

422

LATVIJAS
ŪNIVERSITĀTES RAKSTI
ACTA UNIVERSITATIS LATVIENSIS

MĒCHANIKAS FAKULTĀTES SERIJA

II. SĒJUMS
TOMUS

№ 1—8

LATVIJAS ŪNIVERSITĀTE

R I G Ā, 1 9 3 7

P. 616.
1448

1911
BIBLIOTEKA
641-31-88

Römera mēchanisma tiešās ātrumu konstrukcijas.

Prof. Dr. ing. N. Rozenauers.

Römera mēchanisma ātruma konstrukcija literatūrā sastopama R. Beijera (R. Beyer) grāmatā¹, kas devis atrisinājumu ar līdzīgām punktu rindām. Jaunāku šim jautājumam veltītu darbu publicējis K. Floke (K. Flocke)², bet arī minētā darbā atrisinājums nav izdarīts tiešā ceļā, jo meklēta zināma taisne $g-g$, kas reprezentē kāda punkta ātruma vektora galapunkta ģeometrisko vietu, kuŗas noteikšanai atkal jāvelk divas brivas taisnes f_1 un f_2 .

Autors šinī darbā dod divas tiešās ātrumu konstrukcijas bez līdzīgām punktu rindām un citām ģeometriskām vietām. Autora metode dibinās uz pazīstamās teorēmas: „Komplāni kustošas taisnes dažādu punktu ātrumu projekcijas uz taisnes virzienu ir vienādas“, kuŗu autors jau izlietojis citos darbos³. Šī teorēma paliek spēkā arī tad, ja taisne iet caur šarnīru, kas savieno divas plaknes, un punkti pieder dažādām plaknēm⁴.

Römera mēchanisms sastāv no diviem zobratiem I un II, kas atrodas sazobē un var griezties ap nekustošām asīm punktos O_1 un O_2 . Loceklis KA savieno I zobratu un loceklis MC savieno II zobratu ar loekli AC , pie kam punktos K , A , C , M ir šarnīri. Loceklis AC ar šarnīru punktā B pievienots loceklim BL , kuŗam ir slīdpāris pret nekustošo plakni. Dots I zobrata griezes ātrums virzienā pret pulkstenrādītāju.

¹ R. Beyer: „Technische Kinematik“. 1931. 270 lapp.

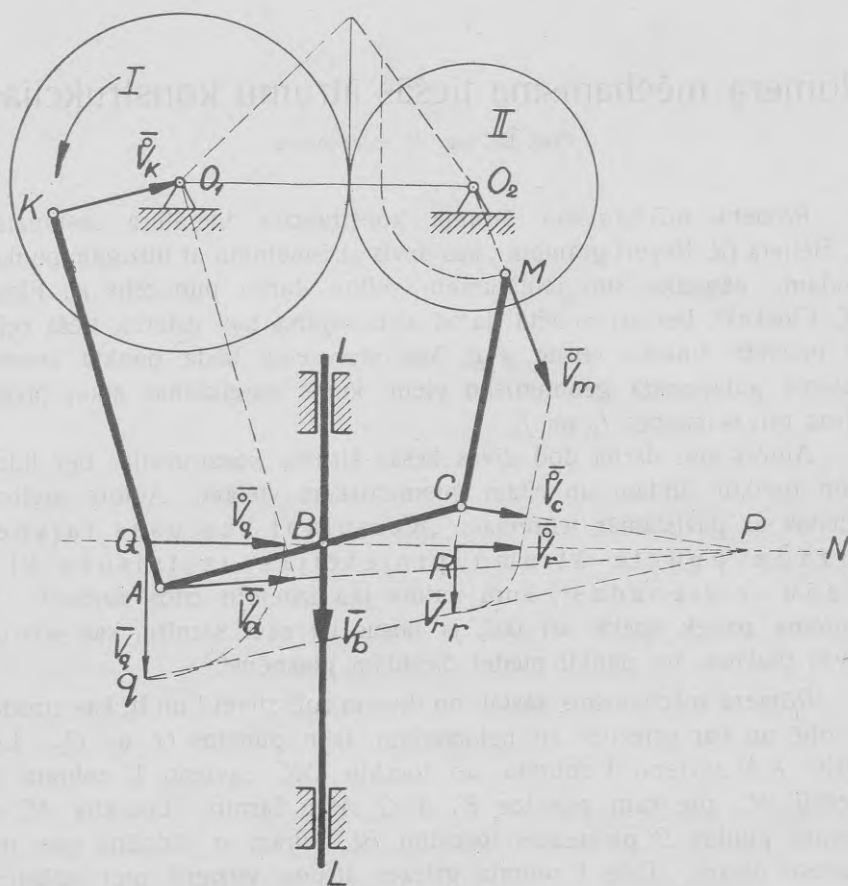
² K. Flocke: „Geschwindigkeitsermittlung beim Römergetriebe und ähnlichen Getrieben.“ Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. Bd. 13. Heft 3. 1933.

³ N. Rozenauers: „Heizingera (Heysinger) kulises mēchanisma tiešais ātruma konstrukcijas paņēmiens.“ L.Ū.R. Mēchanikas fakultātes serija. I sējums. № 15. 1936.

⁴ Pierādījumu sk. N. Rozenauers: „Jauns paņēmiens ātrumu konstrukcijai sarežģītās kinematiskās ķēdēs.“ L.Ū.R. Mēchanikas fakultātes serija. I sējums. № 14. 1936.

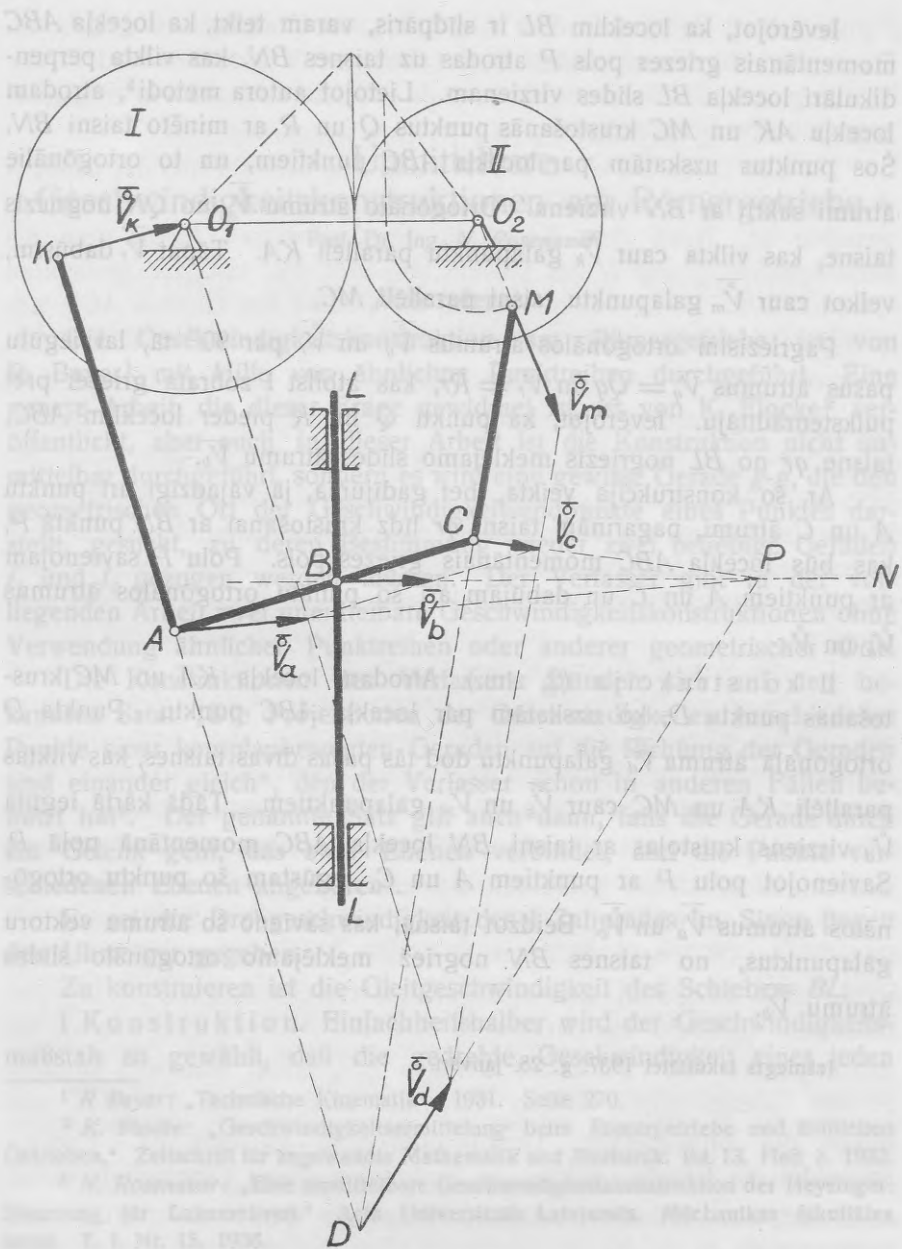
Jākonstruē locekļa BL slīdes ātrums.

I konstrukcija (1. zīm.). Izvēlamies vienkāršības dēļ tādu ātrumu mērogu, lai katra I zobrata punkta ortogonālais ātrums reprezentētos ar punkta attālumu no centra O_1 . Tādā gadījumā zobratu



1. zīm.

pieskares punkta ātrums būs vienāds ar I zobrata radiju. Atliekot šo ātrumu attiecīgā virzienā (1. zīm.), atrodam uz proporcionālītātes pamata punkta M ātrumu, ko atliekam ortogonālā virzienā no centra, jo zobrati griežas pretējos virzienos.



2. zīm.

konstrukcijas pārvietojums. L.G.R. Mēģis lab. 1. sējumā. MĒĪS 2. zīm. 2. zīm.

Ievērojot, ka loceklim BL ir slīdpāris, varam teikt, ka locekļa ABC momentānais griezes pols P atrodas uz taisnes BN , kas vilkta perpendikulāri locekļa BL slīdes virzienam. Lietojot autora metodi⁵, atrodam locekļu AK un MC krustošanās punktus Q un R ar minēto taisni BN . Šos punktus uzskatām par locekļa ABC punktiem, un to ortogonālie ātrumi sakrīt ar BN virzienu. Ortogonālo ātrumu \vec{V}_q no QN nogriezis taisne, kas vilkta caur \vec{V}_k galapunktu paralēli KA . Tāpat \vec{V}_r dabūsim, velkot caur \vec{V}_m galapunktu taisni paralēli MC .

Pagriezīsim ortogonālos ātrumus \vec{V}_q un \vec{V}_r par 90° tā, lai iegūtu pašus ātrumus $\vec{V}_q = \vec{Qq}$ un $\vec{V}_r = \vec{Rr}$, kas atbilst I zobrata griezei pret pulkstenrādītāju. Ievērojot, ka punkti Q un R pieder loceklim ABC , taisne qr no BL nogriezis meklējamo slīdes ātrumu \vec{V}_b .

Ar šo konstrukcija veikta, bet gadījumā, ja vajadzīgi arī punktu A un C ātrumi, pagarinām taisni qr līdz krustošanai ar BN punktā P , kas būs locekļa ABC momentānais griezes pols. Polu P savienojam ar punktiem A un C un dabūjam arī šo punktu ortogonālos ātrumus \vec{V}_a un \vec{V}_c .

II konstrukcija (2. zīm.). Atrodam locekļa KA un MC krustošanas punktu D , ko uzskatām par locekļa ABC punktu. Punkta D ortogonālā ātruma \vec{V}_d galapunktu dod tās pašas divas taisnes, kas vilktas paralēli KA un MC caur \vec{V}_k un \vec{V}_m galapunktiem. Tādā kārtā iegūta \vec{V}_d virziens krustojas ar taisni BN locekļa ABC momentānā polā P . Savienojot polu P ar punktiem A un C , iegūstam šo punktu ortogonālos ātrumus \vec{V}_a un \vec{V}_c . Beidzot taisne, kas savieno šo ātrumu vektoru galapunktus, no taisnes BN nogriež meklējamo ortogonālo slīdes ātrumu \vec{V}_b .

Iesniegts fakultātei 1937. g. 28. janvārī.

⁵ N. Rozenauers: „Heizingera (Heysinger) kulises mēchanisma tiešais ātruma konstrukcijas paņēmieni.“ L.Ū.R. Mēch. fak. serija. I sējums. № 15.

Unmittelbare Geschwindigkeitskonstruktionen am Römergetriebe.

Prof. Dr. Ing. N. Rosenauer.

Autoreferat.

Die Geschwindigkeitskonstruktion am Römergetriebe ist von R. Beyer¹ mit Hilfe von ähnlichen Punktreihen durchgeführt. Eine neuere Arbeit, die dieser Frage gewidmet ist, ist von K. Flocke² veröffentlicht, aber auch in dieser Arbeit ist die Konstruktion nicht unmittelbar durchgeführt, sondern es wird eine gewisse Gerade $g-g$, die den geometrischen Ort der Geschwindigkeitsendpunkte eines Punktes darstellt, gesucht, zu deren Bestimmung wieder zwei beliebige Geraden f_1 und f_2 gezogen werden müssen. Der Verfasser gibt in der vorliegenden Arbeit zwei unmittelbare Geschwindigkeitskonstruktionen ohne Verwendung ähnlicher Punktreihen oder anderer geometrischer Orte.

Die Konstruktionen des Verfassers gründen sich auf den bekannten Satz: „Die Projektionen der Geschwindigkeiten verschiedener Punkte einer komplanbewegten Geraden auf die Richtung der Geraden sind einander gleich“, den der Verfasser schon in anderen Fällen benutzt hat³. Der genannte Satz gilt auch dann, falls die Gerade durch ein Gelenk geht, das zwei Ebenen verbindet, und die Punkte verschiedenen Ebenen angehören⁴.

Es sei die Drehgeschwindigkeit des I Zahnrades im Sinne gegen den Uhrzeiger gegeben.

Zu konstruieren ist die Gleitgeschwindigkeit des Schiebers BL .

I Konstruktion. Einfachheitshalber wird der Geschwindigkeitsmaßstab so gewählt, daß die gedrehte Geschwindigkeit eines jeden

¹ R. Beyer: „Technische Kinematik“. 1931. Seite 270.

² K. Flocke: „Geschwindigkeitsermittlung beim Römergetriebe und ähnlichen Getrieben.“ Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. Bd. 13. Heft 3. 1933.

³ N. Rosenauer: „Eine unmittelbare Geschwindigkeitskonstruktion der Heysinger-Steuerung für Lokomotiven.“ Acta Universitatis Latviensis. Mechanikas fakultātes serija. T. I. Nr. 15. 1936.

⁴ Beweis siehe: N. Rosenauer: „Ein neues Verfahren zur Geschwindigkeitskonstruktion kinematischer Ketten.“ Acta Universitatis Latviensis. Mechanikas fakultātes serija. T. I. Nr. 14. 1936.

Punktes des I Zahnrades dem Abstände vom Radzentrum gleich ist. Dann wird die Geschwindigkeit des Punktes M gefunden und in der Richtung vom Zentrum abgetragen, da sich die Zahnräder in entgegengesetzten Richtungen drehen.

Da das Glied BL ein Gleitpaar besitzt, so befindet sich der Drehpol des Gliedes ABC auf der Geraden BN , die senkrecht zur Gleitrichtung gezogen ist. Nach dem Verfahren des Verfassers⁵, findet man die Schnittpunkte Q und R der Glieder AK und MC mit der genannten Geraden BN . Diese Punkte werden als Punkte des Gliedes ABC aufgefaßt, und deren orthogonale Geschwindigkeiten fallen mit BN zusammen. Die orthogonale Geschwindigkeit \overline{V}_q des Punktes Q erhält man, indem man eine Gerade durch den Endpunkt von \overline{V}_k parallel zu KA zieht. Gleichfalls ergibt die Gerade, durch den Endpunkt von \overline{V}_m parallel zu MC gezogen, die orthogonale Geschwindigkeit \overline{V}_r . Weiter dreht man die orthogonalen Geschwindigkeiten \overline{V}_q und \overline{V}_r um 90° und erhält die wahren Geschwindigkeiten $V_q = \overline{Qq}$ und $V_r = \overline{Rr}$, die dem Drehungssinn des I Zahnrades gegen den Uhrzeiger entsprechen.

Da die Punkte Q und R dem Gliede ABC angehören, so schneidet die Gerade qr von BL die gesuchte Gleitgeschwindigkeit V_b des Schiebers ab. Damit wäre die Konstruktion beendet; falls aber auch die Geschwindigkeiten der Punkte A und C erwünscht sind, so zieht man qr weiter bis zum Schnittpunkte mit BN , der den Drehpol P des Gliedes ABC darstellt. Den Drehpol verbindet man mit den Punkten A und C und erhält die gedrehten Geschwindigkeiten \overline{V}_a und \overline{V}_c (Abb. 1).

II Konstruktion (Abb. 2). Man findet den Schnittpunkt D der Glieder KA und MC , der als Punkt des Gliedes ABC aufgefaßt wird. Den Endpunkt der orthogonalen Geschwindigkeit \overline{V}_d ergeben dieselben Geraden, die parallel zu KA und MC gezogen waren. Im Schnittpunkte von \overline{V}_d mit der Geraden BN , erhält man den Drehpol P des Gliedes ABC . Weiter verbindet man P mit A und C und erhält die orthogonalen Geschwindigkeiten \overline{V}_a und \overline{V}_c . Endlich schneidet die Gerade, welche die Endpunkte dieser Geschwindigkeiten verbindet, von BN die gesuchte orthogonale Geschwindigkeit \overline{V}_b des Schiebers ab.

⁵ N. Rosenauer: „Über die Geschwindigkeitskonstruktion kinematischer Ketten.“ Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. Heft 3. 1937.

MĒCHANIKAS FAKULTĀTES SERIJA II. 2.

Ātrumu plānu konstrukcijas sarežģītās
kinēmatiskās ķēdēs bez līdzīgām punktu rindām.

Prof. Dr. ing. N. Rozenauers.

Prof. Dr. ing. T. Pöšls (Pöschl), referējot¹ par vienu no autora darbiem², izteica domu, ka autora attīstītā metode noderot tikai ortogonālo ātrumu konstrukcijai. Šis apstāklis pamudināja autoru izstrādāt ātrumu plānu konstrukciju uz minētās metodes pamata, noskaidrojot pie tam, kādos gadījumos autora metode dod iespēju konstruēt ātrumu plānus bez līdzīgu punktu rindu palīdzības.

Ātrumu plānu konstrukciju sarežģītās kinēmatiskās ķēdēs visplašāk iztīrājis F. Vitenbauers (F. Wittenbauer)³, kas 176. nodaļā: „Ātrumu plānu konstruēšanas noteikumi“ 270. lapp. formulējis šādu teorēmu: „Ja kinēmatiskā ķēdē diviem šarnīriem, kas nepieder vienam loceklim, doti ātrumi, tad ātrumu plānu var konstruēt tieši, nelietojot līdzīgas punktu rindas, jo no katra šarnīra var pāriet uz katru citu, nesastopot ceļā vairāk kā vienu šarnīru“. Šāds noteikums, acīm redzot, izslēdz visas 8-locekļu ķēdes, jo tanis nav iespējams pāriet no katra šarnīra uz katru citu, nesastopot ceļā vairāk kā vienu šarnīru. Turpretim daudzās 8-locekļu ķēdēs pilnīgi iespējams konstruēt ātrumu plānus tieši, nelietojot līdzīgas punktu rindas, ja tikai kādā šarnīru četrstūrī, kas pieder ķēdei, diviem pretīgulošiem šarnīriem ātrumi doti⁴.

Ievērojot zemāk attīstīto ātrumu plānu konstrukcijas metodi, autors nāk pie cita slēdziena un liek priekšā aizvietot F. Vitenbauera

¹ „Zentralblatt für Mechanik“. 4 Bd. Heft 5. 1936. 194. lapp.

² N. Rosenauer: „Ein direktes Verfahren zur Geschwindigkeits-Konstruktion kinematischer Ketten“. Schweizerische Bauzeitung. Bd. 106. Nr. 26. 1935.

³ F. Wittenbauer: „Graphische Dynamik“. 1923. 269.—276. lapp.

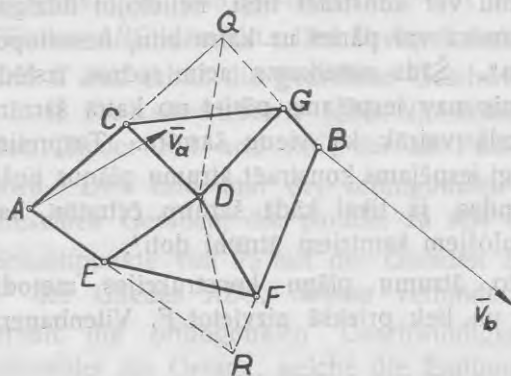
⁴ Sk. piemēram Grüber: „Getriebelehre“. 1917. 17. lapp. 8-locekļu ķēdes zīm. 22 a, 22 b, 22 c, 23 a, 23 d.

(F. Wittenbauer) teorēmu ar šādu: „Ātrumu plānu konstrukcija kinēmatiskās ķēdēs bez līdzīgām punktu rindām iespējama tad, ja trūkstošo ātrumu noteikšanai divos virzienos nav jāiet pāri vairāk kā diviem šarnīriem katrā virzienā.“

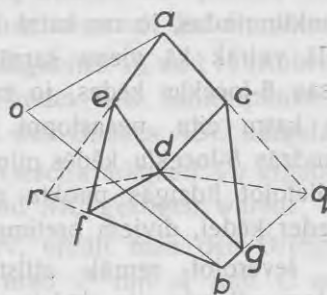
Autora metode ātrumu plānu konstrukcijai. Autora metodes pamats šeit, tāpat kā arī augšminētā darbā, ir pazīstama teorēma: „Komplāni kustošas taisnes dažādu punktu ātrumu projekcijas uz taisnes virzienu ir vienādas.“ Šī teorēma paliek spēkā arī tad, ja taisne iet caur šarnīru, kas savieno divas plaknes, un punkti pieder dažādām plaknēm⁵.

Minētā teorēma dod iespēju tikt pāri ar ātrumu konstrukciju vienam šarnīram un, ja tas apskatāmajam loceklim iespējams divās vietās, tad vienam locekļa punktam ātrums būs noteikts. Protams, katra locekļa ātruma stāvokļa pilnīgai noteikšanai jāatrod ātrumi diviem punktiem, bet ja nekur nav jāiet pāri vairāk kā diviem šarnīriem, ātrumu noteikšana vienmēr būs iespējama.

I piemērs: Brīva slēgta 6-locekļu šarnīru ķēde. (1.a zīm.). Šīs ķēdes ātrumu plānu pie dotiem punktu A un B ātrumiem \vec{V}_a un \vec{V}_b F. Wittenbauers (F. Wittenbauer)⁶ konstruē ar līdzīgām punktu rindām un attiecībā uz šo konstrukciju turpat raksta, ka tieša ātruma plāna konstrukcija nav iespējama (dann ist eine unmittelbare Konstruktion des Geschwindigkeitsplanes nicht möglich).



1. a zīm.



1. b zīm.

⁵ N. Rozenauers: „Jauns paņēmieni ātrumu konstrukcijai sarežģītās kinēmatiskās ķēdēs.“ L. Ū. R. Mēch. fak. serija. I sējums. № 14. 1936.

⁶ F. Wittenbauer: „Graphische Dynamik“. 1923. 270. lapp. Fig. 351, 351 a.

Autora atrisinājums: Atrodam malu AC un BG krustošanas punktu Q , ko uzskatām kā piederošu loceklim CDG . Tāpat malu AE un BF krustošanas punktu R uzskatām par locekļa DEF punktu.

Pamatojoties uz augšminētās teorēmas par ātrumu projekcijām, nākam pie slēdziena, ka punktu A un Q ātrumu projekcijas uz AQ ir vienādas. Tāpat arī punktu B un Q ātrumu projekcijas uz BQ ir vienādas.

Atliekot tagad no kāda brīvi izvēlēta punkta o (1.b zīm.) nogriežņus $oa = \overline{V}_a$ un $ob = \overline{V}_b$, atrodam plānā punktu q , velkot taisnes $aq \perp AQ$ un $bq \perp BQ$ līdz krustošanai. Analogiski atrodam punktu r , velkot $ar \perp AR$ un $br \perp BR$.

Ievērojot, ka punkts Q pieder plaknei DCG un punkts R plaknei DEF , atrodam plānā punktu d , velkot $qd \perp QD$ un $rd \perp RD$ līdz krustošanai. Beidzot

taisne $de \perp DE$ uz taisnes ar dod punktu e ,

" $dc \perp DC$ " " aq " " c ,

" $df \perp DF$ " " br " " f ,

" $dg \perp DG$ " " bq " " g .

Ar šo ātrumu plāns iegūts (1.b zīm.) bez līdzīgām punktu rindām.

Ievērojot, ka pāreja no šarnīra A uz B bija iespējama divos virzienos pāri diviem šarnīriem katrā, šāds rezultāts atbilst autora priekšā liktai teorēmai.

II piemērs: Brīva vaļēja 4 locekļu šarnīru ķēde (2.a zīm.). Doti punktu K, L, M ātrumi $\overline{V}_k, \overline{V}_l, \overline{V}_m$. Jākonstruē ātrumu plāns. Šo uzdevumu F. Wittenbauers (F. Wittenbauer)⁷ un M. Grüblers⁸ atrisinājuši ar līdzīgām punktu rindām.

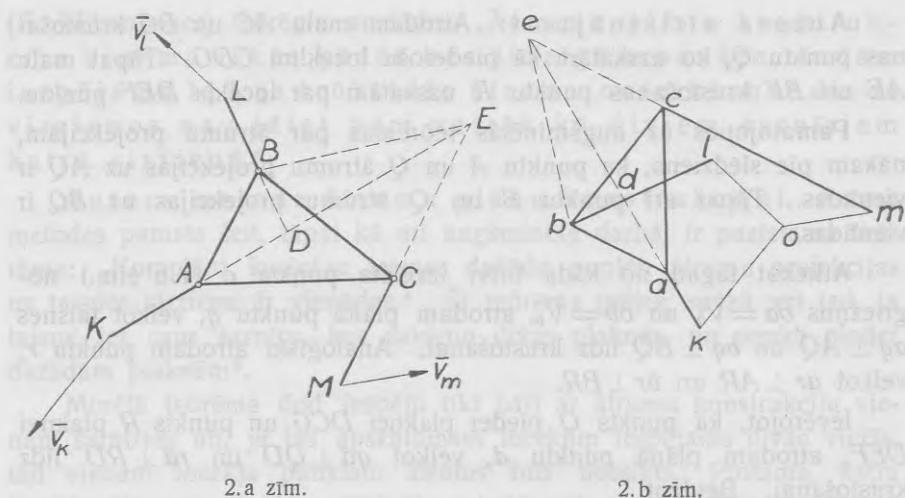
Autors turpretim dod tiešu atrisinājumu⁹.

Pirmkārt, atrodam locekļa AK krustošanas punktus D un E ar locekļiem BL un CM . Šos punktus uzskatām par locekļa ABC punktiem. Atliekam no kāda brīvi izvēlēta punkta o (2.b zīm.) nogriežņus $ok = \overline{V}_k, ol = \overline{V}_l$ un $om = \overline{V}_m$. Punktu d plānā dabūjam, velkot taisnes $kd \perp KA$ un $ld \perp LB$ līdz krustošanai. Tāpat, velkot $me \perp MC$ līdz

⁷ F. Wittenbauer: „Graphische Dynamik.“ 1923. 275. lapp.

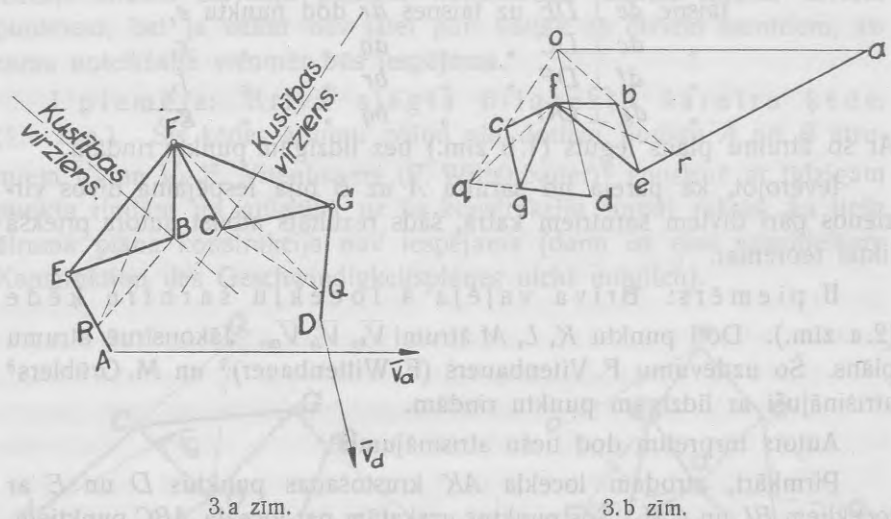
⁸ M. Grübler: „Getriebelehre“. 1917. 77. lapp.

⁹ Cits autora atrisinājums ar ortogonāliem ātrumiem: N. Rozenauers „Jauns paņēmiens ātrumu konstrukcijai sarežģītās kinematiskās ķēdēs.“ L. Ū. R. Mēch. fak. serija. I sējums. № 14. 1936.



2.a zīm.

2.b zīm.



3.a zīm.

3.b zīm.

krustošanai ar kd , atrodam plānā punktu e . Ievērojot, ka punkti D un E pieder plaknei ABC , atradīsim punktu b , velkot $eb \perp EB$ līdz taisnei ld . Beidzot $ba \perp BA$ dod uz taisnes kd punktu a

un $bc \perp BC$ " " " " me " c .

Ar šo meklējamais ātruma plāns (2.b zīm.) iegūts ar diviem papildpunktiem D un E , bet bez līdzīgām punktu rindām.

III piemērs. Brīva vaļēja 4-locekļu šarnīru ķēde (3.a zīm.). Doti punktu A un D ātrumi \vec{V}_a un \vec{V}_d , kā arī punktu B un C

kustības virzieni. Jākonstruē ātrumu plāns. Šo uzdevumu F. Vitenbauers (F. Wittenbauer)¹⁰ atrisinājis ar līdzīgām punktu rindām. Tas pats jautājums aplūkots arī vienā K. Flokes (K. Flocke) nesen publicētā darbā¹¹, bet arī šinī darbā atrisinājums nav izdarīts tiešā ceļā, jo meklēta zināma taisne $g-g$, kas reprezentē kāda punkta ātruma vektora galapunkta ģeometrisku vietu, kuŗas noteikšanai jāvelk divas brīvas taisnes f_1 un f_2 .

Autora atrisinājums: Ievērojot, ka šeit punktu B un C kustības virzieni doti, velkam taisnes BR un CQ perpendikulāri kustības virzieniem līdz krustošanai ar locekļiem AE un DG . Punktu R uzskatām par plaknes EBF punktu un punktu Q par plaknes CGF punktu.

Plaknes EBF momentānais pols acīm redzot atrodas uz taisnes BR , no kurienes seko, ka punkta R ātrums ir perpendikulārs taisnei BR . No otras puses punkts R atrodas arī uz locekļa AE , tā tad, pamatojoties uz teorēmas par ātrumu projekcijām, varam apgalvot, ka ātrumu plānā punktu A , E un R ātrumu vektoru galapunkti atrodas uz vienas taisnes, kas iet perpendikulāri loceklim AE .

Pēc šāda paskaidrojuma pārejām uz ātrumu plāna konstrukciju, novelkot no kāda brīvi izvēlēta punkta o (3.b zīm.) nogriežņus $oa = \overline{V_a}$ un $od = \overline{V_d}$. Punktu r plānā dabūjam, velkot $ar \perp AE$ līdz krustošanai ar taisni or , kas vilkta paralēli punkta B kustības virzienam. Līdzīgā ceļā atrodam punktu q , velkot $dq \perp DG$ līdz krustošanai ar taisni oq , kas vilkta paralēli punkta C kustības virzienam.

Ievērojot, ka punkts R pieder plaknei EBF un punkts Q pieder plaknei CGF , atrodam plānā punktu f , velkot taisnes $rf \perp RF$ un $qf \perp QF$ līdz krustošanai.

Beidzot taisne $fc \perp FC$ krustojas ar taisni oq punktā c ,

"	$fg \perp FG$	"	"	"	dq	"	g ,
"	$fb \perp FB$	"	"	"	or	"	b ,
"	$fe \perp FE$	"	"	"	ar	"	e .

Ar šo ātrumu plāns iegūts bez līdzīgu punktu rindu palīdzības (3.b zīm.).

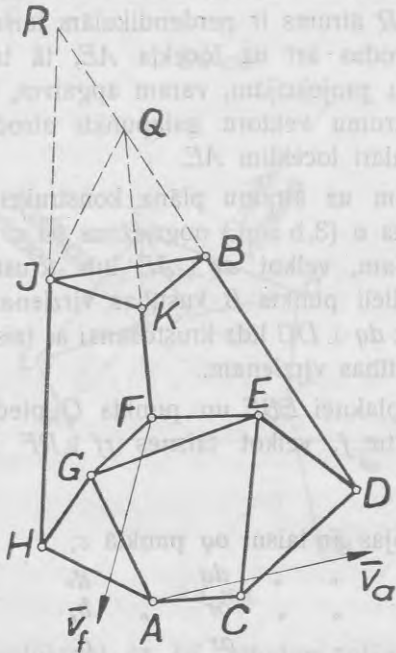
¹⁰ F. Wittenbauer: „Graphische Dynamik“. 1923. 273. lapp.

¹¹ K. Flocke: „Geschwindigkeitsermittlung beim Römergetriebe und ähnlichen Getrieben“. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. Bd. 13. Heft 3. 1933.

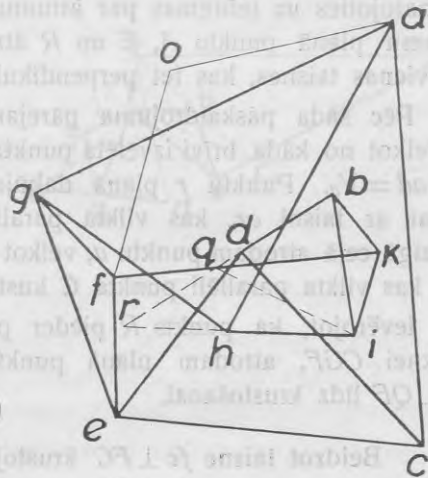
IV piemērs. Brīva slēgta 8-locekļu šarnīru ķēde (4.a zīm.). Pieņemot tāpat kā F. Wittenbauers (F. Wittenbauer)¹² punktu A un B ātrumus par dotiem, ātrumu plāna konstrukcija bez līdzīgām punktu rindām neizdodas, jo šeit, piemēram, locekļa CDE ātrumu noteikšanai nav iespējams tikt pāri divos virzienos starp dotiem ātrumiem, nesastopot ceļā vairāk kā divus šarnīrus katrā virzienā. Viens virziens ved caur 2 šarnīriem C un D , bet otrā virzienā ir 4 šarnīri C, E, F un K .

Pieņemot turpretim punktu A un F vai E ātrumus par dotiem, ātrumu plānu var viegli konstruēt bez līdzīgām punktu rindām, jo šādā gadījumā autora formulētais noteikums ir izpildīts.

Pieņemsim tā tad, ka ātrumi \vec{V}_a un \vec{V}_f ir doti, un atliksim $\vec{oa} = \vec{V}_a$ un $\vec{of} = \vec{V}_f$ no kāda brīvi izvēlēta punkta o (4.b zīm.).



4.a zīm.



4.b zīm.

Taisnes $fg \perp FG$ un $ag \perp AG$ dod plānā punktu g

” $gh \perp GH$ ” $ah \perp AH$ ” ” ” h

” $fe \perp FE$ ” $ge \perp GE$ ” ” ” e

” $ec \perp EC$ ” $ac \perp AC$ ” ” ” c

” $ed \perp ED$ ” $cd \perp CD$ ” ” ” d

¹² F. Wittenbauer: „Graphische Dynamik“, 1923, 271.—272. lapp.

Tālāk atrodam locekļu FK un HJ krustošanas punktus Q un R ar locekli DB . Punktus Q un R uzskatām par plaknes JKB punktiem un meklējam atbilstošus punktus q un r plānā.

Acīm redzot taisnes $hr \perp HJ$ un $dr \perp DB$ dod plānā punktu r ,

" $fq \perp FK$ un dr " " " " q .

Ievērojot, ka punkti Q un R pieder loceklim JKB , taisne $qi \perp QJ$ ar taisni rh krustojas punktā i .

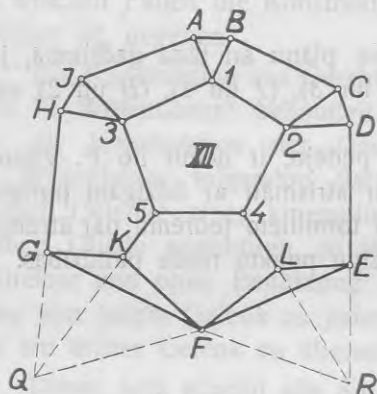
Beidzot taisne $ik \perp JK$ uz taisnes fq dod plānā punktu k

un $ib \perp JB$ " " rd " " " b .

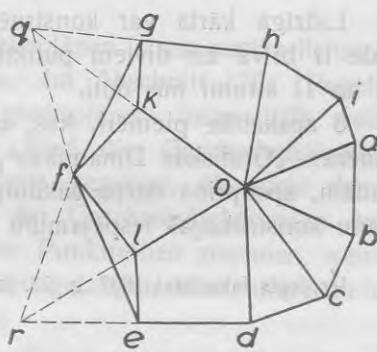
Ar šo ātrumu plāna konstrukcija izdarīta bez līdzīgu punktu rindu palīdzības.

Tikpat viegli var konstruēt šīs ķēdes ātrumu plānu, ja loceklis AC paliek nekustošs un loceklis AGH vai CDE piedzen ķēdi ar zināmu ātrumu.

V piemērs: Heizingera (Heysinger) kulises mēchanismam atbilstoša 12-locekļu šarnīru ķēde (5.a zīm.).



5.a zīm.



5.b zīm.

Loceklis XII paliek nekustošs un loceklis $1AB$ piedzen mēchanismu ar zināmu ātrumu¹³. Lai iegūtu ātrumu plānu, atliekam $oa = V_a$ no kāda brīvi izvēlētā punkta o (5.b zīm.) un tieši

velkot taisnes $ab \perp AB$ un $ob \perp 1B$ dabūjam plānā punktu b ,

" " $bc \perp BC$ " $oc \perp 2C$ " " " c ,

" " $cd \perp CD$ " $od \perp 2D$ " " " d ,

" " $ai \perp AJ$ " $oi \perp 3J$ " " " i ,

" " $ih \perp JH$ " $oh \perp 3H$ " " " h .

¹³ Cits atrisinājums ortogonāliem ātrumiem ar fiktīviem poliēm atrodams M. Grublera: „Getriebelehre“. 1917. 84.—86. lapp.

Tālāk parastā ceļā konstrukcija nav izdarāma, un mēs pārejam uz punktiem Q , kas reprezentē locekļu HG un $5K$ krustošanas punktu, un R , kas reprezentē locekļu DE un $4L$ krustošanas punktu. Punktu Q uzskatām par plaknes GKF punktu un punktu R par plaknes FEL punktu.

Taisnes $hq \perp HG$ un $oq \perp 5K$ dod plānā punktu q

„ $dr \perp DE$ un $or \perp 4L$ „ „ „ „ r

Ievērojot, ka punkts Q pieder plaknei GKF un punkts R pieder plaknei FEL , atrodam plānā punktu f , velkot taisnes $qf \perp QF$ un $rf \perp RF$ līdz krustošanai.

Beidzot taisne $fg \perp FG$ uz taisnes hq dod punktu g

un „ $fk \perp FK$ „ „ „ oq „ „ „ k ,

tāpat „ $fe \perp FE$ „ „ „ rd „ „ „ e

un „ $fl \perp FL$ „ „ „ or „ „ „ l .

Ar šo ātrumu plāns arī šai ķēdei iegūts bez līdzīgām punktu rindām¹⁴.

Līdzīgā kārtā var konstruēt ātrumu plānu arī tādā gadījumā, ja ķēde ir brīva un diviem punktiem (A un 3), (J un 1), (B un 2) vai (C un 1) ātrumi būs doti.

5 apskatītie piemēri, kas, izņemot pēdējo, ir ņemti no F. Vitenbauera: „Grafiskas Dinamikas“, bet tur atrisināti ar līdzīgām punktu rindām, apstiprina darba sākumā autora formulēto teorēmu par ātrumu plānu konstrukcijas iespējamību bez līdzīgu punktu rindu palīdzības.

Iesniegts fakultātei 1937. g. 28. janvārī.

¹⁴ Citu konstrukciju ar ortogonāliem ātrumiem sk. *N. Rozenauers*: „Heizingera kulises mēchanisma tiešais ātruma konstrukcijas paņēmieni.“ L. Ū. R. Mēch. fak. serija. I sējums. № 15. 1936.

Konstruktion von Geschwindigkeitsplänen kinematischer Ketten ohne Verwendung ähnlicher Punktreihen.

Von Prof. Dr. Ing. N. Rosenauer.

Autoreferat.

Die Äußerung Prof. Dr. Ing. Th. Pöschl's¹, das Verfahren des Verfassers² benütze nur die gedrehten Geschwindigkeiten, hat dem Verfasser die Anregung zur Untersuchung der Konstruktion von Geschwindigkeitsplänen auf Grund der zitierten Arbeit und zur Bestimmung, in welchen Fällen die Konstruktion ohne ähnliche Punktreihen durchführbar ist, gegeben.

Die Konstruktion von Geschwindigkeitsplänen ist am ausführlichsten von F. Wittenbauer³ behandelt worden. Im Abschnitt 176: „Regeln für die Konstruktion der Geschwindigkeitspläne“ Seite 270 stellt F. Wittenbauer folgenden Satz auf: „Sind die Geschwindigkeiten zweier Gelenke einer kinematischen Kette gegeben, die nicht demselben Gliede angehören, so läßt sich der Geschwindigkeitsplan unmittelbar und ohne Benützung ähnlicher Punktreihen zeichnen, wenn man von jedem Gelenk zu jedem anderen gelangen kann, ohne mehr als ein drittes Gelenk zu überschreiten.“

Dieser Satz scheint alle 8-gliedrigen Ketten auszuschließen, da es in einer 8-gliedrigen Kette nicht möglich ist, von jedem Gelenk zu jedem überzugehen ohne mehr als ein Gelenk zu überschreiten. Dagegen ist es in sehr vielen 8-gliedrigen Ketten durchaus möglich, den Geschwindigkeitsplan unmittelbar zu konstruieren, falls die Geschwindigkeiten zweier gegenüberliegender Gelenke eines der Gelenkvierecke, das der Kette angehört, gegeben sind⁴.

¹ „Zentralblatt für Mechanik“ 1936. 4. Bd. Heft 5. Seite 194.

² N. Rosenauer: „Ein direktes Verfahren zur Geschwindigkeitskonstruktion kinematischer Ketten“. Schweizerische Bauzeitung, Bd. 106. N. 26. 1935.

³ F. Wittenbauer: „Graphische Dynamik“. 1923. Seite 269—276.

⁴ Zum Beispiel siehe die 8-gliedrigen Ketten Fig. 22a, 22b, 22c, 23a, 23b, 23d, bei M. Grübler: „Getriebelehre“. 1917. Seite 17.

Auf Grund der Ergebnisse der vorliegenden Arbeit kommt der Verfasser zu einem anderen Schluß und schlägt vor, den Satz von F. Wittenbauer durch den folgenden zu ersetzen: „Die Konstruktion von Geschwindigkeitsplänen kinematischer Ketten ist ohne Verwendung ähnlicher Punktreihen möglich, falls zur Bestimmung fehlender Geschwindigkeiten einzelner Glieder in zwei Richtungen nicht mehr als zwei Gelenke in jeder Richtung, zwischen bekannten Geschwindigkeiten überschritten werden müssen.“

Das Verfahren des Verfassers gründet sich auf dem bekannten Satz: „Die Geschwindigkeitsprojektionen verschiedener Punkte einer komplanzbewegten Geraden auf dieselbe sind einander gleich“. Der Satz gilt auch dann, wenn die Gerade durch ein Gelenk geht, das zwei Ebenen verbindet, und die Punkte verschiedenen Ebenen angehören⁵.

Das Verfahren des Verfassers besteht darin, daß man, laut dem zitierten Satze, mit der Geschwindigkeitskonstruktion über ein Gelenk in das nächste Glied hineindringt und, falls das von zwei Seiten möglich ist, die Geschwindigkeit eines Punktes des zwischenliegenden Gliedes erhält. Freilich muß man zur endgültigen Bestimmung des Geschwindigkeitszustandes eines Gliedes die Möglichkeit haben, die Geschwindigkeiten zweier Punkte zu bestimmen. Falls man aber nirgends mehr als zwei Gelenke zu überschreiten hat, so wird das immer möglich sein. Aus dem Gesagten folgt, daß das Verfahren des Verfassers sich auf die Geschwindigkeitsbestimmung von mindestens ternären Gliedern anwenden läßt.

I Beispiel: Eine freie geschlossene 6-gliedrige Gelenkkette. Abb. 1a. Der Geschwindigkeitsplan dieser Kette bei gegebenen Geschwindigkeiten \bar{V}_a und \bar{V}_b der Punkte A und B ist von F. Wittenbauer mit Hilfe von ähnlichen Punktreihen gezeichnet⁶, wobei F. Wittenbauer sich folgendermaßen äußert: „dann ist eine unmittelbare Konstruktion des Geschwindigkeitsplanes nicht möglich“.

Lösung nach dem Verfahren des Verfassers. Es wird der Schnittpunkt Q der Geraden AC und BG gefunden und als

⁵ N. Rosenauer: „Über die Geschwindigkeitskonstruktion kinematischer Ketten“, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. 17, Heft 3, 1937.

⁶ F. Wittenbauer: „Graphische Dynamik“. 1923. Seite 270—271.

Punkt der Ebene CDG aufgefaßt. Gleichfalls wird der Schnittpunkt R der Geraden AE und BF als Punkt der Ebene DEF aufgefaßt.

Laut dem Projektionssatz sind die Geschwindigkeitsprojektionen der Punkte A und Q auf AQ einander gleich. Dasselbe bezieht sich auch auf die Geschwindigkeitsprojektionen der Punkte B und Q auf BQ .

Man trägt von einem Punkte o (Abb. 1b) die Strecken $\overline{oa} = \overline{V}_a$ und $\overline{ob} = \overline{V}_b$ ab, und erhält im Geschwindigkeitsplan den Punkt q , indem man $aq \perp AQ$ und $bq \perp BQ$ zieht. Ebenso erhält man den Punkt r durch $ar \perp AR$ und $br \perp BR$.

Da der Punkt Q der Ebene DCG und der Punkt R der Ebene DEF angehört, so erhält man den Punkt d des Planes, indem man $qd \perp QD$ und $rd \perp RD$ zieht. Endlich ergeben:

$$\begin{array}{l} de \perp DE \text{ auf der Geraden } ar \text{ den Punkt } e \\ dc \perp DC \quad " \quad " \quad " \quad aq \quad " \quad " \quad c \\ df \perp DF \quad " \quad " \quad " \quad br \quad " \quad " \quad f \\ dg \perp DG \quad " \quad " \quad " \quad bq \quad " \quad " \quad g \end{array}$$

wodurch der ganze Plan ohne ähnliche Punktreihen erhalten ist (Abb. 1b).

Da beim Übergang vom Gelenk A zu B nicht mehr als zwei Gelenke überschritten sind, und das in zwei Richtungen möglich war, so entspricht dieses Ergebnis dem vom Verfasser vorgeschlagenen Satze.

II Beispiel: Eine freie offene 4-gliedrige Gelenk-kette. Abb. 2a. Gegeben seien die Geschwindigkeiten $\overline{V}_k, \overline{V}_l$ und \overline{V}_m der Punkte K, L, M . Zu konstruieren ist der Geschwindigkeitsplan der Kette.

Dieser Fall ist bei F. Wittenbauer⁷ und M. Grübler⁸ ebenfalls mit ähnlichen Punktreihen gelöst.

Der Verfasser gibt jedoch eine unmittelbare Lösung⁹.

Man findet die Schnittpunkte D und E von AK mit LB , bzw. mit CM , die als Punkte der Ebene ABC aufgefaßt werden. Dann trägt man vom Punkte o (Abb. 2b) $\overline{ok} = \overline{V}_k, \overline{om} = \overline{V}_m$ und $\overline{ol} = \overline{V}_l$ ab.

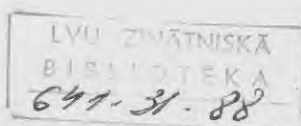
Den Punkt d des Planes ergeben die Geraden $kd \perp KA$ und $ld \perp LB$

" " e " " " " " " kd und $me \perp MC$

⁷ F. Wittenbauer: „Graphische Dynamik“. 1923. Seite 275.

⁸ M. Grübler: „Getriebelehre“. 1917. Seite 77.

⁹ Eine andere Lösung des Verfassers mit gedrehten Geschwindigkeiten: N. Rosenauer: „Über die Geschwindigkeitskonstruktion kinematischer Ketten“. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. Ed. 17. Heft 3. 1937.



Da die Punkte D und E der Ebene ABC angehören, so erhält man den Punkt b , indem man $eb \perp EB$ bis zur Geraden ld zieht. Endlich ergeben noch $ba \perp BA$ auf kd den Punkt a und $bc \perp BC$ auf me den Punkt c . Damit ist der Geschwindigkeitsplan durch Heranziehung zweier Hilfspunkte D und E , aber ohne ähnliche Punktreihen erhalten (Abb. 2b).

III Beispiel: Eine freie offene 4-gliedrige Gelenkette. Abb. 3a. Die Geschwindigkeiten \overline{V}_a und \overline{V}_d der Punkte A und D und die Bewegungsrichtungen der Punkte B und C seien gegeben. Zu konstruieren ist der Geschwindigkeitsplan der Kette. Die Aufgabe ist von F. Wittenbauer¹⁰ mit ähnlichen Punktreihen gelöst. Eine ähnliche Lösung mit gedrehten Geschwindigkeiten stammt von K. Flocke¹¹.

Lösung des Verfassers: Da hier die Bewegungsrichtungen von B und C gegeben sind, so zieht man die Geraden BR und CQ senkrecht zu denselben bis zu den Gliedern AE und DG und betrachtet den Punkt R als Punkt der Ebene EBF , den Punkt Q aber als Punkt der Ebene CGF .

Der Drehpol der Ebene EBF liegt offenbar auf der Geraden BR , und folglich ist die Geschwindigkeit des Punktes R senkrecht zu BR . Andererseits liegt der Punkt R auch auf dem Gliede AE , und nach dem Projektionssatz befinden sich im Geschwindigkeitsplan die Endpunkte der Geschwindigkeiten von A , E und R auf einer Geraden, die senkrecht zum Gliede AE steht.

Nach dieser Erläuterung trägt man von einem Punkte o die Strecken $oa = \overline{V}_a$ und $od = \overline{V}_d$ ab (Abb. 3b). Den Punkt r des Planes erhält man als Schnittpunkt der Geraden $ar \perp AE$ mit der Geraden or , die parallel zur Bewegungsrichtung des Punktes B gezogen ist. Ähnlicherweise erhält man den Punkt q , indem man $dq \perp DG$ bis zur Geraden oq zieht, die parallel zur Bewegungsrichtung des Punktes C gezogen ist.

Da der Punkt R der Ebene EBF und der Punkt Q der Ebene CGF angehört, so erhält man den Punkt f im Schnittpunkte von $rf \perp RF$ und $qf \perp QF$.

¹⁰ F. Wittenbauer: „Graphische Dynamik“. 1923. Seite 273.

¹¹ K. Flocke: „Geschwindigkeitsermittlung beim Römergetriebe und ähnlichen Getrieben“. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. Bd. 13, Heft 3. 1933.

Endlich ergeben die Geraden:

$fc \perp FC$ auf der Geraden oq den Punkt c ,
 $fg \perp FG$ " " " dq " " g ,
 $fb \perp FB$ " " " or " " b ,
 $fe \perp FE$ " " " ar " " e .

Damit ist der Geschwindigkeitsplan ohne Verwendung ähnlicher Punktreihen erhalten (Abb. 3b).

IV Beispiel: Eine freie geschlossene 8-gliedrige Gelenkkette Abb. 4a, die von L. Burmester¹² als „Dreispannmechanismus“ bezeichnet ist.

Freilich läßt sich der Geschwindigkeitsplan dieser Kette, falls man nach F. Wittenbauer¹³ die Geschwindigkeiten der Punkte A und B als bekannt annimmt, nicht ohne ähnliche Punktreihen konstruieren, da es hier nicht möglich ist, zur Bestimmung der Geschwindigkeiten, zum Beispiel des Gliedes CDE , in zwei Richtungen nur 2 Gelenke zu überschreiten. Eine Richtung führt über 2 Gelenke C und D , aber die zweite führt über 4 Gelenke C, E, F und K .

Falls man aber die Geschwindigkeiten der Punkte A und F oder E als bekannt annimmt, läßt sich der Geschwindigkeitsplan ohne ähnliche Punktreihen leicht konstruieren, da in diesem Falle die Bedingung des Verfassers erfüllt ist.

Nehmen wir also an, daß \bar{V}_a und \bar{V}_f gegeben sind, und tragen $\overline{oa} = \bar{V}_a$ und $\overline{of} = \bar{V}_f$ ab (Abb. 4b).

Es ergeben die Geraden $fg \perp FG$ und $ag \perp AG$ den Punkt g

" " " " $gh \perp GH$ " $ah \perp AH$ " " h

" " " " $fe \perp FE$ " $ge \perp GE$ " " e

" " " " $ec \perp EC$ " $ac \perp AC$ " " c

" " " " $ed \perp ED$ " $cd \perp CD$ " " d

Weiter finden wir die Schnittpunkte R und Q von DB mit HJ bzw. mit FK , die als Punkte der Ebene JKB aufgefaßt werden.

Im Geschwindigkeitsplan ergeben

die Geraden $hr \perp HJ$ und $dr \perp DB$ den Punkt r ,

" " $fq \perp FK$ " dr " " q .

Da die beiden Punkte R und Q dem Gliede JKB angehören, so schneidet sich $qi \perp QJ$ mit rh im Punkte i . Endlich ergibt $ik \perp JK$ auf fq den Punkt k und $ib \perp JB$ auf rd den Punkt b .

¹² L. Burmester: Lehrbuch der Kinematik. 1888. Seite 465.

¹³ F. Wittenbauer: Graphische Dynamik. 1923. Seite 271–272.

Damit ist der Geschwindigkeitsplan ohne ähnliche Punktreihen erhalten (Abb. 4b).

Ebenso einfach läßt sich der Geschwindigkeitsplan dieser Kette konstruieren, falls das Glied AC unbeweglich ist und das Glied AGH oder CDE mit einer gegebenen Geschwindigkeit antreibt.

V Beispiel: Die 12-gliedrige Gelenkkette, die der Heysinger-Steuerung entspricht (Abb. 5a).

Das Glied XII ist unbeweglich und das Glied $1AB$ treibt mit einer bekannten Geschwindigkeit an¹⁴.

Um den Geschwindigkeitsplan zu konstruieren, trägt man von einem Punkte o (Abb. 5b) $oa = \vec{V}_a$ ab, und erhält ohne weiteres:

den Punkt b	im Schnittpunkte von	$ab \perp AB$	und	$ob \perp 1B$
" "	" "	" "	" "	" "
" "	" "	" "	" "	" "
" "	" "	" "	" "	" "
" "	" "	" "	" "	" "
" "	" "	" "	" "	" "

Weiter wird der Schnittpunkt Q von HG mit $5K$ gefunden und als Punkt der Ebene FGK aufgefaßt.

Ebenso wird R als Schnittpunkt von DE mit $4L$ gefunden und als Punkt der Ebene FEL aufgefaßt.

Die Geraden	$hq \perp HG$	und	$oq \perp 5K$	ergeben den Punkt	q
" "	" "	" "	" "	" "	" "
" "	" "	" "	" "	" "	" "

Da der Punkt Q der Ebene GKF und der Punkt R der Ebene EFL angehört, so erhält man den Punkt f des Planes im Schnittpunkte von $qf \perp QF$ und $rf \perp RF$.

Endlich ergibt	$fg \perp FG$	auf der Geraden	hq	den Punkt	g
	und	$fk \perp FK$	" "	" "	k
ebenfalls	$fe \perp FE$	" "	" "	" "	e
und	$fl \perp FL$	" "	" "	" "	l

Damit ist der Geschwindigkeitsplan auch dieser Kette ohne ähnliche Punktreihen erhalten¹⁵. Ähnlicherweise läßt sich der Plan kon-

¹⁴ Eine Lösung für orthogonale Geschwindigkeiten mit fiktiven Drehpollagen findet man bei *M. Grübler*: „Getriebelehre“ 1917. Seite 84–86.

¹⁵ Eine andere Konstruktion mit orthogonalen Geschwindigkeiten siehe: *N. Rosenauer*: „Eine unmittelbare Geschwindigkeitskonstruktion der Heysinger-Steuerung für Lokomotiven“. Acta Universitatis Latviensis. Mēch. fak. serija. 1936. I. 15.

struieren, falls die Kette als frei betrachtet wird, und die Geschwindigkeiten je zweier Punkte (A und 3), (I und 1), (B und 2) oder (C und 1) gegeben sind.

Die 5 angeführten Beispiele, die außer dem letzten der „Graphischen Dynamik“ von F. Wittenbauer entnommen und dort mit ähnlichen Punktreihen gelöst sind, bestätigen den am Anfange formulierten Satz des Verfassers über die Möglichkeit der Konstruktion von Geschwindigkeitsplänen kinematischer Ketten ohne Verwendung ähnlicher Punktreihen.

kinematiskas ķēdes ar slīdriem kustošās plaknēs.

Šī darbs apskatīta ātrumu konstruēšana kinematisķās ķēdēs ar slīdriem, lietojot pašreiz ātrumu plānus, kas šeit konstruētijs kāda līdz šim literārajā neremināta šā plānu izstrāde.

Izdalīsim no kinematisķās ķēdes divas plaknes k un $(k+1)$, kas slīdītas ar slīdriem (I , a zīm.)

Pieņemsim, ka plakne k dots punkta A ātrums $V_A^{k,k}$ kustība pret nekustīgo plakni n , un plakni $(k+1)$ dots punkta B ātrums $V_B^{k+1,k}$ kustība pret to pašu nekustīgo plakni n .



1.1 (a)

1.1 (b)

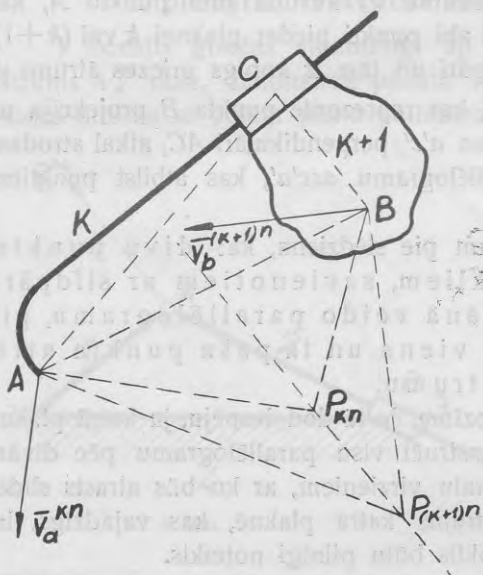
Polāro ātrumu plānu raksturīga īpašība kinēmatiskās ķēdēs ar slīdpāriem kustošās plaknēs.

Prof. Dr. ing. N. Rozenauers.

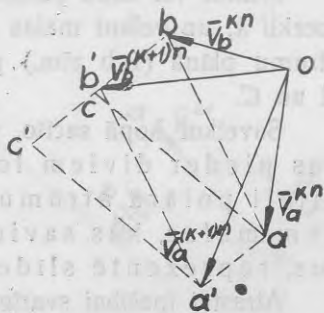
Šinī darbā apskatīta ātrumu konstrukcija kinēmatiskās ķēdēs ar slīdpāriem, lietojot polāros ātrumu plānus, pie kam noskaidrojās kāda līdz šim literatūrā neminēta šo plānu īpašība.

Izdalīsim no kinēmatiskās ķēdes divas plaknes k un $(k+1)$, kas saistītas ar slīdpāri (1. a zīm.)

Pieņemsim, ka plaknē k dots punkta A ātrums \vec{V}_a^{kn} kustībā pret nekustošo plakni n , un plaknē $(k+1)$ dots punkta B ātrums $\vec{V}_b^{(k+1)n}$ kustībā pret to pašu nekustošo plakni n .



1. a zīm.



1. b zīm.

Konstruēsim polāro ātrumu plānu, atliekot no kāda brīvi izvēlēta punkta o (1. b zīm.) ātrumu vektorus $\overline{oa} = \overline{V}_a^{kn}$ un $\overline{ob'} = \overline{V}_b^{(k+1)n}$. Ievērojot, ka visiem punktiem, kas pieder taisnei AB (1. a zīm.), ātrumu projekcijas uz šīs taisnes virzienu ir vienādas, velkam caur punktiem a un b' (1. b zīm.) divas taisnes, perpendikulāras AB virzienam. No otras puses slīdes virziens ir zināms, un tamdēļ caur tiem pašiem punktiem a un b' velkam vēl divas taisnes paralēli slīdes virzienam. Šīs taisnes ar pirmajām veido paralēlogramu $aa'b'b$, kuŗa pārējās virsotnes a' un b savienojam ar punktu o un, kā rāda nol-mi:

$$\overline{V}_a^{kn} = \overline{V}_a^{k(k+1)} + \overline{V}_a^{(k+1)n}$$

$$\overline{V}_b^{kn} = \overline{V}_b^{k(k+1)} + \overline{V}_b^{(k+1)n},$$

atrodam, ka $\overline{ob} = \overline{V}_b^{kn}$, $\overline{oa'} = \overline{V}_a^{(k+1)n}$ un $\overline{a'a} = \overline{b'b} = \overline{V}^{k(k+1)}$. Tas nozīmē, ka divas paralēlograma virsotnes a un b reprezentē punktu A un B kā locekļa k punktu, un pārējās divas virsotnes a' un b' dod to pašu punktu kā locekļa $(k+1)$ punktu, ātrumu vektoru gala punktus. Paralēlograma malas $a'a = b'b$ reprezentē locekļa k slīdes ātrumu pret locekli $(k+1)$. Pārējās divas malas $\overline{ab} = \overline{a'b'}$, kā rāda nol-ms:

$$\overline{V}_b = \overline{V}_a + \overline{V}_b^a,$$

reprezentē punkta B relatīvo ātrumu \overline{V}_b^a kustībā pret punktu A , kas savukārt ir neatkarīgs no tā, vai abi punkti pieder plaknei k vai $(k+1)$, jo šīs plaknes ir saistītas ar slīdpāri un tām ir kopīgs griezes ātrums ω .

Nemot vēl kādu punktu C , kas reprezentē punkta B projekciju uz locekli k , un velkot malas ac un $a'c'$ perpendikulāri AC , atkal atrodam ātrumu plānā (1. b zīm.) paralēlogramu $acc'a'$, kas atbilst punktiem A un C .

Savelkot kopā sacīto, nākam pie slēdziena, ka: divu punktu, kas pieder diviem locekļiem, savienotiem ar slīdpāri, attēli polārā ātrumu plānā veido paralēlogramu, pie kam malas, kas savieno viena un tā paša punkta attēlus, reprezentē slīdes ātrumu.

Atrastai īpašībai svarīga nozīme, jo tā dod iespēju, ja katrā plaknē viena punkta ātrums dots, konstruēt visu paralēlogramu pēc divām pretīngulošām virsotnēm un malu virzieniem, ar ko būs atrasts slīdes ātrums un arī otra punkta ātrums katrā plaknē, kas vajadzīgs, lai attiecīgas plaknes ātrumu stāvoklis būtu pilnīgi noteikts.

Šeit vēl jāpiezīmē, ka gadījumā, kad abi punkti atrodas uz taisnes, kas iet paralēli slīdes virzienam, minētais paralēlograms pārvēršas par

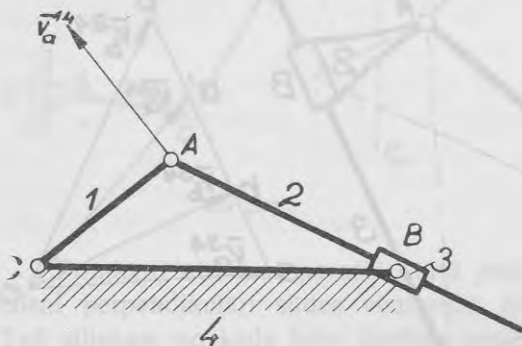
taisnstūri, jo tad malu virzieni kļūst perpendikulāri, bet gadījumā, kad abi punkti atrodas uz taisnes, kas iet perpendikulāri slīdes virzienam, paralēlograms pārvēršas par taisni, kā tas redzams (1. b zīm.) paralēlogramā $bcc'b'$.

Ātruma kontrolei un arī citām vajadzībām var viegli atrast 1. a zīm. abu plakņu momentānos griezes polus kustībā pret nekustošo plakni. Taisne, kas vilkta caur punktu A perpendikulāri \vec{V}_a^{kn} , ar taisni, kas vilkta caur punktu B perpendikulāri \vec{V}_b^{kn} , krustojas polā P_{kn} . Tāpat taisne caur punktu A perpendikulāri $\vec{V}_a^{(k+1)n}$ ar taisni caur punktu B perpendikulāri $\vec{V}_b^{(k+1)n}$ krustojas polā $P_{(k+1)n}$. Taisnei, kas savieno abus atrastos polus P_{kn} un $P_{(k+1)n}$, jābūt perpendikulārai slīdes virzienam, jo uz tās atrodas arī relatīvais pols $P_{k(k+1)}$.

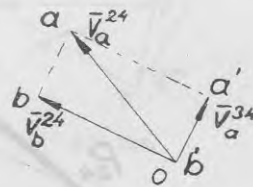
Apskatītā uzdevuma citi atrisinājumi literatūrā atrodami pie M. Grüblera¹⁾ ar ortogonāliem ātrumiem un pie F. Wittenbauera²⁾ arī ar polāro ātrumu plānu, bet kaut gan pašā plānā minētais paralēlograms ir redzams, tomēr šeit formulētā plāna īpašība nav konstatēta un nav arī noskaidrots, ka ox (Wittenbauer. Fig. 364a.) reprezentē punkta B , kā pirmās plaknes punkta, ātrumu, tā tad tānī zīmējumā punktu x varētu apzīmēt ar b_1 un punktu b ar b_2 .

1. piemērs. Svārstoša kloķa cilpa. (2. a zīm.)

1 loceklis griežas vienmērīgi ap punktu C , pie kam punkta A ātrums \vec{V}_a^{14} dots. Jākonstruē punkta A ātrums kustībā 3 pret 4 un slīdes ātrums ar polāra plāna palīdzību.



2. a zīm.



2. b zīm.

1) M. Grüber: Getriebelehre. 1917. 76. lapp. Fig. 115 b.

2) F. Wittenbauer: Graphische Dynamik. 1923. 287. lapp. Fig. 364 a.

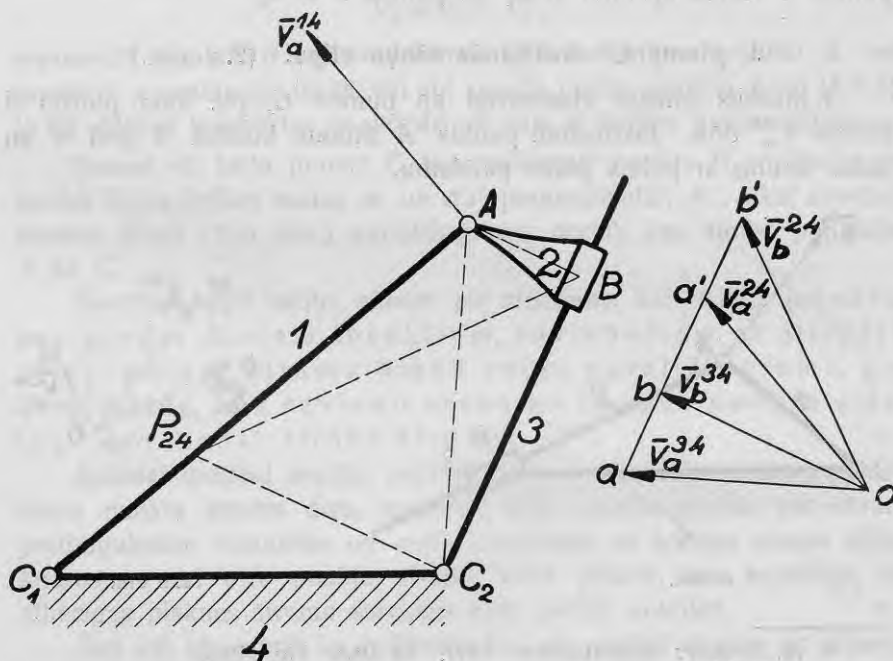
Atliekam brīvi izvēlētā punktā o (2.b zīm.) punkta A ātrumu $\vec{V}_a^{14} = \vec{V}_a^{24} = \vec{oa}$. Ievērojot, ka punkta B ātrums kustībā 3 pret 4 ir nulle, punkts b' sakrīt ar punktu o . Punkti a un b' ir paralēlograma pretīnguļošās virsotnes, bet paralēlograms tagad pārvēršas par taisnstūri, jo punkti A un B atrodas uz slidošas taisnes. Velkot caur punktiem a un o divas taisnes, paralēlas slīdes virzienam, un divas taisnes, perpendikulāras pret AB , iegūstam raksturīgo taisnstūri $abb'a'$. Šī taisnstūra malas $a'a$ un $b'b$ reprezentē slīdes ātrumu, bet oa' dod punkta A , kā trešā locekļa punkta, ātrumu \vec{V}_a^{34} kustībā pret ceturto nekustošo locekli.

2. piemērs. Rotējoša kloķa cilpa (3.a zīm.).

Pirmais loceklis vienmērīgi griežas ap punktu C_1 , pie kam punkta A ātrums \vec{V}_a^{14} dots.

Jākonstruē pārējie punktu A un B ātrumi un slīdes ātrums ar polārā plāna palīdzību.

Atliekam brīvi izvēlētā punktā o (3.b zīm.) punkta A ātrumu $\vec{V}_a^{14} = \vec{V}_a^{24} = \vec{oa}'$. Ievērojot, ka punkti A un B atrodas uz taisnes, kas



3.a zīm.

3.b zīm.

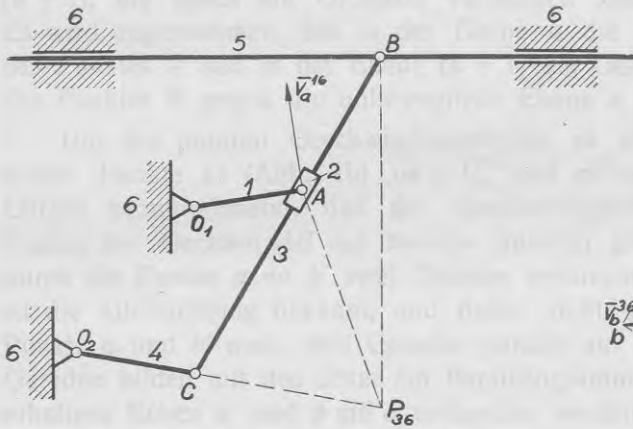
iet perpendikulāri slīdes virzienam, minētais paralēlograms pārvēršas par taisni, kuŗu velkam caur punktu a' paralēli slīdes virzienam. Uz šīs taisnes atrodas visas paralēlograma virsotnes. Virsotni b dabūjam, velkot $ob \perp BC_2$ un virsotni a , velkot $oa \perp AC_2$. Beidzot atliekam $a'b' = ab$ un atrodam arī punktu b' .

Tagad $\overline{aa'} = \overline{bb'}$ reprezentē otra locekļa slīdes ātrumu pret trešo, \overline{oa} un \overline{ob} punktu A un B , kā trešā locekļa punktu, ātrumus un $\overline{ob'}$ punkta B , kā otra locekļa punkta, ātrumu. Kā kontroli var izlietot to apstākli, ka ob' jābūt perpendikulāram taisnei BP_{24} , kur P_{24} ir otra locekļa momentānais griezes pols.

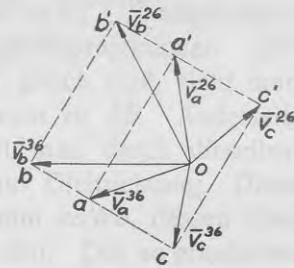
3. piemērs. Shaping — mašīna (4.a zīm.).

Pirmais loceklis, kas piedzen mēchanismu, vienmērīgi griežas ap punktu o_1 , pie kam punkta A ātrums \overline{V}_a^{16} dots.

Jākonstruē pārējie punktu A , B un C ātrumi, ka arī slīdes ātrumi kustībām 2 pret 3 un 5 pret 6.



4.a zīm.



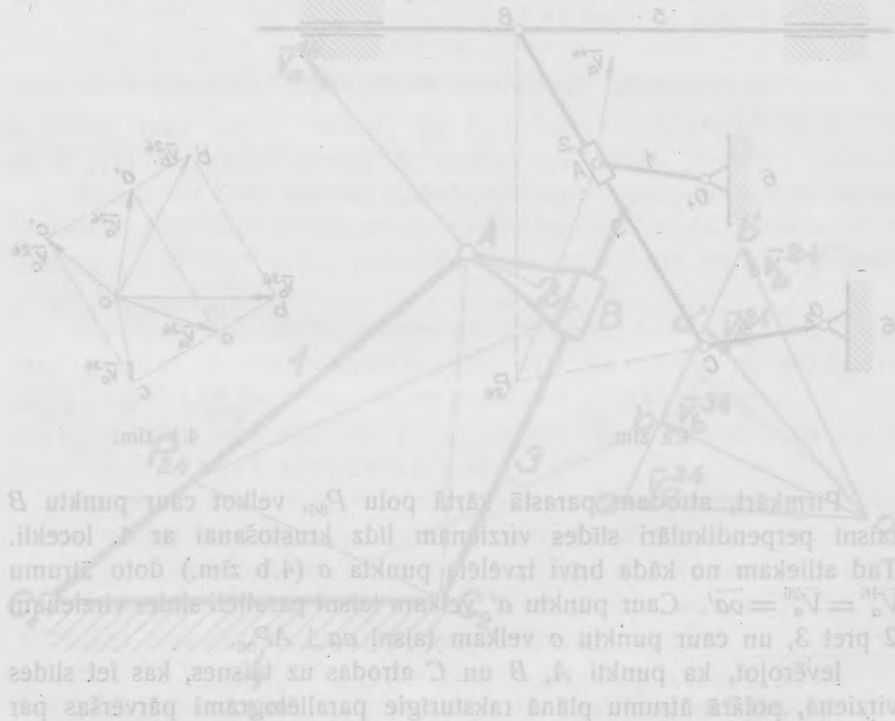
4.b zīm.

Pirmkārt, atrodam parastā kārtā polu P_{36} , velkot caur punktu B taisni perpendikulāri slīdes virzienam līdz krustošanai ar 4. locekli. Tad atliekam no kāda brīvi izvēlēta punkta o (4.b zīm.) doto ātrumu $\overline{V}_a^{16} = \overline{V}_a^{26} = \overline{oa'}$. Caur punktu a' velkam taisni paralēli slīdes virzienam 2 pret 3, un caur punktu o velkam taisni $oa \perp AP_{36}$.

Ievērojot, ka punkti A , B un C atrodas uz taisnes, kas iet slīdes virzienā, polārā ātrumu plānā raksturīgie paralēlogrami pārvēršas par

taisnstūriem, un tamdēļ caur punktiem a' un a velkam divas taisnes, perpendikulāras BC , un atrodam ob , kas iet paraleli slīdes virzienam 5 pret 6, un oc , kas iet perpendikulāri o_2c . Beidzot konstruējam uz bc taisnstūri ar augstumu aa' un savienojam punktu o ar b' un c' , ar ko polārais ātrumu plāns iegūts. Šinī plāna oa , ob un oc reprezentē punktu A, B, C ātrumus kustībā 3 pret 6, bet oa' , ob' un oc' to pašu punktu ātrumus kustībā 2 pret 6; ob ir arī slīdes ātrums 5 pret 6, un $aa' = bb' = cc'$ reprezentē slīdes ātrumu kustībā 2 pret 3.

Iesniegts fakultātei 1937. g. 29. aprīlī.



Eine besondere Eigenschaft polarer Geschwindigkeitspläne kinematischer Ketten mit Gleitpaaren in beweglichen Ebenen

von Prof. Dr. Ing. N. Rosenauer.

Autoreferat.

In der vorliegenden Arbeit ist die Konstruktion von polaren Geschwindigkeitsplänen für kinematische Ketten mit Gleitpaaren betrachtet, wobei sich eine bis jetzt in der Literatur nicht erwähnte Eigenschaft dieser Pläne herausstellt.

Aus einer kinematischen Kette greifen wir zwei Glieder k und $(k+1)$, die durch ein Gleitpaar verbunden sind, heraus (Abb. 1a). Es wird angenommen, daß in der Ebene k die Geschwindigkeit \bar{V}_a^{kn} des Punktes A und in der Ebene $(k+1)$ die Geschwindigkeit $\bar{V}_b^{(k+1)n}$ des Punktes B gegen die unbewegliche Ebene n gegeben sind.

Um den polaren Geschwindigkeitsplan zu erhalten, werden von einem Punkte O (Abb. 1b) $\overline{oa} = \bar{V}_a^{kn}$ und $\overline{ob'} = \bar{V}_b^{(k+1)n}$ abgetragen. Darauf bezugnehmend, daß die Geschwindigkeitsprojektionen aller Punkte der Geraden AB auf dieselbe einander gleich sind, zieht man durch die Punkte a und b' zwei Geraden senkrecht zu AB . Andererseits ist die Gleitrichtung bekannt, und daher zieht man durch dieselben Punkte a und b' noch zwei Geraden parallel zur Gleitrichtung. Diese Geraden bilden mit den ersten ein Parallelogramm $aa'b'b$, dessen eben erhaltene Ecken a' und b mit o verbunden werden. Die so erhaltenen Strecken stellen dar: $\overline{oa'} = \bar{V}_a^{(k+1)n}$, $\overline{ob} = \bar{V}_b^{kn}$ und $\overline{a'a} = \overline{b'b} = \bar{V}^{k(k+1)}$, wie das aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}\bar{V}_a^{kn} &= \bar{V}_a^{k(k+1)} + \bar{V}_a^{(k+1)n} \\ \bar{V}_b^{kn} &= \bar{V}_b^{k(k+1)} + \bar{V}_b^{(k+1)n}\end{aligned}$$

zu ersehen ist. Also ergeben die Ecken a und b die Endpunkte der Geschwindigkeiten der Punkte A und B , falls dieselben als Punkte der Ebene k aufgefaßt werden, und die Ecken a' und b' die Endpunkte der Geschwindigkeiten derselben Punkte A und B , falls sie als Punkte

der Ebene $(k + 1)$ aufgefaßt werden. Die Seiten $\overline{a'a} = \overline{b'b}$ des erwähnten Parallelogramms ergeben die Gleitgeschwindigkeit des Gliedes k gegen $(k + 1)$, und die übrigen Seiten $\overline{ab} = \overline{a'b'}$, wie das die Gleichung $\overline{V}_b = \overline{V}_a + \overline{V}_b^a$ zeigt, liefern die relative Geschwindigkeit \overline{V}_b^a des Punktes B gegen A , unabhängig davon, ob beide Punkte dem Gliede k oder $(k + 1)$ angehören, da beide Glieder durch ein Gleitpaar verbunden sind und folglich eine gemeinsame Winkelgeschwindigkeit ω besitzen.

Falls noch ein Punkt C , der die Projektion des Punktes B auf das Glied k darstellt, in Betracht genommen wird, findet man das den Punkten A und C entsprechende Parallelogramm $acc'a'$, indem man einfach ac und $a'c'$ senkrecht zu AC zieht.

Alles Gesagte zusammenfassend, kommt man zum folgenden Satz: Die Abbildungen zweier Punkte zweier Glieder einer kinematischen Kette, die durch ein Gleitpaar verbunden sind, bilden im polaren Geschwindigkeitsplan ein Parallelogramm, wobei die Seiten, welche die Abbildungen desselben Punktes verbinden, die Gleitgeschwindigkeit darstellen.

Die gefundene Eigenschaft ist insofern wichtig, als daß sie die Möglichkeit gibt, falls in jeder Ebene die Geschwindigkeit je eines Punktes gegeben ist, das Parallelogramm nach zwei gegenüberliegenden Ecken und Richtungen der Seiten zu konstruieren, wodurch die Gleitgeschwindigkeit und gleichzeitig auch die Geschwindigkeit eines zweiten Punktes in jeder Ebene gefunden werden.

Zu bemerken ist noch, daß, falls beide Punkte auf einer Geraden liegen, die der Gleitrichtung parallel ist, das erwähnte Parallelogramm in ein Rechteck übergeht, da dann die Seiten zueinander senkrecht stehen; im Falle aber, daß die Punkte auf einer Geraden liegen, die senkrecht zur Gleitrichtung steht, geht das Parallelogramm in eine Gerade über, wie das mit dem Parallelogramm $bcc'b'$ (Abb. 1b) der Fall ist.

Weiter können (Abb. 1a) auch leicht die beiden Drehpole der Ebenen k und $(k + 1)$ gegen die unbewegliche Ebene gefunden werden: eine Gerade durch den Punkt A senkrecht zu \overline{V}_a^{kn} schneidet die Gerade durch den Punkt B , die senkrecht zu \overline{V}_b^{kn} gezogen ist, im Drehpol P_{kn} . Ebenfalls schneiden sich die durch den Punkt A gehende Senkrechte zu $\overline{V}_a^{(k+1),n}$ und die durch den Punkt B gehende Senkrechte zu

$\bar{V}_b^{(k+1)n}$ im Drehpol $P_{(k+1)n}$. Die Gerade, welche die beiden Drehpole P_{kn} und $P_{(k+1)n}$ verbindet, muß senkrecht zur Gleitrichtung stehen, da auf derselben Geraden sich auch der relative Pol $P_{k(k+1)}$ befindet.

Andere Lösungen der gestellten Aufgabe findet man bei M. Grübler¹ mit gedrehten Geschwindigkeiten und F. Wittenbauer² auch mit polaren Plänen, aber obgleich das erwähnte Parallelogramm im Plan zu sehen ist, ist doch die hier gefundene Eigenschaft des Planes nicht festgestellt, ebenfalls ist auch nicht festgestellt, daß ox (Wittenbauer, Fig. 364a) die Geschwindigkeit des Punktes B , als Punkt des ersten Gliedes, darstellt, woraufhin der Punkt x mit b_1 und der Punkt b mit b_2 bezeichnet werden könnten.

Beispiel I: Schwingende Kurbelschleife. Abb. 2a.

Das Glied 1 treibt an und dreht sich gleichförmig um den Punkt C , wobei die Geschwindigkeit \bar{V}_a^{14} des Punktes A gegeben ist. Zu konstruieren ist mit Hilfe des polaren Geschwindigkeitsplanes die Gleitgeschwindigkeit des Gliedes 2 gegen 3 und die Geschwindigkeit des Punktes A in der Bewegung 3 gegen 4.

Von einem beliebig gewählten Punkte o (Abb. 2b) trägt man $\bar{V}_a^{14} = \bar{V}_a^{24} = \overline{oa}$ ab. Da die Geschwindigkeit des Punktes B in der Bewegung 3 gegen 4 gleich Null ist, so fällt der Punkt b' mit dem Punkte o zusammen. Die Punkte a und b' sind die gegenüberliegenden Ecken des Parallelogramms, das jetzt in ein Rechteck übergeht, da die Punkte A und B sich auf der gleitenden Geraden befinden. Das erwähnte Rechteck erhält man, indem man durch die Punkte a und o zwei Geraden parallel der Gleitrichtung und zwei Geraden senkrecht zu AB zieht. Die Seiten $a'a$ und $b'b$ des Rechtecks ergeben die Gleitgeschwindigkeit und die Seite oa' die Geschwindigkeit \bar{V}_a^{34} des Punktes A als Punkt des Gliedes 3 in der Bewegung gegen das Glied 4.

Beispiel II: Rotierende Kurbelschleife. (Abb. 3a).

Das Glied 1 treibt an und dreht sich gleichförmig um den Punkt C_1 , wobei die Geschwindigkeit \bar{V}_a^{14} des Punktes A gegeben ist.

Zu konstruieren ist mit Hilfe des polaren Geschwindigkeitsplanes die Gleitgeschwindigkeit des Gliedes 2 gegen 3 und die übrigen Geschwindigkeiten der Punkte A und B .

¹ M. Grübler: Getriebelehre. 1917. Seite 76. Fig. 115b.

² F. Wittenbauer: Graphische Dynamik. 1923. Seite 287. Fig. 364a.

Von einem beliebig gewählten Punkte o (Abb. 3b) trägt man $\overline{V_a^{14}} = \overline{V_a^{24}} = \overline{oa'}$ ab. Da die Punkte A und B sich auf einer Senkrechten zur Gleitrichtung befinden, so geht das Parallelogramm in eine Gerade über, die man durch den Punkt a' parallel zur Gleitrichtung zieht. Auf dieser Geraden befinden sich alle Ecken des Parallelogramms. Die Ecken b und a erhält man, indem man $ob \perp BC_2$ und $oa \perp AC_2$ zieht. Endlich trägt man $\overline{a'b'} = \overline{ab}$ ab und erhält den Punkt b' .

Jetzt ergeben $\overline{aa'} = \overline{bb'}$ die Gleitgeschwindigkeit des Gliedes 2 gegen 3, oa und ob die Geschwindigkeiten der Punkte A und B als Punkte des Gliedes 3 und ob' die Geschwindigkeit des Punktes B als Punkt des Gliedes 2.

Zur Kontrolle kann man den Umstand ausnutzen, daß ob' zu BP_{24} senkrecht sein muß, wo P_{24} den Drehpol des Gliedes 2 darstellt.

Beispiel III: Shaping-Maschine (Abb. 4a).

Das Glied 1 treibt an und dreht sich gleichförmig um den Punkt O_1 , wobei die Geschwindigkeit $\overline{V_a^{16}}$ des Punktes A gegeben ist. Zu konstruieren sind die Gleitgeschwindigkeiten der Glieder 2 gegen 3 und 5 gegen 6 wie auch die übrigen Geschwindigkeiten der Punkte A , B und C .

Erstens wird üblicherweise der Drehpol P_{36} gefunden, dann wird von einem beliebig gewählten Punkte o (Abb. 4b) die gegebene Geschwindigkeit $\overline{V_a^{16}} = \overline{V_a^{26}} = \overline{oa'}$ abgetragen.

Durch den Punkt a' zieht man eine Gerade parallel zur Gleitrichtung des Gliedes 2 gegen 3 und durch den Punkt o eine Gerade $oa \perp AP_{36}$.

Da die Punkte A , B und C sich auf der gleitenden Gerade befinden, so gehen im polaren Geschwindigkeitsplan die Parallelogramme in Rechtecke über, daher zieht man durch die Punkte a' und a zwei Geraden senkrecht zu BC .

Nachdem zieht man ob parallel zu der Gleitrichtung 5 gegen 6, $oc \perp O_2C$ und konstruiert auf bc ein Rechteck, dessen Höhe aa' ist. Verbindet man noch die Punkte b' und c' mit o , so ist der polare Geschwindigkeitsplan erhalten. In diesem Plan ergeben oa , ob und oc die Geschwindigkeiten der Punkte A , B und C als Punkte der Ebene 3 und oa' , ob' , oc' die Geschwindigkeiten derselben Punkte als Punkte der Ebene 2, wobei ob auch die Gleitgeschwindigkeit des Gliedes 5 gegen 6 darstellt und $\overline{aa'} = \overline{bb'} = \overline{cc'}$ die Gleitgeschwindigkeit des Gliedes 2 gegen 3.

Paātrinājumu konstrukcija
 ar relatīvo normālpaātrinājumu plānu palīdzību
 sarežģītās kinematiskās ķēdēs.

Prof. Dr. ing. N. Rozenauers.

Sastādot divu kustošās plaknes punktu A un B paātrinājumu izteiksmju¹

$$\bar{j}_a = [\bar{V}_p \bar{\omega}] + [\bar{\tau} \bar{r}_a] - \bar{r}_a \omega^2$$

$$\bar{j}_b = [\bar{V}_p \bar{\omega}] + [\bar{\tau} \cdot \bar{r}_b] - \bar{r}_b \omega^2$$

diferenci, iegūstam

$$\bar{j}_a - \bar{j}_b = [\bar{\tau}, \bar{r}_a - \bar{r}_b] - (\bar{r}_a - \bar{r}_b) \omega^2,$$

bet ievērojot, ka $\bar{r}_a - \bar{r}_b = \bar{BA}$, dabūjam

$$\bar{j}_a - \bar{j}_b = [\bar{\tau} \cdot \bar{BA}] - \bar{BA} \cdot \omega^2 \dots \dots \dots (1)$$

jeb arī

$$\bar{j}_a - \bar{j}_b = \bar{j}_a^b \dots \dots \dots (2)$$

kur \bar{j}_a^b apzīmē punkta A relatīvo paātrinājumu griezes kustībā ap B (1. a zīm.).

Izteiksme $[\bar{\tau} \bar{BA}] = \bar{j}_{at}^b$ reprezentē tangentiālo paātrinājumu un $-\bar{BA} \cdot \omega^2 = \bar{j}_{an}^b$ — normālo paātrinājumu tanī pašā kustībā.

Tā tad

$$\bar{j}_a = \bar{j}_b + \bar{j}_{an}^b + \bar{j}_{at}^b \dots \dots \dots (3)$$

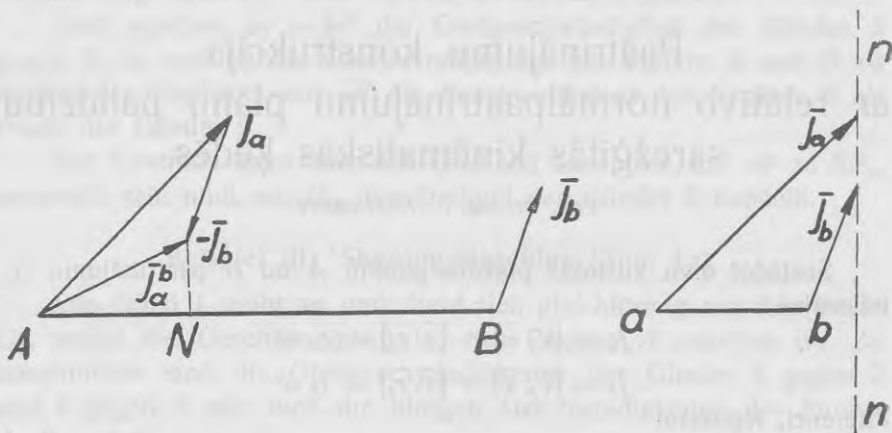
Atliksim brīvi izvēlētā punktā a (1. b zīm.) nogriezni $\bar{ab} = \bar{AN} = \bar{j}_{an}^b$ un konstruēsim punktos a un b paātrinājumus \bar{j}_a un \bar{j}_b .

Ievērojot, ka $\bar{j}_{at}^b \perp AB$, nākam uz nol-ma (3) pamata pie slēdziena, ka nupat konstruēto paātrinājumu \bar{j}_a un \bar{j}_b gala punkti atradīsies uz taisnes $n-n$, kas iet perpendikulāri AB virzienam. Šo apstākli var

¹ R. Beyer. Technische Kinematik. 1931. lapp. 236 formulas (207a), (207b).

izmantot paātrinājumu konstrukcijai kinēmatiskās ķēdēs, ja zināmi attiecīgo punktu relatīvie normālpāātrinājumi, kas viegli atrodami ar relatīvo ātrumu palīdzību.

Konstruējot kinēmatisko ķēžu šarnīru punktu relatīvos normālpāātrinājumus attiecīgos virzienos vienu pie otra, iegūto figūru varam nosaukt par „relatīvo normālpāātrinājumu plānu“.¹



1. a zīm.

1. b zīm.

Tālāk apskatīsim paātrinājumu konstrukciju ar normālpāātrinājumu plāna palīdzību, sākot ar šarnīru četrstūri un beidzot ar komplikētākiem mehānismiem.

I. piemērs. Šarnīru četrstūris. 2. a zīm.

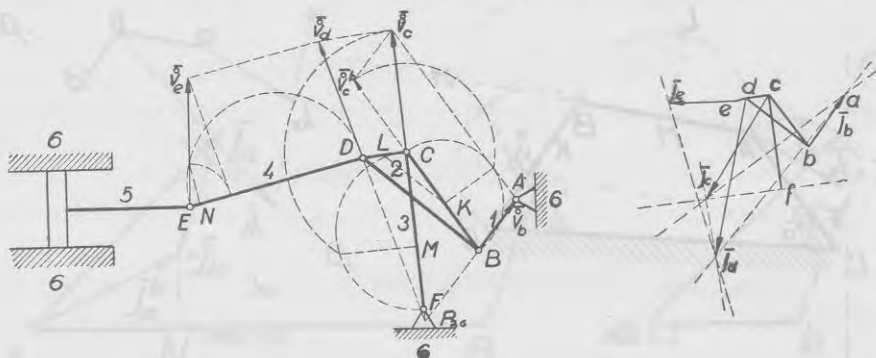
Šarnīru četrstūrī $CABD$ dots punkta A paātrinājums \vec{j}_a . Jākonstruē punkta B paātrinājums \vec{j}_b .

Apvelkam pusriņķi ap AC un caur \vec{j}_a gala punktu velkam taisni perpendikulāri pret AC , kas krusto pusriņķi punktā E . Ar radiju AE apvelkam loku, kas krusto AC punktā F , tad \overline{AF} būs punkta A ortogonālais ātrums \vec{V}_a . Velkot $FG \parallel AB$, atrodam arī punkta B ortogonālo ātrumu $\overline{BG} = \vec{V}_b$. Velkot $GH \parallel FA$, atrodam $\overline{BH} = \vec{V}_b^a$, kas ir punkta B relatīvais ortogonālais ātrums kustībā ap A .

¹ Aizrādījums uz šādu plānu konstrukciju atrodams pie *N. Žukovska* 1909. g., bet šī ideja netika literatūrā pienācīgi izmantota.

Punkta B ortogonālā ātruma mērogu izvēlamies tādu, lai tas reprezentētos ar attālumu $BA: \vec{V}_b = \overline{BA}$. Tādā gadījumā arī $\vec{j}_b = \overline{BA}$.

Ievērojot, ka pols P_{2B} atrodas locekļu AB un CF krustošanās punktā, konstruējam parastā ceļā punktu C, D un E ortogonālos ātrumus \vec{V}_c, \vec{V}_d un \vec{V}_e .



3.a zīm.

3.b zīm.

Tālāk, sastādot ātrumu diferenci $\vec{V}_c - \vec{V}_b = \vec{V}_c^b$, atrodam punkta C relatīvo ortogonālo ātrumu \vec{V}_c^b kustībā pret B un konstruējam ar pusriņķa palīdzību normālo paātrinājumu CK tanī pašā kustībā. Tādā pašā kārtā atrodam punkta C normālo paātrinājumu CM kustībā pret punktu F un punkta E normālo paātrinājumu EN kustībā pret punktu D .

Pirms pārejas uz normālpāātrinājuma plāna konstrukciju piezīmēsim, ka vispārīgi kādam kinematiskās ķēdes ternāram loceklim šarnīru relatīvie normālpāātrinājumi ir proporcionāli trijstūra malām, kuŗu veido šarnīri, ar proporcionālītātes koeficientu ω^2 , kur ω apzīmē attiecīgā locekļa griezes ātrumu. Tas nozīmē, ka šie normālpāātrinājumi veido trijstūri, kas ir līdzīgs dotam.

Velkot tamdēļ $KL \parallel BD$, atrodam, ka CL un KL ir $\triangle BCD$ pārējo virsotņu normālpāātrinājumi.

Lai iegūtu relatīvo normālpāātrinājumu plānu, atliekam (3.b zīm.): $bc = \overline{KC}$, $bd = \overline{KL}$, $de = \overline{NE}$, $cf = \overline{CM}$ un $ba = \overline{BA} = \vec{j}_b$, ar ko plāns ir iegūts.

Pašu paātrinājumu konstrukcija plānā izdarāma šādi: lai dabūtu punkta C paātrinājumu, velkam caur punktu a taisni $\perp bc$ un caur

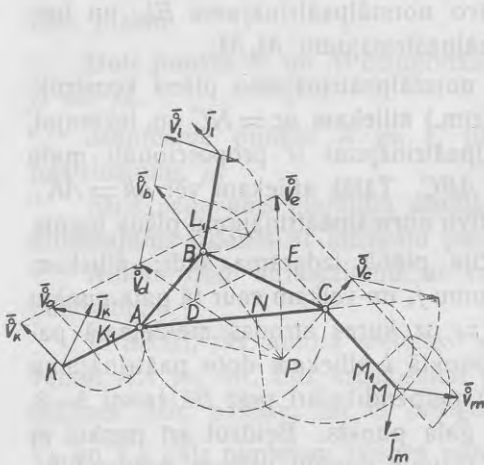
punktu f taisni $\perp cf$. Abas taisnes krustojas \bar{j}_c gala punktā. Tālāk velkot caur šo punktu taisni $\perp cd$ un caur punktu a taisni $\perp bd$, krustojšanās punktā atrodam \bar{j}_d gala punktu. Beidzot, ievērojot, ka \bar{j}_e iet slīdes virzienā, taisne, kas vilkta caur \bar{j}_d gala punktu $\perp DE$, nogriež meklējamo slīdes paātrinājumu \bar{j}_e .

Šinī piemērā jau redzams, ka autora konstrukcijas metode, salīdzinot ar parasto, ir vienkāršāka un dod labāku pārskatu par paātrinājumu sadalījumu mehānismā.

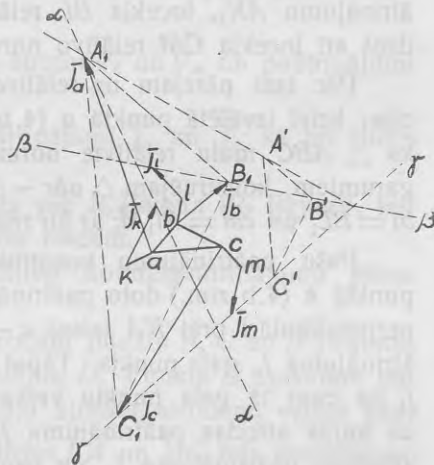
III. piemērs. Atklāta 4-locekļu šarnīru ķēde (4. a zīm.).

Pie ternāra locekļa ABC šarnīriem pievienoti 3 locekļi: AK , BL un CM . Doti punktu K , L , M ortogonālie ātrumi: \vec{V}_k , \vec{V}_l , \vec{V}_m un paātrinājumi \bar{j}_k , \bar{j}_l , \bar{j}_m .

Jākonstruē punktu A , B un C paātrinājumi \bar{j}_a , \bar{j}_b un \bar{j}_c .



4. a zīm.



4. b zīm.

Šāda uzdevuma atrisinājumi literatūrā atrodami pie M. Grüblera¹ ar fiktīviem paātrinājumiem un pie F. Wittenbauera² ar līdzīgām punktu rindām.

Autors izlieto atrisinājumam relatīvo normālpāātrinājumu plānu.

¹ M. Grübler. Getriebelehre. 1917. 152.—154. lapp.

² F. Wittenbauer. Graphische Dynamik. 1923. 299.—301. lapp.

Pirmkārt, ar autora paņēmiena palīdzību¹ konstruējam punktu A , B un C ātrumus: turpinām BL un CM līdz krustošanai ar KA punktos D un E . Šos punktus uzskatām par plaknes ABC punktiem un atrodam to ortogonālos ātrumus \vec{V}_d un \vec{V}_e , kuŗu krustošanās punktā atrodam plaknes ABC momentāno polu P . Savienojot pēdējo ar punktiem A , B un C , iegūstam arī šo punktu ortogonālos ātrumus \vec{V}_a , \vec{V}_b un \vec{V}_c (4.a zīm.).

Tālāk konstruējam punktu C un A ortogonālo ātrumu ģeometrisko diferenci $\vec{V}_c - \vec{V}_a = \vec{V}_c^a$, kas reprezentē punkta C relatīvo griezes ātrumu ap punktu A , un ar pusriņķa palīdzību, kas apvilks ap AC , konstruējam punkta C relatīvo normālpāātrinājumu \overline{CN} kustībā ap punktu A . Tas pats nogrieznis tikai pretējā virzienā, t. i. \overline{NC} reprezentēs punkta A relatīvo normālpāātrinājumu kustībā ap punktu C , tā tad \overline{CN} var vispārīgi nosaukt par malas AC relatīvo normālpāātrinājumu.

Tālāk tādā pašā kārtā atrodam arī locekļa KA relatīvo normālpāātrinājumu \overline{AK}_1 , locekļa BL relatīvo normālpāātrinājumu \overline{BL}_1 un beidzot arī locekļa CM relatīvo normālpāātrinājumu \overline{M}_1M .

Pēc tam pārejam uz relatīvo normālpāātrinājumu plāna konstrukciju: brīvi izvēlētā punktā a (4.b zīm.) atliekam $\overline{ac} = \overline{NC}$ un, ievērojot, ka $\triangle ABC$ malu relatīvie normālpāātrinājumi ir proporcionāli malu garumiem, konstruējam $\triangle abc \sim \triangle ABC$. Tālāk atliekam vēl $\overline{ak} = \overline{AK}_1$, $\overline{bl} = \overline{BL}_1$ un $\overline{cm} = \overline{M}_1M$, ar ko relatīvo normālpāātrinājumu plāns iegūts.

Pašu pāātrinājumu konstrukcija plānā izdarāma šādi: atliekam punktā k (4.b zīm.) doto pāātrinājumu \vec{j}_k un velkam caur tā gala punktu perpendikulāri pret KA taisni $\alpha - \alpha$, uz kuŗas atrodas meklējamā pāātrinājuma \vec{j}_a gala punkts. Tāpat punktā l atliekam doto pāātrinājumu \vec{j}_l un caur tā gala punktu velkam perpendikulāri pret BL taisni $\beta - \beta$, uz kuŗas atrodas pāātrinājuma \vec{j}_b gala punkts. Beidzot arī punktā m atliekam pāātrinājumu \vec{j}_m un caur tā gala punktu velkam perpendikulāri pret CM taisni $\gamma - \gamma$, uz kuŗas atrodas pāātrinājuma \vec{j}_c gala punkts.

Tagad lieta grozās ap to, lai iekonstruētu $\triangle A_1B_1C_1$, kas būtu līdzīgs dotam $\triangle ABC$ tā, lai virsotnes A_1 , B_1 un C_1 gulētu uz taisnēm $\alpha - \alpha$, $\beta - \beta$ un $\gamma - \gamma$ un trijstūru malas būtu savstarpīgi perpendikulāras. To var izdarīt tīri ģeometriskā ceļā: kaut kur velkam taisni $B'C' \perp BC$ starp taisnēm $\beta - \beta$ un $\gamma - \gamma$ un $B'A' \perp BA$, kā arī $C'A' \perp CA$.

¹ N. Rozenauers. Jauns paņēmienis ātrumu konstrukcijai sarežģītās kinēmatiskās ķēdes. LŪR. Mēch. fak. serija. I № 14. 1936.

Caur iegūto punktu A' un taisni $\beta - \beta$ un $\gamma - \gamma$ krustošanās punktu Q velkam taisni līdz krustošanai punktā A_1 ar $\alpha - \alpha$. Savienojot punktu a ar A_1 , iegūstam punkta A paātrinājumu $\overline{aA_1} = \overline{j_a}$. Beidzot konstruējam $\triangle A_1 B_1 C_1 \sim \triangle A' B' C'$, velkot $A_1 C_1 \parallel A' C'$ līdz taisnei $\gamma - \gamma$ un $A_1 B_1 \parallel A' B'$ līdz taisnei $\beta - \beta$. Savienojot vēl punktu b ar B_1 un c ar C_1 , dabūjam arī pārējos meklējamos paātrinājumus $\overline{bB_1} = \overline{j_b}$ un $\overline{cC_1} = \overline{j_c}$.

Arī šinī piemērā redzams, ka autora konstrukcija ir vienkāršāka par līdz šim lietotām konstrukcijām, jo pēc Grüblera metodes paātrinājumu konstrukcija jāizdara 3 reizes apkārt visiem punktiem, divreiz fiktīviem paātrinājumiem un trešo reizi īstiem paātrinājumiem.

IV. piemērs. Atklāta 4-locekļu ķēde ar vienu slīdpāri pret nekustošo plakni (5. a zīm.).

Šeit ņemta tā pati ķēde kā III. piemērā, kuŗa sastāv no viena ternāra locekļa ABC un pie tā ar šarnīriem pievienotiem 3 locekļiem AK , CM un BL , bet starpība ir tā, ka loceklim BL ir slīdpāris pret nekustošo plakni.

Doti punktu K un M ortogonālie ātrumi $\overline{V_k}$ un $\overline{V_m}$ un paātrinājumi $\overline{j_k}$ un $\overline{j_m}$.

Jākonstruē punktu A un C paātrinājumi $\overline{j_a}$ un $\overline{j_c}$, kā arī slīdes paātrinājums $\overline{j_b}$.

Šāds uzdevums literātūrā atrodams pie R. Beijera (R. Beyer)¹, kur atrisinājums izdarīts ar līdzīgām punktu rindām.

Autors dod atrisinājumu ar relatīvo normālpaātrinājumu plāna palīdzību.

Pirmkārt, pēc autora metodes² atrodam punktu A , C un B ātrumus, velkot KA un MC līdz krustošanai punktā D . Punktu D uzskatām par plaknes ABC punktu, un tā ortogonālo ātrumu atrodam, velkot caur $\overline{V_k}$ un $\overline{V_m}$ gala punktiem taisnes paralēlas KA un MC līdz krustošanai. Punkta D ortogonālais ātrums $\overline{V_d}$ krustojas ar taisni BN , kas vilkta caur punktu B perpendikulāri slīdes virzienam, plaknes ABC momentānā griezes polā P .³

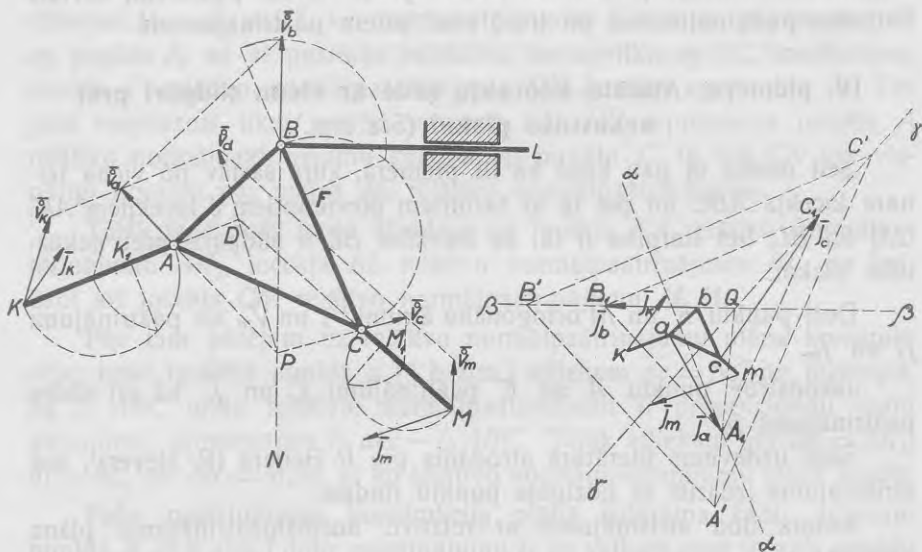
¹ R. Beyer. Technische Kinematik. 1931. 271.—272. lapp.

² N. Rosenauer. „Über die Geschwindigkeitskonstruktion kinematischer Ketten“. Zeitschr. f. angew. Math. und Mech. Band 17. Heft 3. 1937.

³ Citu pola noteikšanas paņēmieni sk. N. Rozenauers: „Heizingera kulises mēchanisma tiešais ātruma konstrukcijas paņēmieni. LUR. Mēch. fakult. serija I sējums. № 15. 1936.

Savienojot atrasto polu ar punktiem A un C , atrodam, kā parasts, šo punktu ortogonālos ātrumus \vec{V}_a un \vec{V}_c un pēc tam arī slides ātrumu \vec{V}_b .

Tālāk konstruējam punktu B un C ortogonālo ātrumu ģeometrisku diferenci $\vec{V}_b - \vec{V}_c = \vec{V}_b^c$, kas reprezentē punkta B relatīvo griezes ātrumu ap punktu C , un ar pusriņķa palīdzību atrodam normālo paātrinājumu BF tanī pašā kustībā, kas vispārīgi ir malas BC relatīvais normālpāātrinājums. Tādā pašā kārtā atrodam arī locekļu AK un CM relatīvos normālpāātrinājumus AK_1 un CM_1 .



5. a zīm.

5. b zīm.

Pēc tam pārejam uz relatīvo normālpāātrinājumu plāna konstrukciju: kādā brīvi izvēlētā punktā b (5. b zīm.) atliekam $\overline{bc} = \overline{BF}$ un konstruējam $\triangle bca \sim \triangle BCA$. Punktos a un c atliekam $\overline{ak} = \overline{AK_1}$ un $\overline{cm} = \overline{CM_1}$, ar ko relatīvo normālpāātrinājumu plāns iegūts.

Tālāk pārejam uz paātrinājumu konstrukciju: atliekam punktā k doto paātrinājumu \vec{j}_k , un caur tā gala punktu velkam perpendikulāri pret KA taisni $\alpha-\alpha$, uz kuŗas meklējams paātrinājuma \vec{j}_a gala punkts. Tāpat punktā m atliekam doto paātrinājumu \vec{j}_m , un caur tā gala punktu velkam perpendikulāri pret CM taisni $\gamma-\gamma$, uz kuŗas meklējams paātrinājuma \vec{j}_c gala punkts. Punkta B paātrinājums \vec{j}_b sakrīt ar slides virzienu, un tamdēļ trešā taisne $\beta-\beta$ iet tieši caur punktu b paralēli slides virzienam.

Tagad lieta grozās ap to, lai iekonstruētu $\triangle A_1B_1C_1$, kas būtu līdzīgs $\triangle ABC$, tā, lai virsotnes A_1 , B_1 , un C_1 atrastos uz taisnēm $\alpha - \alpha$, $\beta - \beta$ un $\gamma - \gamma$ un trijstūru malas būtu savstarpīgi perpendikulāras. Šim nolūkam velkam kaut kur starp taisnēm $\beta - \beta$ un $\gamma - \gamma$ taisni $B'C' \perp BC$ un tālāk arī $B'A' \perp BA$ un $C'A' \perp CA$. Caur punktu A' un taisni $\beta - \beta$ un $\gamma - \gamma$ krustošanās punktu Q velkam taisni, kas krustojas ar taisni $\alpha - \alpha$ punktā A_1 . Savienojot punktu a ar A_1 , iegūstam punkta A paātrinājumu $\overline{aA_1} = \overline{j_a}$. Beidzot konstruējam $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A'B'C'$ un atrodam $\overline{cC_1} = \overline{j_c}$ un slīdes paātrinājumu $\overline{bB_1} = \overline{j_b}$.

Autora konstrukcijas metodes priekšrocība, salīdzinot ar līdzīgu punktu rindu metodi, izpaužas tanī apstākļī, ka $\triangle A_1B_1C_1$ un $\triangle ABC$ malas ir savstarpīgi perpendikulāras, kas ļoti atvieglina konstrukciju.

V. piemērs. 8-locekļu slēgta šarnīru ķēde.

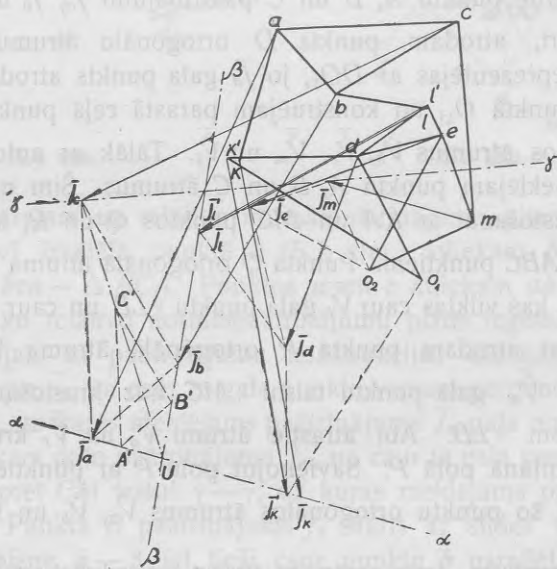
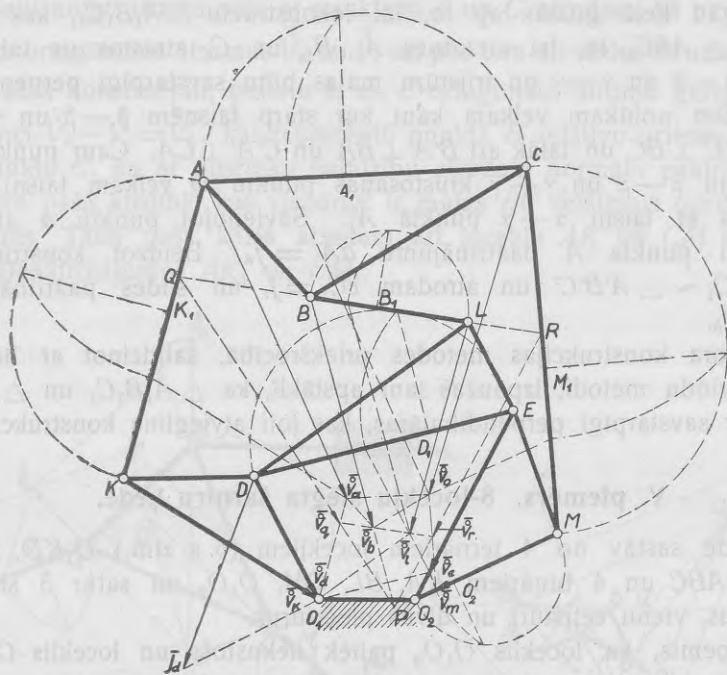
Ķēde sastāv no 4 ternāriem locekļiem (6. a zīm.) O_1KD , DLE , O_2ME , ABC un 4 bināriem KA , BL , CM , O_1O_2 un satur 3 slēgtus poligonus, vienu četrstūri un divus piecstūrus.

Pieņemts, ka loceklis O_1O_2 paliek nekustošs un loceklis O_1KD piedzen mēchanismu, pie kam punkta D paātrinājums $\overline{j_d}$ dots.

Jākonstruē punktu A , B un C paātrinājumi $\overline{j_a}$, $\overline{j_b}$ un $\overline{j_c}$.

Pirmkārt, atrodam punkta D ortogonālo ātrumu $\overline{V_d}$, kas šinī gadījumā reprezentējas ar DO_1 , jo $\overline{j_d}$ gala punkts atrodas uz normāles pret O_1D punktā O_1 , un konstruējam parastā ceļā punktu K , E , M un L ortogonālos ātrumus $\overline{V_k}$, $\overline{V_e}$, $\overline{V_m}$ un $\overline{V_l}$. Tālāk ar autora paņēmiena¹ palīdzību meklējam punktu A , B un C ātrumus. Šim nolūkam velkam BL līdz krustošanai ar KA un MC punktos Q un R , kurus uzskatām par locekļa ABC punktiem. Punkta Q ortogonālā ātruma $\overline{V_q}$ gala punktu dod taisnes, kas vilktas caur $\overline{V_l}$ gala punktu $\parallel LB$ un caur $\overline{V_k}$ gala punktu $\parallel KA$. Tāpat atrodam punkta R ortogonālā ātruma $\overline{V_r}$ gala punktu, velkot caur $\overline{V_m}$ gala punktu taisni $\parallel MC$ līdz krustošanai ar iepriekš ievilkto taisni $\parallel LB$. Abi atrastie ātrumi $\overline{V_q}$ un $\overline{V_r}$ krustojas plaknes ABC momentānā polā P . Savienojot polu P ar punktiem A , B un C , atrodam arī šo punktu ortogonālos ātrumus $\overline{V_a}$, $\overline{V_b}$ un $\overline{V_c}$.

¹ N. Rozenauers. Jauns paņēmieni ātrumu konstrukcijai sarežģītās kinēmatiskās ķēdēs. L. Ū. R. Mēch. fak. serija. T I. № 14. 1936.



6. a zīm. un 6. b zīm.

Tālāk konstruējam ar relatīvo ātrumu palīdzību relatīvos normālpaātrinājumus:

CA_1	ir normālpaātrinājums vienā no $\triangle ABC$ malām AC
CM_1	" " loceklim CM
AK_1	" " " AK
LB_1	" " " LB
D_1E	" " vienā no $\triangle DEL$ malām DE
MO_2'	" " " " $\triangle O_2ME$ malām O_2M

Pēc tam pārejām uz relatīvo normālpaātrinājumu plāna konstrukciju: atliekam kādā brīvi izvēlēta punktā a (6.b zīm.) nogriežni $\overline{ac} = \overline{A_1C}$ un konstruējam $\triangle abc \sim \triangle ABC$. Tālāk atliekam $\overline{cm} = \overline{CM_1}$, $\overline{ak} = \overline{AK_1}$, $\overline{bl} = \overline{B_1L}$, $\overline{mo_2} = \overline{MO_2'}$ un konstruējam $\triangle mo_2e \sim \triangle MO_2'E$, $\overline{ed} = \overline{ED_1}$ un $\triangle edl' \sim \triangle EDL$. Šeit var gadīties, ka punkts l' nesakrīt ar punktu l , tas nozīmē, ka poligons $lbcme'l'$ neslēdzas, un, ja vienam no šiem punktiem paātrinājums atrasts, tad to var pārnest uz otru punktu un turpināt paātrinājumu konstrukciju. Pēc tam atliekam vēl $\overline{do_1} = \overline{DO_1}$ un konstruējam $\triangle do_1k' \sim \triangle DO_1K$. Šeit atkal var gadīties, ka punkts k' nesakrīt ar punktu k un poligons $kablck'$ arī neslēdzas. Šādā gadījumā jārikojas tāpat, kā bija aizrādīts. Ar šo relatīvo normālpaātrinājumu plāns iegūts, un var pāriet uz pašu paātrinājumu konstrukciju.

Pirmkārt, atliekam punktā d doto paātrinājumu $\overline{j_d}$. Paātrinājuma $\overline{j_e}$ gala punktu dod divas taisnes, kas vilktas caur $\overline{j_d}$ gala punktu $\perp de$ un caur punktu $o_2 \perp o_2e$. Paātrinājuma $\overline{j_m}$ gala punktu dod taisnes, kas vilktas caur $\overline{j_e}$ galapunktu $\perp em$ un caur punktu $o_2 \perp o_2m$.

Caur atrasto $\overline{j_m}$ gala punktu velkam perpendikulāri mc taisni $\gamma - \gamma$, uz kuŗas atradīsies $\overline{j_c}$ gala punkts, bet tagad meklējam $\overline{j_i}$, velkot caur $\overline{j_d}$ gala punktu taisni $\perp DL$ un caur $\overline{j_e}$ gala punktu taisni $\perp EL$. Abu taiŗņu krustoŗanās punktu savienojam ar punktu l' un iegūstam $\overline{j_i}'$, kuŗu savukārt pārnesam uz punktu l un caur $\overline{j_l}$ gala punktu velkam taisni $\beta - \beta \perp BL$. Uz šīs taisnes atradīsies $\overline{j_b}$ gala punkts, bet tālāk meklējam vēl $\overline{j_k}$, velkot caur $\overline{j_d}$ gala punktu taisni $\perp DK$ un caur punktu o_1 taisni $\perp O_1K$. Abu taiŗņu krustoŗanās punktu savienojam ar k' un iegūstam $\overline{j_k}'$, pēdējo pārnesam uz punktu k , iegūstot $\overline{j_k}$, caur kuŗa gala punktu velkam taisni $\alpha - \alpha \perp KA$. Uz šīs taisnes meklējams $\overline{j_a}$ gala punkts.

Kad visas trīs taisnes $\alpha - \alpha$, $\beta - \beta$ un $\gamma - \gamma$ atrastas, lietojam to paŗu paŗēmienu kā III. piemēŗā, t. i. starp $\alpha - \alpha$ un $\beta - \beta$ kaut kur

ievēlam taisni $A'B' \perp AB$, tālāk vākam $A'C' \perp AC$ un $B'C' \perp BC$ un savienojam punktu C' ar punktu U , kur krustojas taisne $\alpha - \alpha$ ar $\beta - \beta$. Taisnes UC' krustojšanās punkts ar $\gamma - \gamma$ dod paātrinājuma \bar{j}_c gala punktu. Konstruējot trijstūri, līdzīgu $\triangle A'B'C'$, atrodam arī pārējo meklējamo paātrinājumu \bar{j}_a un \bar{j}_b gala punktus.

Kopsavilkums: Kā redzams apskatītos piemēros, paātrinājumu konstrukcija kinēmatiskās ķēdēs izdarāma samērā vienkārši un pārskatāmi ar relatīvo normālpāātrinājumu plāna palīdzību, pie kam vajadzīgos ortogonālos ātrumus un relatīvos normālpāātrinājumus var konstruēt pašas ķēdes zīmējumā.

Iesniegts fakultātei 1937. g. 29. aprīlī.

Die Beschleunigungs-konstruktion kinematischer Ketten mit Hilfe von Plänen relativer Normalbeschleunigungen.

Prof. Dr. Ing. N. Rosenauer.

Autoreferat.

Die Differenz der Beschleunigungs-Ausdrücke¹ zweier Punkte A und B einer beweglichen Ebene

$$\bar{j}_a = [\bar{V}_p \bar{\omega}] + [\bar{\tau} \cdot \bar{r}_a] - \bar{r}_a \omega^2$$

$$\bar{j}_b = [\bar{V}_p \bar{\omega}] + [\bar{\tau} \cdot \bar{r}_b] - \bar{r}_b \omega^2$$

ergibt bekanntlich

$$\bar{j}_a - \bar{j}_b = [\bar{\tau}, \bar{r}_a - \bar{r}_b] - (\bar{r}_a - \bar{r}_b) \omega^2$$

da aber $\bar{r}_a - \bar{r}_b = \overline{BA}$ ist, so erhält man

$$\bar{j}_a - \bar{j}_b = [\bar{\tau} \cdot \overline{BA}] - \overline{BA} \cdot \omega^2 \dots \dots \dots (1)$$

oder auch

$$\bar{j}_a - \bar{j}_b = \bar{j}_a^b \dots \dots \dots (2)$$

wo \bar{j}_a^b die relative Beschleunigung des Punktes A gegen B darstellt (Abb. 1a). Der Ausdruck $[\bar{\tau} \cdot \overline{BA}] = \bar{j}_{at}^b$ stellt dar die tangentielle Beschleunigung und $-\overline{BA} \omega^2 = \bar{j}_{an}^b$ die normale Beschleunigung in derselben Bewegung.

Also ist

$$\bar{j}_a = \bar{j}_b + \bar{j}_{an}^b + \bar{j}_{at}^b \dots \dots \dots (3)$$

Von einem beliebig gewählten Punkte a (Abb. 1b) trägt man $\overline{ab} = \overline{AN} = \bar{j}_{an}^b$ ab, an dessen Enden noch die Beschleunigungen \bar{j}_a und \bar{j}_b abgetragen werden.

Da $\bar{j}_{at}^b \perp \overline{AB}$ ist, so befinden sich die Endpunkte der eben abgetragenen Beschleunigungen \bar{j}_a und \bar{j}_b auf einer Geraden $n - n$, die senkrecht zu \overline{AB} ist. Diesen Umstand kann man zur Beschleunigungs-konstruktion kinematischer Ketten ausnutzen, falls die relativen Normalbeschleunigungen der betreffenden Punkte bekannt sind, dieselben

¹ R. Beyer. Technische Kinematik. 1931. S. 236. Formeln (207a), (207b).

lassen sich aber mit Hilfe von relativen Geschwindigkeiten leicht konstruieren. Konstruiert man die relativen Normalbeschleunigungen der Gelenkpunkte einer kinematischen Kette hintereinander in den entsprechenden Richtungen, so kann man den erhaltenen Linienzug als „Plan der relativen Normalbeschleunigungen“ bezeichnen¹.

Weiter ist die Beschleunigungskonstruktion mit Hilfe der genannten Pläne an mehreren Beispielen, angefangen mit dem Gelenkviereck, durchgeführt.

Beispiel I: Das Gelenkviereck. Abb. 2a.

Es sei im Gelenkviereck $CABD$ die Beschleunigung \bar{j}_a des Punktes A gegeben. Gesucht ist die Beschleunigung \bar{j}_b des Punktes B .

Es wird üblicherweise aus der Beschleunigung \bar{j}_a die gedrehte Geschwindigkeit $\bar{V}_a = \overline{AF}$ des Punktes A konstruiert. Die Gerade FG schneidet die gedrehte Geschwindigkeit $\bar{V}_b = \overline{BG}$ des Punktes B ab. Die Gerade $GH \parallel FA$ schneidet die relative Geschwindigkeit $\bar{V}_b^a = \overline{BH}$ des Punktes B um A ab. Mit Hilfe derselben wird die Normalbeschleunigung BM des Punktes B um A konstruiert und gleichfalls die Normalbeschleunigung BK des Punktes B um D .

Von einem beliebig gewählten Punkte b (Abb. 2b) trägt man $\overline{ba} = \overline{BM}$ und $\overline{bd} = \overline{BK}$ ab. Der erhaltene Linienzug abd ist der Plan der Normalbeschleunigungen. Die Seite ac ist hier nicht nötig, da die Beschleunigung \bar{j}_a des Punktes A gegeben ist.

Diese Beschleunigung wird jetzt vom Punkte a abgetragen, und durch den Endpunkt eine Gerade $\alpha - \alpha$ senkrecht zu AB gezogen. Auf dieser Geraden befindet sich auch der Endpunkt von \bar{j}_b . Andererseits ist die Beschleunigung des Punktes D gleich Null, also geht die zweite Gerade $\beta - \beta$ direkt durch den Punkt d senkrecht zu BD . Verbindet man den Schnittpunkt von $\alpha - \alpha$ und $\beta - \beta$ mit dem Punkte b , so erhält man die gesuchte Beschleunigung \bar{j}_b .

Die hier angeführte Konstruktion besitzt keinen großen Vorzug im Vergleich zu der üblichen Konstruktion und ist nur als Übergang zu komplizierteren Fällen zu betrachten.

¹ Einen Hinweis zur Konstruktion solcher Pläne findet man bei *N. Joukovsky* 1909, aber diese Idee wurde im Schrifttum nicht genügend ausgenutzt.

Beispiel II: Das Getriebe von Holst.

Die Beschleunigungs konstruktion an diesem Getriebe findet man in der Literatur bei M. Grübler¹; es muß aber hinzugefügt werden, daß die dort in der Abb. 171 erhaltenen Beschleunigungen falsch sind.

Das Getriebe (Abb. 3a) besteht aus 6 Gliedern, von denen das erste mit konstanter gegebener Geschwindigkeit antreibt. Gesucht ist die Beschleunigung 5 gegen 6.

Einfachheitshalber wird der Geschwindigkeits-Maßstab so gewählt, daß die gedrehte Geschwindigkeit des Punktes B $\vec{V}_b = \overline{BA}$ ist. Dann ist auch die Beschleunigung $\vec{j}_b = \overline{BA}$. Darauf bezugnehmend, daß der Drehpol P_{26} sich im Schnittpunkt der Glieder AB und CF befindet, findet man üblicherweise die gedrehten Geschwindigkeiten \vec{V}_c, \vec{V}_d und \vec{V}_e der Punkte C, D, E .

Weiter wird die Differenz $\vec{V}_c - \vec{V}_b = \vec{V}_c^b$ gebildet, die die relative gedrehte Geschwindigkeit des Punktes C gegen B darstellt, und die relative Normalbeschleunigung CK in derselben Bewegung konstruiert. Ebenso werden auch die relativen Normalbeschleunigungen CM des Punktes C gegen F und EN des Punktes E gegen D konstruiert.

Zur Konstruktion der relativen Normalbeschleunigungen ternärer Glieder soll noch bemerkt werden, daß dieselben den Dreiecksseiten mit dem Faktor ω^2 proportional sind, wo ω die Winkelgeschwindigkeit des betreffenden Gliedes bezeichnet. Das bedeutet aber, daß die Normalbeschleunigungen ein Dreieck bilden, das dem gegebenen ähnlich ist. Zieht man daher $KL \parallel BD$, so sind CL und KL die Normalbeschleunigungen der übrigen Ecken des $\triangle BCD$.

Den Plan der relativen Normalbeschleunigungen erhält man (Abb. 3b) durch das Abtragen folgender Strecken: $bc = KC, bd = KL, de = NE, cf = CM$ und $ba = \overline{BA} = \vec{j}_b$.

Die Konstruktion der Beschleunigungen im Plan wird folgendermaßen durchgeführt: eine Gerade durch den Punkt $a \perp bc$ und eine Gerade durch den Punkt $f \perp cf$ schneiden sich im Endpunkte von \vec{j}_c . Eine Gerade durch denselben $\perp cd$ und eine andere durch den Punkt $a \perp bd$ gezogen, schneiden sich im Endpunkt von \vec{j}_d .

Endlich, da die Gleitbeschleunigung mit der Gleitrichtung zusammenfällt, schneidet die Gerade durch den Endpunkt von $\vec{j}_d \perp DE$ die gesuchte Gleitbeschleunigung \vec{j}_e ab.

¹ M. Grübler, Getriebelehre. 1917. Seite 150—152.

An diesem Beispiel erkennt man schon, daß die Konstruktion des Verfassers im Vergleich zu den üblichen einfacher ist und einen besseren Überblick über die Beschleunigungen einzelner Punkte bietet.

Beispiel III: Eine offene 4-gliedrige Gelenkkette (Abb. 4a).

Am ternären Gliede ABC sind die Glieder AK , BL und CM durch Gelenke befestigt. Es seien die gedrehten Geschwindigkeiten \vec{V}_k , \vec{V}_l und \vec{V}_m wie auch die Beschleunigungen \vec{j}_k , \vec{j}_l und \vec{j}_m der Punkte K , L und M gegeben.

Gesucht sind die Beschleunigungen \vec{j}_a , \vec{j}_b und \vec{j}_c der Punkte A , B und C .

Die gestellte Aufgabe ist bei M. Grübler¹ mit fiktiven Beschleunigungen und bei F. Wittenbauer² mit ähnlichen Punktreihen gelöst. Der Verfasser gibt eine Lösung mit Hilfe des Planes relativer Normalbeschleunigungen.

Erstens wird zur Konstruktion der Geschwindigkeiten der Punkte A , B und C das Verfahren des Verfassers³ angewandt: es werden BL und CM bis zu den Schnittpunkten D und E mit AK gezogen. Die Punkte D und E werden als Punkte der Ebene ABC aufgefaßt, und deren gedrehte Geschwindigkeiten \vec{V}_d und \vec{V}_e gefunden. Im Schnittpunkt dieser Geschwindigkeiten findet man den Drehpol P der Ebene ABC , den man mit den Punkten A , B und C verbindet und somit die gedrehten Geschwindigkeiten \vec{V}_a , \vec{V}_b und \vec{V}_c erhält.

Weiter findet man die Differenz $\vec{V}_c - \vec{V}_a = \vec{V}_c^a$, die die relative Geschwindigkeit des Punktes C um A darstellt und konstruiert mit Hilfe des Thaleschen Halbkreises die relative Normalbeschleunigung \overline{CN} in derselben Bewegung. Derselbe Abschnitt \overline{NC} , aber entgegengesetzt gerichtet, ist die Normalbeschleunigung des Punktes A um C , also kann man CN überhaupt als relative Normalbeschleunigung der Seite AC betrachten.

Ähnlicherweise werden auch die relativen Normalbeschleunigungen AK_1 , BL_1 und M_1M der Glieder AK , BL und CM bestimmt.

¹ M. Grübler. Getriebelehre. 1917. Seite 152—154.

² F. Wittenbauer. Graphische Dynamik. 1923. Seite 299—301.

³ N. Rosenauer. Ein neues Verfahren zur Geschwindigkeitskonstruktion kinematischer Ketten. Acta Universitatis Latviensis. T I. Nr. 14. 1936.

Weiter geht man zur Konstruktion des Planes relativer Normalbeschleunigungen über: von einem Punkte a (Abb. 4b) trägt man $\overline{ac} = \overline{NC}$ ab und konstruiert das $\triangle abc \sim \triangle ABC$. Nachdem werden $\overline{ak} = \overline{AK_1}$, $\overline{bl} = \overline{BL_1}$ und $\overline{cm} = \overline{M_1M}$ abgetragen, und damit ist der Plan erhalten.

Die Beschleunigungskonstruktion wird am Plane folgendermaßen durchgeführt: vom Punkte k wird die gegebene Beschleunigung $\overline{j_k}$ abgetragen, und durch den Endpunkt derselben eine Gerade $\alpha - \alpha$ senkrecht zu KA gezogen. Auf dieser Geraden befindet sich auch der Endpunkt der gesuchten Beschleunigung $\overline{j_a}$. Ebenso werden die Beschleunigungen $\overline{j_l}$ und $\overline{j_m}$ von den Punkten l und m abgetragen, und durch ihre Endpunkte die Geraden $\beta - \beta$ senkrecht zu BL und $\gamma - \gamma$ senkrecht zu CM gezogen. Auf der Geraden $\beta - \beta$ befindet sich der Endpunkt von $\overline{j_b}$ und auf $\gamma - \gamma$ der Endpunkt von $\overline{j_c}$.

Jetzt besteht die Aufgabe darin, daß ein $\triangle A_1B_1C_1$, das dem gegebenen $\triangle ABC$ ähnlich ist, so konstruiert werden muß, daß die Punkte A_1 , B_1 und C_1 sich auf den Geraden $\alpha - \alpha$, $\beta - \beta$ und $\gamma - \gamma$ befinden und die entsprechenden Seiten zueinander senkrecht sind. Das kann rein geometrisch gemacht werden: zwischen den Geraden $\beta - \beta$ und $\gamma - \gamma$ wird eine Gerade $B'C' \perp BC$ gezogen und ebenso auch $B'A' \perp BA$ und $C'A' \perp CA$. Eine Gerade, die durch den erhaltenen Punkt A' und den Schnittpunkt Q von $\beta - \beta$ mit $\gamma - \gamma$ gezogen ist, trifft die Gerade $\alpha - \alpha$ im Punkte A_1 , der den Endpunkt von $\overline{aA_1} = \overline{j_a}$ ergibt. Endlich konstruiert man $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A'B'C'$, verbindet b mit B_1 , c mit C_1 und erhält die gesuchten Beschleunigungen $\overline{bB_1} = \overline{j_b}$ und $\overline{cC_1} = \overline{j_c}$.

Auch an diesem Beispiel sieht man, daß die Konstruktion des Verfassers einfacher ist als die bisher bekannten, da nach Grübler die Beschleunigungskonstruktion dreimal durchgeführt werden muß, zweimal für fiktive Beschleunigungen und das dritte Mal für die wahren Beschleunigungen.

Beispiel IV: Eine offene 4-gliedrige Kette mit einem Gleitpaar gegen die feste Ebene (Abb. 5a).

Hier wird dieselbe Kette wie im Beispiel III betrachtet, die aus einem ternären Gliede ABC und 3 Gliedern AK , CM und BL besteht, die durch Drehpaare am Gliede ABC befestigt sind. Der Unterschied besteht darin, daß das Glied BL ein Gleitpaar gegen die feste Ebene besitzt.

Es seien die gedrehten Geschwindigkeiten \vec{V}_k und \vec{V}_m und die Beschleunigungen \vec{j}_k und \vec{j}_m der Punkte K und M gegeben.

Gesucht sind die Beschleunigungen \vec{j}_a und \vec{j}_c der Punkte A und C und die Gleitbeschleunigung \vec{j}_b .

Die gestellte Aufgabe ist bei R. Beyer¹ mit ähnlichen Punktreihen gelöst.

Der Verfasser gibt eine Lösung mit Hilfe des Planes relativer Normalbeschleunigungen.

Erstens werden nach dem Verfahren des Verfassers² die Geschwindigkeiten der Punkte A , C und B gefunden, wozu KA und MC bis zum Schnittpunkte D gezogen werden. Der Punkt D wird als Punkt der Ebene ABC aufgefaßt und seine gedrehte Geschwindigkeit \vec{V}_d mit den zwei Geraden durch die Endpunkte von \vec{V}_k und \vec{V}_m parallel zu KA und MC gefunden. Der Vektor \vec{V}_d schneidet die Gerade BN , die durch den Punkt B senkrecht zur Gleitrichtung gezogen ist, im Drehpol P der Ebene ABC ³. Verbindet man den Drehpol P mit den Punkten A und C , so findet man die gedrehten Geschwindigkeiten \vec{V}_a und \vec{V}_c und danach auch die gedrehte Gleitgeschwindigkeit \vec{V}_b .

Weiter findet man die Differenz $\vec{V}_b - \vec{V}_c = \vec{V}_b^c$, die die relative Geschwindigkeit des Punktes B um den Punkt C darstellt, und mit Hilfe des Thales'schen Halbkreises auch die relative Normalbeschleunigung BF in derselben Bewegung, die überhaupt als relative Normalbeschleunigung der Seite BC anzusehen ist. Ähnlicherweise werden auch die relativen Normalbeschleunigungen AK_1 und CM_1 der Glieder AK und CM gefunden.

Weiter geht man zur Konstruktion des Planes relativer Normalbeschleunigungen über: von einem beliebig gewählten Punkte b (Abb. 5.b) wird $\vec{bc} = \vec{BF}$ abgetragen und das $\triangle bca \sim \triangle BCA$ konstruiert. Von den Punkten a und c werden noch $\vec{ak} = \vec{AK}_1$ und $\vec{cm} = \vec{CM}_1$ abgetragen, und der Plan ist erhalten.

¹ R. Beyer. Technische Kinematik. 1931. Seite 271—272.

² N. Rosenauer: „Über die Geschwindigkeitskonstruktion kinematischer Ketten.“ Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. Band 17. Heft 3. 1937.

³ Ein anderes Verfahren zur Bestimmung des Drehpols siehe: N. Rosenauer: „Eine unmittelbare Geschwindigkeits-Konstruktion der Heysinger Steuerung für Lokomotiven.“ Acta Universitatis Latviensis. Mēch. fak. serija: T I. № 15. 1936.

Die Beschleunigungskonstruktion wird am Plane folgendermaßen durchgeführt: vom Punkte K wird die gegebene Beschleunigung \bar{j}_k abgetragen und durch den Endpunkt derselben eine Gerade $\alpha - \alpha$ senkrecht zu KA gezogen. Auf dieser Geraden befindet sich auch der Endpunkt der gesuchten Beschleunigung \bar{j}_a .

Ebenso wird vom Punkte m die Beschleunigung \bar{j}_m abgetragen und durch den Endpunkt derselben eine Gerade $\gamma - \gamma$ senkrecht zu CM gezogen. Auf dieser Geraden befindet sich der Endpunkt von \bar{j}_c . Die Beschleunigung \bar{j}_b fällt mit der Gleitrichtung zusammen und daher geht die dritte Gerade $\beta - \beta$ direkt durch den Punkt b parallel zur Gleitrichtung.

Jetzt besteht die Aufgabe darin, daß ein $\Delta A_1B_1C_1$, das dem gegebenen ΔABC ähnlich ist, so konstruiert werden muß, daß die Punkte A_1 , B_1 und C_1 sich auf den Geraden $\alpha - \alpha$, $\beta - \beta$ und $\gamma - \gamma$ befinden und die entsprechenden Seiten zueinander senkrecht sind. Zu diesem Zweck zieht man irgendwo zwischen $\beta - \beta$ und $\gamma - \gamma$ eine Gerade $B'C' \perp BC$ und ebenso auch $B'A' \perp BA$ und $C'A' \perp CA$. Durch den Punkt A' und den Schnittpunkt Q von $\beta - \beta$ mit $\gamma - \gamma$ zieht man eine Gerade, die $\alpha - \alpha$ im Punkte A_1 trifft. Verbindet man den Punkt a mit A_1 , so erhält man die gesuchte Beschleunigung $\overline{aA_1} = \bar{j}_a$. Endlich konstruiert man noch $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A'B'C'$ und erhält auch $\overline{cC_1} = \bar{j}_c$ und die Gleitbeschleunigung $\overline{bB_1} = \bar{j}_b$.

Die Konstruktion des Verfassers besitzt im Vergleich zu den üblichen Konstruktionen den Vorzug, daß die Seiten der $\Delta A_1B_1C_1$ und ΔABC zueinander senkrecht stehen, was die Konstruktion wesentlich erleichtert.

Beispiel V: Eine geschlossene 8-gliedrige Gelenkkette (Abb. 6a).

Die Kette besteht aus 4 ternären Gliedern O_1KD , DLE , O_2ME , ABC und 4 binären KA , BL , CM , O_1O_2 und enthält 3 geschlossene Gliedergruppen: ein Viereck und zwei Fünfecke.

Es wird angenommen, daß das Glied O_1O_2 fest bleibt und das Glied O_1KD die Kette antreibt, wobei die Beschleunigung \bar{j}_a des Punktes D gegeben ist.

Gesucht sind die Beschleunigungen \bar{j}_a , \bar{j}_b und \bar{j}_c der Punkte A , B und C .

Erst wird die gedrehte Geschwindigkeit \vec{V}_d des Punktes D bestimmt, die in diesem Falle gleich DO_1 ist, da der Endpunkt von \vec{j}_d sich auf der Normalen im Punkte O_1 gegen O_1D befindet. Dann werden üblicherweise die gedrehten Geschwindigkeiten $\vec{V}_k, \vec{V}_e, \vec{V}_m$ und \vec{V}_l der Punkte K, E, M und L gefunden und nach dem Verfahren des Verfassers¹ die Geschwindigkeiten der Punkte A, B und C gesucht. Zu diesem Zweck wird BL bis zu den Schnittpunkten Q und R mit den Gliedern KA und MC gezogen, die als Punkte der Ebene ABC aufgefaßt werden. Den Endpunkt der gedrehten Geschwindigkeit \vec{V}_q des Punktes Q ergeben die Geraden, die durch den Endpunkt von $\vec{V}_l \parallel LB$ und durch den Endpunkt von $\vec{V}_k \parallel KA$ gezogen sind. Gleichfalls findet man den Endpunkt von \vec{V}_r , indem man eine Gerade durch den Endpunkt von $\vec{V}_m \parallel MC$ bis zum Schnittpunkte mit der vorhin $\parallel LB$ gezogenen Geraden zieht. Die erhaltenen gedrehten Geschwindigkeiten \vec{V}_q und \vec{V}_r schneiden sich im Drehpol P der Ebene ABC , den man mit den Punkten A, B und C verbindet und die gesuchten Geschwindigkeiten \vec{V}_a, \vec{V}_b und \vec{V}_c erhält.

Weiter konstruiert man mit Hilfe von relativen Geschwindigkeiten die relativen Normalbeschleunigungen:

CA_1	ist die Normalbeschleunigung	der Seite AC	des $\triangle ABC$
CM_1	„ „	„	des Gliedes CM
AK_1	„ „	„	„ „ AK
LB_1	„ „	„	„ „ LB
D_1E	„ „	„	der Seite DE des $\triangle DEL$
MO_2'	„ „	„	„ „ O_2M „ $\triangle O_2ME$

Nachdem geht man zur Konstruktion des Planes relativer Normalbeschleunigungen über: von einem beliebig gewählten Punkte a (Abb. 6b) trägt man $\overline{ac} = \overline{A_1C}$ ab und konstruiert $\triangle abc \sim \triangle ABC$. Dann trägt man $\overline{cm} = \overline{CM_1}$, $\overline{ak} = \overline{AK_1}$, $\overline{bl} = \overline{B_1L}$, $\overline{mo_2} = \overline{MO_2'}$ ab und konstruiert $\triangle mo_2e \sim \triangle MO_2E$, $\overline{ed} = \overline{ED_1}$ und $\triangle edl' \sim \triangle EDL$. Dabei ist es möglich, daß die Punkte l' und l nicht zusammenfallen, das bedeutet, daß das Vieleck $lbcme'l'$ sich nicht schließt, und falls die Beschleunigung des einen Punktes gefunden ist, so trägt man sie

¹ N. Rosenauer: „Ein neues Verfahren zur Geschwindigkeitskonstruktion kinematischer Ketten.“ Acta Universitatis Latviensis. Mēch. fak. serija T. I. № 14. 1936.

einfach auf den zweiten Punkt über und setzt die Beschleunigungs-konstruktion fort. Weiter trägt man noch $\overline{do_1} = \overline{DO_1}$ ab und konstruiert $\triangle do_1k' \sim \triangle DO_1K$. Hier ist es wieder möglich, daß die Punkte k' und k nicht zusammenfallen und das Vieleck $kabldk'$ sich auch nicht schließt. In diesem Falle verfährt man ebenso, wie das eben beschrieben war. Damit ist der Plan relativer Normalbeschleunigungen erhalten, und man geht zur Konstruktion der Beschleunigungen selbst über.

Erstens wird vom Punkte d die gegebene Beschleunigung $\overline{j_d}$ abgetragen. Den Endpunkt der Beschleunigung $\overline{j_e}$ findet man im Schnittpunkt zweier Geraden, von denen eine durch den Endpunkt von $\overline{j_d} \perp de$ gezogen ist und die andere durch den Punkt $o_2 \perp o_2e$. Ebenso findet man den Endpunkt der Beschleunigung $\overline{j_m}$ im Schnittpunkte der Geraden, durch den Endpunkt von $\overline{j_e} \perp em$ gezogen, und der Geraden durch den Punkt $o_2 \perp o_2m$. Durch den erhaltenen Endpunkt von $\overline{j_m}$ zieht man senkrecht zu mc die Gerade $\gamma - \gamma$, auf der sich der Endpunkt von $\overline{j_c}$ befindet. Es wird aber noch vorher $\overline{j_l}$ bestimmt, indem man eine Gerade durch den Endpunkt von $\overline{j_d} \perp DL$ zieht und eine zweite Gerade durch den Endpunkt von $\overline{j_e} \perp EL$. Der Punkt l' , verbunden mit dem Schnittpunkt beider Geraden, ergibt die Beschleunigung $\overline{j_{l'}}$, die, auf den Punkt l übertragen, die Beschleunigung $\overline{j_l}$ liefert. Durch den Endpunkt von $\overline{j_l}$ wird $\perp BL$ die Gerade $\beta - \beta$ gezogen, auf der sich der Endpunkt von $\overline{j_b}$ befindet. Es wird aber noch $\overline{j_k}$ gesucht, indem man durch den Endpunkt von $\overline{j_d}$ eine Gerade $\perp DK$ zieht und durch den Punkt o_1 eine Gerade $\perp O_1K$. Der Punkt k' verbunden mit dem Schnittpunkte beider Geraden ergibt die Beschleunigung $\overline{j_{k'}}$, die, auf den Punkt k übertragen, die Beschleunigung $\overline{j_k}$ liefert. Durch den Endpunkt von $\overline{j_k}$ wird die Gerade $\alpha - \alpha \perp KA$ gezogen, auf der sich der Endpunkt von $\overline{j_a}$ befindet.

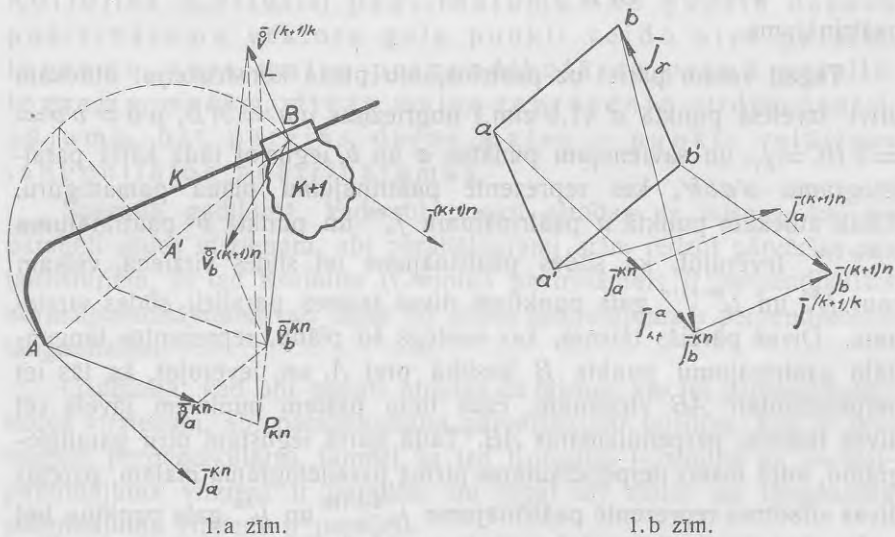
Nachdem alle 3 Geraden $\alpha - \alpha$, $\beta - \beta$ und $\gamma - \gamma$ gefunden sind, wird dasselbe Verfahren wie im Beispiel III angewandt, d. h. zwischen den Geraden $\alpha - \alpha$ und $\beta - \beta$ wird eine Gerade $A'B' \perp AB$ eingezeichnet und nachher auch $A'C' \perp AC$ und $B'C' \perp BC$ gezogen. Die Gerade durch den Punkt C' und den Schnittpunkt U der Geraden $\alpha - \alpha$ und $\beta - \beta$ trifft die Gerade $\gamma - \gamma$ im Endpunkt der gesuchten Beschleunigung $\overline{j_c}$. Konstruiert man noch ein Dreieck, das dem $\triangle A'B'C'$ ähnlich ist, so erhält man auch die gesuchten Beschleunigungen $\overline{j_a}$ und $\overline{j_b}$.

Zusammenfassung. Wie aus den angeführten Beispielen zu ersehen ist, lassen sich die Beschleunigungen kinematischer Ketten verhältnismäßig einfach und anschaulich am Plane relativer Normalbeschleunigungen konstruieren, wobei die dazu nötigen gedrehten Geschwindigkeiten und Normalbeschleunigungen an der Zeichnung der Kette gefunden werden können.

Īpaša paātrinājumu konstrukcija kinēmatiskās ķēdēs, kas satur slīdpārus kustošās plaknēs.

Prof. Dr. ing. N. Rozenauers.

Savā beidzamajā darbā¹ autors aplūkojis paātrinājumu konstrukciju kinēmatiskās šarnīru ķēdēs un arī tādās ķēdēs, kas satur slīdpārus pret nekustošo plakni. Šinī darbā autors apskata paātrinājumu konstrukciju kinēmatiskās ķēdēs, kas satur slīdpārus kustošās plaknēs.



Izņemsim no ķēdes divas plaknes k un $(k+1)$, kas savienotas ar slīdpāri (1.a zīm.), un pieņemsim, ka plaknē k doti punkta A ortogō-

¹ N. Rozenauers. Paātrinājumu konstrukcija ar relatīvo normālpātrinājumu plānu palīdzību sarežģītās kinēmatiskās ķēdēs. L. Ū. R. Mēch. fak. serija II sējums № 4.

nālais ātrums \bar{V}_a^{kn} un paātrinājums \bar{j}_a^{kn} , bet plaknē $(k+1)$ doti punkta B ortogonālais ātrums $\bar{V}_b^{(k+1)n}$ un paātrinājums $\bar{j}_b^{(k+1)n}$ kustībā pret nekustošo plakni n .

Meklējams paātrinājuma stāvoklis abām plaknēm un slīdes paātrinājums.

Pirmkārt, konstruējam parastā kārtā \bar{V}_b^{kn} un slīdes ātrumu $\bar{V}^{(k+1)k}$, velkot caur \bar{V}_a^{kn} gala punktu taisni paralēli AB un caur $\bar{V}_b^{(k+1)n}$ gala punktu taisni perpendikulāri slīdes virzienam. Pēc tam ar punktu A un B relatīvā ātruma palīdzību atrodam relatīvo normalpaātrinājumu BA' . Velkot \bar{V}_a^{kn} un \bar{V}_b^{kn} līdz krustošanai, atrodam pārneseamo polu P_{kn} , kuŗu savienojam ar relatīvā ortogonālā ātruma $\bar{V}^{(k+1)k}$ gala punktu un velkam caur pārneseamā ātruma \bar{V}_b^{kn} gala punktu paralēlo taisni līdz krustošanai ar relatīvo staru punktā L . Nogrieznis $\overline{BL} = \frac{1}{2}\bar{j}_\gamma$, kā rāda proporcija $\frac{BL}{V^{(k+1)k}} = \frac{V_b^{kn}}{BP_{kn}} = \omega_{kn}$, reprezentē pusi no Koriolisa (Coriolis) paātrinājuma.

Tagad varam pāriet uz paātrinājumu plāna konstrukciju: atliekam brīvi izvēlētā punktā a' (1.b zīm.) nogriežņus $\overline{a'b'} = \overline{A'B}$, $\overline{a'a} = \overline{b'b} = = 2\overline{BL} = \bar{j}_\gamma$, un savienojam punktus a un b , iegūstot tādā kārtā paralēlogramu $a'abb'$, kas reprezentē paātrinājumu plāna pamatfigūru. Tālāk atliekam punktā a paātrinājumu \bar{j}_a^{kn} un punktā b' paātrinājumu $\bar{j}_b^{(k+1)n}$. Ievērojot, ka slīdes paātrinājums iet slīdes virzienā, velkam caur \bar{j}_a^{kn} un $\bar{j}_b^{(k+1)n}$ gala punktiem divas taisnes paralēli slīdes virzienam. Divas pārējās taisnes, kas noslēgs šo plānu, reprezentēs tangentiālo paātrinājumu punkta B kustībā pret A , un, ievērojot, ka tās iet perpendikulāri AB virzienam, caur tiem pašiem punktiem jāvelk vēl divas taisnes, perpendikulāras AB . Tādā kārtā iegūstam otru paralēlogramu, kuŗa malas perpendikulāras pirmā paralēlograma malām, pārējās divas virsotnes reprezentē paātrinājumu $\bar{j}_a^{(k+1)n}$ un \bar{j}_b^{kn} gala punktus, bet malas, kas ir paralēlas slīdes virzienam, dod slīdes paātrinājumu. Bez tam jāievēro, ka taisnei, kas savieno punktu attēlus, jābūt perpendikulārai taisnei, kas savieno paātrinājumu gala punktus.

1.b zīmējumā var viegli pārliecināties, ka iegūtais paātrinājumu plāns ietver visus 4 nol-mus, kas saista punktu A un B dažādus paātrinājumu vektorus

$$1) \bar{j}_a^{(k+1)n} = \bar{j}_a^{(k+1)k} + \bar{j}_a^{kn} + \bar{j}_\gamma$$

$$2) \bar{j}_b^{(k+1)n} = \bar{j}_b^{(k+1)k} + \bar{j}_b^{kn} + \bar{j}_\gamma$$

$$3) \bar{j}_b^{kn} = \bar{j}_a^{kn} + \bar{j}_{bt}^a + \bar{j}_{bn}^a$$

$$4) \bar{j}_b^{(k+1)n} = \bar{j}_a^{(k+1)n} + \bar{j}_{bt}^a + \bar{j}_{bn}^a,$$

kur $\bar{j}_\gamma = \bar{a}'\bar{a} = \bar{b}'\bar{b} = 2[\bar{\omega}_{kn} \cdot \bar{V}^{(k+1)k}]$ ir Koriolisa (Coriolis) paātrinājums, $\bar{j}_a^{(k+1)k} = \bar{j}_b^{(k+1)k}$ ir slīdes paātrinājums, $\bar{j}_{bn}^a = \bar{b}\bar{a} = \bar{b}'\bar{a}'$ ir punkta B normālais paātrinājums kustībā pret A , un \bar{j}_{bt}^a ir tangentiālais paātrinājums tanī pašā kustībā. Šie pēdējie divi paātrinājumi acīm redzot neatkarīgi no tā, vai abi punkti pieder plaknei k , vai $(k+1)$, jo šīs plaknes savienotas ar slīdpāri.

Savelkot kopā visu sacīto, redzams, ka paātrinājumu plānā, ja divas plaknes savienotas ar slīdpāri, divu punktu attēli veido paralēlogramu, kuŗa divas malas reprezentē relatīvo normālpāātrinājumu, bet pārējās divas — Koriolisa (Coriolis) paātrinājumu. Šo punktu dažādu paātrinājumu vektoru gala punkti veido otru paralēlogramu, kuŗa malas perpendikulāras pirmā paralēlograma malām, divas malas reprezentē slīdes paātrinājumu, bet pārējās divas malas — punktu relatīvos tangentiālos paātrinājumus.

Speciālā gadījumā, kad abi punkti atrodas uz taisnes, kas iet paralēli slīdes virzienam, abi paralēlogrami acīm redzot pārvēršas par taisnstūriem, jo tad Koriolisa (Coriolis) paātrinājums ir perpendikulārs normālpāātrinājumam un tāpat arī slīdes paātrinājums ir perpendikulārs tangentiālam.

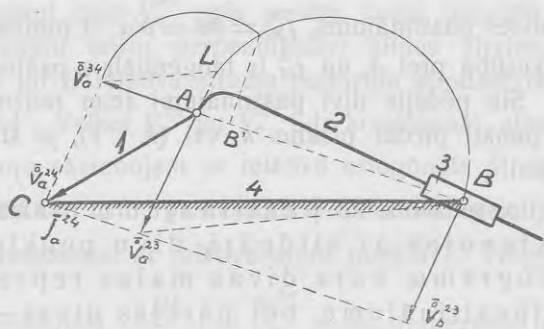
Gadījumā, kad abi punkti atrodas uz taisnes, kas iet perpendikulāri slīdes virzienam, abi paralēlogrami pārvēršas par taisnēm, kas ir savstarpīgi perpendikulāras, tamdēļ ka tad Koriolisa (Coriolis) un normālpāātrinājuma virzieni ir paralēli, un tāpat arī slīdes un tangentiāla paātrinājuma virzieni ir paralēli.

I. piemērs. Svārstoša kloķa cilpa.

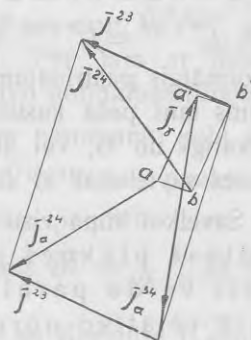
Nekustošais loceklis apzīmēts ar 4, bet 1. loceklis, vienmērīgi griežoties ar doto ātrumu ap punktu C , piedzen mēchanismu. Jānosaka 2. un 3. locekļu paātrinājumu stāvoklis un slīdes paātrinājums.

Vienkāršības dēļ ātruma mērogs pieņemts tāds, lai dotais punkta A ortogonālais ātrums $\vec{V}_a^{14} = \vec{V}_a^{24}$ reprezentētos ar attālumu AC . Tādā gadījumā arī paātrinājums $\vec{j}_a^{14} = \vec{j}_a^{24} = \overline{AC}$.

Punktos A un B velkam normāles slīdes virzienam un atrodam šo punktu ortogonālos slīdes ātrumus $\vec{V}_a^{23} = \vec{V}_b^{23}$, velkot caur punktu C taisni paralēli AB .



2. a zīm.



2. b zīm.

Ievērojot sakaru starp punkta A ātrumiem $\vec{V}_a^{24} = \vec{V}_a^{23} + \vec{V}_a^{34}$, atrodam ātrumu \vec{V}_a^{34} , kas ir arī punkta A relatīvais ātrums pret punktu B , jo tā ātrums $\vec{V}_b^{34} = 0$.

Ar atrasta relatīva ātruma \vec{V}_a^{34} palīdzību parastā kārtā ar pusriņķi konstruējam punkta A normālpāātrinājumu AB' kustībā ap punktu B .

Savienojot ortogonālā relatīva ātruma \vec{V}_a^{23} gala punktu ar pārnesamo polu 34 (punkts B) un velkot caur pārnesama ortogonāla ātruma \vec{V}_a^{34} gala punktu paralelu taisni, iegūstam uz relatīva stara nogriezni AL , kas, kā rāda proporcija

$$\frac{AL}{V_a^{23}} = \frac{V_a^{34}}{AB} = \omega_{34},$$

iznāk vienāds ar pusi no Koriolisa (Coriolis) paātrinājuma:

$$\overline{AL} = [\omega_{34} \vec{V}_a^{23}] = \frac{1}{2} \vec{j}_r.$$

Tagad pārejam uz paātrinājuma plāna konstrukciju: atliekam $\overline{ab} = \overline{AB'}$, $\overline{aa'} = \overline{bb'} = 2\overline{AL} = \vec{j}_r$ un savienojam punktus a' un b' , iegūstot paralēlogramu $aa'b'b$ (2. b zīm.).

Tālāk atliekam punktā a paātrinājumu $\bar{j}_a^{24} = \overline{AC}$, kuŗa gala punkts būs viena no otra paralēlograma virsotnēm, bet pretīnguloŗa virsotne atradīsies punktā b' , jo punkta B paātrinājums $\bar{j}_b^{34} = 0$.

Otra paralēlograma iegūŗšanai velkam caur minētiem punktiem divas taisnes paralēli slīdes virzienam un divas taisnes perpendikulāri pret AB . Savienojot punktus a' un b ar jaunatrastām paralēlograma virsotnēm, iegūŗtam paātrinājumus \bar{j}_a^{34} un \bar{j}_b^{24} .

Atrastais paātrinājumu plāns pirmkārt apvieno visus 4 nol-mus, kas saista dažādus punktu A un B paātrinājumus:

- 1) $\bar{j}_a^{24} = \bar{j}_a^{23} + \bar{j}_a^{34} + \bar{j}_\gamma$
- 2) $\bar{j}_b^{24} = \bar{j}_b^{23} + \bar{j}_\gamma$ (ŗeit $\bar{j}_b^{34} = 0$)
- 3) $\bar{j}_a^{24} = \bar{j}_b^{24} + \bar{j}_{an}^b + \bar{j}_{at}^b$
- 4) $\bar{j}_a^{34} = \bar{j}_{an}^b + \bar{j}_{at}^b$ (ŗeit $\bar{j}_b^{34} = 0$)

un otrkārt nosaka 2. un 3. locekļu paātrinājumu stāvokli, jo 2. loceklim bez jau dotā paātrinājuma \bar{j}_a^{24} ir atrasts vēl punkta B paātrinājums \bar{j}_b^{24} un 3. loceklim atrasts punkta A paātrinājums \bar{j}_a^{34} , kas ir pietiekoŗi, jo ŗis loceklis grieŗas ap nekustoŗo punktu. Bez tam arī otra paralēlograma malas, kas vilktas paralēli slīdes virzienam, dod slīdes paātrinājumu \bar{j}^{23} .

II. piemērs. Rotējoŗa kloŗa cilpa (3.a zīm.).

Mēchanismu piedzen 1. loceklis, kas grieŗas vienmēri ap punktu C , pie kam punkta A ortogōnālais ātrums \bar{V}_a^{14} dots.

Meklēts 2. un 3. locekļu paātrinājumu stāvoklis, kā arī slīdes paātrinājums.

Doto ātrumu \bar{V}_a^{14} pēc formulas

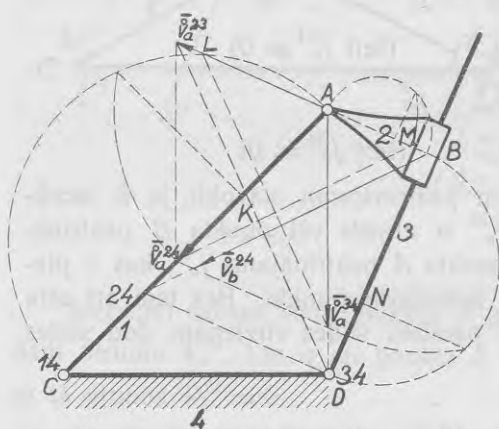
$$\bar{V}_a^{14} = \bar{V}_a^{24} = \bar{V}_a^{23} + \bar{V}_a^{34}$$

sadalām divās komponentēs, no kuŗām \bar{V}_a^{23} reprezentē slīdes ātrumu.

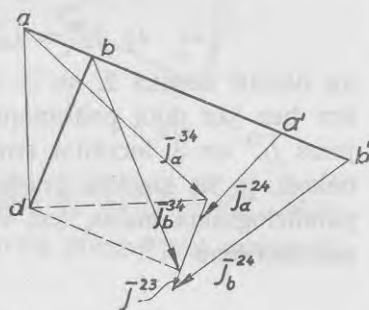
Relatīvā ātruma \bar{V}_a^{23} gala punktu savienojam ar pāŗnesamo polu 34 (punkts D) un velkam caur pāŗnesamā ātruma \bar{V}_a^{34} gala punktu paralēlu taisni līdz krustoŗanai ar relatīvo staru punktā L . Nogrieznis $\overline{AL} = \frac{1}{2} \bar{j}_\gamma$, kā zināms, ir puse no Koriolisa (Coriolis) paātrinājuma.

Pēc tam ar dota ātruma \vec{V}_a^{14} palīdzību konstruējam punkta A kustībā ap punktu C normālpātrinājumu AK . Tāpat pēc ātruma \vec{V}_b^{34} noteikšanas konstruējam arī punkta B kustībā ap punktu D normālpātrinājumu BN . Konstruējot vēl punkta B , kā otra locekļa punkta, ātrumu \vec{V}_b^{24} un, sastādot diferenci $\vec{V}_a^{24} - \vec{V}_b^{24}$, atrodam arī punkta A kustībā ap B normālpātrinājumu AM .

Tagad pārejam uz pātrinājumu plāna konstrukciju: kādā brīvi izvēlēta punktā a' (3.b zīm.) atliekam $a'b' = AM$, $b'b = a'a = 2AL = \vec{j}_\gamma$ un $bd = BN$, pēc tam savienojam punktus a un d . Ar šo pātrinājumu



3.a zīm.



3.b zīm.

plāna pamatfigūra iegūta, pie kam raksturīgais paralēlograms $abb'a'$ pārvēršas par taisni.

Tālāk pārejam uz pātrinājumu konstrukciju: atliekam punktā a' pātrinājumu \vec{j}_a^{24} un velkam caur tā gala punktu taisni paralēli slīdes virzienam līdz krustošanai ar taisnēm, kas vilktas caur punktu d viena perpendikulāri bd un otra perpendikulāri ad . Savienojot krustošanās punktus ar punktiem b un a , dabūjam punktu B un A pātrinājumus \vec{j}_b^{34} un \vec{j}_a^{34} kustībā 3 pret 4. Attālums starp \vec{j}_a^{34} un \vec{j}_a^{24} gala punktiem reprezentē slīdes pātrinājumu \vec{j}^{23} . Atliekot to pašu no \vec{j}_b^{34} gala punkta, dabūjam arī pātrinājuma \vec{j}_b^{24} gala punktu. Otrais paralēlograms, kuŗu veido punktu A un B pātrinājumu gala punkti plānā, kā jau agrāk bija teikts, arī pārvēršas par taisni, pie kam abas taisnes ir savstarpīgi perpendikulāras.

3. b zīmējumā, kā redzams, ietverti visi 4 nol-mi, kas dod sakaru starp punktu A un B dažādiem paātrinājumiem

$$1) \bar{j}_a^{24} = \bar{j}_a^{23} + \bar{j}_a^{34} + \bar{j}_\gamma$$

$$2) \bar{j}_b^{24} = \bar{j}_b^{23} + \bar{j}_b^{34} + \bar{j}_\gamma$$

$$3) \bar{j}_a^{24} = \bar{j}_b^{24} + \bar{j}_{at}^b + \bar{j}_{an}^b$$

$$4) \bar{j}_a^{34} = \bar{j}_b^{34} + \bar{j}_{at}^b + \bar{j}_{an}^b,$$

kur $\bar{j}_\gamma = 2[\omega_{34} \cdot \bar{V}^{23}] = \overline{a'a} = \overline{b'b}$ reprezentē Koriolisa (Coriolis) paātrinājumu.

$\bar{j}_{an}^b = \overline{ab} = \overline{a'b'}$ reprezentē punkta A normālo paātrinājumu kustībā ap B .

\bar{j}_{at}^b ir tangentiālais paātrinājums tanī pašā kustībā un reprezentējas ar attālumu starp \bar{j}_b^{24} un \bar{j}_a^{24} vai arī starp \bar{j}_b^{34} un \bar{j}_a^{34} gala punktiem.

\bar{j}^{23} , kā jau agrāk bija minēts, ir slīdes paātrinājums, un tas reprezentējas ar attālumu starp \bar{j}_b^{34} un \bar{j}_b^{24} vai arī \bar{j}_a^{34} un \bar{j}_a^{24} gala punktiem.

Kā redzams, aprakstītais paātrinājumu plāns dod iespēju samērā vienkārši atrast vienā zīmējumā punktu A un B paātrinājumus kustībā 2 pret 4 un 3 pret 4, kas ir vajadzīgi attiecīgā locekļa paātrinājuma stāvokļa noteikšanai un ko parastās konstrukcijas nerasniedz. Jāpiezīmē, ka šinī piemērā 3. locekļa paātrinājuma stāvokļa noteikšanai pietiktu ar viena punkta paātrinājumu, jo 3. loceklis griežas ap nekustošo punktu D , bet 2. locekļa paātrinājuma stāvokļa noteikšanai vajadzīgi abu punktu paātrinājumi.

III. piemērs. Shaping-mašīna (4. a zīm.).

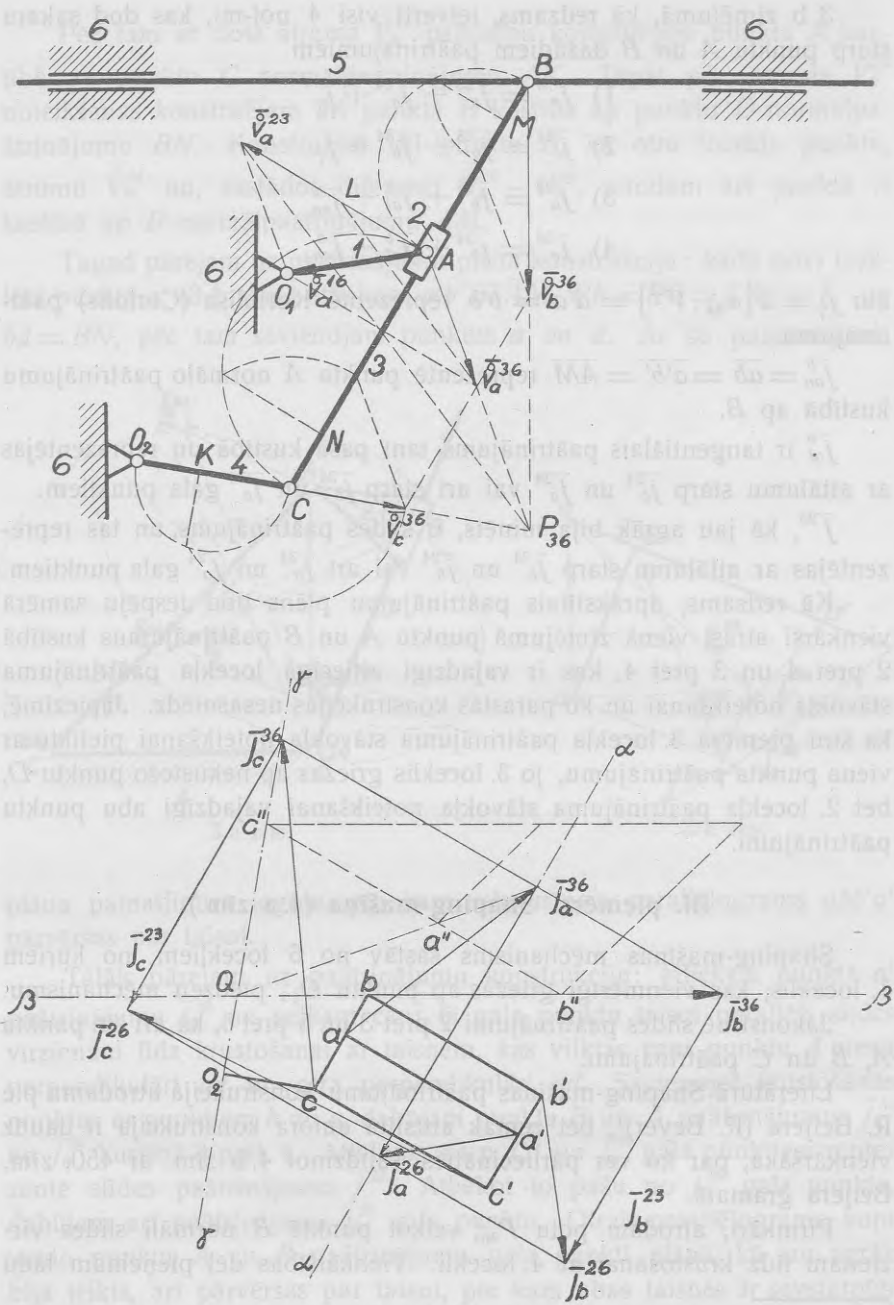
Shaping-mašīnas mēchanisms sastāv no 6 locekļiem, no kuņiem 1. loceklis, kas vienmērīgi griežas ap punktu O_1 , piedzen mēchanismu.

Jākonstruē slīdes paātrinājumi 2 pret 3 un 5 pret 6, kā arī citi punktu A , B un C paātrinājumi.

Literātūrā Shaping-mašīnas paātrinājumu konstrukcija atrodama pie R. Beijera (R. Beyer)¹, bet zemāk attīstītā autora konstrukcija ir daudz vienkāršāka, par ko var pārliecināties, salīdzinot 4. b zīm. ar 450. zīm. Beijera grāmatā.

Pirmkārt, atrodam polu P_{36} , velkot punktā B normāli slīdes virzienam līdz krustošanai ar 4. locekli. Vienkāršības dēļ pieņemam tādu

¹ R. Beyer. Technische Kinematik. 1931. 277.—279. lapp.



4. a un 4. b zīm.

mērogu, lai punkta A ortogonālais ātrums \vec{V}_a^{16} reprezentētos ar AO_1 .

Sadalām šo ātrumu pēc formulas

$$\vec{V}_a^{16} = \vec{V}_a^{26} = \vec{V}_a^{23} + \vec{V}_a^{36}$$

iegūstot slīdes ātrumu \vec{V}_a^{23} , kuŗa gala punktu savienojam ar pārnesamo polu P_{36} . Caur pārnesamā ātruma \vec{V}_a^{36} gala punktu velkam paralēlu taisni līdz krustošanai ar relatīvo staru punktā L . Nogrieznis $\overline{AL} = \frac{1}{2} \overline{j_\gamma}$, kā zināms, ir puse no Koriolisa (Coriolis) paātrinājuma.

Tālāk ar attiecīgo punktu relatīvo ātrumu palīdzību atrodam normālos paātrinājumus: CK punkta C kustībā pret O_2 , CN punkta C kustībā pret A , BM punkta B kustībā pret A un pārejam uz paātrinājumu plāna konstrukciju. Brīvi izvēlēta punktā a' (4. b zīm.) atliekam $\overline{a'c'} = \overline{NC}$, $\overline{a'b'} = \overline{MB}$ un konstruējam uz šiem nogriežņiem divus taisnstūrus ar kopīgu augstumu: $\overline{a'a} = \overline{b'b} = \overline{c'c} = \overline{2AL} = \overline{j_\gamma}$, jo punkti A , B un C atrodas uz pašas slīdošās taisnes. Beidzot atliekam vēl $\overline{co_2} = \overline{CK}$, ar ko paātrinājumu plāna pamatfigūra ir iegūta.

Tagad pārejam uz pašu paātrinājumu konstrukciju: ievērojot, ka punkts A griežas vienmērīgi ap O_1 un $\vec{V}_a^{16} = \overline{AO_1}$, arī $\overline{j_a^{16}} = \overline{j_a^{26}} = \overline{AO_1}$. Atliekam šo paātrinājumu punktā a' , un caur tā gala punktu velkam taisni $\alpha - \alpha$ paralēli slīdes virzienam 2 pret 3, caur punktu o_2 velkam taisni $\gamma - \gamma$ perpendikulāri CO_2 un caur punktu b taisni $\beta - \beta$ paralēli slīdes virzienam 5 pret 6. Uz taisnēm $\alpha - \alpha$, $\beta - \beta$ un $\gamma - \gamma$ atradīsies punktu A , B un C , kā 3. locekļa punktu, paātrinājumu vektoru gala punkti. Lai tos atrastu, velkam kaut kur starp $\beta - \beta$ un $\gamma - \gamma$ taisni $b''c'' \perp BC$ un sadalām to proporcionāli attālumiem BA un AC , iegūstot punktu a'' , kuŗu savienojam ar $\beta - \beta$ un $\gamma - \gamma$ krustošanās punktu Q . Taisnes Qa'' krustošanās punkts ar taisni $\alpha - \alpha$ dod paātrinājuma $\overline{j_a^{36}}$ gala punktu. Velkot caur šo punktu taisni perpendikulāri BC līdz krustošanai ar $\beta - \beta$ un $\gamma - \gamma$, atrodam arī $\overline{j_b^{36}}$ un $\overline{j_c^{36}}$ gala punktus. Pirmais no šiem paātrinājumiem $\overline{j_b^{36}}$ līdz ar to būs arī mēklējama slīdes paātrinājums 5 pret 6.

Ievērojot, ka punktu A , B un C paātrinājumi trešā un otrā locekļa kustībā pret sesto veido taisnstūrus, kuŗu divas malas ir paralēlas slīdes virzienam, velkam caur $\overline{j_a^{26}}$ gala punktu taisni $\perp BC$ un caur $\overline{j_b^{36}}$ un $\overline{j_c^{36}}$ gala punktiem taisnes, paralēlas slīdes virzienam 2 pret 3,

un atrodam iegūto taisnstūru pārējās virsotnēs paātrinājumu \bar{j}_b^{26} un \bar{j}_c^{26} gala punktus.

Atrastā paātrinājumu plānā, kā redzams 4. b zīm., ietverti visādi sakari starp dažādiem punktu A , B un C paātrinājumiem, kā piemēram,

$$1) \bar{j}_a^{26} = \bar{j}_a^{23} + \bar{j}_a^{36} + \bar{j}_\gamma$$

$$2) \bar{j}_b^{26} = \bar{j}_b^{23} + \bar{j}_b^{36} + \bar{j}_\gamma$$

$$3) \bar{j}_c^{26} = \bar{j}_c^{23} + \bar{j}_c^{36} + \bar{j}_\gamma$$

$$4) \bar{j}_a^{36} = \bar{j}_b^{36} + \bar{j}_{an}^b + \bar{j}_{at}^b$$

$$5) \bar{j}_a^{36} = \bar{j}_c^{36} + \bar{j}_{an}^c + \bar{j}_{at}^c$$

$$6) \bar{j}_b^{36} = \bar{j}_c^{36} + \bar{j}_{bn}^c + \bar{j}_{bt}^c$$

$$7) \bar{j}_a^{26} = \bar{j}_b^{26} + \bar{j}_{an}^b + \bar{j}_{at}^b \quad \text{u. t. t.}$$

No pirmajiem 3 nol-miem redzams, ka attālums starp \bar{j}_a^{36} un \bar{j}_a^{26} gala punktiem dod slides paātrinājumu \bar{j}^{23} , kas visiem 3 punktiem ir vienāds.

No 4) nol-ma redzams, ka attālums starp \bar{j}_b^{36} un \bar{j}_a^{36} gala punktiem dod tangentiālo paātrinājumu \bar{j}_{at}^b punkta A kustībā ap B .

Tāpat no 5) nol-ma redzams, ka attālums starp \bar{j}_c^{36} un \bar{j}_a^{36} gala punktiem dod tangentiālo paātrinājumu \bar{j}_{at}^c punkta A kustībā ap C u. t. t.

Kopsavilkums: Vispārīgi attiecībā uz paātrinājumu konstrukciju kinēmatiskās ķēdēs ar slīdpāriem kustošās plaknēs jāsaprot, ka visizdevīgāki konstruēt pašā mēchanisma zīmējumā tikai ortogonālos ātrumus Koriolisa un relatīvos normālpāātrinājumus, bet pašus paātrinājumus konstruēt atsevišķi ar aprakstītā paātrinājumu plāna palīdzību, kā tas izdarīts šinī darbā apskatītos piemēros. Literatūrā turpretim bieži sastopamas ātrumu un paātrinājumu konstrukcijas kopīgi pašā mēchanisma zīmējumā. Šādi zīmējumi parasti iznāk sarežģīti un nedod pārskatu par paātrinājumu sadalīšanu.

Iesniegts fakultātei 1937. g. 13. maijā.

Eine besondere Beschleunigungs-konstruktion kinematischer Ketten, die Gleitpaare in beweglichen Ebenen enthalten.

Prof. Dr. ing. N. Rosenauer.

Autoreferat.

In den bisher vom Verfasser¹ behandelten Ketten kamen Gleitpaare nur gegen die feste Ebene vor. In dieser Arbeit soll die Beschleunigungs-konstruktion auch in den Fällen betrachtet werden, wo die Ketten Gleitpaare in beweglichen Ebenen enthalten.

Als Grundfall werden aus einer Kette zwei Glieder k und $(k+1)$, die durch ein Gleitpaar verbunden sind, herausgegriffen (Abb. 1 a).

Es seien in der Ebene k die gedrehte Geschwindigkeit \bar{V}_a^{kn} und die Beschleunigung \bar{j}_a^{kn} des Punktes A und in der Ebene $(k+1)$ die gedrehte Geschwindigkeit $\bar{V}_b^{(k+1)n}$ und die Beschleunigung $\bar{j}_b^{(k+1)n}$ des Punktes B in bezug auf die feste Ebene gegeben.

Gesucht ist der Beschleunigungszustand der beiden Ebenen und die Gleitbeschleunigung.

An erster Stelle wird üblicherweise die gedrehte Geschwindigkeit \bar{V}_b^{kn} und die Gleitgeschwindigkeit $\bar{V}^{(k+1)k}$ gefunden, indem man durch den Endpunkt von \bar{V}_a^{kn} eine Parallele zu AB bis zum Schnittpunkt mit der Geraden, die durch den Endpunkt von $\bar{V}_b^{(k+1)n}$ senkrecht zur Gleitrichtung gezogen ist, zieht. Danach findet man mit Hilfe der relativen Geschwindigkeit der Punkte A und B die relative Normalbeschleunigung BA' . Der Schnittpunkt von \bar{V}_a^{kn} und \bar{V}_b^{kn} ergibt den Drehpol P_{kn} , den man mit dem Endpunkt der relativen gedrehten Geschwindigkeit $\bar{V}^{(k+1)k}$ verbindet und durch den Endpunkt von \bar{V}_b^{kn} eine

¹ N. Rosenauer: Die Beschleunigungs-Konstruktion kinematischer Ketten mit Hilfe von Plänen relativer Normalbeschleunigungen. Acta Universitatis Latviensis. Mēch. fak. serija. T. II. № 4.

parallele Gerade bis zum Punkte L zieht. Der Abschnitt $\overline{BL} = \frac{1}{2} \overline{j_\gamma}$, laut der Proportion

$$\frac{BL}{V^{(k+1)k}} = \frac{V_b^{kn}}{BP_{kn}} = \omega_{kn},$$

ist die Hälfte der Coriolis-Beschleunigung.

Darauf wird zur Konstruktion des Beschleunigungsplanes übergegangen: von einem beliebig gewählten Punkte a' (Abb. 1b) wird $\overline{a'b'} = \overline{A'B}$, $\overline{a'a} = \overline{b'b} = 2\overline{BL} = \overline{j_\gamma}$ abgetragen. Nachdem man die Punkte a und b verbindet, erhält man das Parallelogramm $a'abb'$, das als Grundfigur des Beschleunigungsplanes betrachtet werden kann.

Vom Punkte a trägt man $\overline{j_a^{kn}}$ und vom Punkte b' die Beschleunigung $\overline{j_b^{(k+1)n}}$ ab. Darauf beziehend, daß die Gleitbeschleunigung in der Gleitrichtung liegt, zieht man durch die Endpunkte von $\overline{j_a^{kn}}$ und $\overline{j_b^{(k+1)n}}$ zwei Geraden parallel der Gleitrichtung. Die zwei übrigen Geraden, die den Plan abschließen sollen, stellen die Tangentialbeschleunigungen des Punktes B um A dar, und da diese senkrecht zur Geraden AB verlaufen, so zieht man durch dieselben Punkte noch zwei Geraden senkrecht zu AB .

Damit ist ein zweites Parallelogramm erhalten, dessen Seiten denen des ersten senkrecht sind, die zwei übrigen Ecken die Endpunkte der Beschleunigungen $\overline{j_a^{(k+1)k}}$ und $\overline{j_b^{kn}}$ darstellen, und die Seiten, die der Gleitrichtung parallel sind, die Gleitbeschleunigung ergeben.

Hierbei ist zu beachten, daß die Gerade, die die Punkte verbindet, und die Gerade, die die Endpunkte der Beschleunigungen verbindet, einander senkrecht sein müssen.

Man kann sich in der Abb. 1b leicht davon überzeugen, daß der erhaltene Beschleunigungsplan alle 4 Gleichungen, die die verschiedenen Beschleunigungen der Punkte A und B enthalten, vereinigt:

$$1) \overline{j_a^{(k+1)n}} = \overline{j_a^{(k+1)k}} + \overline{j_a^{kn}} + \overline{j_\gamma}$$

$$2) \overline{j_b^{(k+1)n}} = \overline{j_b^{(k+1)k}} + \overline{j_b^{kn}} + \overline{j_\gamma}$$

$$3) \overline{j_b^{kn}} = \overline{j_a^{kn}} + \overline{j_{bt}^a} + \overline{j_{bn}^a}$$

$$4) \overline{j_b^{(k+1)n}} = \overline{j_a^{(k+1)n}} + \overline{j_{bt}^a} + \overline{j_{bn}^a}$$

hier ist $\overline{j_\gamma} = \overline{a'a} = \overline{b'b} = 2[\omega_{kn} \cdot \overline{V}^{(k+1)k}]$ die Coriolis-Beschleunigung, $\overline{j_a^{(k+1)k}} = \overline{j_b^{(k+1)k}}$ die Gleitbeschleunigung, $\overline{j_{bn}^a} = \overline{ba} = \overline{b'a'}$ die Normalbeschleunigung des Punktes B um A , und $\overline{j_{bt}^a}$ die Tangentialbeschleunigung

nigung in derselben Bewegung. Die beiden letzteren Beschleunigungen sind offenbar unabhängig davon, ob die Punkte A und B der Ebene k oder $(k+1)$ angehören, da diese Ebenen durch ein Gleitpaar verbunden sind.

Das Gesagte zusammenfassend, kommt man zum folgenden Satz: Falls zwei Ebenen durch ein Gleitpaar verbunden sind, so bilden die Abbildungen zweier Punkte, die diesen Ebenen angehören, im Beschleunigungsplan ein Parallelogramm, dessen zwei Seiten die relative Normalbeschleunigung der Punkte darstellt, die übrigen aber die Coriolis-Beschleunigung. Die Endpunkte der verschiedenen Beschleunigungsvektoren dieser Punkte bilden ein zweites Parallelogramm, dessen Seiten denen des ersten senkrecht sind, zwei Seiten die Gleitbeschleunigung darstellen und die übrigen zwei die relativen Tangentialbeschleunigungen der beiden Punkte.

I Sonderfall: falls beide Punkte sich auf einer Geraden, die parallel zur Gleitrichtung geht, befinden, gehen beide Parallelogramme in Rechtecke über, da dann die Coriolis-Beschleunigung zur Normalbeschleunigung und auch die Gleitbeschleunigung zur relativen Tangentialbeschleunigung senkrecht sind.

II Sonderfall: falls beide Punkte sich auf einer Geraden, die senkrecht zur Gleitrichtung geht, befinden, gehen beide Parallelogramme in zwei Geraden über, die zueinander senkrecht sind, da dann die Coriolis-Beschleunigung der relativen Normalbeschleunigung und die Gleitbeschleunigung der relativen Tangentialbeschleunigung parallel sind.

Beispiel I: Schwingende Kurbelschleife (Abb. 2a).

Das feste Glied ist mit 4 bezeichnet und das Glied 1 treibt gleichförmig mit einer gegebenen Geschwindigkeit an. Zu bestimmen ist der Beschleunigungszustand der Glieder 2 und 3, und die Gleitbeschleunigung.

Der Geschwindigkeits-Maßstab ist so gewählt, daß die gegebene orthogonale Geschwindigkeit $\vec{V}_a^{14} = \vec{V}_a^{24}$ des Punktes A durch den Abstand AC dargestellt wird. Bekanntlich ist dann auch die Beschleunigung $\vec{j}_a^{14} = \vec{j}_a^{24} = AC$.

Üblicherweise findet man die orthogonalen Gleitgeschwindigkeiten $\bar{V}_a^{23} = \bar{V}_b^{23}$ der Punkte A und B in den Normalen zur Gleitrichtung, indem man eine Gerade durch den Punkt C parallel zu AB zieht.

Laut der Gleichung: $\bar{V}_a^{24} = \bar{V}_a^{23} + \bar{V}_a^{34}$ wird die Geschwindigkeit \bar{V}_a^{34} gefunden, die gleichzeitig auch die Relativgeschwindigkeit des Punktes A gegen B ist, da die Geschwindigkeit $\bar{V}_b^{34} = 0$ ist.

Vermittelt dieser Relativgeschwindigkeit und mit Hilfe des Thaleschen Halbkreises konstruiert man die Normalbeschleunigung $\overline{AB'}$ des Punktes A gegen B .

Verbindet man den Endpunkt der gedrehten Gleitgeschwindigkeit \bar{V}_a^{23} des Punktes A mit dem Punkte B und zieht durch den Endpunkt von \bar{V}_a^{34} eine Parallele, so ergibt der Abschnitt AL , wie es die Proportion

$$\frac{AL}{\bar{V}_a^{23}} = \frac{V_a^{34}}{AB} = \omega_{34}$$

zeigt, die halbe Coriolis-Beschleunigung:

$$\overline{AL} = [\omega_{34} \cdot \bar{V}_a^{23}] = \frac{1}{2} \bar{j}_\gamma$$

Jetzt wird zur Konstruktion des Beschleunigungsplanes übergegangen: es wird ein Parallelogramm mit den Seiten $\overline{ab} = \overline{a'b'} = \overline{AB'}$ und $\overline{aa'} = \overline{bb'} = 2\overline{AL} = \bar{j}_\gamma$ konstruiert (Abb. 2b).

Weiter wird vom Punkte a die Beschleunigung $\bar{j}_a^{24} = \overline{AC}$ abgetragen, deren Endpunkt eine Ecke des zweiten Parallelogramms darstellt; die gegenüberliegende Ecke desselben befindet sich aber im Punkte b' , da die Beschleunigung $\bar{j}_b^{34} = 0$ ist.

Zur Bestimmung des zweiten Parallelogramms zieht man bloß durch die genannten Ecken zwei Geraden parallel zur Gleitrichtung und zwei Geraden senkrecht zu AB .

Verbindet man die Punkte a' und b mit den letzten zwei Ecken des zweiten Parallelogramms, so erhält man die Beschleunigungen \bar{j}_a^{24} und \bar{j}_b^{24} .

Der so erhaltene Beschleunigungsplan vereinigt, wie das die Abb. 2b zeigt, alle 4 Gleichungen, die zwischen den verschiedenen Beschleunigungen der Punkte A und B bestehen:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \bar{j}_a^{24} &= \bar{j}_a^{23} + \bar{j}_a^{34} + \bar{j}_\gamma \\
 2) \quad \bar{j}_b^{24} &= \bar{j}_b^{23} + \bar{j}_\gamma \quad (\bar{j}_b^{34} = 0) \\
 3) \quad \bar{j}_a^{24} &= \bar{j}_b^{24} + \bar{j}_{an}^b + \bar{j}_{at}^b \\
 4) \quad \bar{j}_a^{34} &= \bar{j}_{an}^b + \bar{j}_{at}^b \quad (\bar{j}_b^{34} = 0)
 \end{aligned}$$

Durch denselben Plan ist auch der Beschleunigungszustand des Gliedes 2 bestimmt, da außer der gegebenen Beschleunigung \bar{j}_a^{24} des Punktes *A* auch die Beschleunigung \bar{j}_b^{24} des Punktes *B* gefunden ist; im Gliede 3 aber ist die Beschleunigung \bar{j}_a^{34} erhalten, wodurch auch der Beschleunigungszustand des Gliedes 3 bestimmt ist, da dieses Glied sich um einen festen Punkt dreht.

Außerdem ergeben die Seiten des zweiten Parallelogramms, die parallel zur Gleitrichtung gezogen sind, auch die Gleitbeschleunigung \bar{j}^{23} .

Beispiel II. Rotierende Kurbelschleife (Abb. 3a).

Das Getriebe wird vom ersten Gliede angetrieben, das sich gleichförmig um den Punkt *C* dreht, wobei die gedrehte Geschwindigkeit \bar{V}_a^{14} des Punktes *A* gegeben ist.

Gesucht ist der Beschleunigungszustand der Glieder 2 und 3 und die Gleitbeschleunigung.

Die Geschwindigkeit \bar{V}_a^{14} wird nach der Formel

$$\bar{V}_a^{14} = \bar{V}_a^{24} = \bar{V}_a^{23} + \bar{V}_a^{34}$$

in zwei Komponenten zerlegt, von denen \bar{V}_a^{23} die Gleitgeschwindigkeit darstellt.

Der Endpunkt der gedrehten relativen Geschwindigkeit \bar{V}_a^{23} wird mit dem Pol 34 (Punkt *D*) verbunden und durch den Endpunkt von \bar{V}_a^{34} eine Parallele gezogen, die die Gerade *BA* im Punkte *L* trifft. Der Abschnitt $\overline{AL} = \frac{1}{2} \bar{j}_\gamma$ ist bekanntlich die halbe Coriolis-Beschleunigung.

Darauf wird mit Hilfe der gegebenen Geschwindigkeit \bar{V}_a^{14} die Normalbeschleunigung *AK* des Punktes *A* um *C* konstruiert. Ebenso wird nach Bestimmung der Geschwindigkeit \bar{V}_b^{34} die Normalbeschleunigung *BN* des Punktes *B* um *D* konstruiert. Weiter bestimmt man

noch die Geschwindigkeit \overline{V}_b^{24} des Punktes B als Punkt des Gliedes 2, bildet die Differenz $\overline{V}_a^{24} - \overline{V}_b^{24}$ und konstruiert die Normalbeschleunigung AM des Punktes A um B .

Um den Beschleunigungsplan zu erhalten, trägt man von einem beliebig gewählten Punkte a' (Abb. 3b) die Strecken $\overline{a'b'} = \overline{AM}$, $\overline{a'a} = \overline{b'b} = 2\overline{AL} = \overline{j}_\gamma$ ab, weiter noch $\overline{bd} = \overline{BN}$ und verbindet die Punkte a und d . Damit ist die Grundfigur des Planes gefunden, wobei laut dem II Sonderfall des oben zitierten Satzes das Parallelogramm $abb'a'$ in eine Gerade übergegangen ist.

Weiter wird die Beschleunigungs-Konstruktion durchgeführt: vom Punkte a' wird die gegebene Beschleunigung \overline{j}_a^{24} abgetragen, und durch ihren Endpunkt eine Gerade parallel zur Gleitrichtung gezogen. Die Schnittpunkte dieser Geraden mit zwei anderen, die durch den Punkt d , die eine $\perp ad$ und die andere $\perp bd$, gezogen sind, werden mit den Punkten a und b verbunden und ergeben die Beschleunigungen \overline{j}_a^{34} und \overline{j}_b^{34} der Punkte A und B , als Punkte des Gliedes 3. Der Abstand zwischen den Endpunkten der Beschleunigungen \overline{j}_a^{34} und \overline{j}_a^{24} ergibt die Gleitbeschleunigung \overline{j}^{23} . Trägt man dieselbe von dem Endpunkt von \overline{j}_b^{34} ab, so erhält man den Endpunkt der Beschleunigung \overline{j}_b^{24} .

Das zweite Parallelogramm, das die Endpunkte der Beschleunigungen der Punkte A und B im Plane bilden, geht, laut dem II Sonderfall des oben zitierten Satzes, auch in eine Gerade über, wobei beide Geraden zueinander senkrecht sind.

In der Abb. 3b kann man sich leicht davon überzeugen, daß im erhaltenen Plane alle 4 Gleichungen, die die verschiedenen Beschleunigungen der Punkte A und B enthalten, vereinigt sind.

- 1) $\overline{j}_a^{24} = \overline{j}_a^{23} + \overline{j}_a^{34} + \overline{j}_\gamma$
- 2) $\overline{j}_b^{24} = \overline{j}_b^{23} + \overline{j}_b^{34} + \overline{j}_\gamma$
- 3) $\overline{j}_a^{24} = \overline{j}_b^{24} + \overline{j}_{at}^b + \overline{j}_{an}^b$
- 4) $\overline{j}_a^{34} = \overline{j}_b^{34} + \overline{j}_{at}^b + \overline{j}_{an}^b$,

wo $\overline{j}_\gamma = 2[\omega_{34} \cdot \overline{V}^{23}] = \overline{a'a} = \overline{b'b}$ die Coriolis-Beschleunigung darstellt.

$\overline{j}_{an}^b = \overline{ab} = \overline{a'b'} = \overline{AM}$ ist die Normalbeschleunigung des Punktes A um B .

\bar{j}_{at}^b ist die Tangentialbeschleunigung in derselben Bewegung, die durch den Abstand zwischen den Endpunkten von \bar{j}_b^{24} und \bar{j}_a^{24} oder auch zwischen \bar{j}_b^{34} und \bar{j}_a^{34} dargestellt wird. Wie schon vorher festgestellt wurde, ist \bar{j}^{23} die Gleitbeschleunigung, die durch den Abstand zwischen den Endpunkten von \bar{j}_b^{34} und \bar{j}_b^{24} oder auch \bar{j}_a^{34} und \bar{j}_a^{24} dargestellt wird.

Das angeführte Beispiel zeigt, daß der betrachtete Plan die Möglichkeit gibt, verhältnismäßig einfach die Beschleunigungen der Punkte A und B in den Bewegungen 2 gegen 4 und 3 gegen 4 zu konstruieren. Diese Beschleunigungen geben ihrerseits die Möglichkeit, den Beschleunigungszustand des entsprechenden Gliedes zu bestimmen, wobei für das zweite Glied dazu die Beschleunigungen beider Punkte A und B nötig sind, für das dritte Glied aber die Beschleunigung eines Punktes genügt, da das dritte Glied sich um einen festen Punkt D dreht.

Beispiel III: Shaping-Maschine (Abb. 4a).

Die Shaping-Maschine stellt eine 6-gliedrige Kette dar, die vom ersten Gliede, das sich gleichförmig um den Punkt O_1 dreht, angetrieben wird.

Gesucht sind die Gleitbeschleunigungen 2 gegen 3 und 5 gegen 6, wie auch die übrigen Beschleunigungen der Punkte A , B und C .

Die Beschleunigungskonstruktion an der Shaping-Maschine findet man in der Literatur bei R. Beyer¹, aber die hier entwickelte Konstruktion des Verfassers gestaltet sich einfacher, worüber man sich beim Vergleich der Zeichnungen überzeugen kann.

An erster Stelle wird der Pol P_{36} gefunden, indem man durch den Punkt B eine Normale zur Gleitrichtung bis zum Schnittpunkte mit dem Gliede 4 zieht.

Einfachheitshalber wählt man den Geschwindigkeitsmaßstab so, daß die gedrehte Geschwindigkeit \bar{V}_a^{16} des Punktes A durch den Abstand AO_1 dargestellt wird. Diese Geschwindigkeit wird nach der Formel

$$\bar{V}_a^{16} = \bar{V}_a^{26} = \bar{V}_a^{23} + \bar{V}_a^{36}$$

in zwei Komponenten zerlegt, wobei \bar{V}_a^{23} die Gleitgeschwindigkeit des Gliedes 2 gegen 3 ist. Der Endpunkt dieser Geschwindigkeit wird mit

¹ R. Beyer: *Technische Kinematik*. 1931. Seite 277—279.

dem Pol P_{36} verbunden, und durch den Endpunkt von \overline{V}_a^{36} wird eine Parallele bis zum Schnittpunkt L mit dem relativen Strahl gezogen. Der Abschnitt $\overline{AL} = \frac{1}{2} \overline{j}_\gamma$ ist bekanntlich die halbe Coriolis-Beschleunigung.

Mit Hilfe von relativen Geschwindigkeiten entsprechender Punkte findet man die Normalbeschleunigungen: CK des Punktes C gegen O_2 , CN desselben Punktes gegen A , BM des Punktes B gegen A , und dann geht man zur Konstruktion des Beschleunigungsplanes über. Von einem beliebig gewählten Punkte a' (Abb. 4b) trägt man $\overline{a'c'} = \overline{NC}$ und $\overline{a'b'} = \overline{MB}$ ab und konstruiert auf diesen Strecken zwei Rechtecke mit der gemeinsamen Höhe $\overline{a'a} = \overline{b'b} = \overline{c'c} = 2\overline{AL} = \overline{j}_\gamma$, da die Punkte A , B und C sich auf der gleitenden Geraden befinden. Weiter trägt man noch $\overline{co_2} = \overline{CK}$ ab, womit der Plan relativer Normalbeschleunigungen und Coriolis Beschleunigungen erhalten ist.

Jetzt geht man zur Beschleunigungskonstruktion am erhaltenen Plane über. Da der Punkt A sich gleichförmig um den Punkt O_1 dreht: und $\overline{V}_a^{16} = \overline{AO}_1$ ist, so ist auch $\overline{j}_a^{16} = \overline{j}_a^{26} = \overline{AO}_1$. Diese Beschleunigung trägt man vom Punkte a' ab und durch ihren Endpunkt zieht man parallel zur Gleitrichtung 2 gegen 3 die Gerade $\alpha - \alpha$. Durch den Punkt o_2 zieht man senkrecht zu co_2 die Gerade $\gamma - \gamma$ und durch den Punkt b parallel zur Gleitrichtung 5 gegen 6 die Gerade $\beta - \beta$.

Auf den Geraden $\alpha - \alpha$, $\beta - \beta$ und $\gamma - \gamma$ befinden sich die Endpunkte der Beschleunigungen der Punkte A , B und C , als Punkte des Gliedes 3. Um diese Punkte zu finden, zieht man irgendwo zwischen $\beta - \beta$ und $\gamma - \gamma$ eine Gerade $b''c'' \perp BC$ und teilt dieselbe proportional den Abständen BA und AC , wodurch der Punkt a'' bestimmt ist. Dieser Punkt wird mit dem Schnittpunkte Q der Geraden $\beta - \beta$ und $\gamma - \gamma$ verbunden, wobei die Geraden $a''Q$ und $\alpha - \alpha$ sich im Endpunkte der Beschleunigung \overline{j}_a^{36} treffen. Zieht man durch diesen Punkt eine Gerade senkrecht zu BC , so ergeben die Schnittpunkte mit den Geraden $\beta - \beta$ und $\gamma - \gamma$ die Endpunkte der Beschleunigungen \overline{j}_b^{36} und \overline{j}_c^{36} . Die erste von diesen Beschleunigungen \overline{j}_b^{36} ist gleichzeitig auch die gesuchte Gleitbeschleunigung 5 gegen 6.

Darauf bezugnehmend, daß die Endpunkte der Beschleunigungen der Punkte A , B und C in den Bewegungen der Glieder 2 und 3 gegen 6, Rechtecke bilden, deren zwei Seiten der Gleitrichtung parallel

sind, zieht man durch den Endpunkt von \bar{j}_a^{26} eine Gerade senkrecht zu BC und durch die Endpunkte von \bar{j}_b^{36} und \bar{j}_c^{36} zwei Geraden parallel der Gleitrichtung des Gliedes 2 gegen 3. Die übrigen Ecken der so erhaltenen Rechtecke ergeben die Endpunkte der Beschleunigungen \bar{j}_b^{26} und \bar{j}_c^{26} .

Wie das aus der Abb. 4b zu ersehen ist, vereinigt der erhaltene Plan die verschiedenen Gleichungen, die die Beschleunigungen der Punkte A , B und C enthalten, wie zum Beispiel:

- 1) $\bar{j}_a^{26} = \bar{j}_a^{23} + \bar{j}_a^{36} + \bar{j}_\gamma$
- 2) $\bar{j}_b^{26} = \bar{j}_b^{23} + \bar{j}_b^{36} + \bar{j}_\gamma$
- 3) $\bar{j}_c^{26} = \bar{j}_c^{23} + \bar{j}_c^{36} + \bar{j}_\gamma$
- 4) $\bar{j}_a^{36} = \bar{j}_b^{36} + \bar{j}_{an}^b + \bar{j}_{at}^b$
- 5) $\bar{j}_a^{36} = \bar{j}_c^{36} + \bar{j}_{an}^c + \bar{j}_{at}^c$
- 6) $\bar{j}_b^{36} = \bar{j}_c^{36} + \bar{j}_{bn}^c + \bar{j}_{bt}^c$
- 7) $\bar{j}_a^{26} = \bar{j}_b^{26} + \bar{j}_{an}^b + \bar{j}_{at}^b$ usw.

Die drei ersten Gleichungen zeigen, daß der Abstand zwischen den Endpunkten von \bar{j}_a^{36} und \bar{j}_a^{26} die Gleitbeschleunigung \bar{j}^{23} darstellt, die für alle 3 Punkte gleich groß ist.

Die Gleichung 4) zeigt, daß der Abstand zwischen den Endpunkten von \bar{j}_b^{36} und \bar{j}_a^{36} die Tangentialbeschleunigung \bar{j}_{at}^b des Punktes A um B darstellt.

Die Gleichung 5) zeigt, daß der Abstand zwischen den Endpunkten von \bar{j}_c^{36} und \bar{j}_a^{36} die Tangentialbeschleunigung \bar{j}_{at}^c des Punktes A gegen C darstellt usw.

Zusammenfassung: Was die Beschleunigungskonstruktion kinematischer Ketten anbetrifft, so kommt man auf Grund dieser und der oben zitierten¹ Arbeit zum Beschluß, daß es am vorteilhaftesten ist, in der Zeichnung der Kette nur die gedrehten Geschwindigkeiten und die Normal- und Coriolis-Beschleunigungen zu konstruieren, die

¹ N. Rosenauer: Die Beschleunigungs-Konstruktion kinematischer Ketten mit Hilfe von Plänen relativer Normalbeschleunigungen. Acta Universitatis Latviensis. Mēch. fak. serija. T. II. № 4.

Some remarks about the shape of the clearance space in propeller turbines

by Dr. A. Delviġs.

The shape of the clearance space between the guide vanes and the runner (see Fig. 1) has not received much attention of the authors of publications about the design of propeller turbines. To my knowledge only Miyagi (Otogoro Miyagi, Theory and design of a propeller turbine; Tōhoku University Reports, Vol. VII № 3, 1928) and Kaplan (Kaplan - Lechner, Theorie und Bau von Turbinen - Schnellläufern, pg. 226—231) have emphasized the importance of this question and suggested some mathematical expressions suitable for the requirements. In the other publications generally only the runner is analysed, assuming that the flow approaches its entrance in a known way without indicating how to attain this. As for the publications of former times when propeller turbines were not yet universally used, it is interesting to note, that for instance such an authority as Camerer (Vorlesungen über Wasserkraftmaschinen, pg. 273 etc.) expresses doubts as to the usefulness of hydrodynamically calculated spaces in Francis turbines, such as advocated by Lorenz and Prášil; he finds such forms in all probability not very effective from a hydraulic standpoint, taking into account the apparently considerable retardations of the meridional flow.

As to my opinion of the subject, I can only second Miyagi in his assertion that: „in order to study the theory of a propeller turbine the first thing to know is the motion of water and its path in the clearance space, . . . in which the flow changes its direction from radially inwards to axially downwards“ . . . (pg. 231), — for it is quite obvious that not knowing how the flow approaches the runner, the proper calculation of its vanes is impracticable. It is also obvious that in the

clearance space, — where there are no vanes or other appliances to guide the water, — the analysis of the flow is theoretically possible only on a hydrodynamical basis. — The flow of water is of course turbulent, and besides there are many sources which cause asymmetry and distortions of the flow, such as the finite number and thickness of the guide and runner vanes, friction against the walls, losses through clearances, whirl tails originating at the exit points of the guide vanes, the transitions between the different geometrical forms of the guide vane channel, clearance space and runner channel, etc. The actual flow of water in the clearance space will, therefore, never be quite symmetrical about the axis, and it cannot quite satisfy the laws of the potential flow either. If we apply those to our analysis it will naturally be necessary to adjust the results with data, which only experiments can supply. This way has been successfully put to test in aerotechnical questions, and it is not feasible why it could not be applied to the analysis of water turbines as well. The difficulties may, of course, be much greater owing to the complicated ways of the water in turbines, but that does not concern the principle of the procedure. As it is impossible to make calculations taking into account all the above-mentioned causes of distortions, at present there are only two courses open to us: we can construct and analyse the clearance space on a purely arbitrary and empirical basis, or idealise the flow as far as it is necessary to make calculations; in this case we must assume it to be a potential flow symmetrical about the axis, — and then afterwards effect the necessary experimental adjustments.

In my opinion the second course is preferable; firstly I think that in a space where a relatively simple potential flow of an ideal fluid is possible, there is generally more possibility of a regular flow of natural water than in a space which is constructed arbitrarily; secondly I think that in a space where we can calculate all data about the velocities of an ideal fluid, in case of need, it is much easier to make necessary adjustments than in a space where we are practically blind as to what should be done, and have to rely solely upon experiments.

I shall herewith try to compare the shapes of clearance spaces proposed by Kaplan and Miyagi with a more general form (which satisfies the laws of the potential flow) in order to analyse their adaptability for practical purposes. As usual in this case I shall use cylindrical co-ordinates (r , φ , z), the positive z axis pointing downwards and

coinciding with the turbine axis. The velocity components are denoted as follows (see Fig. 1): \bar{C}_r — radial velocity; \bar{C}_u — circumferential velocity; \bar{C}_z — axial velocity. — As mentioned above the flow will be regarded as potential and symmetrical about the z axis; in order to ascertain the form of space it is therefore sufficient to analyse a meridional section (through the turbine axis) with its “meridional flow”, resulting from the velocities \bar{C}_r and \bar{C}_z , the vectorial sum of which \bar{C}_m will be called meridional velocity. — The suffices 1 are to refer to

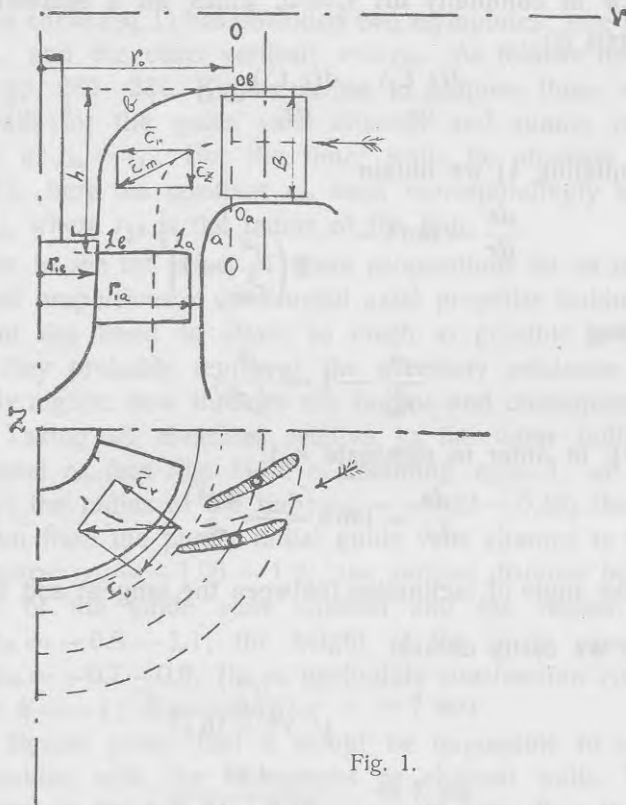


Fig. 1.

the notations at the entrance to the runner (where the clearance space ends), the suffices 0 to those at the transition from the purely radial space where the guide vanes are situated to the curved clearance space (where the clearance space begins); besides the suffices a are to refer to the notations at the outer wall of the clearance space, the suffices b to those at the inner wall (see Fig. 1).

Kaplan (pg. 229—231) proposes an equation for the outer wall of the clearance space:

$$z = \frac{r}{2 \sqrt{\frac{r^2}{r_{ka}^2} - 1}}; \quad (r_{ka} = \text{const}) \dots \dots \dots (1)$$

which is to represent a stream line on which the meridional velocity $C_m = \frac{k}{r}$; ($k = \text{const}$). It is easy to prove that this is not compatible with the law of continuity $\text{div } \bar{C} = 0$, which for a symmetrical flow about the axis is:

$$\frac{\partial(r \cdot C_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r \cdot C_z)}{\partial z} = 0 \dots \dots \dots (2)$$

Differentiating 1) we obtain:

$$\frac{dz}{dr} = \tan \delta = - \frac{1}{2 \left(\frac{r^2}{r_{ka}^2} - 1 \right)^{3/2}}; \dots \dots \dots (3)$$

or substituting

$$\frac{r^2}{r_{ka}^2} - 1 = \frac{r^2}{4z^2};$$

(from eq. 1), in order to eliminate r_{ka}):

$$\frac{dz}{dr} = \tan \delta = - \frac{4z^3}{r^3} \dots \dots \dots (3a)$$

where δ is the angle of inclination (between the tangent and the r axis).

Further we easily obtain:

$$\cos \delta = - \frac{r^3}{\sqrt{r^6 + 16z^6}}$$

$$\sin \delta = \frac{4z^3}{\sqrt{r^6 + 16z^6}}$$

and therefore:

$$C_r = C_m \cdot \cos \delta = \frac{k}{r} \cdot \cos \delta = - \frac{kr^2}{\sqrt{r^6 + 16z^6}}$$

$$C_z = C_m \cdot \sin \delta = \frac{k}{r} \cdot \sin \delta = \frac{4kz^3}{r \sqrt{r^6 + 16z^6}}$$

Substituting these expressions into equation (2) we obtain:

$$-\frac{48kr^2z^6}{\sqrt{(r^6+16z^6)^3}} + \frac{12kr^6z^2}{\sqrt{(r^6+16z^6)^3}} \neq 0$$

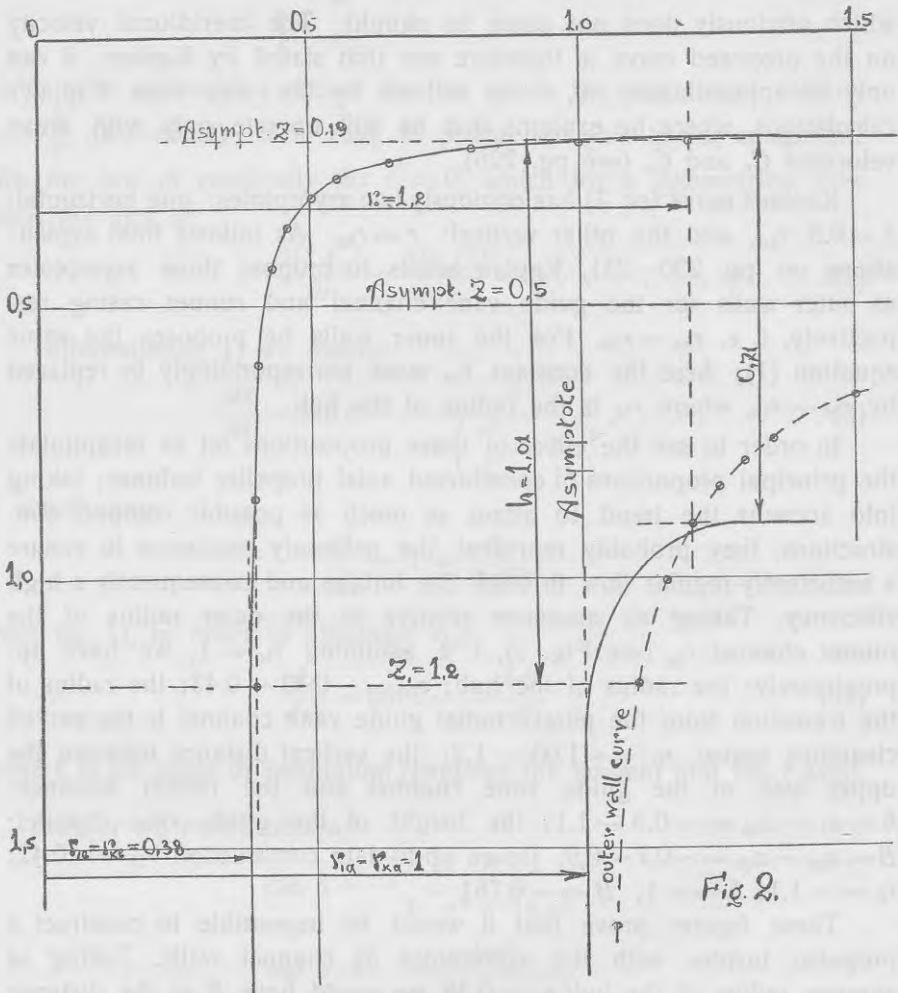
which obviously does not come to naught. The meridional velocity on the proposed curve is therefore not that stated by Kaplan; it can only be approximately so, — as follows by the way from Kaplan's calculations, where he explains that he will operate only with mean velocities C_r and C_z (see pg. 226).

Kaplans curve (eq. 1) has obviously two asymptotes: one horizontal: $z = 0.5 \cdot r_{ka}$, and the other vertical: $r = r_{ka}$. As follows from explanations on pp. 230—231, Kaplan seems to propose those asymptotes as outer walls for the guide vane channel and runner casing respectively, i. e. $r_{ka} = r_{1a}$. For the inner walls he proposes the same equation (1); here the constant r_{ka} must correspondingly be replaced by $r_{kb} = r_{1b}$, where r_{1b} is the radius of the hub.

In order to see the effect of these propositions let us recapitulate the principal proportions of constructed axial propeller turbines; taking into account the trend to attain as much as possible compact constructions, they probably represent the necessary minimum to ensure a sufficiently regular flow through the turbine and consequently a high efficiency. Taking all measures relative to the outer radius of the runner channel r_{1a} (see Fig. 1), i. e. assuming $r_{1a} = 1$, we have approximately: the radius of the hub: $r_{1b} = \sim 0.33 - 0.43$; the radius of the transition from the purely radial guide vane channel to the curved clearance space: $r_0 = \sim 1.05 - 1.2$; the vertical distance between the upper wall of the guide vane channel and the runner entrance: $h = z_1 - z_{0b} = \sim 0.9 - 1.1$; the height of the guide vane channel: $B = z_{0a} - z_{0b} = \sim 0.7 - 0.9$. [In an up-to-date construction $r_{1b} = \sim 0.42$; $r_0 = \sim 1.1$; $h = \sim 1$; $B = \sim 0.75$].

These figures prove that it would be impossible to construct a propeller turbine with the asymptotes as channel walls. Taking as average radius of the hub $r_{1b} = 0.38$, we would have B as the distance between the horizontal asymptotes of the outer and inner wall curves: $B = 0.5 - 0.19 = 0.31$, i. e. a figure more than twice smaller than that found in practice. We would obtain a correspondence with the practical B data taking, as lower wall of the guide vane channel, a horizontal line through the point where the clearance space wall curve intersects the vertical line $r = r_0$ (see Fig. 2). For instance, taking $r_0 = 1.2$ we

obtain $B \approx 0.71$; it would, of course, be necessary to form an arbitrarily curved transition between the horizontal line and the clearance space wall curve, — but obviously that applies to all cases.



Furthermore, from Fig. 2 where both curves representing the walls of the clearance space are drawn, we see that it would require a much larger h than is found in practice, in order to utilize the vertical asymptote as outer wall of the runner channel. Taking the average $h \approx r_{1a}$ (in Fig. 2 $h \approx 1.01$), it is seen that the curve passes at a considerable distance from the asymptote. It is, therefore, impossible

to utilize even a small portion of it as connection between the runner and guide vane channel walls, — and we must construct the outer wall of the clearance space quite arbitrarily. — As to the inner wall, the distances between the curve and its asymptotes at $r_0 \approx 1.2 r_{1a}$ and $h \approx r_{1a}$ are so small that transitions with minimal distortions could be easily effectuated.

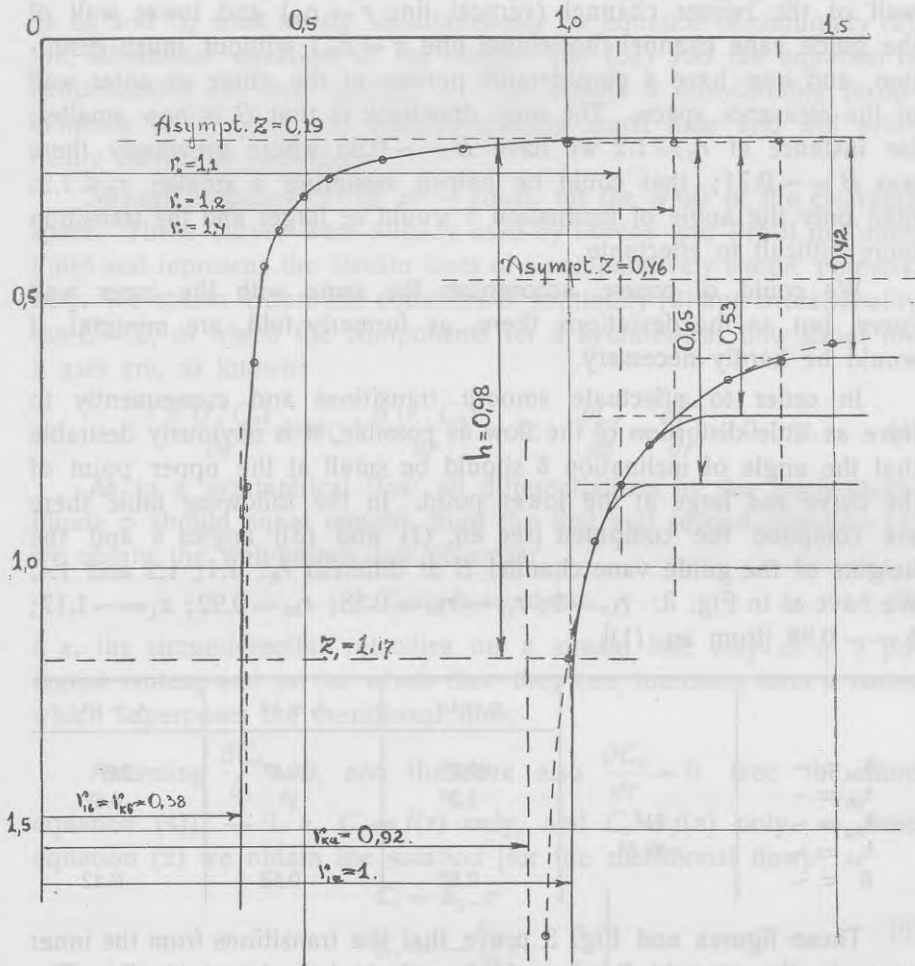


Fig. 3.

The total distortion of the outer wall curve is hardly compatible with Kaplan's opinion that this wall should be constructed properly in

order to ensure a high efficiency. — This is easier to obtain if we reduce the constant r_{ka} in eq. (1); then, obviously, the asymptote approaches the z axis, and we can assume as radius of the runner channel r_{1a} the distance between the z axis and the point where the curve intersects the horizontal line $z = z_1$. In Fig. 3 that is done with $r_{ka} = 0.92$. As can be seen we can connect this curve with the outer wall of the runner channel (vertical line $r = r_{1a}$) and lower wall of the guide vane channel (horizontal line $z = z_{0a}$) without much distortion, and now have a considerable portion of the curve as outer wall of the clearance space. The only drawback is that B is now smaller; for instance at $r_0 = 1.2$ we have $B = \sim 0.53$ where previously there was $B = \sim 0.71$; that could be helped assuming a smaller $r_0 < 1.2$; then only the angle of inclination δ would be larger and the transition more difficult to effectuate.

We could, of course, accomplish the same with the inner wall curve, but as the deviations there, as formerly told, are minimal, it would be hardly necessary.

In order to effectuate smooth transitions and consequently to have as little distortion of the flow as possible, it is obviously desirable that the angle of inclination δ should be small at the upper point of the curve and large at the lower point. In the following table there are compiled the computed [see eq. (1) and (3)] angles δ and the heights of the guide vane channel B at different r_0 : 1.1; 1.2 and 1.4. We have as in Fig. 3: $r_{1a} = 1$; $r_{1b} = r_{kb} = 0.38$; $r_{ka} = 0.92$; $z_1 = \sim 1.17$; $h = \sim 0.98$ [from eq. (1)].

		$r_0 = 1.1$	$r_0 = 1.2$	$r_0 = 1.4$
$\delta_{0a} = \sim$		60.7°	40.5°	24°
$\delta_{0b} = \sim$		1.5°	1°	0.6°
$\delta_{1a} = \sim$	81°			
$\delta_{1b} = \sim$	> 89.5°			
$B = \sim$		0.65	0.53	0.42

Those figures and Fig. 3 prove that the transitions from the inner curve to the straight lines could be effectuated almost ideally. The lower end of the outer curve also presents no difficulties, as the angle δ is sufficiently large; such arise only at the upper end of this curve, if we want a height B as used in practice ($B \geq 0.7$); then the angle δ would be $> 61^\circ$ and consequently the transition and distortion of the

flow considerable. The very high efficiencies of Kaplan turbines seem nevertheless to indicate that the distortions of the flow at the outer wall are of no great consideration. They are, by the way, inevitable in our compact constructions whatever curves are used.

The potential flow in the Kaplan space is apparently of a highly complicated nature, and could probably be analysed only graphically, — as C_r and C_z must satisfy simultaneously the equation of continuity (2), the differential equation of the stream line (3a) and the equation of irrotationality (4) (see further). — That means a considerable inconvenience as the graphical analysis requires much time and will practically never be faultless.

Miyagi proposes curves $zr^2 = \text{const.}$ for the walls of the clearance space. These curves were already used by Lorenz and Prášil in former times and represent the stream lines of a comparatively simple potential flow. We obtain it from the equations of continuity (2) and irrotationality $\text{rot } \bar{C} = 0$, of which the components for a symmetrical flow about the z axis are, as known:

$$\frac{\partial (r \cdot C_u)}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial (r \cdot C_u)}{\partial r} = 0; \quad \frac{\partial C_r}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial r} = 0 \quad \dots \dots (4)$$

As in a symmetrical flow all differentiations by the angle co-ordinate φ should equal naught, from the first and second equation (4) we obtain the well-known law of areas:

$$r \cdot C_u = k_1 = \text{const.} \quad \dots \dots \dots (5)$$

i. e. the circumferential velocities on a stream line vary as in a potential vortex, and in the whole flow they can, therefore, form a vortex which superposes the meridional flow.

Assuming $\frac{\partial C_r}{\partial z} = 0$, and therefore also $\frac{\partial C_z}{\partial r} = 0$ (see the third equation (4)), — i. e. $C_r = f(r)$ only, and $C_z = f(z)$ only, — from equation (2) we obtain the solution [for the meridional flow]:

$$\left. \begin{aligned} C_z &= k_2 \cdot z \\ C_r &= -\frac{k_2}{2} r + \frac{a}{r} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

where k_2 and a are constants (see Lorenz, Technische Hydrodynamik, pg. 356). —

In order not to obtain $C_r = \infty$ in the vicinity of the z axis, we assume $a = 0$, and then have:

$$\left. \begin{aligned} C_z &= k_2 \cdot z \\ C_r &= -\frac{k_2}{2} \cdot r \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

Substituting these C_r and C_z expressions in the stream line differential equation:

$$\frac{dr}{C_r} = \frac{dz}{C_z},$$

and integrating, we obtain the above mentioned equation:

$$r \cdot z^2 = \text{const.} \dots \dots \dots (7a)$$

Assuming the same constant k_2 for all stream lines, we obtain a meridional flow which is characterized by the following functions:

Stream function:

$$\psi = \frac{k_2}{2} z \cdot r^2 \dots \dots \dots (8)$$

[we obtain it integrating: $d\psi = C_z \cdot r dr - C_r \cdot rdz$]

Potential function:

$$\Phi = -\frac{k_2}{4} r^2 + \frac{k_2}{2} z^2 \dots \dots \dots (9)$$

[we obtain it integrating: $d\Phi = C_r \cdot dr + C_z \cdot dz$].

Curves $C_m = \text{const.}$:

$$C_m^2 = k_2^2 \left(\frac{r^2}{4} + z^2 \right) = \text{const. [from (7)]} \dots \dots (10)$$

Line of minimal meridional velocities $C_{m \min}$:

$$\left. \frac{z_i}{r_i} = \frac{\sqrt{2}}{4} \right\}$$

Minimal velocity on stream line:

$$C_{m \min} = -\frac{\sqrt{6}}{2} C_{ri} = \sqrt{3} C_{zi} \dots \dots \dots (11)$$

[the suffices i refer to the notations on the line of minimal meridional velocities].

The meridional section through this flow is represented in Fig. 4, which is drawn on a fixed scale with $k_2 = \frac{1}{3.125}$. As it is seen the $\Phi = \text{const.}$ curves are conjugate hyperboles with asymptotes

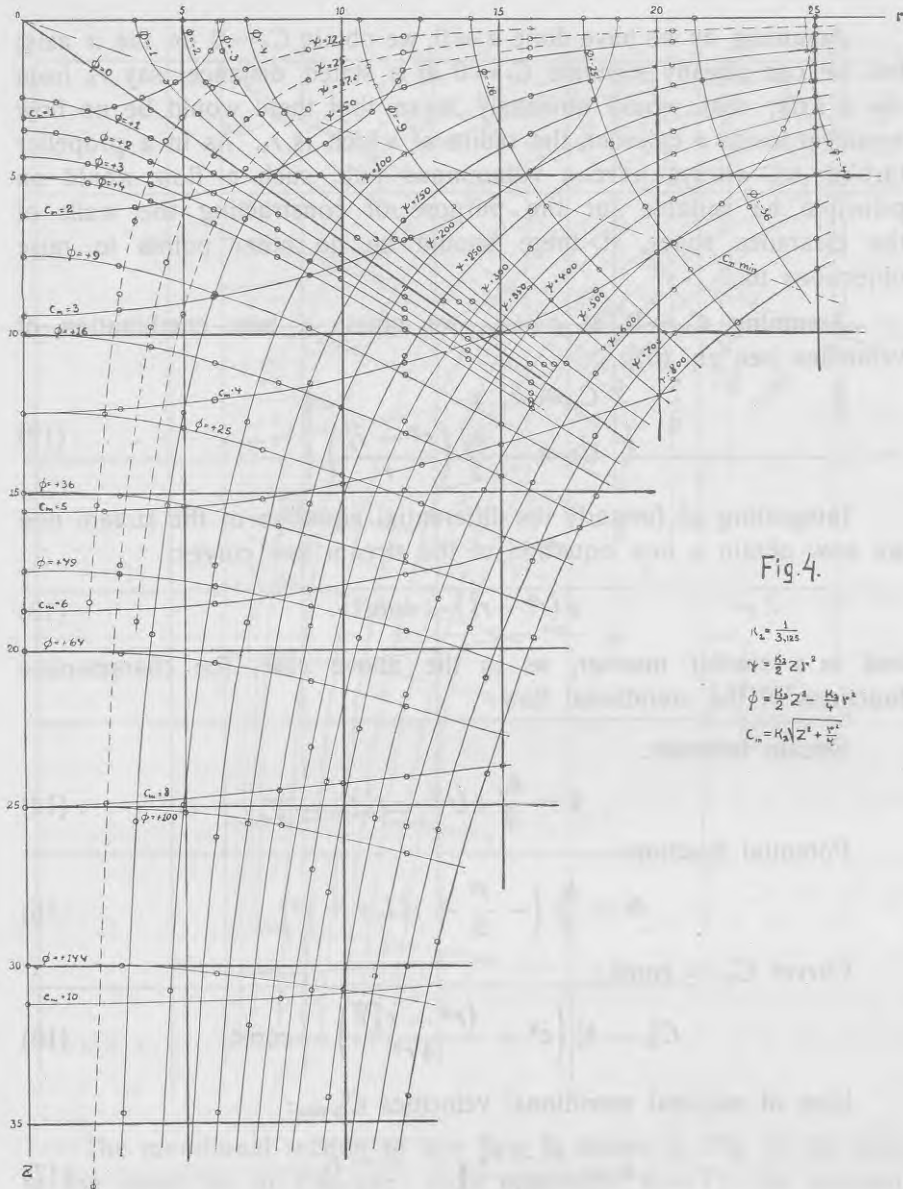


Fig. 4.

$$k_2 = \frac{1}{3.125}$$

$$\gamma = \frac{k_2}{2} z^2 r^2$$

$$\phi = \frac{k_2}{2} z^4 - \frac{k_2}{4} \gamma^2$$

$$C_m = k_2 \sqrt{z^2 + \frac{\gamma}{r}}$$

$$\frac{z}{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{C_m}};$$

the $C_m = \text{const.}$ curves are ellipses, the semiaxes of which: $\frac{a}{b} = \frac{2}{1}$;
the line of minimal meridional velocities is a straight line.

Assuming as we have done $a=0$, we obtain $C_r=0$ on the z axis; but we can already stipulate $C_r=0$ at a stated distance, say r_k from the z axis; that would obviously mean that there would be no flow whatever inside a cylinder, the radius of which is r_k . As in a propeller turbine we always have a voluminous hub, such a flow would on principle be suitable for the purpose of constructing the walls of the clearance space, if there should be no other points to raise objections to.

Assuming $C_r=0$ at $r=r_k$, we obtain a new combination of velocities [see eq. (6)]:

$$\left. \begin{aligned} C_z &= k_2 \cdot z \\ C_r &= -\frac{k_2}{2} \left(\frac{r^2 - r_k^2}{r} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

Integrating as formerly the differential equation of the stream line we now obtain a new equation of the stream line curves:

$$z(r^2 - r_k^2) = \text{const.} \dots \dots \dots (13)$$

and in a similar manner, as in the above case, the characteristic functions of the meridional flow:

Stream function:

$$\psi = \frac{k_2}{2} z (r^2 - r_k^2) \dots \dots \dots (14)$$

Potential function:

$$\Phi = \frac{k_2}{2} \left(-\frac{r^2}{2} + r_k^2 \ln r + z^2 \right) \dots \dots \dots (15)$$

Curves $C_m = \text{const.}$:

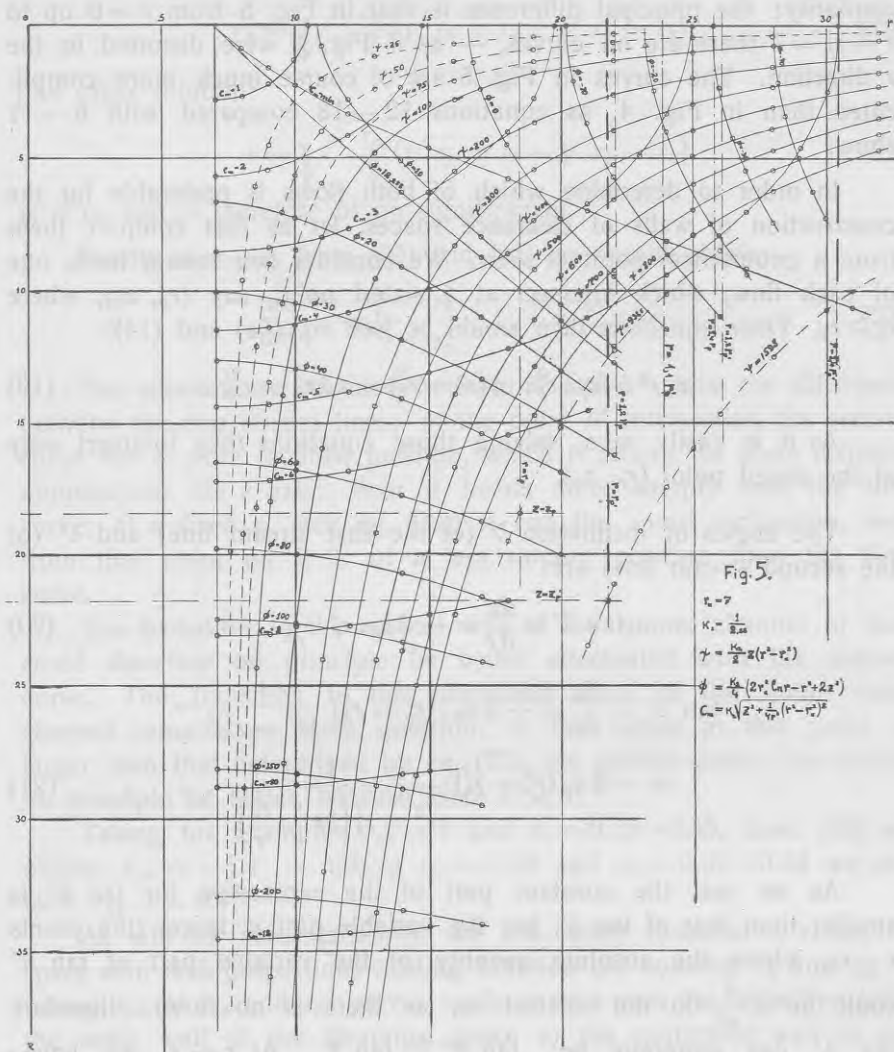
$$C_m^2 = k_2^2 \left(z^2 + \frac{(r^2 - r_k^2)^2}{4r^2} \right) = \text{const.} \dots \dots \dots (16)$$

Line of minimal meridional velocities $C_{m \min}$:

$$z_i = \frac{r_i^2 - r_k^2}{2r_i^2} \sqrt{\frac{r_i^2 + r_k^2}{2}} \dots \dots \dots (17)$$

Minimal velocity on stream line:

$$C_{m \min} = -\frac{C_{ri}}{r} \sqrt{\frac{3r_i^2 + r_k^2}{2}} = C_{zi} \sqrt{\frac{3r_i^2 + r_k^2}{r_i^2 + r_k^2}} \dots \dots (18)$$



The meridional section of this flow is shown in Fig. 5; the scale is the same as in Fig. 4; r_k is assumed: $r_k = 7$; the constant $k_2 = \frac{1}{2.88}$ is chosen in order to obtain the same C_r at $r = 25$ as in Fig. 4 (there the stream lines with corresponding parameters ϕ would intersect).

As it is seen, the general outlines of both flows show much

similarity; the principal difference is that in Fig. 5 from $r=0$ up to $r=r_k=7$ there are no curves, — as if Fig. 4 were distorted in the r direction. The curves in Fig. 5 are of course much more complicated than in Fig. 4, as equations 12—18 compared with 6—11 show.

In order to determine which of both flows is preferable for the construction of walls of clearance spaces, let us first compare them from a geometrical point of view. We consider two stream lines, one of each flow, which intersect at a stated point, say (r_p, z_p) , where $r_p > r_k$. Their equations then would be [see eq. (7a) and (14)]:

$$z \cdot r^2 = z_p \cdot r_p^2; \quad z(r^2 - r_k^2) = z_p(r_p^2 - r_k^2) \dots \dots \dots (19)$$

As it is easily seen, solving those equations they intersect only at the stated point (r_p, z_p) .

The angles of inclination δ' (of the first stream line) and δ'' (of the second stream line) are:

$$\tan \delta' = \frac{dz}{dr} = -2z_p \cdot r_p^2 \cdot \frac{1}{r^3} \dots \dots \dots (20)$$

$$\begin{aligned} \tan \delta'' &= \frac{dz}{dr} = -2z_p \cdot (r_p^2 - r_k^2) \cdot \frac{r}{(r^2 - r_k^2)^2} = \\ &= -2z_p (r_p^2 - r_k^2) \cdot \frac{1}{r^3 - r_k^2 \left(2r - \frac{r_k^2}{r}\right)} \dots \dots \dots (21) \end{aligned}$$

As we see, the constant part of the expression for $\tan \delta''$ is smaller than that of $\tan \delta'$, but the variable part is larger (the points $r < r_k$, where the absolute quantity of the variable part of $\tan \delta''$ could be $< \frac{1}{r^3}$ do not interest us, as there is no flow); therefore $\tan \delta''$ can generally be: $\tan \delta'' \leq \tan \delta'$. At $r = r_k$ we have: $\tan \delta'' = \infty > \tan \delta'$. If r is very large, the variable part of $\tan \delta''$ approaches $\frac{1}{r^3}$, as the positive part of the denominator changes in proportion to r^3 , but the negative part changes approximately in proportion to r only; there the influence of the constant part of $\tan \delta''$ would be more considerable and therefore $\tan \delta'' < \tan \delta'$. At an intermediate r_δ obviously: $\tan \delta' = \tan \delta''$; we obtain this r_δ from eq. (20) and (21) as:

$$r_{\delta} = \sqrt{\frac{r_p}{2} (\sqrt{r_p + r_k} + \sqrt{r_p - r_k})} \dots \dots \dots (22)$$

[the other solution:

$$r = \sqrt{\frac{r_p}{2} (\sqrt{r_p + r_k} - \sqrt{r_p - r_k})}$$

is $< r_k$, and is therefore of no significance].

Finally at $r = r_p$ from (20) and (21) we would obtain:

$$\frac{\tan \delta'}{\tan \delta''} = 1 - \frac{r_k^2}{r_p^2} < 1; \text{ i. e. } \delta' < \delta'' \dots \dots \dots (23)$$

The connections obtained between δ' and δ'' show the difference between the two stream lines: at the point of intersection the second curve has a more inclined position, which it retains for some distance approaching the r axis; then it bends more sharply than the first curve; at a fixed r_{δ} [see eq. (22)] it has the same inclination, and from that point on it is of a less sloping position than the first curve.

The transition to the vertical wall of the runner channel or hub could therefore on principle be better effectuated with the second curve. The transition to the horizontal walls of the guide vane channel remains an open question; if the radius at this point is larger than that determined by eq. (22), the second stream line would on principle be better, because there $\delta'' < \delta'$.

Taking for example: $r_{px} = 1$ and $r_k = 0.32-0.38$, from (22) we obtain: $r_{\delta x} = \sim 1.4$; -- taking $r_{py} = 0.38$ and $r_k = 0.32-0.33$ we obtain: $r_{\delta y} = \sim 0.47$.

As will be seen presently, we can easily construct a clearance space with such proportions existing between the constant r_k and r_p , -- taking r_{px} as r_{1a} and r_{py} as r_{1b} . -- In such a case the transition from the outer wall of the clearance space to the horizontal wall of the guide vane channel would be on principle easier to perform with the first curve, -- as the transition is situated at about $r_0 = \sim (1.05-1.2) r_{1a}$ (as previously mentioned) and it practically never reaches the necessary $\sim 1.4 r_{1a}$, where both curves would be equally inclined.

As to the inner wall, the second curve is obviously much more convenient, as the same inclination exists already at $\sim 0.47 r_{1a}$, and at $r_0 = (1.05-1.2) r_{1a}$ the inclination of the second curve ought to be much smaller.

In Fig. 6 and 7 there are constructed two clearance space profiles with the first and second curves respectively. In order to compare them with Fig. 2 and 3, the proportions of the principal dimensions are nearly the same, i. e.: $r_{1a} = 1$; $r_{1b} = 0.38$; $h = \sim 1$ (in Fig. 6 and 7 h are indicated for $r_0 = 1.2$).

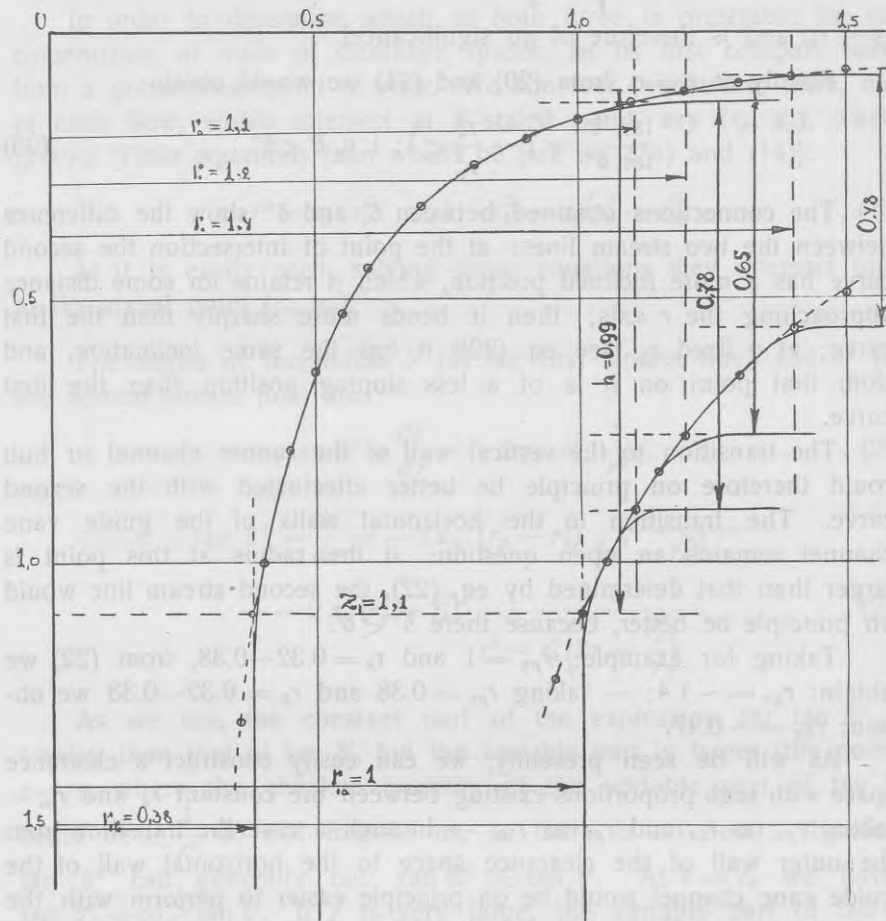


Fig. 6.

In Fig. 6 we assume $z_1 = 1.1$; then from eq. (19) and (20) (substituting $r_p = r_{1a}$, or $r_p = r_{1b}$, and $z_p = z_1$) we obtain the angles of inclination δ at different points, the heights of the guide vane channel B at different r_0 , and the depths of the runner h :

		$r_0 = 1.1$	$r_0 = 1.2$	$r_0 = 1.4$
$\delta'_{0a} = \sim$		59°	52°	38.5°
$\delta'_{0b} = \sim$		13.5°	10.5°	6.5°
$\delta'_{1a} = \sim$	65.5°			
$\delta'_{1b} = \sim$	80°			
$B = \sim$		0.78	0.65	0.48
$h = \sim$		0.97	0.99	1.02

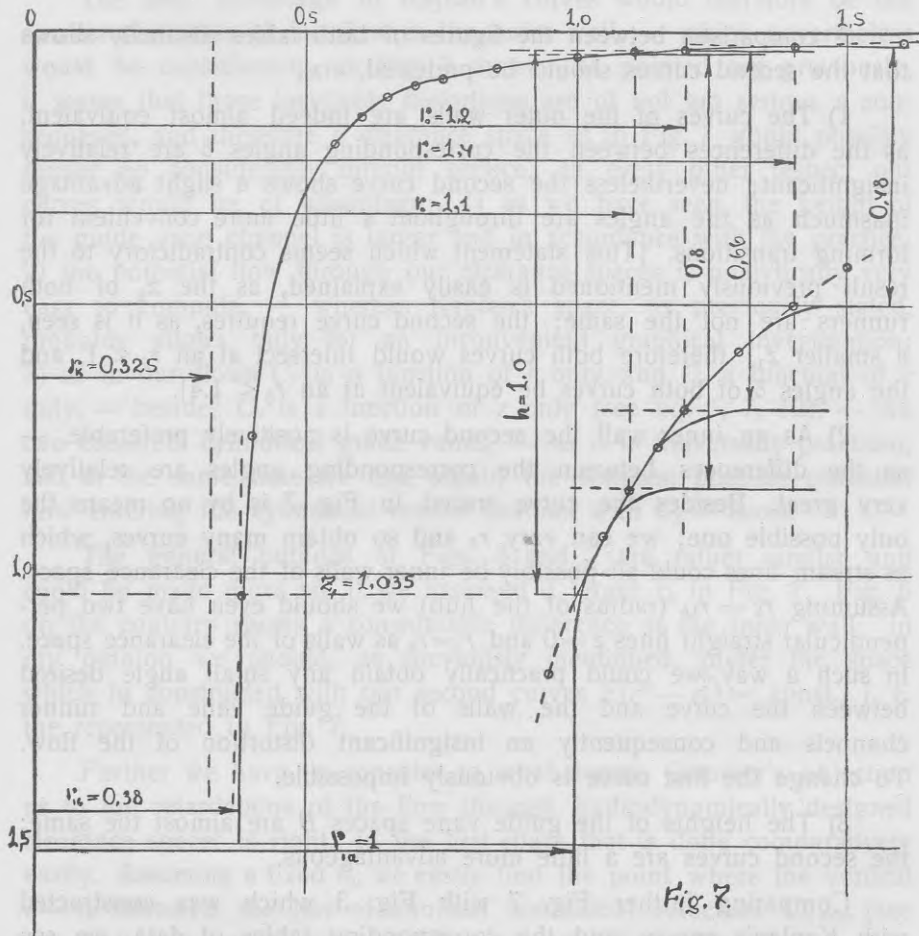


Fig. 7

In Fig. 7 in order to have approximately the same proportions, we assume $z_1 = 1.035$, and further $r_k = 0.325$; then from eq. (19) and (21) in a similar way as previously done, we obtain:

		$r_0 = 1.1$	$r_0 = 1.2$	$r_0 = 1.4$
$\delta''_{0a} = \sim$		59°	51°	37°
$\delta''_{0b} = \sim$		4°	3°	2°
$\delta''_{1a} = \sim$	66.5°			
$\delta''_{1b} = \sim$	87°			
$B = \sim$		0.80	0.66	0.48
$h = \sim$		1.0	1.0	1.01

A comparison between the figures of both tables distinctly shows that the second curves should be preferred, viz.,

1) The curves of the outer walls are indeed almost equivalent, as the differences between the corresponding angles δ are relatively insignificant; nevertheless the second curve shows a slight advantage inasmuch as the angles are throughout a little more convenient for forming transitions. [This statement which seems contradictory to the result previously mentioned is easily explained, as the z_1 of both runners are not the same; the second curve requires, as it is seen, a smaller z_1 ; therefore both curves would intersect at an $r_p < 1$, and the angles δ of both curves be equivalent at an $r_\delta < 1.4$].

2) As an inner wall the second curve is positively preferable, — as the differences between the corresponding angles are relatively very great. Besides the curve traced in Fig. 7 is by no means the only possible one; we can vary r_k and so obtain many curves, which as stream lines could all possibly be inner walls of the clearance space. Assuming $r_k = r_{1b}$ (radius of the hub) we should even have two perpendicular straight lines $z=0$ and $r=r_k$ as walls of the clearance space. In such a way we could practically obtain any small angle desired between the curve and the walls of the guide vane and runner channels and consequently an insignificant distortion of the flow. To change the first curve is obviously impossible.

3) The heights of the guide vane spaces B are almost the same; the second curves are a little more advantageous.

Comparing further Fig. 7 with Fig. 3 which was constructed with Kaplan's curves, and the corresponding tables of data, we see that:

1) Kaplan's curve for the outer wall allows a better transition to the vertical line of the runner channel; the transition to the horizontal

line of the guide vane channel is at $r_0 = 1.1$ slightly worse, but at larger r_0 better to effectuate.

2) As we can change the curves for the inner wall in both cases, they can be assumed as practically equivalent.

3) In Fig. 7 the heights of the guide vane channel B are considerably larger and much more in accordance with the practice than in Fig. 3.

The only advantage of Kaplan's curves would therefore be the smaller distortion of the flow at the outer wall, — which nevertheless would be considerable, as Fig. 3 shows. As pointed out previously, it seems that those inevitable distortions are of not too serious a consequence, and therefore a clearance space as in Fig. 7 would possibly render no considerably inferior service. In every other respect our curves would be of advantage: 1) as we have seen, the height of the guide vane channel is larger and in accordance with the practice; 2) the potential flow through our clearance spaces is analytically very easy to compute, — whereas Kaplan's space, as previously stated, probably allows only for an inconvenient graphical investigation; 3) as in our flows C_r is a function of r only, and C_z a function of z only, — besides C_u is a function of r only (see eq. 5, 7, 12), — we can construct cylindrical guide vanes, — as it is universally practised, and at the same time we can obtain the simplest possible potential flow entering the cylindrical runner channel with $C_z = \text{const.}$

The general outlines of Figs. 3 and 7 are rather similar and could be made more so, if we assumed a larger r_k in Fig. 7. Fig. 6 on the contrary shows a considerable difference at the inner wall; in my opinion we should, as previously mentioned, prefer the space which is constructed with our second curves $z(r^2 - r_k^2) = \text{const.}$, i. e. the represented in Fig. 7.

Further we have to consider to what degree Camerer's objection as to the retardations of the flow through hydrodynamically designed clearance spaces is right. In the first space that is done comparatively easily. Assuming a fixed r_0 , we easily find the point where the vertical $r = r_0$ intersects the line of minimal meridional velocities $C_{m \min}$ [see eq. (11)]; the co-ordinates of this point are, obviously: $r_{i0} = r_0$;

$$z_{i0} = \frac{r_0 \sqrt{2}}{4}.$$

As it is seen from Fig. 4, all those water particles will be retarded which move along stream lines lying above the stream line which passes through this point; all other stream lines permit only accelerations of the water particles passing through the clearance space. It is very convenient to express the conditions in terms that refer to the runner entrance. From eq. (7) and the just now obtained expressions we have:

$$z_1 \cdot r_{1d}^2 = z_{i0} \cdot r_{i0}^2 = \frac{r_0^3 \sqrt{2}}{4};$$

or

$$r_{1d} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_0^3 \cdot \sqrt{2}}{z_1}} \dots \dots \dots (24)$$

where r_{1d} denotes the radius of the runner up to which the water particles were formerly retarded in the clearance space. As $C_z = \text{const.}$, the relation of the quantities of the retarded and the total flow will obviously be:

$$\frac{\Theta_{ret}}{\Theta_{tot}} = \frac{r_{1d}^2 - r_{1b}^2}{r_{1a}^2 - r_{1b}^2} \dots \dots \dots (25)$$

The maximal variation of C_m will obviously occur on the stream line with the least ψ , i. e. that passes through $(r_{1b}; z_1)$ as the inner wall curve; the intersection point with $r = r_0$ is obtained from eq. (7):

$$z_{0b} = \frac{z_1 \cdot r_{1b}^2}{r_0^2},$$

and the velocity here from eq. (10):

$$C_{m0b} = k_2 \sqrt{\frac{r_0^2}{4} + z_{0b}^2} = k_2 \sqrt{\frac{r_0^2}{4} + \frac{z_1^2 r_{1b}^4}{r_0^4}} \dots \dots \dots (26)$$

We obtain the intersection point of the same stream line with the line of minimal meridional velocities [see eqs. (7a) and (11)]:

$$z_1 \cdot r_{1b}^2 = z_{ib} \cdot r_{ib}^2 = r_{ib}^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4};$$

or:

$$r_{ib} = \sqrt[3]{2 \sqrt{2} \cdot z_1 \cdot r_{1b}^2} \dots \dots \dots (27)$$

and further the minimal velocity [see eqs. (7) and (11)]:

$$C_{m \min b} = -\frac{\sqrt{6}}{2} C_{rib} = \frac{\sqrt{6}}{4} k_2 \cdot r_{ib};$$

substituting r_{ib} from eq. (27) we obtain:

$$C_{m \min b} = k_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt[3]{z_1 \cdot r_{1b}^2} \dots \dots \dots (28)$$

The relation between the velocities [eqs. (26) and (28)] will be:

$$\frac{C_{m0b}}{C_{m \min b}} = \frac{\sqrt{r_0^2 + \frac{4z_1^2 \cdot r_{1b}^4}{r_0^4}}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{z_1 r_{1b}^2}} \dots \dots \dots (29)$$

Assuming the data of Fig. 6: $z_1 = 1.1$; $r_{1b} = 0.38$; $r_{1a} = 1$, we would obtain:

- If $r_0 = 1.1$; $r_{1d} = \sim 0.599$; $\frac{\Theta_{ret}}{\Theta_{tot}} = \sim 0.25$; $\frac{C_{m0b}}{C_{m \min b}} = \sim 1.21$
- If $r_0 = 1.2$; $r_{1d} = \sim 0.745$; $\frac{\Theta_{ret}}{\Theta_{tot}} = \sim 0.48$; $\frac{C_{m0b}}{C_{m \min b}} = \sim 1.30$
- If $r_0 = 1.4$; $r_{1d} = \sim 0.949$; $\frac{\Theta_{ret}}{\Theta_{tot}} = \sim 0.86$; $\frac{C_{m0b}}{C_{m \min b}} = \sim 1.505$

Those figures prove that, assuming the practical $r_0 = 1.05 - 1.2$, there would in any case no more than about 50% of the flow be retarded, — usually less, — and that the variations of the meridional velocities are relatively small.

The investigation of the second flow Fig. 5 is mathematically not so easy. Without difficulty we find the intersection of the line of minimal velocities (see eq. 17) with the vertical line $r = r_0$, substituting $r_i = r_0$ and $z_i = z_{i0}$:

$$z_{i0} = \frac{r_0^2 - r_k^2}{2 r_0^2} \sqrt{\frac{r_0^2 + r_k^2}{2}}$$

From (13) we then obtain the corresponding r_{1d} at the runner entrance:

$$z_1 (r_{1d}^2 - r_k^2) = z_{i0} (r_0^2 - r_k^2) = \frac{(r_0^2 - r_k^2)^2}{2 r_0^2} \cdot \sqrt{\frac{r_0^2 + r_k^2}{2}}; \text{ or:}$$

$$r_{1d} = \sqrt{\frac{(r_0^2 - r_k^2)^2}{2 r_0^2 \cdot z_1} \sqrt{\frac{r_0^2 + r_k^2}{2}} + r_k^2} \dots \dots \dots (30)$$

As it was previously done, we obtain $\frac{\Theta_{ret}}{\Theta_{tot}}$ with this r_{1d} expression (see eq. 25).

In order to investigate the maximal variation of C_m , it would be necessary, as it was previously done, to find the point, where the

stream line which forms the inner wall, intersects the line of minimal velocities (eq. 17); — but that leads to an equation of the fifth power, which has no general solution. — The simplest way of investigation is perhaps the graphical one: from Fig. 5 we find the above mentioned point of intersection, compute $C_{m \min b}$ from eq. (18), then C_{m0b} at the point $(r_0; z_{0b})$ from eq. (16), — and finally we find the relation $C_{m0b}/C_{m \min b}$. —

In Fig. 5 the stream lines with the parameters $\psi = 75$ and $\psi = 1598$ almost correspond with the inner and outer walls respectively of the clearance space of Fig. 7; likewise the horizontal line denoted $z = z_p^1$ in Fig. 5 almost corresponds with the line z_1 of Fig. 7, which indicates the entrance to the runner (in Fig. 7 $z_1 = 1.035 r_{1a}$, — in Fig. 5 $z_1 = 1.0 r_{1a}$); further the radius of the inner cylinder in Fig. 5 $r_k = 7$ in proportion to r_{1a} ($r_k = \sim 0.322 r_{1a}$) almost corresponds with the radius $r_k = 0.325 r_{1a}$ of Fig. 7. —

[There exist small differences owing to the lines in Fig. 5 being originally drawn for other calculations]. — In the scale and denotations of Fig. 5 we have:

$$r_k = \sim 0.322 r_{1a} = 7; \quad r_{1b} = 0.38 r_{1a} = 8.26; \quad r_{1a} = r_p^1 = z_1 = z_p^1 = \sim 21.73; \\ 1.2 r_{1a} = 1.2 r_p^1 = \sim 26.1; \quad 1.4 r_{1a} = 1.4 r_p^1 = \sim 30.46; \quad 1.1 r_{1a} = 1.1 r_p^1 = \sim 23.9.$$

Further from Fig. 7 we obtain the point where $\psi = 75$ (the inner wall) intersects the line of minimal velocities: $r_{ib} = \sim 12.90$; $z_{ib} = \sim 3.66$.

With these figures we obtain from eq. (30) and (25):

$$\begin{aligned} \text{If } r_0 = 1.1 r_{1a} = \sim 23.9; \quad r_{1d} = \sim 0.716 r_{1a} = \sim 15.56; \quad \frac{\Theta_{ret}}{\Theta_{tot}} = \sim 0.43 \\ \text{If } r_0 = 1.2 r_{1a} = \sim 26.1; \quad r_{1d} = \sim 0.806 r_{1a} = \sim 17.51; \quad \frac{\Theta_{ret}}{\Theta_{tot}} = \sim 0.59 \\ \text{If } r_0 = 1.4 r_{1a} = \sim 30.46; \quad r_{1d} = \sim 0.998 r_{1a} = \sim 21.70; \quad \frac{\Theta_{ret}}{\Theta_{tot}} = \sim 1.0 \end{aligned}$$

Further we obtain from eq. (18) and (12):

$$C_{m \min b} = k_2 \cdot z_{ib} \sqrt{\frac{3 r_{ib}^2 + r_k^2}{r_{ib}^2 + r_k^2}} = \sim 5.84 k_2$$

and from eq. (16) and (13):

$$C_{m0b} = k_2 \sqrt{z_{0b}^2 + \frac{(r_0^2 - r_k^2)^2}{4 r_0^2}} = k_2 \sqrt{\frac{z_1^2 (r_{1b}^2 - r_k^2)^2}{(r_0^2 - r_k^2)^2} + \frac{(r_0^2 - r_k^2)^2}{4 r_0^2}}$$

If $r_0 = 1.1 r_{1a} = \sim 23.9$; $C_{m0b} = \sim 10.97 k_2$; $\frac{C_{m0b}}{C_{m \min b}} = \sim 1.87$

If $r_0 = 1.2 r_{1a} = \sim 26.1$; $C_{m0b} = \sim 12.12 k_2$; $\frac{C_{m0b}}{C_{m \min b}} = \sim 2.08$

If $r_0 = 1.4 r_{1a} = \sim 30.46$; $C_{m0b} = \sim 14.43 k_2$; $\frac{C_{m0b}}{C_{m \min b}} = \sim 2.47$

Comparing the figures obtained with those of the first flow, we see that the quantities of the retarded water, but especially the variations of velocities are larger. That would apparently confirm Camerer's objections to such clearance spaces. We must, however, not forget that our computations refer only to the meridional velocity C_m , — and this is only a component of the total velocity C , the other component of which is the circumferential velocity $C_u = \frac{k_1}{r}$ (see eq. 5), which increases approaching the z axis and to a certain extent compensates the decrease of C_m .

In the first flow we have [see eqs. (5) and (7)]:

$$C^2 = C_r^2 + C_u^2 + C_z^2 = \frac{k_2^2}{4} r^2 + \frac{k_1^2}{r^2} + k_2^2 z^2.$$

Substituting:

$$k_1 = r_0 \cdot C_{u0}; \quad k_2 = \frac{2 C_{r0}}{r_0};$$

$$z = \frac{z_1 \cdot r_1^2}{r^2} \text{ [from eq. (7)],}$$

we obtain:

$$C^2 = \frac{C_{r0}^2}{r_0^2} \cdot r^2 + \frac{r_0^2 \cdot C_{u0}^2}{r^2} + \frac{4 C_{r0}^2 \cdot z_1^2 r_1^4}{r_0^2} \cdot \frac{1}{r^4} \dots \dots \dots (31)$$

At $r=0$ and $r=\infty$, $C^2 = \infty$, and at a certain r_{\min} , C^2 has a minimum which we find differentiating eq. (31):

$$r^6 - \frac{r_0^4 \cdot C_{u0}^2}{C_{r0}^2} \cdot r^2 - 8 z_1^2 r_1^4 = 0 \dots \dots \dots (32)$$

$$r_{\min} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{4z_1^2 r_1^4 + \sqrt{16z_1^4 r_1^8 - \frac{r_0^{12} (C_{u0})^6}{27 (C_{r0})^6}} + \sqrt[3]{4z_1^2 r_1^4 - \sqrt{16z_1^4 r_1^8 - \frac{r_0^{12} (C_{u0})^6}{27 (C_{r0})^6}}}} \quad (33)$$

If $C_{u0} = 0$, from eq. (33) we would obviously obtain the same r_i as previously in our meridional flow [see eq. (27)]. Further it is easily seen, that r_{\min} increases with C_{u0}/C_{r0}

[as we can represent eq. (33) as $\sqrt[3]{\sqrt{2m-n} + \sqrt[3]{n}}$, where $n = f\left(\frac{C_{u0}}{C_{r0}}\right)$];

an increase of C_{u0} therefore displaces the point of minimum velocity farther from the z axis, and with a sufficiently intense vortex we can obtain a flow through the clearance space without any retardations whatever. Finally it is seen that an increase of r_1 also results in an increase of r_{\min} ; therefore of all the stream lines in the clearance space the one which forms the inner wall (with the least ψ) reaches its minimum velocity at the shortest distance from the z axis, — this being a result which corresponds with the conditions in the meridional flow.

If we want no retardations in the clearance space, the minimum velocity of the inner wall stream line must be at the distance r_0 from the z axis. Substituting $r = r_0$ in eq. (32), we obtain the necessary C_{u0}/C_{r0} for any stream line:

$$\frac{C_{u0}}{C_{r0}} = \sqrt[3]{1 - \frac{8z_1^2 r_1^4}{r_0^6}} \dots \dots \dots (34)$$

This expression increases with the decrease of r_1 ; in other words it means the same as the above said, — that the stream line which forms the inner wall is the most difficult to compensate; at $r_1 = 0$ (with the r and z axes as stream lines) we would obtain the maximum: $C_{u0}/C_{r0} = 1$. We obtain the same figure if $r_0 = \infty$; a decrease of r_0 results in a decrease of C_{u0}/C_{r0} , and we obtain the minimum: $C_{u0}/C_{r0} = 0$ at an

$$r_0 = \sqrt[3]{2\sqrt{2}z_1 r_1^2}$$

[this expression is, of course, identical with eq. (27) for the meridional flow]; further up to $r_0 = 0$ the function is imaginary.

Assuming for the inner wall as previously: $z_1 = 1.1$; $r_{1b} = 0.38$, we would obtain:

if $r_0 = 1.2$	$\frac{C_{u0}}{C_{r0}} = \sim 0.966$
if $r_0 = 1.1$	$\frac{C_{u0}}{C_{r0}} = \sim 0.94$

These results show that it is always possible to eliminate the retardations in the clearance space, if C_{u0}/C_{r0} is in the vicinity of 1. Taking into consideration the actually used velocities at the exit point of the runner, it is possible to compute from the fundamental equation of turbines that such figures are to be expected in the vicinity of $n_s = \sim 500 - 550$; therefore in all turbines with higher n_s (where C_{u0} is smaller) retardations would be inevitable.

The second flow is much more difficult to investigate. We obtain the total velocity C from [see eq. (5) and (12)]:

$$C^2 = C_r^2 + C_u^2 + C_z^2 = \frac{k_2^2}{4} \cdot \frac{(r^2 - r_k^2)^2}{r^2} + \frac{k_1^2}{r^2} + k_2^2 z^2$$

Substituting:

$$k_1 = r_0 \cdot C_{u0}; \quad k_2 = \frac{2 C_{r0} \cdot r_0}{r_0^2 - r_k^2}; \quad z = \frac{z_1 (r_1^2 - r_k^2)}{r^2 - r_k^2}$$

(from eq. 13), we obtain:

$$C^2 = \frac{C_{r0}^2 \cdot r_0^2 (r^2 - r_k^2)^2}{(r_0^2 - r_k^2)^2 r^2} + \frac{r_0^2 \cdot C_{u0}^2}{r^2} + \frac{4 C_{r0}^2 \cdot r_0^2 \cdot z_1^2 (r_1^2 - r_k^2)^2}{(r_0^2 - r_k^2)^2 \cdot (r^2 - r_k^2)^2} \dots (35)$$

The general course of this function is similar to that of the first flow (see eq. 31); the principal difference is that $C^2 = \infty$ is reached already at $r = r_k$; $C^2 = \infty$ also at $r = \infty$ (as in the first flow), and between both maximums the function has a minimum. Differentiating eq. (35) we obtain:

$$\begin{aligned} & \frac{C_{r0}^2 \cdot r_0^2}{(r_0^2 - r_k^2)^2} \cdot r^4 (r^2 - r_k^2)^3 - \left[\frac{C_{r0}^2 \cdot r_0^2 \cdot r_k^4}{(r_0^2 - r_k^2)^2} + r_0^2 C_{u0}^2 \right] \cdot (r^2 - r_k^2)^3 - \\ & - \frac{8 C_{r0}^2 \cdot r_0^2 \cdot z_1^2 (r_1^2 - r_k^2)^2}{(r_0^2 - r_k^2)^2} \cdot r^4 = 0 \dots \dots \dots (36) \end{aligned}$$

Substituting $y = r^2$, we obviously obtain an equation of the fifth power from which to calculate r_{\min} (where the minimal velocity would occur). As a general solution is impossible, the investigation could be made only approximately. The results would be similar to those of the first flow, viz., with the increase of C_{u0} and r_1 , r_{\min} also increases; the meaning and significance of these results is the same as there. If we want no retardations in the clearance space, the minimum of velocities on the inner wall stream line must (as in the first flow) be at r_0 from the z axis. Substituting $r = r_0$ in eq. (36) we obtain the necessary C_{u0}/C_{r0} for any stream line:

$$\frac{C_{z0}}{C_{r0}} = \sqrt{\frac{r_0^2 + r_k^2}{r_0^2 - r_k^2} \frac{8r_0^4 \cdot z_1^2 (r_1^2 - r_k^2)^2}{(r_0^2 - r_k^2)^5}} \dots \dots \dots (37)$$

Comparing this expression with eq. (34) (which was obtained for the first flow), we see that its first (positive) part is not constant any more (as it was in the first flow), but varies with r_0 . — At $r_0 = r_k$ it is equal to ∞ , at $r_0 = \infty$ it approaches a horizontal asymptote = 1; it generally has the form of a hyperbole. — The course of the second (negative) part is similar to that of the corresponding part in eq. (34):

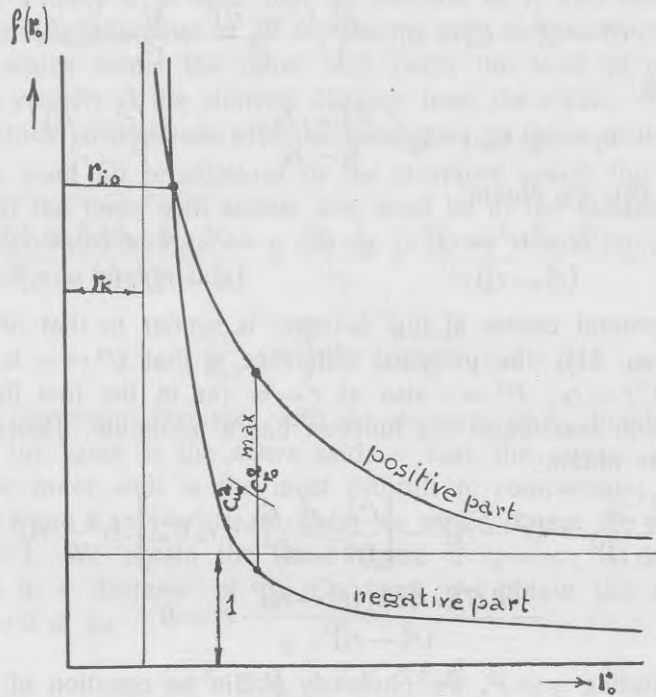


Fig. 8.

it increases with r_1 and decreases with r_0 . — At $r_0 = r_k$ it is equal to ∞ (as the positive part), but at $r_0 = \infty$ it has the r_0 axis as horizontal asymptote; — this function too has the general form of a hyperbole; — compared with that of the positive part its horizontal asymptote lies lower; besides, owing to the much larger power of r_0 in the denominator [transforming both parts so as not to have r_0 in the numerators], the curve approaches its horizontal asymptote faster, but its vertical

asymptote more slowly, and has a middle part more sharply bent (see Fig. 8). — The difference between the ordinates of both curves is obviously $\left(\frac{C_{u0}}{C_{r0}}\right)^2$; as it is seen, it does not constantly decrease with the decrease of r_0 (as we had in the first flow), but it has a maximum; from $r_0 = \infty$ to this maximum the function increases (contrary to the first flow), and only then begins to decrease. — At a certain point r_{i0} both curves intersect, and there we have the minimum: $C_{u0}/C_{r0} = 0$, i. e. $C_u = 0$; obviously this r_{i0} is the same as the distance from the z axis to the point of intersection between the stream line and the line of minimal velocities in the meridional flow. — From this point on C_{u0}/C_{r0} is imaginary as in the first flow. —

If r_1 (i. e. the stream line) is given, we could on principle by differentiating eq. 37) obtain the r_0 , where there would be the maximum C_{u0}/C_{r0} . — But, as the general solution is impossible, we could do the reverse, viz., assume r_0 as argument and compute the corresponding r_{1kr} (i. e. stream line) on which the maximum C_{u0}/C_{r0} would occur at r_0 . Then we obtain:

$$r_{1kr} = \sqrt{r_k^2 + \frac{r_k(r_0^2 - r_k^2)^2}{2z_1 r_0}} \sqrt{\frac{1}{3r_0^2 - 2r_k^2}} \dots \dots (38)$$

As it is easily seen, r_{1kr} decreases with the decrease of r_0 ; that means that by reducing r_0 sufficiently, only the stream lines in the vicinity of the inner wall would eventually not reach their maximal C_{u0}/C_{r0} at the entrance to the clearance space, and a further decrease of r_0 would result in a slight increase of the necessary C_{u0}/C_{r0} ; — all other stream lines would require a reduced C_{u0}/C_{r0} . — These conditions are shown in Fig. 9 where there is constructed the equation (37) with $z_1 = 1.035$ and $r_k = 0.325$ (as previously used) and 3 different $r_0 = 1.4$; 1.2 and 1.1. — As it is seen r_{1kr} lies somewhere between $r_1 = 0.4$ and 0.5. — If analytically computed from eq. (38) with $r_0 = 1.2$ we would obtain $r_{1kr} = \sim 0.471$. —

At $r_1 = r_k$ the negative part of the equation (37) disappears, and we have:

$$(C_{u0}/C_{r0})_{\max} = \sqrt{\frac{r_0^2 + r_k^2}{r_0^2 - r_k^2}} > 1$$

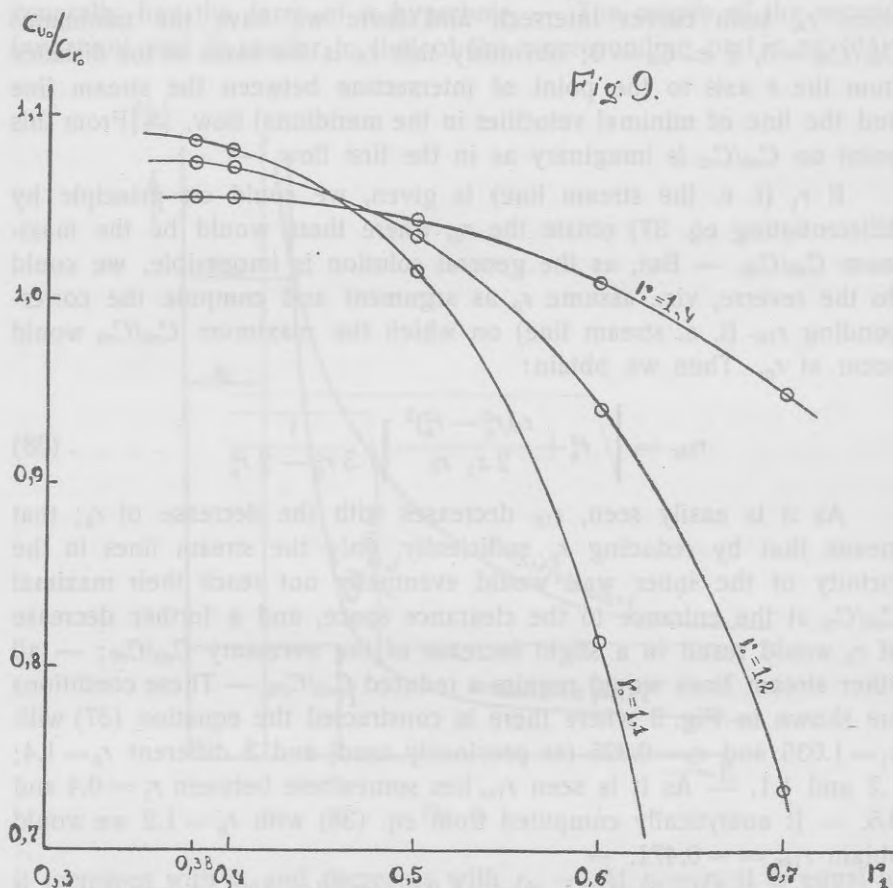
as maximal C_{u0}/C_{r0} for a stated r_0 and r_k . — The more r_0 decreases or r_k increases, the more this expression differs from the unity (which

was the maximum of C_{u0}/C_{r0} for the first flow, see eq. (34). — The second flow requires, therefore, a more intense vortex to compensate the retardations of the meridional flow. —

Assuming as previously $r_k = 0.325$, we obtain:

$$\text{with } r_0 = 1.2 \quad (C_{u0}/C_{r0})_{\max} = \sim 1.077$$

$$\text{with } r_0 = 1.1 \quad (C_{u0}/C_{r0})_{\max} = \sim 1.092$$



Further, assuming as previously $r_k = 0.325$; $z_1 = 1.035$; $r_{1b} = 0.38$ for the inner wall stream line, we obtain the required C_{u0}/C_{r0} from eq. (37):

$$\text{with } r_0 = 1.2 \quad C_{u0}/C_{r0} = \sim 1.073$$

$$\text{with } r_0 = 1.1 \quad C_{u0}/C_{r0} = \sim 1.086$$

These figure are larger than those obtained for the first flow, but the differences are not considerable; practically retardations in the flow would therefore not yet occur at specific speeds n_s which are only somewhat lower than the above-mentioned (for the first flow)

$$n_s = \sim 500 - 550.$$

As in most propeller turbines n_s is higher we cannot prevent certain retardations of the flow in the clearance space; it is only a question whether they are sufficiently small so as not to cause any difficulties. — We can, of course, investigate this question in an analogous manner, as previously done with the meridional flows. The first flow would present no considerable difficulty, as from eqs. (31) and (33) we can obtain the minimal velocity C_{\min} ; the second flow would, as in our previous calculations, require an approximate or graphical investigation, as it is not possible to obtain r_{\min} in a general form. — As such investigations would perhaps be too cumbersome for practical purposes, I shall try to do it in a simplified manner in order to show the principal practical consequences.

As in high speed turbines it is impossible to eliminate retardations in the clearance space, the minimal velocity C_{\min} will be reached at a point of the stream line, which lies between r_0 and r_i . If we want the total velocities C at r_0 and an arbitrary r_x to be the same, C_{\min} will evidently occur at a point between r_0 and r_x , and if there is no great difference between r_0 and r_x , it is to be expected that C_{\min} will also not differ much from C_0 . If we take as r_x the radius r_i where the meridional velocity is minimal ($C_{m \min}$), we should have the condition:

$$C_0^2 = C_i^2; \text{ or: } C_{u0}^2 + C_{m0}^2 = C_{m \min}^2 + C_{ui}^2;$$

as from eq. (5) we have: $C_{ui} \cdot r_i = C_{u0} \cdot r_0$, we easily obtain:

$$\frac{C_{u0}}{C_{m0}} = \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{C_{m \min}}{C_{m0}}\right)^2}{\left(\frac{r_0}{r_i}\right)^2 - 1}} \dots \dots \dots (39)$$

If we take the inner wall stream line b , with the previous data for the first flow: $z_1 = 1.1$; $r_{1b} = 0.38$ and assume $r_0 = 1.2$ we obtain $r_{ib} = \sim 0.766$ from eq. (27), $C_{m0b}/C_{m \min b} = \sim 1.3$ and $C_{u0}/C_{m0b} = \sim 0.53$ from eq. (39). We can of course use the same equations in order to compute the C_{u0}/C_{m0} necessary for other stream lines, i. e. other r_1 , up to the stream line through r_{1d} (see eq. 24), which fixes the limits of

the retarded water. The results are shown in Fig. 10; as it is seen, with an increase of r_1 we at first obtain an increase of C_{u0}/C_{m0} up to a maximum $C_{u0}/C_{m0 \max} = \sim 0.536$ at $r_1 = \sim 0.5$ and only then sets in a decrease up to $r_{1d} = \sim 0.745$. The fact that C_{u0}/C_{m0} at first increases does not mean, however, that here the variations of velocities are greater; it is so only because the point of intersection between the stream line and that of minimal velocities is at a shorter distance from the line $r = r_0$, and that requires a more intense vortex in order to compensate the decrease of C_m .

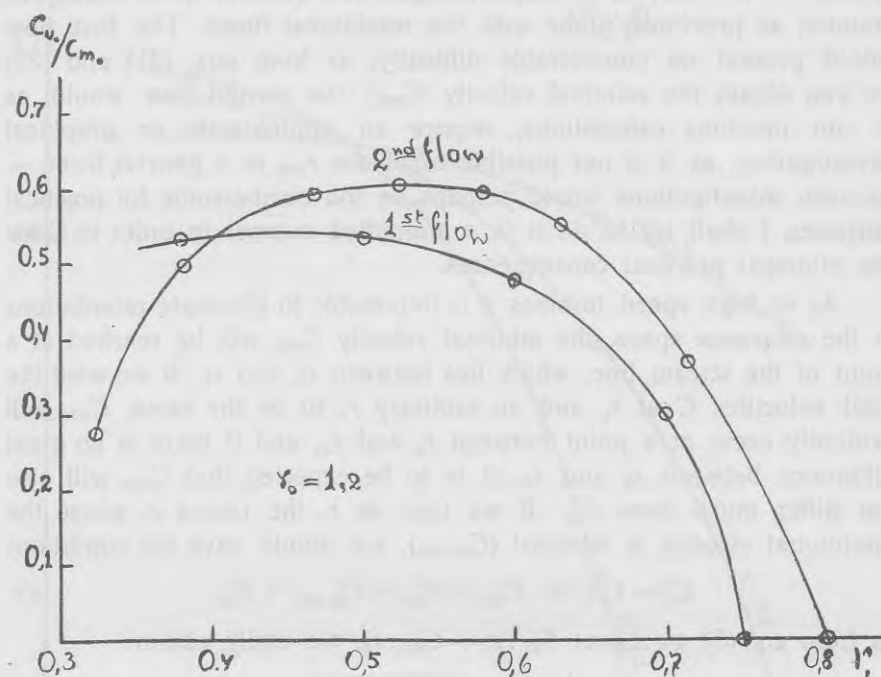


Fig. 10.

The above said is clearly seen in Fig. 11, where there are drawn two curves; both represent the variations of the total velocities C (see eq. 31) on the stream lines at different r in the first flow. The data are the same as mentioned above, and $C_{u0}/C_{m0b} = \sim 0.53$ (as computed); from eq. (26) we obtain $C_{m0b} = 0.61 k_2$, and therefore: $C_{u0} = \sim 0.324 k_2$; both curves are constructed with this C_{u0} . The first curve refers to the inner wall stream line ($r_{1b} = 0.38$), the second to the stream line through $r_1 = \sim 0.5$ (which requires the maximal C_{u0}/C_{m0} as we have seen above).

The former data for the inner wall stream line of the second flow were (as it is necessary to obtain some of the data graphically from Fig. 5, they as previously are also stated in the scale of this drawing): $z_1 = \sim 1.0 r_{1a} = \sim 21.73$; $r_{1b} = 0.38 r_{1a} = \sim 8.26$; $r_k = \sim 0.322 r_{1a} = 7.0$; $r_{ib} = 12.9$. Assuming $r_0 = 1.2 r_{1a} = \sim 26.1$ we had previously obtained: $r_{1d} = \sim 0.806 r_{1a} = \sim 17.51$; $C_{m0b} = \sim 12.12 k_2$, $C_{m \min b} = \sim 5.84 k_2$; $C_{m0b}/C_{m \min b} = \sim 2.08$.

With these figures from eq. (39) we obtain: $C_{u0}/C_{m0b} = \sim 0.50$. Investigating other stream lines in the same manner up to $r_{1d} = \sim 0.806 r_{1a} = \sim 17.51$, we obtain results which are similar to those of the first flow, and are represented in Fig. 10. The above said referring to the shape of the first curve applies obviously also to this one. The maximum $C_{u0}/C_{m0} = \sim 0.607$ here is comparatively larger than that in the first flow and corresponds to a $r_1 = \sim 0.525 r_{1a} = \sim 11.4$.

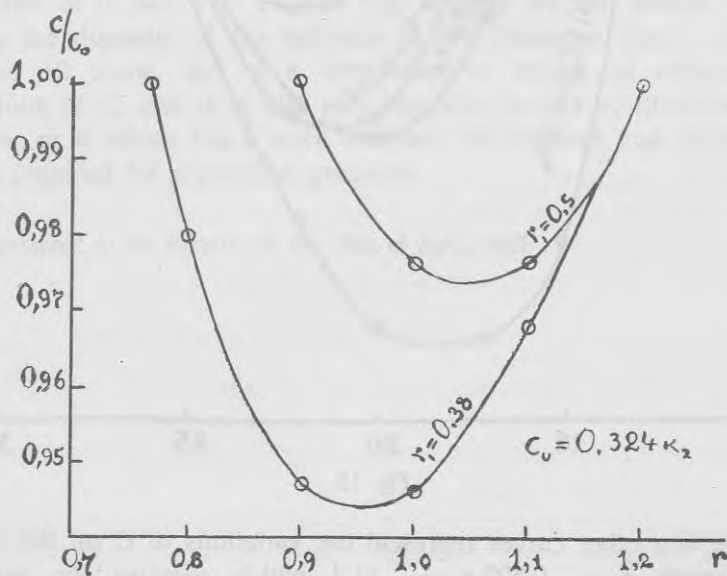


Fig. 11.

In Fig. 12 there are shown four curves which represent the variations of the total velocity C (see eq. 35) in a similar manner as the curves in Fig. 11 show the variations in the first flow.

Two of these curves refer to the stream line b which forms the inner wall; one is constructed with $C_{u0}/C_{m0b} = \sim 0.50$ obtained for this

stream line previously; this figure with $C_{m0b} = \sim 12.12 k_2$ results in $C_{u0} = \sim 6.06 k_2$. The other is constructed with $C_{u0} = \sim 7.52 k_2$ which results from the maximal $C_{u0}/C_{m0} = \sim 0.607$ (for $r_1 = \sim 0.525 r_{1a} = \sim 11.4$), as we have here $C_{m0} = \sim 12.4$ [see eqs. (16) and (13)]; that would give $C_{u0}/C_{m0b} = \sim 0.62$.

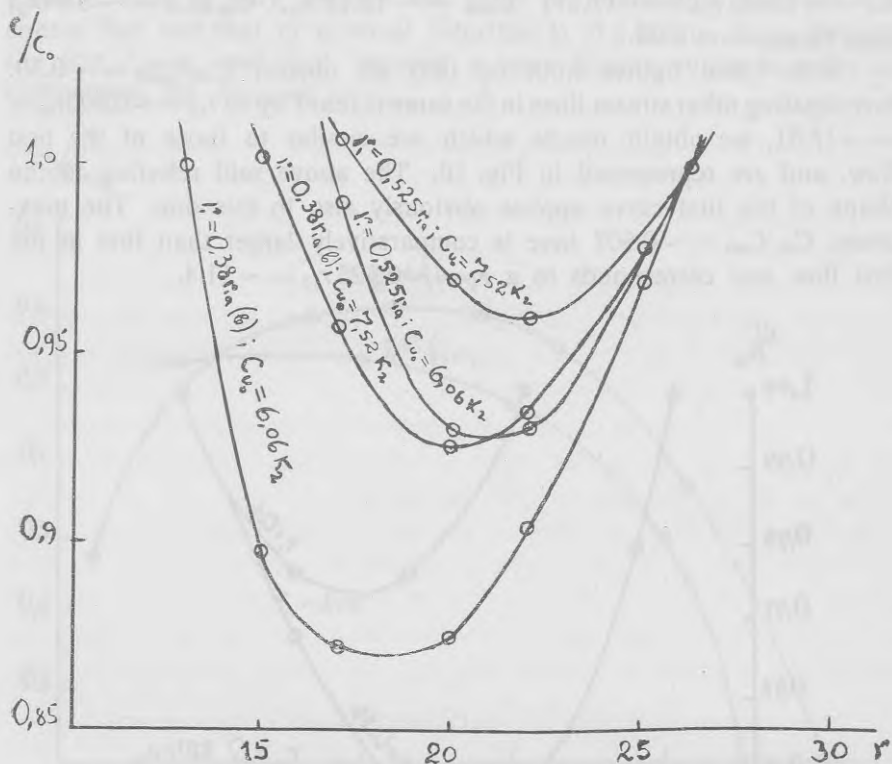


Fig. 12.

The two other curves represent the variations of C on the stream line through $r_1 = \sim 0.525 r_{1a} = \sim 11.4$ which requires the maximal $C_{u0}/C_{m0} = \sim 0.607$; as the two just now mentioned curves, they are constructed with the same $C_{u0} = 6.06 k_2$ and $C_{u0} = 7.52 k_2$ respectively.

The figures and diagrams Figs. 10–12 doubtlessly show us that the maximum decreases of the total velocities C occur at the inner wall of the clearance space, and that in the second flow they are more considerable. Relatively these decreases are not very great in either flow; as Fig. 12 shows, the maximum decrease occurs in the

second flow, and with $C_{n0}/C_{m0b} = 0.50$ is only about 13%; compared with the previously found relation in the meridional flow: $C_{m0b}/C_{m \min b} = \sim 2.08$, i. e. a decrease of $\sim 52\%$ that is very little. As $C_{n0}/C_{m0b} = \sim 0.50$ could be expected in a turbine with $n_s = \sim 800-850$, and turbines of a higher specific speed are comparatively much less used in practice, it follows that in most cases there could be hardly raised any objections (if any at all) to the use of hydrodynamically computed clearance spaces. If, nevertheless, the decreases of the velocities should be too great (for instance, if n_s is very high), our calculations and diagrams show the course to adopt in order to reduce them, viz., we can assume a smaller r_k , — in which case the shapes of the curves in Fig. 12 would obviously approach those of Fig. 11 (here we have $r_k = 0$) where the variations are smaller: or we can take a larger diameter of the hub and so increase r_{1b} , — which also reduces the variations of C [see Fig. 11 and 12]. Finally we can reduce r_0 , i. e. reduce the diameter of the entrance to the clearance space; as Figs. 11 and 12 show, this is a very effective course of reducing the variations of C , and it is also very desirable from a constructive point of view, as it allows for a more compact construction and reduces the forces required for regulation purposes.

Presented to the Faculty on the 29th of April, 1937.

Dažas piezīmes par spraugas telpas formu propeller-turbīnās.

Dr. A. Delvīgs.

Autoreferāts.

Darbā aplūkotas salīdzināšanas nolūkā 3 spraugas telpas:

1) Kaplana dotā telpa

$$z = \frac{r}{2 \sqrt{\frac{r^2}{r_{ka}^2} - 1}};$$

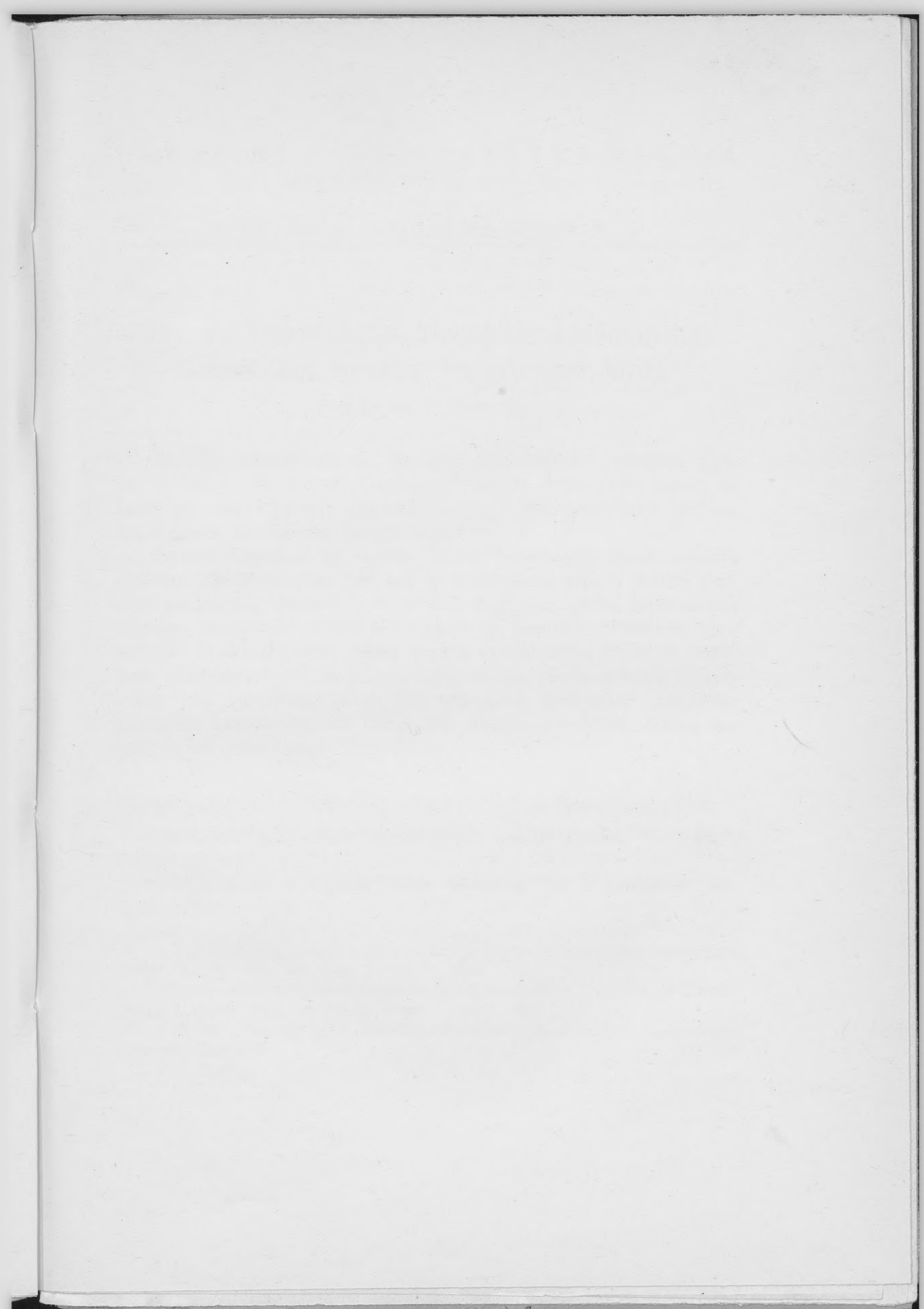
2) Lorenza, Prášila un Miyagi lietotā, hidrodinamiski aprēķinātā telpa $z \cdot r^2 = \text{const.}$; un

3) hidrodinamiski aprēķinātā telpa $z(r^2 - r_k^2) = \text{const.}$, kuŗa attēlo strāvu ap cilindru.

Kaplana dotā telpa aplūkota no ģeometriskā viedokļa, lai noskaidrotu, cik tālu viņa piemērota pārēju uz vadrata un darbrata telpām izveidošanai, — pie kam ņemti divi izveidojumi: pēc Kaplana norādījumiem, un ar tuvāk z asij novietotu asimptoti. Tālāk pierādīts, ka Kaplana dotais ātrums $C_m = \frac{k}{r}$ neapmierina nepārtrauktības likumu.

Abas pārējās telpas aplūkotas arī no ģeometriskā viedokļa, pie kam konstatēts, ka telpa $z(r^2 - r_k^2) = \text{const.}$ ir izdevīgāka un ka vispārīgi hidrodinamiski aprēķinātās telpas nav sliktākas spraugas izveidošanai nekā Kaplana telpa.

Beidzot izpētīti ātrumu maiņas apstākļi hidrodinamiski aprēķinātās telpās, lai noskaidrotu, vai Camerer'a iebildums, — ka viņās sagaidāmi ievērojami palēninājumi un tādēļ zaudējumi, — ir pamatots. Meridionālstrāvu izpētīšana itin kā apstiprina šo iebildumu; bet tālāk tiek konstatēts, ka — pateicoties virpuļstrāvas komponentei — ātrumu samazinājumi līdz $n_s \cong 500-550$ pavisam nenotiek un ka līdz $n_s \cong 800-850$ samazinājumi ir relatīvi mazi: telpā ar pieņemtām darbā proporcijām tikai apm. 13%, pie kam tos var vēl vairāk samazināt, nedaudz mainot telpu. — No hidrauliskā viedokļa tādēļ šinīs telpās sagaidāmi niecīgi zaudējumi.



Dažas piezīmes par spraugas telpas formu propeller- turbinās.

Dr. A. Dabīga

Autoreferāts.

Datā aplūkotas sešdašāšanas veidā 3 spraugas telpas:

1) Kaplana dotā telpa

$$z = \frac{r}{2\sqrt{\frac{r^2}{r_0^2} - 1}}$$

2) Lorenza, Prāšila un Miyagi lielākā hidrodinamiski apstiprinātā telpa $z \cdot r^2 = \text{const.}$; un

3) hidrodinamiski apstiprinātā telpa $z(r^2 - r_0^2) = \text{const.}$, kuras atbilstoši strāvu sp. cilindru.

Kaplana dotā telpa aplūkota no geometriskā viedokļa, lai noskaidrotu cik tālu viņa piemērota pāreju uz vadrieta un darbības telpām izveidošanai, — pie kam yemti divi izveidojumi: pēc Kaplana norādījumiem, un ar tuvāk z asi novietotu asimptoti. Tālāk pierādīts, ka Kaplana dotais strūms $C_{90} = \frac{h}{r}$ nesamazinās nepārtrauktības likumu.

Abas pārējās telpas aplūkotas arī no geometriskā viedokļa, pie kam konstatēts, ka telpa $z(r^2 - r_0^2) = \text{const.}$ ir iedevīgāka un ka vispārīgi hidrodinamiski apstiprinātās telpas nav sliktākas spraugas izveidošanai nekā Kaplana telpa.

Beidzot izpētīti strūvas maņas spētākji hidrodinamiski apstiprinātās telpas, lai noskaidrotu, vai Camerer'a iebildums, — ka viņas sagaidāmi ievērojami palielinājumi un tādej zaudējumi, — ir pamatoti. Meridionālstrāvu izpētīšana un kā apstiprina šo iebildumu; bet tālāk tiek konstatēts, ka — pateicoties virpuļstrāvas komponentei — strūmu samazinājumi līdz $n = 500-550$ pavisam nesotiek un ka līdz $n = 800-850$ samazinājumi ir relatīvi mazie telpa ar pieņemtiem darbības proporcijām tikai apm. 13%, pie kura tos var vēl vairāk samazināt, nedaudz mainot telpu. — No hidrauliskā viedokļa tādej šīs telpas sagaidāmi niecīgi zaudējumi.

Ātrumu konstrukcija sarežģītās kinēmatiskās kēdēs, kas nesatur šarnīru četrstūrus.

Prof. Dr. Ing. N. Rozensmits.

Žurnāls „Maschinenbau, Zeitsung-Mittelungen“ redaktors (prof. Dr. E. Beyers (E. Beyer) ierosinājumā autors sniedza šīn darbu, ar nosaukumu „*Über die Konstruktion einer kinematischen Kette, die ohne Gelenkvierecke*“ pamata izstrādājot ātrumu konstrukciju tādas kinēmatiskās kēdēs, kas nesatur šarnīru četrstūrus.

Šarnīru četrstūros, kā zināms, ātrumu konstrukcija nerada nekādas grūtības. Grūtības rodas tikai tad, ja kinēmatiskā kēde ir šarnīru piedziņi un šarnīru četrstūru bez šarnīru četrstūru tāda ziņa pelna kēdes, kurās šarnīru četrstūru neparādās. Divas tādas kēdes un šarnīru mehānismus darīja prof. Dr. H. Alt (H. Alt). Pirmā no šīm kēdēm atrodama arī M. Gumbelers: „*Getriebelehre*“, bet ātrumu konstrukcijas, cik tas autoram zināms, nekur nav publicētas, jo ar jūdž šīm tādos gadījumos ieteiktais „*Uebungsbuch der Maschinenbau*“ šīs kēdes darīja atrodamas. Autors nepretendē uz šīm ātrumu konstrukciju.

8-locekļu kinēmatiskā ātrumu kēde bez šarnīru četrstūriem (I. zīm.)

Apskatāms kēde redzamas trīs slēgto locekļu grupas, kas visas ir šarnīru piedziņi.

Pietēms, ka 8. loceklis paliek nekustīgs, bet 1. loceklis ar šo kēdes piedziņi kēdi.

¹ N. Rozensmits, „Jauns profils ātrumu konstrukcijai sarežģītā kinēmatiskā kēdē“, *Latv. Meh. fak. žurnāls* T. 13 N. 12, 1936.

² N. Rozensmits, „Über die Getriebekonstruktion kinematischer Ketten“, *Zeitsung. Maschinenbau*, 17. Heft 3, 1937.

³ H. Alt, „*Getriebelehre ohne Gelenkvierecke*“, *Maschinenbau, Zeitsung-Mittelungen*, 1937.

⁴ M. Gumbler, „*Getriebelehre*“, 1937, II. Kap. 22 1. 200.



Ātrumu konstrukcija sarežģītās kinēmatiskās ķēdēs, kas nesatur šarnīru četrstūrus.

Prof. Dr. ing. N. Rozenauers.

Žurnāla „Maschinenbau. Reuleaux-Mitteilungen“ redaktora prof. Dr. R. Beijera (R. Beyer) ierosinājumā autors sniedz šini darbā, uz savas metodes^{1, 2} pamata izstrādāto ātrumu konstrukciju tādās kinēmatiskās ķēdēs, kas nesatur šarnīru četrstūrus.

Šarnīru četrstūros, kā zināms, ātrumu konstrukcija nerada nekādas grūtības. Grūtības sākas tikai tad, ja kinēmatiskā ķēdē ir šarnīru piecstūri un sešstūri. Sevišķu ievēribu tādā ziņā pelna ķēdes, kuŗās šarnīru četrstūru nemaz nav. Divas tādas ķēdes un šarnīru mēchanismus devis prof. Dr. H. Alts (H. Alt)³. Pirmā no šīm ķēdēm atrodama arī M. Grüblera: „Getriebelehre“⁴, bet ātrumu konstrukcijas, cik tas autoram zināms, nekur nav publicētas, jo ar līdz šim šādos gadījumos lietojamām „līdzīgām punktu rindām“ tās iznāktu diezgan sarežģītas. Autors turpretim dod tiešu ātrumu konstrukciju.

8-locekļu kinēmatiskā šarnīru ķēde bez šarnīru četrstūriem (1. zīm.).

Apskatāmā ķēdē redzamas trīs slēgto locekļu grupas, kas visas ir šarnīru piecstūri.

Pieņemts, ka 8. loceklis paliek nekustošs, bet 1. loceklis ar doto ātrumu piedzen ķēdi.

¹ N. Rozenauers: „Jauns papēmiens ātrumu konstrukcijai sarežģītās kinēmatiskās ķēdēs“. L.Ū.R. Mēch. fak. serija T. I № 14. 1936.

² N. Rosenauer: „Über die Geschwindigkeitskonstruktion kinematischer Ketten“. Ztschr. f. angew. Math. und Mech. Band 17 Heft 3. 1937.

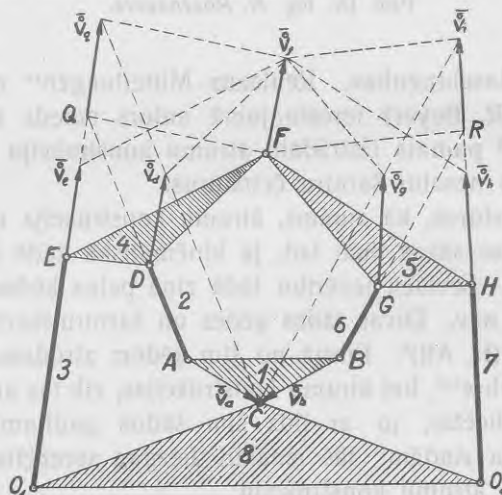
³ H. Alt: „Koppelgetriebe ohne Gelenkvierecke“. Maschinenbau. Reuleaux-Mitteilungen. Juli 1937.

⁴ M. Grübler: „Getriebelehre“. 1917. 17. lapp. 22 f. zīm.

Jākonstruē ātrumi visiem šarnīriem.

Vienkāršības dēļ punktu A un B doto ortogonālo ātrumu mērogs pieņemts tāds, lai $\vec{V}_a = \overline{AC}$ un $\vec{V}_b = \overline{BC}$. Rīkojoties tāpat, kā Heizingera (Heysinger) kulisei atbilstošā 12-locekļu šarnīru ķēdē⁵, atrodam 2. un 3. locekļu krustojšanās punktu Q , kuŗu uzskatām par 4. locekļa punktu, kā arī 6. un 7. locekļu krustojšanās punktu R , ko uzskatām par 5. locekļa punktu.

Punkta O_1 ātrums ir nulle, tamdēļ punkta Q ortogonālais ātrums sakrīt ar taisni O_1E , un to atrodam, velkot caur punktu C taisni paralēli AQ līdz krustojšanai ar O_1Q .



1. zīm.

Punkta O_2 ātrums ir nulle, tamdēļ punkta R ortogonālais ātrums sakrīt ar taisni O_2H , un to atrodam, velkot caur punktu C taisni paralēli BR līdz krustojšanai ar O_2R .

Pēc tam, kad viena punkta ātrums katrā no plaknēm 4. un 5. atrasts, pārejam uz šarnīru F , kas savieno šīs plaknes. Savienojot punktus Q un R ar F un velkot caur \vec{V}_q un \vec{V}_r gala punktiem taisnes paralēli QF un RF , iegūstam \vec{V}_f .

Ievērojot, ka punkta E ortogonālais ātrums sakrīt ar taisni O_1E , atrodam \vec{V}_e , velkot caur \vec{V}_f gala punktu taisni paralēli FE .

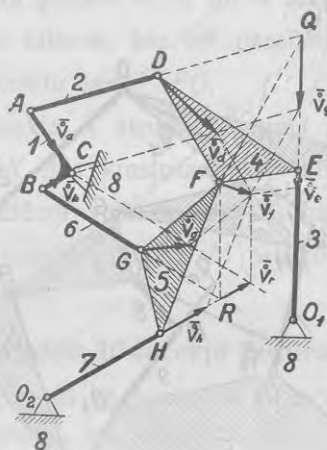
⁵ N. Rozenauers: „Heizingera (Heysinger von Waldegg) kulises mēchanisma tiešais ātruma konstrukcijas paņēmiens“. L.Ū.R. Mēch. fak. serija T. I N 15. 1936.

Punktu D , A un Q ortogonālo ātrumu vektoru gala punkti atrodas uz vienas taisnes, tamdēļ iegūstam \vec{V}_d , velkot caur to pašu \vec{V}_f gala punktu taisni paralēli FD .

Tādā pašā kārtā atrodam otrā pusē arī punktu H un G ortogonālos ātrumus \vec{V}_h un \vec{V}_g .

Tai pašai ķēdei atbilstošais 8-locekļu šarnīru mēchanisms (2. zīm.).

Šinī mēchanismā tāpat ir tikai trīs piecstūri, bet šarnīru četrstūri nav. Pieņemts, ka 1. loceklis ar doto ātrumu piedzen mēchanismu.



2. zīm.

Jākonstruē ātrumi visiem šarnīriem.

Ātrumu konstrukcija šinī mēchanismā, kas izdarīta 2. zīm., izejot no punktu A un B ātrumiem, principā neatšķiras no ātrumu konstrukcijas nupat apskatītā kinēmatiskā ķēdē (1. zīm.), pie kam, ievērojot, ka abos zīmējumos apzīmējumi saskan, tie paši paskaidrojumi attiecināmi arī uz šo mēchanismu.

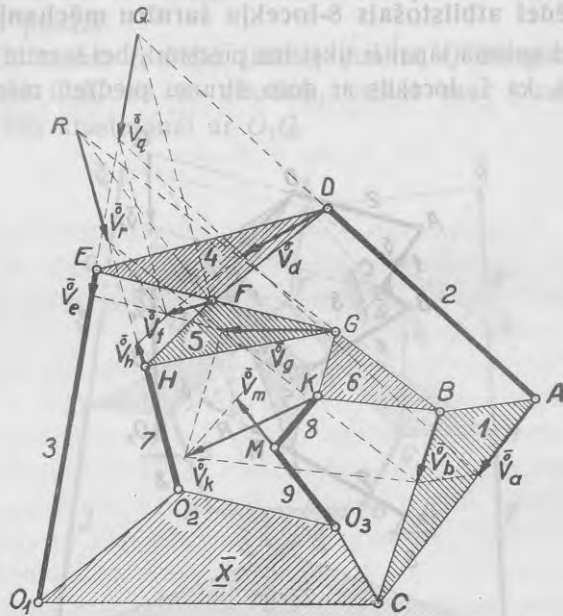
10-locekļu kinēmatiskā šarnīru ķēde bez šarnīru četrstūriem (3. zīm.).

Šinī ķēdē redzamas četras slēgto locekļu grupas: trīs piecstūri un viens sešstūris O_2HGKMO_3 . Piespiesta kustība ir nodrošināta, jo šarnīru skaits atbilst formulai $g = \frac{3n}{2} - 2 = \frac{3 \cdot 10}{2} - 2 = 13$.

Pieņemts, ka X loceklis paliek nekustošs, bet 1. loceklis ar doto ātrumu piedzen ķēdi.

Jākonstruē ātrumi visiem šarnīriem.

Šī ķēde atšķiras no apskatītās 8-locekļu (1. zīm.) ķēdes ar locekļiem KM un MO_3 . Izmetot šos locekļus, dabūjam to pašu 8-locekļu ķēdi, bet nostādītu uz 5. locekļa, tamdēļ ātrumu konstrukciju šeit var izdarīt līdzīgā kārtā. Atliekam punktu A un B dotos ātrumus ortogonālā virzienā, turpinām 2. un 3. locekli līdz krustošanai punktā Q , kuŗu



3. zīm.

uzskatām par 4. locekļa punktu, un atrodam šī punkta ātrumu \vec{V}_q , velkot caur \vec{V}_a gala punktu taisni $\parallel AD$, jo punkta Q ātrums sakrīt ar taisni O_1E , tamdēļ ka punkta O_1 ātrums ir nulle.

Līdzīgā kārtā velkam BG līdz krustošanai ar 7. locekli punktā R , ko uzskatām par 5. locekļa punktu, un atrodam šī punkta ātrumu \vec{V}_r , velkot caur \vec{V}_b gala punktu taisni $\parallel BR$, jo punkta R ātrums sakrīt ar taisni O_2H , tamdēļ ka punkta O_2 ātrums ir nulle.

Pēc tam, kad vienam ceturtā locekļa punktam Q ātrums \vec{V}_q un vienam piektā locekļa punktam R ātrums \vec{V}_r ir atrasti, pārejām uz šarnīru F , kas savieno šos locekļus. Punktus Q un R savienojam ar punktu F un velkam caur \vec{V}_q gala punktu taisni $\parallel QF$ līdz krustošanai

ar taisni, kas vilkta caur \vec{V}_f gala punktu $\parallel RF$. Krustošanās punkts dod \vec{V}_f gala punktu, caur kuŗu savukārt velkam taisnes paralēli FE un FH . Pirmā taisne no O_1E nogriež punkta E ortogonālo ātrumu \vec{V}_e , bet otrā taisne no O_2H nogriež punkta H ortogonālo ātrumu \vec{V}_h .

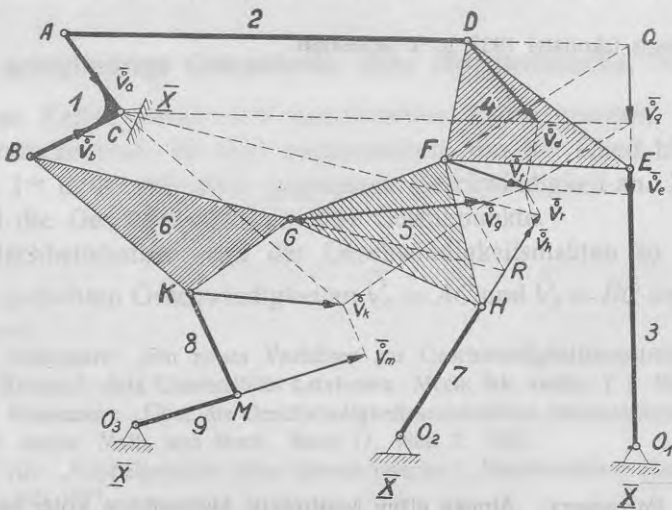
Ievērojot, ka punktu A , Q un D ortogonālo ātrumu vektoru gala punkti atrodas uz vienas taisnes, kas iet paralēli AQ , atrodam \vec{V}_d , velkot caur \vec{V}_f gala punktu taisni $\parallel FD$.

Tāpat ievērojot, ka punktu B , R un G ātrumu vektoru gala punkti arī atrodas uz vienas taisnes, kas iet paralēli BR , atrodam arī \vec{V}_g , velkot caur \vec{V}_f gala punktu taisni $\parallel FG$.

Tālāk atrodam punkta K ātruma \vec{V}_k gala punktu, velkot caur \vec{V}_g gala punktu taisni $\parallel GK$ līdz krustošanai ar taisni, kas vilkta caur \vec{V}_b gala punktu $\parallel BK$. Beidzot velkam caur \vec{V}_k gala punktu taisni $\parallel KM$, kas no taisnes O_3M nogriež punkta M ortogonālo ātrumu \vec{V}_m , ar ko visu šarnīru ātrumi atrasti.

Tai pašai ķēdei atbilstošais 10-locekļu šarnīru mēchanisms (4. zīm.).

Šinī mēchanismā, tāpat kā apskatītā 10-locekļu ķēdē, ir trīs šarnīru piecstūri un viens sešstūris, bet četrstūru nav.



4. zīm.

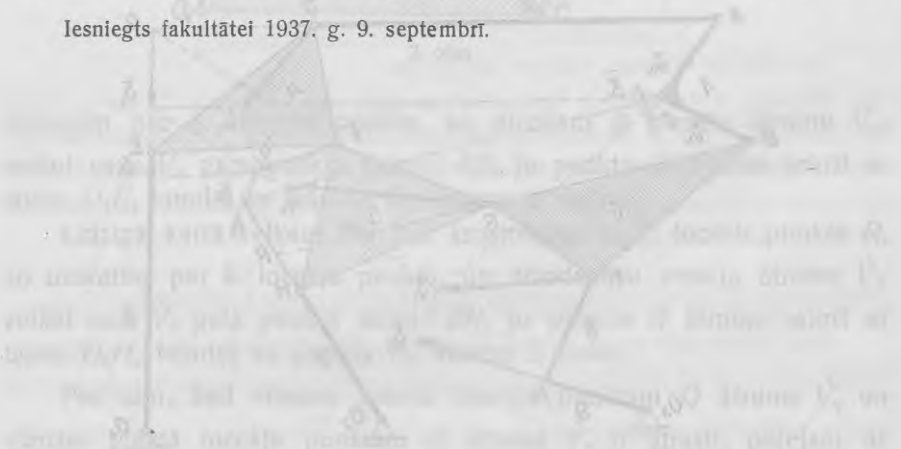
Pieņemts, ka 1. loceklis ar doto ātrumu piedzen mēchanismu, un jākonstruē ātrumi visiem šarnīriem.

Ātrumu konstrukcija šinī mēchanismā, kas izdarīta 4. zīm., izejot no punktu A un B ātrumiem, principā neatšķiras no ātruma konstrukcijas attiecīgā kinēmatiskā ķēdē (3. zīm.), pie kam, ievērojot, ka abos zīmējumos apzīmējumi saskan, tie paši paskaidrojumi attiecināmi arī uz šo mēchanismu.

Piezīme: Visos apskatītos mēchanismos bija pieņemts, ka tos piedzen ternārs loceklis, bet gadījumā, kad tos piedzītu kāds binārs loceklis, piemēram, 3. vai 7. vai resp. 9, ātrumu konstrukciju, ievērojot, ka relatīvo polu stāvokļi un līdz ar to arī ātrumu virzieni nav atkarīgi no ātrumu lieluma, varētu izdarīt tādā pašā kārtā, pieņemot 1. loceklim brīvi kaut kādu ātrumu un pēc tam ar paralēlām taisnēm atrast īstenos ātrumus.

Kopsavilkums: Autora metode arī kinēmatiskās ķēdēs, kas nesatur šarnīru četrstūrus, dod samērā vienkāršas ātrumu konstrukcijas, kas apskatītos četros piemēros izdarītas ar diviem palīgpunktiem Q un R , pie kam pilnīgi attaisnojas autora agrāk⁶ formulētā teorēma: „Ātrumu konstrukcija kinēmatiskās ķēdēs iespējama bez līdzīgām punktu rindām tad, ja atsevišķo locekļu trūkstošo ātrumu noteikšanai divos virzienos nav jāiet pāri vairāk kā diviem šarnīriem katrā virzienā“.

Iesniegts fakultātei 1937. g. 9. septembrī.



⁶ N. Rozenauers: „Ātrumu plānu konstrukcija kinēmatiskās ķēdēs bez līdzīgām punktu rindām.“ L.Ū.R. Mēch. fak. serija T. II № 2. 1937.

Die Geschwindigkeitskonstruktion zusammengesetzter kinematischer Ketten, die kein Gelenkviereck enthalten.

Prof. Dr. Ing. N. Rosenauer.

Autoreferat.

Dank der Anregung des Schriftleiters der Zeitschrift: „Maschinenbau. Reuleaux-Mitteilungen“, Herrn Prof. Dr. R. Beyer, hat der Verfasser in der vorliegenden Arbeit auf Grund seines Verfahrens^{1, 2} die Geschwindigkeitskonstruktion solcher Ketten durchgeführt, die kein Gelenkviereck enthalten.

Die Geschwindigkeitskonstruktion an Gelenkfünfecken, die einen Teil einer kinematischen Kette darstellen, ist nicht so einfach wie an Gelenkvierecken, und in dieser Hinsicht sind besonders solche Ketten zu berücksichtigen, die überhaupt keine Gelenkvierecke enthalten. Zwei solcher Ketten brachte vor kurzem Herr Prof. Dr. H. Alt³. Die erste von diesen Ketten ist auch bei M. Grübler⁴ zu finden. Die Geschwindigkeitskonstruktionen sind aber, soweit das dem Verfasser bekannt ist, nirgends veröffentlicht.

Eine achtgliedrige Gelenkkette ohne Gelenkvierecke. Abb. 1.

Diese Kette enthält drei geschlossene Gliedergruppen, die alle Gelenkfünfecke sind. Es wird angenommen, das 8^{te} Glied bleibe fest und das 1^{te} treibe mit einer gegebenen Geschwindigkeit an. Zu ermitteln sind die Geschwindigkeiten aller Gelenkpunkte.

Einfachheitshalber wird der Geschwindigkeitsmaßstab so gewählt, daß die gedrehten Geschwindigkeiten $\bar{V}_a = \bar{AC}$ und $\bar{V}_b = \bar{BC}$ sind. Nach

¹ N. Rosenauer: „Ein neues Verfahren zur Geschwindigkeitskonstruktion kinematischer Ketten.“ Acta Universitatis Latviensis. Mēch. fak. serija. T I. № 14. 1936.

² N. Rosenauer: „Über die Geschwindigkeitskonstruktion kinematischer Ketten.“ Zeitschr. f. angew. Math. und Mech. Band 17. Heft 3. 1937.

³ H. Alt: „Koppelgetriebe ohne Gelenkvierecke.“ Maschinenbau, Reuleaux-Mitteilungen. Juli 1937.

⁴ M. Grübler. Getriebelehre. 1917. Seite 17. Abb. 22 f.

dem Verfahren des Verfassers wird, ebenso wie in der 12-gliedrigen Gelenkkette, die der Heysinger-Steuerung entspricht⁵, der Schnittpunkt Q der Glieder 2 und 3 gefunden und als Punkt des 4-ten Gliedes aufgefaßt. Die gedrehte Geschwindigkeit dieses Punktes \vec{V}_q liegt in der Geraden O_1E , da die Geschwindigkeit des Punktes O_1 gleich Null ist. Deshalb wird \vec{V}_q von einer Geraden, die durch den Punkt C parallel zu AQ gezogen ist, abgeschnitten.

Ebenso findet man den Schnittpunkt R der Glieder 6 und 7, der als Punkt des 5-ten Gliedes aufgefaßt wird. Da die gedrehte Geschwindigkeit \vec{V}_r in der Geraden O_2H liegt, wird sie durch eine Gerade, die durch den Punkt C parallel zu BR gezogen ist, abgeschnitten.

Nachdem in den Ebenen 4 und 5 die Geschwindigkeiten je eines Punktes gefunden sind, geht man zum Gelenk F , das diese Ebenen verbindet, über. Man verbindet die Punkte Q und R mit F und zieht durch die Endpunkte von \vec{V}_q und \vec{V}_r zwei Geraden parallel zu QF und FR , die sich im Endpunkte von \vec{V}_f schneiden.

Da die gedrehte Geschwindigkeit des Punktes E in der Geraden O_1E liegt, zieht man durch den Endpunkt von \vec{V}_f eine Gerade parallel zu FE und erhält \vec{V}_e .

Da die Endpunkte der gedrehten Geschwindigkeiten der Punkte A , D und Q in einer zu AQ parallelen Geraden liegen, so erhält man die gedrehte Geschwindigkeit \vec{V}_d des Punktes D , indem man durch den Endpunkt von \vec{V}_f eine Gerade parallel zu FD zieht.

Ähnlicherweise werden auch die gedrehten Geschwindigkeiten \vec{V}_h und \vec{V}_g der Punkte H und G gefunden.

Ein achtgliedriges Getriebe, das derselben Kette entspricht. Abb. 2.

Dieses Getriebe enthält ebenfalls keine Gelenkvierecke, sondern nur drei Gelenkfünfecke.

Es wird angenommen, das 1-te Glied treibe mit einer gegebenen Geschwindigkeit an.

⁵ N. Rosenauer: „Eine unmittelbare Geschwindigkeitskonstruktion der Heysinger-Steuerung für Lokomotiven. Acta Universitatis Latviensis. Mēch. fak. serija. T. I. № 15. 1936.

Zu konstruieren sind die Geschwindigkeiten aller Gelenkpunkte.

Die Geschwindigkeitskonstruktion, die in der Abb. 2 durchgeführt ist, unterscheidet sich grundsätzlich nicht von der vorhin (Abb. 1) betrachteten, und da die Bezeichnungen in beiden Abbildungen übereinstimmen, so gelten dieselben Erläuterungen auch für diesen Fall.

Eine zehngliedrige Gelenkkette ohne Gelenkvierecke. Abb. 3.

Diese Kette enthält vier geschlossene Gliedergruppen: drei Fünfecke und ein Sechseck O_2HGKMO_3 . Die Kette ist zwangsläufig, da sie bei 10 Gliedern 13 Gelenke besitzt.

Es wird angenommen, das Glied X bleibe fest und das Glied 1 treibe mit einer gegebenen Geschwindigkeit an, wobei die Geschwindigkeiten aller Gelenkpunkte zu ermitteln sind.

Diese Kette ist aus der vorhin betrachteten achtgliedrigen Kette durch das Hinzufügen der Glieder KM und MO_3 erhalten, deshalb kann man die Geschwindigkeitskonstruktion ähnlicherweise durchführen.

Die bekannten Geschwindigkeiten der Punkte A und B werden orthogonal abgetragen. Es wird der Schnittpunkt Q der Glieder 2 und 3 gefunden, der als Punkt des 4-ten Gliedes aufgefaßt wird. Die gedrehte Geschwindigkeit dieses Punktes liegt in der Geraden O_1Q , da die Geschwindigkeit des Punktes O_1 gleich Null ist, und wird von einer Geraden, die durch den Endpunkt von \vec{V}_a parallel zu AD gezogen ist, abgeschnitten.

Ebenso zieht man BG bis zum Schnittpunkte R mit dem Gliede 7, der als Punkt des Gliedes 5 aufgefaßt wird. Die gedrehte Geschwindigkeit des Punktes R liegt in der Geraden O_2H und wird von einer Geraden, die durch den Endpunkt von \vec{V}_b parallel zu BG gezogen ist, abgeschnitten.

Nachdem die Geschwindigkeit des einen Punktes Q der Ebene 4 und des anderen Punktes R der Ebene 5 gefunden sind, geht man zum Gelenk F , das diese Ebenen verbindet, über. Die Punkte Q und R werden mit dem Punkte F verbunden und durch die Endpunkte von \vec{V}_q und \vec{V}_r werden Geraden parallel zu FQ und FR gezogen. Der Schnittpunkt dieser Geraden ergibt den Endpunkt von \vec{V}_f , durch den noch zwei Geraden parallel zu FE und FH gezogen werden. Die erste schneidet von O_1E die gedrehte Geschwindigkeit \vec{V}_e des Punktes E ab,

die zweite aber schneidet von O_2H die gedrehte Geschwindigkeit \vec{V}_h des Punktes H ab.

Da die Endpunkte der gedrehten Geschwindigkeiten der Punkte A, D und Q in einer Geraden liegen, so findet man den Endpunkt von \vec{V}_d , indem man eine Gerade durch den Endpunkt von \vec{V}_f parallel zu FD zieht.

Die Endpunkte der gedrehten Geschwindigkeiten der Punkte B, G und R liegen gleichfalls in einer Geraden, daher findet man auch den Endpunkt von \vec{V}_g , indem man durch den Endpunkt von \vec{V}_f eine Gerade parallel zu FG zieht.

Weiter ergeben die Geraden, durch den Endpunkt von $\vec{V}_g \parallel GK$ und durch den Endpunkt von $\vec{V}_b \parallel BK$ gezogen, den Endpunkt von \vec{V}_k . Durch diesen Punkt zieht man noch eine Gerade $\parallel MK$ und erhält auf O_3M die gedrehte Geschwindigkeit des letzten Gelenkes M .

Ein zehngliedriges Getriebe, das derselben Kette entspricht. Abb. 4.

Dieses Getriebe enthält ebenso wie die Kette drei Fünfecke und ein Sechseck, aber kein Gelenkviereck.

Es wird angenommen, das Glied 1 treibe mit einer bekannten Geschwindigkeit an.

Zu konstruieren sind die Geschwindigkeiten aller Gelenkpunkte.

Die Geschwindigkeitskonstruktion, die in der Abb. 4 durchgeführt ist, unterscheidet sich grundsätzlich nicht von derselben für die zehngliedrige Kette (Abb. 3), und da in beiden Abbildungen die Bezeichnungen übereinstimmen, so gelten dieselben Erläuterungen auch für das zehngliedrige Getriebe. (Abb. 4.)

Bemerkung: Es wurde in allen betrachteten Ketten angenommen, daß ein ternäres Glied antreibt. Da aber die Lage der relativen Drehpole und somit auch die Richtungen der Geschwindigkeitsvektoren von der Größe der Geschwindigkeiten unabhängig sind, so kann man dieselben Konstruktionen auch für den Fall anwenden, daß ein binäres Glied zum Beispiel 3, 7 oder auch 9 antreibt. Es kann dann die Geschwindigkeit des Gliedes 1 beliebig angenommen werden, und nachdem die ganze Konstruktion durchgeführt ist, können die wahren Geschwindigkeiten durch das Ziehen entsprechender parallelen Geraden ermittelt werden.

Zusammenfassung: Das Verfahren des Verfassers ergibt auch für kinematische Ketten, die kein Gelenkviereck enthalten, verhältnismäßig einfache Geschwindigkeitskonstruktionen, die in den 4 betrachteten Beispielen mit zwei Hilfspunkten Q und R durchgeführt sind, wobei der früher⁶ formulierte Satz des Verfassers: „Die Geschwindigkeitskonstruktionen kinematischer Ketten sind ohne Verwendung ähnlicher Punktreihen möglich, falls zur Bestimmung fehlender Geschwindigkeiten einzelner Glieder in zwei Richtungen nicht mehr als zwei Gelenke in jeder Richtung zwischen bekannten Geschwindigkeiten überschritten werden müssen“ sich auch hier bewährt.

Sis mehānisms (1. att.) sastāv no 4 ķermeņu un viena fiksētā augstākā paaugstākā starp locītavu 2. un 4. ķermeni locītavā apzīmē ar 5, bet 1. locītavā, vienlaikus pievienojot arī punktu Q , pieder mehānismam.

Dots punkts A aruma $V_A = \omega \cdot r_A$.

Izkonstruēt šīdes paaugstinājuma V_B leņķi 4. punkt 5.

Literatūrā šī konstrukcija aprādāta H. Rosenauer „Kinematikā“, kur izstrādā gada mehānismu zinātni, kas nodod labu pārskatu par konstrukcijas gaitu un rezultātiem, un R. Beijera (R. Beverly) darbos, kur konstrukcija izdarīta ar polāru paaugstinājumu plāna palīdzību.

Autors šeit, kā arī citos gadījumos, lieto relatīvo normālpaaugstinājuma plānu, kas dod vienkāršāku un pārskatāmāku atbilstību.

Daļa šīsma atbilstoši vienkāršības dēļ izvēlamies tādu, lai atbilstošās ātruma vektoru līnijas ar virzību $AO; V_A = AO$, tad gadījumā ar paaugstinājuma $V_B = AB$.

Atrodam 2. locītavā momentāno polu P , veicot punkta B relatīvo šīdes virzību līdz korelācijai ar 3. un 5. locītavu ātruma vektoru $v = v$, kas vērta ar locītavā piešķirto punkta E .

Punkts D atbilstošā ar starojošu polu P un virzību ar autors konstrukcijas: ar punktu D veiktam tālruni AD , kas ar DP nogriež punkta D atbilstošā ātruma V_D , kas šīsma gada punktu veiktam vai tālruni DB un iegūstam punkta B atbilstošā ātruma V_B .

⁶ N. Rosenauer: „Konstruktion von Geschwindigkeitsplänen kinematischer Ketten ohne Verwendung ähnlicher Punktreihen“. Acta Universitatis Latviensis. Mēch. fak. serija T. II № 2. 1937.

Zusammenfassung: Das Verfahren des Verfassers ergibt auch für kinematische Ketten, die kein Gelenkviereck enthalten, verlässliche, einfache Geschwindigkeitskonstruktionen, die in den 4 betrachteten Beispielen mit zwei Hilfsgeraden O und A durchgeführt sind, wobei der früher formulierte Satz des Verfassers: „Die Geschwindigkeitskonstruktion einer kinematischen Kette kann ohne Verwindung ähnlicher Punktlinien möglich ist, falls zur Bestimmung der Geschwindigkeitskonstruktion ein einzelner, fester Körper in zwei Richtungen, nämlich in zwei verschiedenen Richtungen, sich bewegen kann.“

Weiter ergibt sich, nachdem die Gerade AK durch den Endpunkt K von V_1 gezogen und durch den Endpunkt A von V_2 durch diesen Punkt K zieht man noch eine Gerade MA , die auf O, M die gleiche Geschwindigkeit des letzten Gelenkes M .

Ein zehngliedriges Getriebe, das derselben Kette entspricht. Abb. 4.

Dieses Getriebe enthält ebenso wie die Kette drei Fünfecke und ein Sechseck, aber kein Gelenkviereck.

Es wird angenommen, das Glied 1 treibe mit einer bekannten Geschwindigkeit an.

Zu konstruieren sind die Geschwindigkeiten aller Gelenkpunkte. Die Geschwindigkeitskonstruktion, die in der Abb. 4 durchgeführt ist, unterscheidet sich grundsätzlich nicht von derselben für die zehngliedrige Kette (Abb. 3), und da in beiden Abbildungen die Bezeichnungen übereinstimmen, so gehen dieselben Erläuterungen auch für das zehngliedrige Getriebe. (Abb. 4)

Bemerkung: In den oben betrachteten Ketten angenommen, daß ein ternäres Glied angetrieben wird. Da aber die Lage der relativen Dreipole und somit auch die Richtungen der Geschwindigkeitsvektoren von der Größe der Geschwindigkeiten unabhängig sind, so kann man dieselben Konstruktionen auch für den Fall anwenden, daß ein binäres Glied zum Beispiel 3, 7 oder auch 9 antreibt. Es kann dann die Geschwindigkeit des Gliedes 1 beliebig angenommen werden, und nachdem die ganze Konstruktion durchgeführt ist, können die wahren Geschwindigkeiten der verschiedenen Glieder durch eine entsprechende Vergrößerung oder Verkleinerung der Konstruktion erhalten werden.

Jauna slīdsviras tvaikdaļa mēchanisma (Wälzhebelsteuerung) paātrinājuma konstrukcija.

Prof. Dr. ing. N. Rozenauers.

Šis mēchanisms (1. zīm.) sastāv no 5 locekļiem un satur vienu augstāku pāri starp locekļiem 3. un 5. Nekustošais loceklis apzīmēts ar 5, bet 1. loceklis, vienmērīgi griežoties ap punktu O , piedzen mēchanismu.

Dots punkta A ātrums: $V_a = \text{const.}$

Jākonstruē slīdes paātrinājums \bar{j}_b kustībā 4 pret 5.

Literātūrā šī konstrukcija atrodama H. Polstera „Kinematika“¹, kur izdarīta pašā mēchanisma zīmējumā, kas nedod labu pārskatu par konstrukcijas gaitu un rezultātiem, un R. Beijera (R. Beyer)² darbos, kur konstrukcija izdarīta ar polāra paātrinājumu plāna palīdzību.

Autors šeit, kā arī citos gadījumos³, lieto relatīvo normālpāātrinājumu plānu, kas dod vienkāršāku un pārskatāmāku atrisinājumu.

Dotā ātruma mērogu vienkāršības dēļ izvēlamies tādu, lai ortogonālais ātrums reprezentētos ar attālumu $AO: \vec{V}_a = \vec{AO}$, tadā gadījumā arī paātrinājums $\bar{j}_a = \vec{AO}$.

Atrodam 3. locekļa momentāno polu P , velkot punktā B normāli slīdes virzienam līdz krustošanai ar 3. un 5. locekļa kopējo normāli $n - n$, kas vilkta šo locekļu pieskares punktā E .

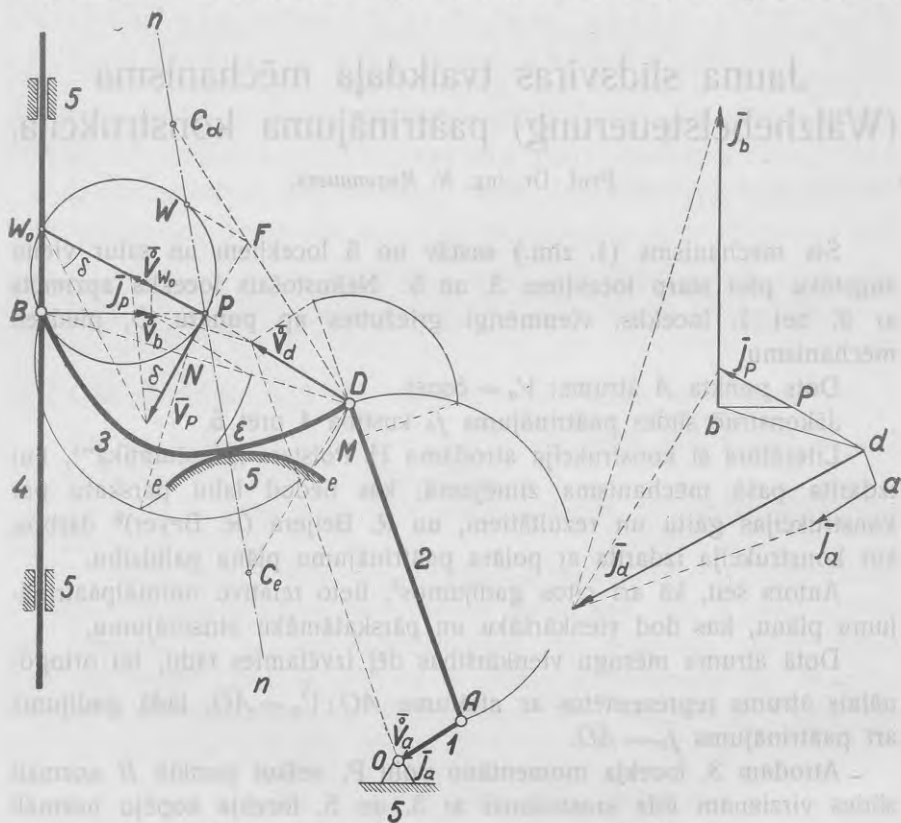
Punktu D savienojam ar atrasto polu P un pārejam uz ātrumu konstrukciju: caur punktu O velkam taisni $\parallel AD$, kas no DP nogriež punkta D ortogonālo ātrumu \vec{V}_d , caur kuŗa gala punktu velkam vēl taisni $\parallel DB$ un iegūstam punkta B ortogonālo slīdes ātrumu \vec{V}_b .

¹ H. Polster: „Kinematik“. Samml. Göschen № 584. 1918. 138. lapp.

² R. Beyer: „Technische Kinematik“. 1931. 247. lapp.

³ N. Rozenauers: Paātrinājumu konstrukcija ar relatīvo normālpāātrinājumu plāna palīdzību sarežģītās kinematiskās ķēdes. L. Ū. R. Mēch. fak. serija T. II. № 4. 1937.

Lai varētu pāriet uz paātrinājumu konstrukciju, meklējam pola paātrinājumu. Šim nolūkam jāatrod infleksijas riņķis 3. locekļa kustībai: uz normāles $n-n$ atzīmējam līknes BED liekuma centru C_α un nekustošās līknes $e-e$ liekuma centru C_e . Ar šo punktu palīdzību atrodam uz normāles $n-n$ infleksijas punktu W , savienojot C_α un C_e , piemēram, ar punktu D un velkot $PF \parallel C_e D$ un $FW \parallel DP$. Caur trīs punktiem B ,



1. zīm.

2. zīm.

P un W velkam infleksijas riņķi un atrodam infleksijas centru W_0 , kas atrodas infleksijas riņķa krustojanas punktā ar 4. locekli. Tālāk atrodam punkta W_0 ātrumu, velkot caur \bar{V}_b gala punktu taisni $\parallel BW_0$ līdz PW_0 , Ievērojot, ka pola pārvietošanas ātrums V_p ir tikpat liels, atliekam V_p pola tangentes virzienā perpendikulāri PW_0 un konstruējam pola paātrinājumu \bar{j}_p , savienojot V_p gala punktu ar W_0 un atliekot iegūto $\angle \delta$, kuŗa $\operatorname{tg} \delta = \omega$, no pola tangentes pola ātruma vektora V_p gala punktā.

Tālāk veidojam ātrumu diferences $\vec{V}_b - \vec{V}_d$ un $\vec{V}_d - \vec{V}_a$, konstruējam ar pusriņķu palīdzību relatīvos normālpātrinājumus BN un DM taisnēm BD un DA un pārejam uz relatīvo normālpātrinājumu plāna konstrukciju.

Brīvi izvēlētā punktā d (2. zīm.) atliekam $\overline{da} = \overline{DM}$ un $\overline{db} = \overline{NB}$. Konstruējot $\triangle dbp \sim \triangle DBP$, iegūstam relatīvo normālpātrinājumu plānu, kas satur arī 3. plaknes punktu p , no kuŗa atliekam agrāk atrasto pola pātrinājumu \vec{j}_p . Šeit jāpiezīmē, ka izdarīto konstrukciju kontrolei var izmantot to apstākli, ka \vec{j}_p gala punktam jāatrodas uz taisnes, kas iet caur punktu $b \perp bp$. Punktā a atliekam vēl pātrinājumu \vec{j}_a un caur tā gala punktu velkam taisni $\perp ad$ līdz krustošanai ar taisni, kas vilkta caur \vec{j}_p gala punktu $\perp dp$. Krustošanas punktu savienojam ar punktu d un iegūstam punkta D pātrinājumu \vec{j}_a . Ievērojot, ka punkta B pātrinājuma virziens sakrīt ar slīdes virzienu, velkam caur \vec{j}_a gala punktu taisni $\perp bd$, kas no attiecīga virziena taisnes nogriež meklējamo slīdes pātrinājumu \vec{j}_b .

Iesniegts fakultātei 1937. g. 23. sept.

Eine neue Beschleunigungs-konstruktion an der Wälzhebelsteuerung.

Prof. Dr. Ing. N. Rosenauer.

Autoreferat.

Die Steuerung (Abb. 1) besteht aus 5 Gliedern und enthält ein höheres Paar zwischen den Gliedern 3 und 5. Das feste Glied ist mit 5 bezeichnet und das Glied 1 treibt in gleichförmiger Drehung um den Punkt O an.

Es sei die Geschwindigkeit $V_a = \text{const}$ des Punktes A bekannt.

Zu konstruieren ist die Gleitbeschleunigung \bar{j}_b des Gliedes 4 gegen 5.

In der Literatur findet man diese Konstruktion bei H. Polster¹, sie ist aber dort an der Zeichnung der Steuerung durchgeführt, was wenig übersichtlich ist. R. Beyer² gibt eine Konstruktion mit Hilfe des polaren Beschleunigungsplanes. Der Verfasser benutzt hier, wie auch in anderen Fällen³, den Plan relativer Normalbeschleunigungen, der eine einfachere und übersichtlichere Konstruktion liefert.

Der Geschwindigkeitsmaßstab ist so gewählt, daß die orthogonale Geschwindigkeit $\bar{V}_a = \overline{AO}$ ist, dann ist die Beschleunigung ebenfalls $\bar{j}_a = \overline{AO}$.

Es werden üblicherweise der Drehpol P des Gliedes 3 gefunden und die gedrehten Geschwindigkeiten \bar{V}_a und \bar{V}_b bestimmt.

Um die weiterhin nötige Polbeschleunigung zu finden, konstruiert man vorher den Wendekreis für das Glied 3. Zwei Punkte des Kreises sind B und P , der dritte Punkt ist der Wendepunkt W auf der gemeinsamen Normalen $n-n$, der mit Hilfe der Krümmungsmittelpunkte C_α des Wälzhebels und C_e der festen Kurve $e-e$ wie üblich gefunden

¹ H. Polster: „Kinematik“. Samml. Göschen № 584. 1918. Seite 138.

² R. Beyer: „Technische Kinematik“. 1931. Seite 247.

³ N. Rosenauer: Die Beschleunigungs-konstruktion kinematischer Ketten mit Hilfe von Plänen relativer Normalbeschleunigungen. Acta Universitatis Latviensis. Mech. fak. serija T II. № 4. 1937.

wird. Den Wendepol W_0 findet man im Schnittpunkte des Wendekreises mit dem Gliede 4. Weiter zieht man durch den Endpunkt von \vec{V}_b eine Gerade parallel zu BW_0 , die von W_0P die gedrehte Geschwindigkeit des Wendepols abschneidet. Dieselbe wird in der Poltangente abgetragen und ergibt die Polwechselgeschwindigkeit V_p , da diese beiden Geschwindigkeiten gleich sind. Zur Ermittlung der Polbeschleunigung \bar{j}_p verbindet man den Endpunkt von V_p mit dem Wendepol W_0 und trägt den erhaltenen $\angle \delta$, dessen $\text{tg } \delta = \omega$ ist, von der Poltangente am Endpunkte von V_p ab. Diese Gerade schneidet vom Durchmesser des Wendekreises die Polbeschleunigung j_p ab, die somit an Ort und Stelle erhalten ist.

Weiter bildet man die Differenzen der gedrehten Geschwindigkeitsvektoren $\vec{V}_b - \vec{V}_d$ und $\vec{V}_d - \vec{V}_a$, konstruiert mit Hilfe der Thaleschen Halbkreise die relativen Normalbeschleunigungen BN und DM der Geraden BD und DA und geht zur Konstruktion des Beschleunigungsplanes über.

Von einem beliebig gewählten Punkte d (Abb. 2) trägt man $\overline{da} = \overline{DM}$ und $\overline{db} = \overline{NB}$ ab und konstruiert $\triangle dbp \sim \triangle DBP$. Daraus ergibt sich der Plan der relativen Normalbeschleunigungen, der auch den Punkt p des Gliedes 3 enthält.

An diesem Plane wird nun die Konstruktion der Beschleunigungen durchgeführt: man trägt vom Punkte p die vorhin gefundene Beschleunigung \bar{j}_p ab. Dabei ist zu beachten, daß, falls die bisherigen Konstruktionen richtig ausgeführt sind, der Endpunkt von \bar{j}_p auf der Geraden liegen muß, die durch den Punkt b parallel zur Gleitrichtung verläuft. Vom Punkte a trägt man die Beschleunigung \bar{j}_a ab und zieht durch den Endpunkt eine Gerade senkrecht zu ad bis zum Schnittpunkte mit der Geraden, die durch den Endpunkt von \bar{j}_p senkrecht zu dp gezogen ist. Diesen Schnittpunkt verbindet man mit dem Punkte d und erhält die Beschleunigung \bar{j}_d des Punktes D . Da die Gleitbeschleunigung in der Gleitrichtung liegt, so schneidet die Gerade, die durch den Endpunkt von \bar{j}_d senkrecht zu bd gezogen ist, von der entsprechenden Geraden die gesuchte Gleitbeschleunigung \bar{j}_b ab.

Kļūdu izlabojums.

Vieta	Iespēsts	Jābūt
7. lapp. 9. rindā no apakšas	jo	ja
37. lapp. 4. b zīm.	Izlaists taisņu β — β un γ — γ krustošanās punkta apzīmējums: Q.	

CO bibliotēka

22041005

wird. Den Wendepol W_0 findet man im Schnittpunkte des Wendekreises mit dem Gliede 4. Weiter zieht man durch den Endpunkt von V_1 eine Gerade parallel zu BW_0 , die von W_0P die gedrehte Geschwindigkeit des Wendepols abschneidet. Dieselbe wird in der Poltangente abgetragen und ergibt die Polwechselgeschwindigkeit V_{p0} , da diese beiden Geschwindigkeiten gleich sind. Zur Ermittlung der Polbeschleunigung \bar{j}_p verbindet man den Endpunkt von V_{p0} mit dem Wendepol W_0 und trägt den erhaltenen $\angle \delta$, dessen $\lg \delta = \omega$ ist, von der Poltangente am Endpunkte von V_{p0} ab. Diese Gerade schneidet vom Durchmesser des Wendekreises die Polbeschleunigung \bar{j}_p ab, die somit an Ort und Stelle erhalten ist.

Weiter bildet man die Differenzen der gedrehten Geschwindigkeitsvektoren $V_1 - V_2$ und $V_2 - V_3$, konstruiert die zugehörigen Halbkreise die relativen Normalbeschleunigungen BN und DM der Geraden BD und DM über S und M als Mittelpunkten, konstruiert das Beschleunigungsplan über.

Von einem beliebig gewählten Punkte d (Abb. 2) trägt man $da = DM$ und $db = NB$ ab und konstruiert $\triangle dbp = \triangle DBP$. Daraus ergibt sich der Plan der relativen Normalbeschleunigungen, der auch den Punkt p des Gliedes 3 enthält.

An diesem Plane wird nun die Konstruktion der Beschleunigungen durchgeführt: man trägt vom Punkte p die vorhin erhaltene Beschleunigung \bar{j}_p ab. Dabei ist zu beachten, daß, falls die bisherigen Konstruktionen richtig ausgeführt sind, der Endpunkt von \bar{j}_p auf der Geraden liegen muß, die durch den Punkt b parallel zur Gleitrichtung verläuft. Vom Punkte a trägt man die Beschleunigung \bar{j}_a ab und zieht durch den Endpunkt eine Gerade senkrecht zu ad bis zum Schnittpunkte mit der Geraden, die durch den Endpunkt von \bar{j}_p senkrecht zu dp gezogen ist. Diesen Schnittpunkt verbindet man mit dem Punkte d und erhält die Beschleunigung \bar{j}_d des Punktes D . Da die Gliedbeschleunigung in der Gleitrichtung liegt, so schneidet die Gerade, die durch den Endpunkt von \bar{j}_d senkrecht zu bd gezogen ist, von der entsprechenden Geraden die gesuchte Gliedbeschleunigung \bar{j}_b ab.

LU bibliotēka



220041005

246698

LŪR mēch. II.

AUL mech. II.

Nr. 1.	N. Rozenauers (N. Rosenauer). Rōmera mēchanisma tiešās ātrumu konstrukcijas	1
	Unmittelbare Geschwindigkeitskonstruktionen am Rōmergetriebe	5
Nr. 2.	N. Rozenauers (N. Rosenauer). Ātrumu plānu konstrukcijas sarežģītās kinēmatiskās ķēdēs bez līdzīgām punktu rindām	7
	Konstruktion von Geschwindigkeitsplänen kinematischer Ketten ohne Verwendung ähnlicher Punktreihen	15
Nr. 3.	N. Rozenauers (N. Rosenauer). Polāro ātrumu plānu raksturīga īpašība kinēmatiskās ķēdēs ar slīdpāriem kustošās plaknēs	23
	Eine besondere Eigenschaft polarer Geschwindigkeitspläne kinematischer Ketten mit Gleitpaaren in beweglichen Ebenen	29
Nr. 4.	N. Rozenauers (N. Rosenauer). Paātrinājumu konstrukcija ar relatīvo normālpāātrinājumu plānu palīdzību sarežģītās kinēmatiskās ķēdēs	33
	Die Beschleunigungskonstruktion kinematischer Ketten mit Hilfe von Plänen relativer Normalbeschleunigungen	45
Nr. 5.	N. Rozenauers (N. Rosenauer). Īpaša paātrinājumu konstrukcija kinēmatiskās ķēdēs, kas satur slīdpārus kustošās plaknēs	55
	Eine besondere Beschleunigungskonstruktion kinematischer Ketten, die Gleitpaare in beweglichen Ebenen enthalten	65
Nr. 6.	A. Delvigs. Some remarks about the shape of the clearance space in propeller turbines	75
	Dažas piezīmes par spraugas telpas formu propellerturbinās	108
Nr. 7.	N. Rozenauers (N. Rosenauer). Ātrumu konstrukcija sarežģītās kinēmatiskās ķēdēs, kas satur šarnīru četrstūrus	109
	Die Geschwindigkeitskonstruktion zusammengesetzter kinematischer Ketten, die kein Gelenkviereck enthalten	115
Nr. 8.	N. Rozenauers (N. Rosenauer). Jauna slīdsviras tvaikdaļa mēchanisma (Wälzhebelsteuerung) paātrinājuma konstrukcija	121
	Eine neue Beschleunigungskonstruktion an der Wälzhebelsteuerung	125