

123

LATVIJAS
ŪNIVERSITĀTES RAKSTI
ACTA UNIVERSITATIS LATVIENSIS

MATĒMATIKAS UN DABAS ZINĀTŅU
FAKULTĀTES SERIJA

II. SĒJUMS
TOMUS

№ 6—9

LATVIJAS ŪNIVERSITĀTE

R I G Ā, 1 9 3 6

P. L. W.
9448

LIBRARY
MICHIGAN
642.21.88

LATVIJAS ŪNIVERSITĀTES RAKSTI

MATĒMATIKAS UN DABAS ZINĀTŅU FAKULTĀTES
 SERIJA

ACTA UNIVERSITATIS LATVIENSIS

SERIES NOVA SECUNDUM ORDINES DIVISA
 MATHEMATICORUM ET PHYSICORUM ORDINIS SERIES

Latvijas Universitātes astronomijas observatorijas raksti. Ar 8 zvaigzņu tabulām	35
Ein kurzer geschichtlicher Überblick über die in Lettlands Territorien ausgeführten astronomischen Messungen und Beobachtungen, vom XVIII. Jahrhundert bis zur Bildung des Staates Lettland	51
4. K. Čakrītājs. Magnētiskie lauki Latvijā un Latvijas teritorijā līdz 1932 g.	65
Magnets magnetiques faibles sur le territoire de la Lettonie jusqu'à 1932	65
5. K. Dēlis. Zemgales līdzenuma un Lielupes dobuma nogulumu Devon-Ablagerungen der Mittel-Devon im Gebiet der Angliens (Oberland) und Litauen	103
6. H. Bruks. A Theory of the Diffusion Element	331
Diffūzijas elementa teorija	336
7. A. Pētus. Sur la rotation permanente de la surface ellipsoïdale d'une masse fluide hétérogène	389
Par heterogēnas šķidrās masas ellipsoīdālās virsmas permanento rotāciju	407
8. Edgars Eibmanis (Edens Leimāns). Sur une classe de courbes planes algébriques de genre $p \geq 0$	409
Kāda planas algebrisko līniju klase ar kārtu $p \geq 0$	448
9. B. Bīzēns. Fikcional effects in thermodynamic calculations	451
Bezzes termodinamiskās apstākļi	470

II. SEJUMS TOMUS

RIGĀ
 LATVIJAS ŪNIVERSITĀTĒ

1932—1936

LATVIJAS
UNIVERSITĀTES RAKSTI
MATEMĀTIKAS UN DABAS ZINĀTŪ FAKULTĀTES
SĒRIJA

ACTA UNIVERSITATIS LATVIENSIS
MATH. ZONĀ SECUNDUM ORDINEM DIVISÆ
MATEMATICORUM ET PHYSICORUM ORDINIS SÆRIE



Rīgā, L. Maskavas ielā 11.

II. TOMS

UNIVERSITĀTE
LATVIJAS UNIVERSITĀTE

1982 - 1983

UNIVERSITĀTES RAKSTI
UNIVERSITĀTES LATVIJAS
IN DARBAŠ VĒJUMI
INDEX. FACULTĀTES SENIAI

	Lapp. Pag.
1. A. Schagger (Žaggers). Die Universitäts-Sternwarte zu Riga, Lettland. Mit 8 Tabellen	1
Latvijas Universitātes astronomiskā observatorija Rīgā. Ar 8 atsev. tabulām	35
2. A. Schagger (Žaggers). Ein leicht zu konstruierender Ableseapparat für Chronographenstreifen	39
Viegli izgatavojams chronografa lentu nolasāmais aparāts	45
3. L. Slaucītājs. Iss vēsturisks pārskats par Latvijas teritorijā izpildītiem astronomiskiem mērījumu darbiem un novērojumiem, sākot ar XVIII. gs. līdz Latvijas valsts nodibināšanai	47
Ein kurzer geschichtlicher Überblick über die in Lettlands Territorium ausgeführten astronomischen Messungen und Beobachtungen, vom XVIII. Jahrhundert bis zur Bildung des Staates Lettland	64
4. L. Slaucītājs. Magnētiskie mērījumi, izdarīti Latvijas teritorijā līdz 1932. g.	65
Mesures magnétiques faites sur le territoire de la Lettonie jusqu'à 1932 . .	65
5. N. Delle. Zemgales līdzenuma, Augšzemes un Lietuvas devona nogulumi. Ar 14 zīmējumu tabulām un 2 atsevišķām stratigrafiska sadalījuma tabulām Devon-Ablagerungen der Niederung von Zemgale, des Gebiets der Augšzeme (Oberkurland) und Litauens	327
6. B. Bružs. A Theory of the Diffusion Element	385
Difūzijas elementa teorija	398
7. A. Putns. Sur la rotation permanente de la surface ellipsoïdale d'une masse fluide hétérogène	399
Par heterogenas šķidrās masas ellipsoidālās virsmas permanento rotāciju . .	407
8. Eugène Leimanis (Eižens Leimanis). Sur une classe de courbes planes algébriques de genre $p = 0$	409
Kāda plaknes algebrisko līkņu klase ar kārtu $p = 0$	448
9. B. Bružs. Frictional effects in thermodynamic calculations	451
Berzes termodinamiska aplēse	470

SATURS.
INDEX.

1	A. Schaeffer (Zagor). Die Universalis-Sternwarte zu Riga, Lettland. Mit 8 Tabellen
35	Laiwjas Universalis astronomis observatorija Riga. Ar 8 starv tabulam
38	A. Schaeffer (Zagor). Ein leicht zu konstruierender Adlerapparat für Chronographentellen
42	Vielit laiwjavojevns chronografa telnu noizstrains sparsis
47	L. Stancic. Les éléments primaires par Lajwjas telnioja izbildum astronomisdom menjumu darbam un novrojotum, sakot ar XVIII. gs. lds Lajwjas vaists nodibinam
64	Ein kurzer geschichtlicher Überblick über die in Lettland Lettonien ausgeführten astronomischen Messungen und Beobachtungen, vom XVII. Jahrhundert bis zur Bildung des Staates Lettland
65	L. Stancic. Magnetische Variationen Lettlands Lajwjas telnioja lds 1932 g.
65	Mesures magnetiques faites sur les montagnes de la Lettonie jusqu'à 1932
102	N. Delle. Zemesis lieldzuma. Anzskums un Lielvas devons nogrumi. Ar 14 telnioja tabulam un 2 zemesis starijstas tabulam
321	Devon-Ablesungen der Neigung von Zemesis, des Gebiets der Augskums (Ostland) und Llians
362	H. Brice. A theory of the Diffusion Element
362	Diffuzijas elements teorija
369	A. Poinc. Sur la rotation permanente de la surface elliptoide d'une masse solide heterogene
407	Par heterogenua spindras masas elliptoidas vietas permanento rotacija
409	Eugene Lemaire (Eilens Laimans). Sur une classe de courbes planes rigides de genre $p = 0$
442	Kada planas alghidras ligu klase ar katu $p = 0$
451	H. Brice. Fictional effects in thermodynamic calculations
470	Beites termodinamiskas apstse

Lapp.
1932

A Theory of the Diffusion Element¹⁾

By B. Bružs.

Introduction.

1. The problem of the reversible galvanic concentration element has been solved by purely thermodynamic means (Helmholtz-Gibbs). The solution of the corresponding stationary system (diffusion element, or concentration element with liquid junction) requires however assumptions outside of classical thermodynamics. The special theory of Helmholtz-Nernst-Planck, which we will further call the osmotic theory, reaches a certain solution of the problem characterized by the appearance in the formulae of a new type of values (mobilities, u , v , and transference numbers t) unknown to classical thermodynamics. This appearance itself of a new type of values is a formal indication of the particular mechanistic assumptions used by the osmotic theory and sufficiently clearly indicates, that the solution of the problem is necessarily connected with the introduction of some sort of special assumptions. The opinions of different investigators in this field disagree however as to whether all of these assumptions are mechanistic in nature or whether part of them at least forms a logical extension of thermodynamics, in other words, whether the usual set of thermodynamic values retains its significance in the solution of the problem or has to be supplemented or entirely replaced by dynamic quantities or at least their ratios.

The formulae given by the osmotic theory for the concentration element are inseparably⁴⁾ connected with two assumptions (1) that the *EMF* of the cell is determined only by the Hittorf mechanism of electrolytic conduction, which is assumed to represent a reversible mechanism, and (2) that diffusion does not affect its formation.

A contrary standpoint is taken in the present paper and a lower limit of diffusion accompanying an electric current is considered in

explaining the *EMF*. It is further shown that the necessary restrictive assumption for the solution of stationary states²⁾ is essentially equivalent to an application to the actual components of a system of a special (statistical) law of force expressible in thermodynamical terms. When on the other hand the "arbitrary assumption" is introduced in form of energy relations instead of mechanisms new formulae result, which are free from quantities unknown to classical thermodynamics and which represent a complete analogon to the Thomson formula for the *EMF* of the thermoelement²⁾.

Analysis of the stationary cell by comparison with the reversible cell, considering electrical conduction only.

2. The *EMF* of the concentration element (dE_{rev}). It is intended to show in the next section the principal assumptions necessary to derive the osmotic theory formulae for the *EMF* of stationary systems. To have however a guiding standard of assumptions it is advisable to present shortly the sort of argumentation that is necessary for the derivation of dE_{rev} by the aid of classical thermodynamics. The reversible concentration cell (as defined in Fig. 1^a) is by experimental evidence known to be a machine by which the electrolyte is diluted from the molefractional concentration N_2'' to that of N_2' , giving a maximum of available work, the proof being, that the reversible cell permits measuring the charging and discharging potentials in such a way that the intermediate value of dE_{rev} can be approached from both sides to any desired degree of accuracy, by reducing the drop of potential that irreversibly produces Joule heat:

$$(dE \text{ charging} - dE_{rev}) \rightarrow 0 \leftarrow (dE_{rev} - dE \text{ discharging}) \quad (1)$$

(Static charge.)

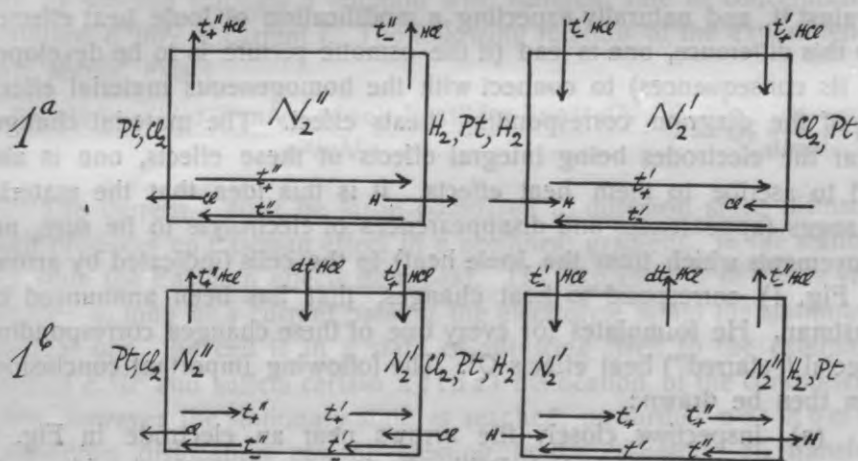
Since the reversible galvanic cell complies with requirements for the application of the 2nd Law, one is able to identify in the electrical potential difference shown by this machine the corresponding change of potential due to dilution of the electrolyte

$$z \mathfrak{F} dE_{rev} = - \frac{1}{z \mathfrak{F}} \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \ln N_2} d \ln N_2.$$

In other words: work available is equal to loss of free energy by the system:

$$z \mathfrak{F} dE_{rev} = - \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \ln N_2} d \ln N_2 \quad \dots \quad (2)$$

3. Osmotic theory of the stationary cell. A very simple derivation of the final formulae of this theory can be obtained by a direct "extrapolation" of the arguments of the preceding section. To do this the material changes caused by the passage of a discharging electrical current are considered. When these are compared for the two cells (Figs. 1^a and 1^b — see upper arrows and accompanying note), one finds that both types of cells differ only by a differential homogeneous effect (dt) which, summed over the two component cells of the stationary system, gives a net effect of zero. Postulating that these material changes determine the *EMF* (assumption 1), the obvious conclusion is reached, that the total *EMF* of the stationary cell should be the same as that of the reversible cell. This is supported by experimental evidence.



Concentration element and diffusion element.

The arrows at the bottom of the quadrangles represent the transport of matter, caused by the passage of current (Hittori mechanism). The arrows at the upper parts of the quadrangles give the amounts of electrolyte appearing or disappearing in the respective sections (they are connected according to Eastman with corresponding heat effects).

Adding the consideration, that the dilution process (the source of the *EMF* of the reversible cell) is effected to the extent of t_+ in the first component cell and to the extent of t_- in the second (see upper arrows in Fig. 1^b), one directly arrives at the final formulae given by the osmotic theory:

$$-z_{-}\mathfrak{F}dE_{st.} = \left\{ \begin{array}{l} z_{-}\mathfrak{F}dE_{ce} = -t_{+} \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \ln N_2} d \ln N_2 \\ z_{+}\mathfrak{F}dE_H = -t_{-} \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \ln N_2} d \ln N_2 \end{array} \right\} = -\frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \ln N_2} d \ln N_2 \quad (3)$$

One easily sees that a necessary condition (in fact the fundamental assumption two) for the validity of the relations is, that diffusion need not be taken into consideration as a factor in the generation of the *EMF* of the stationary cell. A great disadvantage of this mechanistic derivation is, that the simple distribution of the dilution process between the two cells becomes invalid when complex formation is present.

4. The theory of Eastman. Considering the fact that in the two component cells of the stationary system the current flows in one case along the concentration gradient and in the other case against it, and naturally expecting a modification of Joule heat effected by this difference, one is lead (if the osmotic picture is to be developed to its consequences) to connect with the homogeneous material effects dt of the diagram corresponding heats effect. The material changes near the electrodes being integral effects of these effects, one is also led to ascribe to them heat effects. It is this idea that the material changes (appearances and disappearances of electrolyte to be sure, not movements which from the Joule heat) in the cells (indicated by arrows in Fig. 1) correspond to heat changes, that has been announced by Eastman. He formulates for every one of these changes corresponding special ("starred") heat effects Q^* . The following important conclusions can then be drawn:

(a) Inspecting closely the arrows near an electrode in Fig. 1, one sees that the electrolytic Peltier heat at an electrode should consist of terms due to two-phase (arrows through a boundary) and to one-phase transfers of material. Assuming that the first ones can be defined in a purely thermodynamic way Eastman feels compelled to introduce for the latter ones his heats of transfer. He therefore puts for the Peltier heat

$$\Pi = \pi \mathfrak{F} = T \Delta S + t_{+} Q_{+}^* - t_{-} Q_{-}^* \dots \dots \dots (4)$$

the two last terms corresponding to the heterogeneous, integral (Eastman) effect. \mathfrak{F}_a

It is a consequence of this elaborated osmotic theory (Eastman points out) that Peltier heats cannot be used to obtain thermodynamic information unless an independent way to determine starred values is made available.

(b) Though not explicitly stated it follows from Eastman's theory that a homogeneous differential effect of the order (per $z\mathcal{F}$ Faradays of current)

$$\left(Q_+^* + Q_-^*\right) dt = Q_2^* \frac{\partial t}{\partial \ln N_2} d \ln N_2 \dots (5)$$

should accompany a current passing through a concentration difference $d \ln N_2$. The characteristics of this effect should be: reversal of sign, with reversal of current or change of electrode; increase of effect with increase of concentration difference. The effect should be large with electrolytes having large $\frac{\partial t}{\partial \ln N_2}$, but this can certainly be obscured by Q^* itself, which may be very specific.

The differential Eastman effect (3_a) should be measurable experimentally by sending through a solution with different rate of concentration variation $d^2 \ln N$ a current i . The following relation of the experimental data should exist:

$$\frac{\text{"Joule heat" for } d^2 \ln N - \text{"Joule heat" for linear } dN}{d^2 \ln N} \cdot \frac{\mathcal{F}}{i} = Q_2^* \frac{\partial t}{\partial \ln N} \quad (6)$$

The current i must be large compared to diffusion since diffusion itself produces an Eastman effect in a nonlinear gradient. In the stationary state the Eastman effects disappear. The explanation of this is very simple: as long as a current passing the electrolyte is not the stationary, residual one, the cell is in a state of adjusting itself to the externally applied *EMF* and suffers certain actual dislocation of the components when however the stationary state is reached, no further net homogeneous dislocation can be existing in the cell since all transfers effected by the electrical current are re-effected by diffusion and vice versa. There remains only the heterogeneous one-sided transfer of the active ion, which is connected with the effect (f) to be discussed later.

Analysis of the charging process of a reversible cell and extrapolation of the results to the stationary cell.

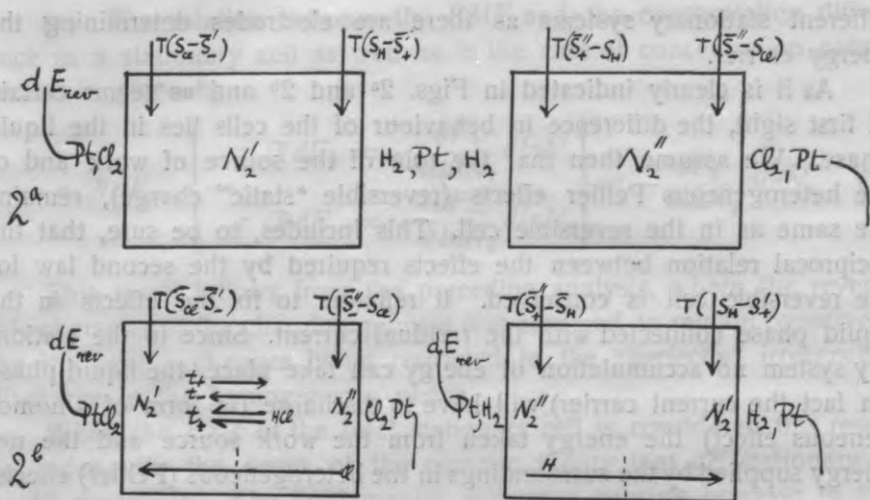
5. Role of diffusion in the concentration electric phenomenon. The osmotic theory, in the simple form, presented above, neglects diffusion as a factor operative in the generation of *EMFs*. At first thought this may appear substantiated by the fact that the *EMF* of a stationary cell is independent of the length of the cell,

whereas the amount of diffusion is inversely proportional to the length of the cell. The considerations given below will show however, that diffusion in a stationary cell definitely governs the residual current, and consequently plays a fundamental role in the establishment of a definite relation between the applied *EMF* and the concentration difference appearing. Inspection of Figs. 2^a and 2^b will show, that as a result of the application of an *EMF* definite concentration changes are induced in cells regardless of reversibility, such that they can be looked upon as definite measure of the *EMF* applied. These effects have the property in common that they are independent of the size and form of the cells. Once produced they remain unchanged and the cells keep their constant acquired properties unless changes occur in the applied potentials.

The fundamental difference between reversible and irreversible cells manifests itself in the fact, that contrary to the reversible cell, where no current is flowing in the final (equilibrium) state, a constant residual current (Reststrom) traverses the irreversible system in its final (stationary) state. A current in fact which depends on the size and form of the cell, but which as one easily sees is a measure of the diffusion of electrolyte taking place in the cell. The invariability of the state of the cell namely requires that so much electrolyte diffuses as to compensate for the changes caused by the electrical current and vice versa. This is demonstrated by the four arrows in the left component cell of the stationary system (2^b). A very simple consideration then shows, that the net effect of this cooperation of diffusion and Hittorf migration ("four arrow system") consists in the onesided passage of $1\mathfrak{F} Cl'$ in the left hand cell, and of $1\mathfrak{F} H^+$ in the right hand cell, per \mathfrak{F} of current passing the cell ("1 arrow system").

This analysis of the residual current leads for our purposes to the conclusion, that the net material transports in the stationary cell (as a result of modification of the Hittorf migration by diffusion) are essentially different from the transports due to Hittorf-type of conduction, in fact it is only the ion reactive at the electrode which is actually transported. This result is entirely independent of the particular assumptions about the "actual" energy carriers, and their state of complex formation.

6. The energy changes accompanying a residual current. The complete solution of the problem of the stationary cell depends on the correct choice of the mechanism supposed to generate the *EMF* in the diffusion cell (or the concentration difference



Thermal effects connected with charging the cells.

Concentration cell (2a) a) "Static" (drawing no current) charging of the cell: Source of electrical potential does the work of concentration $\frac{\partial F}{\partial \ln N} d \ln N$. The surroundings contribute (arrows) the net of the four Peltier heats $T \frac{\partial S}{\partial \ln N} d \ln N$. Both these energies are accumulated in the energy of the transferred electrolyte $\frac{\partial H}{\partial \ln N} d \ln N$;

b) Irreversible effects on actual charging: Joule heat, due to drop of potential in the cell and proportional to length of cell. Appears also when cell is discharged.

Diffusion cell (2b) c) Static charging: same as a) only instead of accumulation we have e) and f) which in sum are equivalent to $\frac{\partial H}{\partial \ln N} d \ln N$;

d) irreversible charging, none since no accumulation effected;

e) irreversible discharge: transformation of the energy taken from the work source into heat: $\int dE_{st, i} = \frac{\partial F_i}{\partial \ln N_2} d \ln N_2$ with subscripts (i) corresponding to respective cells;

f) extra effect: homogeneous concentration electric effect equivalent to net Peltier effects: $-T \frac{\partial S_i}{\partial \ln N} d \ln N$ (accompanying long arrows);

g) the ions performing cyclic movements discharge $\int dE_+$ in the first and $\int dE_-$ in the second cells. These effects have no accompanying net latent heat effects.

in the system with concentration polarization). For the putting up of an energy balance however the knowledge of the thermodynamic component carrying and dissipating the energy seems to be sufficient. This is supported by the fact that there exist for every solution as many

different stationary systems as there are electrodes determining the energy carrier.

As it is clearly indicated in Figs. 2^a and 2^b and as seems certain at first sight, the difference in behaviour of the cells lies in the liquid phase. We assume then that the role of the source of work and of the heterogeneous Peltier effects (reversible "static" charge), remains the same as in the reversible cell. This includes, to be sure, that the reciprocal relation between the effects required by the second law for the reversible cell is conserved. It remains to fix the effects in the liquid phase connected with the residual current. Since in the stationary system no accumulation of energy can take place, the liquid phase (in fact the current carrier) will have to discharge (in form of a homogeneous effect) the energy taken from the work source and the net energy supplied by the surroundings in the heterogeneous (Peltier) effects.

The homogeneous effect, indeed, immediately appears to consist of two components (corresponding to the two sources mentioned above): the transfer itself of the Cl^- and H^+ ions through the respective component cells and, second, the extra effect due to the variation of the medium traversed by the ions, since the ions are not simply carried through but also diluted on their way. Even experimentally⁹) the effect can be split into components by having a sharp boundary between the extremely concentrated parts of the solutions, when the second effect will appear confined to the sharp boundary (indicated by a vertical dotted line in 2^b).

When the first effect is made responsible for the dissipation in form of heat of the reciprocally reversible work supplied by the source in a Joule effect $= \int \mathcal{F} dE_{\pm}$ and the value of $T \frac{\partial S_{\pm}}{\partial \ln N} d \ln N$ corresponding to the latent heat of dilution is ascribed to the second effect, then obviously the necessary conditions of the first law are fulfilled with the total result, first, that no net heat is taken from the surroundings since separately in every cell the Peltier heats and the homogeneous concentration-electric effect cancel out, and second that the work from the source is completely dissipated as heat in the process of carrying Cl^- and H^+ through the cells. The irreversible (residual) loss in potential gives a Joule heat (g) not connected with net latent heat effects, since the energy carrier completes a cyclic movement.

7. The formal results can now be investigated in more detail.

(a) The relation between the *EMF* and the concentration difference in a stationary cell as well as in the case of concentration polarization is given by:

$$z_+ \mathcal{F} dE_{stat.} \left\{ \begin{array}{l} z_+ \mathcal{F} dE_+ = - \frac{\partial F_+}{\partial \ln N_2} d \ln N_2 \\ z_- \mathcal{F} dE_- = - \frac{\partial F_-}{\partial \ln N_2} d \ln N_2 \end{array} \right\} = - \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \ln N_2} d \ln N_2 \quad (7)$$

This result follows from the preceding analysis, where the reversible character of the charging process was assumed to remain conserved, the irreversible changes being restricted to the "perfectly" irreversible discharge in the homogeneous phase.

When the *EMF* of the total stationary cell is considered this result coincides with the result of the osmotic theory that $dE_{stationary} = dE_{reversible}$. The fundamental difference consists however in the interpretation of the component-cells separately. According to the present treatment of the subject the dilution processes of the separate ionic species determine the *EMF* of the component cells. The important practical result of the new formulae is, that the separate ionic free energies of dilution and the activities of Lewis can be determined independently from diffusion elements.

(b) On the considerations presented, it follows, that — contrary to Eastman, no objection can be raised against the determination of ionic entropies using the following formula for the electrolytic Peltier heat:

$$\Pi = z \mathcal{F} \pi = T (\bar{S}_{\pm} - S_{electrode}) \dots \dots \dots (8)$$

when only the condition is observed, that the Peltier heat is measured in the stationary state.

(c) As mentioned above the entropy of dilution of separate ions can be obtained from the homogeneous concentration — electric effect (the extra effect *f*). It must be pointed out however, that measurements must be made on the residual current, which means that the stationary state must be conserved i. e. current density and particularly current direction. Change of current direction would involve complicated changes of effect with time (Eastman effects) until a new stationary state would ensue.

It is obvious that on our picture the homogenous concentration electric effect will be different in both component cells, due to the different current carriers.

The introduction of subscripts denoting ions has been made for convenience sake only; actually the thermodynamic components H , Cl and HCl need only to be considered, the formulae being entirely independent of the ionic concept.

The stationary system acts only as dissipator of the "statically" stored energy. It is true, that certain symmetry exists in the discharge as compared to the charge, namely the reappearance of the "latent" exchange of heat with the surroundings (in form of the homogeneous conc.-el. effect = net Peltier effect) and the "perfect" dissipation of work (Joule heat = work of source). But it must be emphasized that this resemblance does not lead to a concept of a liquid potential. No such effect is to be expected in a stationary system.

8. The dynamics of the stationary state. So far the results were obtained by energy considerations which are free from any concepts of time and resistances. They were based partly on the experimental knowledge of the "machines" and partly on the "special assumptions" mentioned in the introduction. We obtain new light on the actual mechanism of current generation when a more elaborate analysis is made of the stationary cell presuming knowledge of the actual components of the cell and fixing laws to govern their movements.

As regards the actual components of the cell we will first assume: unhydrated Cl' and H^+ to be the carriers of current and HCl the diffusing substance. The second essential assumption concerns the form of the law defining the forces acting on these components. We will make the general assumption for both processes to the effect that in the stationary state of a system the force acting on a unit volume of a substance is equal to the gradient of the partial molar free energy of this substance. This gives the force on the diffusing substance

equal to $-\frac{d\bar{F}_2}{dx} = -\frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \ln N_2} \frac{d \ln N_2}{dx}$ and on the electrically driven ion

equal to $-\frac{dF_{\pm}}{dx} = -z_{\pm} \mathcal{F} \frac{dE}{dx}$.

Introducing mobilities for the individual components (u , v for cation and anion and w for electrolyte) we easily find by multiplication (force \times mobility) the velocities due to existing forces.

The velocity of the anion due to the electrical force will be $-vz_{-} \mathcal{F} \frac{dE}{dx}$ and due to diffusion it will be equal to the velocity of diffusion of the

electrolyte $w \frac{\partial F_2}{\partial \ln N_2} \frac{d \ln N_2}{dx}$. We found in section 5 that in the stationary state of a cationic component cell the anion remains unmoved. This means (remembering that this is effect *g* of Fig. 2)

$$v z_- \mathcal{F} \frac{dE_-}{dx} = w \frac{\partial F_2}{\partial \ln N_2} \frac{d \ln N_2}{dx}$$

$$z_- \mathcal{F} dE_- = - \frac{w}{v} \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \ln N_2} d \ln N_2 = - t_+ \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \ln N_2} d \ln N_2 \dots (9a)$$

and for the anionic cell (cation unmovable)

$$z_+ \mathcal{F} dE_+ = - \frac{w}{u} \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \ln N_2} d \ln N_2 = - t_- \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \ln N_2} d \ln N_2 \dots (9b)$$

To show how very much conclusions of the type just made depend on the first assumption — the knowledge of the actual constituents, we will investigate the changes in formulae when water of hydration is included in the dynamic picture. A new term will have to be considered in putting up the balance "transported ion = zero". In the case of the cationic cell water will be generated at the cathode and this as a reaction will press through the amount of electrolyte:

concentr. $\frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} n_+ (u + v) z_+ \mathcal{F} \frac{dE}{dx} = c_2 \alpha_+ z_+ \mathcal{F} \frac{dE}{dx}$ where n_+ is the number of water molecules carried by the cation and \bar{V}_1 and \bar{V}_2 the partial molar volumes of solvent and electrolyte.

We now get:

$$z_- \mathcal{F} dE_- = - \frac{w}{v + \alpha_+} \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \ln N_2} d \ln N_2$$

$$z_+ \mathcal{F} dE_+ = - \frac{w}{u + \alpha_-} \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \ln N_2} d \ln N_2 \dots (10)$$

This marked change in the formulae shows how unreliable really are any results of mechanistic theories depending on an incomplete knowledge of the actual components. A characteristic restriction to be kept in mind as regards all statements of this paragraph as well as the statements of the osmotic theory in general seems to be that they apply only to "actual" or "dynamic" components of the system. In other words, the large freedom in selecting (Gibbs') components for purely thermodynamic treatment must be limited in the case of a mechanistic treatment to the "dynamic" components. To these only the force laws can be applied.

9. **Conclusions:** (a) Regarding the Eastman theory. The different approach of different theories to the problem of the stationary cell may once more be clarified, when the role of water is considered. The great drawback of the osmotic theory is the neglect of solvent in general. Even Eastman has apparently not recognized that the Hittorf conductivity process as presented in Figs. 1^a and 1^b should not really be interpreted only in terms of appearance and disappearance of electrolyte but should be recognized as an element of a diffusion process.

The "appearance" and "disappearance" of electrolyte in Eastman's theory should really be defined as "diffusion" and "retrograde" diffusion. The process effected by the electrical current when fully described is really a displacement of electrolyte against solvent. One easily concludes (a) dependence of the Eastman effects on time and on the spatial parameter, (b) connection with spontaneous diffusion and with the reversal of this process (c) disappearance of the effect in the stationary state.

As conclusion we may remark on the Eastman effects, that their existence as defined here seems to be beyond any doubt. They represent the heat effects connected with the approach of the system to stationary state.

We will add here, that a correct diffusion law permits the calculation of the two countercurrent effects, this has been made use of in introducing in the previous calculation the effect of water of hydration and in the note (3_a).

(b) Regarding assumptions of the new theory. Apart from minor assumptions as regards the properties of the systems dealt with only one important assumption has been made to obtain the results of section 7. This assumption can be generalized as follows: The free energy of a thermodynamic component as a spatial function can never become discontinuous, or free energy can be lost only in a homogeneous effect.

(c) Regarding transference data and data from Eastman effect. These data can be of thermodynamic value only when the "actual" components of the systems are definitely established⁴). When this however is true and the law of force used in section 8 is established one is really dealing with a definite thermo-dynamic problem.

Notes.

1) Read at a thermodynamic colloquium Cavendish Laboratory December 3rd, 5th and 7th 1934.

2) The following formal results for the Helmholtz and Seebeck coefficients illustrate the points in question:

Thermodynamics:

$$\chi_{\max} \leq \frac{t}{z\mathfrak{F}} \alpha + 2 \sqrt{\frac{c \cdot d \cdot \alpha}{\eta}}; \quad \alpha = \left(\frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \ln N_2} - \frac{V_2}{V_1} \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \ln N_2} \right); \quad \varepsilon_m = \frac{dE}{dT} \leq \frac{\pi}{T} +$$

$$+ 2 \left(L^{1/2}_1 + L^{1/2}_2 \right)$$

mechanistic assumptions: $\chi_d = \frac{z\mathfrak{F}cd}{t\eta} \quad \varepsilon_d = \left(L^{1/2}_1 - L^{1/2}_2 \right)$

thermodynamic assumptions: $\chi_{\mathfrak{F}} = \frac{1}{z\mathfrak{F}} \frac{\partial \bar{F}_+}{\partial \ln N_2} \quad \varepsilon_{\mathfrak{F}} = \frac{\pi}{T}$

(c — concentration, d — diffusion coefficient, L — Wiedemann-Franz coefficient = $\frac{\lambda}{\eta T}$)

3) First described by B. Bružs *Zt. physikal. Chemie.* A 155, 396, 1931 (3a); Most of the following argument leads to the conclusion:

$$Q_2^* = \left(\frac{\partial \bar{H}_2}{\partial \ln N_2} - \frac{V_2}{V_1} \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \ln N_2} \right)$$

and that the heterogeneous Eastman effect is pseudo-heterogeneous, inasmuch as (fading out with time) it spreads into the heterogeneous effect. In (4) the last two terms should be replaced by tQ_2^* .

4) This statement remains true as long as t_+ is interpreted as $\frac{u}{u+v}$ and w as $\frac{uv}{u+v}$. The more general mechanistic (conflux) theory introduces a purely empirical t and leads then to the formula for χ_d given in note (2). It is very probable that $\chi^{d+} = \chi_{\mathfrak{F}}$ and $\varepsilon_d = \varepsilon_{\mathfrak{F}}$.

LVI ZINĀTNISKĀ
BIBLIOTEKA
642.21.88

2. Comparison of (a) regarding the Einstein theory. The different approach of different theories to the problem of the stationary cell may now more be clarified, when the role of water is considered. The great drawback of the Einstein theory is the neglect of solvent in general. Even the fact that the fluxion of the stationary cell is not zero is interpreted only as a consequence of the neglect of the solvent.

Difūzijas elementa teorija.

B. Bružs.

Autoreferāts.

1. Lai atrisinātu difūzijas elementa problēmu, nepieciešams (salīdzinot ar attiecīgo līdzsvara sistēmas atrisināšanu) ievest jaunus postulātus. Šie postulāti var būt vai nu mēchanistiskas jeb termodinamiskas dabas.

2. Līdzsvara sistēma (koncentrācijas elements) atļauj noteikt elektrolīta atšķaidīšanas brīvo enerģiju.

3. Ievēdot mēchanistiskus postulātus, osmotiska teorija atrod, ka difūzijas elementa EMS ir proporcionāls atšķaidījumam, kas seko Hittorfa elektrolītiskas vadišanas procesam.

4. Eastman'a teorijas Q^* efekti tiek izskaidroti kā enerģijas akumulācijas efekti pie līdzsvara sistēmas pārejas stacionārā sistēmā. Tiek arī aprakstīta metode šo lielumu noteikšanai.

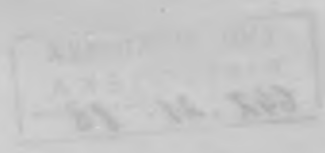
5. Stacionārā sistēmā pastāv divas kardināli dažādas materiālas kustības: viens no iōniem izved vienvirziena kustību, visi citi iōni turpretim ciklisku kustību (fig. 2b).

6. Kamēr abi iōni šais apstākļos izklaidē elektriskā avota enerģiju, tikmēr tikai viens no viņiem saistīts ar netto-koncentrācijas elektrisku latentu efektu. Beidzamais taisni kompensē abu Peltier'a efektu starpību. Rezultātā katrs difūzijas elements raksturo to elektrolīta komponentu (iōnu), kas reaģē ar elektrodu.

7. Teorija atļauj noteikt atsevišķo iōnu aktivitātes, to atšķaidīšanas un absolūtas entropijas.

8. Mēchanistisko teoriju rezultāti saistīti ar statistiska spēka likuma pielietošanu un prasa sistēmas dinamisko komponentu pazīšanu.

9. Difūzijas elementa galīga atrisināšana sasniegta, kad abi postulāti, mēchanistiskais un termodinamiskais, pareizi atrasti.



Sur la rotation permanente de la surface ellipsoïdale d'une masse fluide hétérogène

par *A. Putns*.

§ 1. Introduction.

La rotation d'une masse fluide autour d'un axe fixe est dite permanente, si la vitesse angulaire de rotation et la densité du fluide, dans le même point de l'espace, sont toujours les mêmes.

M. Dive¹⁾ a donné les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un tel mouvement soit possible.

Dans l'article présent nous donnerons une formule générale, qui nous permet de calculer la vitesse angulaire de rotation permanente de la surface extérieure d'une masse fluide en fonction de la répartition des densités du fluide, si la surface extérieure est un ellipsoïde de révolution aplati, et si la rotation s'effectue autour de l'axe polaire de cet ellipsoïde.

On peut considérer cette formule comme une généralisation de la formule de rotation de l'ellipsoïde de Maclaurin, bien connue dans la théorie des figures d'équilibre des masses fluides homogènes.

§ 2. Le potentiel d'un ellipsoïde de révolution aplati hétérogène.

Le potentiel newtonien s'écrit:

$$V = \int \frac{\rho dv}{D};$$

où dv est l'élément de volume, ρ la densité de cet élément, D la distance entre le point potentié et le point potential. L'intégration s'étend à tout le volume de la masse donnée.

¹⁾ P. Dive, Comptes rendus de l'Académie des sciences, T. 185. 1927.

Pour calculer le potentiel d'un ellipsoïde de révolution aplati, nous employerons les coordonnées elliptiques liées au coordonnées cartésiennes par des relations:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \vartheta \\ y &= \sqrt{r^2 + e^2} \sin \vartheta \cos \varphi \dots \dots \dots (1). \\ z &= \sqrt{r^2 + e^2} \sin \vartheta \sin \varphi \end{aligned}$$

Cettes coordonnées elliptiques r, ϑ, φ sont orthogonales. La coordonnée r détermine les surfaces ellipsoïdales de révolution d'excentricité linéaire e , parce que

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2 + z^2}{r^2 + e^2} = 1.$$

En désignant les coordonnées du point potential $r_1, \vartheta_1, \varphi_1$, nous pouvons écrire l'expression de l'élément du volume:

$$dv = (r_1^2 + e^2 \cos^2 \vartheta_1) \sin \vartheta_1 dr_1 d\vartheta_1 d\varphi_1.$$

Si à cet élément de volume repond la densité ρ de la masse fluide hétérogène, le potentiel extérieur d'un ellipsoïde de révolution (dont l'excentricité linéaire est e et l'axe polaire s) s'écrit:

$$V = \int_0^s dr_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^\pi \frac{\rho(r_1^2 + e^2 \cos^2 \vartheta_1) \sin \vartheta_1 d\vartheta_1}{D} \dots \dots (2).$$

M. Dive a démontré¹⁾ que dans la rotation permanente les surfaces d'égale densité du fluide doivent être de révolution.

C'est à dire, dans les coordonnées elliptiques la densité ρ ne peut dépendre que de r_1 et $\cos \vartheta_1$.

En développant l'expression de la densité en série des polinômes de Legendre, nous avons

$$\rho = \sum_0^m \alpha_n(r_1) P_n(\cos \vartheta_1); \quad n = 0, 1, 3, \dots, m; \dots \dots (3)$$

où

$$P_n(\cos \vartheta_1) = \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{1.2.3\dots n} \left\{ \cos^n \vartheta_1 - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \cos^{n-2} \vartheta_1 + \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^k \frac{n(n-1)\dots(n-2k+1)}{2.4\dots 2k.(2n-1)(2n-3)\dots(2n-2k+1)} \cos^{n-2k} \vartheta_1 + \dots \right\}$$

sont des polinômes de Legendre, et $\alpha_n(r_1)$ les fonctions connues de r_1 .

¹⁾ P. Dive. Rotations internes des astres fluides. Paris. 1930.

La somme (3) peut être considérée comme une somme des $(m+1)$ premiers termes du développement.

Un tel développement convergent est toujours possible, si la fonction ρ satisfait aux conditions de Dirichlet. En prenant m assez grand, il est possible d'exprimer la densité ρ par la somme (3) aussi exactement que l'on veut.

Si la densité est répartie symétriquement par rapport à l'équateur de l'ellipsoïde, les coefficients α_n avec n impair deviennent nuls, et il ne reste que des coefficients α_n avec $n=0, 2, 4, 6 \dots$

Alors l'expression (3) s'écrit:

$$\rho = \sum_{n=0}^m \alpha_{2n}(r_1) P_{2n}(\cos \vartheta_1) \dots \dots \dots (4);$$

Le polynôme $P_{2n}(\cos \vartheta_1)$ est du degré n en $\cos^2 \vartheta_1$, et l'expression $\rho(r_1^2 + e^2 \cos^2 \vartheta_1)$ est le polynôme du degré $(m+1)$ en $\cos^2 \vartheta_1$.

Il est possible développer un tel polynôme dans la forme suivante:

$$\rho(r^2 + e^2 \cos^2 \vartheta_1) = \sum_{n=0}^{m+1} a_{2n} P_{2n}(\cos \vartheta_1) \dots \dots \dots (5);$$

où a_{2n} est une fonction connue, dépendante de r_1 et e^2 .

On peut développer en série des fonctions sphériques aussi la distance réciproque $\frac{1}{D}$ entre deux points: $r_1, \vartheta_1, \varphi_1$ (point potential) et r, ϑ, φ (point potentié).

D'après Wangerin¹⁾ on a:

$$\frac{1}{D} = \frac{i}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu 2^{\frac{[1.3 \dots (2n-1)]^2}{(n+\nu)!(n-\nu)!}} Q_{n,\nu} \left(\frac{ir}{e} \right) P_{n,\nu} \left(\frac{ir_1}{e} \right) P_{n,\nu}(\cos \vartheta) P_{n,\nu}(\cos \vartheta_1) \cdot \cos \nu (\varphi - \varphi_1)$$

(par l'accent (')) il est remarqué, qu'il faut multiplier encore par le facteur $\frac{1}{2}$ les membres où $\nu=0$).

Dans ce développement: $i = \sqrt{-1}$;

$$P_{n,\nu}(x) = \frac{(n-\nu)!}{1.3 \dots (2n-1)} (\sqrt{x^2-1})^\nu \frac{d^\nu P_n(x)}{dx^\nu};$$

$$\left(x = \cos \vartheta, \cos \vartheta_1, \frac{ir_1}{e} \right);$$

¹⁾ Wangerin, Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen II B. p. 172 et 189.

$$Q_{n,\nu} \left(\frac{ir}{e} \right) = (-1)^\nu \frac{1.3 \dots (2n+1)}{(n+\nu)!} \left(\sqrt{\left(\frac{ir}{e} \right)^2 - 1} \right)^\nu \frac{d^\nu Q_n \left(\frac{ir}{e} \right)}{d \left(\frac{ir}{e} \right)^\nu},$$

où

$$Q_n \left(\frac{ir}{e} \right) = -i P_n \left(\frac{ir}{e} \right) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{e}{r} - P_n \left(\frac{ir}{e} \right) \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{e - x_k},$$

— ix_k sont les racines de l'équation $P_n(iz) = 0$, et

$$A_k = - \frac{1}{(x_k^2 - 1) [P'_n(x_k)]^2}.$$

Avec ces développements l'expression (2) devient après l'intégration:

$$V = \frac{4\pi i}{e} \sum_{n=0}^{m+1} Q_{2n} \left(\frac{ir}{e} \right) P_{2n}(\cos \vartheta) \int_0^s a_{2n}(r_1) P_{2n} \left(\frac{ir_1}{e} \right) dr_1 \dots (6).$$

Les coefficients $a_{2n}(r_1)$ sont les mêmes que dans l'expression (5).

Si le point potentié se trouve sur la surface extérieure de la masse, l'expression (6) est encore valable.

Alors, le potentiel pour un point de la surface ellipsoïdale de révolution aplati d'excentricité linéaire e et de l'axe polaire s s'écrit

$$V = \frac{4\pi i}{e} \sum_{n=0}^{m+1} Q_{2n} \left(\frac{is}{e} \right) P_{2n}(\cos \vartheta) \int_0^s a_{2n}(r_1) P_{2n} \left(\frac{ir_1}{e} \right) dr_1 \dots (7).$$

Nous utiliserons cette expression dans la suite.

§ 3. Formule générale de la rotation permanente de la surface d'un ellipsoïde de révolution aplati.

En supposant que la pression sur la surface libre du fluide soit nulle ou égale à une constante donnée, les équations du mouvement des points de cette surface deviennent:

$$dV + \frac{\omega^2}{2} dl^2 = 0; \dots \dots \dots (8).$$

où V est le potentiel newtonien de la masse fluide donnée, ω — la vitesse angulaire de rotation d'un point de la surface libre, et l — la distance de l'axe de rotation au point considéré.

En appliquant des coordonnées elliptiques du paragraphe précédent, cette équation s'écrit:

$$\frac{dV}{dr} dr + \frac{dV}{d\vartheta} d\vartheta + \omega^2 [r \sin^2 \vartheta dr + (r^2 + e^2) \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta] = 0 \dots (9).$$

Si la surface libre considérée est un ellipsoïde de révolution aplati d'excentricité linéaire e et d'axe polaire s , l'équation (9) devient:

$$\left(\frac{dV}{d\vartheta}\right)_{r=s} d\vartheta + \omega^2 (s^2 + e^2) \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta = 0,$$

ou

$$\left(\frac{dV}{d \cos^2 \vartheta}\right)_{r=s} = \frac{\omega^2}{2} (s^2 + e^2).$$

On obtient

$$\omega^2 = \frac{2}{s^2 + e^2} \left(\frac{dV}{d \cos^2 \vartheta}\right)_{r=s} \dots \dots \dots (10).$$

Alors, pour trouver la vitesse angulaire ω de la rotation permanente de la surface libre ellipsoïdale d'une masse fluide hétérogène il faut exprimer $\frac{dV}{d \cos^2 \vartheta}$ en fonction des éléments de cet ellipsoïde et de la densité de la masse fluide.

De l'expression (7) nous avons

$$\frac{dV}{d \cos^2 \vartheta} = \frac{4\pi i}{e} \sum_{n=1}^{m+1} Q_{2n} \left(\frac{is}{e}\right) \frac{dP_{2n}(\cos \vartheta)}{d \cos^2 \vartheta} \int_0^s a_{2n}(r_1) P_{2n}\left(\frac{ir_1}{e}\right) dr_1.$$

Le $P_{2n}(\cos \vartheta)$ est un polynôme du degré n en $\cos^2 \vartheta$. Alors

$$\frac{dP_{2n}(\cos \vartheta)}{d \cos^2 \vartheta}$$

est le polynôme du degré $(n-1)$ en $\cos^2 \vartheta$, et on peut écrire

$$\frac{dP_{2n}(\cos \vartheta)}{d \cos^2 \vartheta} = \sum_{l=0}^{n-1} \beta_{2l,2n} P_{2l}(\cos \vartheta),$$

où β sont les coefficients constants.

En calculant ces coefficients on trouve:

$$\beta_{2l,2n} = \frac{4l+1}{2} \left\{ 1 - C_{2l} + C_{2l} \frac{1.3 \dots (4n-1)}{(2n)!} \left[\frac{2n}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{2 \cdot (4n-1)} + \dots \right. \right. \\ \left. \left. \dots + (-1)^k \frac{1}{2n-2k-1} \frac{2n(2n-1) \dots (2n-2k+1)(2n-2k)}{2.4 \dots (2k).(4n-1)(4n-3) \dots (4n-2k+1)} + \dots \right] \right\} (11);$$

où

$$C_0 = 1 \text{ et } C_{2l} = (-1)^l \frac{1.3 \dots (2l-1)}{2.4 \dots (2l)} \text{ pour } l > 1.$$

En désignant

$$A_{2n} = \frac{8\pi i}{e(s^2 + e^2)} Q_{2n}\left(\frac{is}{e}\right) \int_0^s a_{2n}(r_1) P_{2n}\left(\frac{ir_1}{e}\right) dr_1;$$

on trouve

$$\omega^2 = \sum_{n=1}^{m+1} \left[A_{2n} \sum_{l=0}^{n-1} \beta_{2l,2n} P_{2l}(\cos \vartheta) \right],$$

ou

$$\omega^2 = \sum_{l=0}^m \left[P_{2l}(\cos \vartheta) \sum_{n=0}^{m-l} \beta_{2l,2m-2n+2} A_{2m-2n+2} \right] \dots (12)$$

Pour trouver ω^2 directement en fonction de la répartition des densités de la masse fluide, il faut remplacer, dans l'expression de A_{2n} , des coefficients $a_{2n}(r_1)$ par des coefficients $\alpha_{2n}(r_1)$ du développement de la densité ρ .

Identifiant les expressions (4) et (5), on a

$$\sum_{n=0}^m (r_1 + e^2 \cos^2 \vartheta_1) \alpha_{2n}(r_1) P_{2n}(\cos \vartheta_1) = \sum_{n=0}^{m+1} a_{2n}(r_1) P_{2n}(\cos \vartheta_1).$$

Développons $\sum_{n=0}^m \alpha_{2n} \cos^2 \vartheta_1 P_{2n}(\cos \vartheta_1)$ en une somme des polynômes de Legendre avec des coefficients indépendants de $\cos \vartheta_1$.

Nous trouvons:

$$\sum_{n=0}^m \alpha_{2n} \cos^2 \vartheta_1 P_{2n}(\cos \vartheta_1) = \sum_{n=0}^{m+1} \left\{ \frac{(2n-1)2n}{(4n-3)(4n-1)} \alpha_{2n-2} + \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} \right] \alpha_{2n} + \frac{(2n+2)(2n+1)}{(4n+3)(4n+5)} \alpha_{2n+2} \right\} P_{2n}(\cos \vartheta_1),$$

où

$$\alpha_{2m+2} = \alpha_{2m+4} = 0;$$

et

$$a_{2n}(r_1) = \frac{(2n-1)2n}{(4n-3)(4n-1)} e^2 \alpha_{2n-2} + \left\{ \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{(4n-1)(4n-3)} \right] e^2 + r_1^2 \right\} \alpha_{2n} + \frac{(2n+1)(2n+2)}{(4n+3)(4n+5)} e^2 \alpha_{2n+2}.$$

Alors A_{2n} a la forme suivante

$$A_{2n} = \frac{8\pi i}{e(s^2 + e^2)} Q_{2n} \left(\frac{is}{e} \right) \int_0^s \left\{ \frac{(2n-1)2n}{(4n-3)(4n-1)} e^2 \alpha_{2n-2} + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} \right) e^2 + r_1^2 \right] \alpha_{2n} + \right. \\ \left. + \frac{(2n+1)(2n+2)}{(4n+3)(4n+5)} e^2 \alpha_{2n+2} \right\} P_{2n} \left(\frac{ir_1}{e} \right) dr_1 \dots \dots (13).$$

Ici il faut remarquer, qu'en prenant A_{2m+2} et A_{2m} toujours $\alpha_{2m+2} = \alpha_{2m+4} = 0$.

Avec des expressions (11) et (13) désignons

$$B_{2l} = \sum_{n=0}^{m-l} \beta_{2l, 2m-2n+2} \cdot A_{2m-2n+2}.$$

Enfin, nous avons

$$\omega^2 = \sum_{l=0}^{l=m} B_{2l} P_{2l}(\cos \vartheta) \dots \dots \dots (14).$$

C'est la formule générale de la rotation permanente de la surface libre ellipsoïdale d'une masse fluide hétérogène. La pression sur la surface libre est supposée nulle ou égale à une constante donnée.

Si un tel mouvement est possible, cette formule permet de calculer facilement ω en fonction des coefficients α_{2n} du développement (4) de la densité.

M. Dive a démontré que la rotation permanente d'une masse fluide est possible, si la répartition des couches d'égale densité est ellipsoïdale. Mais, il n'est pas exclu que la rotation permanente soit possible aussi dans certaines autres répartitions de la densité.

Dans tous ces cas la formule (14) donne la rotation de la surface libre ellipsoïdale du fluide.

§ 4. La répartition des densités homofocale et les ellipsoïdes de Maclaurin.

Si les couches d'égale densité sont les ellipsoïdes homofocaux à l'ellipsoïde de la surface libre, la loi des densités dans les coordonnées elliptiques employées s'écrit:

$$\rho = \alpha_0(r_1).$$

Alors la formule générale (14) devient

$$\omega^2 = \frac{3}{2} \frac{8\pi i}{e(s^2 + e^2)} Q_2\left(\frac{is}{e}\right) \int_0^s \frac{2}{3} e^2 \alpha_0(r_1) P_2\left(\frac{ir_1}{e}\right) dr_1;$$

où

$$P_2\left(\frac{ir_1}{e}\right) = -\frac{3}{2} \left(\frac{r_1^2}{e^2} + \frac{1}{3}\right)$$

et

$$Q_2\left(\frac{is}{e}\right) = \frac{3i}{e} \left(\frac{s^2}{e^2} + \frac{1}{3}\right) \operatorname{arctg} \frac{e}{s} - \frac{3i}{2} \frac{s}{e},$$

c'est-à-dire

$$\omega^2 = \frac{18\pi e}{(s^2 + e^2)} \left[\left(\frac{s^2}{e^2} + \frac{1}{3}\right) \operatorname{arctg} \frac{e}{s} - \frac{s}{e} \right] \int_0^s \alpha_0(r_1) \left(\frac{r_1^2}{e^2} + \frac{1}{3}\right) dr_1.$$

Si la densité est constante dans toute l'étendue du fluide

$$\rho = \alpha_0 = \text{const}$$

la formule ci-dessus s'écrit:

$$\omega^2 = \frac{6\pi e s \alpha_0}{s^2 + e^2} \left[\left(\frac{s^2}{e^2} + \frac{1}{3}\right) \operatorname{arctg} \frac{e}{s} - \frac{s}{e} \right] \left(\frac{s^2}{e^2} + 1\right);$$

ou, en désignant $\lambda = \frac{e}{s}$

$$\frac{\omega^2}{2\pi \alpha_0} = \frac{(3 + \lambda^2) \operatorname{arctg} \lambda - 3\lambda}{\lambda^3} \quad (15);$$

c'est la formule bien connue de la rotation de l'ellipsoïde de Maclaurin.

La formule générale (14) peut être considérée comme la généralisation de la formule (15) de l'ellipsoïde de Maclaurin.

Présenté à la faculté le 20-me mai 1935.

Par heterogenas šķidrās masas ellipsoidālās virsmas permanento rotāciju.

A. Putns.

Šai darbā ir atrasta vispārīga formula, kas dod iespēju noteikt heterogenas šķidrās masas ārējās virsmas permanentās rotācijas leņķātrumu atkarībā no masas blīvuma sadalījuma, ja šīs šķidrās masas ārējā virsma ir saspiesta rotācijas ellipsoids un rotācija notiek ap šā ellipsoida asi. Ir pieņemts, ka uz šķidrās masas punktiem iedarbojas to savstarpējās gravitācijas spēki, un ka spiediens uz ārējās virsmas ir konstants vai līdzīgs nullei.

Izlietojot elliptiskās koordinātas (1) un uzrakstot blīvuma likumu (4) Legendre'a polinomu summas veidā, kā arī ņemot noteiktu dotās šķidrās masas ārējās virsmas (rotācijas ellipsoida) polāro pusasi un lineāro ekscentricitāti, ir dabūta (14) formula, no kuŗas var aplēst dotā ellipsoida virsmas punktu permanentās rotācijas leņķātrumu.

Ja dotā šķidrā masa ir homogēna, vai arī gadījumā, ja vienāda blīvuma virsmas ir homofokāli ellipsoidi attiecībā pret ārējo virsmu, tad no (14) formulas redzams, ka ārējās virsmas rotācijai jābūt ar konstantu leņķātrumu.

Homogēnas masas gadījumā (14) vispārīgā formula kļūst par pazīstamā Maclaurin'a ellipsoida (15) rotācijas formulu. Tādēļ šo (14) formulu var uzskatīt arī par Maclaurin'a ellipsoida rotācijas izteiksmes vispārinājumu.

Atots la formule générale (14) devient

$$w = \frac{3}{2} \frac{2\pi}{c} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}} Q_2 \left(\frac{H}{a} \right) \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} P_2(\cos \theta) P_2 \left(\frac{H}{a} \right) dr_1$$

Par hétérogènes s'écrit masses ellipsoïdales virtuelles

(permanent) rotations

Si dans la formule (14) on pose $\frac{v}{c} = 0$, on obtient la formule (15) qui représente la masse virtuelle d'un ellipsoïde homogène en rotation. On voit que cette masse virtuelle est égale à la somme des masses des ellipsoïdes virtuels qui composent l'ellipsoïde réel. On voit aussi que la masse virtuelle est égale à la somme des masses des ellipsoïdes virtuels qui composent l'ellipsoïde réel.

La masse virtuelle d'un ellipsoïde homogène en rotation est égale à la somme des masses des ellipsoïdes virtuels qui composent l'ellipsoïde réel. On voit que cette masse virtuelle est égale à la somme des masses des ellipsoïdes virtuels qui composent l'ellipsoïde réel.

On voit que la masse virtuelle d'un ellipsoïde homogène en rotation est égale à la somme des masses des ellipsoïdes virtuels qui composent l'ellipsoïde réel.

La masse virtuelle d'un ellipsoïde homogène en rotation est égale à la somme des masses des ellipsoïdes virtuels qui composent l'ellipsoïde réel.

vispārīgājumam.

Sur une classe de courbes planes algébriques de genre $p=0$.

Par Eugène Leimanis.

TABLE DES MATIÈRES.

Introduction	
§ 1. Méthode de construction des courbes de la classe de la cissoïde (C).	
§ 2. Considérations générales sur les courbes de la classe de la cissoïde (C).	
§ 3. Courbe C_4	
§ 4. Courbes inverses C_2^i, C_4^i des courbes C_2 et C_4	
§ 5. Courbe polaire C_4^p de la courbe C_4	
§ 6. Courbe oblique C_4^0	
§ 7. Classe des courbes (\bar{C}) conjuguée à la classe des courbes de la cissoïde (C)	
§ 8. Certaines classes de cissoïdales de la classe des courbes de la cissoïde (C)	
Liste des courbes	
Tableaux I, II, III et IV	

Introduction.

Tandis que plusieurs courbes algébriques du troisième ordre ont été l'objet des recherches de plusieurs géomètres anciens, les premières études des courbes d'ordre quatre et cinq n'ont guère commencé qu'au XVIII^e siècle, avec G. Cramer, L. Euler et d'autres auteurs mentionnés dans l'ouvrage classique de M. Loria¹⁾2).

Dans ce dernier, l'éminent géomètre italien M. Loria, considérant les courbes d'ordre cinq, assure, comme on le sait, que depuis longtemps déjà plusieurs courbes des ordres trois et quatre ont reçu des noms spéciaux, mais que nous ne connaissons pas une seule courbe algébrique

¹⁾ Loria, G. Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, Bd. I, 1910, Teubner, Leipzig, p. 236—240.

²⁾ Cf. aussi édition italienne du même ouvrage: Curve piane speciali algebriche e trascendenti, vol. I, 1930, Hoepli, Milano, p. 281—284.

d'ordre cinq qui eût reçu une dénomination spéciale, et touchant la question d'existence des courbes du septième ordre, qui sont très peu connues, M. Loria s'exprime comme il suit³⁾: „Die Geometrie meidet also auch hier, wie es auch die organische und anorganische Natur tut, die „heilige“ Zahl 7“.

D'ailleurs, on peut ajouter que jusqu'à nos jours les courbes algébriques d'ordre impair ont été très peu étudiées, tandis que celles d'ordre pair sont plus connues et leur nombre un peu plus grand.

Le but de ce travail est d'enrichir le nombre des courbes algébriques connues d'un ordre quelconque, supérieur à trois, ainsi que nos connaissances actuelles de ces courbes.

Les courbes que nous considérerons dans le § 1 sont construites graphiquement par M. le professeur J. Wihtols, et, à la suite de quelques questions relatives à ces courbes, que m'a posées M. Wihtols, j'ai entrepris la recherche analytique de ces courbes. J'adresse mes remerciements les plus sincères à M. Wihtols pour sa gracieuse bienveillance et la permission qu'il m'a accordée de prendre connaissance de quelques-unes de ses recherches graphiques non encore publiées.

Les courbes mentionnées plus haut peuvent être rangées d'après la manière de leur construction ou de leur caractère analytique dans une classe de courbes que j'ai nommée, d'après la première courbe de la classe — la cissoïde, la classe des courbes de la cissoïde (C). Toutes ces courbes sont rationnelles et par conséquent de genre $p = 0$, comme on le verra au § 1, en écrivant l'équation de la courbe générale de cette classe, qui est de la forme

$$x(x^2 + y^2)^n = 2R \varphi_n(x^2, y^2),$$

en désignant par $\varphi_n(x^2, y^2)$ une fonction homogène de degré n . La plus grande partie de cet ouvrage est consacrée aux courbes C_4 (droite) et C_4^0 (oblique) du cinquième ordre, que j'ai étudiées plus en détail. A la fin j'ai ajouté la liste des courbes considérées dans ce travail et représentées dans les quatre tableaux suivants avec leurs équations correspondantes. Les tableaux I, II, III représentent le développement de la classe des courbes de la cissoïde (C) et des trois autres classes des courbes (S), (B) et (S'), obtenues à partir de la première classe (C) par des transformations simples, et le tableau IV représente la courbe oblique C_4^0 ainsi que certaines autres courbes liées à cette dernière.

³⁾ loc. cit. 1) p. 288.

§ 1. Méthode de construction des courbes de la classe de la cissoïde (C).

Prenons un cercle (O_1, R) de centre O_1 et de rayon égal à R (Fig. 1) et sur sa circonférence un point O comme centre de rotation uniforme d'un rayon-vecteur OA , formant dans sa position initiale l'angle φ avec le diamètre OA_0 du cercle (O_1, R) , et un point P_1 avec une droite P_1Q_1 passant par ce point perpendiculairement à OO_1 . Supposons que le point P_1 soit animé d'une rotation uniforme sur la circonférence du cercle autour de son centre O_1 et que la droite P_1Q_1 passant par ce point P_1 se déplace parallèlement à elle-même. Le lieu géométrique du point P , point d'intersection du rayon-vecteur OA et de la droite P_1Q_1 , est une courbe algébrique.

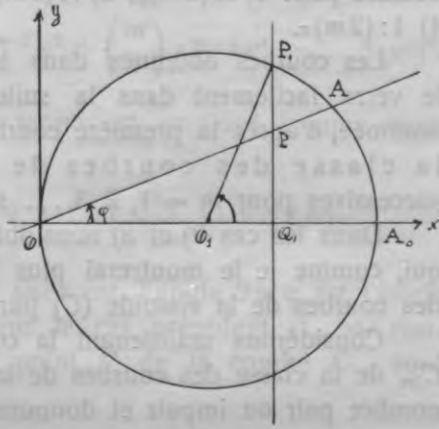


Fig. 1.

En faisant varier les positions initiales du mouvement du rayon-vecteur OA et du point P_1 et le rapport des vitesses angulaires du rayon-vecteur OA et du rayon O_1P_1 , on obtient des courbes algébriques de divers ordres. Pour la classe des courbes considérées dans cet article, le rapport des vitesses angulaires du rayon-vecteur OA et du rayon O_1P_1 est égal à $1:2m$, $m=1, 2, 3, \dots$, et la position initiale du point P_1 est le point A_0 ou le point O ; la position initiale du rayon-vecteur OA coïncide toujours avec la droite OO_1 , et les sens de rotation du rayon-vecteur OA et du point P_1 , ou bien du rayon O_1P_1 , sont positifs ou négatifs.

Pour abrégier les notations, désignons par ϑ_1 et ϑ_{2m} les vitesses angulaires du rayon-vecteur OA et du rayon O_1P_1 en prenant la vitesse angulaire du rayon-vecteur OA comme unité, et donnons la position initiale de la droite P_1Q_1 par celle du point P_1 par rapport au centre O_1 du cercle générateur (O_1, R) , en ajoutant dans le rapport

$$(*) \quad \frac{\vartheta_1}{\vartheta_{2m}} = 1: (2m)_0 \text{ ou } \pi$$

au nombre $2m$ l'index 0 ou π , suivant que le point P_1 coïncide dans sa position initiale avec le point A_0 ou avec le point O .

En employant ces notations abrégées, la construction graphique de chaque courbe est uniquement déterminée par une relation de la forme (\times) . Dans la suite, par l'expression (\times) nous exprimerons la relation des données initiales du mouvement du rayon-vecteur OA et de la droite P_1Q_1 .

Ayant en vue que dans l'expression (\times) m peut être un nombre pair ou impair, nous devons distinguer les quatre cas suivants: $m =$ nombre pair: 1) $1:(2m)_0$, 2) $1:(2m)_\pi$; $m =$ nombre impair: 3) $1:(2m)_0$, 4) $1:(2m)_\pi$.

Les courbes obtenues dans les cas 1) et 4) forment, comme on le verra facilement dans la suite, une classe de courbes, que j'ai nommée, d'après la première courbe de la classe ($m=1$) — la cissoïde, la classe des courbes de la cissoïde (C), et les courbes successives pour $m = 1, 2, 3, \dots$ seront désignées par C_2, C_4, C_6 etc.

Dans les cas 2) et 3) nous obtiendrons une autre classe de courbes, qui, comme je le montrerai plus loin, peut être déduite de la classe des courbes de la cissoïde (C) par une transformation simple (§ 8).

Considérons maintenant la construction d'une courbe quelconque C_{2m} de la classe des courbes de la cissoïde (C) suivant que m est un nombre pair ou impair et donnons les équations correspondantes.

$$\text{Cas I: } m = 2k (k = 1, 2, 3, \dots), \frac{\vartheta_1}{\vartheta_{2m}} = 1:(2m)_0.$$

Prenons pour axe des abscisses (Ox) la droite OO_1 et pour axe des ordonnées (Oy) la perpendiculaire à cette droite passant par le point O .

On aura, en représentant par (x, y) les coordonnées du point P de la courbe C_{2m} par rapport aux axes choisis,

$$(1) \begin{cases} x = OO_1 + O_1Q_1 = R(1 + \cos 2m\varphi) = 2R \cos^2 m\varphi, \\ y = Q_1P = x \operatorname{tg} \varphi, \end{cases}$$

ou

$$(2) \begin{cases} x = 2R[\cos^m \varphi - \binom{m}{2} \cos^{m-2} \varphi \sin^2 \varphi + \binom{m}{4} \cos^{m-4} \varphi \sin^4 \varphi \dots \pm \sin^m \varphi]^2 \\ y = x \operatorname{tg} \varphi, \end{cases}$$

en désignant par $\binom{m}{2}, \binom{m}{4}, \dots$ les coefficients binomes. Dans cette

équation, ayant le dernier terme avec \pm , le signe $+$ ou $-$ est employé suivant que m est de la forme $4n$ ou de la forme $4n+2$, $n=0, 1, 2, 3, \dots$

De ces équations paramétriques on déduit l'équation cartésienne correspondante, en éliminant $\cos \varphi$ et $\sin \varphi$ des équations (2) au moyen des formules

$$(3) \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

ce qui donne à l'équation cartésienne de la courbe la forme suivante:

$$(4) \quad x(x^2 + y^2)^m = 2R \left[x^m - \binom{m}{2} x^{m-2} y^2 + \binom{m}{4} x^{m-4} y^4 - \dots \pm y^m \right]^2.$$

Le signe $+$ ou $-$ dans le dernier terme est employé comme dans l'équation (2).

Cas II: $m = 2k + 1$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$), $\frac{\vartheta_1}{\vartheta_{2m}} = 1 : (2m)\pi$.

Dans ce cas, comme on le voit aisément, l'angle $2m\varphi$ est l'angle supplémentaire de l'angle $2m\varphi$ dans le cas précédent et, par conséquent, les coordonnées (x, y) du point P de la courbe C_{2m} sont données par les formules:

$$(5) \quad \begin{cases} x = R(1 - \cos 2m\varphi) = 2R \sin^2 m\varphi, \\ y = x \operatorname{tg} \varphi; \end{cases}$$

ou

$$(6) \quad \begin{cases} x = 2R \sin^2 \varphi \left[\binom{m}{1} \cos^{m-1} \varphi - \binom{m}{3} \cos^{m-3} \varphi \sin^2 \varphi + \dots \pm \sin^{m-1} \varphi \right]^2, \\ y = x \operatorname{tg} \varphi, \end{cases}$$

dans lesquelles $\binom{m}{1}, \binom{m}{3}, \dots$ sont les coefficients binomes et le signe $+$ ou $-$ du double signe dans le dernier terme est employé selon que m est de la forme $4n + 1$ ou de la forme $4n + 3$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Le résultat de l'élimination de $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$ des équations (6) au moyen des formules (3) donne l'équation cartésienne de la courbe C_{2m} considérée:

$$(7) \quad x(x^2 + y^2)^m = 2Ry^2 \left[\binom{m}{1} x^{m-1} - \binom{m}{3} x^{m-3} y^2 + \dots \pm y^{m-1} \right]^2,$$

dans laquelle le signe $+$ ou $-$ est employé comme dans l'équation (6).

§ 2. Considérations générales sur les courbes de la classe de la cissoïde (C).

Dans ce § nous considérerons quelques-unes des propriétés générales des courbes de la classe de la cissoïde (C). Ainsi, des équations (4) et (7) du § 1, qui sont les équations de la courbe générale C_{2m} de la classe (C), suivant que m est un nombre pair ou impair, on voit que pour cette courbe le point O est un point multiple de l'ordre $2m$ se composant de m points de rebroussement avec m tangentes distinctes dont les équations sont obtenues en égalant à zéro les polynômes de droite des équations mentionnées. Toutes ces courbes sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses et comprises entre l'axe des ordonnées et la parallèle à ce dernier passant par le point $(2R, 0)$, la droite $x = 2R$ étant la seule asymptote réelle et commune à toutes les courbes de la classe (C). Ces courbes touchent leur asymptote $x = 2R$ aux points correspondant à des valeurs de φ satisfaisant les équations

$$2R = R(1 \pm \cos 2m\varphi),$$

d'où il résulte que

$$\cos 2m\varphi = \pm 1,$$

suivant que m est un nombre pair (I^{er} cas) ou impair (II^e cas). Donc,

$\varphi = \frac{l}{m} \pi$ ($l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) dans le I^{er} cas et $\varphi = \frac{l}{2m} \pi$ ($l = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$) dans le II^e cas sont les valeurs du paramètre φ correspondant aux points de contact de la courbe avec son asymptote.

Dans la suite je démontrerai quatre théorèmes fondamentaux concernant les courbes de la classe considérée, en généralisant les quatre théorèmes connus sur la cissoïde⁴⁾⁵⁾; mais pour cela il est utile de rappeler ces théorèmes, qui sont les suivants:

Théorème I. La valeur de l'aire comprise entre la cissoïde et son asymptote est égale à trois fois l'aire du cercle générateur (O_1, R) de la cissoïde.

Théorème II. Le centre de gravité de l'aire comprise entre la cissoïde et son asymptote divise l'axe de symétrie de la courbe entre le sommet et l'asymptote en deux parties, dont le rapport compté du sommet de la cissoïde égale 5:1.

⁴⁾ loc. cit. 1) p. 42—45 ou 2) p. 46—49.

⁵⁾ F. Gomes Teixeira, *Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches*, T. I (= *Obras sobre mathematica*, vol. IV., Coïmbra, 1908) p. 6—9.

Théorème III. Le volume du solide engendré par la bande infinie comprise entre la cissoïde et son asymptote, quand la courbe tourne autour de cette droite, est égal au volume du tore engendré par le cercle générateur (O_1, R) , en le faisant tourner autour de l'asymptote.

Théorème IV. Le volume du solide engendré par l'aire comprise entre la cissoïde et l'asymptote, quand la courbe tourne autour de l'axe des ordonnées Oy , est égal à cinq fois le volume du tore engendré par le cercle générateur (O_1, R) , en le faisant tourner autour de l'axe des ordonnées.

Je donnerai maintenant une généralisation des théorèmes énoncés en démontrant pour une courbe C_{2m} (m un nombre entier positif), choisie arbitrairement dans la classe des courbes de la cissoïde (C) , les théorèmes suivants:

Théorème I¹. La valeur de l'aire L_{2m} comprise entre la courbe C_{2m} et son asymptote est égale à $3m$ fois l'aire du cercle générateur (O_1, R) de la courbe.

Théorème II¹. L'axe de symétrie de la courbe C_{2m} entre le sommet et son asymptote est divisé par le centre de gravité de l'aire comprise entre la courbe et son asymptote en deux parties, dont le rapport égale 5:1 compté du sommet de la courbe.

Théorème III¹. Le volume V_{2m} du solide engendré par la bande infinie comprise entre la courbe C_{2m} et son asymptote, quand la courbe tourne autour de cette droite, est égal à m fois le volume V_t du tore engendré par le cercle générateur (O_1, R) , en le faisant tourner autour de l'asymptote.

Théorème IV¹. Le volume V'_{2m} du solide engendré par l'aire comprise entre la courbe C_{2m} et son asymptote, quand la courbe tourne autour de l'axe des ordonnées Oy , est égal à $5m$ fois le volume V_t du tore engendré par le cercle générateur (O_1, R) , en le faisant tourner autour de l'axe des ordonnées.

Pour démontrer les théorèmes énoncés, il faut distinguer deux cas suivant que m est un nombre entier positif pair ou impair. J'emploierai la forme paramétrique de l'équation de la courbe C_{2m} trouvée dans le § 1:

$$(1) \quad \begin{cases} x = R(1 \pm \cos 2m\varphi) = 2R \begin{cases} \cos^2 m\varphi \\ \sin^2 m\varphi \end{cases} \\ y = x \operatorname{tg} \varphi. \end{cases}$$

Dans la première de ces équations le signe $+$ ou dans sa seconde forme la fonction $\cos^2 m\varphi$ est employée dans les cas où m est un nombre pair et le signe $-$ ou la fonction $\sin^2 m\varphi$ dans les cas où les nombres m sont impairs.

Passons maintenant à la démonstration du théorème I¹. En tenant compte du fait que la courbe C_{2m} touche son asymptote en plusieurs points, comme nous l'avons déjà vu, l'aire en question se compose de la somme des aires comprises entre les branches successives de la courbe et les segments correspondants de l'asymptote entre les points successifs de contact de la courbe avec son asymptote (voir les courbes dans les tableaux). Pour faciliter les calculs donnons la demivaleur de l'aire en question, c'est-à-dire, l'aire comprise entre la partie de la courbe au-dessus de l'axe des abscisses, le segment de cette dernière entre les points $x=0$ et $x=2R$, et l'asymptote de la courbe C_{2m} , par l'intégrale curviligne, en introduisant la variable φ déjà employée dans les équations de la courbe C_{2m} . On aura, donc

$$\frac{1}{2} L_{2m} = \oint y dx,$$

l'intégrale étant étendue au contour total de l'aire considérée, parcouru de telle manière que l'aire considérée soit toujours à la droite du mobile (sens négatif). Mais, ayant en vue que le long du segment de l'axe des abscisses $y=0$ et le long de l'asymptote $dx=0$, il ne nous reste qu'à évaluer l'intégrale précédente étendue le long de la courbe considérée dans le sens de φ croissant, c'est-à-dire,

$$L_{2m} = 2 \int_{C_{2m}} y dx = \mp 8 m R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{cases} \cos^2 m\varphi \\ \sin^2 m\varphi \end{cases} \cdot \operatorname{tg} \varphi \sin 2m\varphi d\varphi.$$

Pour calculer l'intégrale indéfinie $L^1_{2m} = 2 \int y dx$, passons de la variable réelle φ à la variable complexe z , en posant

$$(2) \quad e^{i\varphi} = z, \quad (i = \sqrt{-1})$$

d'où

$$\cos \varphi = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{z - z^{-1}}{2i}.$$

Avec cette nouvelle variable z , l'expression de L^1_{2m} prend la forme suivante:

$$L^1_{2m} = \frac{mR^2}{i} \int \frac{(z^{2m} \pm 1)^3 (z^2 - 1) (z^{2m} \mp 1)}{z^{4m+1} (z^2 + 1)} dz, \quad (3)$$

où dans l'expression sous le signe d'intégration, dans les termes à double signe, le signe supérieur est employé dans les cas de m pair et le signe inférieur correspond à des nombres m impairs. En développant l'expression sous le signe dans la dernière formule de L^1_{2m} en polynome suivant les puissances de z , on trouve

$$L^1_{2m} = \frac{mR^2}{i} \int \left[z^{4m-1} - 2(z^{4m-3} - z^{4m-5} + \dots \pm z^{2m+1}) \pm 4z^{2m-1} \right. \\ \mp 6(z^{2m-3} - z^{2m-5} + \dots \pm z) + \frac{6}{z} - \\ \left. - 6\left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^5} + \dots \pm \frac{1}{z^{2m-1}}\right) \pm \frac{4}{z^{2m+1}} \mp \right. \\ \left. \mp 2\left(\frac{1}{z^{2m+3}} - \frac{1}{z^{2m+5}} + \dots \pm \frac{1}{z^{4m-1}}\right) + \frac{1}{z^{4m+1}} \right] dz,$$

et par conséquent une intégration simple donne à L^1_{2m} l'expression suivante:

$$L^1_{2m} = \frac{mR^2}{i} \left[\frac{z^{4m}}{4m} - 2\left(\frac{z^{4m-2}}{4m-2} - \frac{z^{4m-4}}{4m-4} + \dots \pm \frac{z^{2m+2}}{2m+2}\right) \pm 4\frac{z^{2m}}{2m} \mp \right. \\ \mp 6\left(\frac{z^{2m-2}}{2m-2} - \frac{z^{2m-4}}{2m-4} + \dots \pm \frac{z^2}{2}\right) + 6 \ln z + \\ \left. + 6\left(\frac{1}{2z^2} - \frac{1}{4z^4} + \dots \pm \frac{1}{(2m-2)z^{2m-2}}\right) \mp 4\frac{1}{2mz^{2m}} \pm \right. \\ \left. \pm 2\left(\frac{1}{(2m+2)z^{2m+2}} - \frac{1}{(2m+4)z^{2m+4}} + \dots \pm \frac{1}{(4m-2)z^{4m-2}}\right) - \frac{1}{4mz^{4m}} \right].$$

Mais, ayant en vue que dans le domaine complexe, la valeur de l'intégrale calculée dépend du chemin parcouru, revenons à la variable réelle φ , évitant ainsi la difficulté qui se présente; et, comme on s'en rend compte facilement, l'expression de L^1_{2m} au moyen de la variable φ prend la forme suivante:

$$L^1_{2m} = \sum_{l=1}^{2m} A_l \sin 2l\varphi + 6mR^2\varphi,$$

A_l ($l=1, \dots, 2m$) étant des coefficients réels, s'exprimant moyennant R et m .

Pour obtenir, en particulier, l'aire mentionnée dans le théorème I¹, on doit faire varier l'angle φ dans la dernière expression de L^1_{2m} de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Avec ces limites d'intégration la dernière expression de L^1_{2m} donne à l'aire considérée la valeur suivante

$$L_{2m} = [L_{2m}^1]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6mR^2 \frac{\pi}{2} = 3m\pi R^2.$$

L'aire L_R du cercle générateur (O_1, R) , dont on s'est servi dans le § 1 pour définir la courbe C_{2m} , est égale à πR^2 .

Donc

$$L_{2m} = 3m L_R. \quad c. q. f. d.$$

Pour démontrer le théorème II¹, il faut évaluer l'expression

$$x_c = \frac{\oint x y dx}{\oint y dx},$$

qui donne la valeur de l'abscisse x_c ($y=0$) du centre de gravité de l'aire comprise entre la courbe C_{2m} , dont l'équation est (1), et son asymptote; les intégrales dans l'expression de x_c étant étendues au contour total de l'aire dont nous avons parlé. La valeur de $\oint y dx$ nous est déjà connue, il ne reste donc qu'à évaluer $\oint x y dx$.

Comme dans le cas précédent, calculons d'abord

$$\frac{1}{2} s = \oint x y dx,$$

l'intégrale étendue au contour total de l'aire, comprise entre la partie de la courbe C_{2m} qui se trouve au-dessus de l'axe des abscisses, le segment de cette dernière entre les points $x=0$ et $x=2R$ et la partie de l'asymptote de la courbe considérée au-dessus de l'axe des x , parcouru dans le sens négatif. Pour les mêmes raisons que dans le cas précédent, l'intégrale en question se réduit à l'intégrale simple étendue le long de la courbe dans le sens de φ croissant, c'est-à-dire,

$$s = 2 \int_{C_{2m}} x y dx = \mp 16mR^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{cases} \cos^4 m\varphi \\ \sin^4 m\varphi \end{cases} \cdot \operatorname{tg} \varphi \sin 2m\varphi d\varphi.$$

Les signes et les fonctions $\cos m\varphi$, $\sin m\varphi$ doivent être employés comme dans l'expression de L_{2m} . Calculons d'abord l'intégrale indéfinie s_1 . Introduisant la nouvelle variable z par la formule (2), l'expression de s_1 prend la forme:

$$s_1 = \pm \frac{mR^3}{2i} \int \frac{(z^{2m} \pm 1)^5 (z^2 - 1) (z^{2m} \mp 1)}{z^{6m+1} (z^2 + 1)} dz.$$

En développant l'expression sous le signe d'intégration en polynôme suivant les puissances de z , on obtient

$$s_1 = \pm \frac{mR^3}{2i} \int \left[z^{6m-1} - 2(z^{6m-3} - z^{6m-5} + \dots \pm z^{4m+1}) \pm 6z^{4m-1} \mp \right. \\ \mp 10(z^{4m-3} - z^{4m-5} + \dots \pm z^{2m+1}) + 15z^{2m-1} - \\ \left. - 20(z^{2m-3} - z^{2m-5} + \dots \pm z) \pm \frac{20}{z} \mp \right. \\ \mp 20\left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^5} + \dots \pm \frac{1}{z^{2m-1}}\right) + \frac{15}{z^{2m+1}} - \\ \left. - 10\left(\frac{1}{z^{2m+3}} - \frac{1}{z^{2m+5}} + \dots \pm \frac{1}{z^{4m-1}}\right) \pm \frac{6}{z^{4m+1}} \mp \right. \\ \left. \mp 2\left(\frac{1}{z^{4m+3}} - \frac{1}{z^{4m+5}} + \dots \pm \frac{1}{z^{6m-1}}\right) + \frac{1}{z^{6m+1}} \right] dz.$$

Une intégration simple donne à l'expression de s_1 la forme:

$$s_1 = \pm \frac{mR^3}{2i} \left[\frac{z^{6m}}{6m} - 2\left(\frac{z^{6m-2}}{6m-2} - \frac{z^{6m-4}}{6m-4} + \dots \pm \frac{z^{4m+2}}{4m+2}\right) \pm 6\frac{z^{4m}}{4m} \mp \right. \\ \mp 10\left(\frac{z^{4m-2}}{4m-2} - \frac{z^{4m-4}}{4m-4} + \dots \pm \frac{z^{2m+2}}{2m+2}\right) + 15\frac{z^{2m}}{2m} - \\ \left. - 20\left(\frac{z^{2m-2}}{2m-2} - \frac{z^{2m-4}}{2m-4} + \dots \pm \frac{z^2}{2}\right) \pm 20 \ln z \pm \right. \\ \left. \pm 20\left(\frac{1}{2z^2} - \frac{1}{4z^4} + \dots \pm \frac{1}{(2m-2)z^{2m-2}}\right) - \frac{15}{2m z^{2m}} + \right. \\ \left. + 10\left(\frac{1}{(2m+2)z^{2m+2}} - \frac{1}{(2m+4)z^{2m+4}} + \dots \pm \frac{1}{(4m-2)z^{4m-2}}\right) \mp \frac{6}{4m z^{4m}} \pm \right. \\ \left. \pm 2\left(\frac{1}{(4m+2)z^{4m+2}} - \frac{1}{(4m+4)z^{4m+4}} + \dots \pm \frac{1}{(6m-2)z^{6m-2}}\right) - \frac{1}{6m z^{6m}} \right].$$

Revenant, comme dans le cas précédent, à la variable réelle φ , l'expression de s_1 s'exprime par la formule

$$s_1 = \sum_{l=1}^{3m} B_l \sin 2l\varphi + 10mR^3 \varphi,$$

avec les coefficients B_l , des expressions réelles de R et m ; et, par conséquent, nous avons

$$s = [s_1]_0^{\frac{\pi}{2}} = 5m\pi R^3.$$

Donc

$$x_c = \frac{\oint x y dx}{\oint y dx} = \frac{5 m \pi R^3}{3 m \pi R^2} = \frac{5}{6} 2R.$$

c. q. f. d.

Les théorèmes III¹ et IV¹ peuvent être déduits moyennant les théorèmes I¹ et II¹ du théorème de Pappus-Guldin⁶⁾, qui exprime que le volume de rotation engendré par l'aire comprise entre une courbe et une droite, quand la courbe tourne autour de cette droite, est égal au volume d'un cylindre droit, dont l'aire de la base est égale à l'aire comprise entre la courbe et l'axe de rotation, et dont la hauteur est égale à la longueur du cercle décrit par le centre de gravité de l'aire plane tournant autour de l'axe de rotation.

Ce théorème, appliqué aux cas de nos théorèmes III¹, IV¹, nous donne:

$$V_{2m} = 3 m \pi R^2 \cdot 2 \pi \cdot \frac{1}{6} \cdot 2R = m \cdot 2 \pi^2 R^3 = m \cdot V_t$$

et

$$V'_{2m} = 3 m \pi R^2 \cdot 2 \pi \cdot \frac{5}{6} \cdot 2R = 5 m \cdot 2 \pi^2 R^3 = 5 m \cdot V_t,$$

V_{2m} , V'_{2m} et V_t désignant les volumes dont nous avons parlé plus haut.

§ 3. Courbe C_4 .

1. En prenant les axes des coordonnées comme dans le § 1, on obtient l'équation de la courbe C_4 sous forme cartésienne et sous forme paramétrique en posant dans les équations (4) et (1) du § 1 $m = 2$, ce qui donne

$$(I) \quad x(x^2 + y^2)^2 = 2R(x^2 - y^2)^2$$

et

$$(II) \quad \begin{cases} x = 2R \cos^2 2\varphi \\ y = x \operatorname{tg} \varphi. \end{cases}$$

En substituant dans l'équation (II) $\operatorname{tg} \varphi = \lambda$, ou en posant $y = \lambda x$ dans l'équation (I), on peut exprimer x et y en fonctions rationnelles d'un paramètre λ ; on obtient alors

$$(III) \quad \begin{cases} x = 2R \frac{(1 - \lambda^2)^2}{(1 + \lambda^2)^2} \\ y = 2R \lambda \frac{(1 - \lambda^2)^2}{(1 + \lambda^2)^2}. \end{cases}$$

⁶⁾ Cf. Czuber, E., Vorlesungen über Differential und Integralrechnung. Vol. II (Leipzig, 1921) p. 284.

On voit aisément par l'équation (I) que la courbe C_4 est symétrique par rapport à l'axe des abscisses, que le point O est un point quadruple consistant en deux points de rebroussement de la courbe, les équations des tangentes en ce point O étant $x \pm y = 0$. La courbe C_4 a une asymptote réelle dont l'équation est $x = 2R$, et tous les points de la courbe sont compris entre l'axe des ordonnées et l'asymptote.

Les parallèles à l'axe des ordonnées, qui passent par les points de l'axe des abscisses compris entre l'origine des coordonnées et le point $(2R, 0)$, coupent la courbe en quatre points placés à distance finie.

En posant dans l'équation (I): $1^0 x = R$, on obtient pour les quatre ordonnées y_1, y_2, y_3, y_4 de l'intersection de la droite $x = R$ avec la courbe C_4 les valeurs suivantes:

$$y_1 = R(\sqrt{2} + 1), y_2 = R(\sqrt{2} - 1), y_3 = -y_1, y_4 = -y_2,$$

et par suite

$$|y_1 - y_2| = |y_3 - y_4| = 2R;$$

$2^0 x = \frac{R}{2}$, les ordonnées correspondantes y_1', y_2', y_3', y_4' ont les valeurs:

$$y_1' = \frac{R}{2}\sqrt{3}, y_2' = \frac{R}{6}\sqrt{3}, y_3' = -y_1', y_4' = -y_2',$$

et conséquemment $y_1' = 3y_2'$.

Ces résultats peuvent être vérifiés sur le graphique de la courbe.

D'après les formules bien connues de Plücker, en représentant par $n = 5$ l'ordre et par ν la classe de la courbe, la valeur de cette dernière étant, comme je le démontrerai plus loin, égale à six, et par d, r, σ, δ les nombres de ses noeuds, points de rebroussement, points d'inflexion et bitangentes respectivement, et par p son genre, on obtient

$$d = 4, r = 2, \sigma = 5, \delta = 5, p = 0.$$

Donc, d'après M. Loria⁷⁾, la courbe C_4 appartient à la 24. catégorie de sa classification des courbes de l'ordre cinq.

2. Points de la courbe situés à l'infini. De l'équation de la courbe C_4 en coordonnées homogènes $x(x^2 + y^2)^2 = 2R(x^2 - y^2)^2 z$ on voit que la courbe passe par les points cycliques ω et ω' du plan, dont les coordonnées sont $x \pm iy = 0, z = 0$, et que chaque droite $y = \pm ix + c$, c — un nombre fini, ne coupe la courbe qu'en un point situé à l'infini, tandis que la droite à l'infini coupe la courbe aux points

⁷⁾ loc. cit. 1) p. 231 ou 2) p. 283.

ω et ω' en deux points coïncidants, c'est-à-dire, la droite à l'infini est une tangente double de la courbe C_4 .

3. Equation de la courbe C_4 en coordonnées tangentielles. La condition, pour que la droite $ux + vy + wz = 0$ soit la tangente à la courbe, implique une relation de la forme $\Phi(u, v, w) = 0$, qu'on appelle équation de la courbe en coordonnées tangentielles.

L'équation de la tangente à la courbe C_4 , donnée par l'équation (III), en coordonnées homogènes est

$$(1) \quad (1 + \lambda^2)(\lambda^4 + 8\lambda^2 - 1)x - 8\lambda(1 + \lambda^2)y + 2R(1 - \lambda^2)^3z = 0,$$

d'où il résulte, qu'en éliminant λ entre les équations

$$\frac{(1 + \lambda^2)(\lambda^4 + 8\lambda^2 - 1)}{u} = \frac{-8\lambda(1 + \lambda^2)}{v} = \frac{2R(1 - \lambda^2)^3}{w},$$

on trouvera l'équation de la courbe C_4 en coordonnées tangentielles.

Le résultat d'élimination nous donne à l'équation tangentielle cherchée de la courbe C_4 la forme

$$(2) \quad 4(u^2 + v^2)(2Ru + w)^4 + 4Ru v^2(2Ru + w)^3 + R^2 v^2(360u^2 + 349v^2)(2Ru + w)^2 - 4R^3 u v^2(216u^2 + 137v^2)(2Ru + w) - 4R^4 v^4(27u^2 + 16v^2) = 0,$$

qui est une équation du sixième degré, c'est-à-dire, la classe ν de la courbe C_4 est égale à six.

4. Construction des tangentes de la courbe. En représentant par (x, y) les coordonnées du point P de la courbe C_4 , donnée par l'équation (II), et par (x_1, y_1) celui du cercle générateur (O_1, R) et dont les équations paramétriques sont

$$\begin{cases} x_1 = 2R \cos^2 \varphi, \\ y_1 = R \sin 2\varphi, \end{cases}$$

il est facile de voir, que les équations des tangentes au point $P(x, y)$ de la courbe C_4 et au point correspondant $A(x_1, y_1)$ du cercle générateur sur le rayon OP sont respectivement

$$\begin{aligned} (\cos 2\varphi - 2\sin^2 2\varphi)X + 4\cos^2 \varphi \sin 2\varphi Y &= 2R \cos^3 2\varphi, \\ \cos 2\varphi X + \sin 2\varphi Y &= 2R \cos^2 \varphi. \end{aligned}$$

Ces équations nous montrent, que les ordonnées Y_1 et Y_2 des points, où ces tangentes coupent l'asymptote de la courbe C_4 , sont déterminées par les équations

$$Y_1 = R \operatorname{tg} \varphi (2 - \cos 2\varphi),$$

$$Y_2 = R \operatorname{tg} \varphi.$$

Il en résulte la relation

$$(3) \quad Y_1 = Y_2 (2 - \cos 2\varphi),$$

laquelle fait voir la manière de construire la tangente au point $P(x, y)$ de la courbe C_4 (Fig. 2).

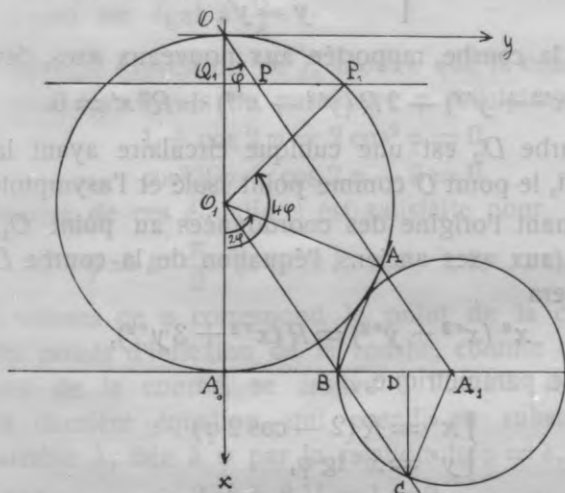


Fig. 2.

Dans ce but menons par le centre O_1 du cercle générateur (O_1, R) de la courbe C_4 une parallèle à la droite OA . Cette parallèle coupe l'asymptote de la courbe au point B . Puis décrivons autour du point A_1 , où l'asymptote est coupée par la droite OA , le cercle d'un rayon égal à A_1B . La droite O_1B coupe ce cercle en plus du point B en un point C qui est le point d'intersection de la droite O_1B avec la parallèle par le point A_1 à la tangente au point A du cercle (O_1, R) . Projetant le point C sur l'asymptote, en menant par le point C une parallèle à OO_1 , on obtient le point D , dont l'ordonnée est Y_1 , et la droite DP représente la tangente au point $P(x, y)$ de la courbe.

5. Considérons maintenant le lieu géométrique du point C quand le point P décrit la courbe C_4 . Le point C est le point d'intersection des droites O_1B et A_1C , dont les équations sont respectivement

$$y = \operatorname{tg} \varphi (x - R),$$

$$y = -\operatorname{ctg} 2\varphi [x - 2R(1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} 2\varphi)].$$

En éliminant entre ces équations le paramètre φ , on obtient l'équation

$$y^2 (x - 4R) = (2R - x) (x - R)^2,$$

qui est celle de la courbe cherchée D_2 .

Pour déterminer la forme de la courbe dont il s'agit, il convient de prendre un nouveau système des coordonnées x' , y' , lié au système x , y par les formules:

$$\begin{cases} x - 2R = x' \\ y = y', \end{cases}$$

et l'équation de la courbe, rapportée aux nouveaux axes, deviendra

$$x'(x'^2 + y'^2) - 2R(y'^2 - x'^2) + R^2 x' = 0.$$

Donc la courbe D_2 est une cubique circulaire ayant la tangente $x' = 0$ au sommet, le point O comme point isolé et l'asymptote $x' = 2R$.

En transformant l'origine des coordonnées au point O_1 , les axes restant parallèles aux axes anciens, l'équation de la courbe D_2 dans les nouveaux axes sera

$$x''(x''^2 + y''^2) = R(x''^2 + 3y''^2),$$

ou, dans la forme paramétrique,

$$(4) \quad \begin{cases} x'' = R(2 - \cos 2\varphi) \\ y'' = x'' \operatorname{tg} \varphi, \end{cases}$$

d'où l'on déduit immédiatement la manière suivante de construire la courbe. Autour du point O_1 , centre du cercle (O_1, R) , un rayon-vecteur est animé d'une rotation uniforme, et sur la circonférence du cercle (O_2, R) , dont le centre se trouve sur la droite OO_1 à la distance de $3R$ du point O , un point P_1 est animé d'une rotation angulaire uniforme autour du centre O_2 , la droite P_1Q_1 , passant par le point P_1 perpendiculairement à OO_1 , restant pendant la rotation du point P_1 toujours parallèle à elle-même; le rapport des vitesses angulaires du rayon-vecteur et du rayon O_2P_1 et les positions initiales du mouvement du rayon-vecteur et de la droite P_1Q_1 , ces dernières rapportées au centre O_2 du cercle (O_2, R) , étant données par la relation $1:2\pi$. Le lieu géométrique du point P , point d'intersection du rayon-vecteur et de la droite P_1Q_1 , est la courbe considérée D_2 .

6. On obtient aisément au moyen de l'équation polaire de la courbe C_4 l'expression suivante de son rayon de courbure r_c :

$$r_c = \frac{\sqrt{(\rho^2 + \rho'^2)^3}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''} = \frac{N^3 \cos^4 \varphi}{16R^2 \cos^2 2\varphi (1 + \cos 2\varphi) (3 - \cos 2\varphi - \cos^2 2\varphi)}$$

ou

$$r_c = \frac{R \cos 2\varphi [1 + (1 - \cos^2 2\varphi) (7 + 4 \cos 2\varphi)]^{3/2}}{(1 + \cos 2\varphi)^2 (3 - \cos 2\varphi - \cos^2 2\varphi)},$$

dans laquelle N représente la longueur de la normale et ρ' , ρ'' les dérivées de ρ par rapport à φ . En posant $\varphi=0$ dans l'expression de r_c , on obtient $r_c = \frac{R}{4}$, c'est-à-dire, le rayon de courbure au point A_0 de la courbe, lequel est égal à $\frac{R}{4}$.

7. La dernière expression de r_c montre que la courbe a des points d'inflexion pour les valeurs du paramètre φ satisfaisant aux équations

$$\begin{aligned} 1 + \cos 2\varphi &= 2 \cos^2 \varphi = 0, \\ \cos^2 2\varphi + \cos 2\varphi - 3 &= 0. \end{aligned}$$

La première de ces équations est satisfaite pour

$$\varphi = k \frac{\pi}{2} \quad (k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots),$$

mais à ces valeurs de φ correspond le point de la courbe à l'infini; donc un des points d'inflexion de la courbe, comme on le voit aussi par la forme de la courbe, se trouve à l'infini. Il reste encore à examiner la dernière équation, qui prend, en substituant à φ une nouvelle variable λ , liée à φ par la relation $\operatorname{tg} \varphi = \lambda$, la forme

$$3\lambda^4 + 8\lambda^2 + 1 = 0,$$

et qui donne pour points d'inflexion quatre points imaginaires de la courbe, correspondant aux valeurs du paramètre

$$(5) \quad \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-(4 - \sqrt{13})}{3}}, \quad \lambda_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{-(4 + \sqrt{13})}{3}}.$$

8. Cherchons maintenant les conditions pour que cinq points de la courbe C_4 soient situés sur une droite. Résolvons d'abord cette question par rapport à une courbe rationnelle générale du cinquième ordre en écrivant les équations paramétriques de cette courbe sous la forme

$$x_i = \sum_{l=0}^5 a_{il} \lambda^{5-l}, \quad (i = 1, 2, 3)$$

et en représentant par x_i les coordonnées homogènes de la courbe, par x une constante et par λ un paramètre arbitraire choisi convenablement. Les valeurs du paramètre λ , correspondant aux points d'intersection de la courbe avec la droite

$$(6) \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$

sont données par l'équation

$$\sum_{l=0}^5 \lambda^{5-l} \sum_{i=1}^3 a_{il} a_i = 0.$$

En représentant ces valeurs du paramètre λ par $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ et posant

$$\sum_i \lambda_i = s_1, \quad \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j = s_2, \quad \sum_{i,j,k} \lambda_i \lambda_j \lambda_k = s_3, \quad \sum_{i,j,k,l} \lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l = s_4, \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 = s_5,$$

la condition pour que cinq points $(\lambda_1), (\lambda_2), \dots, (\lambda_5)$, en représentant par (λ_i) le point de la courbe correspondant à la valeur λ_i du paramètre λ , soient situés sur la droite (6) est que tous les déterminants de la matrice

$$\begin{pmatrix} s_0 & a_{10} & a_{20} & a_{30} \\ s_1 & a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ s_2 & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ s_3 & a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ s_4 & a_{14} & a_{24} & a_{34} \\ s_5 & a_{15} & a_{25} & a_{35} \end{pmatrix},$$

où $s_0 = 1$, soient égaux à zéro. Pour cela il est nécessaire et suffisant que trois de ces déterminants s'annulent en donnant les conditions cherchées. Donnons à ces équations des formes plus convenables: en représentant par d_{123} , etc. avec des signes convenables les déterminants de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

l'une des conditions cherchées est donnée par l'équation

$$(7) \quad s_0 d_{123} + s_1 d_{023} + s_2 d_{013} + s_3 d_{012} = 0.$$

Introduisant dix-huit constantes nouvelles $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ($i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) telles que

$$\sum_{i=0}^5 \alpha_i a_{li} = 0, \quad \sum_{i=0}^5 \beta_i a_{li} = 0, \quad \sum_{i=0}^5 \gamma_i a_{li} = 0, \quad (l = 1, 2, 3)$$

et en se rapportant à un théorème connu de la théorie des déterminants, d'après lequel les déterminants ternaires de la matrice A sont proportionnels aux déterminants correspondants Δ_{lmn} de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \\ \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5 \\ \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5 \end{pmatrix},$$

l'équation (7) prend la forme suivante:

$$s_0 \Delta_{450} - s_1 \Delta_{451} + s_2 \Delta_{452} - s_3 \Delta_{453} + s_4 \Delta_{454} - s_5 \Delta_{455} = 0, \\ (\Delta_{454} = \Delta_{455} = 0).$$

En généralisant ce résultat, on voit que les conditions de la colinéarité prennent la forme

$$\sum_{i=0}^5 (-1)^i s_i \Delta_{lmi} = 0,$$

ou

$$(\beta \gamma)_{lm} \sum_{i=0}^5 (-1)^i s_i \alpha_i + (\gamma \alpha)_{lm} \sum_{i=0}^5 (-1)^i s_i \beta_i + (\alpha \beta)_{lm} \sum_{i=0}^5 (-1)^i s_i \gamma_i = 0,$$

en représentant par $(\beta \gamma)_{lm}$ etc. les expressions $(\beta_l \gamma_m - \beta_m \gamma_l)$ etc. Donc, les trois conditions de la colinéarité des cinq points $(\lambda_1), (\lambda_2) \dots (\lambda_5)$ de la courbe rationnelle générale d'ordre cinq sont données par les équations

$$(8) \quad \sum_{i=0}^5 (-1)^i s_i \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=0}^5 (-1)^i s_i \beta_i = 0, \quad \sum_{i=0}^5 (-1)^i s_i \gamma_i = 0.$$

Dans le cas de la courbe C_4 , ces conditions sont

$$s_1 = s_5, \quad s_2 = -2, \quad s_4 = 1,$$

qu'on obtient après avoir résolu explicitement les équations (8) en tenant compte des équations paramétriques de la courbe C_4 (III). Considérons maintenant quelques applications de ce résultat. Ainsi, en éliminant λ_5 entre les dernières équations, on obtient deux équations

$$(9) \quad s'_1 s'_3 + (1 - s'_4)^2 = 0,$$

$$(10) \quad s_1'^2 - (2 + s'_2)(1 - s'_4) = 0,$$

donnant les conditions de la colinéarité des quatre points de la courbe C_4 , en représentant par s'_1, s'_2, s'_3 et s'_4 les expressions:

$$s'_1 = \sum_{i=1}^4 \lambda_i, \quad s'_2 = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j, \quad s'_3 = \sum_{i,j,k} \lambda_i \lambda_j \lambda_k, \quad s'_4 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4.$$

En posant dans les équations (9), (10) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ et $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda'$, on obtient deux équations en λ et λ' et le résultat d'élimination de λ' de ces équations donne une équation relative à λ , dont les racines sont les valeurs du paramètre λ correspondant aux points de contact des tangentes doubles de la courbe C_4 .

D'ailleurs, en éliminant λ_4 entre les équations (9) et (10), on en obtient une autre

$$[\sigma_3^2 (2 + \sigma_2) + (1 + \sigma_2)^2 + \sigma_1 (2 \sigma_3 - \sigma_1 \sigma_2)]^2 (1 + \sigma_1 \sigma_3) = 0,$$

où $\sigma_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, $\sigma_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3$, $\sigma_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$.

Donc, la condition, pour que trois points de la courbe soient situés sur la même droite, est donnée par l'équation

$$\sigma_3^2 (2 + \sigma_2) + (1 + \sigma_2)^2 + \sigma_1 (2\sigma_3 - \sigma_1 \sigma_2) = 0.$$

Posant dans la dernière équation $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$, on obtient l'équation

$$3\lambda^8 + 2\lambda^6 - 12\lambda^4 + 6\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1)^2 (3\lambda^4 + 8\lambda^2 + 1) = 0,$$

et par conséquent les racines de l'équation

$$3\lambda^4 + 8\lambda^2 + 1 = 0$$

donnent les valeurs du paramètre λ :

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-(4 - \sqrt{13})}{3}}, \quad \lambda_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{-(4 + \sqrt{13})}{3}},$$

correspondant aux quatre points d'inflexion imaginaires de la courbe. [cf. (5)].

9. La somme des angles, formés par les vecteurs des points de contact des tangentes, menées par un point du plan de la courbe, avec l'axe de symétrie de cette dernière, est un multiple constant de π .

En effet, on voit par l'équation (1), que les valeurs prises par λ aux points de contact des tangentes passant par un point (α, β) sont données par l'équation

$$\lambda^6 + \frac{3(3\alpha + 2R)}{\alpha - 2R} \lambda^4 - \frac{8\beta}{\alpha - 2R} \lambda^3 + \frac{7\alpha - 6R}{\alpha - 2R} \lambda^2 - \frac{8\beta}{\alpha - 2R} \lambda - 1 = 0,$$

d'où il résulte, en représentant par $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$ les racines de cette équation, que

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} s_1 = \sum_{i=1}^6 \lambda_i = 0, \\ s_2 = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j = \frac{3(3\alpha + 2R)}{\alpha - 2R}, \\ s_3 = \sum_{i,j,k} \lambda_i \lambda_j \lambda_k = \frac{8\beta}{\alpha - 2R}, \\ s_4 = \sum_{i,j,k,l} \lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l = \frac{7\alpha - 6R}{\alpha - 2R}, \\ s_5 = \sum_{i,j,k,l,m} \lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l \lambda_m = \frac{8\beta}{\alpha - 2R}, \\ s_6 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6 = -1, \end{array} \right.$$

et ensuite, en représentant par $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_6$ les valeurs que φ prend aux points de contact des tangentes considérées et, en tenant compte de l'égalité $\operatorname{tg} \varphi = \lambda$, nous aurons

$$\operatorname{lg} \sum_{i=1}^6 \varphi_i = \frac{\sum_i \lambda_i - \sum_{i,j,k} \lambda_i \lambda_j \lambda_k + \sum_{i,j,k,l,m} \lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l \lambda_m}{1 - \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j + \sum_{i,j,k,l} \lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6} = 0.$$

Donc,

$$\sum_{i=1}^6 \varphi_i = m\pi. \quad (m = 0, 1, 2, 3 \dots)$$

c. q. f. d.

10. Le lieu des points (α, β) d'où l'on peut mener à la courbe C_4 deux tangentes, dont les vecteurs des points de contact forment un angle droit, est une courbe circulaire $(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 + 2\beta^2) - 2R\alpha^3 = 0$.

Le lieu cherché est le résultat de l'élimination de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$ entre les équations (11) et la condition $\lambda_1 \lambda_2 = -1$. Désignons les expressions de droite de $s_2, s_3 = s_5$ et s_4 dans les formules (11) par a, b et c respectivement. En éliminant de ces dernières le paramètre λ_1 , on obtient

$$(12) \quad \lambda_2^2 + \lambda_2 s'_1 - 1 = 0,$$

$$(13) \quad \lambda_2^3 s'_1 + \lambda_2^2 (s'_2 - a) - 1 = 0,$$

$$(14) \quad \lambda_2^2 s'_2 + \lambda_2 (s'_3 - s'_1 - b) - s'_2 = 0,$$

$$(15) \quad \lambda_2^2 s'_3 + \lambda_2 (s'_4 - s'_2 - c) - s'_3 = 0,$$

$$(16) \quad \lambda_2^2 s'_4 - \lambda_2 (s'_3 + b) - s'_4 = 0,$$

où

$$s'_1 = \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6, \quad s'_2 = \lambda_3 \lambda_4 + \lambda_3 \lambda_5 + \dots$$

$$s'_3 = \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 + \dots \quad s'_4 = \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 \lambda_6 = 1.$$

Des équations (12), (15), (16) déterminons s'_1, s'_2, s'_3 , et substituons les dans les équations (13) et (14), ce qui nous donne

$$(17) \quad b \lambda_2^2 + d \lambda_2 - b = 0, \quad d = a + c$$

$$(18) \quad \lambda_2^6 - b \lambda_2^5 - c \lambda_2^4 + c \lambda_2^2 - b \lambda_2 - 1 = 0.$$

Il reste à éliminer λ_2 de ces équations en formant la résultante de ces dernières, qui s'annule en vertu de (17) et (18) et nous donne la relation

$$b^2 (2b^2 + d^2 - cd) + d (3b^2 + d^2) = 0.$$

En substituant à a, b, c et d leurs expressions en α et β , on trouve pour l'équation du lieu cherché la forme suivante

$$(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 + 2\beta^2) - 2R\alpha\beta = 0. \quad c. q. f. d.$$

11. Déterminons maintenant les conditions nécessaires pour que les points de contact des tangentes à la courbe C_4 , menées par le point (α, β) , soient situés sur une conique. En supposant que l'équation de la conique est

$$(19) \quad ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0,$$

on voit que les valeurs, que λ prend aux points où cette conique coupe la courbe C_4 , satisfont à l'équation

$$(20) \quad \lambda^{10} + A\lambda^9 + (B-4)\lambda^8 + C\lambda^7 + (D+6)\lambda^6 - 2(A+C)\lambda^5 + E\lambda^4 + C\lambda^3 + (D+1)\lambda^2 + A\lambda + B = 0,$$

où

$$(21) \quad \begin{cases} A = \frac{2Rc + e}{2Rb}, & B = \frac{4R^2a + 2Rd + f}{4R^2b}, & C = -\frac{4c}{b}, \\ D = \frac{-4R^2a + f}{R^2b}, & E = \frac{12R^2a - 8R^2b - 2Rd + 3f}{2R^2b}, \end{cases}$$

qu'on obtient en substituant les expressions de x et y de la forme paramétrique (III) de la courbe C_4 dans l'équation de la conique (19). D'un autre côté, les valeurs, que λ prend aux points de contact des tangentes à la courbe C_4 , menées par le point (α, β) , sont déterminées par l'équation

$$(22) \quad \lambda^6 + K\lambda^4 + L\lambda^3 + M\lambda^2 + N\lambda - 1 = 0,$$

où

$$(23) \quad K = \frac{3(3\alpha + 2R)}{\alpha - 2R}, \quad L = -\frac{8\beta}{\alpha - 2R}, \quad M = \frac{7\alpha - 6R}{\alpha - 2R}.$$

On trouve donc les conditions nécessaires pour que les points de contact des tangentes à la courbe C_4 , menées par le point (α, β) , soient situés sur la conique considérée, en exprimant que les racines de l'équation (22) satisfont à l'équation (20), ou que le reste de la division du premier membre de l'équation (20) par le premier membre de l'équation (22) est identiquement nul. Or, ce reste a pour expression

$$\begin{cases} -(2A + 2C + L + AM + \gamma L + \delta K)\lambda^5 + (E + 1 - AL - \gamma M - \\ - \delta L - \varepsilon K)\lambda^4 + (C + A - \gamma L - \delta M - \varepsilon L)\lambda^3 + (D + 1 + \gamma - \\ - \delta L - \varepsilon M)\lambda^2 + (A + \delta - \varepsilon L)\lambda + (B + \varepsilon), \end{cases}$$

où

$\gamma = B - K - 4$, $\delta = C - L - AK$, $\varepsilon = D + 6 - M - AL - (B - K - 4)K$,
 et les conditions cherchées sont:

$$(24) \left\{ \begin{array}{l} A(M - K^2 + 2) + BL + C(K + 2) - L(2K + 3) = 0, \\ AL(1 - 2K) + B(M - K^2) + CL + DK - E - [1 - K(6 + 4K + K^2) + \\ \quad + L^2 + 2M(K + 2)] = 0, \\ A(1 + KM + L^2) - BL(1 - K) + C(1 - M) - DL + L(2M - \\ \quad - 3K - K^2 - 2) = 0, \\ AL(K + M) + B(1 + KM) - CL + D(1 - M) - 3 - K + L^2 - \\ \quad - M(6 - M + K^2 + 4K) = 0, \\ A(1 - K + L^2) + BKL + C - DL - L(7 - M + K^2 + 4K) = 0, \\ AL - B(1 - K) - D - (6 - M + K^2 + 4K) = 0. \end{array} \right.$$

Ainsi nous avons obtenu six équations avec cinq inconnues A, B, C, D, E , qui s'expriment elles mêmes en fonctions des quantités a, b, c, d, e, f . La condition nécessaire est suffisante, pour que le système des six équations puisse être résolu, est que les rangs des deux matrices \mathfrak{M} et \mathfrak{M}^1 , où

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} M - K^2 + 2 & L & K + 2 & 0 & 0 \\ L(1 - 2K) & M - K^2 & L & K & -1 \\ 1 + KM + L^2 & -L(1 - K) & 1 - M & -L & 0 \\ L(K + M) & 1 + KM & -L & 1 - M & 0 \\ 1 - K + L^2 & KL & 1 & -L & 0 \\ L & -(1 - K) & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{M}^1 = \begin{pmatrix} M - K^2 + 2, & L & K + 2 & 0 & 0 & m_1 \\ L(1 - 2K) & M - K^2 & L & K & -1 & n_1 \\ 1 + KM + L^2 & -L(1 - K) & 1 - M & -L & 0 & p_1 \\ L(K + M) & 1 + KM & -L & 1 - M & 0 & q_1 \\ 1 - K + L^2 & KL & 1 & -L & 0 & r_1 \\ L & -(1 - K) & 0 & -1 & 0 & s_1 \end{pmatrix}$$

avec

$$m_1 = -L(2K + 3), \quad n_1 = -[1 - K(6 + 4K + K^2) + L^2 + 2M(K + 2)], \\ p_1 = L(-2 - 3K - K^2 + 2M), \quad q_1 = -3 - K + L^2 - M(6 - M + \\ + K^2 + 4K), \\ r_1 = -L(7 - M + K^2 + 4K), \quad s_1 = -(6 - M + K^2 + 4K),$$

soient égaux. Le rang de \mathfrak{M} est égal à quatre, parce que tous les déterminants du quatrième ordre ne sont pas équivalents à zéro, mais ceux du cinquième ordre sont tous égaux à zéro. D'un autre côté tous les déterminants du cinquième ordre de la matrice \mathfrak{M}^1 , excepté le déterminant d_{25} correspondant à l'élément de la matrice de la deuxième ligne et de la cinquième colonne, sont égaux à zéro. Donc, la condition, pour que les rangs de \mathfrak{M} et \mathfrak{M}^1 soient égaux, est que la valeur de d_{25} , où

$$d_{25} = \begin{vmatrix} M - K^2 + 2 & L & K + 2 & 0 & m_1 \\ 1 + KM + L^2 & -L(1 - K) & 1 - M & -L & p_1 \\ L(K + M) & 1 + KM & -L & 1 - M & q_1 \\ 1 - K + L^2 & KL & 1 & -L & r_1 \\ L & -(1 - K) & 0 & -1 & s_1 \end{vmatrix},$$

soit égale à zéro. Cette condition nous donne la relation

$$(25) \quad 4L^2(K^2 + 5K + M + 3) + (K + M)^2(K^2 + 7K - M + 15) = 0,$$

d'où, en exprimant K, L, M au moyen des formules (23) par α et β , on obtient pour le lieu cherché l'équation

$$(26) \quad \alpha(19\alpha^2 + 17\beta^2) = 2R(\alpha^2 - \beta^2).$$

En substituant dans la dernière équation

$$\begin{aligned} \alpha &= x' + h, & h &= -\frac{2R}{17}, \\ \beta &= y', \end{aligned}$$

on obtient comme équation de la courbe

$$x' y'^2 = a_1 x'^3 + b_1 x'^2 + c_1 x' + d_1,$$

où

$$a_1 < 0, \quad b_1, \quad c_1, \quad d_1$$

sont des constantes. Donc la courbe représentée par la dernière équation est une courbe du troisième ordre appartenant à la première forme des cubiques, donnée par Newton.

Ayant en vue que le système d'équations (24) est résoluble, on détermine les quantités A, B, C, D, E de cinq équations quelconques du système (24) choisies arbitrairement et, en substituant ces valeurs dans la sixième, on obtient l'équation (25).

Ayant obtenu les valeurs de A, B, C, D, E par K, L, M , au moyen de (21) exprimons a, b, c, d, e, f par celles-ci et ensuite au moyen de (23) par α, β , ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \frac{a}{f} &= \frac{\beta^2(17\alpha + 2R) + 3\alpha(7\alpha^2 + 8\alpha R - 4R^2)}{4R^2[\beta^2(7\alpha - 2R) - \alpha^2(43\alpha - 2R)]}, \\ \frac{b}{f} &= \frac{2\alpha(\alpha - 2R)^2}{4R^2[\beta^2(7\alpha - 2R) - \alpha^2(43\alpha - 2R)]}, \\ \frac{c}{f} &= -\frac{2R\beta(17\alpha + 2R)}{4R^2[\beta^2(7\alpha - 2R) - \alpha^2(43\alpha - 2R)]}, \\ \frac{d}{f} &= \frac{2R\alpha(19\alpha^2 - 14\alpha R - 24\beta^2)}{4R^2[\beta^2(7\alpha - 2R) - \alpha^2(43\alpha - 2R)]}, \\ \frac{e}{f} &= \frac{2R\alpha\beta(5\alpha + 26R)}{4R^2[\beta^2(7\alpha - 2R) - \alpha^2(43\alpha - 2R)]}. \end{aligned}$$

De tout ce qui précède on conclut que les points de contact des six tangentes, menées par un point quelconque de la courbe (26), sont situés sur une conique, dont l'équation est

$$\begin{aligned} &[\beta^2(17\alpha + 2R) + 3\alpha(7\alpha^2 + 8\alpha R - 4R^2)]x^2 + 2\alpha(\alpha - 2R)^2y^2 - \\ &- 2R\beta(17\alpha + 2R)xy + 2R\alpha(19\alpha^2 - 14\alpha R - 24\beta^2)x + 2R\alpha\beta(5\alpha + \\ &+ 26R)y + 4R^2[\beta^2(7\alpha - 2R) - \alpha^2(43\alpha - 2R)] = 0. \end{aligned}$$

§ 4. Courbes inverses C_2^i , C_4^i des courbes C_2 et C_4 .

En continuant l'étude des courbes de la classe (C), nous allons chercher les courbes inverses de C_2 et C_4 : 1° par rapport au cercle (O, R) et 2° par rapport au cercle (O_1, R) . Prenant pour cela les centres de ces cercles comme origines des coordonnées et des parallèles aux axes anciens passant par ces points comme axes des ordonnées, les équations de ces courbes peuvent être obtenues en posant

$$(1) \quad x = \frac{R^2 x_1}{x_1^2 + y_1^2}, \quad y = \frac{R^2 y_1}{x_1^2 + y_1^2}.$$

Cas de la courbe C_2 (cissoïde de Dioclès).

La courbe inverse de C_2 par rapport au cercle (O, R) , comme c'est bien connu, est une parabole. Si le centre d'inversion ne coïncide pas avec un point des cubiques circulaires, les courbes inverses sont des quartiques bicirculaires, et dans le cas de C_2 nous obtiendrons pour sa courbe inverse C_2^i par rapport au cercle (O_1, R) , en transformant l'origine des coordonnées au point O , l'équation

$$(2) \quad (x^2 + y^2)^2 - Rx(x^2 + y^2) - 2R^2y^2 = 0.$$

Cas de la courbe C_4 .

La courbe inverse $C_4^i(O, R)$ de C_4 par rapport au cercle (O, R) est donnée par l'équation

$$(3) \quad 2(x_1^2 - y_1^2)^2 - R x_1 (x_1^2 + y_1^2) = 0,$$

et sa courbe inverse $C_4^i(O_1, R)$ par rapport au cercle (O_1, R) , en prenant le point O comme origine des coordonnées, a la forme

$$(4) \quad (x^2 + y^2)^4 - 5 R x (x^2 + y^2)^3 + R^2 (9x^2 - 5y^2) (x^2 + y^2)^2 + \\ + R^3 x (9y^2 - 7x^2) (x^2 + y^2) + 2 R^4 (x^2 - y^2)^2 = 0.$$

Par cette équation on voit, qu'au point O la courbe a deux points de rebroussement de deuxième espèce, dont les tangentes de rebroussement sont respectivement les droites données par les équations $y \pm x = 0$.

Corollaire. En posant dans l'équation (4) $x = R$, on a

$$y_1 = R(\sqrt{2} + 1), y_2 = R(\sqrt{2} - 1), y_3 = -y_1, y_4 = -y_2,$$

et par conséquent

$$|y_1 - y_2| = |y_3 - y_4| = 2R.$$

La courbe donnée par l'équation (4) est la courbe inverse de C_4 de l'ordre supérieur, qu'on peut obtenir par rapport à un point qui ne coïncide pas avec un point de la courbe C_4 .

§ 5. Courbe polaire C_4^p de la courbe C_4 .

L'équation de la courbe polaire C_4^p de C_4 par rapport au cercle $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ peut être obtenue, comme on le sait⁸⁾, à partir de l'équation tangentielle de la courbe C_4 [§ 3, 3 (2)] en y substituant au lieu de u, v , et w les expressions $x', y', -R^2 z'$ respectivement, en désignant par (x', y', z') les coordonnées homogènes d'un point. On obtient ainsi l'équation cartésienne de C_4^p , en changeant l'origine des coordonnées par les formules

$$x' = x + \frac{R}{2}, y' = y,$$

sous la forme suivante:

$$(1) \quad 64(x^2 - y^2)^3 + 16 R x (4x^4 - 71x^2y^2 - 41y^4) + \\ + R^2 (16x^4 - 936x^2y^2 - 27y^4) - 216 R^3 x y^2 = 0,$$

⁸⁾ Cf. HILTON, H., Plane algebraic curves (Oxford, 1932) p. 62.

d'où l'on voit, qu'au point O de la courbe C_4 avec les tangentes $y = \pm x$ dans la courbe polaire C_4^p correspondent deux points d'inflexion dans les directions $y = \pm x$, la droite à l'infini étant la tangente d'inflexion à ces points. Ce fait s'accorde bien avec la théorie générale de la réciproité des points singuliers.

§ 6. Courbe oblique C_4^0 .

1. La méthode de construction des courbes algébriques, considérées dans le § 1, peut être généralisée de la manière suivante. Prenons, comme dans le § 1, un cercle (O_1, R) de centre O_1 et de rayon égal

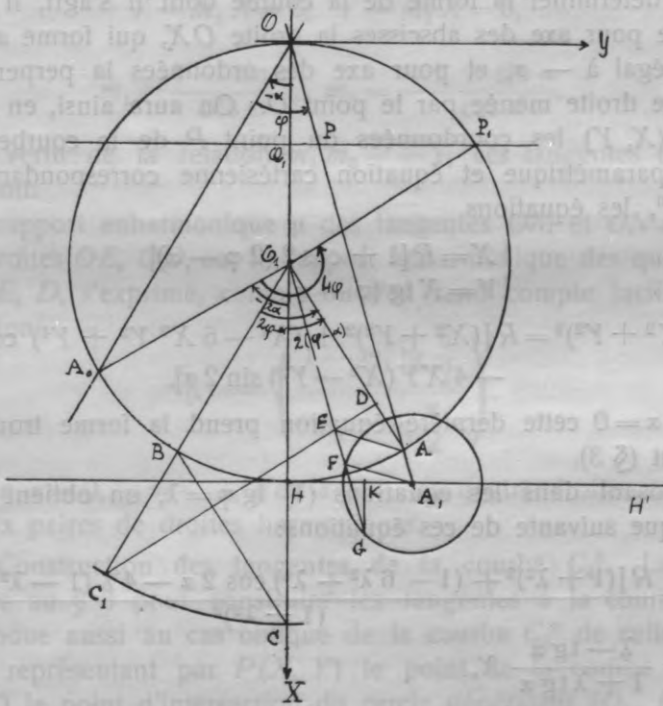


Fig. 3.

à R (Fig. 3) et sur sa circonférence un point O comme centre de rotation uniforme d'un rayon-vecteur OA et un point P_1 avec une droite P_1Q_1 passant par ce point perpendiculairement à OO_1 . Supposons que le point P_1 soit animé d'une rotation uniforme autour de O_1 , le rapport des vitesses angulaires du rayon-vecteur OA et du rayon O_1P_1

étant $1:2m$, et supposons que la position initiale du rayon-vecteur OA soit une droite OA_0 formant l'angle $-\alpha$ avec OO_1 et celle de la droite P_1Q_1 est la droite passant perpendiculairement à OO_1 par le point A_0 ou par le point O comme dans le § 1. Le lieu du point P , point d'intersection du rayon-vecteur OA avec la droite P_1Q_1 , est une courbe algébrique oblique C_{2m}^0 correspondant à la courbe C_{2m} de la classe des courbes (C).

Considérons, en particulier, la courbe C_4^0 , c'est-à-dire, supposons que le rapport des vitesses angulaires du rayon-vecteur OA et du rayon O_1P_1 égale $1:4$, la position initiale de la droite P_1Q_1 étant la droite passant par A_0 perpendiculairement à OO_1 .

Pour déterminer la forme de la courbe dont il s'agit, il convient de prendre pour axe des abscisses la droite OX , qui forme avec OA_0 un angle égal à $-\alpha$, et pour axe des ordonnées la perpendiculaire OY à cette droite menée par le point O . On aura ainsi, en représentant par (X, Y) les coordonnées du point P de la courbe, comme équation paramétrique et équation cartésienne correspondante de la courbe C_4^0 , les équations

$$(1) \quad \begin{cases} X = R[1 + \cos 2(2\varphi - \alpha)] \\ Y = X \operatorname{tg}(\varphi - \alpha), \end{cases}$$

$$(2) \quad X(X^2 + Y^2)^2 = R[(X^2 + Y^2)^2 + (X^4 - 6X^2Y^2 + Y^4) \cos 2\alpha - 4XY(X^2 - Y^2) \sin 2\alpha].$$

Pour $\alpha = 0$ cette dernière équation prend la forme trouvée précédemment (§ 3).

En posant dans les équations (1) $\operatorname{tg} \varphi = \lambda$, on obtient la forme paramétrique suivante de ces équations:

$$(3) \quad \begin{cases} X = \frac{R[(1 + \lambda^2)^2 + (1 - 6\lambda^2 + \lambda^4) \cos 2\alpha - 4\lambda(1 - \lambda^2) \sin 2\alpha]}{(1 + \lambda^2)^2} \\ Y = \frac{\lambda - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \lambda \operatorname{tg} \alpha} X, \end{cases}$$

d'où l'on conclut que la courbe C_4^0 est une courbe unicursale. Au moyen de l'équation (2) on peut déterminer aisément la forme de la courbe C_4^0 (voir tableau IV). Elle passe par le point O et est comprise entre l'axe des ordonnées et une parallèle à cet axe menée par le point $(2R, 0)$. Les parallèles à l'axe des ordonnées, qui passent par les points de l'axe des abscisses compris entre l'origine des coordonnées et le point $(2R, 0)$, coupent la courbe en quatre points placés à distance finie. La droite

$X = 2R \cos^2 \alpha$ en est une asymptote et cette dernière coupe la courbe encore aux points A, B, C , dont les ordonnées Y_1, Y_2, Y_3 sont données par les formules

$$Y_1 = -R \sin 2\alpha, \quad Y_2 = 0, \quad Y_3 = \frac{2R \cos^3 \alpha}{\sin \alpha}.$$

La droite $X = 2R$, qui limite la bande où la courbe est comprise, est tangente à cette courbe aux points E et D , dont les ordonnées Y_4 et Y_5 sont égales à $-2R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ et $2R \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$ respectivement. Le point O est un point quadruple de la courbe avec deux tangentes distinctes, dont les équations sont

$$Y - m_1 X = 0, \quad Y - m_2 X = 0,$$

où

$$m_1 = \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad m_2 = -\frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

En vertu de la relation $m_1 m_2 = -1$, ces tangentes forment un angle droit.

Le rapport anharmonique μ des tangentes OM et ON au point O et des droites OE, OD , ou, le rapport anharmonique des quatre points $M, N; E, D$, s'exprime, comme on s'en rend compte facilement, par l'expression

$$\mu = -\left(\frac{1 - m_1 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{m_1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \right)^2.$$

Pour $\alpha = 0$, $\mu = -1$, c'est-à-dire, les quatre droites mentionnées font deux paires de droites harmoniques.

2. Construction des tangentes de la courbe C_4^0 . La méthode employée au § 3 pour construire les tangentes à la courbe C_4 peut être étendue aussi au cas oblique de la courbe C_4^0 de cette manière.

En représentant par $P(X, Y)$ le point de la courbe C_4^0 et par $A(x_1, y_1)$ le point d'intersection du cercle générateur (O_1, R) avec la droite OP , passant par le point O et formant avec l'axe des abscisses un angle égal à $\varphi - \alpha$, les équations des tangentes à la courbe C_4^0 au point $P(X, Y)$ et au cercle au point $A(x_1, y_1)$ sont respectivement

$$\begin{aligned} & [\cos(2\varphi - \alpha) - 2 \sin(2\varphi - \alpha) \sin 2(\varphi - \alpha)] \bar{X} + \\ & + 4 \cos^2(\varphi - \alpha) \sin(2\varphi - \alpha) \bar{Y} = 2R \cos^3(2\varphi - \alpha), \\ & \cos 2(\varphi - \alpha) \bar{X} + \sin 2(\varphi - \alpha) \bar{Y} = 2R \cos^2(\varphi - \alpha). \end{aligned}$$

On voit par ces équations, que les ordonnées \bar{Y}_1 et \bar{Y}_2 des points, où ces tangentes coupent la droite $X=2R$, sont déterminées par les équations

$$\begin{aligned}\bar{Y}_1 &= R \operatorname{tg}(\varphi - \alpha) [2 - \cos(2\varphi - \alpha) (\cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{ctg} 2(\varphi - \alpha))] \\ \bar{Y}_2 &= R \operatorname{tg}(\varphi - \alpha),\end{aligned}$$

d'où il résulte

$$(4) \quad \bar{Y}_1 = \bar{Y}_2 [2 - \cos(2\varphi - \alpha) (\cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{ctg} 2(\varphi - \alpha))].$$

Pour $\alpha = 0$ la dernière équation prend la forme (3) § 3, comme il le fallait.

De l'équation (4) il résulte une manière simple de construire les tangentes à la courbe C_4^0 (Fig. 3): pour en mener une au point $P(X, Y)$, faisons passer par le centre O_1 du cercle (O_1, R) une parallèle au rayon OA_0 et par le point B , point d'intersection de cette dernière avec le cercle (O_1, R), une autre parallèle à O_1A qui coupe la droite OO_1 au point C . Le segment O_1C est égal à $R [\cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{ctg} 2(\varphi - \alpha)]$. Puis, décrivons autour du point O_1 comme centre un arc de cercle de rayon égal à O_1C , qui coupe la droite O_1B au point C_1 et menons par ce point une droite perpendiculaire à O_1A qui coupe cette dernière au point D et la parallèle à OA par le point O_1 au point E , d'où il résulte $O_1D = R \cos(2\varphi - \alpha) [\cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{ctg} 2(\varphi - \alpha)]$, et par conséquent $DE = \bar{Y}_2 \cos(2\varphi - \alpha) [\cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{ctg} 2(\varphi - \alpha)]$. Traçons A_1F parallèle à AE et traçons un cercle de centre A_1 et de rayon égal à A_1F qui coupe la parallèle à OA , par le point O_1 , au point G , et projetons le point G sur la droite HH' en menant par le point G la parallèle à OO_1 ce qui nous donne le point K . Le segment $KA_1 = ED$, comme il est facile de voir, et le segment $HK = \bar{Y}_2 [2 - \cos(2\varphi - \alpha) (\cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{ctg} 2(\varphi - \alpha))]$ est égal à l'expression de \bar{Y}_1 , donc la droite KP , qui réunit les points K et P , est la tangente au point P de la courbe C_4^0 .

3. Nous avons vu déjà que la courbe C_4^0 coupe son asymptote aux points A, B et C , dont les coordonnées sont respectivement

$$(5) \quad \begin{cases} X = 2R \cos^2 \alpha \\ Y_1 = -R \sin 2\alpha \end{cases} \quad (6) \quad \begin{cases} X = 2R \cos^2 \alpha \\ Y_2 = 0 \end{cases} \quad (7) \quad \begin{cases} X = 2R \cos^2 \alpha \\ Y_3 = \frac{2R \cos^3 \alpha}{\sin \alpha} \end{cases}$$

En éliminant α entre les équations (5) et (7), on trouve les équations des courbes décrites par les points A et C , quand α varie, qui sont respectivement

$$\begin{aligned}(X-R)^2 + Y_1^2 &= R^2 \\ X(X^2 + Y_3^2) &= 2RY_3^2.\end{aligned}$$

Donc les courbes correspondantes sont le cercle générateur (O_1, R) et la cissoïde C_2 . De son côté le point B décrit le diamètre du cercle générateur (O_1, R) , si l'on varie α de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, doublement.

4. Un théorème bien connu concernant les courbes de l'ordre n^9 exprime que, si la courbe de l'ordre n ne rencontre la droite à l'infini qu'aux points cycliques ω et ω' , la droite, menée par un point arbitraire Q du plan de la courbe, coupe celle-ci en n points, et le produit des distances de ces points au point Q est une constante. Cette proposition, appliquée à la courbe C_4^0 , qui touche la droite à l'infini aux points ω et ω' , en prenant comme point arbitraire du plan le point D , où la droite $X=2R$ est tangente à cette courbe, et, en menant par ce point une droite arbitraire et en représentant par $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ et K les distances de D aux points où la droite coupe la courbe et au point quadruple O de la courbe, nous donne

$$\rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4 = K^4,$$

ce que l'on peut aisément vérifier en rapportant la courbe à des coordonnées polaires (ρ, φ) dont l'origine est le point D et l'axe polaire la droite DO . On trouve ainsi une équation du quatrième degré par rapport à ρ , dont les racines ρ_1, ρ_2, ρ_3 et ρ_4 satisfont à la condition indiquée.

§ 7. Classe des courbes (\bar{C}) conjuguée à la classe des courbes de la cissoïde (C) .

Passons maintenant à la construction d'une classe de courbes qu'on peut déduire de la classe des courbes de la cissoïde (C) et que j'ai nommée la classe de courbes (\bar{C}) conjuguée à la classe des courbes de la cissoïde (C) . Par rapport à la cissoïde cette notion a été introduite par Bellacchi¹⁰). La manière de construire cette classe des courbes (\bar{C}) est la suivante: sur chaque droite qui passe par O et par le point $P(x, y)$ de la courbe C_{2m} de la classe des courbes de la cissoïde (C) , et qui forme avec l'axe des abscisses l'angle φ , du point M où cette

⁹) Cf. loc. cit. 8), p. 32 ex. 10.

¹⁰) Bellacchi, G, Introduzione storica alla teoria delle funzioni ellittiche, Firenze, 1894.

droite est coupée par l'asymptote de la courbe, on prend le segment MP' égal au segment MP et dirigé dans le sens contraire à MP . Le lieu des points P' , qu'on obtient ainsi, est la courbe \bar{C}_{2m} conjuguée à la courbe C_{2m} . Pour trouver l'équation de la courbe \bar{C}_{2m} , prenons l'équation de la courbe C_{2m} dans sa forme polaire; en représentant par ρ le segment OP et par φ l'angle O_1OP , on voit que l'équation polaire de la courbe C_{2m} est

$$(1) \quad \rho = \frac{R}{\cos \varphi} (1 \pm \cos 2m\varphi) = \frac{2R}{\cos \varphi} \cdot \begin{cases} \cos^2 m\varphi \\ \sin^2 m\varphi \end{cases},$$

dans laquelle le signe $+$ ou la fonction $\cos^2 m\varphi$ dans sa seconde forme correspond à des nombres m pairs, et le signe $-$ ou la fonction $\sin^2 m\varphi$ dans sa seconde forme correspond à des nombres m impairs. Le segment PM sur la droite OP , qui forme avec l'axe des abscisses l'angle φ , compris entre le point P de la courbe C_{2m} et le point M , où cette droite est coupée par l'asymptote de la courbe, est égal à

$$\frac{2R}{\cos \varphi} \left(1 - \frac{\cos^2 m\varphi}{\sin^2 m\varphi} \right) = \frac{2R}{\cos \varphi} \cdot \begin{cases} \sin^2 m\varphi \\ \cos^2 m\varphi \end{cases},$$

et, par conséquent, en représentant par ρ' le segment OP' , l'équation polaire de la courbe \bar{C}_{2m} est

$$(2) \quad \rho' = \frac{2R}{\cos \varphi} \left(1 + \frac{\sin^2 m\varphi}{\cos^2 m\varphi} \right).$$

Il est bien entendu que dans cette équation la fonction $\sin^2 m\varphi$ ou $\cos^2 m\varphi$ est à employer suivant que m est un nombre pair (I) ou impair (II).

Cas I. $m = 2k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$). Dans ce cas de l'équation paramétrique de la courbe \bar{C}_{2m}

$$(2') \quad \begin{cases} x = R(3 - \cos 2m\varphi) \\ y = x \operatorname{tg} \varphi, \end{cases}$$

on déduit aisément la manière de construire la courbe: un rayon-vecteur OA est animé d'une rotation uniforme autour du point O comme centre et, sur la circonférence du cercle de rayon R et de centre O_2 à la distance de $3R$ du point O , un point P_1 est animé d'une rotation angulaire uniforme autour du point O_2 , la droite P_1Q_1 qui passe par le point P_1 perpendiculairement à OO_2 restant pendant la rotation du point P_1 toujours parallèle à elle-même; le lieu géométrique du point d'intersection P' du rayon-vecteur OA et de la droite P_1Q_1 est la courbe \bar{C}_{2m} ,

le rapport des vitesses angulaires du rayon-vecteur OA et du rayon O_2P_1 et les positions initiales de ceux-ci rapportées au centre O_2 étant données par la relation $1:(2m)_\pi$.

De l'équation paramétrique (2') de la courbe \bar{C}_{2m} on trouve son équation cartésienne en développant $\cos 2m\varphi$ en polynôme suivant les puissances de $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$ et en éliminant ceux-ci à l'aide des formules (3) du § 1. Le résultat d'élimination est l'équation

$$(3) \quad x(x^2 + y^2)^m = 2R \left\{ (x^2 + y^2)^m + x^2 y^2 \left[\binom{m}{1} x^{m-2} - \binom{m}{3} x^{m-4} y^2 + \dots \pm \binom{m}{m-1} y^{m-2} \right]^2 \right\},$$

où dans le terme à double signe $+$ correspond à m de la forme $4n+2$ et $-$ à m de la forme $4n$ ($n=0, 1, 2, 3, \dots$).

Cas II. $m=2k+1$ ($k=0, 1, 2, \dots$). Dans ce cas l'équation paramétrique de la courbe \bar{C}_{2m} est

$$(2'_{II}) \quad \begin{cases} x = R(3 + \cos 2m\varphi) \\ y = x \operatorname{tg} \varphi \end{cases},$$

d'où l'on déduit immédiatement la manière de construire la courbe \bar{C}_{2m} comme dans le cas I; seulement, la relation des données initiales du mouvement du rayon-vecteur OA et du rayon O_2P_1 est remplacée par $1:(2m)_0$, et l'équation cartésienne de la courbe \bar{C}_{2m} prend la forme

$$(4) \quad x(x^2 + y^2)^m = 2R \left\{ (x^2 + y^2)^m + x^2 \left[x^{m-1} - \binom{m}{2} x^{m-3} y^2 + \dots \pm \binom{m}{m-1} y^{m-1} \right]^2 \right\},$$

où dans le terme à double signe $+$ ou $-$ est employé suivant que m est de la forme $4n+1$ ou de la forme $4n+3$ ($n=0, 1, 2, \dots$).

Au moyen des équations (2'), (2'_{II}) ou des formes cartésiennes (3), (4) on peut déterminer les formes des courbes de la classe (\bar{C}) conjuguée à la classe des courbes de la cissoïde (C). Toutes sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses et comprises entre deux parallèles à l'axe des ordonnées, menées par les points $(2R, 0)$ et $(4R, 0)$, avec le point O comme point isolé. La seule asymptote réelle et commune à toutes les courbes de la classe est la droite $x=2R$.

§ 8. Certaines classes de cissoïdales de la classe des courbes de la cissoïde (C).

La méthode pour construire la cissoïde peut s'étendre à d'autres courbes, comme on le sait, de la manière suivante. Prenons deux courbes L_1 et L_2 situées dans un même plan et un point O de ce plan, et prenons sur chacune des droites l qui passe par le point O un point P , de manière que le vecteur OP soit égal à la différence $OP_2 - OP_1$ des vecteurs OP_2 et OP_1 des points P_2 et P_1 où la droite l coupe les courbes L_2 et L_1 . Le lieu des points P qu'on obtient de cette manière est une courbe qu'on nomme cissoïdale de L_1 et L_2 par rapport au point O . Il est évident que, si l'on change les rôles de L_1 et L_2 dans la définition précédente, on obtient la même courbe (dans une autre position) symétrique par rapport au point O . Il résulte de la définition des cissoïdales que, si $f_1(\rho_1, \varphi) = 0$ et $f_2(\rho_2, \varphi) = 0$ sont les équations polaires des courbes L_1 et L_2 , rapportées à O comme origine des coordonnées, on obtient l'équation polaire de la cissoïdale de L_1 et L_2 en éliminant ρ_1 et ρ_2 entre ces équations et la relation $\rho = \rho_2 - \rho_1$. Considérons maintenant certaines classes de cissoïdales dérivées de la classe des courbes de la cissoïde (C) et de quelques autres courbes comme il suit.

Prenons pour L_1 la courbe C_{2m} de la classe des courbes de la cissoïde et pour L_2 : 1° le cercle générateur (O_1, R) de la courbe C_{2m} , 2° la droite $x = 2R$ et 3° la droite $x = R$, et déterminons dans l'ordre indiqué leurs cissoïdales par rapport au point O de la courbe C_{2m} en distinguant les deux cas, suivant que m est un nombre pair ou impair.

Cas I₁. $m = 2k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$). Dans ce cas les équations polaires de la courbe C_{2m} et du cercle (O_1, R) sont respectivement

$$(1) \quad \rho_1 = \frac{2R}{\cos \varphi} \cos^2 m \varphi,$$

$$(2) \quad \rho_2 = 2R \cos \varphi,$$

et, par conséquent, l'équation polaire de leur cissoïdale est

$$(3) \quad \rho = \rho_2 - \rho_1 = \frac{2R}{\cos \varphi} (\cos^2 \varphi - \cos^2 m \varphi),$$

ou, en coordonnées cartésiennes,

$$(4) \quad x(x^2 + y^2)^m = 2R \left\{ x^2(x^2 + y^2)^{m-1} - \left[x^m - \binom{m}{2} x^{m-2} y^2 + \binom{m}{4} x^{m-4} y^4 - \dots \pm y^m \right]^2 \right\};$$

notons, que dans le terme avec le signe double, on doit employer le signe + ou - suivant que m est de la forme $4n$ ou $4n + 2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Cas I₂. $m = 2k + 1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Comme dans le cas I₁, les équations polaires de la courbe C_{2m} et du cercle (O_1, R) étant

$$(1') \quad \rho_1 = \frac{2R}{\cos \varphi} \sin^2 m \varphi,$$

$$(2) \quad \rho_2 = 2R \cos \varphi,$$

respectivement, on obtient l'équation polaire et cartésienne de leur cissoïdale, qui sont respectivement

$$(5) \quad \rho = \rho_2 - \rho_1 = \frac{2R}{\cos \varphi} (\cos^2 \varphi - \sin^2 m \varphi),$$

$$(6) \quad x(x^2 + y^2)^m = 2R \left\{ x^2 (x^2 + y^2)^{m-1} - y^2 \left[\binom{m}{1} x^{m-1} - \binom{m}{3} x^{m-3} y^2 + \dots \pm y^{m-1} \right]^2 \right\}.$$

Dans le terme avec le signe double dans cette dernière équation on doit employer le signe + ou - suivant que m est de la forme $4n + 1$ ou de la forme $4n + 3$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$).

Les courbes, dont les équations polaires sont (3) et (5) ou de la forme cartésienne (4) et (6), suivant que m est un nombre pair ou impair, forment une nouvelle classe de courbes que j'ai nommée, d'après la première courbe de la classe — la strophoïde, et qu'on obtient en posant $m = 1$ dans l'équation (6), la classe des courbes de la strophoïde, en désignant cette classe par (S) et la courbe générale de cette classe par S_{2m} .

Cas II₁. $m = 2k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$). L'équation polaire de la courbe C_{2m} et de la droite $x = 2R$ étant respectivement (1) et $\rho_2 = \frac{2R}{\cos \varphi}$, on trouve aisément l'équation polaire et cartésienne de leur cissoïdale, qui sont respectivement

$$(7) \quad \rho = \rho_2 - \rho_1 = \frac{2R}{\cos \varphi} \sin^2 m \varphi,$$

$$(8) \quad (x^2 + y^2)^m = 2Rxy^2 \left[\binom{m}{1} x^{m-2} - \binom{m}{3} x^{m-4} y^2 + \binom{m}{5} x^{m-6} y^4 - \dots \pm \binom{m}{m-1} y^{m-2} \right]^2.$$

Le signe + ou - dans le dernier terme est à employer comme dans l'équation (3) § 7.

De l'équation (7) on déduit la forme paramétrique de la cissoïdale

$$(7') \quad \begin{cases} x = R(1 - \cos 2m\varphi) \\ y = x \operatorname{tg} \varphi, \end{cases}$$

d'où l'on voit aisément la construction graphique de ces courbes: la relation des données initiales du mouvement est $\frac{\vartheta_1}{\vartheta_{2m}} = 1 : (2m)\pi$ correspondant au cas 2) considéré dans le § 1. De l'équation (8), en posant $m=2$, on obtient la courbe bien connue¹¹⁾:

$$(8') \quad (x^2 + y^2)^2 = 8Rxy^2.$$

Pour construire la tangente au point $P'(x_1, y_1)$ de la courbe (8'), employons la méthode dont nous nous sommes servis pour obtenir les tangentes aux points de la courbe C_4 . En représentant par $P'(x_1, y_1)$ le point de la courbe (8') et par (x_2, y_2) le point d'intersection du cercle (O_1, R) avec la droite OP' passant par le point O , et par Y_1 et Y_2 , les ordonnées des points où les tangentes au point $P'(x_1, y_1)$ de la courbe et au point (x_2, y_2) du cercle coupent la droite $x=2R$, on obtient la relation

$$(9) \quad Y_1 = Y_2 (2 + \cos 2\varphi),$$

d'où résulte la manière de construire la tangente au point $P'(x_1, y_1)$ de la courbe (8') comme dans le cas de la courbe C_4 , avec la seule différence, que le segment $Y_2 \cos 2\varphi$ doit être dirigé, en partant du point $2Y_2$ de la droite $x=2R$, dans le sens contraire à celui du cas de la courbe C_4 .

Ce résultat s'accorde avec le théorème dû à G. de Longchamps¹²⁾, lequel exprime que la droite qui passe par les points O et (x_1, y_1) de la cissoïdale, rencontre la droite donnée en un point équidistant de ceux où cette droite est coupée par la tangente à la cissoïdale au point (x_1, y_1) et par la tangente à la courbe au point (x, y) .

Cas II₂. $m = 2k + 1$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$). Les équations de la courbe C_{2m} et de la droite étant (1') et $\rho_2 = \frac{2R}{\cos \varphi}$ respectivement, leur cissoïdale a pour les équations polaire et cartésienne

$$(10) \quad \rho = \rho_2 - \rho_1 = \frac{2R}{\cos \varphi} \cos^2 m\varphi,$$

¹¹⁾ loc. cit. 1) p. 172 ou 2) p. 204.

¹²⁾ Longchamps, G. de, Association française, Congrès de Grenoble, 1885, cf. aussi loc. cit. 5). p. 18.

$$(11) \quad (x^2 + y^2)^m = 2Rx \left[x^{m-1} - \binom{m}{2} x^{m-3} y^2 + \binom{m}{4} x^{m-5} y^4 - \dots \right. \\ \left. \pm \binom{m}{m-1} y^{m-1} \right]^2$$

où dans cette dernière les signes doivent être employés comme dans l'équation (4) du § 7.

De la forme paramétrique

$$(10') \quad \begin{cases} x = R(1 + \cos 2m\varphi) \\ y = x \operatorname{tg} \varphi, \end{cases}$$

de l'équation (10) de la courbe on voit aisément la construction de cette courbe: la relation des données initiales est $\frac{\varphi_1}{\varphi_{2m}} = 1 : (2m)_0$, correspondant au cas 3) du § 1. Les courbes, données par les équations polaires (7), (10) ou cartésiennes (8), (11), forment une classe de courbes — la classe des courbes de bifolium droite (B), dont la courbe générale est désignée par B_{2m} .

Cas III₁. $m = 2k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$). Dans ce cas les équations de la courbe C_{2m} et de la droite considérée étant (1) et $\rho_2 = \frac{R}{\cos \varphi}$ respectivement, l'équation de leur cissoïdale dans la forme polaire, cartésienne et paramétrique est respectivement

$$(12) \quad \rho = \rho_2 - \rho_1 = -\frac{R}{\cos \varphi} \cos 2m\varphi,$$

$$(13) \quad x(x^2 + y^2)^m = -R \left[x^{2m} - \binom{2m}{2} x^{2m-2} y^2 + \binom{2m}{4} x^{2m-4} y^4 - \dots + y^{2m} \right],$$

$$(14) \quad \begin{cases} x = -R \cos 2m\varphi \\ y = x \operatorname{tg} \varphi. \end{cases}$$

De l'équation (14) il résulte que la courbe est le lieu du point d'intersection P d'un rayon-vecteur, tournant uniformément autour de O comme centre, avec la droite $P_1 Q_1$ passant par le point P_1 perpendiculairement à OO_1 , P_1 étant animé d'une rotation angulaire uniforme sur la circonférence du cercle de centre O et de rayon égal

à R , la relation des données initiales du mouvement, celles-ci rapportées au centre O , étant

$$\frac{\vartheta_1}{\vartheta_{2m}} = 1 : (2m)\pi.$$

Cas III₂. $m = 2k + 1$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$). Dans ce dernier cas les équations polaire, cartésienne et paramétrique de la cissoïdale de la courbe C_{2m} et de la droite $x = R$, dont les équations sont (1') et $\rho_2 = \frac{R}{\cos \varphi}$, sont respectivement

$$(15) \quad \rho = \rho_2 - \rho_1 = \frac{R}{\cos \varphi} \cos 2m \varphi,$$

$$(16) \quad x(x^2 + y^2)^m = R \left[x^{2m} - \binom{2m}{2} x^{2m-2} y^2 + \binom{2m}{4} x^{2m-4} y^4 - \dots - y^{2m} \right],$$

$$(17) \quad \begin{cases} x = R \cos 2m \varphi \\ y = x \operatorname{tg} \varphi, \end{cases}$$

et la manière de construire ces courbes est donnée par la relation des données initiales du mouvement

$$\frac{\vartheta_1}{\vartheta_{2m}} = 1 : (2m)_0.$$

Les cissoïdales données par les équations (12), (15) sous la forme polaire ou par (13), (16) sous la forme cartésienne forment une classe des courbes — la classe (S'), dont la première courbe est la strophoïde

$$x(x^2 + y^2) = R(x^2 - y^2),$$

qu'on obtient en posant $m = 1$ dans l'équation (16).

Ainsi nous avons obtenu par de simples transformations de la classe des courbes (C) trois nouvelles classes des courbes (S), (B) et (S') qui sont toutes rationnelles, c'est-à-dire, de genre $p = 0$ comme les courbes de la classe (C).

Dans les cas considérés I et III, les cissoïdales sont de la forme

$$x(x^2 + y^2)^m = R \varphi_1^m(x^2, y^2),$$

c'est-à-dire, de la même forme que les courbes de la classe (C), mais dans le cas II, elles sont respectivement de la forme

$$(x^2 + y^2)^m = 2R x y^2 \varphi_2^{m-2}(x^2, y^2)$$

ou

$$(x^2 + y^2)^m = 2R x \varphi_3^{m-1}(x^2, y^2),$$

suivant que m est un nombre pair ou impair, en designant par $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ trois fonctions homogènes de x^2 et y^2 des degrés indiqués.

Liste des courbes.

Tableau I.	$\mathfrak{D}_1 : \mathfrak{D}_{2m}$	Equations
C_4	$1 : 4_0 (O_1, R)$	$x(x^2 + y^2)^2 = 2R(x^2 - y^2)^2$
\bar{C}_4	$1 : 4\pi (O_2, R)$	$x(x^2 + y^2)^2 = 2R(x^4 + 6x^2y^2 + y^4)$
S_4		$x(x^2 + y^2)^2 = -2Ry^2(3x^2 - y^2)$
B_4	$1 : 4\pi (O_1, R)$	$(x^2 + y^2)^2 = 8Rx y^2$
S'_4	$1 : 4_0 (O, R)$	$x(x^2 + y^2)^2 = R(x^4 - 6x^2y^2 + y^4)$
$C_4^i (O, R)$		§ 4 (3)
$C_4^i (O_1, R)$		§ 4 (4)
$C_4^p (O, R)$		§ 5 (1)
D_2	$1 : 2\pi (O_2, R)$	§ 3 (4)

Tableau II.

C_6	$1 : 6\pi (O_1, R)$	$x(x^2 + y^2)^3 = 2Ry^2(3x^2 - y^2)^2$
\bar{C}_6	$1 : 6_0 (O_2, R)$	$x(x^2 + y^2)^3 = 2R[(x^2 + y^2)^3 + x^2(x^2 - 3y^2)^2]$
S_6		$x(x^2 + y^2)^3 = -2R[x^4(x^2 - 7y^2) + y^4(7x^2 - y^2)]$
B_6	$1 : 6_0 (O_1, R)$	$(x^2 + y^2)^3 = 2Rx(x^2 - 3y^2)^2$
S'_6	$1 : 6\pi (O, R)$	$x(x^2 + y^2)^3 = R[x^4(15y^2 - x^2) + y^4(y^2 - 15x^2)]$

Tableau III.

C_8	$1 : 8_0 (O_1, R)$	$x(x^2 + y^2)^4 = 2R(x^4 - 6x^2y^2 + y^4)^2$
\bar{C}_8	$1 : 8\pi (O_2, R)$	$x(x^2 + y^2)^4 = 2R[(x^2 + y^2)^4 + 16x^2y^2(x^2 - y^2)^2]$
S_8		$x(x^2 + y^2)^4 = -2R[x^2(x^2 + y^2)^3 - (x^4 - 6x^2y^2 + y^4)^2]$
B_8	$1 : 8\pi (O_1, R)$	$(x^2 + y^2)^4 = 32Rx y^2(x^2 - y^2)^2$

Tableau IV.

C_4^0		§ 6 (1), (2), (3)
C_2	$1 : 2\pi (O_1, R)$	$x(x^2 + y^2) = 2Ry^2$
\bar{C}_2	$1 : 2_0 (O_2, R)$	$x(x^2 + y^2) = 2R(2x^2 + y^2)$
$C_2^i (O_1, R)$		§ 4 (2)

Présenté à la faculté le 4 octobre 1935.

Kāda plaknes algebrisko līkņu klase ar kārtu $p = 0$.

Kopsavilkums.

Eižēns Leimanis.

DARBA SATURS.

Ievads	1
§ 1. Cisoīdas līkņu klases (C) grafiskā konstrukcijas metode	2
§ 2. Cisoīdas līkņu klases (C) vispārīgās īpašības	3
§ 3. Līkne C_4	4
§ 4. Līkņu C_2 un C_4 inversās līknes C_2^i un C_4^i	5
§ 5. Līknes C_4 polāri-reciprokā līkne C_4^p	6
§ 6. Asimetriskā līkne C_4^0	7
§ 7. Cisoīdas līkņu klasei (C) saistītā līkņu klase (\bar{C})	8
§ 8. Dažas cisoīdas līkņu klases (C) cisoīdāju klases	9

Ievads. Šeit norādu īsos vilcienos uz augstāko pakāpju algebrisko līkņu teorijas attīstību, kuŗa kā disciplīna ir vēl diezgan maz izpētīta. Šā darba nolūks ir pavairot pazīstamo augstāko pakāpju algebrisko līkņu skaitu, kā arī mūsu pašreizējās zināšanas par tām.

§ 1. ir apskatīta algebrisku līkņu veidošana pēc atsevišķa doc. J. Vitola kga līkņu kinematiskā konstrukcijas paņēmiņa. Aizrādītā kārtā konstruēto līkņu bezgalīgo daudzumu, raugoties pēc tā veidošanas paņēmiņa, kā arī pēc tanī sastopamo līkņu analītiskā rakstura, esmu nosaucis, pēc pirmās šinī līkņu kopībā sastopamās līknes ar zemāko pakāpi -- cisoīdas, par cisoīdas līkņu klasi (C), dodot arī jebkuŗas šīs līkņu klases (C) līknes C_{2m} vienādojumu. Visas šīs klases (C) līknes ir nepāru pakāpes un racionālas, t. i. ar kārtu $p = 0$.

§ 2. esmu apskatījis vispārīgos vilcienos līkņu klasi (C) un pierādījis sekojošas 4 fundamentālas teorēmas, kuŗas ir 4 pazīstamo teorēmu attiecībā uz cisoīdu C_2 vispārinājums jebkuŗai šīs klases līknei C_{2m} :

I. teorēma: Laukums, ierobežots no līknes C_{2m} un tās reālās asimptotas, ir vienāds ar $3m$ -kārtīgu līknes veidotāja riņķa laukumu.

II. teorēma: Laukuma, ierobežota no līknes C_{2m} un tās reālās asimptotas, smaguma centrs daļa līknes simmetrijas asi 2 daļās, sadalot to attiecībā 5 : 1, skaitot no līknes virsotnes.

III. teorēma: Tilpums, kas veidojas līknei C_{2m} rotējot ap tās reālo asimptotu, ir vienāds ar m -kārtīgu tora tilpumu, kas veidojas līknes veidotājam riņķim rotējot ap līknes asimptotu.

IV. teorēma: Tilpums, kas veidojas laukumam, ierobežotam starp līkni C_{2m} un tās reālo asimptotu, rotējot ap ordinātu asi, ir vienāds ar $5m$ -kārtīgu tora tilpumu, kas veidojas līknes veidotājam riņķim rotējot ap to pašu taisni.

§ 3. ir tuvāk pētīta līkne C_4 , kuŗa pēc cisoīdas C_2 , kā pazīstamas līknes, ir nākošā apskatītā līkņu klasē sastopamā līkne ar zemāko pakāpi. Šeit esmu atrisinājis dažus atsevišķus jautājumus zīmējoties uz šo līkni, kā arī devis metodi tangentes konstrukcijai jebkuŗā šīs līknes punktā, lietojot cirkuli un līnijālu. Šinī § apskatīti arī vispārīgā veidā 5 punktu kollīneāritātes noteikumi jebkuŗai racionālai 5. pakāpes līknei, lietojot tās parametrisko formu.

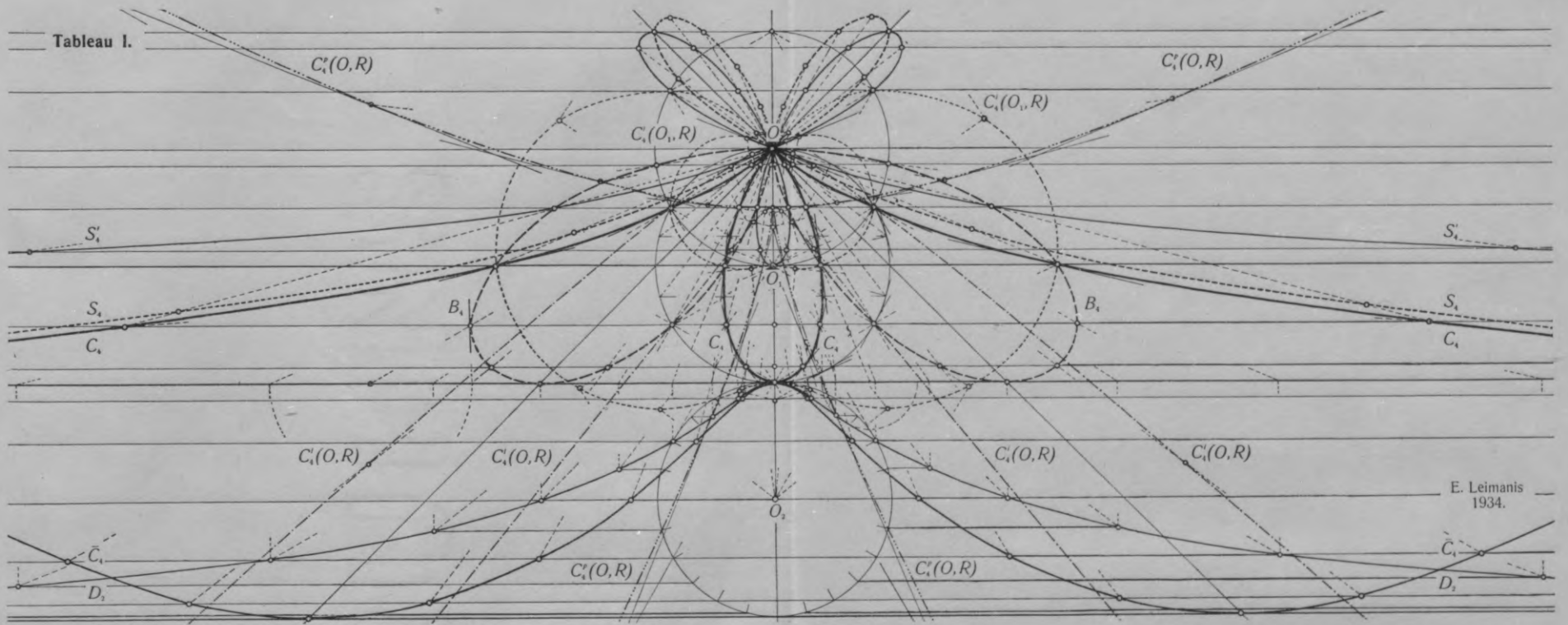
§§ 4. un 5. esmu konstruējis dažas līkņu C_2 un C_4 inversās līknes un pēdējās polāri-reciproko līkni C_4^p .

§ 6., vispārinot § 1. skicēto līkņu konstrukcijas paņēmienu, esmu apskatījis līknei C_4 atbilstošo tās asimetrisko formu C_4^0 , vispārinot arī § 3. aizrādīto tangentes konstrukcijas paņēmienu jebkuŗā līknes punktā ar cirkuļa un līnijāla palīdzību.

§§ 7. un 8. apskatītas dažas līkņu klases (C) transformētās līkņu klases; tā § 7. ir atvasināta cisoīdas līkņu klasei (C) saistītā līkņu klase (\bar{C}), lietojot šo apzīmējumu vārda nozīmē kā to lietojis Bellacchi attiecībā uz cisoīdu C_2 , pie kam ir aizrādīta arī šīs līkņu klases kinēmatiskā veidošana. Līkņu klase (\bar{C}), tāpat kā klase (C), sastādās no nepāru pakāpes racionālām līknēm. § 8. no cisoīdas līkņu klases (C) ar pazīstamas transformācijas palīdzību esmu atvasinājis trīs jaunas līkņu klases, apzīmējot tās vienkāršības dēļ ar (S), (B) un (S'), kas ir cisoīdas līkņu klases (C) cisoīdāju klases attiecībā uz līkņu klases (C) veidotāju riņķi, tās reālo asimptotu un taisni caur šīs līkņu klases veidotāja riņķa centru paralēli tās asimptotai. Līkņu klases (S) un (S') ir nepāru pakāpes, bet klases (B) līknes pāru pakāpes racionālas līknes; klasēm (B) un (S') aizrādīta arī šo līkņu kinēmatiskā veidošana neatkarīgi no līkņu klases (C), kā tās konstruējis arī doc. J. Vītola kgs. Šai § dots arī paņēmiens, analogs § 3. lietotam, tangentes konstrukcijai pazīstamās līknes B_4 — taisnas divlapas jebkuŗā punktā lietojot cirkuli un līnijālu.

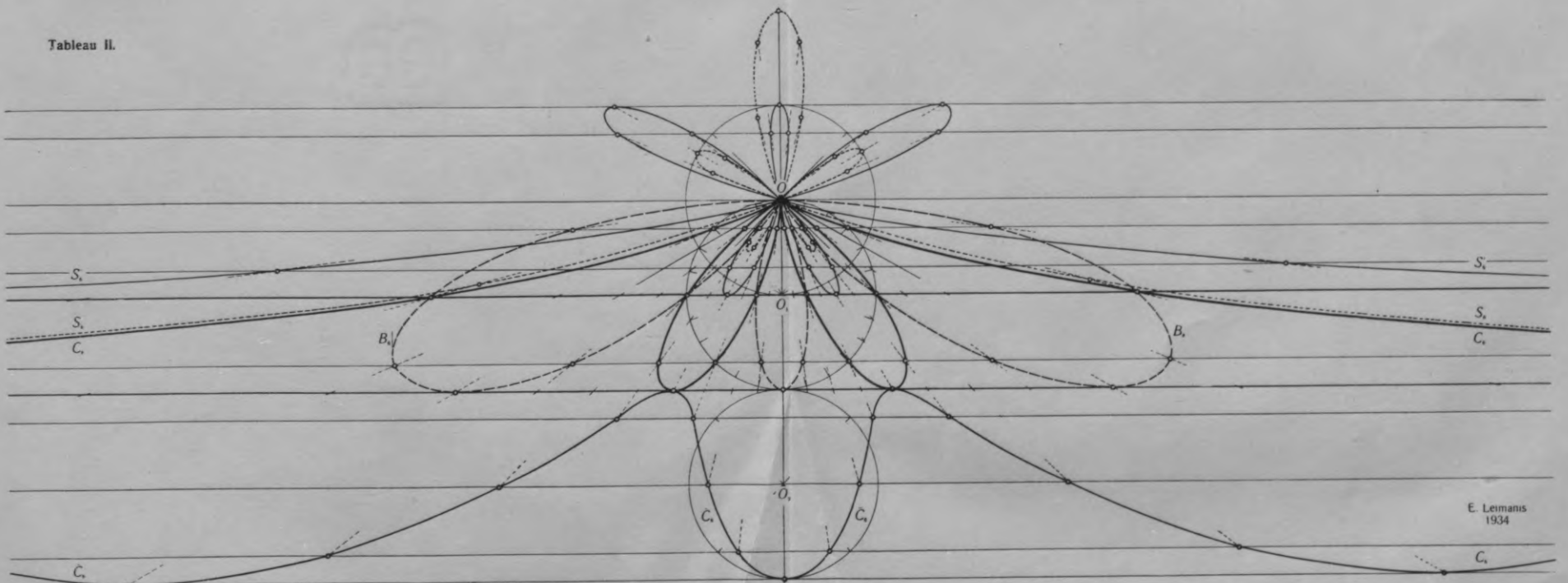
Pie daudziem šinī darbā neskartiem jautājumiem, zīmējoties uz šeit apskatītām jaunām līknēm, mans nodoms atgriezties vēlāk.

Tableau I.



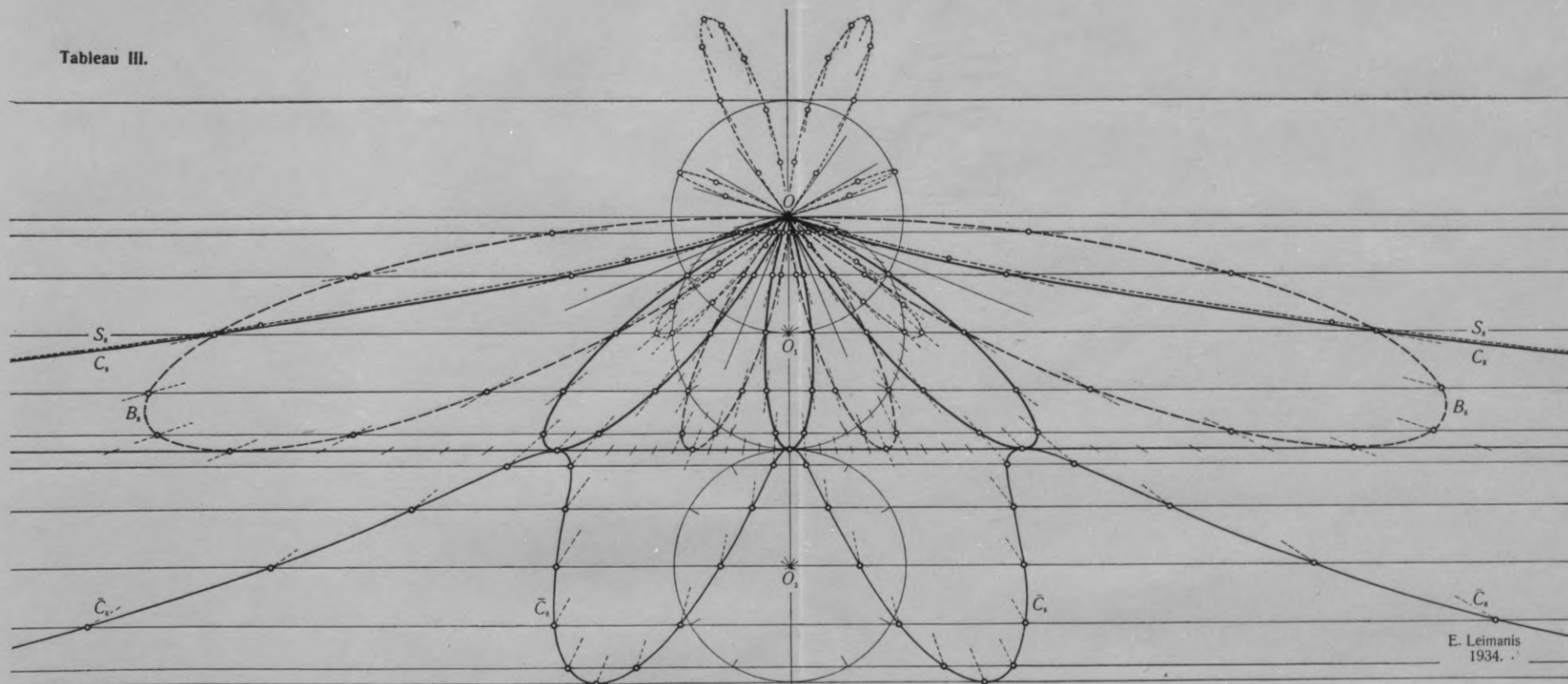
E. Leimanis
1934.

Tableau II.



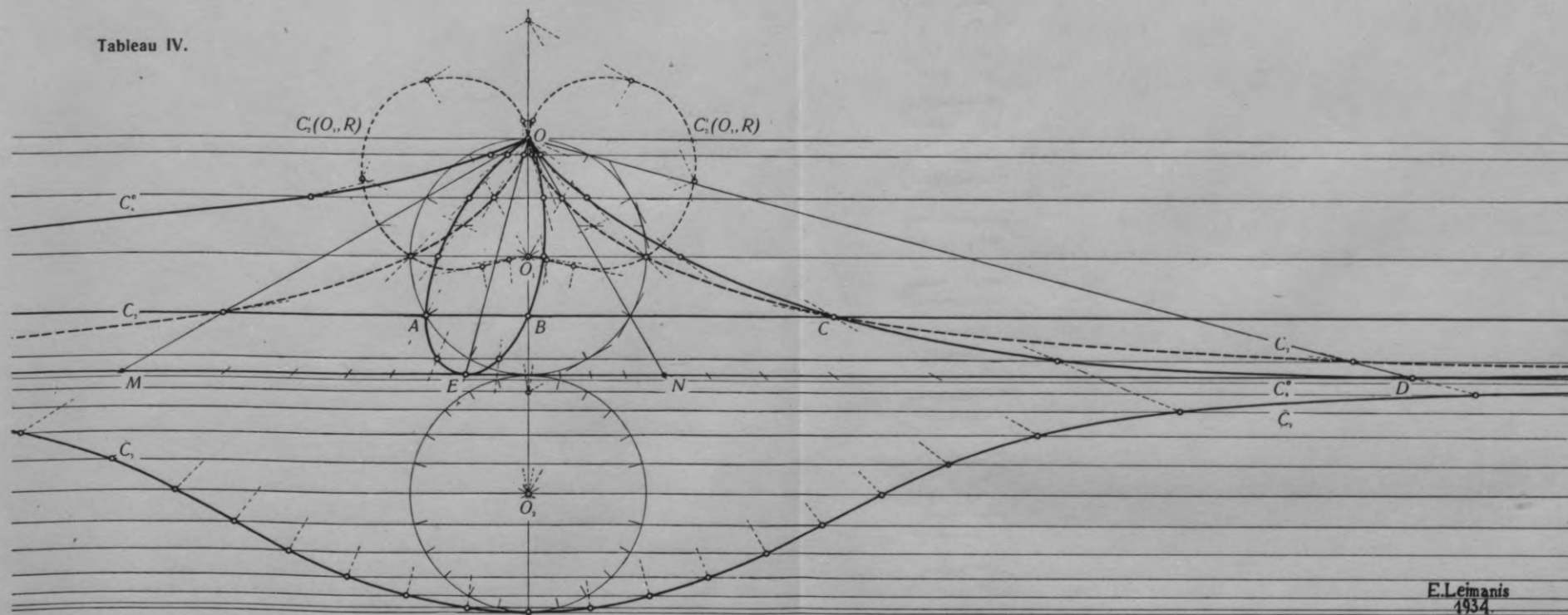
E. Leimanis
1934

Tableau III.



E. Leimanis
1934.

Tableau IV.



E. Leimanis
1934.

Frictional effects in thermodynamic calculations

by *B. Bružs.*

In the preceding paper I have dealt with the subject of the diffusion element in a way, which closely followed the previous historic development and which consequently laid particular stress on the mechanistic model of the system. To be able, however, to demonstrate clearly the generality of the new argument and its application to systems, where the previous theoretical treatment has been following more abstract lines, it may be advisable to present the problem already discussed in the preceding paper, in another short, though comprehensive way, abstracted from unnecessary mechanistic complications. It will be seen that three successive steps have to be distinguished in the solution of the problem.

1. The first step we take, is the step by which Gibbs and Helmholtz laid the foundations to theoretical electro-chemistry and which we shall call the reversibility assumption. This assumption declares that every electrical difference of potential ΔE , measured under compensation conditions at the terminals of a "chemical" or other system, represents a *free energy* measure of that possible process, which is balanced by this *EMF*. Should the absolute value of the *EMF* be increased, then the infinitesimally small resulting current will cause the process to take place in that direction, which is connected with a (chemical) accumulation of free energy in the system. Conversely: a decrease of ΔE will cause the process to take place in the direction of a loss of free energy by the system, and this energy will be transferred to the source of the electrical potential (which we shall call the dynamo). These processes of exchange of free energy ΔF will in all cases of an actual passage of current be connected with *heat effects* of two types: 1) heat exchanges with the surroundings dependent on the current in the same way as the just mentioned free energy exchanges, and re-

lated to them by the second law relation, connecting latent energy exchanges to free energy exchanges: $-\Delta F = z \mathfrak{F} \Delta E = \int \Delta S dT(1)$ where for all homogeneous systems $T\Delta S$ will represent the net Peltier effect of the process, a quantity usually comparable to the free energy change, when the system considered is electrochemical, and 2) frictional effects, with undetermined characteristics.

For an application of the "reversibility assumption" to electrochemical problems dealing with equilibrium systems, i. e. such systems, where no spontaneous processes take place, when the circuit is open, these *heat* effects are of secondary interest, and one needs only to establish by purely analytical methods and by an application of Faraday's law of electrolysis, the actual significance of the process balanced by ΔE . Nevertheless these effects have also been measured and separated into the two groups mentioned, using the fact that the Peltier effects (at large) contrary to the frictional effect, change sign on reversal of current.

The reversibility assumption is capable of an experimental test in several ways e. g.: by combination of ΔE measurements of a certain system with corresponding $\frac{d\Delta E}{dT}$ measurements one calculates, as a consequence of the reversibility assumption and the 2nd Law, the enthalpy of the reaction ΔH :

$$\Delta H = \Delta F + T\Delta S = -z \mathfrak{F} \left(\Delta E - T \frac{\partial \Delta E}{\partial T} \right) \dots \dots (2)$$

which is a quantity subject also to calorimetric determination.

Many coinciding determinations of ΔH by the two independent methods serve as brilliant proofs both of the second law and of the reversibility assumption¹.

¹ Proof that the Gibbs-Helmholtz assumption is an arbitrary (though correct) step, follows from the consideration, that dE might as well be a measure of a frictional resistance. It is the recognition of the existence of a set of effects which change sign on the slightest deviation of dE in opposite direction that suggested the reversibility assumption. The question of the frictional resistance was unfortunately not followed up. It is only our third step (the reciprocity assumption) by which this question is settled.

2. There are many systems however where definite ΔE values are observable under compensation conditions, and where furthermore the processes caused by a passage of a current can also be established, but where the systems themselves are not in equilibrium. So e. g. in the diffusion element, where a diffusion process is constantly taking place. Since a spontaneous diffusion process must be recognized as a source of free energy, we must determine the role of this source in the balance between the electrical energy of the dynamo and the accumulation of chemical energy in the system. This problem is solved by the *non-interaction assumption*. Recognizing the fact, that even in the previously discussed equilibrium systems there is no absolute stability (e. g. even in the Weston element, there must exist, though infinitesimally small it may be, a diffusion of Hg_2SO_4 to the Cd electrode and a resulting spontaneous reaction), we may equally well go a step further by making no discrimination between smaller and larger irreversible processes in the system and omit the restriction of equilibrium entirely.

The characteristics of the diffusion element themselves, seem to offer sufficient proof of this standpoint, because the balancing dE_{diff} of a diffusion element is a material constant and a function only of the composition difference $d \ln N$. [dE_{diff} , e. g. is not dependent on the length of the conducting cylinder, whereas diffusion linearly decreases with this length, which means that the absolute value of diffusion can be varied to any extent without affecting the characteristic value of $dE_{\text{diff}} = \chi d \ln N$.

This is Helmholtz's step, according to which only those processes need to be considered in the free energy balance, which appear and disappear, when the balancing *EMF* is changed in either direction and which consequently belong to the sequence of effects representing the mechanism of the process.

Applied to the diffusion element, this argument leads to the following simple conclusion. The Hittorf electrolytic conduction supplies the evidence for the fact, that the passage of a current i following an increase of dE , results in a transport of $i(1-t)$ units of solute against the concentration gradient. Conversely we find that a decrease of dE leads to a transport of $i(1-t)$ units of solute along the concentration gradient.

This then apparently represents the energy-storing chemical process of the system, since all other processes represent no accumulations of free energy. Such e. g. are the *migrations* of the ions, connected with frictional Joule effects and the transfers of electrode material from one electrode to the other. Spontaneous diffusion, which though inavoidably proportional to the conductivity of the system and though connected with free energy changes, is omitted from the balance, since it is not initiated and also not affected by the infinitesimally small currents necessary to find dE .

In a case of a dilute solution Helmholtz's non-interaction assumption applied to the just described evaluation of processes, directly leads to the formula — work done by dynamo is equal to the accumulation of free energy in the system:^d

$$-z_+ \mathcal{F} dE^+ = t_- \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \ln N_2} d \ln N_2 (3)$$

The simple and plausible non-interaction assumption has stood a rigid test during the many years that have passed since its announcement in 1877 and has finally been incorporated in Nernst's theory of galvanic elements. Moreover its reliability is strengthened by the fact, that it really coincides with the entirely similar postulate so successfully used by Lord Kelvin for the solution of the thermoelement, where thermal conduction is left out from the balance of free energy changes, though this conduction varies with form factors in the same way as the electric current and though it by itself represents a source of available energy. The criterion for neglecting thermal conduction is the same, as the criterion for neglecting diffusion, i. e. the not-belonging to the sequence of effects caused by small currents near the compensation point.

We used the Helmholtz' argument so far as the argument affects free energy changes. When the question is raised about the energy relations between all of the effects caused by the current i. e. including the thermal ones, further conclusions can be drawn regarding latent heat effects, though they have never been developed by the osmotic theory, which is mostly concerned with the mechanisms of the effects.

Actual processes are always enthalpy changes and consequently all free energy changes, considered by the osmotic theory,

will have to be complemented by thermal effects, corresponding to the change of entropy of transferred substances. If (in analogy to the thermoelement) no more effects are postulated, than the Peltier effect and the homogeneous latent heat effect), accompanying the Hittorf transport of solute, the following interesting situation results:

We explained that the accumulative process in the diffusion element is the Hittorf transport of solute, requiring

$$t_- \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \ln N_2} d \ln N_2$$

units of free energy from the dynamo per Faraday of current. (We concentrate, for clarities sake, on cationic electrodes.)

The *corresponding latent heat effects* in sum will obviously have to correspond with this free energy effect and will conse-

quently have to be equal to $t_- T \frac{\partial \bar{S}_2}{\partial \ln N_2} d \ln N_2$ per Faraday of

current. Thus the solute transported by the Hittorf effect will arrive at its destination with a full quota of enthalpy (supplied by dynamo and surroundings). In the following process of irreversible diffusion the solute will discharge this energy to the surroundings.

When the net effect is fixed in the described way, few possibilities remain for fixing the two Peltier effects, since first of all they are of opposite sign at the two electrodes and can differ in absolute value only by an energy quantity, corresponding with the dilution of the ion reactive at the electrode. Second however the Peltier effects can be only latent heat effects, since all free energy available has already been taken in consideration. Third, we have to consider that the electrode reaction is proportional to the current i (and not to it). The last condition is that the homogeneous effects are of second order compared to the heterogeneous ones.

There results only one possibility to fulfil all conditions and to comply with the first law: The Peltier effect itself has to be equal to the change of latent energy in the process: electrode material \rightarrow ion, and the difference of the Peltier heats at the two

electrodes $T \frac{\partial \bar{S}_+}{\partial \ln N} d \ln N$ has to represent the total latent (thermal) effect $t_- T \frac{\partial \bar{S}_2}{\partial \ln N} d \ln N$. The net homogeneous effect cancels out.

From a purely formal standpoint this condition is fulfilled if

$$\frac{\partial \bar{S}_+}{\partial \ln N} = t_- \frac{\partial \bar{S}_2}{\partial \ln N} \dots \dots \dots (4)$$

$$\text{or } \bar{S}_+ + \bar{S}_- = t_- \bar{S}_2 + t_+ \bar{S}_2 = \bar{S}_2 \dots \dots \dots (5)$$

i. e. if the transport numbers are representative of the manner in which the thermodynamic properties (e. g. entropies) of the electrolytes are composed from the thermodynamic properties of the ions.

As a consequence of this, one can eliminate t from the Helmholtz-Nernst equation and we obtain the purely thermodynamic expression

$$\chi^+ = -\frac{1}{z_+ \mathfrak{F}} t_- \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial \ln N_2} = -\frac{1}{z_+ \mathfrak{F}} \frac{\partial \bar{F}_+}{\partial \ln N_2} \dots \dots \dots (6)$$

This result, striking as it may seem to all acquainted with the diffusion element from a standpoint of the osmotic theory only, is however a direct consequence of the two mentioned assumptions, which both are recognised by the osmotic theory. Evidence for the assertion, that no new arbitrary elements have been introduced in the present argument, is provided by the following relation, which according to our findings exists between the dE of the diffusion element and the electrolytic Peltier effect.

We found: $dE_+ = -\frac{1}{z_+ \mathfrak{F}} \frac{\partial \bar{F}_+}{\partial \ln N} d \ln N$ which is the same as

$$dE = \frac{1}{z_+ \mathfrak{F}} \frac{\partial}{\partial \ln N} \int \Delta S dT \cdot d \ln N = \frac{\partial}{\partial \ln N} \int \frac{\pi}{T} dT \cdot d \ln N \dots (7)$$

when a series of two elements (cationic and anionic) is considered.

Comparing this formula with Lord Kelvin's equation for the thermoelement

$$dE = \frac{\partial}{\partial T} \int \Delta S dT = \frac{\partial}{\partial T} \int \frac{\pi}{T} dT \cdot dT \dots \dots \dots (8)$$

we find that they are both in principle the same and express only the condition of the second law, relating free energy changes with the corresponding entropy changes

$$z \mathcal{F} dE = -d\Delta F = d\left(\int \Delta S dT\right) \dots \dots \dots (9)$$

The only difference lies in the circumstance, that in the diffusion element the two electrode processes take place at different concentrations, whereas in the thermoelement the two electrode processes take place at different temperatures.

By this explanation of transport numbers the puzzling question of H. A. Lorentz about the significance of the non-thermodynamic t in a *thermodynamic* theory, definitely disappears and new formulae can be given for the interrelations of energy and potential quantities in the diffusion element, which do not involve any but purely thermodynamic quantities.

3. There is however some evidence available to the effect, that the two assumptions so far introduced, fail to explain all of the phenomena established.

Experiment shows, that the characteristic relation between voltage and concentration difference observable under *compensation* conditions is paralleled by another relation between the same quantities, also independent of form factors, but observable under conditions of a finite characteristic "*residual current*" (polarised cell). The question arises, whether new material constants can be obtained from these new sets of experimental values, and the negative answer to this question we call the *reciprocity assumption* to indicate that in the concentration — polarization system just mentioned, we are dealing with the same sequence of effects, which we met in the diffusion element.

This new assumption has had its test in frequent application to electrochemical problems, but its paramount significance for the consideration of the balance of effects in the stationary systems, seems to have entirely escaped the attention, which is due to it. As a matter of fact one easily sees that in the stationary system, represented by a polarized cell, it becomes impossible to avoid the consideration of the frictional Joule heat and the re-

cognition of its origin in the extra energy loss by the dynamo. Detailed balance then shows the following unambiguous situation²: The dynamo loses per unit time free energy $idE_r = idE_{\phi}^+ + idE_j^+$, idE_{ϕ}^+ (equivalent to it_-dE_s) is temporarily stored as free energy by the electrolyte transferred in the Hittorf effect and then lost to the surrounding in the diffusion process; idE_j^+ is directly lost as primary Joule effect to the surroundings.

The result of this is that the Joule heat appears in the energy balance as an effect which like all other effects caused by dE is a linear function of i . This apparent contradiction to the usual statement, that the Joule heat is proportional to i^2 is due to the fact, that the *residual current* is *not* connected with the voltage across the cell (which is as we said a form independent function), but with the actual diffusion velocity, which *is* a function of the form of the cell.

² A detailed balance of the energy effects in a polarized cell is given elsewhere. The reciprocity relation rests there on the utilisation of the two apparently established conditions: dE_s of a cell remains unaltered by an exchange of electrodes:

$$dE_s = dE_{\phi}^+ + dE_d^+ = dE_{\phi}^- + dE_d^- \dots \dots \dots (a)$$

and since in these two cells diffusion is unaltered, the wattage of the polarization effect must be the same in both cases:

$$dE_{\phi}^+ dE_d^+ = dE_{\phi}^- dE_d^- \dots \dots \dots (b)$$

The two conditions combined give

$$dE_{\phi}^+ = dE_d^-$$

$$dE_{\phi}^+ + dE_{\phi}^- = dE_d^+ + dE_d^- = dE_s \dots \dots \dots (c)$$

Conditions (a) and (c) are used and tested by the osmotic theory.

Although there seems to be available no unambiguous experimental material for the solution of the present problem, we now prefer to introduce instead of assumption (a) a purely "frictional voltage" dE_j and correspondingly a dynamo wattage idE_j characteristic for frictional effects. It seems that dE_j must be distinguished from the "voltage" determining residual currents (dE_d). This latter one is in no primary relation to the potential of the dynamo but is really derived from diffusion and form factors. Due to the fact that diffusion and electrical conduction both represent transport phenomena effected by the same energy carriers and following a common general law of motion, it happens that dE_d is in a simple connection with dE_{ϕ} ($dE_d^+ = dE_{\phi}^-$).

The consideration of the energy relation in the polarized cell permits not only to establish unambiguously the rather unexpected relations between reversible and irreversible effects caused by a small current in a compensated cell, but permit also by an introduction of the diffusion coefficient to connect the purely thermodynamic material constants with frictional and dynamic material constants.

This follows from the consideration, that in a stationary state the wattage of the polarization effect has to be equal to the loss of free energy by diffusion or

$$\frac{q}{l} \cdot \alpha dE_{\Phi}^+ dE_d^+ = \frac{q}{l} c \delta \frac{\partial F_2}{\partial \ln N_2} (d \ln N_2)^2$$

$$\text{or } \chi_d^+ = \frac{\delta c}{\alpha t} z \mathfrak{F} \dots \dots \dots (10)$$

4. The natural question which remains to answer is the question about the significance of the reciprocity assumption.

Let us consider the polarized cell from the standpoint of the dynamo. We have a constant dE_r and decide to annihilate the energy supplied by the dynamo by short circuiting the dynamo through a polarized cell. The evidence available shows that the current and the speed of energy annihilation will depend solely on the length (and form) of the cell. The longer the cell the smaller diffusion, current and energy annihilation, but the interrelation of effects remains the same, i. e. they all remain Pletier effects, Hittoni effects, Joule heat, diffusion and homogeneous effects. The reciprocity relation requires, that *independent of velocity of annihilation of the energy of the dynamo all effects remain in a constant proportion.*

The result is novel and pregnant of consequences in so far, as the list of effects includes the Joule heat, which differs from the rest of the effects not only in its apparent proportionality with i^2 , but also by its non-vectorial character.

5. For clarities sake we shall add some remarks about the relation of our theory to the previous theories. The Helmholtz-Nernst-Planck-Lewis formula (3) proves to be correct, but on account of its complicated derivation based on models, it fails to reach the simple and final form (6) completely free from dynamic factors. The elaborated results which can be obtained, when the

reciprocity assumption is introduced, have been anticipated to a large degree by Nernst. Nevertheless even here, due again to incomplete utilisation of the assumptions, the final (dynamic) formula (10) has been missed.

— The weakness of the osmotic theory, particularly as regards the energetics of the effects, has led to controversies and unclarity. From this standpoint Eastman's introduction of heats of transfer promised in its beginnings an elucidation of the problem. Unfortunately, however, his idea included several weak points, which should be clear from the following description, which connects up with Eastman's original ideas. When a molecule of solute is transferred from one place to another (not differing in chemical potential), it carries along with it *its own* enthalpy (free energy plus latent energy). Should the molecule arrive at a place of higher chemical potential, then it has to be supplied from an (external) source by a free energy contribution (polarization effect) and it will spontaneously supply itself from the surroundings by the necessary amount of latent energy (homogeneous latent heat effect). Conversely — should a molecule spontaneously travel to a point of lower chemical potential — then it loses the excess of enthalpy, which it possessed above its (partial) enthalpy value at the point of lower chemical potential.

When a stationary system is considered as an over-all process *including* diffusion, then no accumulation takes place and all effects *can* be looked upon as belonging to one of the two classes: frictional effects at large and latent heat effects. The latent heat effects will be connected only with the material which experiences an onesided transport and will appear as a homogeneous effect and as the Peltier effects. Their net effect will have to be zero to comply with the energy law, since their energy is supplied and regained by the surroundings, and since no accumulation in the system can take place. The frictional effects on the other hand are supplied by the dynamo and have in sum to be equal to the loss of energy by the dynamo and to the corresponding gain of thermal energy by the surroundings.

According to the present investigation, they are proportional to the free energy difference of the transferred substance at the extreme states of transfer and independent of the direction of

transfer, and also of the mechanism of transfer (electrical or diffusive). We find furthermore that for the stationary state of a polarised cationic cell, the total energy loss by the dynamo is idE_r , where dE_r which includes the *frictional* (Joule) *voltage* ($dE_j^+ = 2t_+ dE_\phi^+$), is independent of form factors.

Comparing energy relations of a cell in two states, once with cationic, the other time with anionic electrodes we easily conclude and verify, that the free energy loss for diffusion (the polarization effect) idE_ϕ is the same in both cells, whereas the primary Joule loss $idE_j = 2itdE_\phi$ will be smaller in the cell having the electrode of the slower moving ion (smaller t , larger Hittorf yield).

6. The detailed analysis of the preceding sections will prove fruitful, when we apply the experience gained, to the solution of the thermoelement.

As long as we consider equilibria in the emission of electricity from hot bodies, we apply the equilibrium assumption of section 1, when, however, the thermoelement is being considered, a new factor in form of the irreversible heat flow appears. Lord Kelvin was the first to announce here the non-interaction assumption, declaring that the heat flow, though very large it may be in comparison with the thermoelectric effects accompanying it, does not by itself belong to the sequence of effects constituting the thermoelement insofar as change of current direction does not initiate an appearance of heat flow nor even its modification. The same is indicated by the fact that dE_ϕ , corresponding to a certain dT , is not a function of the value of the heat flow, and the latter can be varied in arbitrary limits, without affecting the material coefficient

$$\Delta \varepsilon_\phi = dE_\phi/dT.$$

A consequence of this assumption is, that the electrode processes (Peltier effects), have to be in the second law relation with the electrical effects on the dynamo:

$$idE = i\Delta\pi \cdot \frac{dT}{T} \quad \text{and} \quad \Delta\varepsilon_\phi = \frac{dE}{dT} = \frac{\Delta\pi}{T}.$$

The difference of the two Peltier effects at the two electrodes

$$i \frac{\partial \Delta\pi}{\partial T} dT = i\Delta\varepsilon_\phi dT + iT \frac{\partial \Delta\varepsilon_\phi}{\partial T} \dots \dots \dots (12)$$

is contributed partly by the dynamo ($i \varepsilon_s dT$), the rest constitutes the homogeneous electro-thermal (Thomson) effect, where

$T \frac{\partial \Delta \varepsilon_s}{\partial T} = \Delta \tau$ is an independently determinable coefficient. The

question about the form of the Joule effect remains left out of consideration and Lord Kelvin explicitly omits it as an effect, which contrary to the effects mentioned, is supposed to be quadratic in i .

7. When, however, the reciprocal (electro-thermal system) is considered, we find a new form — independent relation between dE and dT , which it is true, has not been investigated experimentally, but which has been often times justly postulated.

The electrothermal system consists of two vires thermally insulated along the entire length and at one of the junctions, the other junction including the dynamo is placed in a large reservoir of perfect conductivity and constant temperature. Depending on dE_s of the dynamo, a constant form — independent value of dT ensues at the junction.

Here again the question arises, whether we are dealing with an experimental situation, permitting the determination of a new material constant, or whether the material constants already introduced, determine the situation. The reciprocity assumption introduced in section 3, decides this question in the negative and we only have to search for an interpretation of $\Delta \varepsilon_s = dE_s/dT$.

In the formulae of the thermoelement, all coefficients appear as differences of material constants, characteristic for the two leads. The existence of the thermoelectric series, however, which proves the independence of the individual coefficients, permits to attribute the coefficients directly to the individual leads. According to our experience with the diffusion element, we expect now that in the electro-thermal system all effects will reappear, which we have considered in the compensation system and that the balance of effects will be such, that all effects will be linear in i and furthermore, that the Joule heat will make no exception. The difference of the Joule heat compared to the other effects, will consist only in its independence from current direction, i. e. where in the overall balance of effects, for every effect there will appear *differences* of the coefficients, characteristic for each lead, there the Joule heat will appear as a *sum* of the coefficients.

We now easily construct the following balance:

All effects are proportional to i and we need consequently to consider only a balance of voltages.

The dynamo supplies for polarization ($\Delta \varepsilon_{\varphi} dT$) and for friction ($\Sigma \varepsilon_{\varphi} dT$).

The first of these contributions goes towards the Peltier effect, which becomes $\Delta \varepsilon_{\varphi} dT \cdot \frac{T}{dT} = T \Delta \varepsilon_{\varphi} = \Delta \pi$ i. e. of a higher order, than both of the effects just mentioned. The latter of these appears as Joule heat in the lead and, without affecting by its second order magnitude the heat flow, flows off together with the large heat flow $\Delta \pi$, supplied by the Peltier effect at the junction. The Thomsa effect $\Delta \tau dT$ is again a second order effect, compared to the Peltier effect. The heat taken for it from the surroundings, constitutes the last component of the excess of Peltier heat at the hotter junction and then travels with the normal heat flow into the reservoir.

This is the only possible balance of effects permitted by the three assumptions, and it introduces the extremely interesting possibility to observe experimentally not only $\Delta \varepsilon_{\varphi}$ in the usual compensation arrangement, but also $\Sigma \varepsilon_{\varphi}$ in the reciprocal stationary system. As a matter of fact dE_s gives directly $2\varepsilon_{\varphi}' dT$, where ε_{φ}' concerns the lead with the larger ε_{φ} ³. A simple consideration shows that on reversal of current in the electro-thermal system the heterogeneous effects only exchange roles, and that the polarization energy apparently is delivered at the electrode.

8. To solve the problem of a connection between ε_{φ} and the conductivity coefficients, one can either use the method of a *posteri* justification used in another investigation^k, or investigate the problem first set by Kohlrausch, who found that when a thermally and electrically insulated wire is shortcircuiting a dynamo of the *EMF* dE , a definite form — independent maximum value dT appears in the wire. Kohlrausch was surprised by this result, the characteristic features of which are resembling the ones already

³ The experimentally observed value of dE_s will not depend on the efficiency of thermal insulation in the limits, where dT will not deviate from linearity.

discussed in most of the sections of this paper and speaks about a "naturgegebene Beziehung" between voltage and temperature.

Since however in this problem we deal only with effects familiar from the thermoelement, we should be able to solve it by the use of our assumptions, particularly assumption 3, which excludes the possibility of new material constants. The relation found to exist (cf. Kohlrausch) between dE (per lead) and dT (maximum actual) is:^k

$$(dE)^2 = 2 \frac{\lambda}{\alpha} dT \dots \dots \dots (13)$$

In the derivation of this equation no use has been made of the second law. To introduce the latter we compare our single lead of the insulated wire with a corresponding wire of an electro-thermal stationary system. In the electro-thermal system, where we deal with a reversible transport of heat, the transported heat is related to the Joule heat in the ratio $dT^2/(2dT)^2$. Replacing in the case of the insulated wire the reversible transport by an irreversible process of blocking the normal heat flow, a new constant ratio will ensue, increased due to irreversibility by dT/T and due to: heat flow = twice blocked heat, by the factor 2, we finally obtain the new ratio 2. This means that the Joule heat in a single insulated lead becomes equal to twice the corresponding Peltier effect of an electro-thermal system:

$$(dE)^2 = \varepsilon^2 dT^2 = 2\varepsilon \pi dT$$

Combining this with (13) we obtain:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha T}} \dots \dots \dots (14)$$

From a purely formal standpoint, we find here a formula announced in 1899 by C. Liebenow. Unfortunately, however, the assumption underlying his derivation were contradictory to the classical theory and in many cases fallacious and so it happened that this formula has not received further attention, mostly probably because C. Liebenow's argument led him to expect a dependence of λ (the thermal conductivity of a substance) on the current traversing the system. Thus equation (14) according to

Liebenow can be used for a calculation of ε only when the thermal conductivity λ is determined for the special current used⁴.

Our treatment of the subject makes λ entirely independent from the electrical current and ε determinable directly from λ and α measured under ordinary conditions.

At the present moment the strongest argument in favour of this formula seems to be the fact, that it happens to be a complete analogue of the dynamic equation for the Helmholtz's coefficient (10). Both equations express the fact that the characteristic coefficients of stationary systems represent ratios of respective conductivities.

9. In electro-chemical practice the situation has never been questioned that the diffusion element in conjunction with data depending on purely mechanistic assumption (transference numbers, diffusion coefficients, mobilities) could yield such purely thermodynamic information as the free energy of dilution of electrolytes. More so the results obtained in this way have been chequed against data from unambiguous thermodynamic methods.

This stage has not yet been reached in the investigations of thermoelectricity. This is surely due to the difficulty of calculating the individual Seebeck coefficients of metals, as long as theory fails to give an interpretation of the stationary system. It is hoped that the result of section 7 will soon prove useful in this direction and establish a contact between thermoelement and thermionics.

The thermodynamic interpretation of the thermoelectric coefficients is very simple indeed, when the electron is recognised

⁴ The conflux theory leads Liebenow finally to a statement which invalidates the whole significance of his formula by assuming the existence of an interaction between thermal and electrical current, such that λ becomes a function of the electrical current: p. 648 „Nun aber entspricht in meiner Grundformel

$$\frac{dE}{dT} = \pm 0,24 \sqrt{\frac{RL}{T}},$$

die Leitfähigkeit L nur der Wärmeleitfähigkeit bei gleichzeitigem Vorhandensein des elektrischen Stromes. Da man aber aus Mangel an Beobachtungsdaten bisher hierauf nicht hat Rücksicht nehmen können, so liegt vielleicht hierin der Grund, warum bis jetzt die berechneten elektromotonischen Kräfte in vielen Fällen von den beobachteten bedeutend abweichen."

as energy carrier. Lord Kelvin identified already in ϵ the entropy and in τ the specific heat of electricity.

This interpretation has been endorsed by investigations, covering low temperature ranges, where individual ϵ and τ behave very much like the corresponding thermodynamic functions of ordinary substances, moreover it seems, that the 3rd Law is apparently applicable, a fact — which might find an unexpected explanation since it is *partial* quantities which we are concerned with in thermoelectricity.

Equation (14) seem also endorsed by these measurements inasmuch as the Wiedemann-Franz coefficient $\frac{\lambda}{\kappa T}$ resembles an entropy function in its dependence on temperature, and it would not be surprising, if λ and $1/\kappa T$ individually would prove a measure of entropy.

10. Very instructive is the application of the new treatment to the solution of the otherwise extremely complex phenomenon called the Ludwig-Soret effect. In this effect one observes form — independent concentration differences, caused in electrolytes by applied temperature differences.

I have shown in another paper that only a process of concentration change, can be responsible for the heat exchanges at the walls. This process will amount to a latent energy change, since no source of free energy is available.

Since there is no one-sided transport of material, there will be no net homogeneous latent effects. Since there is no external free energy source, all energy-carrying components will be at equal chemical potential, and there will consequently be no frictional effects. In sum there will be no homogeneous effects.

The first law now requires that the energy exchanges at the two endwalls are equal, or that

$$\frac{\partial}{\partial N} T \frac{\partial \bar{S}}{\partial N} dN = \frac{\partial}{\partial T} T \frac{\partial \bar{S}}{\partial N} dT \dots \dots \dots (15)$$

in conformity with previous findings.¹

The solution of the problem of stationary states, as I pointed it out in previous papers, is connected with the question of an extension of thermodynamics.

L. Boltzmann was one of the first to demonstrate this in his investigation of the thermoelement, where he proves that Lord Kelvin's results, though in accord with the 1st and 2nd Laws, do not *follow* from thermodynamics without the introduction of limiting conditions.

The present paper shows futhermore, that the fundamental assumptions of Gibbs and Helmholtz and the non-interaction assumption (which was introduced independently by Lord Kelvin for the thermoelement and by Helmholtz for the diffusion element) do not bring the solution of the problem to the stage, where the reciprocity phenomenon would find an explanation comparable in generality to the generality of the phenomenon itself.

The characteristics of the phenomenon may be now defined to the effect, that very frequently, *different relations between potential functions* are observable by simple exchange of the sources of available energy in systems composed of the same material elements, and consisting apparently of a sequence of the same elementary effects. E. g. diffusion element \rightarrow electro-diffusive system; thermoelement \rightarrow electro-thermal system.

All these relations have the striking property, to be independent of form factors of the system.

An interesting result is obtained, when the idea is followed through, that these coefficients are determined by already defined material constants and that from them no new material properties can be derived.

It appears that the *theories* of Lord Kelvin and of Helmholtz-Nernst have failed to take into account the specific properties of residual currents, which, as the present investigation shows, are not determined by the voltage at the terminals, but only by the irreversible process of thermal conduction or diffusion. This leads

to the situation that these theories leave frictional effects undetermined and the energetics of residual currents unsolved.

The new assumption, which due to its connection with the reciprocity phenomenon we called the *reciprocity assumption*, discovers as a base of the phenomenon the neglected properties of residual currents and the energetics of the accompanying frictional effects.

From the evidence adduced it follows, that the sequence of effects forming a stationary system (in the sense of the non-interaction assumption) includes the frictional (Joule) effect as an effect, linear in i like the other effects and differing from them only in the fact, that it does not change sign on reversal of current.

The characteristic coefficient (voltage) of this primary frictional effect, is dependent on the absolute difference of free energy of the energy carrier in its extreme positions, but is independent of the sign of this difference and of the mechanism of transfer, as long as the transfer is connected with a reversible accumulation of free energy (c. f. section 8).

Presented to the Faculty 1935.

Bibliography.

- a H. v. Helmholtz Berl. Ber. 26. XI. 77 gives the first formula introducing t.
- b W. Nernst Zt. physikal. Chemie 2, 613, 1888; 4, 129, 1889 announces the kinetic treatment of galvanic elements.
- c M. Planck Wied. Annalen 39, 161, 1890; 40, 561, 1890, elaborates Nernst's theory.
- d G. N. Lewis and M. Randall Thermodynamics, 337, 1923 give the formulae in their generalized form (equation 3 of this paper).
- e H. A. Lorentz „Les théories statistiques en thermodynamique“ § 45. Teubner, Leipzig 1916 has recognized this „quelque chose de paradoxal“ in the appearance of the t's in a thermodynamic equation, but he has not recognized the fact, that the formulae of the osmotic theory entirely depend on the definite knowledge of *actual* components of the system (e. g. H^+ , n^+ , aq). The formulae not requiring a knowledge of the energy carriers we call thermodynamic. On the other hand we call „dynamic“, in a sense of an *extension* of classical thermodynamics, those formulae which imply a knowledge of energy carriers.
- f E. D. Eastman J. Am. Chem. Soc. 48, 1482 (1926); 49, 792, 1927; 50, 283, 292, 1928.
- g F. Kohlrusch Ann. d. Phys. 1, 132, 1900.
- h L. Boltzmann. Sitz. Ber. Akad. Wien 96, II, 1258, 1888.
- i C. Liebenow. Ann. d. Phys. 2, 636, 1900.
- j B. Bružs. Zt. physikal. Chem. A. 155, 392, 1931; A 162, 42, 1932.
- k B. Bružs. Phil. Mag. (7) 16, 248, 1933, Acta Univ. Latv. KFS II, 10, 1934. Proc. Royal Soc. A, 151, 640, 1935.

to the situation that these elements have fractional effects undetermined and the emergence of residual currents involved.

The new system, which has no connection with the ordinary phenomenon of called the reciprocal compensation, is called as a *Berze*.

Berzes termodinamiska aplēse.

B. Bružs.

Kopsavilkums.

Nepaplašinot klasiskās termodinamikas postulātus, stacionāras sistēmas kvantitatīvi nav aplēšamas. Pie šās atziņas nāk jau L. Boltzmann's, analizējot lorda Kelvin'a termoelementa teoriju.

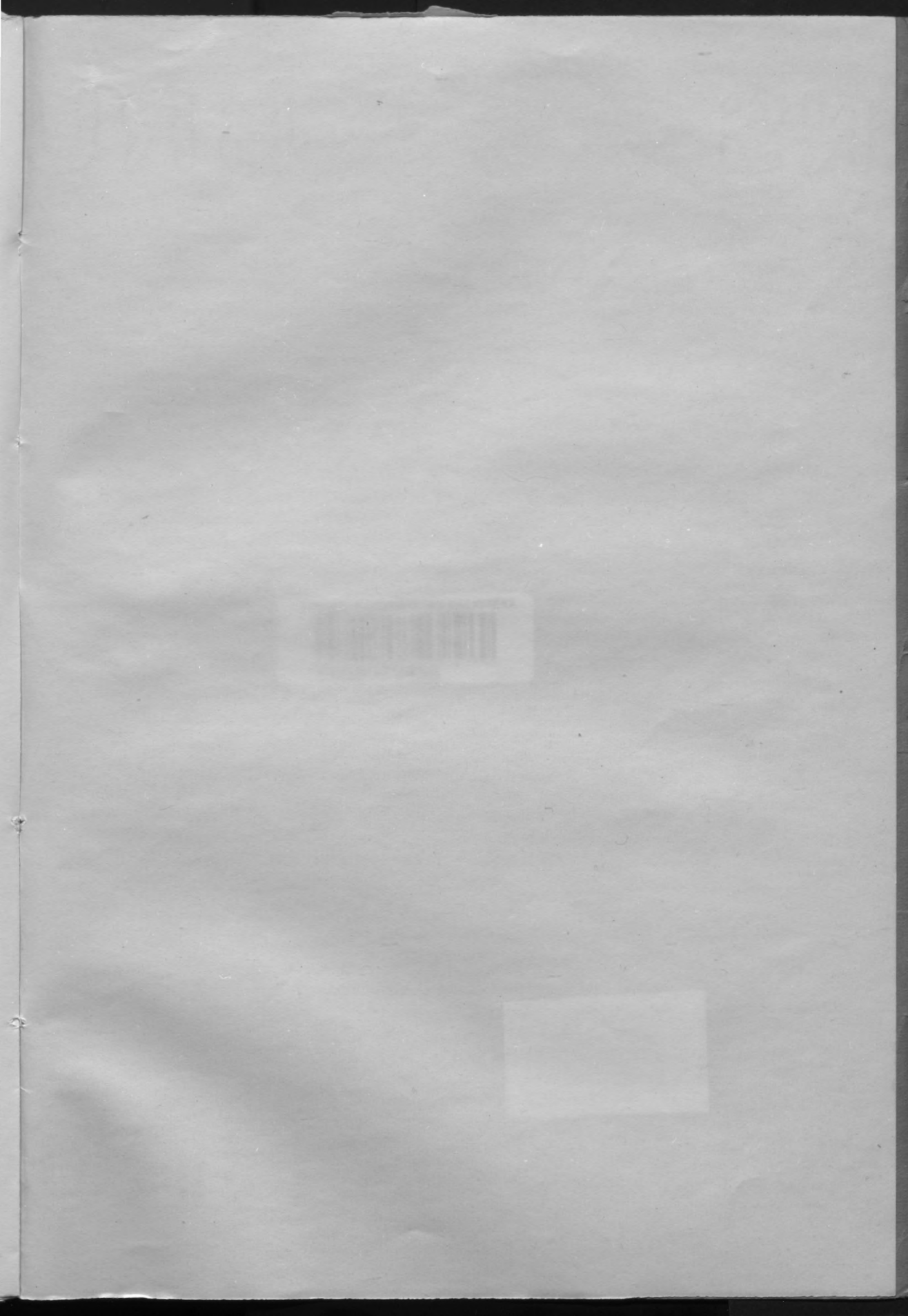
Par svarīgu termodinamikas paplašinājumu jāuzskata lorda Kelvin'a un Helmholtz'a savstarpējās neiedarbības postulāts, ar kuru palīdzību minētie pētnieki atrisinājuši vairākas problēmas tādās sistēmās, kur potenciālu attiecības tiek noteiktas kompensācijas ceļā.

Bet minētais postulāts nesniedz tik tālu, lai ar tā palīdzību varētu atrisināt arī interesanto reciprocitātes fenomenu, sakarā ar kuru tīri eksperimentāli iespējams noteikt vairākas no formas neatkarīgas potenciālu attiecības vienā sistēmā.

Izejot no eksperimentāliem aizrādījumiem, ka šinīs attiecībās neslēpjas jaunas vielu īpašības, un analizējot apstākli, ka stacionārajās sistēmās „paliekošās strāvās“ atkarīgas vienīgi no formas faktoriem, autors atrod par iespējamu un nepieciešamu ievest stacionāru efektu bilancē arī berzi, kā paliekošās strāvas pavadošu termisku efektu.

Aplēse pierāda, ka berze stacionāro sistēmu bilancē ir proporcionāla strāvai un materiālu raksturojošam koeficientam. Šinī ziņā tā analoga visiem citiem stacionāro sistēmu efektiem.

Zināma enerģijas nesēja berze proporcionāla šā enerģijas nesēja brīvās enerģijas absolūtai starpībai ekstrēmos stāvokļos, bet neatkarīga no šās starpības zīmes un neatkarīga no mēchanisma, ar kādu enerģijas nesējs pārvietojas.



Berzes termodinamiska aplēse.

B. Brals.

Kopsavilkums.

Nepaplašinot klasiskās termodinamikas postulātus, stacionāras sistēmas kvantitatīvi nav aplēšamas. Pie šīs atziņas nāk jau L. Boltzmann's, analizējot lorda Keivin'a termoelementu teoriju.

Par svarīgu termodinamikas paplašinātumu jāuzskata lorda Keivin'a un Helmholtz'a savstarpējās qaradarbības postulāts, ar kura palīdzību minētie pētnieki atrisinājuši vairākas problēmas tādās sistēmās, kur potenciālu atbilstības tiek noteiktas kompensācijas ceļā.

Bet minētais postulāts nesniedzas tik tālu, lai ar tā palīdzību varētu atrisināt arī interesanto reciprociāles fahnomēnu sakarā ar kuru šīri eksperimentāli iespējams noteikt vairākas no formas neatkarīgas potenciālu atbilstības vienā sistēmā.

Izejot no eksperimentāliem aizrādījumiem, ka šāds atbilstības neslēpjas jaunas vielu īpašības, un analizējot apstākli, ka stacionārajās sistēmās „paliekošās strāvas” atkarīgas vienīgi no formas faktoriem, autors atrod par iespējamu un nepieciešamu levest stacionāru objekto bilancē arī berzi, kā paliekošās strāvas pavadošu termisku efektu.

Aplēse pierāda, ka berze stacionāro sistēmu bilancē ir proporcionāla strāvai un vērtējam raksturojošam koeficientam. Šim zinā ir analoga visiem citiem stacionāro sistēmu virktnēm.

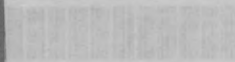
Zināma enerģijas nesēja berze proporcionāla šai enerģijas nesēja brīvās enerģijas absolūtai stārpībai ekstrēmos stāvokļos, bet neatkarīga no šās stārpības zīmes un neatkarīga no mehānisma, ar kādu enerģijas nesējs pārvietojas.

LATVIJAS UNIVERSITĀTES BIBLIOTĒKA



0509079456

LU bibliotēka



220041774

249456

LŪR mat. II.	AUL math. II.
Nr. 6. B. Bružs. A Theory of the Diffusion Element	385
Difūzijas elementa teorija	398
Nr. 7. A. Putns. Sur la rotation permanente de la surface ellipsoïdale d'une masse fluide hétérogène	399
Par heterogenas šķidras masas ellipsoidālās virsmas permanento rotāciju	407
Nr. 8. Eugène Leimanis (Eižens Leimanis). Sur une classe de courbes planes algébriques de genre $p = 0$	409
Kāda plaknes algebrisko līkņu klase ar kārtu $p = 0$	448
Nr. 9. B. Bružs. Frictional effects in thermodynamic calculations	451
Berzes termodinamiska aplēse	470