - \varphi) \sin^2(\beta + \varphi) + \right. \\ \left. + \frac{a}{l} \cos \varphi \cos \beta \sin^2(\alpha + \beta) + \frac{a}{b} \cos^2 \varphi \sin^2(\alpha - \varphi) - \right. \\ \left. - \sin \varphi \sin \beta \cos(\alpha - \varphi) \sin^2(\beta + \varphi) - \frac{a}{l} \sin \varphi \sin \beta \sin^2(\alpha + \beta) + \right. \\ \left. + \frac{a}{b} \sin^2 \varphi \sin^2(\alpha - \varphi) \right] \\ j_{\eta} = \frac{a\omega_0^2}{\sin^3(\beta + \varphi)} \left[ \cos(\alpha - \varphi) \sin^2(\beta + \varphi) \cos(\beta + \varphi) + \right. \\ \left. + \frac{a}{l} \sin^2(\alpha + \beta) \cos(\beta + \varphi) + \frac{a}{b} \sin^2(\alpha - \varphi) \right],$$

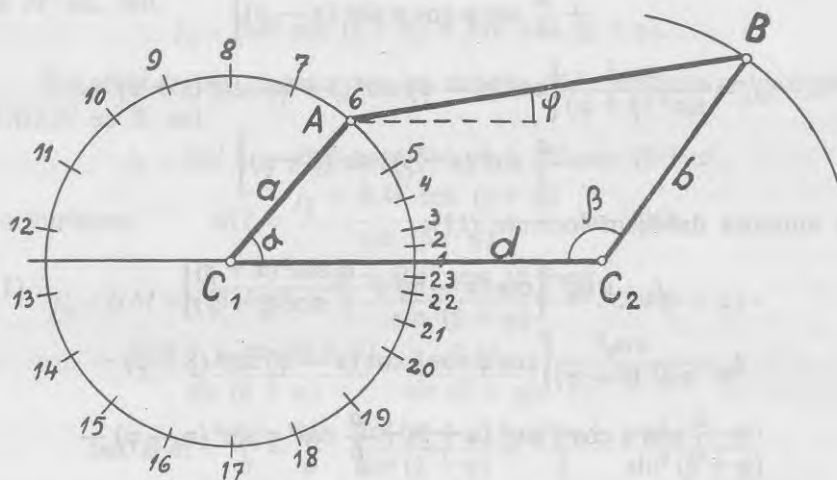
bet tas nav nekas cits, kā formula (12):

$$j_{\eta} = a\omega_0^2 \left[ \cos(\alpha - \varphi) + \frac{a}{l} \frac{\sin^2(\alpha + \beta)}{\sin^2(\beta + \varphi)} \right] \operatorname{ctg}(\beta + \varphi) + \\ + \frac{a^2 \omega_0^2}{b} \cdot \frac{\sin^2(\alpha - \varphi)}{\sin^3(\beta + \varphi)} \dots \dots (12).$$

Tāpat var arī no grafoanalitiskā ceļā atrastām formulām (11) un (12) dabūt analitiskā ceļā atrastas formulas (9) un (10). Salīdzinot abas

atrisinājuma metodes, redzams, ka grafoanalitiskais atrisinājums ir vienkāršāks un dod rezultātā tās pašas formulas.

Formulas (9), (10) un (12) iznāca diezgan sarežģītā veidā, bet lai parādītu, ka tās der arī praktiskiem nolūkiem, izlietosim tās punkta  $B$  polāra paātrinājuma hodografa noteikšanai kādam konkrētam šarniru četrstūrim. Paātrinājuma polārais hodografs, kā zināms, ir paātrinājuma vektoru gala punktu ģeometriskā vieta, ja šos vektorus atliek no kāda nekustoša punkta. Līdz ar to noteiksim arī tā paša punkta  $B$  ātruma hodogرافu.



3. zīm.

Šarniru četrstūža malu skaitliskas vērtības izvēlētas  $a=30$  cm,  $b=40$  cm,  $d=60$  cm,  $l=65$  cm. Tālāk pieņemts, ka  $AC_1$  griežas vienmērīgi ar ātrumu  $\omega_0=1$  sec<sup>-1</sup>. Ātrumus un paātrinājumus noteiksim pilnam  $AC_1$  apgriezienam mainot leņķi  $\alpha$  no  $0^\circ$  līdz  $360^\circ$ .

Attiecīgie punkti parādīti 3. zīm., bet izvēlēti labā pusē biežāk, lai iegūtu pietiekošu punktu skaitu paātrinājuma hodografa iezīmēšanai.

Pirmkārt, pēc formulām (4) un (5) noteiksim katram  $\alpha$  atbilstošos leņķus  $\varphi$  un  $\beta$ , pēc tam sastādām formulās (7), (9) un (10) ietelpošas summas  $(\alpha+\beta)$  un  $(\beta+\varphi)$  un diferenci  $(\alpha-\varphi)$ . Tālāk atrodam vajadzīgas trigonometriskas funkcijas un pēc formulas (7) punkta  $B$  ātrumu, bet pēc formulām (9) un (10) paātrinājuma projekcijas  $j_x$  un  $j_y$ .

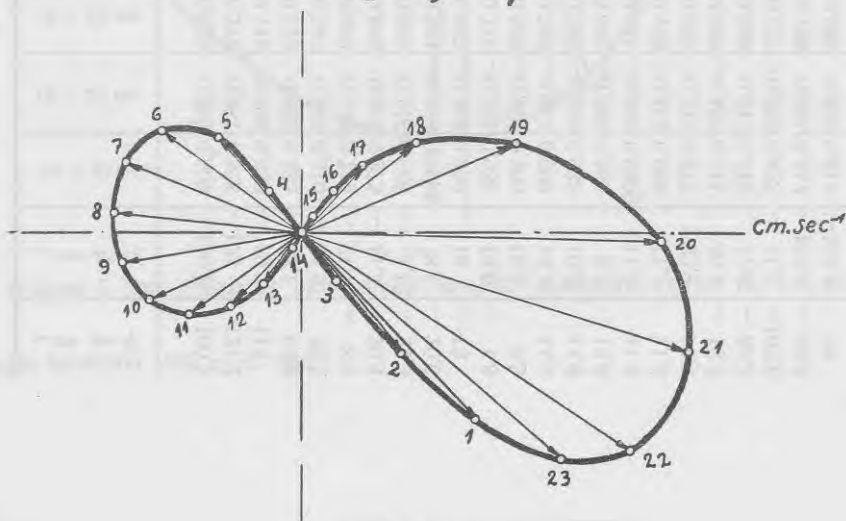
Attiecīgie skaitļi, kā arī rezultāti, ir sakopoti zemāk minētās tabulās, pie kam punktu numerācija tabulās un 3. zīm. sakrīt.

I. tabula punkta *B* ātruma noteikšanai atkarībā no argumenta  $\alpha$ .

Punktu № №	$\alpha$	$\varphi$	$\beta$	$\alpha - \varphi$	$\beta + \varphi$	$\sin(\alpha - \varphi)$	$\sin(\beta + \varphi)$	$v_{cm. sec^{-1}}$
1	0°	25°	137°	-25°	162°	-0,423	0,309	-41,1
2	5°	21°	139°50'	-16°	160°50'	-0,276	0,328	-25,2
3	10°	16°30'	143°	-6°30'	159°30'	-0,113	0,350	-9,67
4	20°	13°	142°	7°	155°	0,122	0,423	8,66
5	30°	10°	139°20'	20°	149°20'	0,342	0,510	20,2
6	50°	8°	126°	42°	134°	0,669	0,719	27,9
7	70°	7°40'	111°30'	62°20'	119°10'	0,886	0,873	30,5
8	90°	8°30'	96°	81°30'	104°30'	0,989	0,968	30,6
9	110°	9°50'	80°30'	100°10'	90°20'	0,984	0,9999	29,5
10	130°	12°	66°40'	118°	78°40'	0,883	0,980	27
11	150°	15°20'	54°	134°40'	69°20'	0,711	0,936	22,8
12	170°	20°	44°10'	150°	64°10'	0,500	0,900	16,6
13	190°	28°	37°20'	162°	65°20'	0,309	0,909	10,2
14	210°	35°	34°10'	175°	69°10'	0,087	0,935	2,79
15	230°	44°30'	34°10'	185°30'	78°40'	-0,096	0,980	-3,06
16	250°	53°40'	36°50'	196°20'	90°30'	-0,281	0,9999	-8,4
17	270°	62°	42°30'	208°	104°30'	-0,469	0,968	-14,5
18	290°	67°	52°20'	223°	119°20'	-0,682	0,872	-23,4
19	310°	67°10'	67°30'	242°50'	134°10'	-0,890	0,711	-37,6
20	330°	57°40'	91°20'	272°20'	149°	-0,999	0,515	-58,2
21	340°	48°	107°	292°	155°	-0,927	0,423	-65,6
22	350°	36°50'	123°10'	313°10'	160°	-0,729	0,342	-63,9
23	355°	30°40'	131°	324°20'	161°40'	-0,583	0,314	-55,6

I. tabulā pozitīvie ātrumi atbilst punkta *B* kustībai pa savu trajektoriju pret pulksteņrādītāja virzienā un negatīvie ātrumi atbilst kustībai pulksteņrādītāja virzienā. Pēc iegūtām ātruma skaitliskām vērtībām 4. zīm. ir uzzīmēts punkta *B* ātruma hodogrāfs.

## Ātruma hodogrāfs *p*-ktam *B*



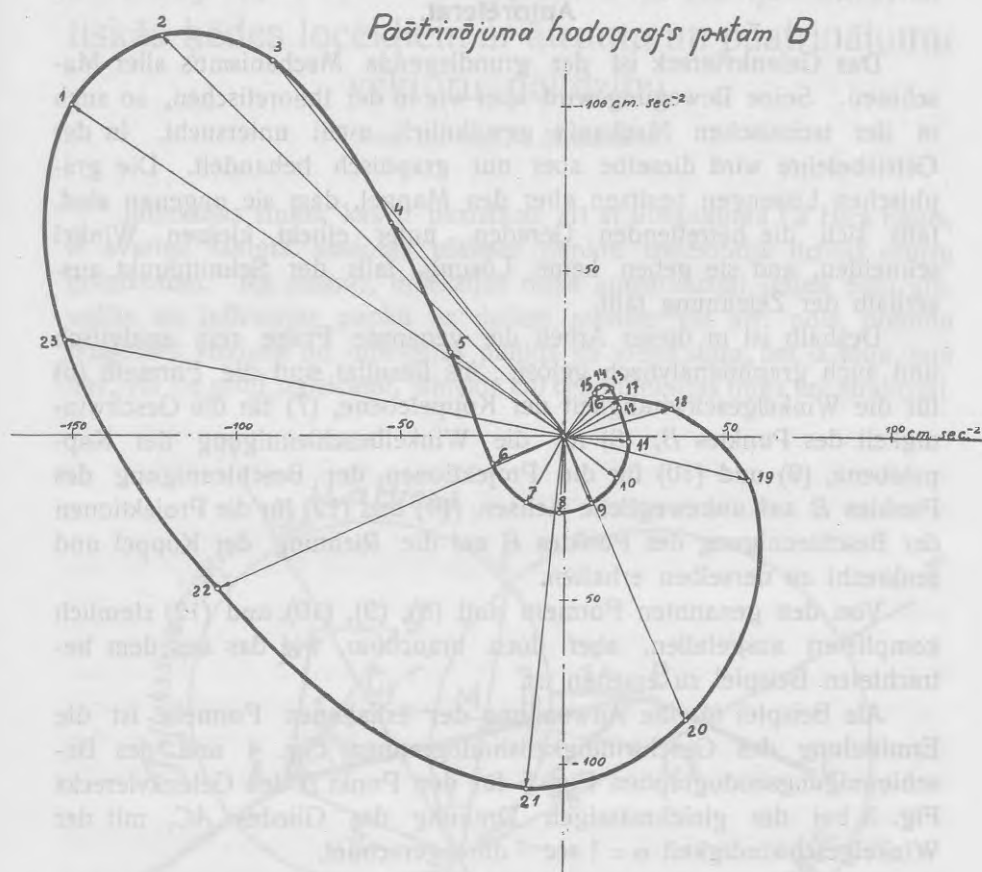
4. zīm.

II. tabula:  $j_x$  un  $j_y$  skaitlisko vērtību noteikšanai, atkarībā no argumenta  $\alpha$ .

Punktu №№	$\alpha$	$\varphi$	$\beta$	$\alpha + \beta$	$\alpha - \beta$	$\beta + \beta$	$\sin \beta$	$\cos \beta$	$\sin \beta$	$\cos \beta$	$\sin (\alpha + \beta)$	$\sin (\alpha - \beta)$	$\cos (\alpha - \beta)$	$\sin (\beta + \beta)$	$j_x \text{ cm. sec}^{-2}$	$j_y \text{ cm. sec}^{-2}$
1	0°	25°	137°	137°	-25°	162°	0,423	0,906	0,682	-0,731	0,682	-0,423	0,906	0,309	-150,9	100,2
2	5°	21°	139°50'	144°50'	-16°	160°50'	0,358	0,934	0,645	-0,764	0,576	-0,276	0,961	0,328	-123	121,2
3	10°	16°30'	143°	153°	-6°30'	159°30'	0,284	0,959	0,602	-0,799	0,454	-0,113	0,993	0,350	-89,2	114
4	20°	13°	142°	162°	7°	155°	0,225	0,974	0,616	-0,788	0,309	0,122	0,992	0,423	-53,1	64,8
5	30°	10°	139°20'	169°20'	20°	149°20'	0,174	0,985	0,652	-0,759	0,185	0,342	0,940	0,510	-34,9	25,1
6	50°	8°	126°	176°	42°	134°	0,139	0,990	0,809	-0,588	0,070	0,669	0,743	0,719	-21,7	8,5
7	70°	7°40'	111°30'	181°30'	62°20'	119°10'	0,133	0,991	0,930	-0,366	-0,026	0,886	0,464	0,873	-11,3	20,4
8	90°	8°30'	96°	186°	81°30'	104°30'	0,148	0,989	0,989	-0,105	-0,105	0,989	0,148	0,968	-1,13	23,3
9	110°	9°50'	80°30'	190°30'	100°10'	90°20'	0,171	0,985	0,986	0,165	-0,182	0,984	-0,176	0,9999	8,5	20,6
10	130°	12°	66°40'	196°40'	118°	78°40'	0,208	0,978	0,918	0,396	-0,287	0,883	-0,469	0,980	16	13
11	150°	15°20'	54°	204°	134°40'	69°20'	0,264	0,964	0,809	0,588	-0,407	0,711	-0,703	0,936	19,6	1,8
12	170°	20°	44°10'	214°10'	150°	64°10'	0,342	0,940	0,697	0,717	-0,562	0,500	-0,866	0,900	16,8	8,5
13	190°	28°	37°20'	227°20'	162°	65°20'	0,469	0,883	0,606	0,795	-0,735	0,309	-0,951	0,909	14,3	14,5
14	210°	35°	34°10'	244°10'	175°	69°10'	0,574	0,819	0,562	0,827	-0,900	0,087	-0,996	0,935	10,3	14,9
15	230°	44°30'	34°10'	264°10'	185°30'	78°40'	0,701	0,713	0,562	0,827	-0,995	-0,096	-0,995	0,980	9,1	13,0
16	250°	53°40'	36°50'	286°50'	196°20'	90°30'	0,806	0,592	0,599	0,800	-0,957	-0,281	-0,960	0,9999	11,1	11,8
17	270°	62°	42°30'	312°30'	208°	104°30'	0,883	0,469	0,676	0,737	-0,737	-0,469	-0,883	0,968	17,1	11,5
18	290°	67°	52°20'	342°20'	223°	119°20'	0,920	0,391	0,792	0,611	-0,303	-0,682	-0,731	0,872	32,9	8,1
19	310°	67°10'	67°30'	377°30'	242°50'	134°40'	0,922	0,388	0,994	0,383	0,301	-0,890	-0,457	0,711	56,4	13,2
20	330°	57°40'	91°20'	421°20'	272°20'	149°	0,845	0,535	0,9997	-0,023	0,877	-0,999	0,041	0,515	37,6	86,3
21	340°	48°	107°	447°	292°	155°	0,743	0,669	0,956	-0,292	0,999	-0,927	0,375	0,423	11,1	107,6
22	350°	36°50'	123°10'	473°10'	313°10'	160°	0,599	0,800	0,837	-0,547	0,919	-0,729	0,684	0,342	-105,6	46,4
23	355°	30°40'	131°	486°	324°20'	161°40'	0,510	0,860	0,794	-0,656	0,809	-0,583	0,812	0,314	-152,4	29



Pēc iegūtām paātrinājumu projekcijām  $j_x$  un  $j_y$ , kuŗas reprezentē arī polāra paātrinājuma hodografa punktu koordinātas, 5. zīm. konstruēts punkta  $B$  polārais paātrinājuma hodografs, kas ļoti labi raksturo punkta  $B$  paātrinājuma vektora maiņu, ja punkts  $A$  izdara vienu apgriezīenu vienmērīgā griezes kustībā ar ātrumu  $\omega_0 = 1 \text{ sec}^{-1}$ . Lai 4. un 5. zīm. iegūtu labāku pārskatu par ātruma un paātrinājuma vektoriem, atbilstošiem zināmajam šarnīru četrstūŗa stāvoklim, vektoru gala punkti 4. un 5. zīm. un punkta  $A$  stāvoklis 3. zīm. apzīmēti ar tiem pašiem skaitļiem.



5. zīm.

Kā redzams 5. zīm. punkta  $B$  paātrinājums sasniedz maksimālo vērtību pie  $\alpha = 0^\circ$ .

Iesniegts fakultātei 1935. g. 6. sept.

# Eine analytische und graphoanalytische Lösung zur Bewegung des Gelenkvierecks.

Prof. Dr. Ing. N. Rosenauer.

## Autoreferat.

Das Gelenkviereck ist der grundlegende Mechanismus aller Maschinen. Seine Bewegung wird aber wie in der theoretischen, so auch in der technischen Mechanik gewöhnlich nicht untersucht. In der Getriebelehre wird dieselbe aber nur graphisch behandelt. Die graphischen Lösungen besitzen aber den Mangel, dass sie ungenau sind, falls sich die betreffenden Geraden unter einem kleinen Winkel schneiden, und sie geben keine Lösung, falls der Schnittpunkt ausserhalb der Zeichnung fällt.

Deshalb ist in dieser Arbeit die genannte Frage rein analytisch und auch graphoanalytisch gelöst. Als Resultat sind die Formeln (6) für die Winkelgeschwindigkeit der Koppelenebene, (7) für die Geschwindigkeit des Punktes  $B$ , (8) für die Winkelbeschleunigung der Koppelenebene, (9) und (10) für die Projektionen der Beschleunigung des Punktes  $B$  auf unbewegliche Achsen, (11) und (12) für die Projektionen der Beschleunigung des Punktes  $B$  auf die Richtung der Koppel und senkrecht zu derselben erhalten.

Von den genannten Formeln sind (8), (9), (10) und (12) ziemlich kompliziert ausgefallen, aber doch brauchbar, wie das aus dem betrachteten Beispiel zu ersehen ist.

Als Beispiel für die Anwendung der erhaltenen Formeln ist die Ermittlung des Geschwindigkeitshodographen Fig. 4 und des Beschleunigungshodographen Fig. 5 für den Punkt  $B$  des Gelenkvierecks Fig. 3 bei der gleichmässigen Drehung des Gliedes  $AC_1$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega = 1 \text{ sec}^{-1}$  durchgerechnet.



Šinī darbā ir parādīts, kā konstruēt infleksijas riņķus un līdz ar to arī Bresa riņķus kinēmatiskās ķēdes locekļiem tieši pēc tam, kad ir atrasti ķēdes šarnīriem ātrumu un paātrinājumu vektori, jo, aplūkojot kinēmatiskās ķēdes kustību, parasti iesāk ar ātrumu un paātrinājumu konstrukciju, izejot no tā locekļa ātruma, kas piedzen mēchanismu.

Pieņemsim, ka kinēmatiskās ķēdes  $KABL$  loceklim  $AB$  (sk. 1. zīm.) ir atrasti punktu  $A$  un  $B$  ortogonālie ātrumi  $\vec{v}_a$ ,  $\vec{v}_b$  un paātrinājumi  $\vec{j}_a$  un  $\vec{j}_b$ .

Pirmkārt atrodam polu  $P$  locekļa  $AB$  kustībai, turpinot ortogonālos ātrumus  $\vec{v}_a$  un  $\vec{v}_b$  līdz krustošanai. Tālāk pēc Žukovska teorēmas, kuŗa Vakareiropas literātūrā nav pazīstama un formulējas tā: „komplānā kustībā divu punktu paātrinājumu ģeometriskā difference veido ar taisni, kas savieno šos divus punktus, to pašu leņķi  $\gamma$ , kādu veido katra punkta paātrinājuma vektors ar radiju-vektoru, kas savieno to punktu ar paātrinājuma centru  $\Gamma^{**}$ ), konstruējam paātrinājuma centru, sastādot ģeometrisko diferenci  $\vec{j}_a - \vec{j}_b = \vec{AD}$  un atliekot  $\angle \gamma = \angle DAB$  no vektoriem  $\vec{j}_a$  un  $\vec{j}_b$  tanī pašā virzienā, kādā tas bija skaitīts no  $AD$  līdz  $AB$ , t. i. pulksteņrādītāja virzienā. Abu iegūto taisņu krustošanās punkts būs paātrinājuma centrs  $\Gamma$ . Tagad viegli varam atrast galvenā stara  $PN$  jeb poloīdu kopējās normāles virzienu, atliekot no taisnes  $P\Gamma$  leņķi  $\angle \Gamma PN = \gamma$  pulksteņrādītāja pretvirzienā, jo pola paātrinājums, kā zināms, iet poloīdu normāles virzienā.

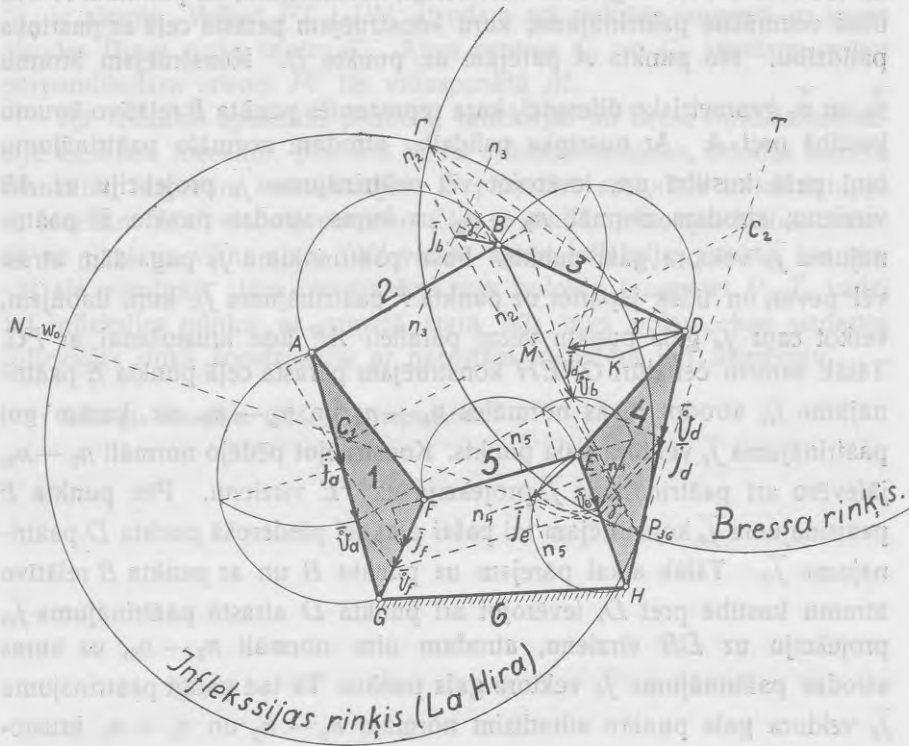
Velkot  $PT \perp PN$ , dabūsim poloīdu kopējās tangentes virzienu.

Abi meklējamie riņķi infleksijas (La Hira) un Bresa riņķis iet caur punktiem  $P$  un  $\Gamma$ , tikai infleksijas riņķa centrs atrodas uz poloīdu normāles  $PN$ , bet Bresa riņķa centrs atrodas uz poloīdu tangentes  $PT$ . Vilksim nogriežņa  $P\Gamma$  viduspunktā  $M$  perpendikulāru līdz krustošanai punktā  $C_1$  ar normāli  $PN$  un punktā  $C_2$  ar tangenti. Ievērojot augšā sacīto, riņķis ar centru punktā  $C_1$  un ar radiju  $PC_1$  acīm redzot būs infleksijas (La Hira) riņķis, un riņķis ar centru punktā  $C_2$  un radiju  $PC_2$  būs Bresa riņķis.

Tādā pašā kārtā var atrast infleksijas un Bresa riņķus katram kinēmatiskās ķēdes loceklim, ja tikai būs zināmi diviem locekļa punktiem ātruma un paātrinājuma vektori.

\*) *N. Rozenauers*. Grafoanalitiskā metode paātrinājuma centra un centroidu noteikšanai komplānā kustībā. LOR Mēchanikas fakultātes serija. I. sējums № 8. 1935.

Piemērs: 2. zīm. parādīto Stevensonā mēchanismu piedzen loceklis 1, kas griežas vienmēriġi pret nekustošo locekli 6 ar doto ātrumu. Atrast infleksijas (La Hira) un Bresa riņķus 3. locekļa kustībai.



2. zīm.

Atlīksim punkta  $A$ , kas pieder loceklim 1, doto ātrumu  $\vec{v}_a$  ortogonālā virzienā un konstruēsim parastā kārtā poligōnu ar malām, kas paralēlas poligōna  $AFED$  malām. Šis poligōns uz  $FG$ ,  $EH$  un  $DH$  nogriezis punktu  $F$ ,  $E$  un  $D$  ortogonālos ātrumus:  $\vec{v}_f$ ,  $\vec{v}_e$  un  $\vec{v}_d$ .

Beidzot velkam caur punkta  $D$  ortogonālā ātruma  $\vec{v}_d$  gala punktu taisni paralēli  $DB$  un caur  $\vec{v}_a$  gala punktu taisni paralēli  $AB$ , šo taisņu krustošanās punktā dabūjam punkta  $B$  ortogonālā ātruma  $\vec{v}_b$  gala punktu. Tagad trešā locekļa diviem punktiem  $B$  un  $D$  ortogonālie ātrumi

atrasti un, turpinot tos līdz krustošanai, atrodam polu  $P_{86}$ , caur kuŗu iet abi meklējamie riņķi.

Tālāk pārejam uz pāatrinājumu konstrukciju. Pirmkārt, ievērojot, ka loceklis 1 pret 6 griežas vienmērīgi, konstatējam, ka punktam  $A$  būs tikai normālais pāatrinājums, kuŗu konstruējam parastā ceļā ar pusriņķa palīdzību. No punkta  $A$  pārejam uz punktu  $B$ . Konstruējam ātrumu  $\vec{v}_b$  un  $\vec{v}_a$  ģeometrisko diferenci, kuŗa reprezentēs punkta  $B$  relatīvo ātrumu kustībā pret  $A$ . Ar pusriņķa palīdzību atrodam normālo pāatrinājumu tanī pašā kustībā un, ievērojot vēl pāatrinājuma  $\vec{j}_a$  projekciju uz  $AB$  virzienu, atrodam normāli  $n_2 - n_2$ , uz kuŗas atrodas punkta  $B$  pāatrinājuma  $\vec{j}_b$  vektora gala punkts. Pašu pāatrinājumu  $\vec{j}_b$  pagaidām atrast vēl nevar, un tālāk jāpāriet uz punkta  $F$  pāatrinājumu  $\vec{j}_f$ , kuŗu dabūjam, velkot caur  $\vec{j}_a$  gala punktu taisni paralēli  $AF$  līdz krustošanai ar  $FG$ . Tālāk šarniru četrstūrī  $GFEH$  konstruējam parastā ceļā punkta  $E$  pāatrinājumu  $\vec{j}_e$ , atrodot divas normāles  $n_4 - n_4$  un  $n_5 - n_5$ , uz kuŗām guļ pāatrinājuma  $\vec{j}_e$  vektora gala punkts. Konstruējot pēdējo normāli  $n_5 - n_5$ , jāievēro arī pāatrinājuma  $\vec{j}_f$  projekcija uz  $FE$  virzienu. Pēc punkta  $E$  pāatrinājuma  $\vec{j}_e$  konstruējam tai pašai plaknei piederošā punkta  $D$  pāatrinājumu  $\vec{j}_d$ . Tālāk atkal pārejam uz punktu  $B$  un ar punkta  $B$  relatīvo ātrumu kustībā pret  $D$ , ievērojot arī punkta  $D$  atrastā pāatrinājuma  $\vec{j}_d$ , projekciju uz  $DB$  virzienu, atrodam otru normāli  $n_3 - n_3$ , uz kuŗas atrodas pāatrinājuma  $\vec{j}_b$  vektora gala punkts. Tā tad galīgi pāatrinājuma  $\vec{j}_a$  vektora gala punktu adradīsim normāļu  $n_2 - n_2$  un  $n_3 - n_3$  krustošanās punktā.

Tagad trešā locekļa punktiem  $B$  un  $D$  pāatrinājuma vektori  $\vec{j}_b$  un  $\vec{j}_d$  ir atrasti, un var stāties pie pāatrinājuma centra  $\Gamma$  noteikšanas pēc augšā formulētās Žukovska teorēmas\*). Šim nolūkam konstruējam pāatrinājumu ģeometrisko diferenci

$$\vec{DK} = \vec{j}_d - \vec{j}_b.$$

Leņķis  $KDB$  pēc Žukovska teorēmas būs vienāds ar  $\angle \gamma$ , kuŗu veido kāda punkta pāatrinājuma vektors ar taisni, kas savieno šo punktu ar pāatrinājuma centru  $\Gamma$ . Atliekot šo leņķi  $\gamma$  tanī pašā virzienā, kādā tas bija skaitīts no  $KD$  līdz  $DB$ , no abiem pāatrinājumu vektoriem

\*) *N. Rozenauers*. Grafoanalitiskā metode pāatrinājuma centra un centroīdu noteikšanai komplānā kustībā. LŪR Mēchanikas fakultātes serija. I. sējums № 8. 1935.

$\bar{j}_a$  un  $\bar{j}_b$ , dabūsim krustošanās punktā paātrinājuma centru  $\Gamma$ . Savienojam polu  $P$  ar paātrinājuma centru  $\Gamma$  un konstruējam pola paātrinājuma virzienu, atliekot  $\angle \Gamma P N = \angle \gamma$  virzienā pret pulksteņrādītāju. Tādā kārtā galvenais stars  $PN$ , uz kuŗa atrodas infleksijas riņķa centrs  $C_1$ , ir atrasts. Velkot  $PT \perp PN$ , atrodam arī poloīdu tangenti, uz kuŗas atrodas Bresa riņķa centrs  $C_2$ . Abus centrus  $C_1$  un  $C_2$  atrodam, velkot perpendikulāru taisnei  $P\Gamma$  tās viduspunktā  $M$ .

Kā redzams apskatītā piemērā, infleksijas un Bresa riņķa konstrukcija trešajam loceklim, pēc šinī darbā attīstītās metodes, izdodas samērā vienkārši, turpretim konstrukcijām ar parastām metodēm trūkst datu, jo 3. loceklim tikai vienam punktam  $D$  ir zināms trajektorijas licības centrs  $H$  un tikai uz viena stara  $DH$  varētu atrast infleksijas punktu, bez tam vēl šis vienīgais stars izrādās ļoti tuvs poloīdu tangentei  $P_{86}T$ , kādēļ arī infleksijas punkts uz minētā stara būs tuvs polam, kas padarītu infleksijas riņķa konstrukciju ar parastām metodēm ļoti neprēcīzu.

Iesniegts fakultātei 1935. g. 6. septembrī.

# Eine Anleitung zur Konstruktion von Wendekreisen und Tangentialkreisen für die Glieder einer kinematischen Kette mit Hilfe von Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren.

Prof. Dr. Ing. N. Rosenauer.

## Autoreferat.

Der Wendekreis ist ein wichtiger Faktor zur Bestimmung der Krümmungsmittelpunkte der Punktbahnen der beweglichen Ebene. Zur Konstruktion des Wendekreises muss man bekanntlich die Lage des Drehpoles und die Wendepunkte auf zwei Polstrahlen haben oder auch die Lage des Drehpoles, die Poltangente und den Wendepunkt auf einem Polstrahl. Falls aber diese Daten nicht vorhanden oder schwierig bestimmbar sind, muss man andere Wege zur Konstruktion des Wendekreises suchen.

In der vorliegenden Arbeit ist gezeigt, wie man den Wendekreis und nebenbei auch den Tangentialkreis direkt nach den Geschwindigkeitsvektoren und Beschleunigungsvektoren zweier Punkte einer beweglichen Ebene konstruieren kann, da man bei der Betrachtung der Bewegung einer kinematischen Kette gewöhnlich mit der Geschwindigkeits- und Beschleunigungskonstruktion anfängt, von dem Gliede ausgehend, das die Kette antreibt.

Wir nehmen an, dass für das Glied  $AB$  der kinematischen Kette  $KABL$  (Abb. 1) die orthogonalen Geschwindigkeiten  $\bar{v}_a$  und  $\bar{v}_b$  der Punkte  $A$  und  $B$  und die Beschleunigungen derselben Punkte  $\bar{j}_a$  und  $\bar{j}_b$  bestimmt sind.

Erstens findet man den Drehpol  $P$  des Gliedes  $AB$ , indem man die orthogonalen Geschwindigkeitsvektoren bis zum Schnittpunkte zieht. Weiter konstruiert man den Beschleunigungspol  $\Gamma$  nach dem Satz von Žukovsky, der in der deutschen Literatur nicht bekannt ist, und folgendermassen lautet: „Die geometrische Differenz der Beschleunigungen zweier Punkte bildet mit der Geraden,



die diese beiden Punkte verbindet, denselben Winkel  $\gamma$ , den der Beschleunigungsvektor eines jeden Punktes mit der Geraden, die den Punkt mit dem Beschleunigungspol verbindet, bildet<sup>\*)</sup>, indem man die Differenz  $\vec{j}_a - \vec{j}_b = \overline{AD}$  findet und den Winkel  $\gamma = DAB$  von den Beschleunigungsvektoren  $\vec{j}_a$  und  $\vec{j}_b$  in derselben Richtung abträgt, wie er von  $\overline{AD}$  bis  $\overline{AB}$  erhalten worden ist. Der Schnittpunkt der beiden gezogenen Geraden ergibt den Beschleunigungspol  $\Gamma$ .

Weiter findet man die Polbahnnormale  $PN$ , indem man von der Geraden  $P\Gamma$  denselben Winkel  $\Gamma PN = \gamma$  abträgt in der entgegengesetzten Richtung wie vorher, da die Beschleunigung des Drehpols die Richtung der genannten Normalen besitzt. Die Poltangente erhält man, indem man  $PT \perp PN$  zieht.

Die beiden gesuchten Kreise, der Wendekreis und der Tangentialkreis, gehen durch die Punkte  $P$  und  $\Gamma$ , wobei der Mittelpunkt des ersteren  $C_1$  in der Normalen  $PN$  und der Mittelpunkt des zweiten  $C_2$  in der Poltangente  $PT$  liegt. Also findet man die genannten Mittelpunkte  $C_1$  und  $C_2$ , indem man eine Gerade senkrecht zu  $P\Gamma$  in deren Mitte  $M$  zieht.

Als Beispiel ist in der Abb. 2 die Konstruktion des Wendekreises und Tangentialkreises für das 3<sup>te</sup> Glied des Stevensonschen Mechanismus durchgeführt, falls das 1<sup>te</sup> Glied sich gleichmässig mit gegebener Geschwindigkeit gegen das 6<sup>te</sup> dreht, das unbeweglich angenommen ist.

Die gegebene Geschwindigkeit  $v_a$  des Punktes  $A$  wird orthogonal abgetragen und mit  $\vec{v}_a$  bezeichnet. Üblicherweise werden die orthogonalen Geschwindigkeiten der Punkte  $F, E, D$  und  $B$  konstruiert, die mit  $\vec{v}_f, \vec{v}_e, \vec{v}_d$  und  $\vec{v}_b$  bezeichnet sind. Im Schnittpunkte von  $\vec{v}_b$  und  $\vec{v}_d$  findet man den Drehpol  $P_{36}$ .

Weiter findet man mit Hilfe der Thaleschen Halbkreise die Beschleunigung  $\vec{j}_a$  des Punktes  $A$  und die Normale  $n_2 - n_2$ , auf der sich der Endpunkt der Beschleunigung  $\vec{j}_b$  befindet. Dann geht man über zur Beschleunigung des Punktes  $F$  und findet wie üblich im Gelenkviereck  $GFEH$  die Beschleunigung  $\vec{j}_e$  des Punktes  $E$ , der dem 4<sup>en</sup>

<sup>\*)</sup> N. Rozenauers. Grafoanalitiskā metode pāatrinājuma centra un centriodu noteikšanai komplānā kustībā. Acta universitatis Latviensis. Mēchanikas fakultātes serija. I. sējums. № 8. 1935.

Gliede angehört. Dann findet man die Beschleunigung des Punktes  $D$ , der demselben Gliede angehört, und geht über zum Punkte  $B$ . Wie üblich findet man wieder eine Normale  $n_3 - n_3$ , auf der sich der Endpunkt von  $\bar{j}_b$  befindet und erhält denselben im Schnittpunkte der beiden Normalen  $n_2 - n_2$  und  $n_3 - n_3$ .

Mit Hilfe der Beschleunigungen  $\bar{j}_b$  und  $\bar{j}_d$  findet man nach dem Satz von Žukovsky den Beschleunigungspol  $\Gamma$ , indem man die Differenz  $\bar{j}_d - \bar{j}_b = \overline{DK}$  konstruiert und den Winkel  $\angle KDB = \gamma$  von den Vektoren  $\bar{j}_d$  und  $\bar{j}_b$  in derselben Richtung abträgt, wie er von  $KD$  bis  $DB$  erhalten ist. Die Polbahnnormale  $PN$  erhält man, indem man denselben Winkel  $\gamma$  von der Geraden  $PT$  abträgt, aber in der entgegengesetzten Richtung wie vorhin, da die Beschleunigung des Drehpols in der genannten Normalen liegt. Eine Gerade  $PT$  senkrecht zu  $PN$  ergibt die Poltangente, und eine Gerade senkrecht zu  $PT$  in ihrer Mitte  $M$  schneidet die Normale  $PN$  im Zentrum  $C_1$  des Wendekreises und die Poltangente  $PT$  im Zentrum  $C_2$  des Tangentialkreises.

Wie aus dem betrachteten Beispiele zu ersehen ist, kann man die beiden Kreise mit Hilfe der Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren leicht konstruieren, dagegen reicht die gewöhnliche Methode in diesem Falle nicht aus, da nur für einen Punkt  $D$  des dritten Gliedes der Mittelpunkt  $H$  seiner Bahn bekannt ist.

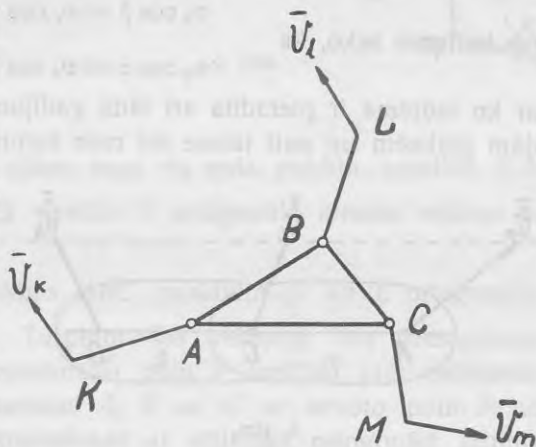
## Jauns paņēmiens ātrumu konstrukcijai sarežģītās kinēmatiskās ķēdēs.

Prof. Dr. ing. N. Rozenauers.

Jautājumam par kustošas plaknes ātrumu konstrukciju, ja pēdējā sarežģītā kinēmatiskā ķēdē ir savienota šarniriem ar trīs citām plaknēm, no kuņām katrā plaknē viena punkta ātrums ir zināms, literātūrā M. Grüblers<sup>1)</sup> un F. Wittenbauers (F. Wittenbauer)<sup>2)</sup> dod atrisinājumus, ievēdot kādam punktam fiktīvus ātrumus un konstruējot citam punktam ātrumu vektoru gala punktu ģeometrisko vietu, uz kuņas beidzot atrod istā ātruma vektora gala punktu.

To pašu metodi ir izlietojis arī R. Beijers (R. Beyer)<sup>3)</sup>, nosaucot to par līdzīgu punktu rindu metodi (Methode der ähnlichen Punktreihen).

Šinī darbā ir attīstīta jauna metode, kas minētā jautājumā panāk ievērojamu vienkāršojumu un dod iespēju konstruēt ātrumus tieši, neievēdot fiktīvus ātrumus un nelietojot līdzīgu punktu rindas. Šī konstrukcija ir dibināta uz pazīstamās teorēmas: „Komplāni kustošas taisnes dažādu punktu ātrumu projekcijas



1. zīm.

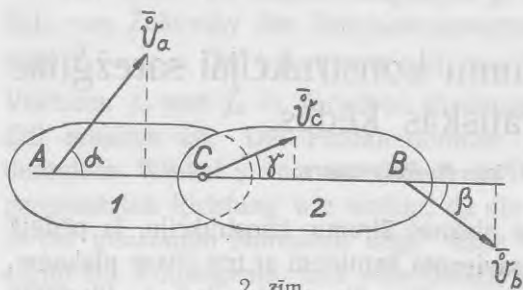
<sup>1)</sup> M. Grübler: „Getriebelehre“. 1917. lapp. 77 un 78.

<sup>2)</sup> F. Wittenbauer: „Graphische Dynamik“. 1923. lapp. 273—275.

<sup>3)</sup> R. Beyer: „Technische Kinematik“. 1931. lapp. 268—272.

uz taisnes virzienu ir vienādas". Šo teorēmu autors paplašina tādā ziņā, ka taisne var iet caur šarnīru, kas savieno divas plaknes, bet teorēma paliek spēkā abām plaknēm.

**Pierādījums.** Pieņemsim, ka  $ACB$  ir taisne, kuŗa iet caur šarnīru  $C$ , kas savieno divas plaknes 1 un 2.



2. zīm.

Šīs taisnes daļai  $AC$  mēs varam tieši lietot augšā formulēto teorēmu, tas nozīmē, ka punktu  $A$  un  $C$  ātrumu  $\vec{v}_a$  un  $\vec{v}_c$  projekcijām uz taisnes  $AC$  virzienu jābūt vienādām

$$v_a \cos \alpha = v_c \cos \gamma.$$

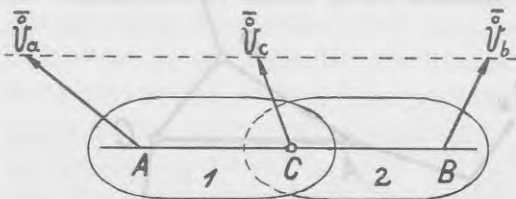
Pēc analogijas arī otrā taisnes daļā  $CB$  atrodam

$$v_b \cos \beta = v_c \cos \gamma$$

no kurienes seko, ka

$$v_a \cos \alpha = v_b \cos \beta$$

ar ko teorēma ir pierādīta arī tādā gadījumā, kad punkti pieder dažādām plaknēm un pati taisne iet caur šarnīru.

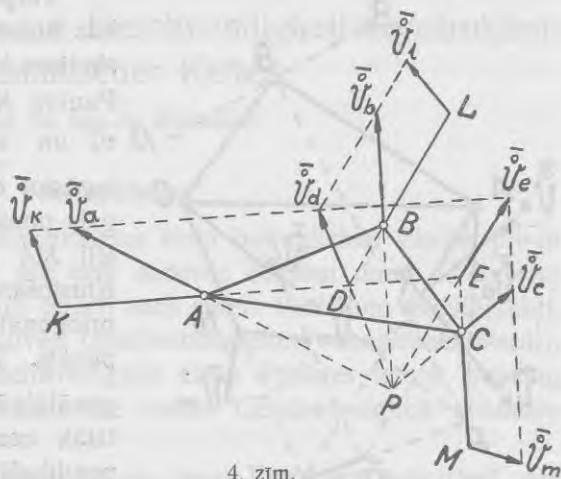


3. zīm.

Piezīme: Attiecībā uz ortogonāliem ātrumiem tā pati teorēma izsaka, ka taisnes  $AB$ , kas iet caur šarnīru  $C$ , dažādu punktu ortogonālo ātrumu vektoru gala punkti atrodas uz otrās taisnes, kuŗa ir paralēla  $AB$ , neatkarīgi no tā, vai punkti pieder pirmajai vai otrai plaknei.

**Atrisinājumi pēc autora metodes.** I. piemērs: Atgriezīsimies pie 1. zīm. parādītās atklātās kinēmatiskās ķēdes, kas apskatīta M. Grüblera: „Getriebelehre“ 1917. g. 77. un 78. lapp., kuŗa var reprezentēt arī kādas citas sarežģītākas ķēdes daļu. Ķēde sastāv no 4 locekļiem, no kuŗiem trīs ar šarnīriem pievienoti ceturtajam:  $\triangle ABC$ . Doti punktu  $K, L, M$  ortogonālie ātrumi  $\vec{v}_k, \vec{v}_l$  un  $\vec{v}_m$  kustībā pret nekustošo plakni. Jākonstruē punktu  $A, B$  un  $C$  ortogonālie ātrumi  $\vec{v}_a, \vec{v}_b$  un  $\vec{v}_c$  kustībā pret to pašu plakni.

Turpinām taisnes  $KA$  un  $LB$  līdz krustošanai punktā  $D$  un taisnes  $KA$  un  $MC$  līdz krustošanai punktā  $E$ . Punktus  $D$  un  $E$  uzskatām kā piederošus plaknei  $ABC$ , tad pēc augšā pierādītās teorēmas punkta  $D$  ātruma vektora gala punkts atrodas no vienas puses uz taisnes, kas vilkta caur  $\vec{v}_k$  gala punktu paralēli  $KA$  un no otras puses uz taisnes, kas vilkta caur  $\vec{v}_l$  gala punktu paralēli  $LB$ . Savienojot punktu  $D$  ar minēto taisņu krustošanās punktu, dabūsim punkta  $D$  ortogonālā ātruma vektoru  $\vec{v}_d$ .



4. zīm.

Analogiskā kārtā, velkot caur  $\vec{v}_m$  gala punktu taisni paralēli  $MC$  līdz krustošanai ar taisni, kas vilkta caur  $\vec{v}_k$  gala punktu paralēli  $KA$ , dabūsim krustošanās punktā punkta  $E$  ortogonālā ātruma vektora  $\vec{v}_e$  gala punktu.

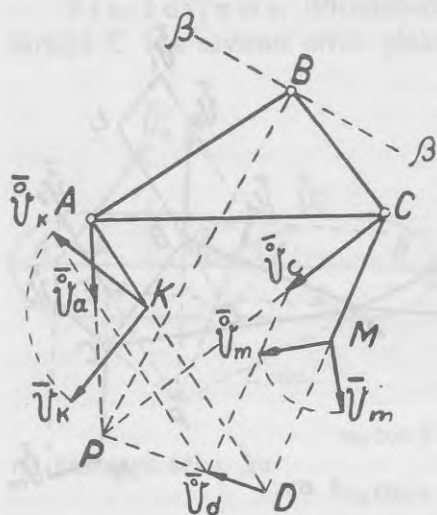
Tādā kārtā diviem plaknes  $ABC$  punktiem  $D$  un  $E$  ortogonālie ātrumi  $\vec{v}_d$  un  $\vec{v}_e$  ir atrasti. Turpinot šos vektorus līdz krustošanai, atradīsim plaknes  $ABC$  momentāno polu  $P$  kustībai pret nekustīgo plakni. Savienojot tālāk punktus  $A$ ,  $B$  un  $C$  ar atrasto polu  $P$  un turpinot šīs taisnes līdz krustošanai ar attiecīgā ortogonālā ātruma vektora gala punkta ģeometrisko vietu, dabūsim meklējamos ortogonālos ātrumus  $\vec{v}_a$ ,  $\vec{v}_b$  un  $\vec{v}_c$  punktiem  $A$ ,  $B$  un  $C$ .

II. piemērs. Kas attiecas uz R. Beijera (R. Beyer) grāmatā „Technische Kinematik“ 270. un 271. lapp. apskatīto atklāto trīs locekļu ķēdi, kuŗā ātruma konstrukcija ir izdarīta ar līdzīgo punktu rindām, tad arī šeit autora aprakstītā tiešā konstrukcijas metode dod daudz vienkāršāku atrisinājumu.

Kinēmatiskā ķēdē, kas sastāv no trīs locekļiem  $KA$ ,  $ABC$  un  $CM$ , kuŗi savienoti ar šarniriem punktos  $A$  un  $C$ , doti punktu  $K$  un  $M$

ātrumi  $\vec{v}_k$  un  $\vec{v}_m$  un bez tam vēl zināms punkta  $B$  ātruma virziens  $\beta - \beta$ , kas var būt noteikts ar kādu slīdpāri.

Jākonstruē punktu  $A$  un  $C$  ātrumi.



5. zīm.

Turpinām taisnes  $AK$  un  $CM$  līdz krustošanai punktā  $D$ , kas uzskatāms kā piederošs loceklim  $ABC$ . Punktu  $K$  un  $M$  ātrumu vektorus  $\vec{v}_k$  un  $\vec{v}_m$  pagriežam ortogonāli, iegūstot  $\vec{v}_k^{\circ}$  un  $\vec{v}_m^{\circ}$ . Caur  $\vec{v}_k^{\circ}$  un  $\vec{v}_m^{\circ}$  gala punktiem velkam taisnes paralēli  $KA$  un  $MC$  līdz krustošanai. Krustošanās punkts būs punkta  $D$  ortogonālā ātruma vektora gala punkts. Tādā kārtā punkta  $D$  ortogonālais ātrums  $\vec{v}_d^{\circ}$  ir atrasts. Velkot tālāk caur punktu  $B$  taisni perpendikulāri  $\beta - \beta$  virzienam līdz krustošanai ar  $\vec{v}_d^{\circ}$  virzienu, atrodam momentāno polu  $P$  plaknes  $ABC$  kustībai pret nekustošo plakni. Savienojam atrasto polu  $P$  ar punktiem  $A$  un  $C$ . Beidzot tās pašas taisnes, kas vilktas caur ortogonālo ātrumu  $\vec{v}_k^{\circ}$  un  $\vec{v}_m^{\circ}$  gala punktiem, paralēli  $AK$  un  $CM$  nogriežis no  $AP$  un  $CP$  meklējamos ortogonālos ātrumus  $\vec{v}_a^{\circ}$  un  $\vec{v}_c^{\circ}$  punktiem  $A$  un  $C$ .

Iesniegts fakultātei 1935. gada 6. sept.

# Ein neues Verfahren zur Geschwindigkeitskonstruktion kinematischer Ketten.

Prof. Dr. Ing. N. Rosenauer.

## Autoreferat.

Die Geschwindigkeitskonstruktion einer beweglichen Ebene, die in einer kinematischen Kette mit drei anderen Ebenen durch Drehpaare verbunden ist (Abb. 1), wird üblich nach einem Verfahren durchgeführt, das als: „Methode der fiktiven Geschwindigkeiten“ bezeichnet werden kann, weil hierbei die Geschwindigkeit eines Punktes zuerst beliebig angenommen und erst nachher die wahre Geschwindigkeit gefunden wird\*).

In der vorliegenden Arbeit ist ein neues Verfahren entwickelt, das die direkte Konstruktion der Geschwindigkeiten ermöglicht und somit eine wesentliche Vereinfachung der ganzen Konstruktion erzielt.

Das Verfahren des Verfassers gründet sich auf einer Erweiterung des bekannten Satzes: „Die Projektionen der Geschwindigkeiten verschiedener Punkte einer komplanbewegten Geraden auf die Richtung der Geraden sind einander gleich.“ Der genannte Satz wird vom Verfasser insofern erweitert, als offenbar die Gerade durch ein Gelenk, das zwei bewegliche Ebenen verbindet, gehen kann, und die betrachteten Punkte, deren Geschwindigkeitsprojektionen auf die Gerade gleich sind, auch verschiedenen Ebenen angehören können. Der Beweis dieser Erweiterung ist ohne weiteres der Abb. 2 zu entnehmen.

Weiter folgt, dass die Endpunkte der gedrehten (orthogonalen) Geschwindigkeitsvektoren verschiedener Punkte einer Geraden, welche durch ein Gelenk geht, das zwei bewegliche Ebenen verbindet, sich auf einer Geraden befinden, die der gegebenen Geraden parallel ist, unabhängig davon, ob die Punkte der einen oder der anderen Ebene angehören (Abb. 3).

\*) Siehe M. Grübler: „Getriebelehre“. 1917. S. 77 u. 78.

F. Wittenbauer: „Graphische Dynamik“. 1923. S. 273—275.

R. Beyer: „Technische Kinematik“. 1931. S. 270—272 (wo das Verfahren als Methode der ähnlichen Punktreihen bezeichnet ist).

Das Verfahren des Verfassers. Das Verfahren des Verfassers ist in zwei Beispielen durchgeführt:

I. Beispiel. Als erstes Beispiel ist dieselbe offene kinematische Kette (die auch einen Teil einer anderen Kette darstellen kann) genommen, wie bei M. Grübler: „Getriebelehre“ Seite 77 und F. Wittenbauer: „Graphische Dynamik“ Seite 274.

Die Kette besteht aus 4 Gliedern, von denen drei:  $AK$ ,  $BL$  und  $CM$  durch Drehpaare am vierten  $ABC$  befestigt sind. Es seien die gedrehten Geschwindigkeiten  $\bar{v}_k$ ,  $\bar{v}_l$  und  $\bar{v}_m$  der Punkte  $K$ ,  $L$ ,  $M$  in Bezug auf die unbewegliche Ebene gegeben. Zu konstruieren sind die Geschwindigkeiten der Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  in Bezug auf dieselbe Ebene (Abb. 4).

Wir finden die Schnittpunkte  $D$  und  $E$  der Geraden  $KA$  mit  $LB$  und  $KA$  mit  $MC$ . Die Punkte  $D$  und  $E$  werden als Punkte der Ebene  $ABC$  betrachtet. Laut dem genannten Satze befindet sich der Endpunkt des gedrehten Geschwindigkeitsvektors von  $D$  auf den beiden Geraden, von denen eine durch den Endpunkt von  $\bar{v}_k$  parallel zu  $KA$  und die andere durch den Endpunkt von  $\bar{v}_l$  parallel zu  $LB$  gezogen sind. So erhalten wir den Endpunkt von  $\bar{v}_d$  im Schnittpunkte der beiden Geraden.

Ähnlicherweise finden wir den Endpunkt von  $\bar{v}_e$  im Schnittpunkte der beiden Geraden, die durch die Endpunkte von  $\bar{v}_k$  und  $\bar{v}_m$  parallel zu  $KA$  und  $MC$  gezogen sind.

Weiter finden wir den Drehpol  $P$  der Ebene  $ABC$  im Schnittpunkte der beiden erhaltenen Vektoren  $\bar{v}_d$  und  $\bar{v}_e$  und konstruieren in üblicher Weise die gesuchten gedrehten Geschwindigkeiten  $\bar{v}_a$ ,  $\bar{v}_b$  und  $\bar{v}_c$  der Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$ .

II. Beispiel. Auch der in R. Beyers Werk: „Technische Kinematik“ Seite 270 betrachtete Fall einer offenen kinematischen Kette von 3 Gliedern wird nach diesem Verfahren ohne Hilfe von ähnlichen Punktreihen ganz einfach gelöst.

Die offene Kette besteht aus 3 Gliedern:  $KA$ ,  $ABC$  und  $CM$ , die durch Drehpaare in den Punkten  $A$  und  $C$  verbunden sind. Gegeben seien die Geschwindigkeiten  $\bar{v}_k$  und  $\bar{v}_m$  der Punkte  $K$  und  $M$  und ausserdem sei die Richtung  $\beta - \beta$  der Geschwindigkeit des Punktes  $B$



bekannt, die eventuell durch ein Gleitpaar bestimmt ist. Gesucht sind die Geschwindigkeiten der Punkte  $A$  und  $C$  (Abb. 5).

Der Schnittpunkt  $D$  von  $AK$  und  $CM$  wird als Punkt der Ebene  $ABC$  betrachtet. Die Geschwindigkeitsvektoren  $\vec{v}_k$  und  $\vec{v}_m$  werden orthogonal gedreht und durch deren Endpunkte zwei Geraden parallel zu  $AD$  und  $CD$  gezogen, die sich im Endpunkt des gedrehten Geschwindigkeitsvektors  $\vec{v}_d$  schneiden. Den Drehpol  $P$  der Ebene  $ABC$  erhält man im Schnittpunkte von  $\vec{v}_d$  mit einer Geraden, die senkrecht zu  $\beta - \beta$  im Punkte  $B$  gezogen ist. Nach Verbindung des Pols  $P$  mit den Punkten  $A$  und  $C$  erhält man auch die gesuchten Geschwindigkeiten  $\vec{v}_a$  und  $\vec{v}_c$ .

papemins.

Vol. 10, no. 12, November

Heizingers labīvis ātrums konstruācija kārtojot zināšanu par M. Grāblers\*) un R. Beijera\*\*) M. Grāblers konstruācija ir identiska ar likmīti griezumā polā ātruma ieviešanu, pie kas Grāblers 84. lapp. 7. un 8. rindās un apakšā rēķina, ar kuru atrasta konstruācija mēģinājumā ar ierīcēm (Freilich ist die mitzuvor erwähnte Bestimmung der senkrechten Geschwindigkeiten hier auch nicht unmittelbar möglich). R. Beijera konstruācija ir identiska ar likmīti punktu vienošanu (āhnliche Punkttheorie), it šod ar neliela cēla.

Sin darva autoram tomēr ir jāpazīt aral veidā atrasta konstruācija, kas nepareizā veidā likmīti polā ieviešana, nedrīkstējot punktu vienošanu un ir viennozīmīga ar citu sugā minētām konstruācijām.

Atrasta konstruācija metode, dēvējot ar jebkādas ieviešanas: „komplāni kārtojas tālrunā dažādu punktu ātrumu u projekcijas ar likmīti vienošanu ir viennozīmīga“.

Šā iedrošā veidā vieta no zināšanu darbinā\*) jau agrāk pārtāstījis tāda veidā, ar kuru var arī šai caur-šaurā, kas savienā divas plaknes, bet iedrošā veidā šāda atzina plaknēm.

Pirma pārveidā ar polā ātruma ieviešanu spolekta ātrumu konstruācija kārtā kārtojas plaknē, kas savienāta kārtojamā ar citu citām plaknēm, no kuras divas plaknes vieta parāta ātrumu dot, bet trešo plakni ar nekustīgo savienā ātruma. (Sk. 3. att.)

\*) M. Grāblers „Mechanik“ 1917. II. — 87. lapp.

\*\*) R. Beijer „Technische Mechanik“ (1911. 261. un 262. lapp.

\*) A. Rostkowsky „Zwei verschiedene Arten Konstruktion der Geschwindigkeiten“ L.D.G. Mechanik der Maschinenbau. I. Band 1914.

bestimmt die Ebene, durch die Drehpaar bestimmt ist, gesucht sind die Geschwindigkeiten der Punkte  $A$  und  $C$  (Abb. 2).  
 Der Schnittpunkt  $D$  von  $KA$  und  $CM$  wird als Punkt der Ebene  $ABC$  betrachtet. Die Geschwindigkeitsvektoren  $v_A$  und  $v_C$  werden orthogonal gedreht und durch deren Endpunkte zwei Geraden parallel zu  $AD$  und  $CD$  gezogen, die sich im Endpunkt des gedrehten Geschwindigkeitsvektors  $v_D$  schneiden. Den Drehpol  $P$  der Ebene  $ABC$  erhält man im Schnittpunkte von  $v_D$  mit einer Geraden, die senkrecht zu  $PA$  im Punkte  $A$  gezogen ist. Weiter verbindet man  $P$  mit den Punkten  $B$  und  $C$  und erhält die gesuchten Geschwindigkeiten  $v_B$  und  $v_C$ .

Wir finden die Schnittpunkte  $D$  und  $E$  der Geraden  $KA$  mit  $LB$  und  $KA$  mit  $MC$ . Die Punkte  $D$  und  $E$  werden als Punkte der Ebene  $ABC$  betrachtet. Laut dem genannten Satz befindet sich der Endpunkt des gedrehten Geschwindigkeitsvektors von  $D$  auf den beiden Geraden, von denen eine durch den Endpunkt von  $v_A$  parallel zu  $KA$  und die andere durch den Endpunkt von  $v_B$  parallel zu  $LB$  gezogen sind. So erhalten wir den Endpunkt von  $v_D$  im Schnittpunkte der beiden Geraden.

Ähnlicherweise finden wir den Endpunkt von  $v_E$  im Schnittpunkte der beiden Geraden, die durch die Endpunkte von  $v_A$  und  $v_C$  parallel zu  $KA$  und  $MC$  gezogen sind.

Weiter finden wir den Drehpol  $P$  der Ebene  $ABC$  im Schnittpunkte der beiden erhaltenen Vektoren  $v_D$  und  $v_E$  und konstruieren in ähnlicher Weise die gesuchten gedrehten Geschwindigkeiten  $v_B$ ,  $v_C$  und  $v_D$  der Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$ .

**Bemerkung.** Auch der in R. Beyers Werk: „Technische Kinematik“ Seite 270 betrachtete Fall einer offenen kinematischen Kette von 3 Gliedern wird nach diesem Verfahren ohne Hilfe von ähnlichen Punktreihen ganz einfach gelöst.

Die offene Kette besteht aus 3 Gliedern:  $KA$ ,  $ABC$  und  $CM$ , die durch Drehpaare in den Punkten  $A$  und  $C$  verbunden sind. Gegeben seien die Geschwindigkeiten  $v_A$  und  $v_C$  der Punkte  $K$  und  $M$  und ausserdem sei die Richtung  $\beta$ — $\beta$  der Geschwindigkeit des Punktes  $B$ .

## Heizingera (Heysinger von Waldegg) kulises mēchanisma tiešais ātruma konstrukcijas paņēmiens.

Prof. Dr. ing. N. Rozenauers.

Heizingera kulises ātruma konstrukcija literatūrā atrodama pie M. Grūblera<sup>1)</sup> un R. Beijera<sup>2)</sup>. M. Grūblera konstrukcija ir izdarīta ar fiktīvu griezes pola stāvokļu ievēšanu, pie kam Grūblers 84. lapp. 7. un 8. rindiņā no apakšas raksta, ka tiešā ātruma konstrukcija minētā mēchanismā nav iespējama (Freilich ist die zeichnerische Bestimmung der senkrechten Geschwindigkeiten hier auch nicht unmittelbar möglich). R. Beijera konstrukcija ir izdarīta ar līdzīgu punktu rindām (ähnliche Punktreihen), tā tad arī netiešā ceļā.

Šinī darbā autoram tomēr ir izdevies atrast tiešu ātruma konstrukciju, kas neprasa nedz fiktīvu polu ievēšanu, nedz līdzīgu punktu rindas un ir vienkāršāka par abām augšā minētām konstrukcijām.

Autora konstrukcijas metode dibinās uz pazīstamās teorēmas: „komplāni kustošas taisnes dažādu punktu ātrumu projekcijas uz taisnes virzienu ir vienādas.“

Šo teorēmu autors vienā no saviem darbiem<sup>3)</sup> jau agrāk paplašinājis tādā ziņā, ka taisne var arī iet caur šarnīru, kas savieno divas plaknes, bet teorēma paliek spēkā abām plaknēm.

Pirms pārejas uz pašu kulises mēchanismu apskatīsim ātrumu konstrukciju kādai kustošai plaknei, kas savienota šarnīriem ar trīs citām plaknēm, no kuņām divās plaknēs viena punkta ātrums dots, bet trešo plakni ar nekustošo savieno slīdpāris. (Sk. 1. zīm.)

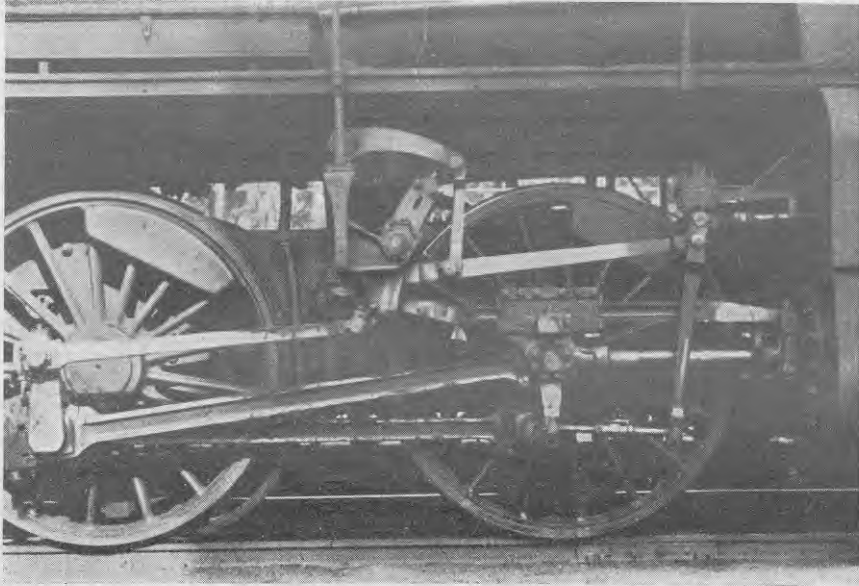
<sup>1)</sup> M. Grūbler: „Getriebelehre“ 1917. 81.—87. lapp.

<sup>2)</sup> R. Beyer: „Technische Kinematik“ 1931. 281. un 282. lapp.

<sup>3)</sup> N. Rozenauers. „Jauns paņēmiens ātrumu konstrukcijai sarežģītās kinēmatiskās ķēdēs.“ L.Ū.R. Mēchanikas fakultātes serija. I. sējums № 14.



ar  $BN$  punktā  $R$ , un velkot caur  $\vec{V}_m$  gala punktu taisni paralēli  $MC$ , dabūsim punkta  $R$  ortogonālo ātrumu  $\vec{V}_R$ . Lai atrastu momentāno polu  $P$  plaknei  $ABC$ , pagriezīsim abus ortogonālos ātrumus  $\vec{V}_Q$  un  $\vec{V}_R$  par  $90^\circ$  vienā virzienā un savienosim gala punktus ar taisni. Šī taisne krustojas ar  $BN$  punktā  $P$ , kas arī būs momentānais pols plaknei  $ABC$ . Kad pols  $P$  atrasts, savienojam to ar punktiem  $A$  un  $C$  un



Heizingera kulises foto attēls.

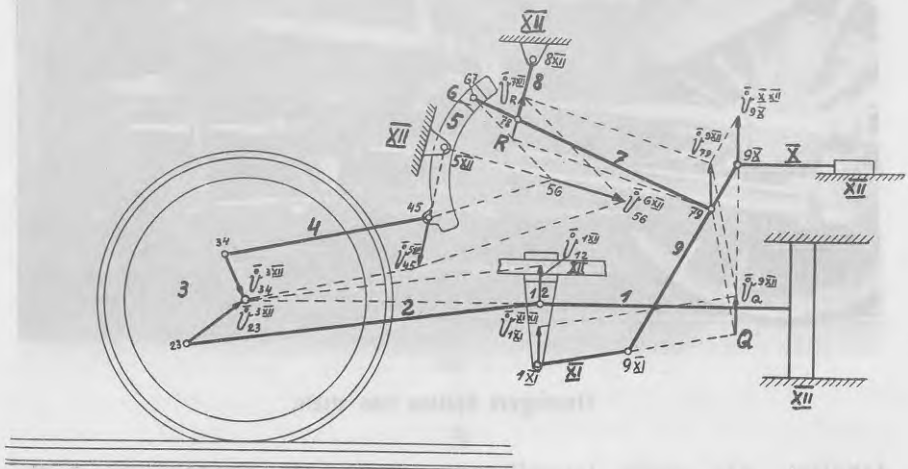
dabūjam, pēc augšā formulētās teorēmas, šo punktu ortogonālos ātrumus  $\vec{V}_a$  un  $\vec{V}_c$ . Punkta  $B$  ātrumu  $\vec{V}_b$ , kas būs arī meklējamais slīdes ātrums, atrodam, velkot caur  $\vec{V}_a$  gala punktu taisni paralēli  $AB$  līdz krustošanai ar  $BN$ .

Apskatīto jautājumu autors atrisinājis arī citādi<sup>1)</sup>, bet šeit aprakstītais atrisinājums vairāk piemērots Heizingera (Heysinger) kulises mēchanisma ātruma konstrukcijai, uz kuŗu tagad pāriesim.

<sup>1)</sup> sk. *N. Rozenauers*. Jauns paņēmiens ātrumu konstrukcijai sarežģītās kinēmatiskās ķēdēs. L.Ū.R. Mēchanikas fakultātes serija. I. sējums. № 14. II. piemērs.

Heizingera (Heysinger) kulises mēchanisms (sk. 2. zīm.) sastāv no 12 locekļiem, kuŗus apzīmēsim sekojošā kārtībā:

- ar 1 apzīmēts virzulis un krustgalvis,
- ” 2 ” klanis, kas piedzen riteni,
- ” 3 ” dubultkloķis vai pats ritenis,
- ” 4 apzīmēta svira, kas savieno riteni ar kulisi,
- ” 5 ” kulise,
- ” 6 apzīmēts kulises akmens,
- ” 7 apzīmēta svira, kas savieno 6 ar 9,
- ” 8 ” svira, pie kuŗas piekārts loceklis 7,
- 9 un XI savieno tvaikdaļa kātu ar krustgalvi,
- ar X apzīmēts tvaikdaļa kāts,
- XI ar šarniru piestiprināts pie krustgalvja,
- ar XII apzīmēts lokomotīves rāmis.



2. zīm.

Heizingera kulises mēchanisma schēma.

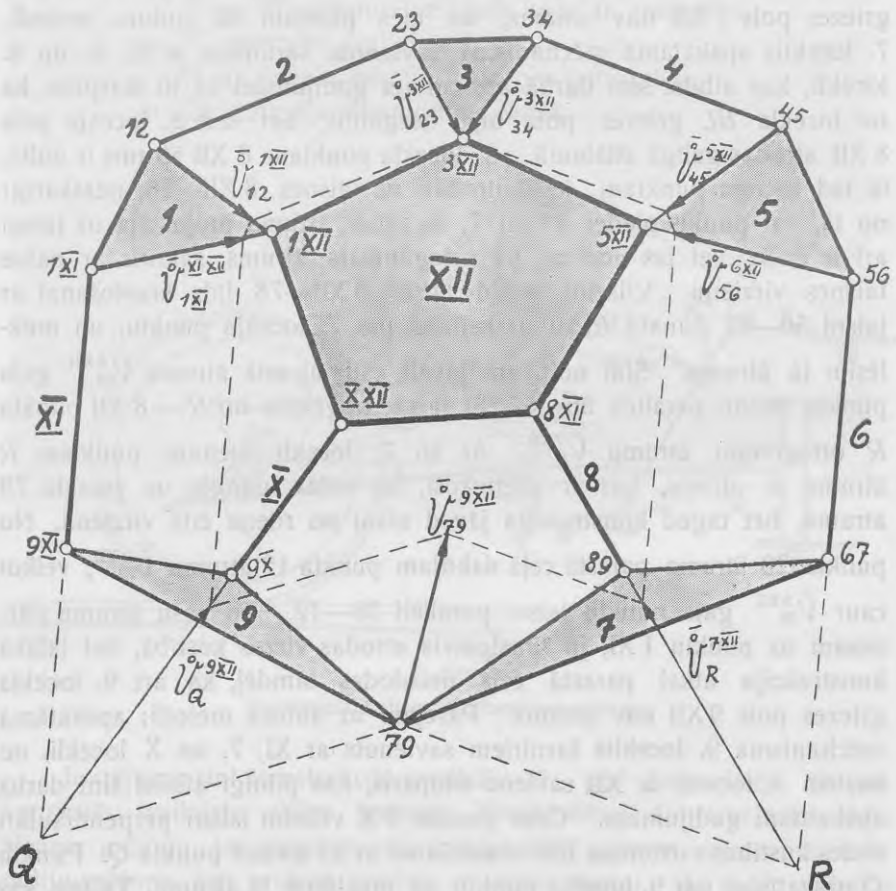
Jautājums šini konstrukcijā uzstādīts tā: pēc dota riteņa ātruma konstruēt tvaikdaļa slīdes ātrumu. Vienkāršības dēļ izvēlesim tādu ātruma mērogu, lai riteņa punkta ortogonālais ātrums reprezentētos ar radiju-vektoru, kas savieno punktu ar riteņa centru. Ar šo ir noteikti punktu 23. un 34. ortogonālie ātrumi  $\vec{V}_{23}^{3XII}$  un  $\vec{V}_{34}^{3XII}$ . Indeki šeit apakšā apzīmē, kādam punktam pieder ātruma vektors, bet indeksi augšā

apzīmē, kādas plaknes kustībā un pret kādu ātrums iegūts. Tā piemēram,  $\vec{V}_{23}^{3XII}$  ir punkta 23 ortogonālais ātrums 3. plaknes kustībā pret XII plakni.

Tālāk parastā kārtā pārejam uz punkta 45 ortogonālo ātrumu, velkot caur  $\vec{V}_{34}^{3XII}$  gala punktu taisni paralēli 34—45 līdz krustošanai ar taisni 5 XII—45. Pēc tam pārejam uz punktu 56, kas reprezentē kulises centru, un atrodam šim punktam ortogonālo ātrumu  $\vec{V}_{56}^{6XII}$ , velkot caur  $\vec{V}_{45}^{5XII}$  taisni paralēli 45—56 līdz krustošanai ar 5 XII—56.

Tālākā konstrukcija parastā ceļā nav iespējama, jo 7. locekļa griezes pols 7 XII nav zināms, un mēs pārejam uz autora metodi. 7. loceklis apskatāmā mēchanismā savienots šarniriem ar 6., 8. un 9. locekli, kas atbilst šinī darbā apskatītam gadījumam ar to starpību, ka tur locekļa *BL* griezes pols bija bezgalībā, bet šeit 8. locekļa pols 8 XII atrodas galīgā attālumā. 8. locekļa punktam 8 XII ātrums ir nulle, tā tad katram punktam, kas atrodas uz taisnes 8 XII—78, neatkarīgi no tā, vai punkts pieder 8. vai 7. loceklim, ātruma projekcija uz taisni arī ir nulle, bet tas nozīmē, ka ortogonālais ātrums sakritis ar pašas taisnes virzienu. Vilksim tagad taisni 8 XII—78 līdz krustošanai ar taisni 56—67 punktā *R*, ko uzskatīsim par 7. locekļa punktu, un meklēsim tā ātrumu. Šim nolūkam jāvelk caur atrastā ātruma  $\vec{V}_{56}^{6XII}$  gala punktu taisne paralēli 56—67. Šī taisne nogriezīs no *R*—8 XII punkta *R* ortogonālo ātrumu  $\vec{V}_R^{7XII}$ . Ar šo 7. locekli vienam punktam *R* ātrums ir atrasts, kas ir pietiekoši, lai vēlāk pārietu uz punkta 79 ātrumu, bet tagad konstrukcija jāved atkal no riteņa citā virzienā. No punkta 23 ātruma parastā ceļā dabūjam punkta 12 ātrumu  $\vec{V}_{12}^{1XII}$ , velkot caur  $\vec{V}_{23}^{3XII}$  gala punktu taisni paralēli 23—12. To pašu ātrumu pārnesam uz punktu 1 XI, jo krustgalvis atrodas virzes kustībā, bet tālākā konstrukcija atkal parastā ceļā neizdodas tamdēļ, ka arī 9. locekļa griezes pols 9 XII nav zināms. Pārejam uz autora metodi: apskatāmā mēchanismā 9. loceklis šarniriem savienots ar XI, 7. un X locekli, no kuriem X locekli ar XII savieno slīdpāris, kas pilnīgi atbilst šinī darbā apskatītam gadījumam. Caur punktu 9 X vilksim taisni perpendikulāri slīdes kustības virzienam līdz krustošanai ar XI locekli punktā *Q*. Punktu *Q* uzskatīsim par 9. locekļa punktu un meklēsim tā ātrumu. Taisne, kas vilkta caur  $\vec{V}_{1XII}^{XI}$  gala punktu, paralēli 1 XI—9 XI, nogriezīs no taisnes *Q*—9 X meklējamo ātrumu  $\vec{V}_Q^{9XII}$  punktam *Q*. Ievērojot tagad, ka

7. locekļa punktam  $R$  un 9. locekļa punktam  $Q$  ātrumi atrasti, varam viegli iegūt šarnira 79 ātrumu, velkot caur  $\bar{V}_R^{7XII}$  gala punktu taisni paralēli  $R-79$  un caur  $\bar{V}_Q^{9XII}$  gala punktu taisni paralēli  $Q-79$  līdz krustošanai. Šo taisņu krustošanās punkts dod ātruma  $\bar{V}_{79}^{9XII} = \bar{V}_{79}^{7XII}$  gala punktu. Lai dabūtu beidzot X locekļa slīdes ātrumu  $\bar{V}_{9X}^{X XII}$ , kas ir šās konstrukcijas gala mērķis, jāvelk tikai caur atrastā  $\bar{V}_{79}^{9XII}$  gala punktu taisne paralēli  $79-9X$  līdz krustošanai ar ortogonālā slīdes ātruma virzienu.



3. zīm.

Heizingera kules mēchanismam atbilstoša kinēmatiska šarniru ķēde.



Autora konstrukcijai, salīdzinot ar Grüblera un Beijera konstrukcijām, piemīt šādas priekšrocības:

1) Kā redzams, visa konstrukcija ir izdarīta tieši, bez fiktīviem polu stāvokļiem un arī bez līdzīgo punktu rindām.

2) Apieti punktu 67, 78 un XI 9 ātrumi, kuņi šinī konstrukcijā nav vajadzīgi.

3) Autora konstrukcija ir vienkāršāka par Grüblera konstrukciju vēl tādā ziņā, ka neprasa apskatāmā mēchanisma kinēmatiska attēla palīdzību, bez kuņa Grüblera konstrukcija grūti saprotama.

Bet lai varētu vēlreiz salīdzināt autora konstrukcijas metodi ar Grüblera metodi, tad punkta 79 ātruma konstrukcija ir izdarīta arī Heizingera (Heysinger) kulises kinēmatiskā attēla 3. zīmējumā, pie kam visi apzīmējumi saskan ar 2. zīmējumā parādīto kulises mēchanismu.

Visa konstrukcija, sākot ar 3. locekļa izejas ātrumiem  $\dot{V}_{34}^{3XII}$  un  $\dot{V}_{23}^{3XII}$  caur punktiem  $R$  un  $Q$  līdz šarnira 79 ātrumam  $\dot{V}_{79}^{9XII}$  skaidri redzama 3. zīmējumā un neprasa nekādus paskaidrojumus.

Iesniegts fakultātei 1936. g. 24. janvārī.

## Eine unmittelbare Geschwindigkeits-Konstruktion der Heysingerschen Steuerung für Lokomotiven.

Prof. Dr. Ing. N. Rosenauer.

### Autoreferat.

Die Geschwindigkeits-Konstruktion der Heysingerschen Steuerung findet man in der Literatur bei M. Grübler<sup>1)</sup> und R. Beyer<sup>2)</sup>. Die Konstruktion von M. Grübler ist mit Hilfe von fiktiven Drehpollagen durchgeführt, wobei M. Grübler (Seite 84 unten) meint, dass die zeichnerische Bestimmung der senkrechten Geschwindigkeiten nicht unmittelbar möglich ist.

R. Beyers Konstruktion der Geschwindigkeiten ist mit Hilfe von ähnlichen Punktreihen, also auch nicht unmittelbar durchgeführt.

In der vorliegenden Arbeit ist es dem Verfasser doch gelungen, eine unmittelbare Konstruktion zu finden, die keine fiktiven Pollagen und keine ähnlichen Punktreihen erfordert.

Die Konstruktion des Verfassers begründet sich auf dem bekannten Satz: „Die Projektionen der Geschwindigkeiten verschiedener Punkte einer komplanbewegten Geraden auf die Richtung der Geraden sind einander gleich,“ den der Verfasser in einer früheren Arbeit<sup>3)</sup> auf den Fall erweitert hat, dass die Gerade durch ein Gelenk geht, das zwei bewegliche Ebenen verbindet, und die Punkte verschiedenen Ebenen angehören.

Als Einführung zur Geschwindigkeits-Konstruktion der Heysingerschen Steuerung wird in Abb. 1 die Bewegung einer Ebene  $ABC$  betrachtet, die durch Drehpaare mit den Ebenen  $AK$ ,  $CM$  und  $BL$  verbunden ist, wobei in der Ebene  $AK$  die gedrehte (orthogonale) Geschwindigkeit  $\vec{V}_k$  des Punktes  $K$ , in der Ebene  $CM$  die gedrehte

1) M. Grübler: „Getriebelehre“. 1917. Seite 81—87.

2) R. Beyer: „Technische Kinematik“. 1931. Seite 281—282.

3) N. Rosenauers: „Jauns paņēmiens ātrumu konstrukcijai sarežģītās kinemātiskās ķēdēs“. L.U.R. Mēch. fak. serijs I sējums. № 14.

Geschwindigkeit  $\vec{V}_m$  des Punktes  $M$  gegeben sind und die Ebene  $BL$  ein Gleitpaar gegen die unbewegliche Ebene besitzt. Zu bestimmen ist die Bewegung der Ebene  $ABC$  und die Gleitgeschwindigkeit von  $BL$ .

Die Lösung nach dem Verfahren des Verfassers: Da die gedrehte Geschwindigkeit des Punktes  $B$  senkrecht zur Gleitrichtung steht, so liegt die gedrehte Geschwindigkeit eines jeden Punktes der Geraden  $BN$ , die in der Ebene  $ABC$  senkrecht zur Gleitrichtung gezogen ist, nach dem genannten Satz in derselben Geraden. Findet man dann die Schnittpunkte  $Q$  und  $R$  von  $AK$  und  $CM$  mit  $BN$ , die als Punkte der Ebene  $ABC$  betrachtet werden, so lassen sich deren gedrehte Geschwindigkeiten  $\vec{V}_Q$  und  $\vec{V}_R$  nach dem genannten Satz ganz einfach konstruieren, indem man eine Gerade durch den Endpunkt von  $\vec{V}_k$  parallel zu  $AK$  und die andere Gerade durch den Endpunkt von  $\vec{V}_m$  parallel zu  $MC$  zieht. Die erhaltenen orthogonalen Geschwindigkeiten  $\vec{V}_Q$  und  $\vec{V}_R$  der Punkte  $Q$  und  $R$  dreht man um  $90^\circ$  in einer Richtung und verbindet die Endpunkte mit einer Geraden. Diese Gerade schneidet  $BN$  im Drehpol  $P$  der Ebene  $ABC$ . Ferner verbindet man den Drehpol  $P$  mit den Punkten  $A$  und  $C$  und findet in üblicher Weise die gesuchten gedrehten Geschwindigkeiten  $\vec{V}_a$ ,  $\vec{V}_c$  und  $\vec{V}_b$ . Die letztere ist gleichzeitig auch die Gleitgeschwindigkeit von  $BL$ .

Dieselbe Aufgabe ist vom Verfasser auch anders gelöst<sup>1)</sup>, aber die hier angeführte Lösung entspricht besser der weiter folgenden Geschwindigkeits-Konstruktion der Heysingerschen Steuerung.

Die Heysingersche Steuerung besteht aus 12 Gliedern, die nach Abb. 2 benannt sind. Die Aufgabe besteht darin, dass aus der Geschwindigkeit des Rades gegen den Rahmen (Glied XII) die Gleitgeschwindigkeit des Schiebers (Glied X) bestimmt werden soll. Der Geschwindigkeits-Massstab ist so gewählt, dass die orthogonale Geschwindigkeit eines Radpunktes dem Abstände vom Radzentrum gleich ist. Damit sind die Geschwindigkeiten  $\vec{V}_{23}^{3XII}$  und  $\vec{V}_{34}^{3XII}$  bestimmt, wobei der Index unten den Punkt angibt, dem die Geschwindigkeit gehört, und der Index oben bezeichnet, bei welcher Bewegung die Geschwindigkeit entstanden ist (zum Beispiel  $3XII$  bedeutet Ebene 3 gegen Ebene XII). In üblicher Weise findet man aus der Geschwin-

<sup>1)</sup> N. Rozenauers: „Ein neues Verfahren zur Geschwindigkeits - Konstruktion kinematischer Ketten.“ L.Ü.R. Mēch.fak. serija. I sējums. № 14.

digkeit  $\bar{V}_{34}^{3XII}$  des Punktes 34 die Geschwindigkeiten  $\bar{V}_{45}^{5XII}$  und  $\bar{V}_{56}^{6XII}$  der Punkte 45 und 56, von denen letzterer im Mittelpunkte der Kulissee 5 liegt. Die weitere Konstruktion ist aber in dieser Art nicht durchführbar, da die Lage des Drehpols 7 XII des Gliedes 7 nicht bekannt ist, und jetzt wird das Verfahren des Verfassers angewandt. Das Glied 7 ist mit drei anderen Gliedern 6, 8, 9 durch Drehpaare verbunden, das entspricht dem in Abb. 1 betrachteten Fall, mit dem Unterschied, dass der Drehpol des Gliedes  $BL$  in der Unendlichkeit lag, aber der Drehpol 8 XII des Gliedes 8 sich in einer endlichen Entfernung befindet. Die Geschwindigkeit des Punktes 8 XII ist gleich Null, also ist auch die Projektion der Geschwindigkeit eines jeden Punktes der Geraden 8 XII—78 auf die Richtung der Geraden gleich Null unabhängig davon, ob der Punkt der Ebene 7 oder 8 angehört, das aber bedeutet, dass die orthogonale Geschwindigkeit in der Geraden liegt. Nimmt man also den Schnittpunkt  $R$  der Geraden 8 XII—78 und 56—67, der als Punkt des Gliedes 7 betrachtet wird, so erhält man seine Geschwindigkeit  $\bar{V}_R^{7XII}$  indem man durch den Endpunkt von  $\bar{V}_{56}^{6XII}$  eine Gerade zieht parallel zu 56— $R$ . Die Geschwindigkeit  $\bar{V}_R^{7XII}$  des Punktes  $R$  genügt, um später die Geschwindigkeit des Gelenkpunktes 79 zu ermitteln, die weitere Konstruktion muss aber wieder vom Gliede 3 in anderer Richtung geführt werden. Die Geschwindigkeit  $\bar{V}_{23}^{3XII}$  des Radpunktes 23 ergibt in üblicher Weise die Geschwindigkeit  $\bar{V}_{12}^{1XII}$  des Kreuzkopfpunktes 12. Dieselbe Geschwindigkeit wird auf den Punkt 1 XI übertragen und wieder das Verfahren des Verfassers angewandt. Das Glied 9 der Steuerung ist mit drei anderen Gliedern XI, 7, X durch Drehpaare verbunden, wobei das Glied X ein Gleitpaar gegen die unbewegliche Ebene besitzt. Also entspricht das Glied 9 vollständig dem in Abb. 1 betrachteten Fall und ebenso wie dort findet man den Punkt  $Q$  als Schnittpunkt von dem Gliede XI mit der Geraden, die senkrecht zur Gleitrichtung gezogen ist. Der Punkt  $Q$  wird als Punkt des Gliedes 9 betrachtet und seine orthogonale Geschwindigkeit  $\bar{V}_Q^{9XII}$ , die in der Geraden  $Q$ —9 X liegen muss, erhält man, indem man durch den Endpunkt von  $\bar{V}_{1XI}^{1XII}$  eine Gerade zieht parallel zu 1 XI—9 XI.

Nachdem die Geschwindigkeit des einen Punktes  $R$  in der Ebene 7 und des anderen Punktes  $Q$  in der Ebene 9 gefunden sind, erhält

man die Geschwindigkeit des Gelenkpunktes 79, indem man eine Gerade durch den Endpunkt von  $\bar{V}_R^{7XII}$  parallel zu  $R-79$  zieht bis zum Schnittpunkte mit der anderen Geraden durch den Endpunkt von  $\bar{V}_Q^{9XII}$  parallel zu  $Q-79$ .

Endlich zieht man noch eine Gerade durch den Endpunkt von  $\bar{V}_{79}^{7XII} = \bar{V}_{79}^{9XII}$  parallel zu  $79-9X$  bis zum Schnittpunkt mit der Senkrechten zur Gleitrichtung und erhält so die orthogonale Gleitgeschwindigkeit des Schiebers, die das Ziel der ganzen Konstruktion ist.

Im Vergleich zu den Konstruktionen von M. Grübler und R. Beyer besitzt die Konstruktion des Verfassers folgende Vorzüge.

1) Die Konstruktion ist unmittelbar durchgeführt ohne Hilfe von fiktiven Pollagen und ähnlichen Punktreihen, wodurch die Zeichnung klarer bleibt.

2) Die Geschwindigkeiten der Punkte 67, 78 und 9 XI sind umgangen und für das Endresultat nicht nötig.

3) Die Konstruktion des Verfassers ist durchgeführt ohne Hilfe der kinematischen Gelenkkette, die der Steuerung entspricht und ohne die die Grüblersche Konstruktion schwer verständlich ist.

Um noch einmal das Verfahren des Verfassers mit dem Grüblerschen Verfahren zu vergleichen, ist in Abb. 3 die Geschwindigkeitskonstruktion des Gelenkpunktes 79 auch für die kinematische Kette, die der Steuerung entspricht, durchgeführt. Alle Bezeichnungen in Abb. 3 und Abb. 2 sind dieselben. Der Gang der Konstruktion von den orthogonalen Ausgangsgeschwindigkeiten des dritten Gliedes  $\bar{V}_{34}^{3XII}$  und  $\bar{V}_{23}^{3XII}$  bis zur orthogonalen Geschwindigkeit des Gelenkpunktes 79 über die Punkte  $R$  und  $Q$  ist in der Abb. 3 deutlich zu sehen und verlangt keinerlei Erläuterungen.

Mēchanikas fakultātes mācības spēku darbi,  
kas iespiesti Latvijas Universitātes Rakstu iepriekšējos I—XX sējumos  
(pirmajā serijā resp. kopserijā, 1921.—1929. g.).

*In Actis Universitatis Latviensis (series prima generalis, tom. I—XX,  
1921—1929) a mechanicorum ordinis professoribus scripta haec  
inveniuntur.*

	Sējums Volum.	Lapp. Pag.
<b>A. Vītols (Vitol).</b> Essai d'établissement d'une théorie de l'écoulement des eaux pluviales . . . . .	IV,	1—137.
Mēģinājums uzstādīt lietus ūdeņu notekas teoriju. Tiltu spraugu hidrauliskais aprēķins . . . . .	IV,	138—140.
<b>A. Vītols (Vitol).</b> Explications supplémentaires ayant rapport à l'article précédent . . . . .	VI,	287—295.
<b>A. Vītols (Vitol).</b> Calcul cinématique des canaux de flottage . . . . .	XIV,	415—446.
Plostu kanāļu kinematiska aplēšana . . . . .	XIV,	437—438.
Kinematic calculation of canals for floating wood	XIV,	439—440.
<b>A. Vītols (Vitol).</b> Quelques remarques sur l'infiltration des eaux superficielles . . . . .	XIV,	447—479.
Dažas piezīmes par lietus ūdeņu filtrāciju . . . . .	XIV,	480—483.
<b>A. Vītols (Vitol).</b> Nouvelle théorie de l'écoulement des eaux pluviales d'un plan incliné . . . . .	XVI,	545—577.
Lietus ūdeņu notece no slīpas plaknes . . . . .	XVI,	577—578.
<b>A. Vītols (Vitol).</b> Inerces spēku iespaids zemes virsu sasniegušo ūdeņu iesūkšanās procesā . . . . .	XVII,	599—617.
L'influence de la force d'inertie de la masse d'eau sur le procès de l'infiltration des eaux super- ficielles . . . . .	XVII,	618—619.
<b>K. Rezevskis.</b> Vērtību mērogi . . . . .	XIX,	443—454.
<b>A. Vītols (Vitol).</b> Viens iespējams jautājuma atrisinā- jums par lietus ūdeņu noteku no slīpas plaknes . . . . .	XX,	215—241.
Une hypothèse supplémentaire ayant rapport à la nouvelle théorie de l'écoulement des eaux pluviales d'un plan incliné . . . . .	XX,	242—246.

LU bibliotēka



220041004

246698

LŪR. mēch. I.	AUL. mech. I.
Nr. 12. N. Rozenauers (Rosenauer). Analītiskais un grafoanalītiskais atrisinājums šarnīru četrstūra kustības noteikšanai . . . . .	345
Eine analytische und graphoanalytische Lösung zur Bewegung des Gelenkvierecks . . . . .	360
Nr. 13. N. Rozenauers (Rosenauer). Infleksijas un Bresa riņķu konstrukcija kinēmatiskās ķēdes locekļiem ar ātrumu un paātrinājumu vektoru palīdzību . . . . .	361
Eine Anleitung zur Konstruktion von Wendekreisen und Tangentialkreisen für die Glieder einer kinematischen Kette mit Hilfe von Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren	366
Nr. 14. N. Rozenauers (Rosenauer). Jauns paņēmieni ātrumu konstrukcijai sarežģītās kinēmatiskās ķēdēs . . . . .	369
Ein neues Verfahren zur Geschwindigkeitskonstruktion kinematischer Ketten . . . . .	373
Nr. 15. N. Rozenauers (Rosenauer). Heizingera (Heysinger von Waldegg) kulises mēchanisma tiešais ātruma konstrukcijas paņēmieni . . . . .	377
Eine unmittelbare Geschwindigkeits-Konstruktion der Heysingerschen Steuerung für Lokomotiven . . . . .	384